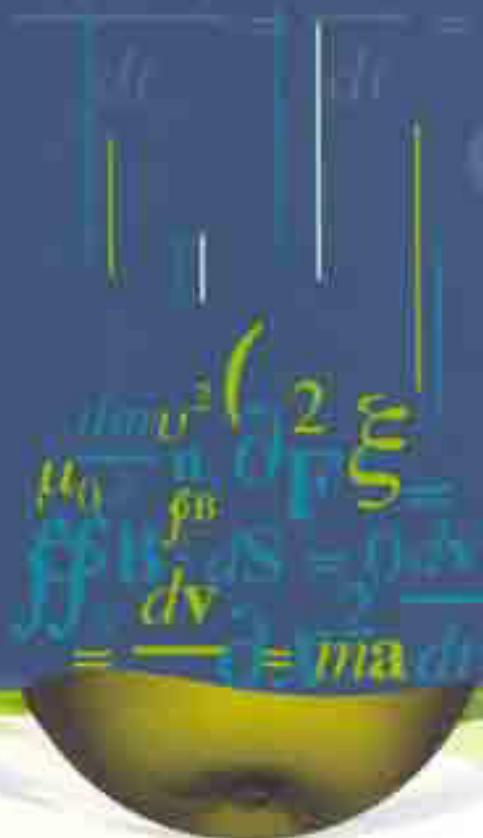


Fisika Orokorra

2. argitalpena

UEUko
Fisika Saila

J.R. Etxebarria
(arg.)



Udako Euskal Unibertsitatea

FISIKA OROKORRA

2. argitalpena,
zuzendua eta berregokitua

Argitalpenaren prestatzailea:

J. R. Etxebarria

UEUko Fisika Saila:

J. M. Agirregabiria

A. Duoandikoetxea

M. Ensunza

J. R. Etxebarria

O. Ezenarro

J. M. Pitarke

A. Trancho

P. Ugalde

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2003

© Udako Euskal Unibertsitatea

© Jose Ramon Etxebarria

ISBN: 84-8438-045-9

Lege-gordailua: BI-3194-03

Inprimategia: RGM, Bilbo

Azalaren diseinua: Iñigo Aranburu

Hizkuntza-zuzenketa arduraduna: Jose Ramon Etxebarria Bilbao

Banatzailcak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxe. 944793039

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.org

www.ueu.org

Zabaltzen: Igerabide, 88 DONOSTIA

Aurkibidea

Lehenengo argitalpeneko aitzinsolasa	19
Bigarren argitalpeneko aitzinsolasa	23
1. Kontzeptu eta ideia orokorrak	25
1.1. Espazioa eta denbora Fisika Klasikoan	25
1.2. Magnitude fisikoak. Eskalarrak eta bektoreak	26
1.3. Gainezarmenaren printzipioa	27
1.4. Oinarrizko magnitudeak eta magnitude eratorriak	27
1.5. Unitate-sistemak	29
1.6. Dimentsio-ekuazioak	29
2. Kalkulu bektoriala	33
2.1. Erreferentzia-sistemak	33
2.2. Eskalarrak eta bektoreak	35
2.3. Bektore askeen aljebra	36
2.3.1. Bektoreen batuketa	36
2.3.2. Eskalar baten eta bektore baten arteko biderkaketa	37
2.3.3. Bektore baten osagaiak	38
2.3.4. Osagai kartesiarrak	39
2.3.5. Kosinu zuzentzaileak	39
2.3.6. Posizio bektorea	40
2.3.7. Bektoreen baturaren osagaiak	40
2.3.8. Biderketa eskalarra	40
2.3.9. Biderketa bektoriala	43
2.3.10. Hiru bektoreen arteko biderketa mistoa	46
2.4. Kurtsore-sistemak	47
2.4.1. Kurtsore baten momentua	47
2.4.2. Espazioko aldaezinak	49
2.4.3. Momentu minimoa eta ardatz zentrala	50
2.5. Zenbait kasu berezi	52
2.5.1. Sistema konkurrentea	52

2.5.2. Sistema planokidea	53
2.5.3. Kurtsore paraleloz osaturiko sistema	55
3. Puntuaren zinematika	57
3.1. Puntu material baten higiduraren abiadura eta azelerazioa	57
3.1.1. Abiadura	59
3.1.2. Azelerazioa	62
3.2. Azelerazio konstanteko higidura	63
3.3. Azelerazioaren osagai tangentiala eta osagai normala	69
3.3.1. Higidura zuzena	72
3.3.2. Higidura zuzen eta uniforme	72
3.3.3. Higidura abaildu orokorra	72
3.4. Higidura zirkularra: abiadura angeluarra eta azelerazio angeluarra	73
3.4.1. Abiadura angeluarra	73
3.4.2. Higidura zirkular uniforme	74
3.4.3. Azelerazio angeluarra	75
3.4.4. Azelerazio lineala	76
3.5. Higidura kurbatua planoan	77
4. Higidura erlatiboaren zinematika	81
4.1. Abiaduraren eta azelerazioaren izaera erlatiboa	81
4.1.1. Posizio bektoreak	82
4.1.2. Abiadurak	83
4.1.3. Azelerazioak	83
4.2. Translazio-higidura erlatiboa	84
4.2.1. Posizio bektoreak	85
4.2.2. Abiadura	86
4.2.3. Azelerazioa	86
4.2.4. Adibidea	86
4.3. Biraketa uniformedun higidura erlatiboa	88
4.3.1. Posizio bektoreak	89
4.3.2. Abiadurak	89
4.3.3. Azelerazioak	92
4.4. Higidura erlatibo orokorra	93
4.4.1. Translazioidun kasua	94
4.4.2. Biraketa uniformedun kasua	94
4.4.3. Coriolis-en azelerazioa	95

5. Mekanikaren printzipioak: partikularen dinamika	97
5.1. Inertiaren printzipioa (Newton-en lehen legea)	97
5.1.1. Galileo-ren transformazioa eta inertiaren printzipioa	100
5.2. Momentu lineala	100
5.3. Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa	101
5.4. Indar kontzeptuaren definizioa:	
Newton-en bigarren eta hirugarren legeak	103
5.5. Ukipen-indarrak: indar normala eta marruskadura-indarra	105
5.5.1. Marruskadura-koefiziente estatikoa	107
5.5.2. Marruskadura-koefiziente zinetikoa	107
5.5.3. Adibidea	108
5.6. Fluidoetako marruskadura-indarrak	109
5.7. Momentu angeluarra	113
5.7.1. Higidura laua	113
5.7.2. Higidura zirkularra	115
5.7.3. Momentu angeluarraren teorema	115
5.7.4. Momentu angeluarraren kontserbazioa	116
5.7.5. Higidura zuzen uniforme	116
5.8. Indar zentralak	116
5.8.1. Ardatz-indarrak	119
5.9. Sistema ez-inertzialak. Inertzia-indarrak	120
5.9.1. Adibidea	122
5.10. Lurra erreferentzia-sistema modura	123
5.10.1. Grabitate eraginkorra	125
5.10.2. Coriolis-en indarraren eragina Lurrean	126
6. Lana eta energia	127
6.1. Indarraren bulkada	127
6.2. Indarraren lana	128
6.3. Potentzia	130
6.4. Energia zinetikoa	131
6.5. Energia potentziala	132
6.6. Energia mekanikoaren kontserbazioa	133
6.7. Eremsu eskalarraren gradientea	134
6.7.1. Adibideak	138
6.8. Indar zentral kontserbakorren eraginpeko higidura	139
6.8.1. Higidura unidimentsional kontserbakorra	139
6.8.2. Indar zentralen eraginpeko higidura orokorra	142
6.9. Indar ez-kontserbakorrak	147

6.10. Energia eta oreka	147
6.10.1. Oreka egonkorra	148
6.10.2. Oreka ezegonkorra	148
6.10.3. Oreka indiferentea	149
7. Partikula-sistemen dinamika	151
7.1. Masa-zentroa eta grabitate-zentroa	151
7.1.1. Masa-zentroa	151
7.1.2. Grabitate-zentroa	152
7.2. Partikula-sistema baten masa-zentroaren higidura	153
7.2.1. Masa-zentroaren azelerazioa eta indarrak	154
7.2.2. Bi partikulaz osaturiko sistema	156
7.3. Masa laburbildua	157
7.4. Momentu angeluarraren teorema	159
7.4.1. Momentu angeluarraren adierazpena masa-zentroaren koordenatuen bidez	161
7.5. Sistema baten energia zinetikoa eta energia potentziala	162
7.5.1. Energia propioa	165
7.5.2. Energia mekaniko osoa	166
7.6. Talkak	166
8. Solido zurruna	169
8.1. Lotura-baldintzak. Sistema baten askatasun-graduak. Solido zurruna	169
8.1.1. Solido zurruna	170
8.2. Euler-en angeluak	172
8.3. Solido zurrunaren abiaduren eremua. Translazio eta biraketa hutsak	173
8.3.1. Biraketarik gabeko higidura	176
8.3.2. Labainketarik gabeko higidura	176
8.3.3. Higidura laua	177
8.4. Solidoaren momentu angeluarra. Inertzia-tentsorea	177
8.5. Inertzia-ardatza eta momentu nagusiak	179
8.6. Inertzia-elipsoidea	181
8.7. Inertzia-momentuen kalkulua	182
8.7.1. Masa diskretuz osaturiko sistema	183
8.7.2. Masa jarraituz osaturiko sistema	184
8.7.3. Biraketa-erradioa	185
8.7.4. Poinot-en formula	185

8.7.5. Steiner-en formula	186
8.7.6. Inertzia-momentu polarra	188
8.7.7. Adibidea	189
9. Solido zurrunaren dinamika	191
9.1. Solidoaren dinamikaren ekuazioak.	
Indarren sistemaren tortsorea	191
9.1.1. Masa-zentroarekiko ekuazioak	192
9.2. Solido zurrunaren energia zinetikoa	194
9.2.1. Energia zinetikoa eta lana	196
9.2.2. Adibidea	196
9.3. Biraketa askea	198
9.4. Ardatz finkoaren inguruan biratzen ari den	
solidoaren higidura	199
9.4.1. Masa-zentroa ez dago biraketa-ardatzean	199
9.4.2. Masa-zentroa biraketa-ardatzean dago	200
9.5. Zenbait adibide	202
10. Estatika	205
10.1. Puntu material baten oreka-baldintzak	205
10.1.1. Sistema inertziala	205
10.1.2. Sistema ez-inertziala	206
10.1.3. Zenbait adibide	206
10.2. Solido baten oreka-baldintzak	210
10.2.1. Adibideak	211
10.3. Solidoak eta loturak	213
10.4. Lan birtualen printzipioa	217
10.5. Adibideak	219
10.5.1. Bi barraz osaturiko sistema	219
10.5.2. Lau barraz osaturiko sistema	220
10.5.3. Giltzaturiko bi barraz eta masa batez osaturiko sistema .	222
11. Elkarrekintza grabitatorioa	225
11.1. Grabitazioaren lege unibertsala	225
11.1.1. Kepler-en legeak	226
11.1.2. Grabitazioaren lege unibertsala	226
11.1.3. Cavendish-en tortsio-balantza	229
11.2. Masa inertziala eta masa grabitazionala. Baliokidetza-printzipioa	229

11.3. Ereku grabitatorioa	231
11.3.1. Ereku grabitatorioa	231
11.3.2. Gauss-en teorema	234
11.3.3. Masa esferikoak sorturiko ereku grabitatorioa	235
11.4. Energia potentzial grabitatorioa eta potentzial grabitatorioa	238
11.4.1. Energia potentzial grabitatorioa.	238
11.4.2. Potentzial grabitatorioa.	239
11.5. Indar zentral kontserbakorren eraginpeko higidura.	
Kepler-en problema	240
11.5.1. Indar zentral kontserbakorren eraginpeko higidura	240
11.5.2. Kepler-en problema	242
11.6. Zenbait adibide	247
11.6.1. Lurraren gainazaleko potentzial grabitatorioa	247
11.6.2. Lurretik jaurtiketako gorputzen ihes-abiadura	248
11.6.3. Lurraren zentrotiko r distantzietatik pausagunetik askatutako gorputzak lurrazalera heltzean izango duen abiadura ...	248
12. Elastikotasuna	249
12.1. Solidoaren barneko esfortzuak	249
12.2. Deformazio unitarioak	253
12.3. Materialen portaera	254
12.4. Hooke-ren legea. Elastikotasun-moduluak	256
12.5. Poisson-en koefizienteak	257
12.6. Malgukiak	258
12.7. Esfortzuen tentsorea	259
13. Fluidoek mekanika	263
I. Fluidoek propietateak	
13.1. Fluidoek definizioa eta sailkapena.	263
13.2. Biskositatea	266
13.2.1. Biskositatearen unitateak	267
13.2.2. Biskositate zinematikoa	268
II. Fluidoek estatika	
13.3. Presio hidrostatikoa. Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa	269
13.4. Flotazioaren arazoa	274
III. Fluidoek dinamika	
13.5. Fluxu-motak	276
13.6. Reynolds-en zenbakia	278
13.7. Jarraitutasunaren ekuazioa.	290

13.8.	Higiduraren ekuazioa korrante-lerro batean. Bernouilli-ren ekuazioa. Energiaren ekuazioa	281
13.9.	Energiaren ekuazioaren orokorpena	283
13.10.	Momentu linealaren ekuazioa	284
13.11.	Solidoen higidura fluido baten barnean	286
13.11.1.	Marruskadura-indarra eta eite-koefizientea	286
13.11.2.	Antzekotasuna eta modeloak	287
13.11.3.	Magnus efektua	287
13.11.4.	Bultzada aerodinamikoa	288
14.	Likidoen gainazalen berezitasunak	289
14.1	Gainazal-tentsioa	290
14.2.	Gainazal-unitateko energia	293
14.3.	Xafla likidoaren kurbadurari dagokion presio-desberdintasuna. Laplace-ren legea	294
14.3.1.	Xafla likido diferentziala	295
14.3.2.	Burbuila esferikoa	295
14.3.3.	Tanta likidoa	296
14.3.4.	Laplace-ren legea	296
14.4.	Likidoen gainazalen azalera minimoa	297
14.5.	Tanten sorkuntza	298
14.6.	Ukipen-angelua. Gainazal solidoen gaineko tantak	299
14.7.	Kapilartasuna. Jurin-en legea	301
15.	Higidura oszilakorra	305
15.1.	Oszilazio harmonikoak	305
15.2.	Oszilazio harmonikoaren zinematika eta dinamika	307
15.2.1.	Malguki bati loturiko partikula	309
15.2.2.	Pendulu sinplea	310
15.2.2.	Pendulu fisikoa	311
15.3.	Oszilazio harmonikoetako energia	312
15.4.	Oszilazio harmonikoen konposizioa	314
15.4.1.	Norabide eta maiztasun bereko oszilazioen konposizioa	314
15.4.2.	Norabide berbera baina maiztasun desberdinak dituzten oszilazioen konposizioa	316
15.4.3.	Norabide perpendikularretako oszilazioen konposizioa	318
15.5.	Bilakabide irungikorak. Oszilagailu indargetua	320
15.5.1.	Indargetze txikia	322
15.5.2.	Indargetze handia	323

15.6.	Oszilazio bortxatuak, Erresonantzia	323
15.7.	Oszilagailuaren inpedantzia	326
16.	Uhinak	329
16.1.	Uhin adierazpen matematikoa	329
16.2.	Uhin unidimentsional harmonikoa	331
16.3.	Uhin-motak	333
16.4.	Zenbait adibide	337
16.4.1.	Luzetarako uhin elastikoak hagaxka batean barrena ..	337
16.4.2.	Zeharkako uhinak soka batean zehar	339
16.5.	Momentu linealaren eta energiaren hedapena	341
17.	Uhinaren propietate orokorrak	343
17.1.	Interferentziak	343
17.2.	Huygens-en printzipioa	347
17.3.	Malus-en teorema	349
17.4.	Uhinaren islapena eta errefrakzioa	350
17.5.	Uhin geldikorak	354
17.6.	Uhinaren difrakzioa	357
17.7.	Doppler efektua	359
18.	Elkarrekintza elektrostatikoa	363
18.1.	Karga elektrikoa	366
18.1.1.	Karga elektrikoaren definizio operazionala	367
18.1.2.	Kargaren kontserbazioaren printzipioa	368
18.2.	Coulumb-en legea	368
18.2.1.	Adibidea	371
18.3.	Eremu elektrikoa	372
18.3.1.	Zenbait kargak sorturiko eremu elektrikoa	372
18.3.2.	Adibidea	373
18.3.3.	Eremu-lerroak	374
18.3.4.	Kargaren kuantizazioa	376
18.3.5.	Partikula kargatuaren higidura, eremu elektriko uniformean	379
18.4.	Potentzial elektrikoa	381
18.4.1.	Bi punturen arteko potentzial-diferentzia	383
18.4.2.	Potentzial elektrikoa	383
18.4.3.	V-ren eta E-ren arteko erlazioa	384
18.4.4.	Adibideak	385

18.5.	Partikula kargatuaren erlazio energetikoak, eremu elektrikoan zehar higitzen denean. Potentzial elektrikoaren unitateak	388
18.6.	Dipolo elektrikoa	388
18.6.1.	Momentu dipolarra. Dipoloaren potentzial eta eremua	389
18.6.2.	Dipoloaren gaineko emeru elektrikoaren eragina . . .	391
19.	Korronte elektriko zuzena	393
19.1.	Korronte elektriko zuzena	393
19.2.	Korrontearen intentsitatea eta dentsitatea	395
19.3.	Jarraitutasunaren ekuazioa	397
19.4.	Ohm-en legea eroaleen kasuan	398
19.4.1.	Eroankortasun elektrikoa. Erresistibitate elektrikoa. Mota desberdinetako materialak	399
19.4.2.	Hari eroale baten erresistentzia elektrikoa	400
19.4.3.	Energia-galera erresistentzia elektrikoetan. Joule-ren legea	401
19.5.	Indar elektroeragilea	402
19.5.1.	Sorgailu elektrikoa	402
19.5.2.	Hargailu elektrikoa. Indar kontraelektroeragilea	404
19.5.3.	Ohm-en legearen orokorpena	405
19.6.	Korronte zuzeneko zirkuitu anizkoitzak	406
19.6.1.	Erresistentzia elektrikoaren konbinazioen erresistentzia baliokidea	407
19.6.2.	Kirchhoff-en legeak	409
20.	Elkarrekintza magnetikoa	413
20.1	Partikula kargatu higikorren gaineko indarrak	413
20.2.	Eremu magnetikoa zeharkatzen duen partikularen higidura . . .	415
20.2.1.	$\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ paraleloak dira	415
20.2.2.	$\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ perpendikularrak dira	415
20.2.3.	$\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ bektoreek edozein angelu eratzen dute	417
20.2.4.	Adibideak	418
20.3.	Korronte elektrikoaren gaineko indar magnetikoa	420
20.3.1.	Korronte lineala	420
20.3.2.	Karga-multzo higikorrak	421
20.4.	Korronte elektrikoaren gaineko indar-momentu magnetikoa. Adibideak	421
20.5.	Korronte elektrikoak sortutako eremu magnetikoa	423

20.6.	Biot-Savart-en legearen erabileraren adibide bi	425
20.6.1.	Korronte zuzen eta mugagabeak sortutako eremu magnetikoa	425
20.6.2.	Korronte zirkularrak sortutako eremu magnetikoa ..	426
20.7.	Korronteen arteko indarrak	427
20.8.	Partikula kargatu higikorrek sortutako eremu magnetikoa	429
21.	Eremu elektromagnetiko estatikoak	431
21.1	Eremu elektrostatiakoaren zirkulazioa	431
21.2.	Gauss-en legea	432
21.2.1.	Orekan dagoen eroalea	434
21.2.2.	Karga-banaketa esferikoa	435
21.3.	Kondentsadoreak eta energia elektrostatiakoa	436
21.4.	Eremu magnetikoaren fluxua	438
21.5.	Ampère-ren legea	440
21.5.1.	Korronte elektriko zuzena	442
21.5.2.	Toru-itxurako solenoidea	443
21.5.3.	Solenoide zuzena	444
21.6.	Laburpena	445
22.	Eremu elektromagnetiko aldakorrak	447
22.1.	Higidurak sorturiko indukzio elektromagnetikoa	447
22.2.	Faraday-Henry-ren legea	450
22.2.1.	Solenoide infinitua	452
22.3.	Autoindukzioa	453
22.3.1.	R - L zirkuituaren karga eta deskarga	454
22.3.2.	Solenoide toroidalaren autoindukzioa	456
22.4.	Eremu magnetikoaren energia	456
22.5.	Kargaren kontserbazioaren printzipioa	457
22.6.	Ampère-Maxwell-en legea. Desplazamendu-korrontea	458
22.6.1.	Desplazamendu-korrontea	461
22.6.2.	Kondentsadorearen karga-prozesua	461
22.7.	Maxwell-en ekuazioak	462
23.	Korronte alternoa	465
23.1.	Korronte alternoaren sorkuntza	466
23.2.	Batez besteko balioa eta balio eraginkorra	468
23.3.	Korronte alternoaren efektuak eta ezaugarriak	469
23.4.	Korronte alternoko hargailuak	470

23.4.1.	Erresistentzia hutsa	470
23.4.2.	Korronte altermoaren adierazpen fasoriala	471
23.4.3.	Autoindukzio hutsa	471
23.4.4.	Kapazitatedun zirkuitua	473
23.5.	Korronte alternoko zirkuituak	474
23.5.1.	<i>R-L</i> serie-zirkuitua	474
23.5.2.	<i>R-C</i> serie-zirkuitua	475
23.5.3.	<i>R-L-C</i> serie-zirkuitua	477
23.5.4.	Paralelo-zirkuituak	478
23.6.	Potentzia	479
23.6.1.	Aldiuneko potentzia	480
23.6.2.	Potentzia eraginkorra eta potentzia-faktorea	482
23.6.3.	Itxurazko potentzia eta potentzia erreaktiboa	484
23.7.	Erresonantzia	485
22.7.1.	Adibidea	486
23.8.	Transformadorea	488
24.	Uhin elektromagnetikoak	491
24.1.	Uhin elektromagnetiko lauak	491
24.2.	Uhin elektromagnetikoen energia eta momentua. Poynting-en bektorea	495
24.3.	Erradiazio elektromagnetikoaren sorkuntza	497
24.3.1.	Karga azeleratuaren erradiazioa	497
24.3.2.	Dipolo elektriko oszilakorraren erradiazioa	499
24.3.3.	Antena baten bidezko erradiazio elektromagnetikoa ..	499
24.4.	Compton efektua. Fotoiak	500
24.5.	Erradiazio elektromagnetikoaren espektroa	501
25.	Termodinamikaren lehenengo printzipioa	505
25.1.	Sistema termodinamikoak. Oreka termodinamikoa	506
25.2.	Oreka termikoa. Temperatura. Termometroak	506
25.3.	Lan termodinamikoa	510
25.4.	Beroa. Bero-ahalmena	512
25.5.	Termodinamikaren lehenengo printzipioa. Barne-energia	514
26.	Gas idealak	517
26.1.	Egoera-ekuazioa	518
26.1.1.	Parametro intentsiboak eta estentsiboak	519
26.2.	Barne-energia. Joule-ren esperimientua	520

26.3.	Bero-ahalmen espezifikoak. Mayer-en erlazioa	522
26.4.	Gas ideal baten gaineko prozesu adiabatiko itzulgarriak	525
26.4.1.	Lerro adiabatikoak	526
26.4.2.	Lerro isotermaok	526
26.4.3.	Espantsio adiabatikoan eginiko lana	528
26.5.	Gasen teoria zinetikoa	529
26.5.1.	Gasen teoria zinetikorako sarrera	529
26.5.2.	Materia nolakoa den	530
26.5.3.	Higidura browndarra eta batez besteko abiadura koadratikoa	532
26.5.4.	Presioaren lorbide berria	533
26.5.5.	Tenperaturaren definizioa teoria zinetikoaren ikuspuntutik	537
26.5.6.	Boltzmann-en konstantea	538
27.	Termodinamikaren bigarren printzipioa	541
27.1.	Termodinamikaren bigarren printzipioaren enuntziatuak	543
27.2.	Prozesu itzulgarriak eta prozesu itzulezinak	549
27.3.	Carnot-en zikloa	550
27.4.	Tenperaturaren eskala termodinamikoa	553
27.5.	Clausius-en teorema	555
27.6.	Termodinamikaren bigarren printzipioaren formulazio matematikoa	557
27.7.	Entropia eta itzulezintasuna	557
27.8.	Entropiaren gehikuntzaren printzipioa	559
28.	Optika geometrikoa	561
28.1.	Argia eta Optika	561
28.2.	Argiaren ereduak	562
28.3.	Argi-izpiak. Optika geometrikoa. Argiaren abiadura eta errefrakzio-indizea	563
28.4.	Bide optikoa eta Fermat-en printzipioa	565
28.5.	Optika geometrikoaren legeak. Islapenaren eta errefrakzioaren legeak	566
28.6.	Islapen osoa	568
28.7.	Sistema optikoak. Dioptrioak eta katoptrioak	569
28.8.	Objektuak eta irudiak. Sistema estigmatikoak	570

28.9.	Notazioa eta hitzarmenak Optika geometrikoan	571
28.10.	Optika paraxiala: Gauss-en hurbilketa	573
28.11.	Dioptrio esferikoa. Abbe-ren aldaezina	573
28.12.	Lagrange-Helmholtz-en aldaezina	575
28.13.	Handipenak	576
28.13.1.	Albo-handipena	577
28.13.2.	Handipen angeluarra	577
28.13.3.	Handipen axiala	578
28.14.	Fokuak. Distantzia fokalak. Sistema baten ahalmen optikoa ..	578
28.14.1.	Dioptrio esferikoa	579
28.14.2.	Ispilu esferikoa	581
28.14.3.	Dioptrio laua	582
28.14.4.	Ispilu laua	582
28.15.	Ispilu esferikoak. Eraikuntza grafikoak	583
28.16.	Dioptrio esferikoak. Eraikuntza grafikoak	585
28.17.	Sistema zentratu baten elementu kardinalak	586
28.17.1.	Fokuak eta plano fokalak	586
28.17.2.	Puntu eta plano nagusiak	586
28.17.3.	Puntu nodalak	587
28.18.	Sistema baten distantzia fokalak eta beraien arteko erlazioak ..	588
28.19.	Ekuazio orokorrak sistema laburtuetan	589
28.20.	Lenteak	592
28.21.	Lente meheak	595
28.22.	Lente meheen sailkapena	596
28.22.1.	Konbergenteak edo hurbiltzaileak	596
28.22.2.	Dibergenteak edo urruntzaileak	596
28.23.	Eraiketa grafikoak lente meheetan	597
28.23.1.	Lente konbergenteak	598
28.23.2.	Lente dibergenteak	599
28.24.	Tresna optikoak	599
28.24.1.	Begia	599
28.24.2.	Lupa	601
28.24.3.	Okularea	603
28.24.4.	Mikroskopia	604
28.24.5.	Galileo-ren betaurreko astronomikoa	605
28.24.6.	Teleskopioa	606

A. Eranskina. Analisi bektoriala	609
A.1. Eremu eskalarrek eta eremu bektorialak	609
A.1.1. Sestra-gainazalak	611
A.1.2. Eremu-lerroak	612
A.1.3. Eremu eskalarren gradientea	613
A.2. Lerro-integrala eta zirkulazioa	614
A.3. Gainazal-integrala eta fluxua	617
 B. Bibliografia	 623
 C. Kontzeptuen eta izenen aurkibide alfabetikoa	 625

Lehenengo argitalpeneko aitzinsolasa

Eskuen artean duzun liburu hau ez da erabat berria, lehenagoko biren batuketaren eta berridazketaren ondorioa baizik. Bi liburu horien izenak *Fisika Orokorra (I)* —zeinak hiru argitalpen desberdin izan zituen— eta *Fisika Orokorra (II)* —zeina beste liburu baten bigarren argitalpen eraberritua eta hedatua izan zen— izanik, ez da harritzekoa oraingoan ere izena gordetzea, era horretako liburuen kasuan mundu osoan zehar ohikoa den modura.

Edukia dagokionez, Zientzia Fakultateetako lehenengo mailetan Fisika Orokorretako ikastaroetan ohikoak diren gaiak bildu dira bertan. Gai horien hasierako prestaketa-lana taldean egin zen bere garaian, UEUko Fisika Sailak horretarako antolaturiko mintegian zortzi irakaslek parte hartuz. Bakoitzak gai bat edo batzuen ardura izan zuen, eta gero, guztion arteko mintegietan, bateraketa eta oharrak egin genituen. Gaietako egileak desberdinak izatean, gorabeherak suma daitezke idazkeran, nahiz eta hitzen eta esateko moduen aukeraketarako irizpideak mintegian erabaki ziren eta, ondorioz, bakarrak izan. Dena dela, gure talde-lanaren berezitasun hori aberasgarria izango dela uste dugu, gorabeherak eta guzti, bertan geroko erabilerarako hainbat puntu eztabaidatu eta finkatu baititugu, horretan dihardugun irakasleen arteko adostasun-hitza emena lorturik.

Oraingo argitalpenean, lehenagoko bidetik eta lehenengo argitalpenetako liburuen erabilpenean oinarriturik, orduko lan guztien bateraketa sistematikoa egin dugu, zati askotan berridazketa osoa eginez, nahiz eta kontzeptuen garapenerako ordena gorde. Bateraketa-lan hori argitalpenaren arduradunarena izan da, eta, egia esanda, oso modu askean jokatu du.

Hizkuntzari dagokionez, liburu hau 1978. urtean hasitako prozesu luze baten emaitza da. Urte hartan euskaraz ez zegoen oraindik inolako fisika-libururik unibertsitatean erabiltzeko modukorik, eta hizkuntza bera ere trebatu beharraren aurrean zegoen. Makinaz idatziriko behin-behineko material idatziak prestatuz abiatu ginen, eta UEUren bidez lehenengo liburuak aurkeztera saiatu ginen, hizkuntzaren aldetik behin-behineko erabakiak harturik. Horiek izan ziren unibertsitatean ofizialki ematen hasi ginen lehenengo euskarazko ikastaroetarako lagun-garriak. Zorionez, ordurako UZEI elkartearen gidaritzapean oinarritzko hiztegi teknikoak prestatzen hasita geunden, eta erabili behar zen terminologiari buruz fisikarien arteko eztabaida emankorra bizirik zegoen. Bertako lankidetzan,

terminologiaz harturiko erabakiak aztertu, kritikatu eta, hainbat kasutan, zuzendu egin genituen, emaitza modura 1979ko abenduan UZEIren Fisika Hiztegia plazaraturik. Hiztegi hori behin-behineko proposamen serioa izan zen, fisikari euskaldunei zuzendua, unibertsitateko eguneroko praktikan irakaskuntzan eta ikerkuntzan erabilia izateko eta, zer esanik ez, baita abiaturik zegoen liburugintzan ere. Gure aldetik, oso kontuan hartu genuen geure lanerako, nahiz eta zenbait kasutan labur gertatu zitzaigun laster, hiztegia bera egunez egun eginez baitzihoan.

Oinarri horrekin liburu haien argitalpen berriak prestatu genituen, horietako bakoitzean praktikan eta zientzialarien arteko akordioetan harturiko erabakiak kontuan hartuz. Horretaz, unibertsitateko irakasleenarekin batera, ezin dezakegu alde batetara utz Elhuyar taldearen izena, izen bereko aldizkarian eta argitaraturiko liburuetan Fisikaren eremuko lexikologiaren arloan hainbeste ekarpen egin baititu, oso kontuan hartu ditugunak.

Dena den, beti gogoan izan dugu prestaturiko lanen behin-behinekotasuna, aldeaz aurretik lan guztiak hobegarriak direla onartuz. Hala ere, teoria fisikoen kasuan gertatu ohi denez, euskara zientifikoaren arloan ere hobekuntza-prozesuetan onena edo egokiena den ebazpena etengabeko hurbilketak eginez hurbildu ohi dela uste dugu, asintoten kasuan bezala zehaztasunetik gero eta hurbilago egonik.

Hurbilketa horietarako beharrezkoa da fisikariek elkarren berri izatea, edo, zehatzago esateko, hizkuntzaren erabilerari buruz hartzen diren erabakien berri izatea. Horregatik liburu honetan arreta berezia jarri dugu kontzeptuen aurkibide alfabetikoa prestatzean, liburu darabilen edonork modu errazean hitzen eta esamoldeen berri eduki dezan. Helburu hori bideratzeko asmoz, aurkibide alfabetiko honetan hitz soilak biltzeaz gainera, unitate lexikal konplexuagoak ere bildu ditugu. Hain zuzen ere, Fisikaren —eta zientziaren beste arloen— berezitasunetarikoa, hiruzpalau hitzez osaturiko unitate lexikalen erabilera ugaria denez, horien prestaketa euskararen erabilerarako garrantzi handiko puntua dela uste dugu, gure hizkuntzak oso bereak dituen arazoak baititu.

Gaur egun maila honetako Fisikaren euskal irakaskuntza normaltasunez burutzen ari delarik, gure hizkuntza nahiko eginda eta normalizaturik dagoela esan dezakegu, eta hori darabilten Fakultate desberdinetako irakasleen arteko batasuna oso maila handikoa dela esan daiteke. Honekin ez da esan nahi, gauzak alda ez daitezkeenik edota guztiak behin-betiko finkaturik daudenik, baina bai, ordea, *tradizio sendoa* dagoela, oraindik urte askotakoa ez bada ere, eta erabaki asko behin-betikoak izateko bidean doazela. Aurreko atalean aipaturiko aurkibide alfabetikoa erabaki horien berri ematera dator, horrelako gaitiaz idatziko duen edonork informazio eskuragarria izan dezan, edozer idazterakoan besteek zer egin duten jakinik bere aukerak egin ahal ditzan. Azken batez, hizkuntza zientifikoa

(eta horretarako darabilgun euskara 'zientifikoa') gizarte zientifikoan guztiok erabiliko dugun berba egiteko hizkera komuna izango baita; edo ez da izango.

Liburuaren itxurak berak ere badu zerikusirik geroari begira lorturiko batasun-mailarekin, oraingo argitalpenean inprimategiko aurkezpena bereziki zaindu baita. Marrazkiei dagokienez, aurreko argitalpenetakoak erabili dira, nahiz eta irudien barneko errotulazioa erabat berritu den. Irudien egileak Martxel Ensunza, Jose Ramon Etxebarria eta Patxi Ugalde izan ziren, aldi berean testuaren prestatzaileak ere izan direnak.

Bukatzeko, lehenagoko argitalpen batean erabilitako hitz berberak esanik, besterik gabe, onuragarri izango delakoan eta jarraitzaile hoberik izango duelakoan aurkeztu nahi dugu liburu hau.

Leioan, 1992ko irailaren 11n

Bigarren argitalpeneko aitzinsolasa

Hamaika urte pasatu dira *Fisika Orokorra* liburuaren lehenengo argitalpena egin zenetik, eta poztasunez esan dezakegu argitalpen hura erabat agortu dela, bolumen handi samarrekoa izan bazen ere. Poztasunez diogu, orduko lana zabaldu delako, eta hori funtsezkoa delako, are gehiago gu bezalako erkidego txiki eta gutxitu batean. Zabaldu eta erabilia izan dela esan dezakegu poztasunez, eta horrez gain, irakaskuntzaren arloan bere arrastoa utzi duela. Izan ere, fisika-gaietan erabiltzeko moduko eredu linguistikoa finkatu baita azken urte horietan, eta lan hura horretarako ekarpen baliotsua izan zela esan baitezakegu.

Nolanahi den, mundua aurrera doa eta euskarak ere bere bidea egin du azken urteotan, gero eta sendoago, irakakaskuntzan bere lekua hartu baitu, behetik gorako mailetan urtetik urtera aurrerapausoak emanez. Ondorioz, lan berriak sustatu dira, eta martxan daude Fisika Orokorren arloan hau baino lan zabalagoak, munduko hainbat unibertsitatetan erabiltzen diren liburuen itzulpenak barne. Dena dela, bestelako lan eta liburu zabalagoak eta osoagoak bidean diren arren, oraindik ere liburu honen premia sumatu da, eta arrazoi hori izan da bigarren argitalpena egitera bultzatu gaituena.

Zenbait berritasun dakartza bigarren argitalpen honek, ez agian funtsezkoak, baina berritasunak hala ere, lanaren kalitatea goratzera datozenak. Hona hemen zein diren. Batetik, bidezkoa denez, lehenengo argitalpeneko akatsen zuzenketa egin dugu; preseski, aurreko testuko erratak zuzentzen saiatu gara, eta neurri batean bederen, akats horiek zuzendu ditugulakoan aurkezten dugu oraingo argitalpena. Bestetik, euskararen beraren eguneratzea izan dugu gogoan; izan ere, azken urteotan Euskaltzaindiak hainbat erabaki hartu ditu euskararen estandarizazioarako bidean, hala nola araugintza berriko erabakiak eta Hiztegi Batuko zerrendak, besteak beste. Horiek guztiak kontuan hartu ditugu testuaren orrazketa eta zuzenketa egitean. Azkenik, liburuaren formatuari eta aurkezpenari dagozkien zuzenketez eta berregituraketaz arduratu gara; honetaz, kontuan izan dugu UEUren argitalpen-zerbitzuaren eboluzioa, eta oraingo bildumen arabera aurkezpena eta egokitzapena egin ditugu. Zernahi gisaz, errespetatu egin ditugu aurreko argitalpeneko irudiak, eta zuzen-zuzenean ekarri ditugu honetara.

Beraz, hasierako argitalpeneko asmo berberekin eta haiek betetzeko ahaleginean, UEUko Fisika Saileko kideek pozez aurkezten dugu argitalpen zaharberritu hau, aurreko hamaika urteotan bere emaitzak eman dituen lanak beste hamaikatan ere emango dituelakoan.

Bilbon 2003ko abenduaren 21ean

1. gaia

Kontzeptu eta ideia orokorrak

Lehenengo gai honetan, liburu osorako sarrera modura, Fisika Klasikoaren oinarrian dauden kontzeptu batzuen aipamena egitetik hasiko gara, magnitude fisikoak zer diren eta zer motatako objektu matematikoak diren azalduz. Gainezarmenaren printzipioaren aipamena ere egingo da hasieran, sistema linealekin duen lotura azpimarraturik.

Gaiaren bigarren partean, magnitude fisikoen balioak zehazterakoan neurketa-prozesuak duen garrantzia aipatu ondoren, Fisikaren arloko oinarritzko magnitudeak eta unitate-sisternak aipatzera zuzenduko dugu azalpena, dimentsio-ekuazioen azterketarekin bukatzeko.

1.1. ESPAZIOA ETA DENBORA FISIKA KLASIKOAN

Fisika Klasikoaren oinarrian espazioaren eta denboraren ideiak daude. Bi kontzeptu horiek intuitiboki definitu ohi dira, eta absolututzat jotzen ditugu. Fisika Klasikoaren arlotik irteten ez garen bitartean, espazioak eta denborak orain aipatuko ditugun propietateak dituztela onartuko dugu. Horrek, ordea, ez du esan nahi horrelakoak direnik; eta Mekanika Kuantikoaren edo Fisika Erlatibistaren arloetara pasatzean, kontzeptu eta propietate horiek kolokan jarriko dira.

Geometria euklidearrean finkaturik, espazioari buruzko ideia intuitiboa dugu. Espazioak hiru dimentsio dituela, isotropoa dela —hots, norabide guztietan propietate berberak dituela— eta infinitua dela onartzen dugu. Halaber, bi punturen arteko distantziarik laburrena bi puntuak lotzen dituen zuzenaren norabidean neurtzen dena dela, eta, gainera, distantzia hori neurri absolutua dela. Absolutua dela esatean, hauxe esan nahi dugu, alegia, edozein behatzailek aldiune berean bi puntuen posizioa kontsideratzean, distantzia berbera neurtuko duela. Zer esanik ez, absolututasun hori Fisika Klasikoaren arloan aintzatesten da soilik, zeren eta, Erlatibitatearen Teorian sartuz, bi punturen arteko distantzia behatzailearen abiaduraren funtzioan baitago (Erlatibitate Berezia) eta, bestalde, espazioaren kurbadura ere kontuan hartu behar baita (Erlatibitate Orokorra).

Denborarekin ere berdintsu gertatzen da. Intuitiboki jokatzuz, denbora etengabe handituz doan magnitudea dela kontsideratu ohi dugu. Magnitude hori erlojuen bidez neurtzen da. Kasu honetan ere, denbora zerbait absolututzat hartzeraz jotzen dugu, eta egin

ere, horrela egiten dugu Fisika Klasikoan. Hau da, bi gertaera puntualen artean pasatzen den denbora, edozein behatzailek neurturik, berbera izanen dela kontsideratzen dugu. Badakigu, hala ere, Erlatibitatearen Teoriaren arabera, bi gertaeren aldiberekotasuna bera ere kontzeptu erlatiboa dela.

Dena den, Fisika Klasikoan erabiltzen diren espazio eta denbora absolutuak guztiz zehatzak ez badira ere, esan beharra dago ezen kontzeptu horien erlatibotasuna abiadura handien kasuan baino nabaritzen ez dela. Hain zuzen ere, erlatibotasuna nabari dadin, abiadurek argiaren abiadurarekin konparatzeko modukoak izan behar dute. Eta Fisika Klasikoaren arloan abiadura txikiak aztertuko ditugunez, ez zaigu inolako problemarik sortuko, denbora eta espazioa absolututzat hartzeagatik.

Bestalde, Erlatibitatearen Teoria ez doa Fisika Klasikoaren aurka; aitzitik, beraren osagarria da. Eta Erlatibitatearen Teorian ageri diren formula eta adierazpenak, limitean, abiadura txikien kasuan alegia, Fisika Klasikoan ageri diren berberak dira. Honek ez gaitu harritu behar, zeren, azken batez, Fisikan azaltzen diren legeak errealitatearen hurbilketa baino ez baitira, eta guztiek baitituzte zenbait muga beren erabilpenerako.

1.2. MAGNITUDE FISIKOAK. ESKALARRAK ETA BEKTOREAK

Magnitude hitza etengabe agertuko zaigunez, lehenik eta behin horrekin adierazi nahi dugun kontzeptua definituko dugu. Zer da 'magnitude fisikoa'? Laburki esanik, *"magnitude fisikoa neurtu egin daitekeen edozer gauza da, beraren izaera gizakiaren eraginetik apartekoa izanik"*.

Bi faktore daude, beraz, magnitude kontzeptuaren definizioan. Batetik, neurtu egin daitekeen zerbait dela. Bestetik, gizakiak parte hartu gabe ere badirela; honek ez du esan nahi, noski, gizakiak alda ez ditzakeenik, izaeraz pertsonaz kanpokoak direla baizik. Zenbait magnitude aipatzearren, hona hemen batzuen izenak: abiadura, masa, denbora, indarra, lana...

Matematikoki kontsideratuz, hau da, magnitude fisikoak objektu matematiko modura hartuz, ordena desberdinetako tentsoreak direla esan dezakegu. Zerogarren ordenakoei, *eskalar* deritze, eta, hurrengo gaian ikusiko dugunez, zenbaki batez adierazten dira osorik. Eslakarren artean, denbora, lana, masa eta beste ditugu. Lehen ordenakoei, *bektore* deritze. Hauek geometrikoki definitzeko, zenbaki batez gainera, zein norabidetakoak diren ere esan behar da. Bektoreen artean abiadura eta indarra ditugu, adibidez. Badira magnitude kora-pilatuagoak ere (ordena desberdinetako tentsoreak eta beste), baina oraingoz ez du merezi horretan sakontzerik.

Edozein modutan, lege fisikoak agertzen dituzten adierazpenetako magnitudeei buruzko zenbait ohar egitea komeni da. Fenomeno fisikoak eredu matematikoen bidez aztertzen dira, Matematika baita fenomeno horiek aztertzeko erabiltzen den hizkuntza.

Hori egitean sortzen diren ekuazioek 'kobarianteak' izan behar dute, hau da, ekuazioaren parte biek maila eta era bereko tentsoreak izan behar dute. Sinpleago esanik, honek ondokoa esan gura du, alegia, lehen partea bektorea bada, bigarrenak ere bektore izan behar duela, eta lehena eskalarra bada, bigarrenak ere eskalar izan beharko duela.

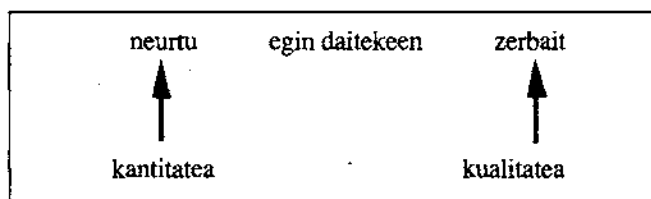
1.3. GAINEZARMENAREN PRINTZIPIOA

Printzipio hau askotan erabiliko dugu Fisikaren edozein arlotan, eta, izatez, ekuazio diferentzialen linealtasunarekin lotuta dago. Fenomeno ber baten iturburu edo sortzaile desberdinak daudenean erabiltzen da. Ondokoa dio: “*Sortzaile desberdinen ondorioak gainezarri edo batu egiten dira, magnitudeari dagokion moduan*”. Hau da, ondorioa adierazten duen magnitudea eskalarra bada, eskalarki batzen dira; eta bektorea bada, bektorialki batu beharko dira. Esan bezala, printzipio honek sistema fisikoaren eboluzioa arautzen duen ekuazioa lineala denean balio du soilik, baina, edozertara, lehenengo hurbilketan horrelako sistemekin egingo dugu lan.

Adibideak milaka jar daitezke. Demagun, kasu baterako, gorputz ber baten gainean eragiten ari diren indarrak ditugula. Gainezarmenaren printzipioaren arabera, gorputza indar erresultantearen eta beronen momentuaren eraginpean (ikus hurrengo gaiko 2.4. atala, ‘kurtsoreen sistemak’) higituko da. Baina indarrak (eta horien momentuak) bektorialki batu beharko dira, noski. Modu berean, Elektrostатikan, karga-multzo batek sorturiko eremu elektrikoa bakoitzak sorturikoen batuketa bektoriala da. Eta horrela, beste adibide asko.

1.4. OINARRIZKO MAGNITUDEAK ETA MAGNITUDE ERATORRIAK

Gertaera fisikoaren behaketa kualitatiboki eta kuantitatiboki egin daiteke. Eta egin ere horrela egiten da. Kualitatiboki aztertuz, gertaeraren kualitate bakoitza magnitude-mota bat da; eta magnitude bakoitza kuantitatiboki neurtzen da. Izatez, gutxi gorabehera, horixe izan da magnitudea kontzeptuaren definizioa, hots, ondoko eskeman adierazi dena,



Has gaitzen ikuspegi kuantitatiboa aztertzen. Ikuspegi honen euskarria neurraketa da.

- **Neurketak.** Magnitude-mota bakoitzari dagokionez, teknika egokiak daude neurketak egiteko. Magnitude batzuen kasuan, propietatea ‘patroi’ edo ‘txantilo’ batekin —*unitatearekin*— konparatuz neurtzen da. Horrela zenbaki bat lortzen da, patroiaren unitateetan adierazten dena.

Beste kasu batzuetan neurketaren definizio operazionala egiten da. Adibidez, abiaduraren kasuan, lehenik luzera eta gero denbora neurturik (biak batera, hobeki esanik), bi magnitude horien zatiketaz lortzen da abiadura.

- **Neurketetako perturbazioak.** Sarri, neurraketa egitean aldatu egiten ditugu inguruko baldintzak eta neurraketa ez da, beraz, izan behar zuena. Honelako kasuetan, neurraketa egitean perturbazio bat gertatu dela esan ohi da. Demagun, adibidez, termometro baten bidez edalontzi bateko uraren tenperatura neurtu nahi dugula. Termometroa uretan sartzean, urarenaz bestelako tenperatura badu, aldatu egingo

da pixka bat uraren tenperatura, eta termometroak neurtuko duena ez da izango aurretik zegoen berbera.

Perturbazioez gain, *errore experimentalak* ere hartu behar ditugu kontuan. Neurgailua perfektua ez dela, edo gaizki erreglaturik dagoela, edo nektaturik gaudela, edo metodoa egokia ez dela, edota beste mila arrazoi tartean daudela, okerrak edo akatsak ageri dira gure neurketetan, gu konturatu gabe: errore experimentalak. Neurketak gure mugen barnean 'ongi' egon daitezen, edozein modutan, perturbazioek errore esperimentalek baino txikiagoak izan behar dute.

Perturbazioa sistematikoa denean, kalkulatu egiten da, eta gero zuzenketak egiten dira neurketetan. Adibidez, termometro eta kalorimetroen kasuan, bien bero espezifikoak kontuan hartuz, oso erraza da zuzenketak egitea.

Dena den, zuzenketak egitean, oso kontuan edukitzekoa da perturbazioen balio erlatiboa. Fenomenoaren eta neurgailuak sortzen duen perturbazioaren mailak konparagarriak badira, hots, maila berekoak badira, orduan beharrezkoa da zuzenketak egitea. Baina, perturbazioa erlatiboki txikia bada, batzuetan ez du merezi zuzenketak egitea. Adibidez, termometro batek gela baten tenperatura neurtzean sortzen duen perturbazioa guztiz arbuigarria da.

Sistema mikroskopikoetan, jadanik Mekanika Kuantikoaren arloan sarturik, zehaztasunaren kontzeptuak beste esangura bat hartzen du, zeren tartean ziurgabetasunaren printzipioa baitago:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (1 - 1)$$

Horren arabera, ez da posible magnitude konjokatuen neurketetan (adibidez, posizio eta momentu linealaren neurketan) zehaztasun osorik lortzea.

Ikuspegi kuantitatiboa nolabait landu ondoren, goazen orain magnitudeen izacra kualitatiboa aztertzea.

- **Oinarrizko magnitudeak.** Kualitatiboki era askotako magnitude fisikoak dauden arren, beren artean era desberdinetako erlazioak daude. Magnitude batzuk, ordea, ezin dira gehiago sinplifikatu edo besteren bidetz eman, eta horregatik oinarrizkoak direla esaten da. Sei dira Fisikaren oinarrizko magnitudeak:
 - Luzera.
 - Masa.
 - Denbora.
 - Korronte elektrikoaren intentsitatea (batzuetan, oinarrizko magnitude gisa karga elektrikoa hartzen da, baina hori aukera kontua da; zer esanik ez, sistema biak baliokideak dira).
 - Tenperatura termodinamikoa.
 - Argi-intentsitatea.

- **Magnitude eratorriak.** Beste magnitude fisiko guztiak oinarritzko magnitudeen konbinazioz lortzen dira. Kasurako, Mekanikaren arloan agertzen diren oinarritzko magnitude bakarrak lehen hirurak dira (luzera, masa eta denbora). Horrela, indarra masa eta azelerazioaren biderketaz lortzen da:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1-2)$$

azelerazioa ($\mathbf{a}$) abiaduraren ($\mathbf{v}$) denborarekiko (t) deribatua izanik, eta abiadura posizio bektorearen ($\mathbf{r}$, luzera) denborarekiko deribatua:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (1-3)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (1-4)$$

1.5. UNITATE-SISTEMAK

Oraintsu arte era askotako sistemak erabili badira ere, gaur egun mundu osoko zientzialariek *unitateen sistema internazionale* (SI sistema) erabiltzen dute ia eskusiboki, zenbait arlo berezitan izan ezik. Sistema hau MKSAKC siglez ere bada ezaguna, letra horiek sei oinarritzko unitateen sinboloak izanik:

M: metroa (luzera)
 K: kilogramoa (masa)
 S: segundoa (denbora)
 A: amperea (korronte elektrikoaren intentsitatea)
 K: kelvin gradua (tenperatura)
 C: kandela (cd, argi-intentsitatea)

Gorago esan dugunez, batzuetan *amperea* erabili beharrean *coulomb* izeneko unitatea (karga elektriko) erabiltzen da. Nazioarteko sistema hau *Giorgi* sistema ere izan da deitua, lehen lau unitateei dagokienez behintzat.

Lehenago, *cgs* sistema ere erabiltzen zen, honako oinarritzko unitateekin:

c: zentimetroa (cm)
 g: gramo
 s: segundoa

Zenbait liburutik 'sistema tekniko' deritzona ere erabili izan da. Sistema honetan ez da masa oinarritzko magnitude gisa erabiltzen. Masaren ordeaz, pisua (indarra) hartzen da oinarritzat. Bestalde, sistema anglosaxoietan unitateak korapilatu egiten ziren, oinbeteak (luzera), librak (masa) eta antzeko unitateak erabiltzen baitziren; baina gaur egunean, liburu zientifikoetan ez dira erabiltzen.

1.6. DIMENTSIO-EKUAZIOAK

Dimentsio-ekuazioek edozein magnitudek oinarritzko magnitudeekiko duen konposizioa adierazten dute. Mekanikaren arloan hiru oinarritzko magnitudeak honelaxe adierazten dira:

masa: M
 luzera: L
 denbora: T

Magnitude fisiko baten dimentsio-ekuazioa, magnitude hori adierazten duen letra kortxete artean jarri adierazten da. Demagun, adibidez, indarra:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Beronen dimentsio-ekuazioa hauxe da, eta honelaxe idazten da:

$$[\mathbf{F}] = [m\mathbf{a}] = [m][\mathbf{a}] = \text{M L T}^{-2}. \quad (1-5)$$

Hau da, masa, luzera eta denboraren bigarren berretura negatiboa elkarrekin biderkatuz lortzen da indarra. Beraren unitateak, MKS sisteman, hauxek izango dira:

$$\text{indar-unitatea} \rightarrow \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \left(\text{alegia, } \frac{\text{kilogramo} \cdot \text{metro}}{\text{segundo}^2} \right)$$

Ikus ditzagun zenbait magnituderen dimentsio-ekuazioak:

– *Pisu espezifikoa*

$$[\gamma] = \left[\frac{\text{Indarra}}{\text{Bolumena}} \right] = \frac{\text{M L T}^{-2}}{\text{L}^3} = \text{M L}^{-2} \text{ T}^{-2}. \quad (1-6)$$

– *Dentsitatea (edo masa espezifikoa)*

$$[\rho] = \left[\frac{\text{Masa}}{\text{Bolumena}} \right] = \frac{\text{M}}{\text{L}^3} = \text{M L}^{-3}. \quad (1-7)$$

Ikus daitekeenez, sarri nahasturik erabiltzen diren bi magnitude horiek oso desberdinak dira dimentsionalki.

– *Lana*

$$[W] = [\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}] = \text{M L T}^{-2} \text{ L} = \text{M L}^2 \text{ T}^{-2}. \quad (1-8)$$

– *Energia zinetikoa*

$$[E_k] = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = \text{M} (\text{L T}^{-1})^2 = \text{M L}^2 \text{ T}^{-2}. \quad (1-9)$$

– *Energia potentziala*

$$[E_p] = [mgh] = \text{M} (\text{L T}^{-2}) \text{ L} = \text{M L}^2 \text{ T}^{-2}. \quad (1-10)$$

eta beraren dimentsioak honako hauek dira:

$$\{\omega\} = \begin{bmatrix} \theta \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}. \quad (1-15)$$

2. gaia

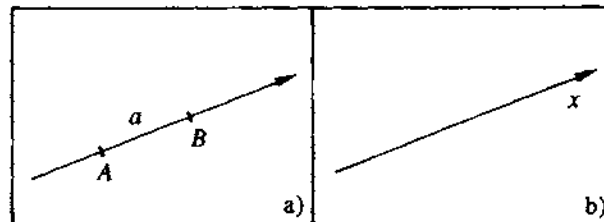
Kalkulu bektoriala

Kalkulu bektorialaren oinarriak aztertzea zuzenduriko gai honetan, lehenik eta behin era desberdinetako magnitude fisikoak espazioan kokatzeko behar ditugun erreferentzia-sistemen aipamena egingo dugu, bertan eskalarren eta bektoreen definizio geometrikoa eta bektoreen sailkapena egiteko. Jarraian bektore askeen aljebra aztertuko dugu, bektoreen arteko oinarritzko eragiketak aurkezturik eta emaitzen esangura geometrikoa azpimarraturik. Bukatzeko, bektore labainkorrek (kursoreek) osaturiko sistemen propietateak aztertuko ditugu, geroago Mekanikaren arlo desberdinetan (indar-sistemen eragina aztertzean, solido zurrunaren zinematikan...) oso erabilgarriak izango baitira.

2.1. ERREFERENTZIA-SISTEMAK

Gertaera fisikoen azterketa matematikorako, guztiz beharrezkoa da puntuak lekutzen edo kokatzen jakitea eta horretarako erreferentzia-sistema bat eduki behar da. Lehen mailan, sistema kartesiarrak ditugu. Horrelako sistemak puntu batetik pasatzen diren hiru norabide elkarrekiko perpendikularren bidez adierazten dira, eta sistema bakoitzak triedro izena hartzen du. Erreferentzia-sistemen kontzeptua argi edukitzeko, zenbait kontzeptu sinpleago adierazi behar dira aurretik.

Norabidea zer den. Hitz laburrez esanik, zuzen orientatu bat da.



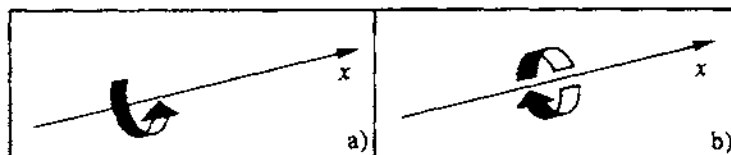
2.1. irudia. Norabide orientatua definitzeko modua.

2.1.a. irudian ageri den norabidea AB noranzkoan hartzen bada, $+a$ izango da, eta BA noranzkoan harturik, $-a$.

Ox ardatzaren noranzkoa 2.1.b. irudian ageri den moduan adierazi ohi da, gezi baten bidez. (Oharra: izatez, zenbait testutan norabidearen eta noranzkoaren arteko desberdintasuna markatzen da eta guk ere horrelaxe egingo dugu. Beste batzuetan sinonimotzat hartzen dira bi hitz hauek).

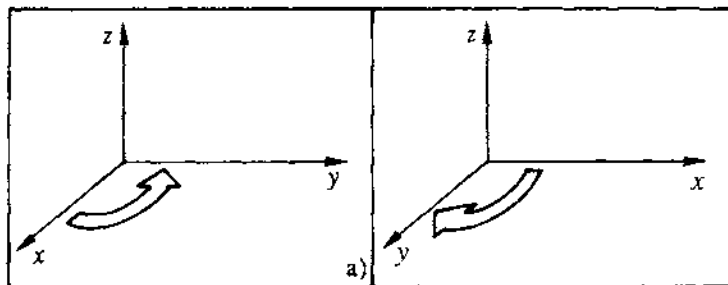
Ardatz baten inguruko biraketak. Hemen dagoen problema bakarra, hitzarmen bat egin beharra da, 2.2. irudietan dagoena hain zuzen ere. Bestalde, biraketen kasuan adierazpen grafikoa egitean, beste sinbologia hau ere erabili ohi da:

- bektorea paperarekiko norabide perpendikularrean eta barrurantz sartzen denean, era honetan adierazten da: $\otimes$.
- paperarekiko norabide perpendikularrean eta kanporantz irteten denean, honelaxe: $\odot$.



2.2. irudia. a) biraketa zuzena, torloju arruntek duten erregelaren arabera. b) alderantzizko biraketa, torlojuaren erregelaren aurkakoa.

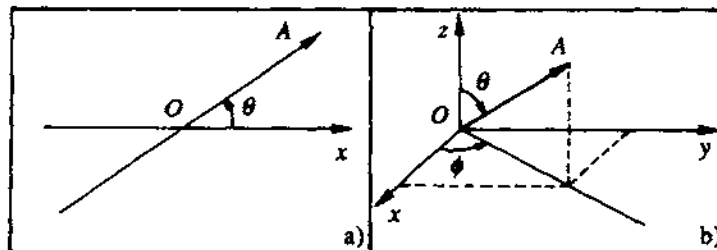
Triedroak. Dakigunez, Fisikaren espazio klasikoak hiru dimentsio ditu. Horregatik, hiru norabide perpendikular hartzen dira oinarritzat (koordinatu kartesiarrak). Biraketen kasuko hitzarmenak kontuan hartuz, bi eratako triedroak har daitezke, 2.3. irudian eskematikoki ageri direnak.



2.3. irudia. a) Hitzarmen zuzena: triedro zuzena. b) Alderantzizko hitzarmena: alderantzizko triedroa.

Gaur egunean, Fisikaren arloan triedro zuzena da nagusi. Bestea ez da ia erabiltzen.

Erreferentzia-sistemekin bukatzeko, eta behar ditugun kontzeptuak definiturik ditugula, planoan eta espazioan noranzkoak nola definitzen diren ikusiko dugu. Hain zuzen, 2.4. irudian ikus daitekeenez, planoan, OA noranzkoa angelu baten bidez (θ) definitzen da. Espazioan, ordea, bi angelu (ϕ eta θ) eman behar dira noranzko hori zehazteko.



2.4. irudia. Noranzkoak planoan (a) eta espazioan (b) definitzeko modua.

2.2. ESKALARRAK ETA BEKTOREAK

Magnitude fisiko batzuk adierazteko, nahikoa da zenbaki bat (kantitatea edo balioa) eta be-
ronen unitatea adieraztea. Gainera, magnitudeak balio berbera du edozein erreferentzia-
-sistematari. Horrelako magnitude fisikoei *eskalarrak* deritze. Adibide batzuk jartzearren,
denbora, masa, lana, tenperatura eta abar aipa ditzakegu.

Beste magnitude fisiko batzuen kasuan, kantitateaz gain norabidea eta noranzkoa ere
adierazi behar izaten dira. Magnitude horiei *bektoreak* deritze. Hauen artean, posizio bektore-
a, abiadura, indarra eta abar ditugu. Liburuetan, eskalarrak letra etzan arruntez idazten
dira eta bektoreak letra bertikal beltzez (eskuizkribuetan, bektoreei gezi bat jartzen zaie
gainean, bektoreak direla argi adierazteko).

Eskalarrak		Bektoreak	
m	masa	$\mathbf{F}$	indarra
t	denbora	$\mathbf{v}$	abiadura
W	lana	$\mathbf{r}$	posizio-bektorea

Bi punturen arteko posizio bektorea, A eta B puntuen artekoa, kasurako, honelaxe ere
adierazi ohi da: $\overrightarrow{AB} = (B - A)$.

Bektoreen ezagugarrietako bat modulua da. Honela adierazten da,

$$\mathbf{V} \rightarrow |\mathbf{V}| = V, \quad (V, \mathbf{V}\text{-ren modulua}) \quad (2-1)$$

hau da, bektoreari dagokion letra berbera, baina era etzan arruntez idatzita. Balio unitateko
modulua duten bektoreak, *bektore unitario* edo *unitate bektoreak* deitzen dira. Ardatzen
norabideetan daudenak honelaxe adierazten dira:

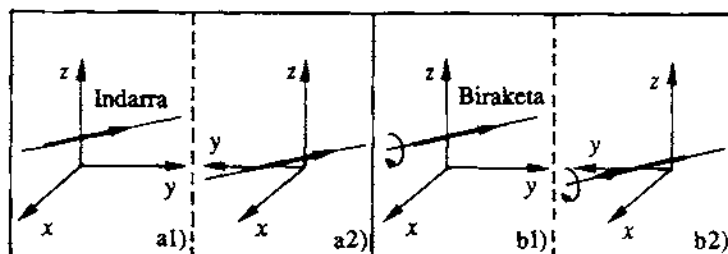
$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \mathbf{i} \\ y \rightarrow \mathbf{j} \\ z \rightarrow \mathbf{k} \end{array} \right\} \text{edo eta} \left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{array} \right\}. \quad (2-2)$$

Bektoreen aplikazio-puntuari dagokienez, hiru motatako bektoreak daude:

Bektore askeak. Espazioko edozein puntutan aplikatu daitezke. Guztiak ordezkariz gisa, bat har daitezke, gero paraleloki edonora eramateko. Bektore hori 'ekipolente' deitzen da. Adibidez, ardatz kartesiarren norabideko bektore unitarioak, asketzat jotzen dira.

Bektore labainkorak. Hauek zuzen baten edozein puntutan aplikatu daitezke. *Kurtsore* izenez ere ezagunak dira. Hauen artean indarrak ditugu.

Bektore lotuak. Puntu bakar eta konkritu batean aplikaturik baino ez dute zentzurik. Aplikazio-puntu finkoa dute, beraz. Hauen artean, puntu baten abiadura aipa dezakegu.



2.5. irudia. a) Bektore polarrak noranzko berberaz adierazten dira, triedroa zuzena zein alderantzizkoa izan. b) Bektore axialak, ordea, alderantzizko noranzkoaz adierazten dira, triedoen hitzarmena aldatzean.

Bestelako sailkapen batzuk ere egin daitezke. Adibidez, honako hau:

Bektore polarrak. Benetako bektoreak. Nahiz eta triedro zuzenetik (a) alderantzizkora (b) pasatu, norabide eta noranzko berberaz ageri dira. Indarra, adibidez.

Ardatz-bektoreak, edo **bektore axialak,** **asibektoreak** ere deituak. Hauen noranzkoa hitzarmenean finkaturik dagoenez, sistema zuzenetik alderantzizko sistema batera pasatzean hitzarmena aldatzen denez, noranzkoaz aldatzen dira. Hauen artean biraketak ditugu.

Bukatzeke, lege fisikoen kobariantzia aipatu behar dugu. Hain zuzen, 1.2. atalean ikusi dugunez, lege fisiko baten formulazioan agertzen diren termino guztiek kobariantzak izan behar dute; hau da, lehen zatian bektorea badago, bigarrenetan ere bektorea egon beharko da:

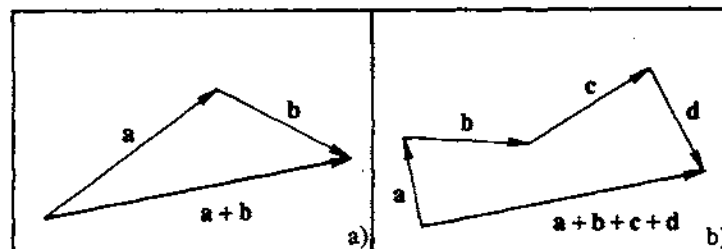
$$\begin{aligned} \text{bektorea} &= \text{bektorea} \\ \text{eskalarra} &= \text{eskalarra} \end{aligned}$$

2.3. BEKTORE ASKEEN ALJEBRA

Puntu honetan geometrikoki azalduko ditugu bektore askeekin egin daitezkeen eragiketen propietateak. Banan-banan aztertuko ditugu.

2.3.1. Bektoreen batuketak

Bi bektoreren arteko batuketa egiteko, bata bestearen atzetik jartzen dira, irudian bezala. Lortzen den emaitza, batura da (2.6. irudia).

2.6. irudia. a) Bi bektoreen batura. b) n bektoreen batura.

Bektoreen batuketak bi propietate ditu:

a) Trukakorra:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (2-3)$$

b) Elkarkorra:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}. \quad (2-4)$$

2.3.2. Eskalar baten eta bektore baten arteko biderketa

f eskalarraren eta $\mathbf{a}$ bektorearen arteko biderketa egitean, $\mathbf{a}$ -ren norabideko bektore bat lortzen da, baina modulua f aldiz handiagoa da, eta noranzkoa, berbera f positiboa bada eta alderantzizkoa f negatiboa bada; alegia:

$$f\mathbf{a} \rightarrow |f\mathbf{a}| = f|\mathbf{a}| = f a. \quad (2-5)$$

Propietate hauek ditu:

a) Trukakorra:

$$f\mathbf{a} = \mathbf{a}f. \quad (2-6)$$

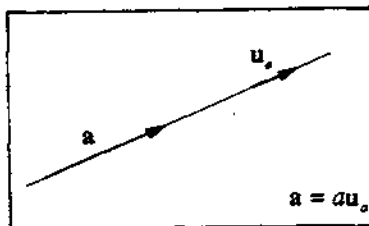
b) Banakorra:

– bektorearekiko:

$$(f_1 + f_2)\mathbf{a} = f_1\mathbf{a} + f_2\mathbf{a}. \quad (2-7)$$

– eskalarrarekiko:

$$f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = f\mathbf{a}_1 + f\mathbf{a}_2. \quad (2-8)$$

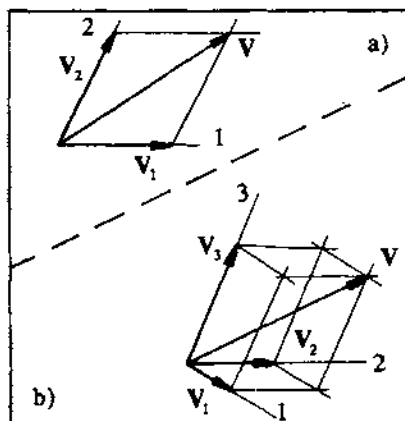


2.7. irudia. Edozein bektore bere norabidedun unitate bektorearen bidez adieraz daiteke.

u_a bektorea a norabideko bektore unitarioa bada,

$$|u_a| = 1, \quad (2-9)$$

$$a = |a|u_a = au_a. \quad (2-10)$$



2.8. irudia. Bektorearen osagaiak. a) Planoan. b) Espazioan.

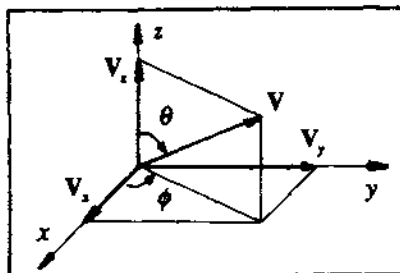
2.3.3. Bektore baten osagaiak

Bi norabide hartuz (1 eta 2), eta norabide horiek dituzten V_1 eta V_2 bektoreen batura V bada, V_1 eta V_2 direlakoak V bektoreak bi norabide horietan dituen osagaiak direla esaten da, eta

$$V = V_1 + V_2 \quad (2-11)$$

betetzen da. Bektorearen osagaiak espazioan definitzeko, plano berean ez dauden hiru norabide hartu behar ditugu:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (2-12)$$



2.9. irudia. V bektorearen osagai cartesiarrak.

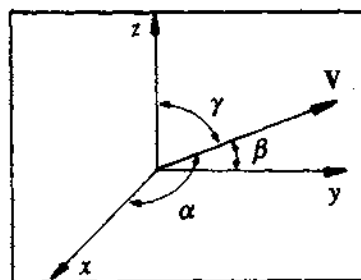
2.3.4. Osagai cartesiarrak

Ardatz cartesiarrakiko osagaiak hauexek dira:

$$\begin{cases} V_x = V \sin \theta \cos \phi, \\ V_y = V \sin \theta \sin \phi, \\ V_z = V \cos \theta. \end{cases} \quad (2-13)$$

Erraz froga daitekeenez:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2. \quad (2-14)$$



2.10. irudia. V bektorearen kosinu zuzentzaileak.

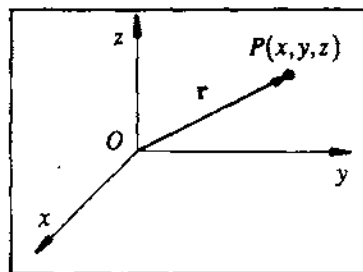
2.3.5. Kosinu zuzentzaileak

Beste batzuetan, ardatz koordinatuekiko angeluak erabiltzen dira: α , β , γ . Hauen kosinuei, *kosinu zuzentzaileak* deritze:

$$\begin{cases} V_x = V \cos \alpha, \\ V_y = V \cos \beta, \\ V_z = V \cos \gamma. \end{cases} \quad (2-15)$$

Erraz froga daitekeenez, erlazio hau betetzen dute kosinu zuzentzaileak:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2-16)$$

2.11. irudia. P puntuari dagokion posizio bektorea.

2.3.6. Posizio bektorea

Puntu baten posizio bektorea, sistemaren jatorritik (O -tik) puntura (P -ra) doan bektorea da (2.11. irudia). r letraz adierazten da:

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (2-17)$$

2.3.7. Bektoreen baturaren osagaiak

V delakoa n bektoreen batura izanik,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i, \quad (2-18)$$

$$V_x = V_{1x} + V_{2x} + \dots = \sum_{i=1}^n V_{ix}, \quad (2-19a)$$

$$V_y = V_{1y} + V_{2y} + \dots = \sum_{i=1}^n V_{iy}, \quad (2-19b)$$

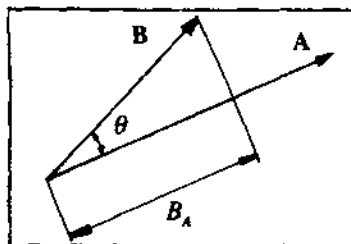
$$V_z = V_{1z} + V_{2z} + \dots = \sum_{i=1}^n V_{iz}. \quad (2-19c)$$

Hots, baturaren osagaiak bektoreen osagaien baturak dira.

2.3.8. Biderketa eskalarra

Bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra modu honetan definitzen da: eskalar bat da, bektore bien moduluaren eta eratzen duten angeluaren kosinuaren biderketaz lortua. Honelaxe adierazten da:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (2-20)$$



2.12. irudia. Biderkadura eskalarren esangura geometrikoa.

Definizio honen esangura geometrikoa oso sinplea da (ikus 2.12. irudia).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB_A = A_B B \quad (2-21)$$

B_A delakoa $\mathbf{B}$ bektoreak $\mathbf{A}$ norabidean duen proiektzioaren modulua izanik. Argi dagoenez,

$$B_A = B \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = B \cos \theta. \quad (2-22)$$

Biderketa eskalarra ondoko propietate operazionalak ditu:

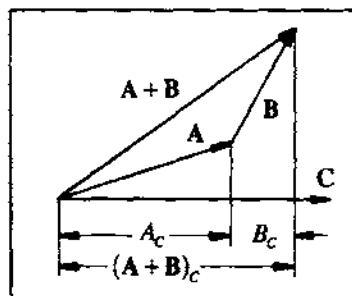
– Trukakorra da:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (2-23)$$

Propietate hau definizioz ulertzen da.

– Banakorra da bektorearen batuketari dagokionez:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}. \quad (2-24)$$



2.13. irudia. Propietate banakorren adierazpen grafikoa.

Honen frogapena 2.13. irudiaren laguntzaz egin daiteke (hiru bektore planokide irudikatu dira, erraztasunaren mesedetan). Bertan ikus daitekeenez:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_C = \mathbf{A}_C + \mathbf{B}_C. \quad (2-25)$$

Eta horretan finkatuz, goikoa frogaturik geratzen da.

Bi bektoreen arteko biderkadura eskalarraz zenbait ohar egin daitezke:

- I) Bi bektoreen biderkadura eskalarra zero bada, eta ez bata ez bestea nuluak ez badira, bi bektore horiek elkarren perpendikularak (ortogonalak) dira:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \text{ eta } \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}, \quad (2-26)$$

zeren eta

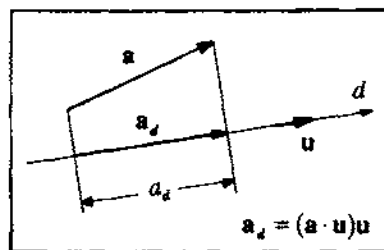
$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0 \text{ baita.} \quad (2-27)$$

- II) Erraz ikus daitekeenez, bektore unitarioen arteko biderkadura eskalarrek ondo-koak dira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \end{array} \right. \text{ eta } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \end{array} \right. \quad (2-28)$$

- III) Bektore bat ere buruaz biderkatuz, moduluen karratua lortzen da:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2. \quad (2-29)$$



2.14. irudia. a bektoreak u norabidean duen proiektzioa.

- IV) Norabide baten bektore unitarioa ezagutuz (u), erraz kalkula daiteke edozein bektorek norabide horretan duen proiektzioa (2.14. irudia):

$$a_d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}. \quad (2-30)$$

Izatez, horixe da proiektzioa. Dena den, batzuetan, bektorialki idazten da:

$$\mathbf{a}_d = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (2-31)$$

Horren arabera, edozein bektoreen osagai kartesiarrek honelaxe lortzen dira:

$$V_x = \mathbf{V} \cdot \mathbf{i}, \quad (2-32a)$$

$$V_y = \mathbf{V} \cdot \mathbf{j}, \quad (2-32b)$$

$$V_z = \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}. \quad (2-32c)$$

V) Bi bektoreren arteko biderkadura eskalarra honela kalkulatzen da osagaien funtzioan:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}), \quad (2-33)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2-34)$$

Edozein modutan, komeni da gogoraraztea ezen hori osagai errektangeluarren kasuan gertatzen dela soilik.

Osagaien bidez era honetara adieraz daiteke bi bektore horien arteko angeluaren kosinua:

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}. \quad (2-35)$$

VI) Bektore bat bi bektoreren batura denean, honelaxe kalkulatzen da beraren karratua:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2, \quad (2-36)$$

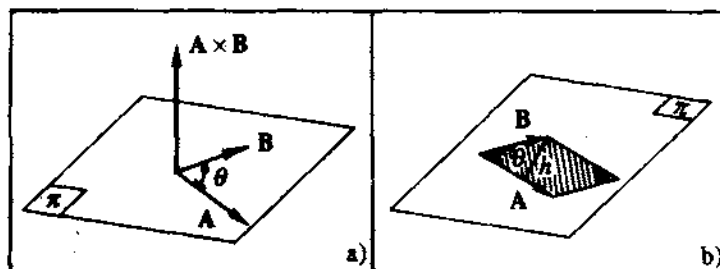
$$V^2 = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = V_1^2 + V_2^2 + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2. \quad (2-37)$$

2.3.9. Biderketa bektoriala

Definizioz, bi bektoreren arteko biderketa bektorialaz beste bektore bat lortzen da, haiek osotzen duten planoaren perpendikularra dena, noranzkoa torlojuaren aurrerapenarena (lehen bektoretik bigarrenera bira egitean baina eratzen duten angelurik txikienaren arabera) duena, eta modulua bi bektoreen moduluaren eta eratzen duten angeluaren sinuaren arteko biderkadura izanik.

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad (2-38)$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ edo $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ sinboloek adierazten da, eta, izatez, sasibektore bat da.



2.15. irudia. a) Biderkadura bektorialaren adierazpen grafikoa. b) Biderkadura bektorialaren moduluaren esangura geometrikoa.

Beraren moduluari esangura geometriko argia eman dakioke. Alboko 2.15.b irudian ikus daitekeenez,

$$h = B \sin \theta \quad (2-39)$$

izanik,

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta = Ah. \quad (2-40)$$

Hots, irudikaturik dagoen paralelogramoaren azalera da.

Biderketa bektorialak ondoko propietateak ditu:

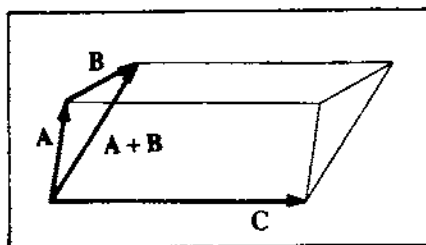
– Antitrukakorra da:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (2-41)$$

(definizioz ikus daiteke).

– Banakorra da bektoreen batuketarekiko:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}. \quad (2-42)$$



2.16. irudia. Propietate banakorraren adierazpen grafikoa.

2.16. irudian ageri da frogapena, hiru bektoreak plano berean daudenean.

– Ez da elkarkorra, hots, kasu orokorrean

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (2-43)$$

da, nahiz eta kasuren batean emaitza berbera lor daitekeen.

Biderkadura bektorialaz ere hainbeste ohar egin daitezke:

I) Bi bektore edukirik, eta nuluak ez izanik beraien arteko biderkadura bektoriala zero bada, bi bektoreok elkarren paraleloak dira:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{A} // \mathbf{B}. \quad (2-44)$$

II) Sistema kartesiarraren bektore unitarioen arteko biderkadura bektorialak ondokoak dira:

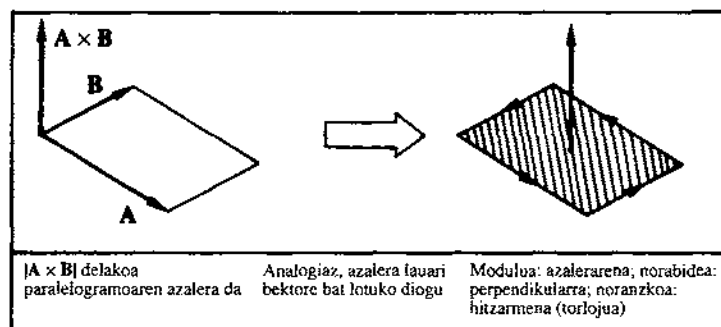
$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \end{array} \right\} \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{i} \dots \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (2-45)$$

III) Bi bektoreren biderkadura bektoriala honelaxe adierazten da beren osagaien funtzioan:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}, \quad (2-46)$$

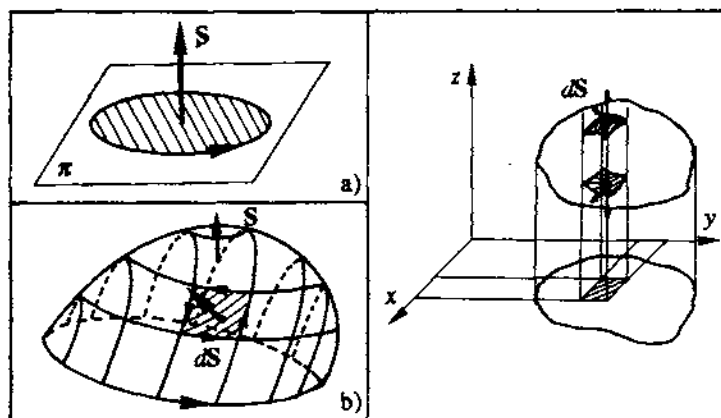
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (2-47)$$

IV) Biderkadura bektorialaren definizioan oinarriturik, eta hitzarmen bat eginez, azalerak bektoreren bidez adieraziko ditugu, hain zuzen ere, 2.17. irudian eskematikoki adierazi den bezala.



2.17. irudia. Azalerak bektorialki definitzeko analogia.

Analogian beste pauso bat emanik, berdin egiten dugu beste edozein azalera lau adierazteko, nahiz eta ingerada paralelogramoa ez izan.



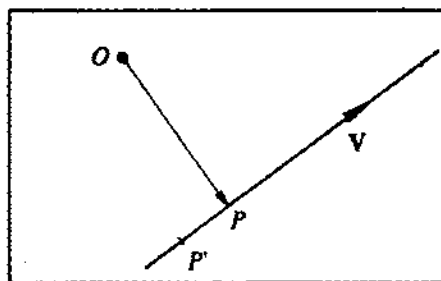
2.18. irudia. Azalaren adierazpen bektoriala. a) Azalera lau. b) Gainazal irekia. c) Gainazal itxia.

2.4. KURTSORE- SISTEMAK

Bektoreen sailkapena egitean ikusi genuenez, kurtsoreak bektore labainkorak dira; hots, norabidea, noranzkoa eta modulua ezagunak dituzte, baina aplikazio-puntua zuzen bateko edozein da. Adibide gisa, indarra eta abiadura angeluarra aipa ditzakegu (azken hau, sasibektorea da). Izatez, indarrak kurtsore modura tratatzean, gorputzak solido zurruntzat dauzkagu. Elastikotasuna kontuan hartzean, ordea, ezin daiteke modu berean egin eta hemen esaten denak ez du balio.

2.4.1. Kurtsore baten momentua

Kurtsoreen labaintze-zuzena kalkuluetarako erabiltzea nahasgarria denez, kurtsoreak puntu jakin batera laburbiltzeko ohitura dago. Horretarako magnitude berri bat definitzen da: momentua edo, zehazkiago esateko, *puntu batekiko momentua* (2.20. irudia).



2.20. irudia. Kurtsorearen O puntuarekiko momentua definitzeko bektoreak.

Modu honetan definitzen da:

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{V}. \quad (2-53)$$

Hemen $\vec{OP}$ bektorea O puntutik zuzeneko edozein puntutara doan posizio bektorea da.

P puntuaren ordez beste edozein puntu (P') hartuz, berdina da momentua. Ikus dezagun hori:

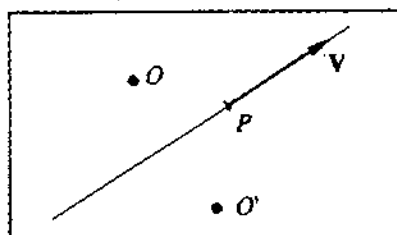
$$\vec{M}'_O = \vec{OP'} \times \vec{V} = (\vec{OP} + \vec{PP'}) \times \vec{V} = \vec{OP} \times \vec{V} + \vec{PP'} \times \vec{V}. \quad (2-54)$$

Baina $\vec{PP'} \times \vec{V} = \vec{0}$, bi bektore hauek elkarren paraleloak baitira. Beraz,

$$\vec{M}'_O = \vec{OP} \times \vec{V} = \vec{M}_O. \quad (2-55)$$

Ikus daitekeenez, emandako definizioa bakarra da eta balio berbera du kurtsorearen aplikagune modura bere zuzeneko edozein puntu harturik.

Beste pauso bat emateko, orain beste puntu desberdin batekiko (O') kalkulatu dugu momentua. Eta halaber, momentu honek lehengoarekin duen erlazioa:

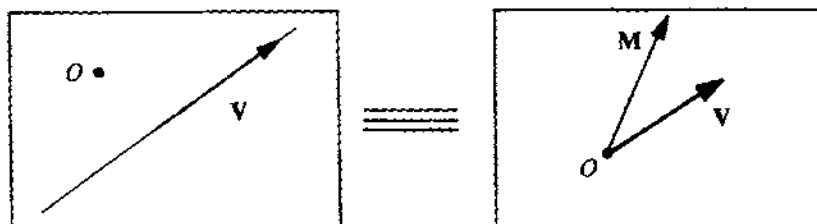


2.21. irudia. Bi puntu desberdinekiko momentua definitzeko bektoreak.

$$\mathbf{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P} \times \mathbf{V} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) \times \mathbf{V} = \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{V} + \overrightarrow{OP} \times \mathbf{V}, \quad (2-56)$$

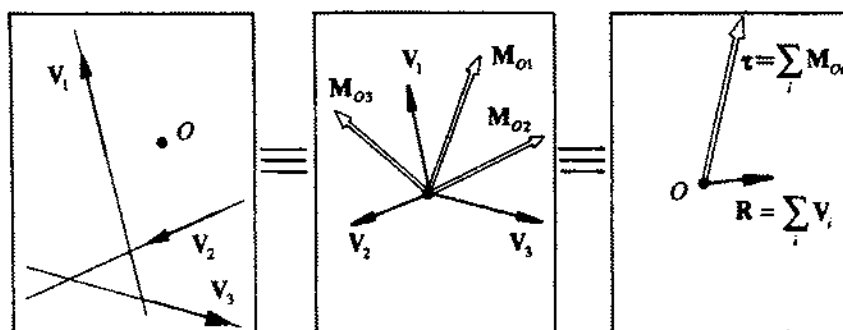
$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{V}. \quad (2-57)$$

Azken formula honetan oinarriturik, ondokoa esan dezakegu: kurtsore batek edozein punturekiko duen momentua lortzeko, nahikoa dugu kurtsorea bera eta heste puntu batekiko momentua ezagutzea. Goiko formula irakurriz: "*O' puntuarekiko momentua lortzeko, lehenik O puntuarekiko lortzen da, eta gero horri V kurtsorearen O' puntuarekiko momentua gehitzen zaio, baina V kurtsorea O puntuan aplikaturik balego bezala hartuta*". Honek ondorio berezia du, alegia, kurtsorea puntu batera laburbil daitekeela, puntu horrekiko momentua emanik. Horrek adierazten digunez, kurtsorearen efektuak espazio osora hedatzen badira, 2.22. irudiko sistema biak baliokideak dira:



2.22. irudia. Kurtsoreen laburbilketa. Irudian ageri diren bi sistemak elkarren baliokideak dira.

Baliokidetza hori oso interesgarria eta lagungarria gertatzen zaigu, kurtsore askoz osaturik dagoen kurtsore-sistema bat laburbiltzeko. Lehenik, kurtsoreak puntu batera laburbiltzen dira banan-banan, eta gero gainezarmenaren printzipioan oinarriturik, bektoreak eta momentuak batuz, kurtsore-sistema osoa bektore bakar batez eta momentu bakar batez osaturik dagoen sistema batera laburbiltzen da. Horrela, sinplifikatu egiten zaigu sistema. Hain zuzen, 2.23. irudian adierazi da eskematikoki laburbiltze-prozesua:



2.23. irudia. Kurtsoreen laburbiltze-prozesua.

Erraz ikus daitekeenez, momentu erresultanteak ere transformazio-lege berberak betetzen ditu. Hara:

$$\tau_o = \sum_i M_{oi}, \quad (2-58)$$

$$\tau_o = \sum_i M_{oi} = \sum_i (M_{oi} + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{V}_i), \quad (2-59)$$

$$\tau_o = \sum_i M_{oi} + \sum_i \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{V}_i = \tau_o + \overrightarrow{O'O} \times \left(\sum_i \mathbf{V}_i \right). \quad (2-60)$$

Beraz,

$$\tau_o = \tau_o + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}. \quad (2-61)$$

2.4.2. Espazioko aldaezinak

Espazioan kurtsoreen sistema bat kontsideratzean, espazioko puntu guztietan balio berbera duten magnitude batzuk daudela konturatzen gara. Magnitude horiei aldaezinak deritze.

Bi dira nagusiki:

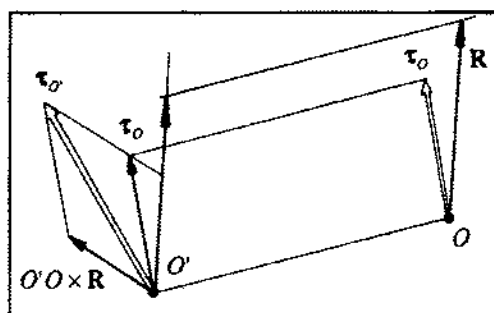
- Batetik, *aldaezin bektoriala*. Hau sistemaren erresultantea da, $\mathbf{R}$. Sistema edozein puntutara laburbiltzean, erresultantea berbera da beti:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{V}_i. \quad (2-62)$$

- Bestetik, *aldaezin eskalarra*: $\tau \cdot \mathbf{R}$. Magnitude hau aldaezina dela ikusteko, egin dezagun operazio hori bi puntu desberdinetan:

$$O \text{ puntuan: } \tau_o \cdot \mathbf{R}, \quad (2-63)$$

$$O' \text{ puntuan: } \tau_{o'} \cdot \mathbf{R} = (\tau_o + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \tau_o \cdot \mathbf{R} + (\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \tau_o \cdot \mathbf{R}. \quad (2-64)$$

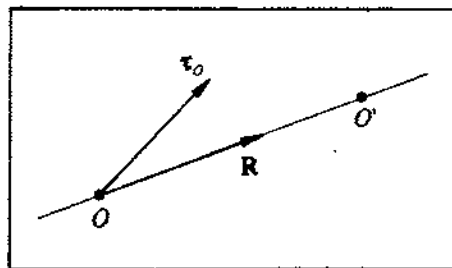


2.24. irudia. Aldaezin eskalarraren esangura geometrikoa.

Ikus daitekeenez, bi kasuetan balio berbera hartzen du, eta beraz, aldaezina da.

Aldaezin eskalarraren esangura, geometrikoki ere azter dezakegu (2.24. irudia). Irudi horretan ikus daitekeenez, $\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}$ eta $\mathbf{R}$ bektoreak elkarren perpendikularrak direnez, $\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}$ delakoak $\mathbf{R}$ delakoaren norabidean duen proiektzioa nulua da. Beste hitz batzuen bidez esateko, τ_O eta $\tau_{O'}$ momentuek $\mathbf{R}$ erresultantearen norabidean duten osagaia (edo proiektzioa) berbera da, hots, aldaezina da.

Aurrera joanik, ikus dezagun beste aldaezintasun berezi bat. Demagun orain, OO' zuzenak (O eta O' puntuetatik pasatzen den zuzenak) erresultantearen norabidea duela.

2.25. irudia. O eta O' puntuetatik momentuek balio berbera dute.

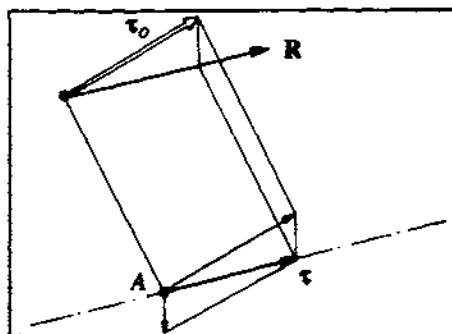
$$\tau_{O'} = \tau_O + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R} = \tau_O. \quad (2-65)$$

Hots, O eta O' puntuetatik momentuak berdinak dira.

Honek adieraz dezakegu emaitza hori: "Erresultantearen norabidea duten zuzenak, momentu berdineko puntuen leku geometrikoak dira".

2.4.3. Momentu minimoa eta ardatz zentrala

Aldaezin eskalarra aztertzean ikusi dugunez, momentuak erresultantearen norabidean duen proiektzioa aldaezina da. Espazio osoan egon daitekeen momenturik txikienaren modulua proiektzio hori dela esan nahi du horrek. Bestalde, beraren norabidea erresultatearena da. Dagoenik txikiena den momentu horri *momentu minimoa* deritzo.



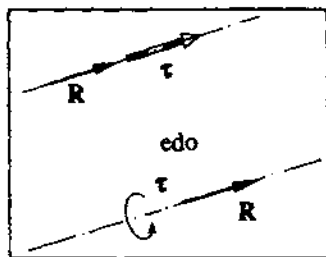
2.26. irudia. Momentu minimoaren adierazpena.

Momentu minimoa honelaxe adieraz dezakegu analitikoki:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Modulua : } \tau = \frac{\tau_0 \cdot R}{R} \\ \text{Norabidea : } u = \frac{R}{R} \end{array} \right\} \rightarrow \tau = \frac{\tau_0 \cdot R}{R^2} R. \quad (2-66)$$

Bestalde, erresultantearen norabideko zuzenak momentu berdineko puntuen leku geometrikoak direnez, momentu minimoa duten puntuek zuzen bat osatzen dute: zuzen horri *ardatz zentrala* deritzo.

Ikusitako puntuak kontuan harturik, ikus dezagun kurtso-re-sistema zenbat modutan laburbil daitekeen:



2.27. irudia. Kurtso-re-sistemaren laburbilpena: tortsorea.

- I) Kasurik orokorrean, ardatz zentralako puntuetan erresultantea eta momentu minimoa izango ditugu, biak norabide berekoak (noranzko berekoak edo aurkakak izan daitezke):

$$\tau \neq 0, R \neq 0. \quad (2-67)$$

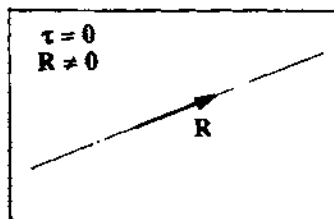
Sistema hau *tortsore* izenaz ezagutzen da.

- II) Erresultantea nulua denean, $R = 0$, momentua balio berekoa da espazioko puntu guztietan:

$$\tau_{O'} = \tau_O + \overrightarrow{O'O} \times R = \tau_O, \quad (2-68)$$

Sistema osoa momentu batez adierazten da espazioko edozein puntutan. Kurtsoreen sistema momentu bakar baten baliokidea da.

- III) Momentu minimoa nulua bada, $\tau = 0$, baina erresultantea nulua izan gabe, sistema osoa kurtsore bakar batez adieraz daiteke, kurtsore hori erresultantea izanik, ardatz zentrolean aplikaturik (2.28. irudia).



2.28. irudia. Momentu minimo nuluari dagokion kurtsorea.

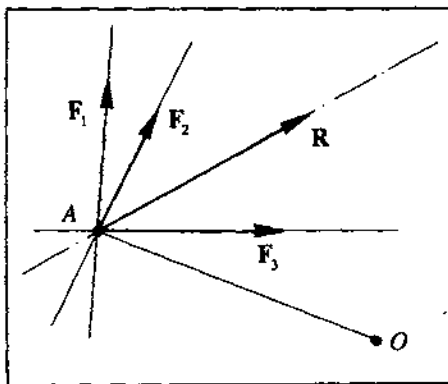
- IV) Momentu minimoa eta erresultantea nuluak badira, espazioko puntu guztietan nuluak dira, eta sistema hori orekan dagoela esaten da.

2.5. ZENBAIT KASU BEREZI

Aurreko kontzeptuen aplikazio praktikoa modura, kurtsoreen zenbait multzo bereziren azterketa egingo dugu.

2.5.1. Sistema konkurrentea

Demagun konkurrentzia-puntua A dela.



2.29. irudia. Kurtsore konkurrenteen sistema.

$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ kurtsoreen labaintze-zuzen guztiak A puntutik pasatzen dira. Sistema-ren erresultantea ondokoa da:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2-69)$$

Bestalde, bektoreen labaintze-zuzenak A puntutik pasatzen direnez, A puntuarekiko momentua nulua da:

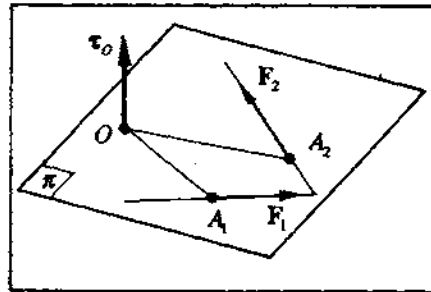
$$\tau_{iA} = 0 \rightarrow \tau_A = \sum_i \tau_{iA} = 0. \quad (2-70)$$

Beraz, momentu minimoa nulua da, $\tau = 0$, eta honek esan nahi du, sistema osoa kurtsoz bakar batez adieraz daitekeela. Bestalde, A puntua ardatz zentralekoea da ($\tau_A = 0 = \tau$ baita). Horrela, ba, ardatz zentrala A puntutik pasatuz R erresultantearen norabidea duen zuzena da.

Espazioko edozein puntutan (O), momentua eta erresultantea perpendikularrak dira eta momentuak ondoko balioa du:

$$\tau_O = \overrightarrow{OA} \times F_1 + \overrightarrow{OA} \times F_2 + \overrightarrow{OA} \times F_3 + \dots, \quad (2-71)$$

$$\tau_O = \overrightarrow{OA} \times (F_1 + F_2 + F_3 + \dots) = \overrightarrow{OA} \times R. \quad (2-72)$$



2.30. irudia. Sistema planokidea.

2.5.2. Sistema planokidea

Bektoreak daudeneko zuzenak plano berean daude. Ikusiko dugunez, momentuak plano horren norabide perpendikularra du:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA_1} \times F_1 & \perp \pi \\ \overrightarrow{OA_2} \times F_2 & \perp \pi \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\tau_O = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \times F_i \quad \perp \pi \quad (2-73)$$

Hemen, O puntua π planoan hartu dugu, 2.31. irudian ikus daitekeen bezala. Bestalde, erresultanteak berak π planoaren norabide paraleloa du:

$$R = \sum_i F_i. \quad (2-74)$$

Beraz, R eta τ_O elkarren perpendikularrak dira:

$$R \cdot \tau_O = 0. \quad (2-75)$$

Eta horrek momentu minimoa nulua dela esan nahi du:

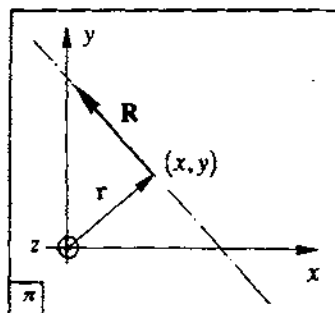
$$\tau = 0. \quad (2-76)$$

Egia esan, hau honela da, $\mathbf{R} \neq 0$ bada.

Bestalde, $\mathbf{R} \neq 0$ baldin bada, ez da zertan $\tau = 0$ izanik. Horrelatan, ba, bi kasu aztertuko ditugu.

a) $\mathbf{R} \neq 0$. Esan dugunez, kasu honetan $\tau = 0$ da. Kasu hau kurtsoare bakar baten balio-kidea da. Ardatz zentrala kalkulatuko dugu.

Ox , Oy ardatzak π planoan hartuko ditugu. Oz ardatza planoaren perpendikularra da. Momentua eta erresultantea bektore unitarioen funtzioan ipiniko ditugu:



2.31. irudia. Sistema planokidearen erresultantea.

$$\tau_o = \tau_o \mathbf{k}, \quad (2-77)$$

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}, \quad (2-78)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \quad (2-79)$$

Hori posible izan dadin, $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \tau_o$ izan behar da:

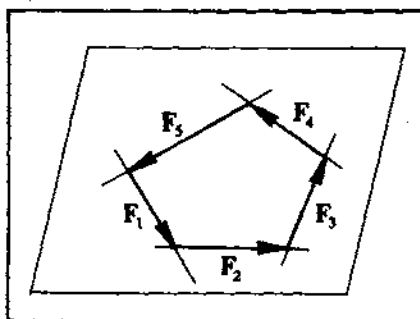
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} = (xR_y - yR_x)\mathbf{k} = \tau_o \mathbf{k} \quad (2-80)$$

$$\tau_o = xR_y - yR_x. \quad (2-81)$$

τ_o eta $\mathbf{R}$ ezagutuz, azken adierazpenak ardatz zentralaren ekuazioa ematen digu.

b) $\mathbf{R} = 0$ eta $\tau \neq 0$ baldin badira, sistema osoa momentu batez adieraz daiteke. Espazioko puntu guztietan momentuak balio berbera du:

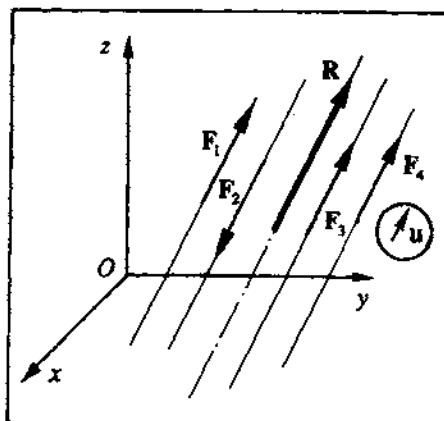
$$\tau_o = \tau_o' = \tau. \quad (2-82)$$



2.32. irudia. Erresultante nuludun sistema planokidea.

Adibidez, alboko 2.32. irudiko sistemaren kasuan:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{eta} \quad \tau \neq 0.$$



2.33. irudia. Kurtsore paraleloz osaturiko sistema.

2.5.3. Kurtsore paraleloz osaturiko sistema

Kasu honetan kurtsore guztiek norabide berbera dute eta honela adieraz daitezke:

$$\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{u}. \quad (2-83)$$

Beraz, erresultanteak ere norabide berbera du (2.33. ir.):

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i F_i \mathbf{u} = \left(\sum_i F_i \right) \mathbf{u}. \quad (2-84)$$

Momentua eta erresultantea elkarren perpendikularrak dira:

$$\tau_o = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{u} = \left(\sum_i F_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{u}. \quad (2-85)$$

Dakusagunez, $\tau_O \perp \mathbf{R}$ da; eta $\tau_O \cdot \mathbf{R} = 0$ denez gero, ondoko posibilitateak ditugu:

- a) $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ bada, $\tau_O \cdot \mathbf{R} = 0$ denez, momentu minimoa nulua da, eta sistema osoa kutsore bakar batera laburbil daiteke (ardatz zentrolean aplikaturik, noski).
- b) $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ bada, espazioko puntu guztietan momentu berbera dugu.

3. gaia

Puntuaren zinematika

Gertaera fisikoen artean, ongien ikusten eta hautematen duguna higidura da. Gorputz arruntak, planetak, haizea, elektroiak, gas baten molekulak..., guztiak ari dira higitzen. Gainera, gorputzen arteko interakzio edo elkarrekintzek mugatu egiten dute, nolabait, higidura nolakoa izango den.

Mekanikaren helburua gorputzen higidura aurrikustea da. Horretarako, lehenik eta behin higidura bera deskribatzen eta adierazten jakin behar du. Nolabait esateko, hizkuntza matematikoaren bidez, higiduraren deskribapena egin beharko du. Eta horixe da, hain zuzen ere, lehen urratsa, Zinematikan ematen dena. Bigarren pausoa, elkarrekintzak ezagutzea da; eta gero, elkarrekintzak ezagutuz, gertatzeko den higidura nolakoa izango den aurreikustea. Azken bi pauso horiek Dinamikan ematen dira. Honela, ba, bi arlo nagusitan banatzen da Mekanika.

- I) *Zinematika*. Arlo honetan higidura bera aztertzen da soilik. Higidura ongi deskribatzeko erabiltzen diren magnitude eta teknika matematikoak lantzen dira, higidura sortzen duten kausetaz arduratu gabe.
- II) *Dinamika*. Dinamikan higidura sortzen duten kausak aztertzen dira: elkarrekintzak edo indarrak. Eta, halaber, indarren eta magnitude zinematikoen artean dauden erlazioak ere.

Gai honetan puntu materialaren zinematikaz arituko gara, lehenengo eta behin higitzen ari den partikula puntualaren abiadura eta azelerazioa definiturik. Azelerazioaren osagai tangentiala eta normala aztertzeaz batera, interes handiko higidura bereziak aztertuko ditugu, hala nola azelerazio konstantepekoa (Lurraren grabitatearen eraginez Lurraren gainazalaren inguruan gertatzen dena, adibidez), higidura zirkularra eta higidura laua.

3.1. PUNTU MATERIAL BATEN HIGIDURAREN ABIADURA ETA AZELERAZIOA

Ezer baino lehen, argi utzi behar da zer erreferentziarekiko neurtu eta deskribatuko den higidura. Eta zergatik hori? Higidura gauza erlatiboa delako. Pausagunea eta higidura gauza erlatiboak dira; hori argi ikus daiteke adibide sinpleekin. Demagun hegazkin batean doan bidaiari bat. Hegazkin berean doazenekiko, geldidago; aldiz, Lurrean geldidaudenekiko, abiadura handiz higitzen ari da.

Honelatan, ba, higiduraren neurketak eta deskribapenak egiteko, lehenik eta behin erreferentzia-sistema bat aukeratu edo hartu behar da. Eta bertan kokatu behar da neurketak egiten dituen behatzailea.

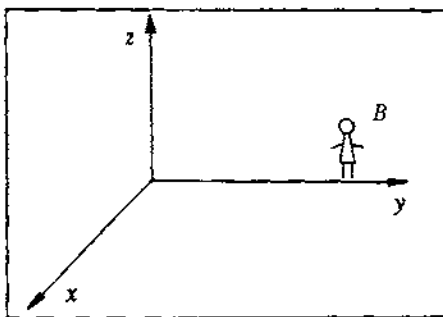
Higidura aztertzea, azken batez, aldiune desberdinetan gorputz batek erreferentzia-sistema batean dituen posizioak adieraztea da. Beraz, oinarri-oinarrian bi neurketa-motaren beharra ageri da: denboraren neurketa (aldiunea) eta distantzien neurketa (posizioa). Eta noski, neurketa horiek egiten dituen pertsona edo tresna hipotetiko eta ideal batek egon beharko du, *behatzaileak* alegia. Elementu horien multzoa da *erreferentzia-sistema*.

Gorputzaren posizioari dagokionez, erreferentzia-sistemaren hautapenetik bertatik sortzen da higiduraren erlatibotasuna, bi erreferentzia-sistema desberdinetatik posizioak ez baitira era berean neurtzen.

Denboraren neurketei dagokionez, ondoko galdera egin diezaiokegu geure buruari. Erreferentzia-sistemak ba ote du eraginik denbora-tarteen neurketan? Fisika ez-erlatibistak ezezko erantzuna ematen du, denboraren eboluzioa gauza absolututzat hartuz; eta liburu honetan irizpide hori erabiliko dugu. Ez da sobera egongo, ordea, denboraren absolututasuna postulatu gisako suposizioa baino ez dela azpimarratzea. Hain zuzen ere, Erlatibitatearen Teoriaren arloan sartzean irizpide horrek ez du inolako baliorik. Dena den, gure liburu honetan agertuko diren azterketetan, denbora modu berean aldatzen ikusiko dute behatzaile guztiek.

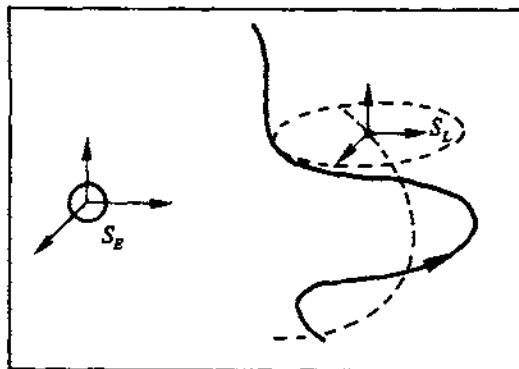
Beraz, denetara, sistema desberdinetan dauden behatzaileek, modu desberdinez ikusiko eta deskribatuko dute higidura berbera. Hala ere, higidura bat bakarra da. Hori argi ikusteko, adibide bat jarriko dugu. Baina, ezer baino lehen, erreferentzia-sistemak nola adierazten diren azalduko dugu.

Erreferentzia-sistemak adierazteko, nahikoa da, triedro bat ematea eta bertan behatzaile bat kontsideratzea (3.1. irudia).



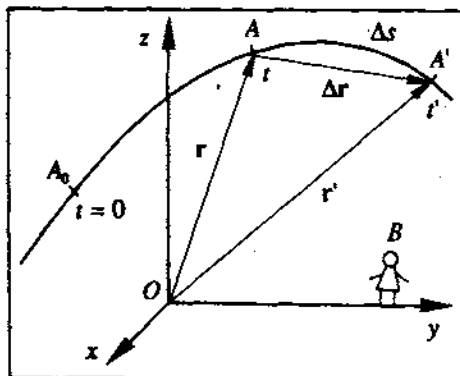
3.1. irudia. Triedroak ($Oxyz$) eta bertako behatzaileak (B) definitzen dute erreferentzia-sistema.

Ipin dezagun adibide bat. Demagun ilargiaren higidura. Higidura hori Eguzkian dagoen sistematik (S_E) eta Lurrean egonik S_E -ren paraleloa den sistematik (S_L) aztertuko dugu.

3.2. irudia. Ilargiaren higidura S_E eta S_L sistematik ikusita.

Preseski, 3.2. irudian ageri denez, S_L sistematik ilargiak elipse bat (ia-ia zirkunferentzia bat) deskribatzen duela ikus daiteke (irudian puntuka dago marrazturik). S_E sistematik, ordea, uhin antzeko batzuk dituen ibilbide bat ikusten da (lerro jarraitua).

Hurrengo gaian, higidura erlatiboa aztertzean, erreferentzia-sistema desberdinetako behatzaileen neurketen artean dauden erlazioak aztertuko ditugu. Baina oraingo honetan, erreferentzia-sistema bakar bat hartuko dugu oinarritzat. Eta horretatik higiduraren ezagugarri nagusiak aztertuko ditugu: abiadura eta azelerazioa. Horiez gain, ibilbidea kontsideratu behar dugu, noski. Eta hasteko, kasu orokorra aztertzeke, ibilbidea kurbatua dela kontsideratuko dugu.



3.3. irudia. Partikula puntualaren higidura definitzen duten elementuak.

3.1.1. Abiadura

Lehenik eta behin, 3.3. irudian ageri diren elementuak definituko ditugu.

- $\overline{A_0 A A'}$: ibilbidea.
- A_0 : lehen unean ($t = 0$) partikula dagoeneko puntua.
- A : t aldiunean partikula dagoeneko puntua.
- A' : t' aldiunean partikula dagoeneko puntua.

- $\mathbf{r}$: A puntuaren posizio bektorea.
 $\mathbf{r}'$: A' puntuaren posizio bektorea.
 $A_0A = s$: arku-luzera.
 $\Delta \mathbf{r}$: AA' baina bektorialki neurturik ($\overrightarrow{AA'}$ desplazamendu bektorea).
 Δs : AA' baina arkuan barrena neurturik.
 Δt : $t' - t$ denbora-tartea.

Lehenik *batez besteko abiadurak* definituko ditugu; eta gainera bi modu desberdinez.

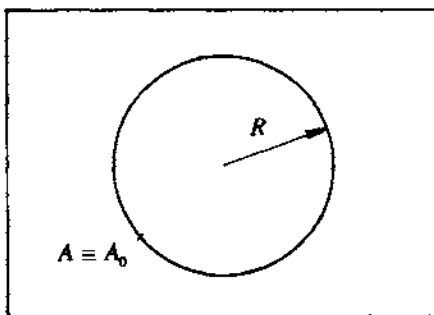
a) Eskalarki:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3-1)$$

b) Bektorialki:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (3-2)$$

Izatez, bi hauen artean ez dago harreman finkorik. Adibide batez, higidura zirkularraz hain zuzen, zein desberdin izan daitezkeen ikusiko dugu.



3.4. Irudia. Higidura zirkularra.

Demagun 3.4. irudiko ibilbide zirkularra, eta kontsidera ditzagun bira oso bat ematean lortuko ditugun batez besteko abiadurak:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{\Delta t} \quad \text{eta} \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{0}, \quad (3-3)$$

zeren hasierako eta bukaerako puntuak toki berean baitaude.

Abiadura magnitudearen dimentsio-ekuazioa hauxe da:

$$[v] = \left[\frac{s}{t} \right] = LT^{-1}, \quad (3-4)$$

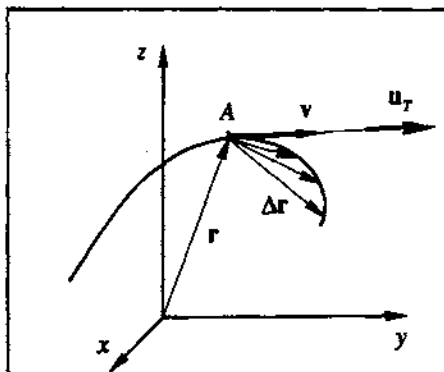
unitateak $m \cdot s^{-1}$ edo $cm \cdot s^{-1}$ izanik.

Aurreko lerroetan batez besteko abiadurak definitu ondoren, orain *aldiuneko abiadurak* definituko ditugu. Eta lehen bezala, bi moduz egingo dugu.

- a) Eskalarki. Aldiuneko abiadura eskalarra batez besteko abiadura eskalarraren limitea da, Δt tartea zerorantz doanean:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (3-5)$$

Hauxe da preseski autoen belozimetroak adierazten duen abiadura.



3.5. irudia. Abiadura lortzeko limiterranzko prozesua.

- b) Bektorialki. Aldiuneko abiadura (bektoriala) batez besteko abiadura bektorialaren limitea da, denbora-tartea zerorantz doanean:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{v}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3-6)$$

Beraz, bektore bat da. Norabidea, kurbaren ukitzailearena da, zeren eta $\Delta \mathbf{r}$ bektorearen norabidea horixe baita limitean, 3.5. irudian ikus daitekeenez. Eta bektore horren modulua, aldiuneko abiadura eskalarra (v) da:

$$|\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = v, \quad (3-7)$$

zeren $|d\mathbf{r}| = ds$ baita.

Honelatan, ba, aldiuneko abiadura honelaxe adieraz dezakegu,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v \mathbf{u}_T, \quad (3-8)$$

$\mathbf{u}_T$ delakoa abiaduraren norabideko bektore unitarioa izanik, ibilbidearen ukitzailea, alegia. Abiaduraren osagaiak ondokoak dira:

$$\mathbf{v} = \frac{d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \quad (3-9)$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ eta $\mathbf{k}$ konstanteak baitira. Alegia,

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (3-10)$$

idatzi ohi da,

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt}, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt}, \quad \text{eta} \quad v_z \equiv \frac{dz}{dt} \quad (3-11)$$

izanik. Abiaduraren modulua hauxe da:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (3-12)$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (3-13)$$

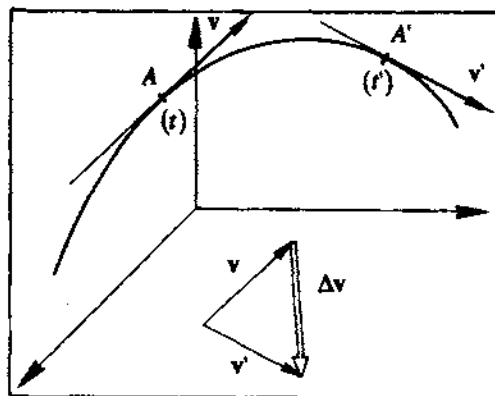
3.1.2. Azelerazioa

Kasu orokorrean, puntuaren abiadura aldatuz doa denborarekin. Aldaketa hori adierazteko, magnitude berri bat erabiltzen da: azelerazioa. Horrek denbora-unitateko abiaduraren aldaketa adierazten du. Azelerazioa magnitude bektorial bat da, eta moduluz eta norabidez abiadurak duen aldakuntzaren neurria adierazten du (3.6. irudia).

Lehenik, *batez besteko azelerazioa* (bektoriala, noski) definituko dugu:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (3-14)$$

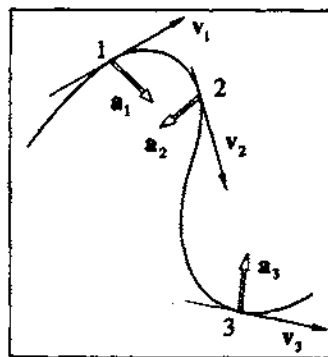
Ondoren, *aldiuneko azelerazioa* definituko dugu, aurrekoaren limite gisa, denbora-tartea zerorantz doanean:



3.6. irudia. Azelerazioaren definizioa.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \mathbf{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3-15)$$

Lehenago ikusi dugunez, abiaduraren norabidea ibilbidearen ukitzailea da. Orokorki azelerazioak ez du norabide hori. Azelerazioaren norabideaz esan daitekeen gauza bakarra, ibilbidearen barrualderanzko noranzkoa duela da, hots, alde ahurreranzkoa.



3.7. irudia. Azelerazioaren norabidea ibilbidearen barrualderanzkoa da.

Azelerazioaren dimentsio-ekuazioa hauxe da,

$$[a] = \left[\frac{v}{t} \right] = L T^{-1} T^{-1} = L T^{-2}, \quad (3-16)$$

unitateak $m \cdot s^{-2}$ edo $cm \cdot s^{-2}$ izanik.

Analitikoki, honelaxe adierazten da azelerazioa:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (3-17)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} i = \frac{d^2 y}{dt^2} j = \frac{d^2 z}{dt^2} k, \quad (3-18)$$

azelerazioaren modulua ondokoa izanik:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2}. \quad (3-19)$$

3.2. AZELERAZIO KONSTANTEKO HIGIDURA

Higidura hau oso interesgarria da, grabitatearen erakarpenaren pean gertatzen dena baita (Lurraren azalean). Matematikoki, problema hori honetan datza, alegia, azelerazioa (konstantea) eta lehen uneko baldintzak ezagutuz, higidura osoa eta edozein aldiunetako abiadura ezagutzean.

Demagun azelerazioa konstantea dela.

$$a = \frac{dv}{dt} = k \text{ tea} \quad (3-20)$$

denez,

$$dv = a dt. \quad (3-21)$$

t_0 eta t aldiuneen artean integratuz:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt = a \int_{t_0}^t dt = a(t - t_0) = v - v_0. \quad (3-22)$$

Beraz,

$$v = v_0 + a(t - t_0), \quad (3-23)$$

$$\text{hemen } \left\{ \begin{array}{l} t_0 : \text{hasierako aldiunea } (A_0 \text{ puntuan}) \\ v_0 : \text{hasierako abiadura } (A_0 \text{ puntuan}) \\ t : \text{edozein aldiune } (A \text{ puntuan}) \\ v : A \text{ puntuan duen abiadura} \end{array} \right\} \text{ izanik.}$$

Integratuz, aurrera jo dezakegu. Hain zuzen, abiadura

$$v = \frac{dr}{dt} \quad (3-24)$$

denez,

$$\int_{r_0}^r dr = r - r_0 = \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt. \quad (3-25)$$

Honelatan, ba, azkenean hauxe lortuko dugu:

$$r = r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2, \quad (3-26)$$

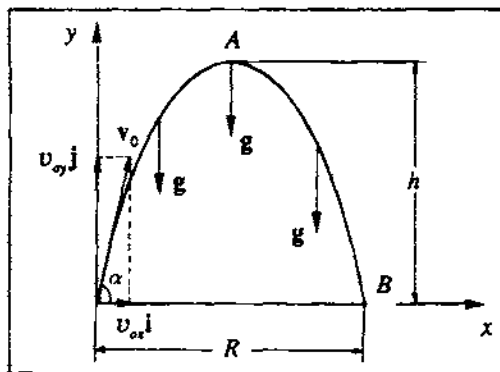
$$\text{hemen } \left\{ \begin{array}{l} r_0 \text{ delakoa } A_0 \text{ puntuaren posizio bektorea} \\ r \text{ delakoa } A \text{ puntuaren posizio bektorea} \end{array} \right\} \text{ izanik.} \quad (3-27)$$

(3-23) eta (3-26) adierazpenak aztertuko ditugu.

(3-23) : Bertan dakusagunez, orokorki v_0 eta a bektoreen norabideak desberdinak direnean, bi bektore horiek plano bat osatzen dute, eta v abiadura plano horretan dago.

(3-26) : r bektorearen muturra r_0 bektorearen muturretik pasaturik v_0 eta a bektoreek sortzen duten planoaren paralelo den plano batean dago, edo gauza bera dena, r desplazamentu bektorea v_0 eta a bektoreek osatzen duten planoan dago.

Bi ondorio horiek ondokoa esan nahi dute, alegia, azelerazio konstantez sortzen den higidura laua dela, hots ibilbidea plano batean dagoela. Horrez gain, erraz froga daitekeenez, (3-26) adierazpena parabola baten ekuazioa da, parabola horren ardatza a delakoaren norabidekoa izanik.



3.8. irudia. Grabitatearen eraginpeko ibilbidea parabola bat da.

Adibide gisa, kasu berezi bat aztertuko dugu: grabitatearen eraginpean higitzen ari den puntu materialarena. Higidura laua denez, Oxy plano a aukeratuko dugu higidura deskribatzeko (Ox horizontala eta Oy bertikala izanik). Orduan,

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{j}. \quad (3-28)$$

Kalkuluak errazteko, hasierako baldintza modura

$$\mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{eta} \quad t_0 = 0 \quad (3-29)$$

hartuko ditugu. Halaber,

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} = v_0 \cos\alpha \mathbf{i} + v_0 \sin\alpha \mathbf{j}. \quad (3-30)$$

(3-23) adierazpena erabiliz, eta $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ izanik,

$$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} - gt\mathbf{j}. \quad (3-31)$$

Eta osagaiak bananduz:

$$v_x = v_{0x}, \quad (3-32a)$$

$$v_y = v_{0y} - gt, \quad (3-32b)$$

Honek hauxe esan nahi digu, x norabidean abiaduraren osagaia denbora osoan berbera dela, hots, konstantea dela. Aldiz, y norabidean higidura uniformeki azeleratua (edo dezeleratua) dugu.

Gure kasuarekin segituz, kalkula dezagun gorputzak goiko punturaino (A) igotzeko behar duen denbora (t_1). A puntuan

$$v_{Ay} = 0 \quad (3-33)$$

denez,

$$0 = v_{0y} - gt_1 \rightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \quad (3-34)$$

Kalkula dezagun, orain, edozein punturen koordenatuen adierazpena. (3-26) adierazpena hartuz,

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j})t - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}. \quad (3-35)$$

eta osagaiak bananduz:

$$x = v_{0x}t. \quad (3-36a)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3-36b)$$

Azken hauetan finkatuz, punturik gorenaren altuera, $y_1 = h$, lor dezakegu. Horretarako, t_1 denbora y -ren formulara pasatuko dugu:

$$y_1 = h = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g}, \quad (3-37)$$

edo bestela idatziz:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3-38)$$

Modu berean, $OB = R$ irispena kalkula dezakegu (irispin horizontala). B puntuan, $y = 0$ da. Beraz,

$$0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2, \quad (3-39)$$

bertan t_2 denbora partikula B puntuan dagoeneko aldiunea izanik. Ikus daitekeenez,

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_1. \quad (3-40)$$

Horrela, irispena B puntuaren x koordenatua denez,

$$R = v_{0x}t_2 = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad (3-41)$$

eta azkenean hauxe dugu:

$$R = \frac{2v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3-42)$$

Aurreko puntuan kalkulaturiko formularen finkatuz, v_0 hasierako abiaduraren balio jakin bati dagokion irispin horizontalaren balio maximoa kalkula dezakegu. Formularen bertan ikus daitekeenez,

$$R = f(\alpha). \quad (3-43)$$

Beraz, balio maximoa lortzeko, $\frac{dR}{d\alpha} = 0$ egin behar dugu, hots,

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\alpha = 0, \quad (3-44)$$

eta hori gerta dadin, $\cos 2\alpha = 0$ izan behar da:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ. \quad (3-45)$$

Beraz, v_0 hasierako abiaduraren balio jakin bati dagokion irispene maximoa $\alpha = 45^\circ$ angeluari dagokio. Kasu horretan $\sin \alpha = 1$ denez,

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3-46)$$

Gauza berbera ikus daiteke honela: R irispene maximoa izango da, $\sin 2\alpha$ maximoa denean, hots,

$$\sin 2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ. \quad (3-47)$$

Azelerazio konstanteko higiduraren kasuko kalkuluekin bukatzeko, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu. Horretarako, $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ adierazpenetatik denbora ezabatu behar dugu, $y = y(x)$ gera dakigun. Horretarako (3-36a) adierazpenetik denbora bakanduko dugu, gero (3-36b) adierazpenean ordezkatzeko, hau da:

$$x = v_{0x} t \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}, \quad (3-48)$$

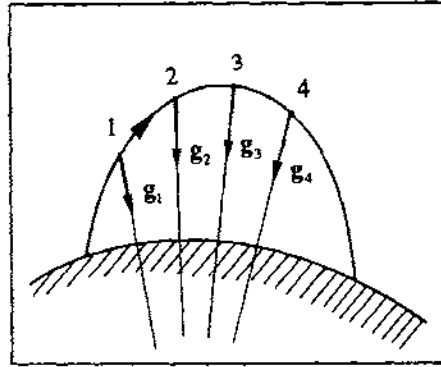
$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v_{0x}^2}, \quad (3-49)$$

eta, horrela, ibilbidearen ekuazioa ondokoa da:

$$y = -\left(\frac{1}{2} \frac{g^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) x^2 + (\tan \alpha) x. \quad (3-50)$$

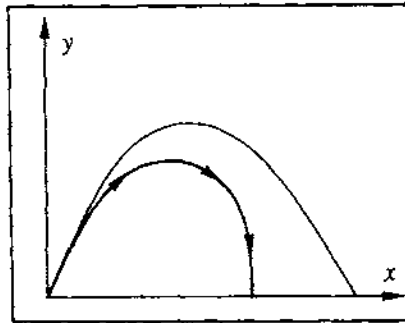
Hori parabola baten ekuazioa da ($y = ax^2 + bx + c$). Ardatzak y -ren norabidea du eta konkabotasuna edo ahurdura beherantz begira dago, x^2 -ren koefizientea negatiboa baita. Gainera, parabola hori ardatzen jatorritik pasatzen da, $c = 0$ baita, 3.8. irudiarekin ados.

Grabitatearen eraginpean gertatzen den higidura aztertu dugunez gero ($g = \text{ktea}$), interesgarria da benetako higidura erreala buruzko zenbait ohar egitea. Izatez, Lurraren gaineko atmosferako higidura aztertzean, zenbait zuzenketa egin beharko lirateke hiru arrazoi nagusirengatik: Lurra ia-esfera bat (izatez elipsoidea) delako, atmosferan airea dagoelako eta Lurra bere ardatzaren inguruan biraka ari delako.



3.9. irudia. Lurraren eitearen kausaz, grabitate bektorearen norabidea aldatuz doa puntutik puntura.

- 1) Higidura oso luzea denean, kontuan eduki behar da Lurraren kurbadura. Horren kausaz, g aldatuz doa norabidez. Horrela, lortzen den ibilbidea ez da parabola, elipsea baizik. Bestalde, gorputzak altuera handia hartzen badu, grabitatearen azelerazioa moduluz ere aldatzen dela kontsideratu beharko da ($g_1 \neq g_2 \neq g_3, \dots$). (ikus 3.9. irudia). Azken batez, Kepler-en problema kontsideratu behar dugu, planeten kasuan bezala.

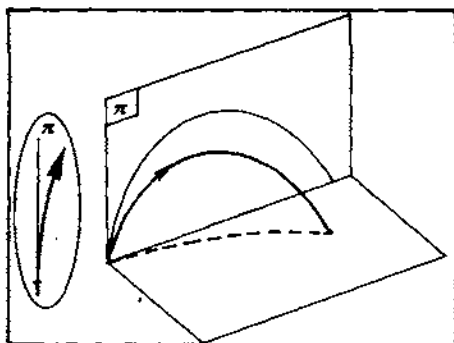


3.10. irudia. Marruskaduraren kausaz, higidura balaztatu eta ibilbidea laburtu egiten da.

- 2) Airearen marruskadura kontuan harturik, gorputzak (edo proiektilek) egiten duen bidea laburragoa da, balaztatuz joango baita (3.10. irudia).

Bestalde, eta proiektila bere ardatzaren inguruan biraka badabil, *Magnus efektua* ere kontuan eduki beharko litzateke marruskadura horren kausaz, eta horrek plano bertikalekiko desbideraketa ekarriko luke.

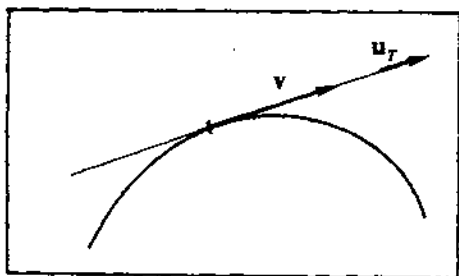
- 3) Coriolis-en indarra dela eta, Lurraren biraketa-higiduraren kausaz. Ipar Hemisferioan abiadura guztiak eskuinerantz desbideratzen dira (Hego Hemisferioan, ezkererantz). Horrela, higidura ez da laua. Dena den, puntu hau hurrengo gai batean aztertuko dugu (3.11. irudia).



3.11. irudia. Ipar Hemisferioko higidurak eskuinerantz desbideratzen dira, plano bertikaletik irtenik.

3.3. AZELERAZIOAREN OSAGAI TANGENTZIALA ETA OSAGAI NORMALA

Demagun higidura lau eta kurbatua dugula. Izatez, higidurarik orokorrenak ez du zertan laua izan, eta kasurik orokorrean abaildua da. Dena den, hemen esanen duguna guztiz orokorra da, zeren eta ibilbide abailduen kasuan, plano muntzailea harturik, higidura laua balitz bezala azter baitaiteke. Ohar hau eginik, aurrera egingo dugu.



3.12. irudia. Abiadurak beti du zuzen ukitzaillearen norabidea.

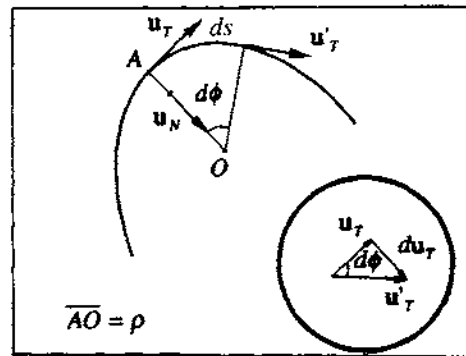
Azelerazioaren definizioa ematean, beraren norabidea kurbaren barrualderanzkoa dela esan dugu. Honela, ba, orokorki, bi osagai ditu, bata kurbaren zuzen ukitzaillearen norabidean eta bestea kurbaren normalaren norabidean. Edozertara, higidura kurbatuaren kasuan, lehenago esan dugunez, abiadurak ukitzaillearen norabidea du (3.12. irudia),

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_T, |\mathbf{u}_T| = 1 \text{ izanik.} \quad (3-51)$$

Deribazioz, azelerazioa kalkulatu dugu:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\frac{d\mathbf{u}_T}{dt}. \quad (3-52)$$

3.13. irudian argi ikus daiteke, $\mathbf{u}_T$ -ren norabidea denborarekin (edo posizioarekin) aldatuz doala. Horregatik, higidura kurbatuan $d\mathbf{u}_T/dt \neq 0$ da. Baina zenbat balio du $d\mathbf{u}_T/dt$ horrek?

3.13. irudia. u_T bektorearen aldaketa.

Lehenik, beraren norabidea kalkulatuko dugu. Horretarako,

$$u_T \cdot u_T = 1 \quad (3-53)$$

delako kontuan hartuz, eta berau deribatuz,

$$\frac{du_T}{dt} \cdot u_T + u_T \cdot \frac{du_T}{dt} = 0, \rightarrow u_T \cdot \frac{du_T}{dt} = 0. \quad (3-54)$$

Biderkadura eskalar hau nulua izateak, u_T bektorearen denborarekiko deribatuari buruzko informazioa emango digu. Hain zuzen, aurreko adierazpeneko bektoreak ez bata eta ez bestea nulua ez direnez, bektore horiek elkarren perpendikularrak izan beharko dute:

$$u_T \perp \frac{du_T}{dt}. \quad (3-55)$$

Beraz, du_T/dt delakoak u_N bektorearen norabidea du, hots, normalaren norabidea. Bestalde, barrualderanzko noranzkoa du, 3.13. irudiko zirkuluan eskematikoki ikus daitekeenez.

Kalkula dezagun orain bektore unitario tangentearen aldaketaren modulua. Aurreko 3.13. irudian dauden bi triangeluak (partikularen ibilbidean osaturikoa eta zirkulu barruan adierazitakoa) antzekoak dira, beraien alde korrespondenteak binaka harturik aldeak elkarren perpendikularrak baitira, alegia, angelu korrespondenteak elkarren berdinak baitira. Beraz,

$$\frac{|du_T|}{|u_T|} = \frac{ds}{\rho} \rightarrow |du_T| = \frac{ds}{\rho}. \quad (3-56)$$

hemen ρ delakoa aldiuneko kurbadura-erradioa izanik. Aurrera eginez, denborarekiko deribatuaren modulua lor dezakegu, hots,

$$\left| \frac{du_T}{dt} \right| = \frac{|du_T|}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}. \quad (3-57)$$

3.3.1. Higidura zuzena

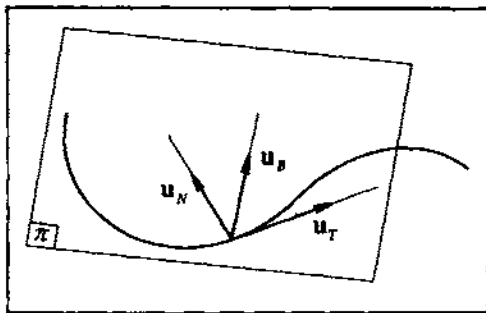
Kasu honetan $\mathbf{u}_T$ bektorea ez da aldatzen higiduran zehar. Beraz, $d\mathbf{u}_T/dt = 0$ da etengabe. Honek, $a_T = 0$ dela esan nahi du, eta hori logikoa da, zeren eta, ibilbidea lerro zuzenean gertatzean, beraren kurbadura-erradioa $\rho = \infty$ baita.

3.3.2. Higidura zuzen eta uniformea

Izatez, aurrekoaren kasu berezia da. Kasu honetan, aurreko azpiatalean esandakoaz gain, $v = \text{ktea}$ da, alegia, $v = \text{ktea}$ eta $\mathbf{u}_T = \text{ktea}$. Beraz, azelerazioaren osagai biak nuluak dira, hots, $\mathbf{a}_T = \mathbf{0}$ eta $\mathbf{a}_N = \mathbf{0}$.

3.3.3. Higidura abaildu orokorra

Kasu orokorrean, edozein kurba abailduren kasuan ere defini daitezke $\mathbf{u}_T$ eta $\mathbf{u}_N$. Bektore horiek plano bat definitzen dute (π) ibilbidearen edozein puntutan. Plano horri *plano muntzailea* (edo *oskulatzailea*) deritzo.



3.16. irudia. Higidura orokorra eta plano muntzailea, triedro intrintsekoa ere adierazirik.

Bi bektore horietan oinarriturik, triedro bat defini daiteke ibilbidearen edozein puntutan. Hirugarren norabideari *binormala* deritzo eta beraren bektore unitarioa honelaxe definitzen da:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_N. \quad (3-62)$$

Hiru norabide horiek *sistema* edo *triedro intrintsekoa* deritzona osatzen dute, eta norabide horiekiko edozein bektorek dituen osagaiei, *osagai intrintsekoak* deritze. Bestalde, azpimarratu egin behar da ezen, aurretik ikusi dugunez, azelerazioak binormalaren norabidean osagairik ez duela. Beraz, osagai intrintsekoak erabiliz, hauxe da azelerazioaren modulua:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (3-63)$$

Magnitude horiei dagozkien unitateak ondokoak dira:

$$\begin{array}{ll} P & \text{segundoa, (s).} \\ v & \text{hertz edo ziklo segundoko, (s}^{-1}\text{).} \end{array}$$

Abiadura angeluarraren modulua honelaxe erlazionatzen da periodoarekin eta maiztasunarekin:

$$v = \frac{2\pi R}{P} = \omega R, \quad (3-73)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi v. \quad (3-74)$$

Aurreko adierazpenak kontuan hartuz, eta ω konstantea dela gogoan edukiz, partikulak edozein aldiunetan duen posizio angeluarra lor dezakegu. Horretarako, ω abiadura angeluarrak θ angeluarekin duen erlazioa kontsideratuz, hauxe dugu:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega dt, \quad (3-75)$$

eta integrazioari limite egokiak jarritz,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt = \omega \int_{t_0}^t dt, \quad (3-76)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0). \quad (3-77)$$

Alegia, hasierako baldintzak ezagututa, posizioa erabat zehazturik geratuko da. Adibidez, hasierako baldintzak $\theta_0 = 0$ eta $t_0 = 0$ badira,

$$\theta = \omega t. \quad (3-78)$$

3.4.3. Azelerazio angeluarra

Magnitude bektorial honen definizioa honako hau da:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad (3-79)$$

hots, azelerazio angeluarra abiadura angeluarraren denborarekiko deribatua da (hau ere sasibektorea da, noski). Azelerazio angeluarraren dimentsio-ekuazioa ondokoa da:

$$[\alpha] = \left[\frac{\omega}{t} \right] = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}. \quad (3-80)$$

Higidura lau eta zirkularra aztertzen ari garelarik, kasu horretan ω bektorearen norabidea ez da aldatzen. Beraz, α eta ω bektoreen norabideak berdinak dira; hain zuzen ere, higidura gertatzen deneko planoaren perpendikularrak dira. Hori kontuan harturik, azelerazio angeluarraren modulua ondokoa da:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (3-81)$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (3-90)$$

Azken osagai honi *azelerazio zentripetua* deritzo.

Kasu berezi modura, higidura zirkular uniformearen kasuan, $\alpha = 0$ da, zeren $\omega = \text{kea}$ baita. Beraz, $a_T = 0$ baina $a_N \neq 0$ dira.

Dena den, higidura zirkular orokorrari dagokion azelerazio linealarekin segiturik, beste modu batera ere idatz dezakegu bektorialki azelerazio lineala, horretarako (3-15) eta (3-69) adierazpenak kontuan harturik (azken adierazpen honetarako r bektorearen jatorria biraketa-ardatzean egonik, noski):

$$\mathbf{a} = \frac{d(\omega \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3-91)$$

Azkenean haxe geratuko da:

$$\mathbf{a} = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \quad (3-92)$$

Bestalde, erraz ikus daitekeenez, ondoko baliokidetzak daude:

$$\alpha \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_T \quad \text{osagai tangenziala,} \quad (3-93a)$$

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \equiv \mathbf{a}_N \quad \text{osagai zentripetua.} \quad (3-93b)$$

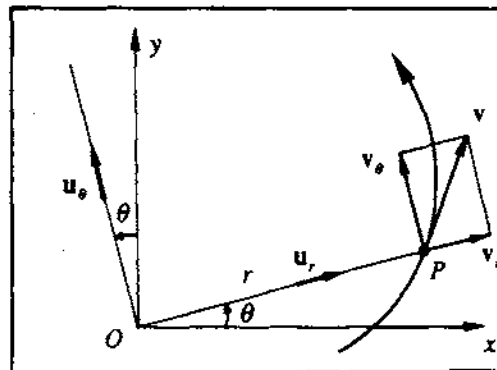
3.5. HIGIDURA KURBATUA PLANOAN

Demagun partikula bat plano batean higitzen ari dela. Bi koordenaturekin, (x,y) , nahikoa da beraren posizioa ezagutzeko. Dena den, (x,y) koordenatu kartesiarrak dira. Baina bestelako koordenatuak ere aukera daitezke; adibidez, koordenatu zilindrikoak edo esferikoak.

Atal honetan, era horretako koordenatuak aukeratuko ditugu, P puntuaren posizioa adierazteko r eta θ erabiliz:

r : OP distantzia da.

θ : OP zuzenak Ox ardatzarekin osatzen duen angelua.



3.20. irudia. Planoko higidura.

Izatez, horiek koordenatu esferiko zein zilindrikoak dira, bi dimentsiotan. Bektore unitario gisa, espazioko, edo, hobeto esateko, ibilbideko edozein puntutarako $\mathbf{u}_r$ eta $\mathbf{u}_\theta$ hartuko ditugu. Hain zuzen, $\mathbf{u}_r$ bektorea OP bektorearen norabidekoa da eta $\mathbf{u}_\theta$ bektorea norabide perpendikularrekoa, θ angelua hazten deneko noranzkoan (3.20. irudia).

Koordenatu horien bidez, era honetan eman ahal izango ditugu puntuari dagozkion magnitude zinematikoak:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \quad (P \text{ puntuan, noski}) \quad (3-94)$$

Adierazpen hori deribatuz,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} \quad (3-95)$$

Kalkula dezagun $d\mathbf{u}/dt$ delakoaren balioa. Horretarako, $\mathbf{u}_r$ eta $\mathbf{u}_\theta$ bektoreak Ox eta Oy ardatzen norabideetan dituzten osagaien bidez idatziko ditugu:

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}, \quad (3-96a)$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}. \quad (3-96b)$$

Lehenengoa deribatuz,

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\mathbf{i} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\mathbf{j} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}). \quad (3-97)$$

Beraz,

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta. \quad (3-98)$$

Honelatan, ba, abiaduraren adierazpena eramanez,

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta. \quad (3-99)$$

Beraz, adierazpen horrek dioskunez, abiadurak bi osagai ditu. Osagai horiek honelaxe deitu ohi dira:

$$\frac{dr}{dt} = v_r \quad \text{osagai erradiala, } r \text{ erradioaren } (\mathbf{u}_r\text{-ren}) \text{ norabidea baitu. } O \text{ jatorriarekiko distantziaren aldaketaren neurria adierazten du.}$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v_\theta \quad \text{zeharkako osagaia, hots, } \mathbf{u}_\theta\text{-ren norabidean, } r \text{ bektorearen norabidearen aldaketaren neurria adierazten du.}$$

Horiek guztiak kontuan edukiz, azkenez, $\mathbf{v}$ bektorea honelaxe idatz dezakegu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta. \quad (3-100)$$

Adibide modura, abiadura zirkularren kasuan, jatorria zirkunferentziaren zentroan hartuz, $r = R = \text{ktea da}$, eta beraz,

$$\frac{dr}{dt} = 0, \rightarrow v_r = 0. \quad (3-101)$$

Hots, kasu horretan abiadura erradiala nulua da.

Higidura kurbatu lau orokorrarekin segituz, azelerazioaren osagai erradiala eta zeharkako osagaia ere berdin kalkula daitezke, alegia,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta\right)}{dt}, \quad (3-102)$$

eta deribatuz,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}. \quad (3-103)$$

Hemen $d\mathbf{u}_\theta/dt$ ezagutzea falta zaigu. Aurreko orrialdean jarri ditugun $\mathbf{u}_r$ eta $\mathbf{u}_\theta$ bektoreen balioetan finkatuz,

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\mathbf{i} - \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\mathbf{j} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_r. \quad (3-104)$$

Goiko adierazpena eramanez eta osagaiak bananduz,

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad (3-105)$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (3-106)$$

Abiaduraren osagaien kasuan bezala, hauei ere azelerazioaren osagai erradiala eta zeharkako osagaia deritze. Zer esanik ez, azelerazioa honelaxe idaz daiteke bektorialki:

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta. \quad (3-107)$$

4. gaia

Higidura erlatiboaren zinematika

Aurreko gaian ikusi dugunez, higiduraren kontzeptua —eta halaber abiadurarena eta azelerazioarena— gauza erlatiboa da. Erreferentzia-sistema desberdinetan dauden behaizaileek behaketa eta neurketa desberdinak egiten dituzte.

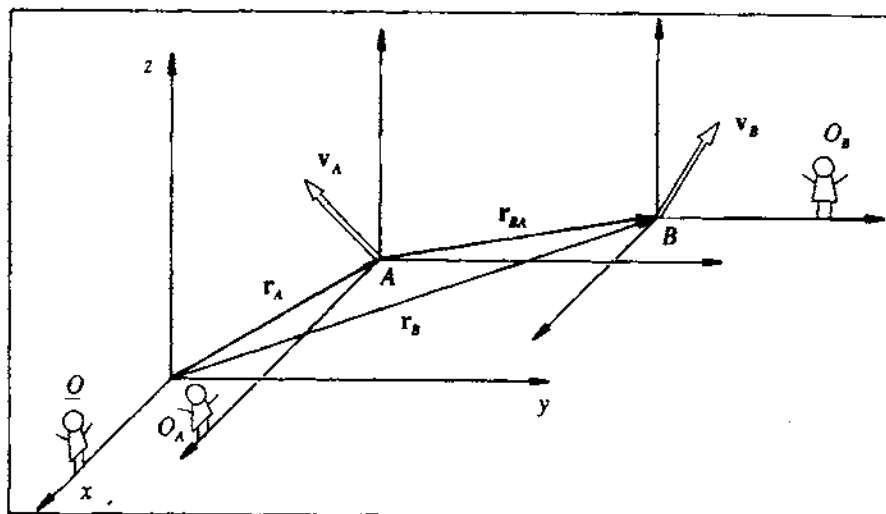
Fisikariek ez dute beti erreferentzia-sistema berbera erabiltzen; aitzitik, kasu bakoitzean sistemarik egokiena eta sinpleena aukeratzera jotzen dute. Batzuetan Lurrarekin batera doan sistema ez-inertziala —biraka ari baita— erabiltzen dute (hurrengo gaian ikusiko dugu sistema inertzial eta ez-inertzialak zer diren); beste batzuetan, Eguzkiarekin edo izar finkoekin doana; beste zenbaitetan, aztertzen ari den sistemaren masa-zentroarekin doana; eta abar. Hala ere, gertaera fisikoak bakarrak dira, berberak dira, nahiz eta sistema desberdinetan itxura desberdinez ageri. Horregatik, sistema desberdinetatik egiten diren neurketa desberdinak elkarrekin erlazionatzea komeni da, sistema desberdinetako behaketak modu berean interpretatu ahal izateko.

Gaur eguneko fisikariek dakitenez, pausagunean dagoen sistema absoluturik edo pausagune absolutuan dagoen sistemarik bilatzeak ez du zentzurik. Sistema guztiak erlatiboki kontsideratu behar dira. Eta horregatik, garrantzi handikoa da, sistema desberdinetako neurketak konparatzen jakitea. Horixe da, hain zuzen ere, gai honetan egingo duguna: higidura berberari sistema desberdinetan dagozkion neurketak (magnitudeak) erlazionatu, edo bestelako hitzen bidez esateko, higidura erlatiboaren zinematika aztertu.

4.1. ABIADURAREN ETA AZELERAZIOAREN IZAERA ERLATIBOA

Demagun, O behaizailea dagoen $Oxyz$ erreferentzia-sistematik neurtuta, A eta B puntuak higitzen ari direla. Demagun, bestalde, A eta B puntuei loturik beste bi erreferentzia-sistema daudela, eta berorietan O_A eta O_B behaizaileak daudela, hurrenez hurren.

Azter ditzagun, O_A eta O_B behaizaileek egiten dituzten neurketa zinematikoak, O behaizaileak egiten dituenekin konparatuz. Horretarako, 4.1. irudian adierazi ditugu hiru erreferentzia-sistema horiek; bestalde, hiruren ardatzak etengabe elkarren paraleloak direla joko dugu.



4.1. irudia. Testuan aipatutako hiru sistema paraleloei dagozkien posizio bektoreak.

4.1.1. Posizio bektoreak

A eta B puntuen posizioak neurtzean, hiru behatzaileek emaitza desberdinak lortuko dituzte.

Kasurako, O behatzaileak ondoko neurketak egingo ditu:

A-ren posizio bektorea: $\mathbf{r}_A$,

B-ren posizio bektorea: $\mathbf{r}_B$.

Bestalde, O_A behatzailea jatorria A puntuan eta ardatzak $Oxyz$ sistemaren paraleloak dituen sistema batean doa. Honek egingo dituen neurketen emaitzak honelaxe adieraziko ditugu:

A-ren posizio bektorea: $\mathbf{r}_{AA} = \mathbf{0}$,

B-ren posizio bektorea: $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$.

Eta modu berean, O_B behatzaileak ondokoak neurtuko ditu:

A-ren posizio bektorea: $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$,

B-ren posizio bektorea: $\mathbf{r}_{BB} = \mathbf{0}$.

Argi ikus daitekeenez,

$$\mathbf{r}_{AB} = -\mathbf{r}_{BA}, \quad (4-1)$$

alegia, bi punturen elkarrekiko posizio bektoreak, elkarren berdinak baina aurkako zeinukoak dira.

Behatzaile desberdinek puntuak aztertzean neurturiko posizio bektoreak desberdinak direla ikustean atera dezakegun ondorioa ondokoa da, alegia, posizio bektoreen izaera erlatiboa dela, hots, neurtzen dituzten behatzaileekiko erlatiboa; hortaz, behatzaile bakoitzak bere emaitza lortuko du.

4.1.2. Abiadurak

Denbora magnitude absolutu gisa jotzen da, hots, behatzaile guztiek modu berean neurtzen dute (azken batez, hori aldaezintasun galilearra da). Hipotesi hori onarturik (Mekanika ez-erlatibistan ohikoa dena) hasierako unean erlojuak sinkronizaturik egon badira, hauex idatz dezakegu:

$$t = t_A = t_B, \quad (4-2)$$

$$dt = dt_A = dt_B. \quad (4-3)$$

A eta B puntuen higidura aztertzean, O behatzaileak ondoko abiadurak neurtuko ditu, hurrenez hurren:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad (4-4a)$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}. \quad (4-4b)$$

O_A behatzaileak, ordea, beste hauek:

$$\mathbf{v}_{AA} = 0, \quad (4-5a)$$

$$\mathbf{v}_{BA} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A. \quad (4-5b)$$

Azken hau B puntuak A puntuarekiko duen abiadura da. O_B behatzaileak, bere aldetik, abiadura hauek neurtuko ditu:

$$\mathbf{v}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B. \quad (4-6a)$$

$$\mathbf{v}_{BB} = 0. \quad (4-6b)$$

Lehengo antzera, argi ikus daitekeenez:

$$\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}. \quad (4-7)$$

Denetara, abiadurekin ere posizio bektoreekin ateratako ondorio berberera iritsi gara, hau da, abiaduren izaera erlatiboa azpimarratzera.

4.1.3. Azelerazioak

Hauekin ere berdintsu gertatzen da. A eta B puntuen higidurak aztertzean, O behatzaileak azelerazio hauek neurtuko ditu:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt}, \quad (4-8a)$$

$$\mathbf{a}_B = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt}. \quad (4-8b)$$

O_A behatzaileak B puntuaren azelerazio hau neurtuko du:

$$\mathbf{a}_{BA} = \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A, \quad (4-9)$$

eta O_A behatzaileak A puntuaren azelerazio hau neurtuko du:

$$\mathbf{a}_{AB} = \frac{d\mathbf{v}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B. \quad (4-10)$$

Hemen ere, argi dagoenez:

$$\mathbf{a}_{BA} = -\mathbf{a}_{AB}. \quad (4-11)$$

Oraingoan ere, agerikoa izan da azelerazioen izaera erlatiboa.

Edozertara, lorturiko erlazioak honelaxe interpreta daitezke: erreferentzia-sisteman geldidagoen behatzailearekiko partikula bat $\mathbf{v}$ abiaduraz eta $\mathbf{a}$ azelerazioaz higitzen bada, partikula horrekin batera eta paraleloki higitzen ari den beste erreferentzia-sistema bat kontsideratuz, bertan doan behatzaileak, bere inguruko mundu osoko partikula guztiak, lehenengo sistemarekiko duten higiduraz gain, $-\mathbf{v}$ abiaduraz eta $-\mathbf{a}$ azelerazioaz higitzen ikusiko ditu. Hots, lehenengo sisteman geldidauden partikulak $-\mathbf{v}$ abiaduraz eta $-\mathbf{a}$ azelerazioaz higitzen direla ikusiko du. Hauxe da trenean goazela gertatzen zaiguna: geltokian trena higitzen hastean, kaian geldidauden pertsonak atzerantz doazela uste dugu, geugeldidagudela pentsaturik.

Ohar modura diogun ezen, aurreko azalpenean, 'ikusit' baino 'neurtu' idaztea hobe izango litzatekeela, zeren abiadura erlatibo oso handiekin (argiaren abiadurarekin konparagarriak direnekin) bi hitzen esangura desberdina baita. Erlatibitatearen Teorian ikus daitezkeenez. Hala ere, maila honetan erabiliko ditugun abiaduren kasuan informazioa pasatzeko seinale-abiadura infinituak kontsideratzen ditugunez (denboraren absolututasuna onartzean), bi hitzok sinonimotzat har ditzakegu.

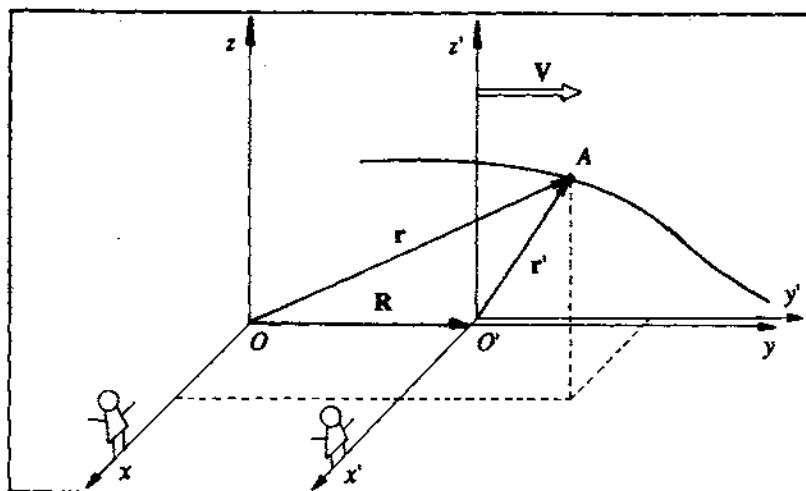
4.2. TRANSLAZIO-HIGIDURA ERLATIBOA

Oraingo atalean elkarrekiko abiadura konstantez eta paraleloki higitzen ari diren bi behatzaile kontsideratuko ditugu. O sistemarekin doan behatzaileak, $\mathbf{V}$ abiaduraz dakusa higitzen O' sistema. Adibide modura eta kalkuluak errazteko, bi sistemen ardatzak paraleloak direla kontsideratuko dugu, eta halaber, abiadurak ($\mathbf{V}$ delakoak) Oy ardatzaren norabidea duela, eta $t_0 = 0$ aldiunean ardatz-sistema biak leku berean daudela (4.2. irudia).

A partikula puntualaren azterketa zinematikoa egingo dugu eta, horretarako, lehenik eta behin, erabiliko dugun idazkera azalduko dugu:

- Azenturik gabe eta letra xehez adierazitako magnitudeak, $Oxyz$ sistematik neurtzen direnak dira. Arrazoi historikoak tartean direla, ohituraz, neurri '*absolutuak*' deritze higidura erlatiboa aztertzean, eta guk ere horrela egingo dugu, nahiz eta jakin '*absolutu*' adjektibo hori egokiegia ez dela.
- Letra larriz idatzirik daudenak, O' puntuaren posizioaren neurketa absolutuei ($Oxyz$ sistematik eginikoei) dagozkien (sistemaren jatorrien arteko higidura adierazten dute).

- Letra xehe azentudunak $O'x'y'z'$ sistematik neurtzen direnak dira. Neurri 'erlatiboak' deritze (nahiz eta, aurreko atalean ikusitakoaren arabera, guztiak erlatiboak diren, alegia, neurtzen direneko sistemarekiko erlatiboak).



4.2. irudia. Translazio-higidura erlatiboa adierazteko erreferentzia-sistemak.

Demagun bi behatzaileen erlojuak sinkronizaturik daudela. Beraz, denboraren absolututasuna onartuz, $t = t'$ da edozein unetan; hau da, denbora era berean iragaten da erreferentzia-sistema bietan. Kalkuluak errazteko, lehenengo unean $t_0 = 0$ hartuko dugu. Honelatan,

$$\mathbf{R} = \mathbf{OO}' = \mathbf{V}t, \quad (4-12)$$

zeren $\mathbf{V}$ bektorea konstantea baita, translazio uniformea aztertzen ari baikara.

4.2.1. Posizio bektoreak

Aurreko 4.2. irudian ikus daitekeenez, bi sistemetan A partikulak dituen posizio bektoreen arteko erlazioa hau da:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' = \mathbf{V}t + \mathbf{r}', \quad (4-13)$$

eta, $\mathbf{V} = V\mathbf{j}$ denez, aurreko adierazpena osagaien funtzioan ipinuz,

$$\begin{cases} x = x', & (4-14a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = y' + Vt, & (4-14b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = z', & (4-14c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = t'. & (4-14d) \end{cases}$$

Hemen denboraren absolututasunari buruzko adierazpena ere sartu dugu. Lau ekuazio horiek *transformazio galilear* bat osatzen dute eta elkarrekiko abiadura uniformeaz eta biraketarik gabe (hots, translazio hutsez) higitzen ari diren bi erreferentzia-sistemetako posizio bektoreen eta neurketa denboralen arteko erlazioak adierazten dituzte. Mekanika

ez-erlatibistaren —alegia, mekanika newtondarraren— oinarrian daude eta guztiz egokiak dira abiadura arruntan kasuan erabiliak izateko, nahiz eta argiarenarekin konparagarriak diren abiadurak aztertzean beren erabilgarritasuna galduko duten.

4.2.2. Abiadura

Aurreko (4-13) adierazpena denborarekiko deribatuz, eta $dt = dt'$ dela kontuan hartuz,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}, \quad (4-15)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'. \quad (4-16)$$

Osagaien arteko erlazioak hauexek dira:

$$\begin{cases} v_x = v'_x, & (4-17a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y = V + v'_y, & (4-17b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_z = v'_z. & (4-17c) \end{cases}$$

4.2.3. Azelerazioa

Berriro ere (4-17) adierazpenak denborarekiko deribatuz,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \mathbf{a}', \quad (4-18)$$

$\mathbf{V}$ konstantea baita. Hau da, puntuaren azelerazioari dagokionez,

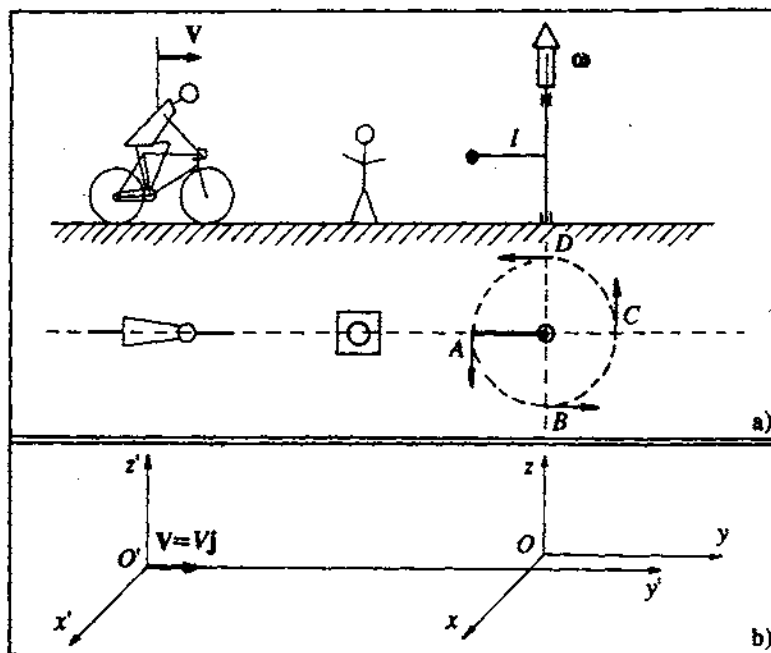
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (4-19)$$

Dakusagunez, bi behatzaileek azelerazio berbera neurtzen dute. Azelerazioa, ba, *aldaeizina* da sistemen translazio uniformearekiko ($\mathbf{V} = \text{ktea}$). Aldaeizintasun hori oso garrantzitsua da fisikaren arloan, eta *aldaeizintasun galilearra* deritzo. Hurrengo gaien, Dinamikaren oinarritzko printzipioak azaltzean, aldaeizintasun horretan finkatuko gara, bai indar kontzeptua definitzean eta bai inertzia-sistematik definitzean ere. Aldaeizintasun hori oso baliagarria izango da Mekanika Klasikoan zehar, nahiz eta Erlatibitatearen Teorian aldatu egin beharko den, Galileo-ren transformazioaren ordez Lorentz-en transformazioa sartuz; ondorioz, bestelako aldaeizintasuna agertuko da, argiaren abiadurarena hain zuzen ere.

Goiko sistemen arteko transformazioak nolakoak diren ulertzeko, adibide bat jarriko dugu.

4.2.4. Adibidea

«Demagun abiadura konstantez higitzen ari den txirrindulari bat ($\mathbf{V} = \text{ktea}$). Beste behatzaile bat geldi dago. Bi behatzaileok, abiadura angeluar konstantez biratzen ari den gorputz bat (geldi dagoen behatzailearen sisteman higitzen ari dena) ikusten ari dira. Zein dira bi behatzaileek neurtzen dituzten abiadurak, higitzen ari den gorputza 4.3.a irudiko A, B, C eta D puntuetan dagoenean?»



4.3. irudia. Biratzen ari den gorputza, bi behatzaile hauek aztertuko dute: abiadura konstantez doan txirindulariak eta geldi dagoen behatzaileak.

Soluzioa lortzeko, bi koordenatu-sistema aukeratuko ditugu: bata zirkulistarekin doa ($O'x'y'z'$), eta bestea geldi dago ($Oxyz$). Bi sistemetako ardatz-bikoteak elkarren paraleloak aukeratuko ditugu, 4.3.b. irudian ikus daitekeenez. Horrek

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}', \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}', \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}'$$

direla esan nahi du.

Esan dugunez, $O'x'y'z'$ sistema $\mathbf{V} = V\mathbf{j} = k\mathbf{e}_y$ abiaduraz higitzen ari da $Oxyz$ sistemarekiko. Abiaduren arteko erlazioa ondokoa da, teoriaraz azaldu dugunaren arabera:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'.$$

Azter dezagun, ba, A puntuaren kasua.

– $Oxyz$ sisteman $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ da, higidura zirkularra baita. Kalkuluak eginez,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} \quad \text{eta} \quad \mathbf{r}_A = -l\mathbf{j} \quad \text{direnez,}$$

$$\mathbf{v}_A = \omega l\mathbf{i}.$$

– $O'x'y'z'$ sisteman $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ denez,

$$\mathbf{v}'_A = \omega l\mathbf{i} - V\mathbf{j},$$

eta horren modulua ondokoa da:

$$v'_A = \sqrt{\omega^2 l^2 + V^2}.$$

Gauza bera egin dezakegu B puntuari dagokionez.

– $Oxyz$ sisteman:

$$\mathbf{r}_B = l\mathbf{i} \quad \text{denez,} \quad \mathbf{v}_B = \omega l\mathbf{j}.$$

– $O'x'y'z'$ sisteman:

$$\mathbf{v}'_B = \omega l\mathbf{j} - V\mathbf{j} = (\omega l - V)\mathbf{j}.$$

Beronen modulua ondokoa da:

$$v'_B = \omega l - V.$$

Irakurleak ariketa modura froga dezakeenez, C eta D puntuetako abiadurak honako hauek dira:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= -\omega l\mathbf{i}, & \mathbf{v}'_C &= -\omega l\mathbf{i} - V\mathbf{j}, \\ \mathbf{v}_D &= -\omega l\mathbf{j}, & \mathbf{v}'_D &= -(\omega l + V)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Beraz, dakusagunez, nahiz eta behatzaile biak higidura berbera behatzen ari diren, gauza desberdinak neurtzen dituzte:

- Geldi dagoen behatzaileak higidura zirkular uniformea dakusa. Hain zuzen, $\mathbf{v}$ abiadurak modulu konstantea du, ωl alegia.
- Txirindulariak neurturiko abiaduraren ($\mathbf{v}'$ -ren) modulua, ordea, aldatuz doa eten-gabe.

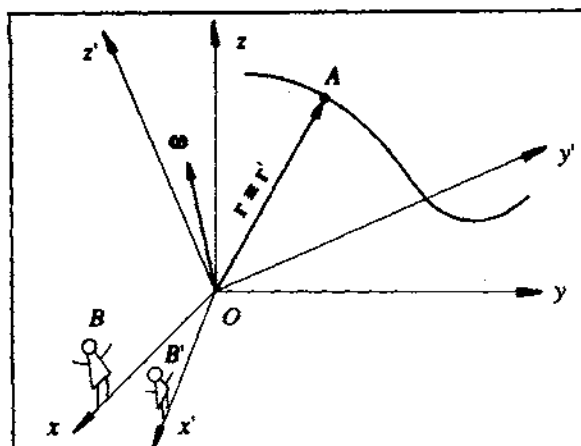
4.3. BIRAKETA UNIFORMEDUN HIGIDURA ERLATIBOA

Oraingo atalean beste kasu berezi bat aztertuko dugu. Elkarrekiko biraka baina translazioz gabe higitzen ari diren bi sistema aztertuko ditugu. Higidura horren azterketa oso interesgarria da, Lurraren higidurari dagokiona baita. Beraz, demagun ondoko bi sistemak ditugula (4.4. irudia):

- Batetik, $Oxyz$ sistema, bertan B behatzailea dagocia. Sistema hau ‘geldi’ dagoela kontsideratuko dugu.
- Bestetik, $O'x'y'z'$ sistema, B' behatzailearekin. Irudian ikus daitekeenez, sistema bien kasuan jatorri bakarra aukeratu dugu, kalkuluak errazteko. Bigarren sistema hau ω abiadura angeluarraz higitzen ari da lehen sistemarekiko. Hain zuzen, ω hau bektore konstantea dela kontsideratuko dugu; horren norabidea O puntutik pasatzen da, noski.

Puntu material bat — A delakoa— higitzen ari da. B eta B' behatzaileak higidura horren magnitude zinematikoak neurtzen ari dira etengabe.

Guk B eta B' behatzaileek neurturiko magnitude zinematiko horien artean dauden erlazioak kalkulatu nahi ditugu; hau da, lehenago egin dugun modura, bi behatzaileek neurtzen dituzten posizio bektoreak, abiadurak eta azelerazioak elkarrekin erlazionatuko ditugu.



4.4. irudia. Elkarrekiko abiadura angeluar uniformez higitzen ari diren bi erreferentzia-sistema.

4.3.1. Posizio bektoreak

Jatorri bereko sistemak direnez gero, partikulak bi sistemetan dituen bi posizio bektoreak bektore berbera dira izatez, hots,

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}'. \quad (4-20)$$

Baina sistema desberdinak direnez, alegia, bektore unitario desberdinak dituztenez, bektore horrek osagai desberdinak edukiko ditu batean eta bestean:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (4-21)$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \quad (4-22)$$

4.3.2. Abiadurak

Azter dezagun lehenik, B behatzaileak neurtzen duen abiadura. Honelaxe adieraziko dugu,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_B, \quad (4-22)$$

azpindize horren bidez, deribazioa egin duena B behatzailea dela adierazirik. Beraz,

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}, \quad (4-24)$$

zeren eta B behatzailearekiko

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0 \quad (4-25)$$

baitira. Bestalde, B' behatzaileak honela deribatzen du denborarekiko:

$$\mathbf{v}' = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \right)_B = \frac{d}{dt} (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}', \quad (4-26)$$

zeren eta B' behatzailearekiko

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = 0 \quad (4-27)$$

baitira, B' behatzaileak $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ eta $\mathbf{k}'$ konstanteak direla dakusa eta. Zer esanik ez, eta Me-kanika Erlatibistan sartu gabe, $t = t'$ dela kontsideratu dugu, hots, denbora absolutua dela eta B eta B' -ren erlojuak sinkronizaturik dabilzala. Halaber, $dt = dt'$ izango da.

Zer erlazio dago B -k eta B' -k neurtzen dituzten abiaduren artean, hau da $\mathbf{v}$ -ren eta $\mathbf{v}'$ -ren artean? (4-20)-tik dakigunez, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ da, eta B behatzaileak berdintza hori deribatuz:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_B = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_B. \quad (4-28)$$

Kalkula dezagun $\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_B$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_B &= \left[\frac{d}{dt} (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') \right] = \\ &= \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + x' \left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right)_B + y' \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \right)_B + z' \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right)_B. \end{aligned} \quad (4-29)$$

Hemen

$$\frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' = \mathbf{v}', \quad (4-30)$$

eta bestalde, B behatzailearekiko $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ eta $\mathbf{k}'$ konstanteak ez direnez, orokorki

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right)_B \neq 0, \quad \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \right)_B \neq 0, \quad \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right)_B \neq 0 \quad (4-31)$$

dira. Zenbat balio dute deribatu horiek?

B behatzailearen iritziz, $\mathbf{i}'$ (eta berdin $\mathbf{j}'$ eta $\mathbf{k}'$) biraka ari da, ω abiadura angeluarraz. Beraz, dt denbora-tartean duen aldakuntza, alboko 4.5. irudian ageri dena da.

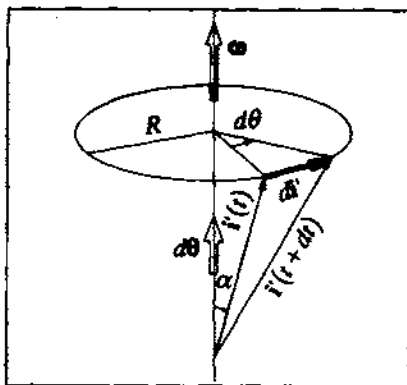
Ikus daitekeenez, $d\theta$ angelua bektore gisa hartuz, $d\theta$ (ikus 3.4. atala), honelaxe azal dezakegu $d\mathbf{i}'$ bektorea,

$$(d\mathbf{i}')_B = d\theta \times \mathbf{i}', \quad (4-32)$$

beraren modulua ondokoa izanik,

$$|d\theta \times \mathbf{i}'| = d\theta \cdot 1 \cdot \sin \alpha = R d\theta, \quad (4-33)$$

eta norabideari dagokionez, $d\mathbf{i}'$ bektorea, $\mathbf{i}'$ eta $d\theta$ bektoreek osatzen duten planoaren perpendikularra izanik.



4.5. irudia. B behatzaileak ikusi eta neurtzen duen $d\mathbf{i}'$ bektorea.

Beraz,

$$\left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right)_B = \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{i}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}'. \quad (4-34a)$$

Modu berean,

$$\left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt}\right)_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad (4-34b)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right)_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}', \quad (4-34c)$$

eta $\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_B$ delakoaren (4-29) adierazpenean ordezkatuz:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_B = \mathbf{v}' + x' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + y' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + z' \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}', \quad (4-35)$$

eta emaitza hau (4-28)-ra eramanez,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_B = \mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_B = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'), \quad (4-36)$$

Hau da, azkenean hauxe geratuko zaigu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (4-37)$$

Horixe da, beraz, higitzen ari den partikula puntual baten kasuan B eta B' behatzaileek neurtzen dituzten abiadura desberdinen arteko erlazioa.

4.3.3. Azelerazioak

B behatzaileak neurtzen duen azelerazioa hauex da,

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_B = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k}, \quad (4-38)$$

edo bestela idatzirik,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}. \quad (4-39)$$

B' behatzaileak hauex ikusten eta neurtzen du:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \right)_{B'} = \frac{dv'_x}{dt'} \mathbf{i}' + \frac{dv'_y}{dt'} \mathbf{j}' + \frac{dv'_z}{dt'} \mathbf{k}'. \quad (4-40)$$

Erlaziona ditzagun B eta B' behatzaileen neurketak. Horretarako, lehenago lorturiko abiaduren arteko (4-37) erlazioetik abiatuko gara. Kotsidera dezagun, ba, B behatzaileak adierazpen horren atal biak deribatzen dituela,

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_B = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_B + \left[\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right]_B, \quad (4-41)$$

eta, $\boldsymbol{\omega}$ konstantea dela esan dugunez,

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_B = \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_B + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_B, \quad (4-42)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_B &= \left[\frac{d}{dt} (v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}') \right]_B = \\ &= \frac{dv'_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dv'_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dv'_z}{dt} \mathbf{k}' + v'_x \left(\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right)_B + v'_y \left(\frac{d\mathbf{j}'}{dt} \right)_B + v'_z \left(\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right)_B = \\ &= \mathbf{a}' + v'_x \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + v'_y \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + v'_z \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (4-43)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right)_B = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (4-44)$$

Beraz, (4-36) eta (4-44) aurreko (4-42) adierazpencan ordezkatur,

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_B = [\mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]. \quad (4-45)$$

Alegia, azkenean honelaxe azal dezakegu puntu material baten bigiduraren kasuan B eta B' behatzaileek neurturiko azelerazioen arteko erlazioa:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (4-46)$$

Ohituraz, adierazpen horren bigarren atalean ageri diren gaiak izen berezia ematen

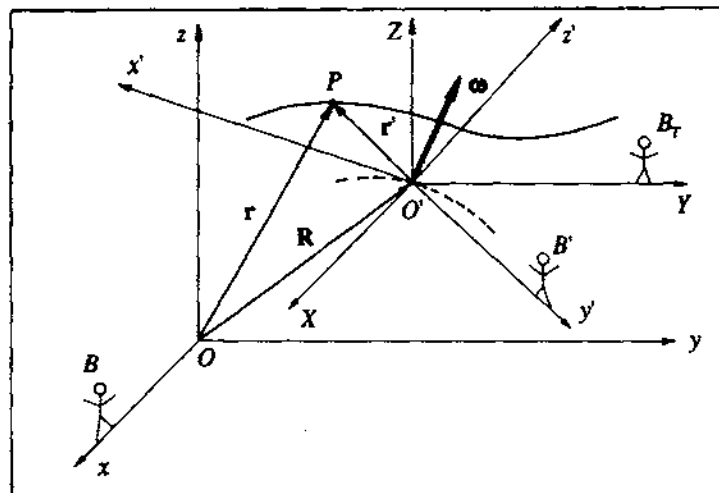
zaie:

$\mathbf{a}$:	azelerazio 'absolutua',
$\mathbf{a}'$:	azelerazio 'erlatiboa',
$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$:	azelerazio zentripetua.
$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$:	Coriolis-en azelerazioa.

Dena den, berriro ere azpimarratu behar da, 'absolutu' eta 'erlatibo' adjektiboak arrazoi historikoengatik soilik gordetzen ditugula; izan ere, argi baitauekagu magnitude horien guztien izaera erlatiboa.

4.4. HIGIDURA ERLATIBO OROKORRA

Aurretik aztertu ditugun higidura erlatibo biak —translazioiduna eta biraketaduna— kasu partikular edo bereziak dira. Horregatik, kasurik orokorrena aztertzea ere komeni zaigu. Edozertara, maila honetarako korapilatsuegia gerta daitekeenez, lortzen diren emaitzak eta planteamendu orokorra aztertuko ditugu soilik, azalpenaren xehetasunetan sartu gabe.



4.6. irudia. Higidura erlatibo orokorraren azterketari dagozkion erreferentzia-sistemak.

Kasurik orokorrean, B' behatzailea doaneko erreferentzia-sistemaren jatorria (O') transladatu egiten da B behatzailearekiko eta, halaber, $O'x'y'z'$ sistema biraka ari da B behatzailearekiko, zertan konstantea izanik ez duen abiadura angeluarraz. Ondoko sistemak definituko ditugu (4.6. irudia):

- $Oxyz$: B behatzailea doaneko sistema.
- $O'XYZ$: Beronen ardatzak eta $Oxyz$ sistemarenak paraleloak dira denbora osoan, baina jatorria (O') higitzen ari da B behatzailearekiko, edozein ibilbide edukirik. Sistema honetako behatzailea B_T da, alegia, translazio paraleloz ari da higitzen B behatzailearekiko.
- $O'x'y'z'$: B' behatzailea doaneko sistema. $O'XYZ$ sistemaren jatorri berbera du, baina

biraka ari da harekiko, ω abiadura angeluarraz. Denetara, translazioa eta biraketa ditu B behatzailearekiko.

B eta B' behatzaileek egiten dituzten neurketa zinematikoak, hurrenez hurren, azentuatuta gabe eta azentuatutik agertuko dira. Bi behatzaile horiek P puntu materialaren higidura aztertzen ari dira zinematikoki. Neurtzen dituzten magnitude zinematikoen arteko erlazioak, ondokoak direla frogatu daitezke:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', & (4-47a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{V}' + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', & (4-47b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. & (4-47c) \end{cases}$$

Adierazpen horietan ageri diren letrek orain arteko esangura berbera dute. Bi sinbolo berri daude, ondoko magnitudeak adieraziz:

$$\mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{V}}{dt} : \quad O' \text{ puntuak } O \text{ puntuarekiko duen azelerazioa, hots, sistema erlatiboaren translazio-azelerazioa, beraren jatorriari dagokiona.}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \equiv \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \equiv \boldsymbol{\alpha} : \quad O'x'y'z' \text{ sistemak } OXYZ \text{ sistemarekiko duen azelerazio angeluarra zeren, kasu orokorrean, } \boldsymbol{\omega} \text{ ez baita konstantea.}$$

Ekuazio horiek edozein bi behatzaileraren neurketa zinematikoak erlazionatzeko balio digute. Adibide gisa, translaziozko eta biraketazko kasuak, kasu honen kasu bereziak direla ikusiko dugu.

4.4.1. Translazioidun kasua

Kasu honetan biraketarik ez dagoenez, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ da eta, bestalde, translazioa uniforme bada, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Beraz (4-47) ekuazioak honelaxe geratuko zaizkigu:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', & (4-48a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', & (4-48b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}'. & (4-48c) \end{cases}$$

Hots, Galileo-ren transformazioaren kasuan lortzen genituen adierazpen berberak.

4.4.2. Biraketa uniformedun kasua

Kasu honetan, sistemek jatorri berbera dutela kontsideratu dugu, hots,

$$O \equiv O' \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{0}, \mathbf{V} = \mathbf{0}, \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4-49)$$

eta biraketa uniformea denez,

$$\boldsymbol{\omega} = \text{ktea} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (4-50)$$

Beraz, adierazpen hauek eratuko zaizkigu:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}', & (4-51a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', & (4-51b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. & (4-51c) \end{cases}$$

4.4.3. Coriolis-en azelerazioa

Bukatzeko, iruzkin labur bat egingo dugu Coriolis-en azelerazioari buruz. Aurreko orrialde batean esan dugunez, $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ gaiari Coriolis-en azelerazioa deritzo. Definizioetik bertatik ikus daitekeenez, biraka ari diren sistemekiko abiadura erlatiboa duten higiduren kasuan kontsideratu behar da soilik.

Nolanahi ere, Lurrean bizi garenez, eta Lurra bere ardatzarekiko biraka ari dela kontuan hartuta, Lurrean higitzen ari diren gorputzen kasuan, kontuan hartzekoa izango da azelerazio hori. Hurrengo gaien partikularen dinamika hitz egitean ikusiko dugunez, Coriolis-en efektuak garrantzi handia edukiko du haizeen higiduretan, zikloi eta antizikloien izaeran eta abarretan. Dena dela, aurrerago garatzeko utziko dugu puntu hori, eta orduan ikusiko dugunez, partikularen dinamika sistema ez-inertzialetik aztertzean, 'Coriolis-en indarra' kontsideratu beharko dugu (horren definizioan aurkako zeinua erabiliz).

5. gaia

Mekanikaren printzipioak: partikularen dinamika

Aurreko gaietan partikularen higiduraren deskripzioaz arduratu gara. Eta sistema desberdinen arteko erlazioak ere lortu ditugu. Hala ere, zinematikoki soilik aztertu dugu higidura, hau da, higidura horren zergatikoez kezkatu gabe. Oraingo gai honetan, higiduraren kausetaz arduratuko gara, hau da, Dinamikaren arloan arituko gara. Eta elkarrekintzak aztertuko ditugu, edo, beste hitz batez esateko, indarrak. Dinamika, azken batez, indarren eta higidura-aldaketen arteko erlazioen azterketa baita.

Beraz, 'Newton-en legeak' izenaz ezagunak diren printzipioetatik abiatuko gara, beroriek Naturaren portaera mekanikoa hitz laburrez zehazten dutela kontuan izanda. Lege horien erabilpen praktikorako, magnitude fisiko berriak definituko ditugu, hala nola momentu lineala, indarra, momentu angeluarra... gero magnitude horien bidez printzipioak zehazki adierazteko, eta sistema mekanikoen eboluzio denboralari buruzko ondorio dinamikoak atera ahal izateko. Halaber, zenbait higidura berezi aztertuko ditugu, indar zentralen eraginpean sorturikoa adibidez.

Dena dela, Newton-en formulazioa, berez, erreferentzia-sistema inertzialei dagokiela esan behar da, eta mota horretakoak ez diren erreferentzia-sistemen kasuan aldaketa garrantzitsuak egin behar direla. Horregatik, gaiaren azken ataletan erreferentzia-sistema ez-inertzialak aztertuko ditugu, horretarako 'inertzia-indarrak' deritzenak formulazioan sartuz, eta, amaitzeko, gu bizi gareneko Lurreko erreferentzia-sistemaren zenbait berezitasun aipaturik.

5.1. INERTZIAREN PRINTZIPIOA (NEWTON-EN LEHEN LEGEA)

Printzipio hau eman baino lehen, partikula askea zer den definitu behar dugu. Labur esanik, partikula askea inolako elkarrekintzarik pairatzen ez duen partikula dela esan dezakegu; edo, beste era batera adieraziz, baldin eta unibertsoko beste partikulen edozein aldaketak partikula konkretu baten higidurari inolako eraginik sortzen ez badio, partikula hori askea dela esango dugu.

Zehazki hitz eginez, unibertsoan ez dago partikula askerik, denen arteko elkarrekintzak baitaude, txikiak badira ere. Gainera, partikula askeak ezin dirateke beha, zeren eta edozein behaketatan behatzailearen eta partikularen arteko elkarrekintza baitago. Honela,

ba, partikula askeak unibertsoetik aparte egon behar du edo guztiz isolaturik. Dena den, puntu teoriko horiek alde batera utzirik, praktikan partikula batzuk askeak balira bezala kontsidera ditzakegu, haien gainean egiten diren elkarrekintzak arbuia garriak baitira. Oraingoz, ba, partikula askeak ezagunak ditugula kontsideratuko dugu, eta gerorako utziko dugu partikula horiek zein diren aurkitzea.

Partikula askeen higidura finkatuz, *inertiaren printzipioa* edo, beste era batera, *Newton-en lehenengo legea* deritzona adieraziko dugu. Hauxe da:

«Partikula askeak abiadura konstantez higitzen dira erreferentzia-sistema inertzialekiko».

Beste modu batez esateko, partikula askeen azelerazioa nulua da sistema inertzialekiko. Edozein modutan, badakigu higidura gauza erlatiboa dela —aurreko gaian aztertutugunez—, eta horregatik sistema konkretu batetik definitu beharko da, horrela gero beste edozein sistemarekiko definitu ahal izateko. Lehentxoago erreferentzia-sistema inertzialak aipatu ditugu. Baina zer dira horiek? Honelaxe definitu ohi dira:

«Erreferentzia-sistema inertzialak partikula aske batekin loturik eta biraketarik gabe doazen sistemak dira».

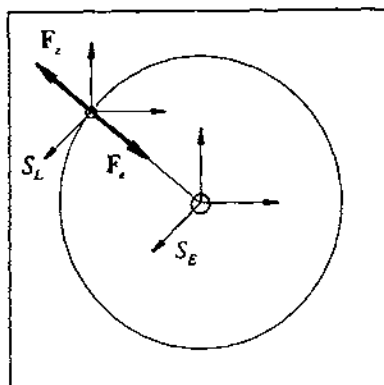
Dena den, definizio hau ematean, gorpil ero bat sortu dugu, zeren partikula askea sistema inertzial baten laguntzaz definitu baitugu, eta berau partikula aske baten laguntzaz. Gorpil ero hori eteteko bide bakarra, partikula aske bat aurkitzea edo sistema inertzial bat definitzea da. Horretarako, hitzarmen bat egin beharko dugu. Horixe da, hain zuzen ere, hurrengo pauso gisa egingo duguna.

Gu Lurrean bizi gara, eta, dakigunez, Lurra biraka ari da bere ardatzaren inguruan. Beraz, gurekin doan sistema ez da inertziala. Lehen sistema inertzial bat aurkitzeko *izar finkoak* deiturikoetara jo behar dugu. Badakigu izarrek bata bestetik oso urrun daudela. Bestalde, Naturan ezagunak ditugun irispen handiko bi elkarrekintzak —hau da, grabitatearena eta elektromagnetikoa— distantziaren karratuaren arabera txikiagotzen dira. Horrela, ba, izarrek partikula askeak balira bezala kontsidera ditzakegu, eta horixe da preseski, hitzarmenez egiten dena, hots, izar finkoekin doan sistema inertziala dela onartzen da. Hurbilketa hau oso ona da, zeren eta, gure inguruko kasuan, galaxiaren zentroaren inguruan duten azelerazio zentripetua guztiz arbuia garria baita. Eguzkia bera ere azelerazio oso txikiz higitzen da galaxiaren zentroarekiko ($3 \times 10^{-8} \text{ cm/s}^2$). Horrela, hurbilketa ona eginez, partikula asketzat jo dezakegu.

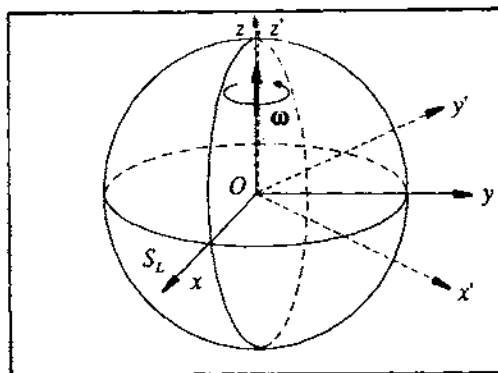
Modu horretan eginik, Eguzkiarekin joanik eta izar finkoekiko paraleloki higituz doan sistema (S_E delakoa) inertziala dela onartuko dugu.

Lurrean ba ote dago sistema inertzialik? Izatez, zehazki hitz eginez. Lurrekin batera doanik ez dago, zeren eta Lurra Eguzkiaren inguruan duen higidura eliptikoa (ia-ia zirkularra) baita, eta beraz, azelerazio zentripetua du behintzat, ondoko baliokoa:

$$a_c \cong 0,6 \text{ cm/s}^2, \text{ Eguzkirantz.} \quad (5-1)$$

5.1. irudia. Eguzkiko sistema (S_E) eta Lurreko sistema paraleloa (S_L).

Hala ere, hurbilketa batez, Lurreko S_L sistema inertzialtzat har dezakegu. Eta zein da S_L sistema? S_L sistema Lurrekin batera higitzen da, baina beraren ardatzak S_E sistemaren ardatzen paraleloak dira etengabeki. Honela izan arren, S_L sistema ez da inertziala, zeren eta beraren jatorriak elipse bat deskribatzen baitu. Exzentrikotasun txikiko elipse hori zirkunferentzia dela kontsideratuz (hau hurbilketa egoki xamarra da), eta sistema ez-inertziala delako agertzen den indar zentrifugoa (F_c) eta eguzkiaren erakarpenaz sortutako indarra (F_z) berdinak direla kontuan harturik, bi indar horiek existituko ez balira bezala lan eginez gero, S_L sistema inertziala dela esan dezakegu.

5.2. irudia. Lurreko S_L eta S sistemak.

Honelatan, bi sistema kontsidera ditzakegu Lurrean. Bata S_L , 'geldi' dagoena eta inertziala dena, eta bestea, $S(O'x'y'z')$ lehenarekiko biraka ari dena eta, beraz, ez-inertziala. Biraketaren abiadura angeluarra (ω) egunean 2π radianekoa (bira oso bat) da, hots, beraren moduluak $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ balio du.

Edozein modutan, ikusi dugunez, sistema inertziala aukeratzean hurbilketa bat egin dugu, sistemaren azelerazioa arbuiauz. Hurbilketa hori baliagarria izango da, zehaztasun-maila horrekin lan egitea nahikoa den kasuetan. Bestela, azterketa zehatzago baten premia edukiko dugu. Horixe da, azken batez, Fisika osoan egiten dena. Adierazpen eta formula

matematikoak errealitatearen hurbilketak dira. Fenomenoak hurbilketa horiekin ongi ulertzen eta adierazten badira, aurrera. Zehaztasun handiagoa behar izanez gero, teoria landuagoa erabili behar.

Honelatan, ba, makinaren higidura aztertzean, nahikoa da Lurrarekin doan sistema ($O'x'y'z'$) inertzialtzat hartzea; eta berdin gertatzen da irispen txikiko proiektilen kasuan. Hala ere, haizeen higidura (zikloiak, antizikloiak, haize-korronteak eta beste) aztertzeo, kontuan eduki behar da Lurraren biraketa-higidura, eta orduan ez du balio $O'x'y'z'$ sistema inertzialtzat hartzeak; aitzitik, $Oxyz$ sistema ere kontsideratu behar da.

5.1.1. Galileo-ren transformazioa eta inertiaren printzipioa

Aurreko gaian ikusi genuenez, Galileo-ren transformazioa translazio uniformeko higidura erlatiboari dagokiona da. Kasu honetan hauxe dugu:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'; \quad (5-2)$$

hau da, bi behatzaileek azelerazio berbera neurtzen dute. Demagun, adibidez, elkarrekiko translazio hutsezko higidura duten bi behatzaileetako bat sistema inertzial batean doala (B behatzailea, kasu). Horrela bada, B behatzaileak $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ azelerazioaz ikusiko du higitzen partikula aske bat. Baina aurreko erlazioa erabiliz, $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$ izango da. Beraz, B' behatzaileak ere uniformeki ikusiko du higitzen partikula askea; hortaz, B' behatzailea ere inertziala da, eta bera doaneko sistema ere inertziala izango da.

Bestelako hitz batzuen bidez esanez, sistema bat inertziala bada, berarekiko uniformeki transladatzen diren beste sistema guztiak ere inertzialak dira.

5.2. MOMENTU LINEALA

Dinamikaren munduan abiatzeko, magnitude berri bat behar dugu: momentu lineala. Definizioz, momentu lineala masa eta abiadura biderkatuz lortzen den magnitudea da:

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}. \quad (5-3)$$

Momentu lineala $\mathbf{p}$ letraz adierazi ohi da eta abiaduraren norabide eta noranzko berberak dituen bektore bat da, $m > 0$ baita.

Mekanika Klasikoan masa (m) abiadurarekin aldatzen ez dela kontsideratuko dugu, hau da, partikulak beti masa berbera duela kontsideratuko dugu, pausagunean dagoela zein higituz doala. Egia esan, zehatz-mehatz, ez dakigu 'masa' delakoa zer den. Partikulak daukan 'materiarekin' erlazionatzen dugu, baina 'materia' bera zer den ez dakigu zehazki. Dena den, partikula baten masa partikularen ezaugarritzat hartuko dugu, eta Mekanika Klasikoan ari garen bitartean, higiduraren independentea dela kontsideratuko dugu. Erlatibitatearen Teoriaren arloan lan egitean —hots abiadura handien kasuan— ordea, hipotesi hori ez da baliagarria izango. Dena den, gu Mekanika ez-erlatibistaren arloan ari garenez, m konstantetzat joko dugu.

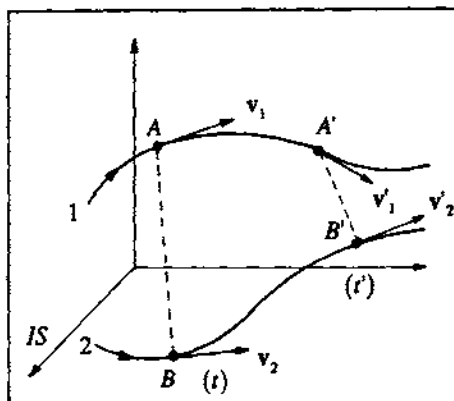
Beraz, momentu linealaren definizioan finkatuz, honelaxe defini dezakegu aurreko ataleko inertiaren printzipioa:

«Partikula askeak momentu lineal konstantez higitzen dira sistema inertzialetan».

Oso baliagarria den printzipio hori partikula aske bakarraren kasuan eman ondoren, partikula-sistemen kasurako orokortuko dugu hurrengo atalean.

5.3. MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOAREN PRINTZIPIOA

Kontsidera dezagun bi partikulaz osaturiko sistema isolatua; hots, partikula horiek ez dute kanpo-indarren eraginik jasaten. Baina beren artean elkarrekintza dago. Beraz, ez dira partikula askeak. Honela, kanpoko inertzia-sistema batekiko (IS-kiko) partikulen higidura ez da uniformea izango, eta orokorki, ez da zuzena izango.



5.3. irudia. Bi partikulaz osaturiko sistemaren higidura.

5.3. irudian bi partikulen ibilbideak adierazi dira, bi aldiunetako posizioak bereziki marraztuz. Hain zuzen, t aldiunean, 1 partikula A puntuan dago eta v_1 abiadura du; eta 2 partikula B puntuan, v_2 abiaduraz higituz. Bestalde, t' aldiunean, 1 partikula A' puntuan dago eta v_1' abiaduraz higitzen ari da; eta 2 partikula B puntuan dago v_2' abiaduraz higitzen.

Definizioz, bi partikulek osaturiko sistemaren momentu lineala partikula bien momentu linealen batura da. Beraz, bi aldiune horietan hauxe izango da:

$$t: \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2, \quad (5-4)$$

$$t': \quad \mathbf{P}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2, \quad (5-5)$$

Ikus daitekeenez, adibide honetan m_1 eta m_2 masak konstanteak balira bezala hartu ditugu. Esperimentalki egin diren proba guztietan ikusi denez, printzipio hau betetzen da:

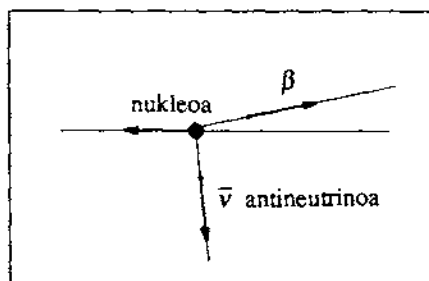
«Partikula biek elkarren eragina baino pairatzen ez badute, hots, biek osaturiko sistema isolaturik badago, sistemaren momentu linealak konstante dirau».

Esperimentuen emaitzetan oinarrituriko printzipio honi *momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa* deritzo. Gainera, printzipio hau ez da soilik bi partikularen kasurako

betetzen. edozein partikula-multzoz osaturiko sistema isolatuaren kasuan ere betetzen baita, hots,

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_i + \dots = \text{ktea.} \quad (5-6)$$

Esan dugunez, orain arte ezagunak diren fenomeno guztietan betetzen da printzipio hori. Inoiz betetzen ez dela pentsatu izan da, baina uste oker hori fenomeno ongi ez ezagutzearen ondorio zela ikusi izan da. Horrelakoa izan zen, adibide modura jarraian azalduko dugun kasua.



5.4. irudia. β izpien sorreran ageri diren partikulak.

Demagun adibidez β izpien kasua. Nukleo batzuen desintegrazioan agertzen diren β izpiak elektroiak dira, izatez. Dena den, Wilson-en ganberaren bidez, hondar-nukleoa eta β izpia norabide desberdinetan higitzen zirela neurtzen zen. Nola izan zitekeen hori? Sistema isolatu bat osatzen zutenez, momentu lineala kontserbatzeko, abiadura biek norabide berekoak eta aurkako noranzkokoak izan behar zuten (baldin eta desintegrazioa baino lehen nukleoa geldirik bazegoen). Ez ote zen, ba, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa betetzen? Arrazoiak ondokoa zen, ordea, desintegrazioan, ordura arte ezezaguna zen partikula berri bat ere sortzen zela: antineutrinoa. Benetako erreakzioa hauxe zen:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}, \quad (5-7)$$

$\bar{\nu}$ delakoa antineutrinoa izanik. Antineutrinoaren momentu lineala kontuan hartuz, esandako printzipioa ongi betetzen zela ikusi zen.

Sistemen momentu linealaren azterketan aurrera eginez, azter dezagun gehitxoago partikula biren kasua:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{ktea,} \quad (5-8)$$

hots,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad (5-9)$$

eta hemendik,

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2), \quad (5-10)$$

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2. \quad (5-11)$$

Dakusagunez, partikula bakoitzaren momentuaren aldakuntza agertzen da. Zergatik? Partikulen artean elkarrekintza dagoelako, noski.

Azken adierazpen honek, masaren birdefinizio operazionala emateko balioko digu. Hain zuzen,

$$\Delta p = \Delta(mv) = m\Delta v \quad (5-12)$$

da, eta partikula bakoitzaren masa konstantetzat hartuz eta lehenago ikusi dugunaren arabera,

$$m_1\Delta v_1 = -m_2\Delta v_2, \quad (5-13)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta v_2|}{|\Delta v_1|}. \quad (5-14)$$

Azken formula honen arabera, m delakoa masa-unitatea baldin bada (edo masa ezagun bat), erraz lortuko dugu m_2 masa, modu operazional batez.

5.4. INDAR KONTZEPTUAREN DEFINIZIOA: NEWTON-EN BIGARREN ETA HIRUGARREN LEGEAK

Espazioan elkarrekin erlazionaturik dauden partikula asko egon arren, partikula bakar bat aztertu nahi izaten da askotan. Orduan ez dira kontsideratu behar espazioko beste partikulak. Baina, edozein modutan, horiek eragina dute partikula hartan. Eragin hori matematikoki materializatzeko, *indar* izeneko magnitudea definitu ohi da.

Indar kontzeptua, momentu linealaren kontserbazioaren printzipiotik aterako dugu. Har dezagun, ba, lehen pauso batean, lehengo bi partikulen kasua. Hain zuzen, (5-11) adierazpena kontuan edukiz, aldakuntza hori Δt denbora-tartean gertatzen bada, ondokoa idatz dezakegu,

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta p_2}{\Delta t}, \quad (5-15)$$

eta limitean $\Delta t \rightarrow 0$ eginez,

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt}. \quad (5-16)$$

Definizioz, denbora-unitateko partikula batek duen momentu linealaren aldakuntzari, edo, hobeki esateko, partikularen momentu linealaren denborarekiko deribatuari, *indarra* deritzo. F ikurraz adierazi ohi da:

$$F \equiv \frac{dp}{dt}. \quad (5-17)$$

Ohar modura diogun ezen, lehen pauso batean behintzat, deribatua sistema inertzial batetik egiten dela.

Izatez, definizio horri *Newton-en bigarren legea* deritzo. Baina segitu dugun prozesua kontuan hartuz, legea baino areago definizioa dela aitortu behar dugu, indarraren definizio matematikoa, hain zuzen ere.

Bestalde, masa konstante gisa hartuz,

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (5-18)$$

Ekuazio hau Dinamikaren oinarrian dago. Ekuazio bektoriala da eta, beraz, bektorialaki aplikatu behar da. Ikus daitekeenez, bi modutara irakur daiteke:

- Partikula baten gainean indar batek eragitean, partikula horrek azelerazio bat pairatzen du, sistema inertzial batetik neurtzean.
- Edo alderantziz esanik, partikula bat sistema inertzial batetik azelerazioz higitzen ikusten bada, honexegatik da: partikula horren gainean indar batek eragiten duelako.

Noski, $\mathbf{F}$ konstantea bada, $\mathbf{a}$ ere konstantea izango da. Eta $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ bada (partikula askea bada), $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ izango da, edo bestela esanik $\mathbf{p} = \mathbf{ktea}$ izango da, hots, Newton-en lehenengo legea agertuko zaigu.

Honelatan, ba, elkarrekintzaren kontzeptua nolabait konkretatzeko erabiltzen den magnitudea baino ez da indarra. Partikulen arteko elkarrekintzak aztertzeke bestelako magnitude batzuk ere erabili arren, hala nola energia potentziala, oraingoz, nahikoa izango dugu indarra deiturikoarekin. Ikus daitekeenez, 'indarra' elkarrekintzari ematen zaion izen teknikoa da. Indarrak ez badago, partikula askea dugu, elkarrekintzarik gabekoa.

Berriro ere bi partikularen kasura itzulita, emandako definizioaren arabera, 1 eta 2 partikulak batera kontsideratzen baditugu:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (5-19)$$

$\mathbf{F}_{12}$: 1 partikularen gainean 2 partikulak egiten duen indarra.

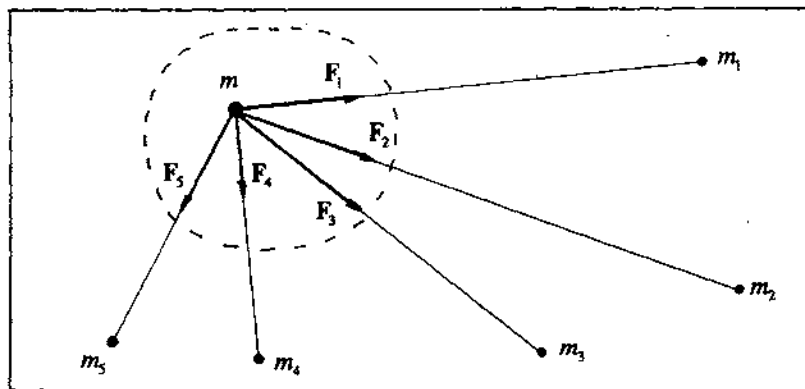
$\mathbf{F}_{21}$: 2 partikularen gainean 1 partikulak egiten duen indarra.

Azken adierazpen honek *Newton-en hirugarren legea* deritzona azaltzen digu:

«Bi partikula elkarrekin interakzionatzean, lehenak bigarrenaren gainean sortzen duen indarra, bigarrenak lehenaren gainean egiten duen indarraren berdina da, baina aurkako noranzkoa du».

Sarri, lege honi *akzio-erreakzioaren legea* deritzo. Gorputzen arteko ukipena dagoe-nean, argi dago lege hau; ordea, distantziarako indarren kasuan, lege hau elkarrekintzaren seinaleak abiadura infinituz higitzen badira beteko da. Baina, dakigunez, seinaleen abiadurak gorengo muga bat du: c , hutsean argiak duen abiadura. Horregatik, zehatz hitz eginda, distantziarako indarren kasuan lege hau ez da betetzen, nahiz eta Mekanika Klasikorako oso hurbilketa ona izan.

Masa batek beste masa askoren eragina jasaten badu, bakoitzaren eraginari (hau da, bakoitzak egiten dion indarrari) momentu linealaren aldaketa dagokio. Honelako aldaketa bakoitza $\mathbf{F}$, sinboloaz adieraziko dugu.



5.5. irudia. Partikula-sisteman partikula bakoitzak beste partikulen elkarrekintza jasaten du.

Guztira, gainezarmenaren printzipioan oinarrituz, honako momentu-aldaketa hau jasaten du m masak:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}. \quad (5-20)$$

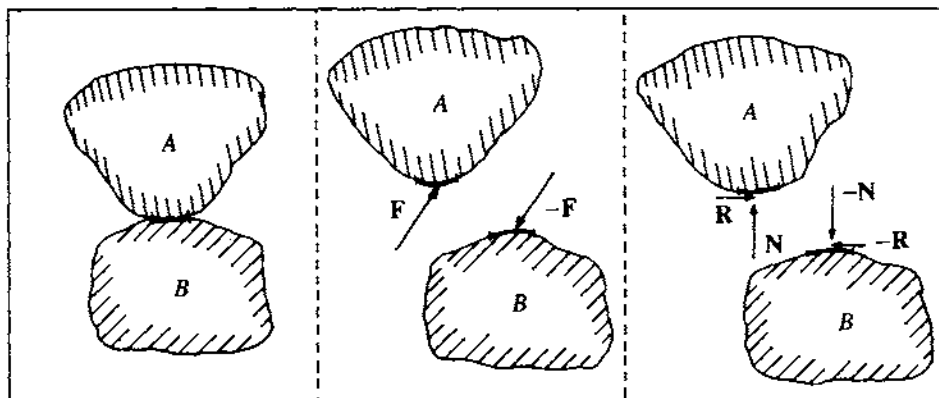
$\mathbf{F}$ delakoari *indar erresultantea* deritzen, eta indar guztien arteko batuketa bektorialaz lortzen da.

5.5. UKIPEN-INDARRAK: INDAR NORMALA ETA MARRUSKADURA-INDARRA

Partikulen dinamikan, indarrek partikulen posizio bektore erlatiboen menpekotasuna dute. Indarra elkarrekintza da, distantzia batera agertzen den elkarrekintza. Zehazki hitz eginez, partikulek ez dute elkar 'ukitu' behar, beren arteko indarra ager dadin. Gehiago oraindik, partikula bien artean ez da egongo 'ukipen fisikorik', distantziara sortzen den interakzioa baizik. Honela, ba, atomoen artean indarrak sortzen dira, 'ukitzen' egon ez arren.

Gorputzen arteko 'ukipena' kontzeptu makroskopikoa da. Atomo eta molekulen artean ez da beharrezkoa, eta horregatik, kasu horretan distantzia batera eragiten duten indarrak kontsideratzen dira. Hala ere, gure giza zentzumenen mailara pasatzean, gure begiek gorputz askok elkar ukitzen dutela ikusten dute. Ukitzean, ukipenean egotean, elkarren aurkako indar bat sortzen da, bi gorputzak ukipenean daudeneko gainazalean.

Akzio-erreakzioaren printzipioaz, bi indar horiek berdina dira moduluz eta norabidez, baina aurkako noranzkoa dute. Honela B gorputzak A gorputzari $\mathbf{F}$ indarra egiten badio, A gorputzak $-\mathbf{F}$ indarra egiten dio B gorputzari aldiune berean. Indarrok *ukipen-indarrak* dira.



5.6. irudia. Elkar ukitzen dauden bi gorputzen arteko indarrak.

Ukipen-indarrak bi osagaien bidez adieraz daitezke:

- N**: Osagai normala. Gainazalen perpendikularra da. Gorputz bakoitzak besteari bere barnean sartzen ez uzteko jartzen dion eragozpenaren neurria da.
- R**: Ukipen-gainazalen ukitzailearen norabidea du. Atxikiduraren eta gainazalen laztasunaren kausaz sortzen da. Marruskadura-indarra deritzo.

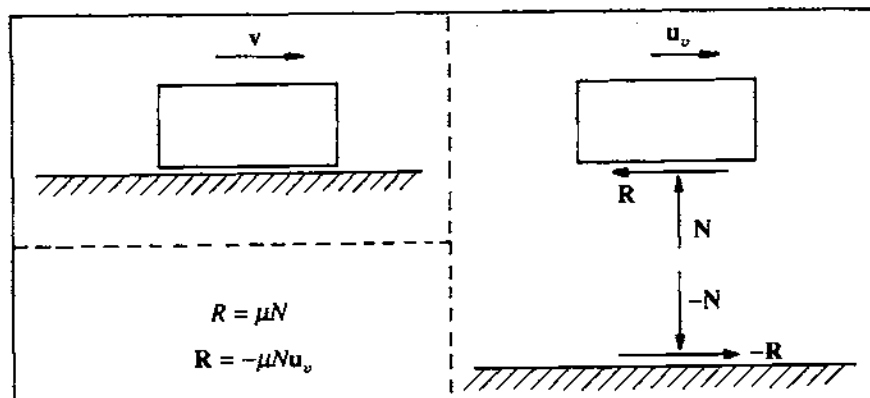
Ikus dezagun bi osagai horien artean dagoen erlazioa zein den. Marruskadurak bi gorputzen labaintze erlatiboaren aurka jotzen du. Lehen ikustaldi batean, gainazalak guztiz leunak direla pentsa dezakegu. Baina mikroskopioz begiratu, gorabehera nabariak dituztela ikusiko dugu, labaintzearen aurka jotzen dutenak. Marruskadura deritzon fenomeno oso korapilatsua da eta estatistikoki aztertu behar da. Mikroskopikoki, marruskadura Van der Waals-en indarren kausaz gertatzen da. Horien kausaz, ukipen-puntuetan 'soldadura hotzak' deritzenak agertzen dira eta honelako soldadura hotzak apurtzeko, indarra egin behar. Indar hori marruskadura-indarraren berdina da (baina aurkako noranzkoa duena). Zenbait faktorek garrantzi handia dute, kasurako, materialak zein diren, gainazalak nola landurik dauden (amaiera mikroskopikoa eduki behar da kontuan), etab.

Edozein modutan, bi gainazal ezagun eta konkretu emanez, esperimentalki ikusi eta frogatu denez, ukipenean egonik erlatiboki higitzen hasi aurretik **R** indarrak har dezakeen balio maximoaren eta **N** indarraren artean proportzionaltasuna ageri da. Hain zuzen ere,

$$R \leq \mu N \quad (5 - 21)$$

idatz daiteke. Adierazpen horretan, μ delako konstante *marruskadura-koefizientea* deritzo, eta magnitude adimentsionala da, definizioz. Bestalde, **R** bektorearen noranzkoa beti da gorputza erlatiboki higitzen denekoaren edo higitzeko joera duenekoaren aurkakoa.

Adibide modura, 5.7. irudian zoru horizontalaren gainean higitzen ari den gorputzaren kasua adierazi dugu. Bertan, **v** bektoreak gorputzak zoruarekiko duen abiadura adierazten du, eta **u**, delakoak norabide horretako bektore unitarioa. Ukipen-indarrari dagozkion osagai normala eta marruskadura-indarra adierazi dira bertan, bai gorputzean eta bai zoruan dituzten norabideak eta noranzkoak bereziki adieraziz.



5.7. irudia. Elkar ukitzen egonik elkarrekiko higitzen ari diren gorputzetan kontsideratu behar diren ukipen-indarrak.

Dena den, elkar ukitzen dauden gorputzak elkarrekiko higitzen ari diren ala ez kontuan edukirik, bi motatako marruskadura-koefizienteak kontsideratu behar ditugu:

5.5.1. Marruskadura-koefiziente estatikoa (μ_s)

Bi gorputzak elkarrekiko geldirik daudenean agertzen dena. Izatez, μ_s koefizientea gorputzak elkarrekiko higitzen hasten direnean definitzen da, aldiune honetan 'soldadura hotzak' desagiten hasiko baitira. Limitera heldu aurretik, hots, oraindik higitzen hasi aurretik bi gorputzak elkarrekiko geldi daudela, marruskadura txikiagoa da, eta, horregatik, honelaxe adierazi ohi da beraren modulua:

$$R \leq \mu_s N. \quad (5 - 22)$$

Kasu honetan R indarra higitzen hastean hartuko lukeen noranzkoaren aurkakoa da. Ondoko puntu hau ulertzea garrantzitsua da: $R = \mu_s N$ marruskadura-indarraren balioaren goreneko muga da, eta soilik kontsidera daiteke, gorputzen arteko oreka erlatiboa apurtzeko unean. Oro har, oreka apurtzeko unean ez bagaude, $R < \mu_s N$ izango da.

5.5.2. Marruskadura-koefiziente zinetikoa (μ_k)

Gorputzak elkarrekiko higitzen ari direnean kontsideratu behar dena. Aurreko adibidean esan dugunez,

$$\mathbf{R} = -\mu_k N \mathbf{u}_v, \quad (5 - 23)$$

hemen $\mathbf{u}_v$ abiaduraren norabideko bektore unitarioa izanik. Koefiziente zinetikoa koefiziente estatikoarekin konparatzean, orain arte esperimentuetan beti agertu izan denez,

$$\mu_k \leq \mu_s, \quad (5 - 24)$$

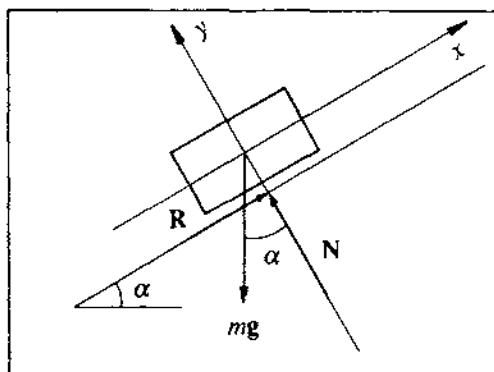
da. Azken honek ondokoa esan nahi du: gorputzak higiarazten hastea gehiago kostatzen dela higituz daudela higitzen iraunaraztea baino. Beste era batean esanda, lehenago aipaturiko soldadura hotzak apurtzea (hasieran pausagune erlatiboan egonik) geroko higidura erlatiboa mantentzea baino gehiago kostatuko zaigu.

5.5.3. Adibidea

Marruskadura kontzeptuak problemetan nola erabiltzen diren ikusteko, adibide modura era horretako problema baten ebazpena azalduko dugu.

«Demagun plano aldapatsu batean dagoen 1 kg-ko gorputz prismatiko bat (kaxa bat adibidez). Kaxa eta zoluaren arteko marruskadura-koefizienteak ondokoak dira: $\mu_s = \mu_k = 0,3$.

- a) Zein da plano horrek horizontalarekin osa dezakeen angelurik handiena, masa berez jaisten has ez dadin?
- b) Kaxa gainean eta planoaren norabidean $F = 1$ N-eko goranzko indur bat eginez, zein izango da angelurik handiena?
- c) Planoa 45° -z altxatuz eta planoaren norabidean $F = 1$ N-eko goranzko indarra eginez, zein azelerazioz jaitsiko da?»



5.8. irudia. Kaxa geldirik dagoeneko angelu maximoari dagokion egoera.

a) Goiko 5.8. irudian ageri dira orekako muga-egoerari dagozkion indarrak. Bestalde, masak geldirik egon behar duenez,

$$R = \mu N.$$

Eta angelurik handienera,

$$R = \mu N.$$

Bestalde, azelerazioa nulua da. Hortaz, indarren osagaiak adierazteko x eta y norabideak hartuz,

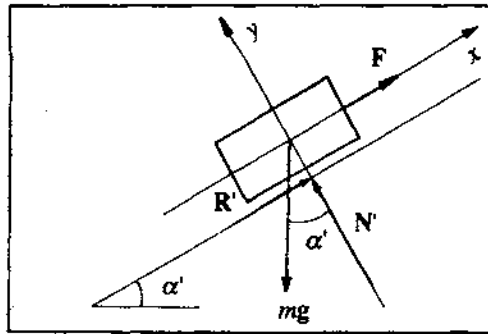
$$x \text{ norabidean: } -mg \sin \alpha + \mu N = 0,$$

$$y \text{ norabidean: } N - mg \cos \alpha = 0.$$

Hemendik,

$$-mg \sin \alpha + \mu N = 0,$$

$$\tan \alpha = \mu \rightarrow \alpha = \arctan \mu = 16^\circ 42'.$$



5.9. irudia. Gorantz 1 N-eko indarra egiteari dagokion oreka-angelu maximoko egoera.

b) Bigarren kasuko egoera 5.9. irudian adierazi da. Kasu honetan,

$$R' = \mu N'.$$

$$x \text{ norabidean: } \mu N' + F - mg \sin \alpha' = 0,$$

$$y \text{ norabidean: } N' - mg \cos \alpha' = 0.$$

$$\alpha' = 22^\circ 19'.$$

c) Indarren adierazpenari dagokionez, 5.9. irudiaren antzekoak balio digu hirugarren kasuan ere, $\alpha'' = 45^\circ$ eginez ($\alpha'' > \alpha'$ baita). Oraingoan, ordea, a azelerazioa dugu x norabidean. Beraz,

$$x \text{ norabidean: } R'' + F - mg \sin \alpha'' = ma,$$

$$y \text{ norabidean: } -mg \cos \alpha'' + N'' = 0.$$

Horren arabera:

$$N'' = 1 \cdot 9,8 \cos 45 = 9,8 \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{eta} \quad R'' = \mu N'' = 0,3 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Beraz,

$$ma = 1 \cdot a = -9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0,3 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow a = -3,85 \text{ m/s}^2.$$

Azelerazioaren zeinu negatiboak kaxa beherantz (x negatiborantz, alegia) doala esan nahi du.

5.6. FLUIDOETAKO MARRUSKADURA-INDARRAK

Esperientziak frogatzen duenez, gorputz solido bat fluido baten barnean abiadura txikiz higitzen denean, bertan higiduraren kontra sortzen den marruskadura-indarra abiaduraren proportzionala da, norabide berekoa eta aurkako noranzkoa duena. Honela adieraz dezakegu marruskadura-indarra:

$$\mathbf{F}_r = -k\eta\mathbf{v}. \quad (5-25)$$

Hemen ageri diren k eta η koefizienteek ondoko esangura dute:

- k delakoak gorputzaren eitearen menpekotasuna du, baita formarekiko higitzen deneko norabidearena ere. Esferaren kasuan,

$$k = 6\pi R. \quad (5-26)$$

- Azken hori *Stokes-en legea* izenaz ezaguna da. k delakoa *marruskadurari dagokion eite-koefizientea* da, eta ondoko dimentsio-ekuazioa du:

$$[k] = [6\pi R] = [R] = L, \quad (5-27)$$

hots, luzeraren dimentsioak ditu.

- η delakoak barne-marruskadura adierazten du eta *biskositate-koefizientea* deritzo. Beronen dimentsioak ondokoak dira:

$$[\eta] = \left[\frac{F_r}{kv} \right] = \frac{MLT^{-2}}{LLT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}. \quad (5-28)$$

Ohar gisa ondokoa esan behar dugu: geroago, 13. gaian, fluidoaren biskositatea adierazteko μ letra erabiliko dugu, Fluidoaren Mekanikan honela egiten baita. Hala ere, hemen η ipini dugu aurreko kasuan solidoen arteko marruskadura adierazten duen μ letrarekin ez nahasteko. Bestalde, biskositate-unitateak ondokoak dira:

- *MKSA* sisteman, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ edo $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$,
- *cgs* sisteman, $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \equiv \text{poise}$.

Erraz ikus daitekeenez:

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 10 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 10 \text{ poise}. \quad (5-29)$$

Biskositate-koefizienteak fluidoaren tenperaturaren menpekotasuna du:

$$\eta = \eta(T). \quad (5-30)$$

Bestalde, likidoen kasuan, tenperatura igotzean biskositatea moteldu egiten da,

$$T \uparrow \Rightarrow \eta \downarrow, \quad (5-31)$$

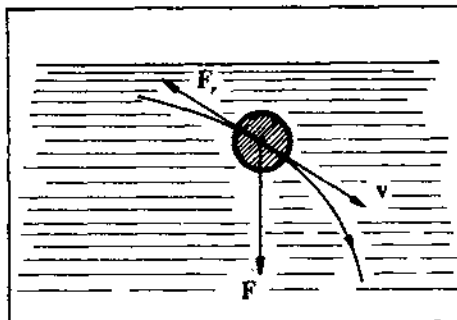
baina gasen kasuan tenperatura igotzean biskositatea areagotu egiten da:

$$T \uparrow \Rightarrow \eta \uparrow. \quad (5-32)$$

Biskositateaz informazio gehiago 13.2. atalean aurki daiteke.

Fluidoaren barneko marruskadura nolakoa den ikusi ondoren, interesgarria gerta daiteke higidura-ekuazioa nolakoa den aztertzea. Demagun gorputza $\mathbf{F}$ indarraren eraginpean higitzen ari dela. Bestalde, $\mathbf{V}$ abiaduraren kausaz, marruskadura sortzen da. Guztira geratzen den indar erresultantea hauxe da:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - k\eta\mathbf{v}. \quad (5-33)$$



5.10. irudia. Solido bat fluidoaren barnean higitzen.

Azter dezagun ekuazio horrek denborarekin duen eboluzioa. Demagun F indarra konstantea dela; hauxe da, adibidez, pisuaren eraginez atmosferan higitzen ari diren gorputzen kasua. Orduan, $F = mg$ (Arkimedes-en bultzada-indarra kontuan hartu gabe). Demagun, halaber, lehen aldiunean $v = 0$ izan dela. Hasierako aldiunean,

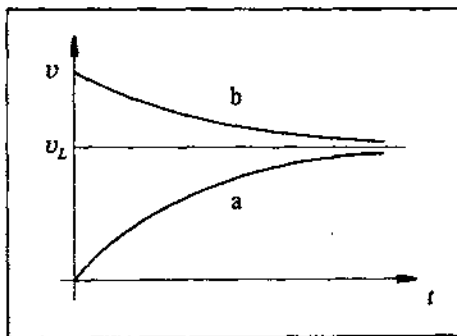
$$k\eta v = 0 \rightarrow ma = F, \quad (5-34)$$

eta, beraz, v handituz doa F -ren norabidean.

Denborarekin v handituz doanez, $k\eta v$ ere handituz doa, eta F -ren norabidea duenez,

$$F - k\eta v \quad (5-35)$$

indar erresultantea txikituz doa; eta $F - k\eta v = ma$ denez, azelerazioa ere txikiagotuz doa, baina beti norabide eta noranzko berberaz; eta horregatik, v handituz doa.



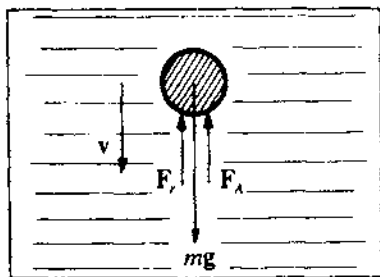
5.11. irudia. Abiaduraren eboluzioa fluidoan, hasierako baldintza desberdinen kasuetan. a) $v_0 < v_L$ denean. b) $v_0 > v_L$ denean.

Denborarekin (izatez, $t \rightarrow \infty$ egitean) $F - k\eta v = 0$ egiten da. Orduan, $a = 0$ izango litzateke eta $v = ktea$. Beraz, muga-abiadura bat dago, $t \rightarrow \infty$ egiteari dagokiona eta $F - k\eta v_L = 0$ egiten duena hain zuzen ere,

$$v_L = \frac{F}{k\eta}. \quad (5-36)$$

Lehen aldiuneko abiadura muga-abiadura baino txikiagoa bada, abiadura handituz doa muga-abiadurara heldu arte, eta lehen aldiuneko abiadura muga-abiadura baino handiagoa bada, abiadura motelduz doa muga-abiadurara heldu arte. Kasu bietan abiadurak denborarekin duen aldakuntza 5.11. irudian adierazi da.

Gorputza grabitatearen eraginpean jausten ari denean, Arkimedes-en goranzko bultzada-indarra ere eduki behar da kontuan. Indar hori ia arbuiagarria da airearen kasuan, baina oso handia gerta daiteke likidoen kasuan.



5.12. irudia. Fluido baten barnean bertikalki erortzen ari den gorputza.

5.12. irudian fluido baten barnean bertikalki erortzen ari den gorputz baten kasua adierazi da. Kasu horretan F_A flotazioaren kausazko goranzko indarra edo *Arkimedes-en bultzada* izanik,

$$F_A = -m_f g, \quad (5-37)$$

non m_f delakoa 'fluidoaren masa desplazatua' den, alegia, gorputzak betetzen duen bolumenean sartuko litzatekeen fluidoaren masa. Horrela, higidura-ekuazioa hauxe da:

$$mg - m_f g - k\eta v = ma. \quad (5-38)$$

Norabide bertikaleko osagaiak hartuz, erraz integra dezakegu ekuazioa,

$$m \frac{dv}{dt} = (m - m_f)g - k\eta v \rightarrow \int_{v_0}^v \frac{mdv}{[(m - m_f)g - k\eta v]} = \int_0^t dt, \quad (5-39)$$

eta horrela, lehenago 5.11. irudian adierazitako kurben ekuazioa lortuko dugu, hots,

$$v = \frac{m - m_f}{k\eta} g \left(1 - e^{-\frac{k\eta}{m} t} \right) + v_0 e^{-\frac{k\eta}{m} t}, \quad (5-40)$$

baita muga-abiadura ere, horretarako (5-40) adierazpenean $t \rightarrow \infty$ eginez:

$$v_t = \frac{(m - m_f)g}{k\eta}. \quad (5-41)$$

Honetaz oso interesgarria da parakaidisten kasua. Hain zuzen, erortzen ari diren bitartean, gorputzaren eitea kontrolatuz (k delakoaren balioa, azken batez), muga-abiadura desberdinak lor baitituzakete; horrela, airean daudela, higiduraren norabidea eta abiadura kontrolatu eta bideratu ahal dituzte.

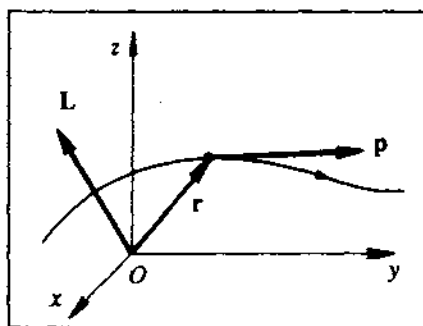
5.7. MOMENTU ANGELUARRA

Magnitude berri hau oso lagungarria gertatuko zaigu zenbait higiduraren dinamikaren azterketan. Honako era honetan definitu ohi da, t aldiunean $\mathbf{r}$ posizioan $\mathbf{p}$ momentu linealaz higitzen ari den partikula batek sistemaren jatorriarekiko (O puntutarekiko) duen momentu angeluarra:

$$\mathbf{L}_O \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (5-42)$$

Hau da, partikularen posizio bektorea eta momentu lineala bektorialki biderkatzean lortzen den magnitudea da ardatz-sistemaren jatorriarekiko momentu angeluarra (praktikan, ia beti jatorriarekiko momentua definitzen denez, ez da azpindizirik jartzen). Osagaien bidez honelaxe idatz daiteke:

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}. \quad (5-43)$$



5.13. irudia. Momentu angeluarraren definizioarako elementuak.

Azter dezagun magnitude honen balioa zenbait kasu berezitan.

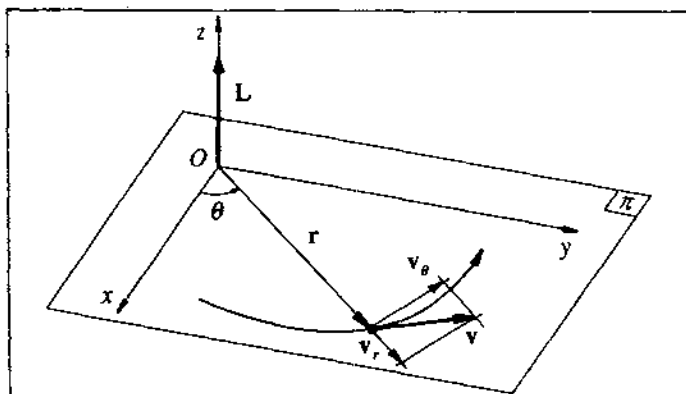
5.7.1. Higidura laua

Lehenik eta behin ardatz-sistema egokia aukeratuko dugu (ikus 5.14. irudia). Oxy plano higidura gertatzen deneko π plano izango da, eta, bestetik, Oz ardatza, π -ren perpendikularra. Honela eginik, $\mathbf{r}$ bektorea planoan egongo da, baita $\mathbf{v}$ bektorea ere.

Momentu angeluarra bai $\mathbf{r}$ -ren eta bai $\mathbf{p}$ -ren perpendikularra denez, $\mathbf{L}$ momentu angeluarra π planoaren perpendikularra izango da. Hots, $\mathbf{L} \perp \pi$, eta gainera $\mathbf{L}$ -k osagai bat izango du soilik, Oz norabidean hain zuzen ere. Beste era batera esanda, $\mathbf{L}$ bektorearen norabideak konstante iraungo du higiduran zehar.

Bestalde, π planoan erreferentzia-sistema polar bat aukeratuz gero, $\mathbf{v}$ abiadurak bi osagai izango ditu (ikus 3.5. atala):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_r : \text{osagai erradiala,} \\ \mathbf{v}_\theta : \text{zeharkako osagaia.} \end{array} \right\} \quad (5-44)$$



5.14. irudia. Higidura lauko erreferentzia-sistema eta momentu angeluarra.

Osagai horien bidez era honetara azalduko dugu momentu angeluarra:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta). \quad (5-45)$$

Baina $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ da, $\mathbf{r}$ eta $\mathbf{v}_r$ elkarren paraleloak baitira. Honelatan, ba,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta. \quad (5-46)$$

Eta $\mathbf{v}_\theta$ eta $\mathbf{r}$ bektoreak π planoan kokaturik daudenez eta elkarren perpendikularrak direnez,

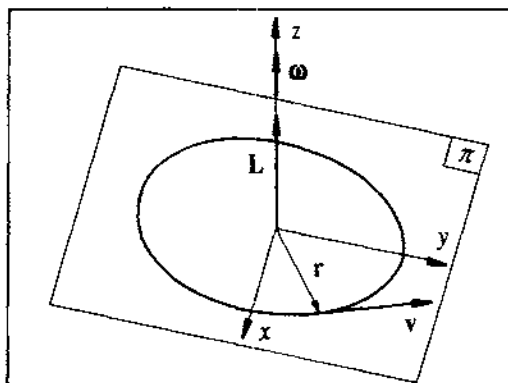
$$\mathbf{L} = mr v_\theta \mathbf{k}. \quad (5-47)$$

Eta 3.5. atalean ikusi genuenez,

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}. \quad (5-48)$$

Azkenean hauxe dugu:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (5-49)$$



5.15. irudia. Higidura zirkularreko momentu angeluarra eta abiadura angeluarra.

5.7.2. Higidura zirkularra

Dakigunez, higidura honetan

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (5 - 50)$$

Beraz,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (5 - 51)$$

eta $\mathbf{r}$ eta $\boldsymbol{\omega}$ elkarren perpendikularrak izanik (ikus 5.15. irudia), momentu angeluarraren modulua ondokoa izango da:

$$L = m\omega r^2. \quad (5 - 52)$$

Norabidez, $\mathbf{L}$ eta $\boldsymbol{\omega}$ elkarren paraleloak dira. Beraz, honelaxe idatz dezakegu:

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}. \quad (5 - 53)$$

5.7.3. Momentu angeluarraren teorema

Ikusitako kasu bereziak alde batera utzirik, momentu angeluarrak beste magnitude batzuekin duen erlazioa aztertzen saiatuko gara, konkretuki, indarraren momentuarekin duena.

Dakigunez (ikus 2. gaia), honela definitu ohi da indar batek erreferentzia-sistemaren jatorriarekiko duen momentua:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (5 - 54)$$

Kasu honetan sistemaren jatorriarekiko momentua kontsideratuko dugu beti, eta, horregatik, ez dugu azpindizirik idatziko.

Zer erlazio dago $\boldsymbol{\tau}$ eta $\mathbf{L}$ magnitudeen artean? Hori ikusteko, kalkula dezagun momentu angeluarraren denborarekiko deribatua.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (5 - 55)$$

Hemengo lehenengo gaia nulua da, $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{p}$ bektoreak elkarren paraleloak baitira. Bestalde, erreferentzia-sistema inertziala bada, Newton-en bigarren legearen arabera, $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ da (zer esanik ez, sistema ez-inertzialen kasuan kontuan eduki beharko da puntu hau, interpretazio okerrik ez egiteko). Beraz, hauxe eratuko zaigu:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}. \quad (5 - 56)$$

Adierazpen horri *momentu angeluarraren teorema* deritzo. Modu baliokide desberdinez irakur daiteke. Batetik ondokoa esan dezakegu: «Partikula baten momentu angeluarraren denborarekiko deribatua, beraren gainean eragiten ari den indarraren momentuaren berdina da». Edo bestela esateko, «partikula baten gainean egiten den indarraren momentuak, partikula horren momentu angeluarraren aldakuntza sortzen du». Zer esanik ez, momentu angeluarra eta indarraren momentua puntu berberarekiko kalkulatu behar dira, gure kasuan erreferentzia-sistema inertzial baten jatorriarekiko.

5.7.4. Momentu angeluarraren kontserbazioa

Indarraren momentua nulua denean, $\tau = 0$, goiko adierazpena sinplifikatu egiten da:

$$\tau = 0 \rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \text{ktea.} \quad (5-57)$$

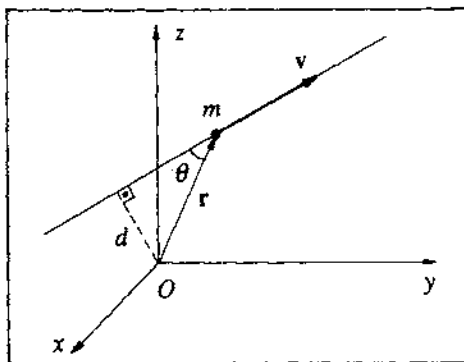
Hauxe da, hain zuzen ere, *momentu angeluarraren kontserbazioaren printzipioa*, hitzez honelaxe azal dezakeguna: «Partikula baten gainean eragiten ari den indarraren momentua nulua bada, partikula horren momentu angeluarrak konstante dirau». Kasu honetan ere puntu berberarekiko momentuez ari gara hitz egiten, alegia, erreferentzia-sistema inertzial baten jatorriarekikoez. Printzipioa beste era honetara ere azal dezakegu: «Partikula baten momentu angeluarrak konstante badirau, beraren gainean indarren momenturik ez du eragiten, edo eragiten ari diren indarren momentua nulua da».

5.7.5. Higidura zuzen uniformea

Beste kasu berezi bat aipatzearren, $\mathbf{F} = 0$ kontsideratuko dugu. Batetik, higidura hori zuzena da, azeleraziorik ez baitu, eta $\mathbf{v}$ bektorea konstantea da. Bestetik, jatorriarekiko momentu angeluarra ere konstantea denez, hots,

$$L = mvr \sin\theta = mv d = \text{ktea} \quad (5-58)$$

denez, argi ikus daiteke d hori ere konstantea dela, baina hori gauza agerikoa da, ibilbidea zuzena baita (5.16. irudia).

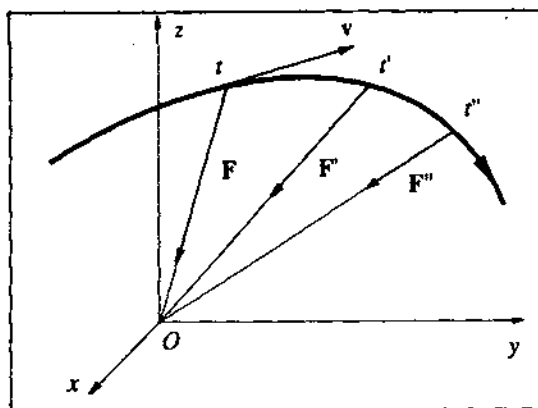


5.16. irudia. $\mathbf{F} = 0$ denean, higidura zuzen uniformea dugu.

Beraz, frogatzen aritu izan garen hori ez zen zertan frogaturik, bistakoa baitzen. Ala ez?

5.8. INDAR ZENTRALAK

Puntu honetan, Naturan sarri ageri den kasu bat aztertuko dugu: indar zentralena. Ikusiko dugunez, indar zentralen eraginpean gertatzen den higidurak berezitasun interesgarriak ditu.



5.17. irudia. Indar zentralak. Norabidea O puntutik pasatzen da.

Lehenik eta behin definitu egingo ditugu indar zentralak. Definizioz, *indar zentralak* etengabe puntu finko bati zuzenduriko norabidea dutenak dira. Puntu horri *indar-zentroa* deritzen, eta gehienetan, kalkuluak errazteko, bertan kokatzen da erreferentzia-sistemako ardatzen jatorria (ikus 5.17. irudia).

Esan dugunez, erreferentzia-sistemaren jatorria indar-zentroan harturik, bistakoa denez, indarraren momentua nulua izango da edozein aldiunetan:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (5-59)$$

zeren $\mathbf{r}$ eta $\mathbf{F}$ bektoreak elkarren paraleloak baitira.

Horrela izateak ondorio fisiko interesgarriak ditu, zerren, momentu angeluarraren kontserbazioaren printzipioaren arabera, ondokoa baitugu:

$$L = \text{ktea.} \quad (5-60)$$

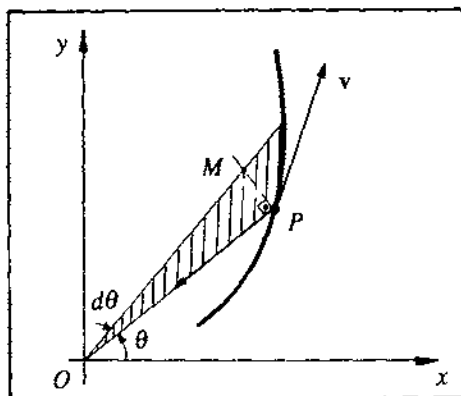
Eta $L = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ denez, $\mathbf{r}$ eta L elkarren perpendikularrak dira. Bestalde, L delakoak norabide konstantea duenez, $\mathbf{r} \perp L$ izateak $\mathbf{r}$ plano batean dagoela esan nahi du, L -ren perpendikularra den eta indar-zentroa bere barnean daukan planoan hain zuzen ere.

Honelatan, ba, indar zentralen eraginpeko higidura laua da. Eta azterketa errazteko, Ox eta Oy ardatzak plano horretan kontsideratuko ditugu (5.18. irudia). Gai honetan bertan ikusi dugunez (5-58), higidura lauaren kasuan,

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad (5-61)$$

eta gainera $L = \text{ktea}$. Beraz,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{ktea.} \quad (5-62)$$



5.18. irudia. Indar zentralen eraginpeko higiduraren planoan.

Ikus dezagun konstante horren esangura zein den. 5.18. irudiko OPM triangeluak ondoko azalera du (bigarren ordenako infinitesimoak arbuiatuz):

$$dA = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta. \quad (5-63)$$

Hots, bigarren ordenako infinitesimoak arbuiatuz, irudian marrazturik ageri den azalera balio hau du:

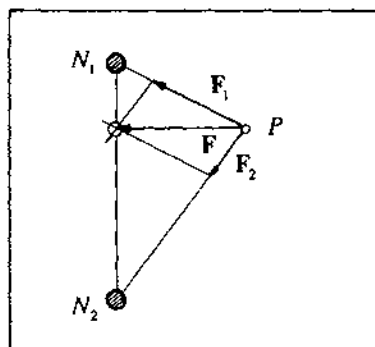
$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (5-64)$$

Eta dt elementuaz zatituz,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = k_{\text{tea}}. \quad (5-65)$$

Baina, zer esangura fisiko edo geometriko du dA/dt deribatuak? *Azalera-abiadura* edo *abiadura areolar* izenez ezaguna da, posizio bektoreak denbora-unitatean zapaltzen duen azalera adierazten baitu. Dakusagunez, ba, indar zentralen kasuan azalera-abiadurak konstante iraungo du denborarekin. Izatez, horixe da *Kepler-en bigarren legea* (ikus 11.5. atala).

Indar zentralen kasua Eguzkiaren eta planeten artekoa edo atomoko nukleoaren eta elektroien artekoa da; hitz batez, bi gorputzen arteko problema adierazten duena.



5.20. irudia. Molekula biatomikoen kasua.

Adibide modura, diogun ezen ardatz-indarren kasua molekula biatomikoen elektroekin gertatzen dela. 5.20. irudian azaldu da indarrak nolakoak diren. N_1 eta N_2 direlakoak molekula osatzen duten bi atomoen nukleoak dira eta F_1 eta F_2 elektro bati egiten dizkieten indarrak. Guztira, elektroaren gaineko indar erresultatea

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (5 - 70)$$

da; hots, bien baturaz ardatz-indarra dugu. Ikus daitekeenez, bi indar zentralen bilketaz sor daiteke ardatz-indarra.

5.9. SISTEMA EZ-INERTZIALAK. INERTZIA-INDARRAK

Zinematikaren arloan, eta konkretuki 4. gaian, edozein bi sistematatik eginiko behaketa zinematikoen arteko erlazioak lortzen saiatu gara. Goazen orain Dinamikaren arlora, eta demagun, sistema bietako bat inertziala dela. Gauzak konkretatzeko, har dezagun aurreko gaiko 4.4. puntuan ageri den kasurik orokorrena (5.21. irudia). Azenturik gabeko sistema inertziala dela kontsideratuko dugu. Bestea ez da inertziala, noski, azelerazio desberdina neurtzen baitu.

Lehenengo sisteman —azentugabekoan— zuzenki aplikatu ahal izango dugu Newton-en bigarren legea, inertziala da eta. Hori zuzentzat jorik, ikus dezagun orain nola aplikatuko dituen Dinamikaren legeak, $O'x'y'z'$ sistema ez-inertzialean doan B' behatzaileak.

4.4. atalean aztertu genuenez, behatzaile biek neurtzen dituzten azelerazioen artean ondoko erlazioa dago:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (5 - 71)$$

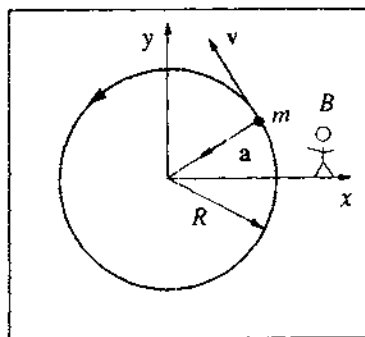
Ikus dezagun, ba, nola aplikatzen dituzten Dinamikaren legeak B eta B' behatzaileek. Newton-en legea aplikatzean, B behatzaileak erlazio hau idatziko du berak neurtzen duen indarraren eta kontsideratu behar duen azelerazioaren artean:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (5 - 72)$$

Puntu honetara heldurik, argi utzi behar da zentrifugo eta zentripetu hitzen artean dagoen desberdintasun eta erlazioa. Erabiltzen diren kontzeptuak, indar zentrifugoa eta azelerazio zentripetua dira, eta orain ikusiko dugunez, txanponaren bi aurpegiak dira, nolabaiteko errealitatea ikuspuntu desberdinetatik adieraziz.

Indar zentrifugoa sistema ez-inertzialetan agertzen da edo, nahiago bada, bertako dinamika Newton-en bigarren legearen bidez ulertzeko kontsideratu behar da. Inertzia-indar bat da; hots, sistema ez-inertzialetan agertzen da, Newtonen bigarren legea zuzenki aplikatzean.

Higidura zirkularra aztertzean (3.4. atala), azelerazioak osagai normala duela ikusi genuen, zeinari *azelerazio zentripetua* izena eman genion. Izatez, azelerazioa kontzeptu zinematikoa da. Dena den, Dinamikaren arloan azelerazio hori sortzen duen indar bat kontsideratu behar da, eta nolabait egitearren, azelerazio zentripetua sortzen duen indarrari 'zentripetua' izatera eman beharko genioke. Edozertara, higidura zirkularra sistema inertzialean gertatzen bada, ohituraz ez da horrela egiten. Bestalde, indar hau 'benetako' indar bat da, eta beste sistema guztietatik ere kontsideratu beharko da.



5.22. irudia. Higidura zirkular uniformearen sistema inertzialetik ikusita.

5.9.1. Adibidea

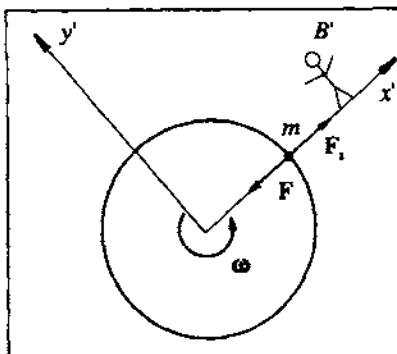
Aurreko kontzeptuak argitzeko, adibide bat jarriko dugu. Demagun higidura zirkular uniformearen dugula. Azter dezagun, lehenik, sistema inertzial batetik (5.22. irudia). Partikula $\mathbf{v}$ abiaduraz higitzen ari da, ibilbide zirkularra osatuz. Hori posible izan dadin, partikulak ondoko balioa duen azelerazio zentripetua eduki behar du:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 R \mathbf{u}_r = -\frac{v^2}{R} \mathbf{u}_r. \quad (5-76)$$

Eta hori sortzeko indar erradial zentripetu 'benetakoak' eragin beharko du:

$$\mathbf{F} = -m \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_r. \quad (5-77)$$

Har dezagun orain partikularen posizio bektoreari loturik doan sistema (5.23. irudia). Sistema hau partikularekin biraka ari da, ω abiaduraz (konstantea). Sistema honetan partikula gelditi dago $x' = R$, $y' = 0$ puntuan. Partikula orekan ($\mathbf{a}' = \mathbf{0}$) dago. Baina zein indar ari dira eragiten?



5.23. Irudia. Higidura zirkular uniformearen posizio bektoreari lotuta doan sistema ez-inertzialetik ikusita.

Orain, B' behatzailearen ikuspuntutik, batetik aurreko $\mathbf{F}$ benetako indarra kontsideratu beharko dugu; baina oraingoan honelaxe adieraziko dugu:

$$\mathbf{F} = -m \frac{v^2}{R} \mathbf{i}', \quad \mathbf{i}' = \mathbf{u}, \quad \text{izanik.} \quad (5-78)$$

Bestetik, inertzia-indarra den indar zentrifugoa ere kontuan hartu beharko dugu:

$$\mathbf{F}_i = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (5-79)$$

Eta $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ denez ($\omega = v/R$ izanik),

$$\mathbf{F}_i = -m\omega^2 R \mathbf{i}' = m \frac{v^2}{R} \mathbf{i}'. \quad (5-80)$$

Azken batez, B' behatzaileak dakusana, hauxe da:

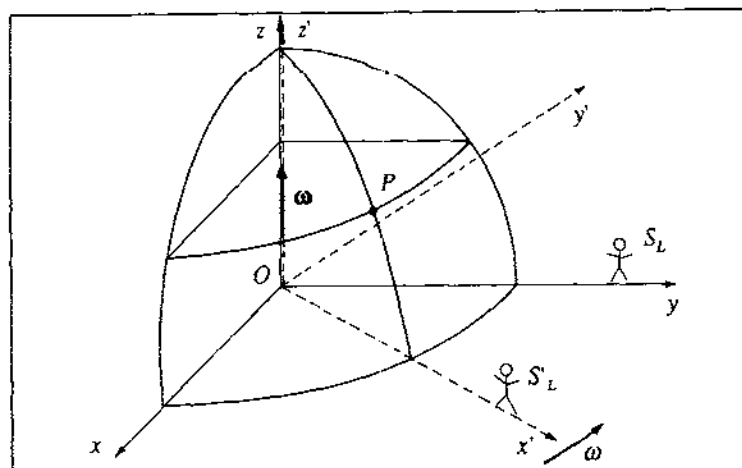
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_i = \mathbf{0} = m\mathbf{a}'. \quad (5-81)$$

eta horrela Newton-en mekanika erabiliz, ondo uler dezake nola, beraren ustez, partikula gelditi dagoen.

5.10. LURRA ERREFERENTZIA-SISTEMA MODURA

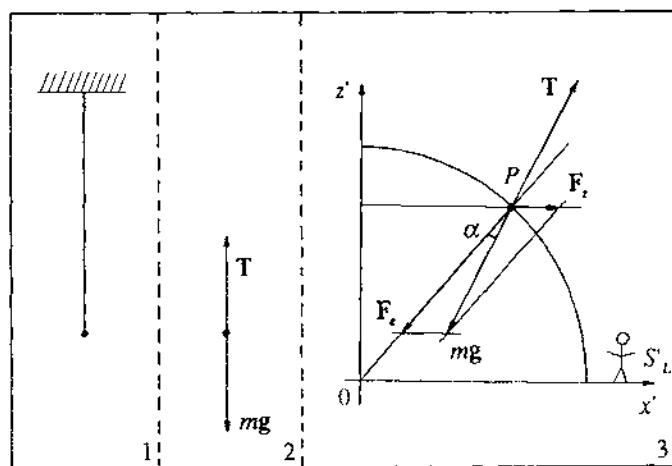
Gai honetako 5.1. puntuan ikusi dugunez, Lurrarekin biraka doan sistema $S'_L(Ox'y'z')$ delakoa— ez da inertziala. Hala ere, baldintza batzuetan $S_L(Oxyz)$ sistema inertzializat har dezakegula ikusi dugu (ikus 5.24. irudia). S_L sistemaren jatorria Lurraren zentroan dago eta beraren ardatzak eguzkian finko daudenen (S_E -ren) paraleloak dira.

S'_L delakoak S_L -ren jatorri berbera du eta Oz' ardatza Oz ardatz berbera da. Baina $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarra (bira oso bat eguneko) du S_L sistemarekiko. Gu, lurtarro, S'_L sisteman gaude, izatez; P puntuan hain zuzen ere. Beraz, gure sistema ez da inertziala; hortaz, inertzia-indarrak ere eduki beharko ditugu kontuan.



5.24. irudia. Lurrarekin batera kontsidera ditzakegun bi sistemak: S_L sistema inertziala eta S'_L sistema ez-inertziala.

Hala ere, P puntuan gaudenez, normalean ez dugu zuzenki S'_L sistema erabiltzen. S_L sistemarekin batera higituz gure latitudeari eta luzera geografikoari dagokion sistema berezia baizik. Normalki, z' ardatz gisa, *tokiko bertikala* hartu ohi dugu. Baina zein da tokiko bertikalaren norabidea? Irudiko OP delakoa ote, hots, norabide erradialekoa ote da? Ikusiko dugunez, ez.



5.25. irudia. Tokiko bertikalaren eta grabitate eraginkorraren definizioak.

Hizkuntza arruntean esaten denez, bertikala plomuak markatzen duen norabidea da. Azter dezagun, ba, plomua S'_L sistematik (5.25. irudiak). Bi indarrek eragiten dute plomua-ren oreka lortzeko: T delakoak, sokaren tentsioak alegia, eta mg pisuak. Baina zer da, praktikan, 'pisua' deritzogun hori? Lurraren erakapen-indar hutsa? Jarraian ikusiko dugunez, pisua 'grabitate eraginkorra' deritzogun kontzeptuarekin dago lotuta.

5.10.1. *Grabitate eraginkorra*

Idatz dezagun B' behatzaileak erabili ohi duen Dinamikaren ekuazioa:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (5-82)$$

Hemen, Lurraren higidura kontsideratuz,

$$\begin{cases} \mathbf{A} = 0, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \text{ biraketa uniformea baita,} \\ \mathbf{v}' = 0, S'_L \text{ sisteman plomua geldi baitago,} \\ \mathbf{a}' = 0, S'_L \text{ sisteman plomua geldi baitago.} \end{cases} \quad (5-83)$$

Beraz, plomua geldi dagoelarik,

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (5-84)$$

non $\mathbf{F}$ delakoa 'benetako' indarren erresultantea den. Preseski, 5.25. irudian ikus daitekeenez, bi indarrez osaturik dago:

$\mathbf{F}_e$: Lurraren erakarpen-indarra, grabitazio unibertsalaren eraginez sortua. Lurra esferikotzat hartuz, zentroranzko norabidea du (ikus 5.25.c. irudia).

$\mathbf{T}$: Sokaren tentsioa. Bertikalaren norabidea definitzen du, horixe baita plomuaren sokaren norabidea.

Bestalde, $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ delakoa gure sistema inertziala ez delako ageri den indar zentrifugoa da. Hots, (5-84) adierazpena honelaxe azal daiteke:

$$\mathbf{F}_e - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{T} = 0. \quad (5-85)$$

Edozertara, 5.24.b. irudian ikus daitekeenez, plomua orekan dagoenez,

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = 0. \quad (5-86)$$

Azken adierazpen biak elkarrekin konparaturik, era honetan defini dezakegu Lurreko puntu bateko pisua:

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_e - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (5-87)$$

Honek hauxe esan nahi du, alegia, *grabitatearen indarra* ($m\mathbf{g}$) Lurraren erakarpen grabitatorioaren ($\mathbf{F}_e$) eta indar zentrifugoaren ($-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$) batuketaz sortzen dena dela. Horrela definituriko $\mathbf{g}$ horri *grabitate eraginkorra* deritzo, eta guk ere horrela egingo dugu hemen.

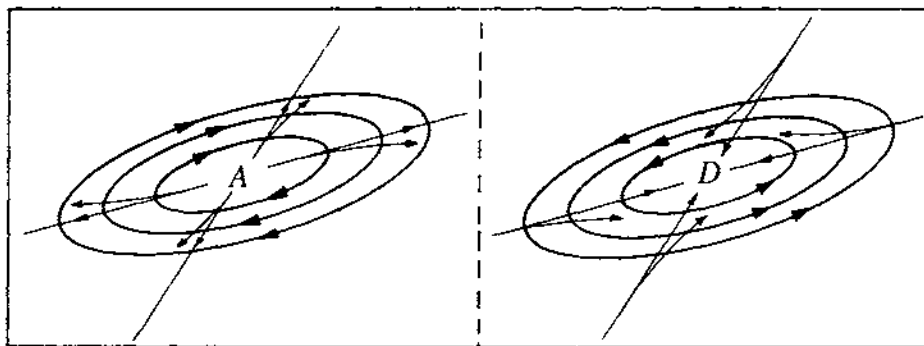
Hortaz, 5.25.c. irudian ikus daitekeenez, bertikala desbideratu egiten da pixkatxo bat Lurraren erradioaren norabidetik, α angelua hain zuzen ere. Dena den, α angelua oso txikia da, zeren eta, proportzioan, $\mathbf{F}_e$ -ren modulua 1000 baliokoa izanik, $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ delakoa $0 \div 5$ tarteetan baitago Lurraren azalean. Horrela, lehen hurbilketa batean, tokiko bertikalak Lurraren erradioaren norabidea duela esan ohi da.

5.10.2. Coriolis-en indarraren eragina Lurrean

Aurreko kasuan (plomuairenean) gorputza Lurrarekiko geldi zegoeia ($\mathbf{v}' = 0$) kontsideratu dugu. Baina higitzen ari bada, Coriolis-en indarra kontsideratu beharko da.

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (5-88)$$

Dakusagunez, $\mathbf{F}_c$ eta $\mathbf{v}'$ elkarren perpendikularrak dira. Horrelatan, ba, Coriolis-en indarrak desbideratu egiten ditu gorputzak beren norabide zuzenetik. Higidura horizontalari dagokionez, Ipar Hemisferioan higidura guztiak eskuinerantz desbideratzen dira Coriolis-en indarraren kausaz; Hego Hemisferioan, ordea, ezkerrerantz.



5.26. irudia. Antizikloien eta depresioen egitura Ipar Hemisferioan.

Arrazoi honegatik, Ipar Hemisferioan antizikloien inguruko haizeak torlojuaren noranzkoan higitzen dira. Zikloien edo depresioen ingurukoak alderantziz, noski (5.26. irudia).

6. gaia

Lana eta energia

Partikularen Dinamikarekin segiturik, gai honetan bestelako magnitude dinamikoak aztertuko ditugu, higiduraren izaera eta eboluzioa hobeto ulertzen lagunduko digutenak. Hain zuzen, partikularen eboluzio dinamikoan, denborarekiko integrala eginez *bulkada* deritzon magnitudea definituko dugu eta espazioarekiko integrala eginez, *lana*. Ikusiko dugunez, bulkada momentu linealarekin lotuta dago, eta lana energiarekin.

Lana definitu ondoren, denbora-unitatean egiten den lana aztertuko dugu, *potentzia* alegia. Jarraian, indar berezi batzuei dagokien dinamika aztertuko dugu, indar kontserbakorrena hain zuzen. Energia zinetikoa eta potentziala definituz, sistemen eboluzioan hain garrantzitsua den energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa azalduko dugu.

Aipaturiko kontzeptuen aplikazio modura, indar zentralen eraginpeko higidura aztertuko dugu gero. Bukatzeko, indar ez-kontserbakorren aipamena egin eta sistema baten oreka-posizioak energia potentzialaren izaerarekin duen lotura aztertuko dugu.

6.1. INDARRAREN BULKADA

Aurreko gaian esan dugunez, partikula batek bere kanpoko unibertsoarekin dituen elkarrekintzak *indar* terminoaz adierazi ditugu, eta indar kontzeptuaren definizioa Newton-en bigarren legea dela ikusi dugu:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (6-1)$$

Kasu batzuetan, indarrak denborarekiko duen aldaketa eta erlazioa ezagunak ditugu; hots, indarraren denborarekiko aldakuntza,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t), \quad (6-2)$$

ezaguna da. Honela denean, ondoko prozesu matematikoa egin dezakegu. Lehenengo eta behin, dt denbora-tartean dagoen momentu linealaren aldaketa kalkulatu dezakegu:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt. \quad (6-3)$$

Eta hori limite egokien artean integratuz:

$$\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt. \quad (6-4)$$

Hemen $(t_0, \mathbf{p}_0)$ balioak lehen aldiuneko baldintzak dira, eta $(t, \mathbf{p})$ edozein aldiuneri dagozkionak. Horien bidez:

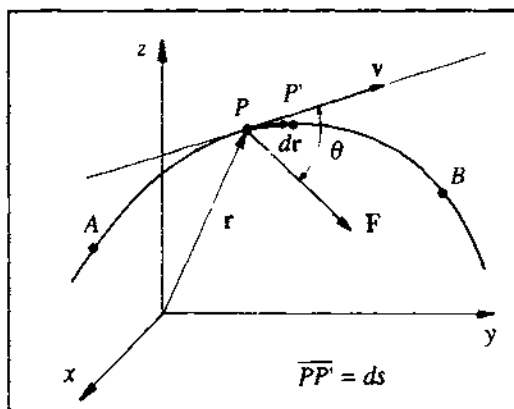
$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{I}. \quad (6-5)$$

Horrela definituriko magnitudeari *bulkada* deritzo eta $\mathbf{I}$ letraz adierazten da (bektorea da, noski). Aurreko adierazpenean ikus daitekeenez, bestalde, «*partikula baten momentu linealaren aldakuntzaren balioa bulkadaren balioaren berdina da*».

Honelatan, ba, $\mathbf{F}(t)$ ezaguna dugun kasuetan, metodo honetaz ebatz dezakegu problema, alegia, lehenik bulkada kalkulatu, eta gero, bulkadaren bidez momentu lineal berria lortuz.

6.2. INDARRAREN LANA

Hala ere, gehienetan $\mathbf{F}(t)$ funtzioa ez da ezaguna. Askoz ere normalagoa izaten da indarren eremua posizio bektorearen funtzioan ezagutzea, hots, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ezagutzea, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ izanik. Horrelako kasuetan, bulkada erabili ordez, bestelako magnitude batzuk erabiltzea komeni zaigu, hala nola *lana* eta *energia*. Goazen, ba, magnitude horiek banan-banan definitzera eta kasu konkretuetan erabiltzera.



6.1. irudia. Lanaren definizioarako elementuak.

Lehenik, indar batek partikularen gainean eragitean egiten duen lana definituko dugu. Demagun, $\mathbf{F}$ indarraren eraginpean higitzen ari den partikula bat. Partikula horrek $d\mathbf{r}$ desplazamendua du dt denbora-tartean. Bitartean, indarraren balioa $\mathbf{F}$ da, eta denbora-tarte infinitesimal horretan konstantetzat har daiteke (6.1. irudia).

Definizioz, denbora-tarte horretan indarrak eginiko *lan infinitesimala* honako hau da:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (6-6)$$

alegia, bi bektore horien arteko biderkadura eskalarra. Erraz ikus daitekeenez,

$$dW = F ds \cos \theta, \quad \text{zeren } |dr| = ds \text{ baita.} \quad (6-7)$$

Bi punturen arteko (A -ren eta B -ren arteko) lan osoa bitartean egiten diren lan infinitesimal guztien batuketan (kasu honetan, integrazioa) eginez lortzen da.

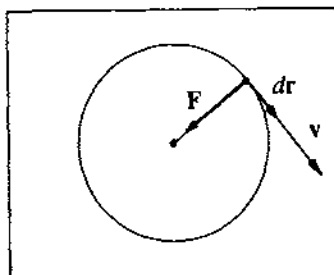
$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6-8)$$

Hemen adierazitako integrala integral kurbilineoa da; hots, partikularen ibilbidearen arabera egin behar da, $d\mathbf{r}$ elementuak ibilbide horretakoak baitira. A eta B puntuak finkoak izanda, ibilbide desberdina eginik emaitza desberdina lortuko da kasu orokorrean. Dena den, geroago ikusiko dugunez, indar berezi batzuen kasuan, emaitzak soilik du A eta B puntuen menpekotasuna eta ez du bien arteko ibilbidearen menpekotasunik. Indar horiek oso interesgarriak izango dira eta bereziki aztertuko ditugu.

Emaniko definizioaren arabera, F delakoa etengabe ibilbidearen perpendikularra bada, indar horrek ez du lanik egiten.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow dW = 0. \quad (6-9)$$

Honelako zenbait adibide jar ditzakegu.



6.2. irudia. Higidura zirkular uniformearen kasua ez du lanik egiten.

Adibidez, higidura zirkular uniformearen kasuan, F eta $d\mathbf{r}$ perpendikularrak dira ibilbideko puntu guztietan (6.2. irudia). Hortaz, indar horrek ez du lanik egiten.

Modu berean, gorputz bat gainazal lau baten gainean marruskadurarik gabe higitzen bada, zoluak egiten duen indar bakarra normala da, eta horrek ez du lanik egiten, N eta $d\mathbf{r}$ etengabe perpendikularrak baitira (6.3. irudia).

Lanaren definizioa itzulirik, ikus daitekeenez, $F(\mathbf{r})$ ezaguna denean, erraz kalkula daiteke indar horrek egiten duen lana. Lan hori honelaxe idazten da indarraren osagaien funtzioan:

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (6-10)$$

Definizio horretan finkatuz, eta $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ denez,

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (6-15)$$

Hitz batez, potentzia indarraren eta abiaduraren biderketa eskalarraz lortzen da. Bestalde, t denbora-tartean egiten den *batez besteko potentzia*, $\langle P \rangle$, hauxe da:

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t}. \quad (6-16)$$

Lanaren eta potentziaren dimentsio-ekuazioak eta unitateak 6.1. taulan ageri dira.

6.1. Taula

	Dimentsio- ekuazioak	Unitateak		Baliokidetasunak
		MKS sistema	Bestelakoak	
Lana W	$[W] = [\mathbf{F}] \cdot [d\mathbf{r}]$ $[W] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$	joule (J) (N·m)	kilowatt · ordu (kWh)	1 kWh = $3,6 \times 10^6$ J
Potentzia P	$[P] = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{v}]$ $[P] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}$	watt (W) $\left(\text{N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} \right)$	kilowatt (kW) zaldipotentzia (ZP edo HP)	1 kW = 10^3 W 1 ZP = 735 W

6.4. ENERGIA ZINETIKOA

Kalkula dezagun indar batek puntu biren artean egiten duen lana, baina indarra ipini ordeztu, Newton-en bigarren legearen beste atala ipiniz, alegia, masaren eta azelerazioaren arteko biderkadura. Lehenago ikusi dugunez, definizioz,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6-17)$$

Baina erreferentzia-sistema inertziala bada,

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \quad (6-18)$$

beraz,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_A^B \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt,$$

$$W = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2. \quad (6-19)$$

Emaitza hori kontuan harturik, magnitude berri bat definituko dugu: *energia zinetikoa*. Definizioz, t aldiunean partikula batek duen energia zinetikoa (E_k) honelaxe lortzen den magnitudea da:

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (6-20)$$

Ikus daitekeenez, beronen dimentsioak, lanarenak dira:

$$[E_k] = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = \text{ML}^2 \text{T}^{-2}. \quad (6-21)$$

Bestalde, emandako definizioa lehengo adierazpenera pasatuz,

$$W = \int_A^B \frac{d}{dt}(E_k) dt = E_{k,B} - E_{k,A}. \quad (6-22)$$

Beraz, azken adierazpen hau irakurritz, ondokoa esan dezakegu: «*Gorputz baten gainean egiten den lana gorputz horren energia zinetikoa emendatzeko erabiltzen da*». Edo bestela esanik: «*Gorputz baten gainean lana egitean, gorputz horren energia zinetikoa aldatu egiten da*».

Puntu honetara heldurik, konparatu egingo ditugu azken ondorio horiek, bulkada aztertzean lortutakoekin, hots:

$W = E_{k,B} - E_{k,A}$ Hemen espazioarekiko aldakuntza adierazten da. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ezaguna dugunean erabiltzen da. Nahiz eta $\mathbf{r}(t)$ izan, kasu honetan ez da menpekotasun hori esplizituki jartzen eta horrela, indarra osagai espazialen funtzioan azaltzen da. Ibilbideko bi punturen artean gertatzen da.

$\mathbf{I} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ Itxura berdintsukoa da, baina denborarekiko aldakuntza adierazten du. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ ezaguna dugunean erabiltzekoa.

Dena den, gehienetan $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ezaguna da, eta horregatik, energia zinetikoaren kontzeptua oso baliagarria gertatzen da praktikan.

6.5. ENERGIA POTENTZIALA

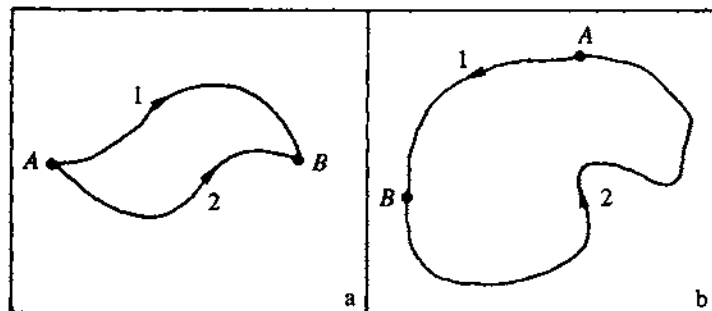
Puntu honetan indar berezi batzuk aztertuko ditugu: *indar kontserbakorrak*. Horretarako, horien definizioetik hasiko gara. Indarren eremu bat kontserbakorra dela esaten da, baldin eta soilik baldin indarrak egiten duen lana $E_p(x,y,z)$ funtzio eskalar batek hasierako eta bukaerako puntuen artean duen aldaketaren bidez adierazi ahal bada. Definizioaren arabera, indar kontserbakorren kasuan honelaxe azal daiteke bi punturen arteko lana:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_{p,A} - E_{p,B}. \quad (6-23)$$

E_p delako funtzio eskalar horri *energia potentziala* deritzo.

Ikus daitekeenez, indar kontserbakorren kasuan, lana A eta B puntuetan E_p funtzioak hartzen duen balioaz kalkulatzen da. Beraz, egindako lanak ez du ibilitako bidearen menpekotasunik, hasierako eta bukaerako puntuena baizik (6.4.a irudia), hau da:

$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(1)} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(2)} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(3)} \quad (6-24)$$



6.4. irudia. a) Lana kalkulatzeko bide desberdinak. b) Indar kontserbakorren kasuan, ibilbide itxian, guztira, ez da lanik egiten.

Berez, energia potentzialaren balioa konstante batez indeterminaturik dago, zeren lana bi puntutako energiaren kenketaz lortzen baita, hots,

$$E_p = E_p(x, y, z) + K, \quad (6-25)$$

$$W = (E_p + K)_A - (E_p + K)_B = E_{p,A} - E_{p,B}. \quad (6-26)$$

Konstante horrek balio desberdinak eduki ditzake, energia potentzialen zero maila non aukeratzeko den kontuan hartuta.

Bestalde, integrazioarako ibilbidea itxia denean, hau da, A puntutik irten eta A puntura helden bada (6.4.b. irudia), guztira ez da lanik egiten, indarrak kontserbakor direnean. Ikus dezagun horren azalpena, aurreko (6-24) adierazpena erabiliz:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(1)} + \underbrace{\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(2)} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(1)} - \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(2)} = 0. \quad (6-27)$$

Beraz, puntu hori argi dago indar kontserbakorrei dagokienez.

Praktikan, marruskadura edo igurtzimenduzko indarrak eta Magnetikan agertzen direnak kenduta, besteak kontserbakorrak direla esan dezakegu. Horregatik, oso baliagarria gertatzen da energia potentziala.

6.6. ENERGIA MEKANIKOAREN KONTSERBAZIOA

6.4. atalean ikusi dugunez, partikula baten gainean eragiten duen indar erresultantea edozein motatakoa izanik ere, beti betetzen da honako hau:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{k,B} - E_{k,A}. \quad (6-28)$$

Bestetik, 6.5. atalean azaldu denez, $\mathbf{F}$ indarra kontserbakorra denean,

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{p,A} - E_{p,B}. \quad (6-29)$$

Horrelatan, ba. higitzen ari den partikula baten gaineko indar erresultantea kontserbakorra bada (eta soilik kasu honetan), hauxe idatz dezakegu ibilbideko edozein puntu biren artean:

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}. \quad (6-30)$$

$$E_{k,B} + E_{p,B} = E_{k,A} + E_{p,A}. \quad (6-31)$$

$$(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B. \quad (6-32)$$

$E = E_k + E_p$ delako magnitudeari *energia mekanikoa* deritzo, eta t aldiunean $P(x,y,z)$ puntuan v abiaduraz higitzen ari den m masadun partikularen kasuan, balio hau du:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x,y,z). \quad (6-33)$$

Indarrak kontserbakorrak direnean, partikularen energia mekanikoak balio berbera du ibilbideko puntu guztietan, hau da, energia mekanikoak konstante dirau denboran zehar. Hortik datorkie, hain zuzen, 'kontserbakor' izena.

Hemen, E_p delakoak eremu kontserbakor batean partikulak duen energia potentziala adierazten du. Hurrengo gaian ikusiko dugunez, partikula-sistemen dinamika aztertzean, beste gai bat ere eduki beharko dugu kontuan, *barne-energia* deritzona, sistemaren barnean eragiten duten indarrek sorturikoa.

6.7. EREMU ESKALARRAREN GRADIENTEA

Energia potentziala definitu ondoren, Fisikaren hizkuntza matematikoan oso baliagarria gertatuko zaigu funtzio eskalar baten gradientea zer den adieraztea.

Lehenik eta behin eremu eskalarra definituko dugu. Espazioko puntu bakoitzean balio eskalarra duen funtzio bat (V) kontsideratuko dugu. Funtzio horrek puntuaren posizio bektorearen menpekotasuna badu, espazioan eremu eskalar bat dugula esango dugu, honelaxe adieraziko duguna:

$$V = V(\mathbf{r}) = V(x, y, z). \quad (6-34)$$

Espazioko puntu bakoitzean, eremu eskalar horren gradientea defini daiteke matematikoki, ondoko eragiketak eginez:

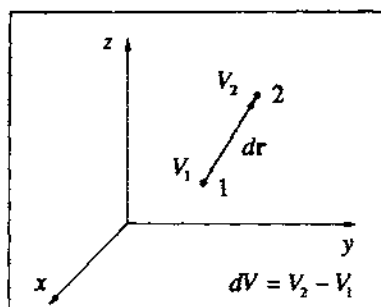
$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (6-35)$$

Ikus daitekeenez, gradientea espazioko puntu bakoitzean definitzen den bektore bat da. Nabla (∇) izeneko eragilearen bidez, eragile hori eremu eskalarrari aplikatuz, eremu bektorial bat lortzen da. Hain justu, ∇ eragilea honela adierazi ohi da era sinbolikoan:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6-36)$$

eta gure kasu honetan V funtzioari aplikatuko zaio.

Ikus dezagun orain, gradienteak duen esangura fisikoa zein den. Definizioaren arabera, puntu bakoitzeko gradientea bektore bat da. Nolakoa den ikusteko, beraren modua, norabidea eta noranzkoa zehaztu beharko ditugu. Horretarako, kalkula dezagun lehenik, bi puntu infinituki hurbilen artean V funtzioak duen aldakuntza, dV alegia (6.5. irudia).



6.5. irudia. Bi puntu hurbilen arteko potentzial-diferentzia.

$$dV = V_2 - V_1 = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz. \quad (6-37)$$

Baina bestalde

$$\text{grad} V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \quad \text{eta} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (6-38)$$

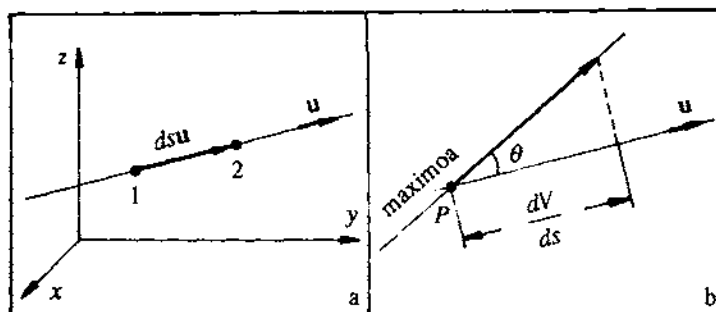
dira. Beraz, honelaxe idatzi ahalko dugu (6-37):

$$dV = \text{grad} V \cdot d\mathbf{r}. \quad (6-39)$$

Honetan finkatuz, gradientearen norabidea kalkulatu dugu. Kontsidera ditzagun espazioan ondoko gainazalak:

$$V(x, y, z) = \text{ktea}. \quad (6-40)$$

Konstantearen balio bakoitzeko, gainazal bat dugu. Gainazal horiei *sestra-gainazalak* edo *gainazal ekipotentzialak* deritze.



6.7. irudia. a) Bi puntu oso hurbilen arteko aldaketa. b) Gradientearen norabidea norabide-deribatu maximoari dagokiona da.

Ikus dezakegunez, *norabide-deribatuak* edo *deribatu direkzionalak* norabide horretan gradienteak duen proiektzioaren ($\text{grad}V \cdot \mathbf{u}$) balioa du. Horrela, gradientearen modulua norabide-deribatu handienaren berdina da; edo, beste modu batera esanik, «*norabide-deribatu maximoa gainazal ekipotentzialen perpendikularren norabidean lortzen da, eta beraren balioa gradientearen moduluarena da*».

Honela, ba, gradienteak era honetakoa da:

- Gradientearen norabidea gainazal ekipotentzialen perpendikularra da.
- Noranzkoa, potentzialak haziz doazenekoa.
- Eta modulua, norabide-deribatu maximoarena.

Gradientearen esangura fisikoa azaldu ondoren, Fisikaren elementu matematiko gisa duen garrantzia aipatuko dugu. Energia potentziala definitzean, eremu kontserbakorrak erabili ditugu. Orain hauxe esanen dugu: «*Indarren eremua kontserbakorra izan dadin, baldintza beharrezko eta nahikoa da indarra eremu potentzial baten gradienteak izatea*», hots,

$$\mathbf{F} = \text{grad}V \quad (6-47)$$

izatea.

Guk ez dugu hemen frogatuko baldintza beharrezkoa denik, maila honetarako gehiegitxo gerta ez dadin. Dena den, erraz froga daiteke baldintza nahikoa dela. Hara! $\mathbf{F} = \text{grad}V$ baldin bada,

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \text{grad}V \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B dV = V_B - V_A. \quad (6-48)$$

Beraz, $\mathbf{F} = \text{grad}V$ bada, lanak ez du ibilbidearen menpekotasunik, ibilbidearen muturren menpekotasun soila edukiz. Beraz, indarren eremua kontserbakorra da, frogatu nahi genuenez.

Fisikaren arloan, $\mathbf{F} = \text{grad}V$ egin beharrean, $\mathbf{F} = -\text{grad}E_p$ egiteko ohitura dago, gero energia mekanikoa energia zinetikoaren eta energia potentzialaren batura izan dadin. Zer esanik ez, horrek ez du esangurarik aldatzen, zeinu kontua hitzarmen bat baita.

6.7.1. Adibideak

Aurrera segitu baino lehen, gradientearen kontzeptua zerbait finkatzeko, adibide pare bat ebartziko ditugu.

1. «Grabitatearen kausaz jasaten dugun indarra $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ dela eta grabitatearen indar-eremua kontserbakorra dela kontuan hartuz, zein da indar hori sortzen duen energia potentziala?».

Erraz ikus daitekeenez, energia potentzialak

$$E_p = mgz + K \quad (6-49)$$

izan behar du, zeren, horrela eginik,

$$\mathbf{F} = -\text{grad}E_p = -mg\mathbf{k} \quad (6-50)$$

baita; alegia, indar egokia lor baitezakegu.

2. «Demagun $V = x^2yz^3$ delako eremu potentziala.

a) Lor bedi beraren gradientea edo zein puntutan.

b) Zein da $(1, 0, 1)$ puntuko gradientea?

c) Zein da V -ren deribatua $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ norabidean?

d) Zenbat balio du deribatu horrek $(1, 0, 1)$ puntuan?»

a)

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}.$$

b) $(1, 0, 1)$ puntuan

$$\text{grad}V = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

c) Lehenik, norabide horretako bektore unitarioa kalkulatu dugu:

$$\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

Eta atal honetan ikasitakoa aplikatuz,

$$\frac{dV}{ds} = \text{grad}V \cdot \mathbf{u} = \frac{4}{3}xyz^3 + \frac{2}{3}x^2z^3 + x^2yz^2.$$

d) $(1, 0, 1)$ puntuan

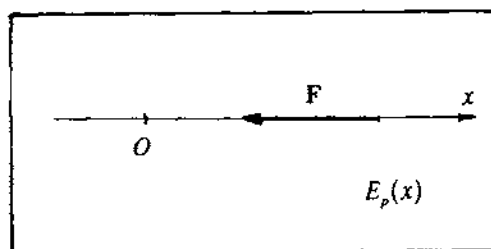
$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{(1,0,1)} = \frac{2}{3}.$$

6.8. INDAR ZENTRAL KONTSERBAKORREN ERAGINPEKO HIGIDURA

Kasu honetan, kontserbazio-printzipioak eta energiaren definizioak erabiliz, partikulen higidura aztertu nahi dugu. Bi pausotan egingo dugu azterketa: lehenik, dimentsio bakarreko problema batean, eta bigarrenik, plano batean, hots, bi dimentsiotan (kontuan har ezin indar zentralen eraginpean sortzen den higidura lau dela; horretaz, ikus 5.7. atala). Dena den, ikusiko dugunez, bi problema desberdin aztertuko ditugu, izatez. Lehen, problema unidimentsionala izango da, partikula norabide bakarrean higi daitekeen kasukoa. Bigarrena, hiru dimentsiotan higi daitekeen partikularen problema da; baina 5.7. atalean esan dugunez, izatez, higidura hori planoan gertatzen da, bi dimentsiotan alegia. Bigarren problema hau planeten higidurari dagokiona da.

6.8.1. Higidura unidimentsional kontserbakorra

Has gaitezen, ba, higidura zuzen kontserbakorra aztertzen. Dimentsio bakar bat kontsideratuko dugu, x delakoa (6.8. irudia).



6.8. irudia. Higidura unidimentsional kontserbakorra.

Indarren eremua kontserbakorra bada, eremu potentzial bat egongo da, $E_p(x)$,

$$\mathbf{F} = -\text{grad}E_p \quad (6-51)$$

egiteko modukoa; bestalde, norabide bakarra dugunez,

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dx} \mathbf{i}. \quad (6-52)$$

Indarra kontserbakorra izanik, energia mekanikoa kontserbatu egingo da, hots,

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = \text{kea}, \quad (6-53)$$

eta abiadura posizioaren deribatua dela kontuan hartuz, honako hau dugu:

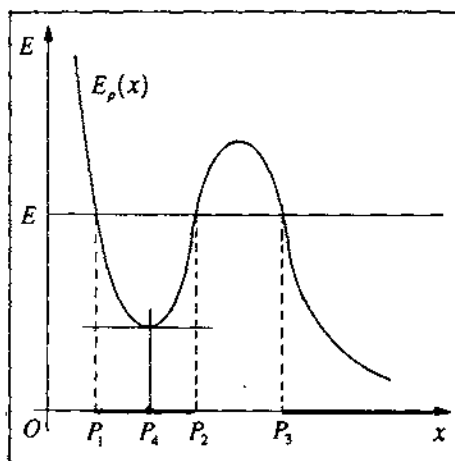
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x), \quad (6-54)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}. \quad (6-55)$$

- $\overline{PA} = E_p(x) \rightarrow$ energia potentziala.
- $\overline{PB} = E \rightarrow$ energia mekaniko osoa.
- $\overline{AB} = E_k(x) \rightarrow$ energia zinetikoa, $v = \sqrt{2E_k/m}$.
- $\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dx} \mathbf{i} = -\tan \alpha \mathbf{i}$.

6.9. irudiko kasu honetan $\tan \alpha > 0$ denez, $\mathbf{F}$ indarra negatiboa izango da, hots, indar-zentroranzko indar erakarlea dugu. Elementu horien interpretazioan finkatuz, higidura nolakoa izanen den ikus dezakegu.

Adibidez, partikula ezin egon daiteke P' puntuan, zeren eta kasu honetan $E_p > E$ denez, energia zinetikoa negatiboa izanen bailitzateke; eta hori ez da posible, $E_k = mv^2/2$ baita, hots, E_k kantitateak positiboa izan behar baitu.



6.10. irudia. E energia mekaniko osoari dagozkion higidura posibleen mugak.

Horrela izanik, 6.10. irudian higidura posibleen mugak adierazi dira. Bertan ikus daitekeenez, partikularen higidura $P_1 \leftrightarrow P_2$ eta $P_3 \leftrightarrow \infty$ tarteetan baino ez da posible. Eta, gainera, $P_1 \leftrightarrow P_2$ tarteetan dagoen partikula ezin pasa daiteke $P_3 \leftrightarrow \infty$ tartera. Horrelako tarteei, *potzentzial-osinak* edo **potentzial-putzuak** deritze.

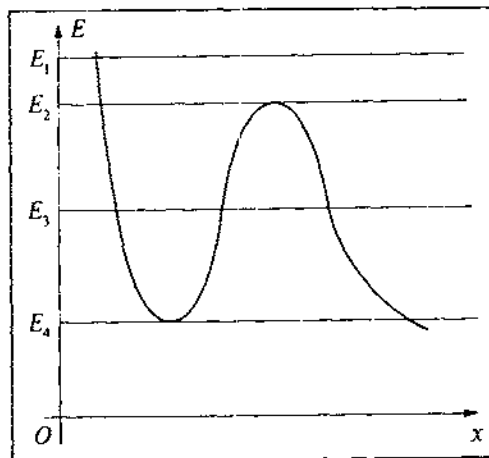
Mekanika Klasikoaren arloan ez da posible potentzial-osinetatik irtetea. Mekanika Kuantikoan, ordea, bai (tunel efektuaz, hain zuzen). Honelatan, ba, gure kasuan, $P_1 \leftrightarrow P_2$ tarteetan dagoen partikula etengabe arituko da bi puntu horien artean higitzen, higidura periodikoz, eta mutur bietan $E_k = 0$ eta E_p maximoa izanik. Konkrétuki,

- P_1 puntuan, abiadura nulua izango da, baina indarra, positiboa (P_2 -rantz).
- P_4 puntuan, abiadura maximoa izanen da; indarririk ez da egongo, ordea, bertan $dE_p/dx = 0$ baita.
- P_2 puntuan, abiadura zero izanen da ($E_k = 0$), eta indarra, negatiboa (P_1 -erantz).

- Horrela jarraituko luke etengabe $P_1 \leftrightarrow P_2$ tartean.
- Bestalde, $P_3 \leftrightarrow \infty$ tartean dagoen partikula infiniturantz joango da azkenean. Gainera P_3 puntuan, abiadura nulua da ($E_k = 0$) eta indarra, positiboa (∞ -rantz)
- Infinituan edukiko lukeen abiadura haxe izango litzateke,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E, \quad (6-58)$$

zeren $E_p(\infty) = 0$ baita.



6.11. irudia. Energia desberdinei higidura-muga desberdinak dagozkie.

Ariketa modura, ikasleek 6.11. irudiko E_1 , E_2 , E_3 eta E_4 energia osoen kasuetako higidurak azter ditzakete.

6.8.2. Indar zentralen eraginpeko higidura orokorra

Azter dezagun orain kasu orokorra, hots, hiru dimentsiotakoa. Dena den, esan dugunez (ikus 5.7. atala), indar zentralen kasuan, higidura laua da. Beraz, aski dugu bi dimentsiorekin. Bi kontserbazio-printzipio daude:

Batetik, indar-eremua kontserbakorra denez, energia mekanikoaren kontserbazioa dugu:

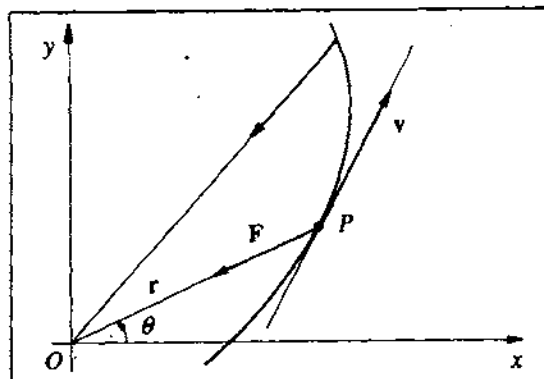
$$E = E_p + E_k. \quad (6-59)$$

Gainera, erreferentzia-sistemaren jatorria indar-zentroan jarririk, kasu horretan $E_p = E_p(r)$ izan behar da, indarra zentrala izan dadin, zeren soilik orduan eduki baitezakegu

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p = F(r)\mathbf{u}_r. \quad (6-60)$$

Hots, erradioaren menpekotasuna baino ez duen indar zentrala da (alegia, norabide erradialekoa). Beraz,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \text{konstantea}. \quad (6-61)$$



6.12. irudia. Indar zentralen eraginpeko higidura planoan gertatzen da.

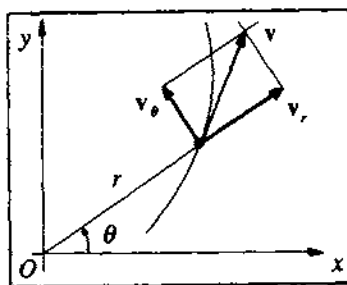
Bistakoa denez, E eta $E_p(r)$ ezagutuz gero, hemendik abiaduraren modulua kalkula dezakegu edozein puntutan.

Bestetik, indarra zentrala izanik, momentu angeluarra kontserbatu egingo da, zeren

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (6-62)$$

baita, eta ondorioz,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{ktea}. \quad (6-63)$$



6.13. irudia. Koordenatu polarren erabilera. Abiadura erradiala eta zeharkako abiadura.

Koordenatu polarrak erabiliz (ikus 3.5. atala eta 6.13. irudia),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta, \quad v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{eta} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad \text{izanik}, \quad (6-64)$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad (6-65)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\theta, \quad (6-66)$$

zeren $\mathbf{r}$ eta $\mathbf{v}_r$ bektoreen norabideak elkarren paraleloak baitira.

Hortaz, indar zentralen kasuan L bektorea konstantea (moduluz eta norabidez) dela kontuan harturik, beraren modulua kontsideratuz, r eta v_θ elkarren perpendikularrak direnez,

$$|L| = L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (6-67)$$

Hemendik,

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2}. \quad (6-68)$$

Eta (6-65) adierazpena eramanez,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}. \quad (6-69)$$

Balio hau (6-61) adierazpena eramanez,

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r). \quad (6-70)$$

Hemen aldagai bakarra ageri da, r delakoa. Eta hori denborarekin erlazionaturik ageri zaigu. Geroago ikusiko dugunez, $r = r(t)$ kalkula dezakegu adierazpen horretatik. Baina hori egin aurretik, lortutako aidarazpen horren interpretazio fisikoa egingo dugu.

Problema unidimentsionalarekin (6.8.1. atala) edo norabide bakarreko higidurarekin konparatuz, berdintsu agertuko zaigu. baldin eta ondoko *energia potentzial eraginkorra* kontsideratzen badugu:

$$E_{p,er}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p(r). \quad (6-71)$$

Dakusagunez, energia potentzial arruntarekin alderatuz, gehigarri gisa, $L^2/2mr^2$ gaia sartu dugu. Gai horri *energia potentzial zentrifugoa* deritzo:

$$E_{p,z} = \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (6-72)$$

Zergatik izen hori? Hara! Ikus dezagun, eremu potentzial horrek sorturiko indarrak zenbat balio duen:

$$\mathbf{F}_z = - \frac{dE_{p,z}}{dr} \mathbf{u}_r; \quad (6-73)$$

hots, erradioaren norabide du indar horrek, eta ondoko modulua:

$$F_z = - \frac{dE_{p,z}}{dr} = \frac{L^2}{mr^3}. \quad (6-74)$$

Bestalde, (6-67) kontuan hartuz eta $d\theta/dt = \omega$ idatziz,

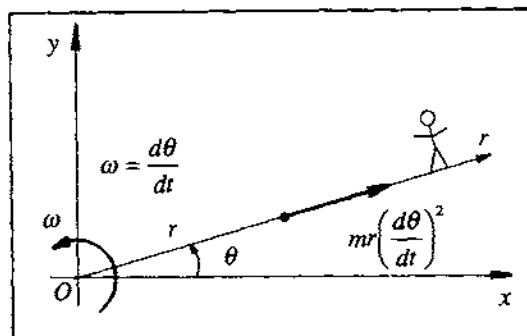
$$F_z = mr\omega^2. \quad (6-75)$$

$$\mathbf{F}_z = mr\omega^2 \mathbf{u}_r. \quad (6-76)$$

Hau da, F_c indarrak indar zentrifugo baten antza du. Baina, zein indar zentrifugorena?

Izatez, higidura laua norabide bakar batean (r -renean) dakusana, etengabe erradioa-ekin higitzen ari den behatzailea da (6.14. irudia). Baina berorren sistema ez da inertziala, biraka ari baita.

Beraz, sistema horretan inertzia-indarrak kontsideratu behar ditu behatzaile horrek. Eta ardatzaren norabidean dakusan inertzia-indarra indar zentrifugoa da (Coriolis-enak beste norabide bat du, partikula r -ren norabidean higitzen ari baita). Bestalde, indar zentrifugo hori kontserbakortzat har dezakegu, $L^2/2mr^2$ energia potentzialtzat hartuz gero.



6.14. Irudia. Puntuaren posizio bektorearen norabideko ardatzean doan behatzaile ez-inertziala.

Interpretazioarekin bukatuz, goazen orain (6-70) adierazpena integratzera.

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p,er}(r), \quad (6-77)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p,er}(r)]}. \quad (6-78)$$

Eta, kasu unidimentsionalean egin dugunaren antzera, r eta t bi ataletan bananduz eta integratuz,

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p,er}(r)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (6-79)$$

Honela $r = r(t)$ lortu dugu. Arretaz aztertuz, dimentsio bakarreko kasuko prozesu berbera eraman dugula konturatu gara.

Goikoan finkatuz, $\theta = \theta(t)$ ere lor dezakegu, honelaxe hain zuzen:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (L = \text{ktea}), \quad (6-80)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \frac{L}{m[r(t)]^2} dt, \quad (6-81)$$

eta $r(t)$ delakoa denboraren funtzioa izanik, $\theta = \theta(t)$ lortuko dugu.

Kalkulu analitiko hauekin bukatzeko, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu. Horretarako, (6-78) eta (6-80) erabiliz, denbora-tarte infinitesimalaren bi adierazpen lortuko ditugu,

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p,or}(r)]}} \quad \text{eta} \quad dt = \frac{mr^2}{L} d\theta. \quad (6-82)$$

eta biak berdinduz, eta integratuz,

$$\int_{r_0}^r \frac{L dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p,or}(r)]}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta. \quad (6-83)$$

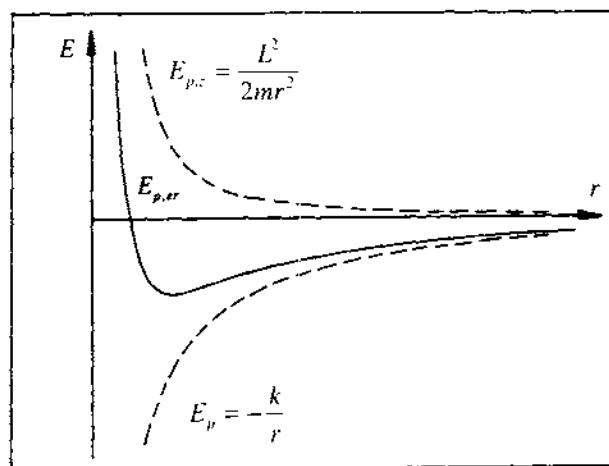
Horrela ibilbidearen ekuazioa lortu dugu, teorikoki behintzat. hots, mota honetako adierazpena:

$$r = r(\theta) \quad (6-84)$$

Indar zentralen azterketa honi amaiera emateko, ohar pare bat egingo dugu, azpimarraztea komeni direnak:

- Prozesu oso honetan bi kontserbazio-printzipio erabili ditugu: energiarena eta momentu angeluarrarena.
- Aurreko kasuan bezala, oraingo honetan ere potentzial-kurben bidez azter dezakegu higidura. Dena den, norabide bakarrean (r -renean) aztertuz gero, bi dimentsiotako interpretazioak problema bereziak ageri ditu.

Bestalde, adibide modura, ikus dezagun nolakoa den potentzial-kurba indar grabitatorioen kasuan (6.15. irudia).



6.15. irudia. Energia potentzial eraginkorra indar grabitatorioen kasuan.

Energia potentzialak hauxe balio du:

$$E_p = -\frac{k}{r}. \quad (6-85)$$

k konstantea izanik ($k = \gamma Mm$, ikus 11.5.2. atala). Bestetik, dakigunez:

$$E_{p,z} = \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (6-86)$$

Azkenean, hauxe izango da energia potentzial eraginkorra.

$$E_{per} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (6-87)$$

6.9. INDAR EZ-KONTSERBAKORRAK

Indar guztiak ez dira kontserbakorrak. Egia esan, Mekanikaren arloan, energiaren kontserbazioari dagokionez, oinartizko indarrak kontserbakorrak dira; hots, Naturaren baitan, maila mikroskopikoan ez dago kontserbakorra ez den indarrik. Hala ere, Mekanika maila makroskopiko eta praktikoan aztertzen ari gara, eta maila horretan zenbait indarrek itxura ez-kontserbakorra erakusten digute. Izan ere, bostgarren gaian marruskadurazko indarrak aipatu ditugu. Horien kasuan higiduraren aurkako indarra egiten da etengabe. Denez, denbora osoan $\mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} < 0$ denez ($\mathbf{F}_r$ marruskadura-indarra), $\oint \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ da (eta gainera, negatiboa) eta horretan lana galtzen da.

Kasu horretan, eginiko kanpo-lan guztia energia zinetiko bihurtuko da, baina jadanik ezin gaitezke energia potentzialaz mintza, ez eta energia mekanikoaz.

Dena den, bi kontzeptu horiek erabiltzeko ohitura dagoenez, kasurik orokorrean indar kontserbakor eta ez-kontserbakorrak daudela kontsideratzen da eta honela adierazten da lanaren eta energiaren arteko erlazioa:

$$W = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W'. \quad (6-88)$$

Adierazpen honetan W delakoa partikularren gainean eginiko lan osoa da, zeina beti bi muturretako energia zinetikoen kendura modura jar daitekeen, $E_{k,B} - E_{k,A}$, baina energia potentzialen kendurak, $E_{p,A} - E_{p,B}$ delakoak alegia, indar kontserbakorrei dagokien lana soilik adierazten duenez, horretaz gainera W' kontsideratu behar da, hau da, *indar ez-kontserbakorrek egiten duten lana*.

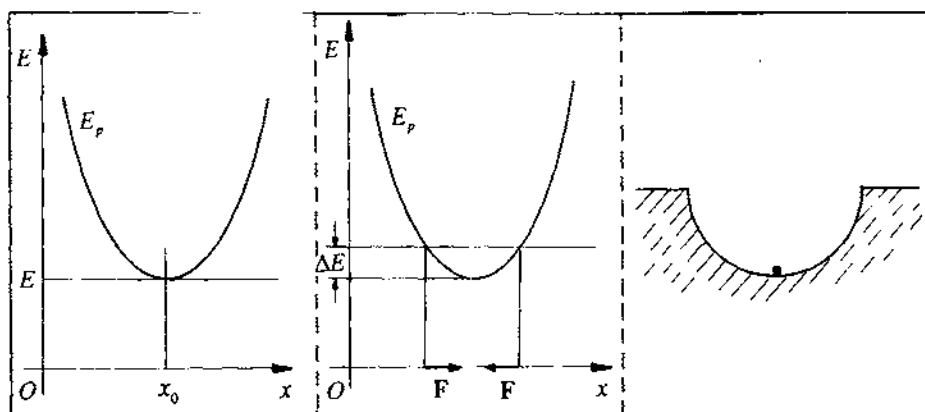
Argi dagoenez, kasu honetan ezin mintza daiteke energia mekanikoaren kontserbazioaz. Baina, bertan indar kontserbakorrak soilik kontsideratuz eta $E_k + E_p$ eginez, sistemaren energia mekanikoa definitzen bada, energia hori kontserbatzen ez dela ikusiko da, W' gaia ez-nulua den heinean.

Nolabait esateko, 'galtzen' den energia hori bero-energia eta deformazio-energia bilakatzen da. Eta zer esanik ez, energia mota horiek ere kontsideratuz, energia osoa kontserbatu egiten da.

6.10. ENERGIA ETA OREKA

Eman dezagun partikula bat oreka egonkorrean dagoela, indarren eremu kontserbakor baten eraginpean. Energia potentzialaren kurbak aztertuz, oreka hori nolakoa den ikus dezakegu.

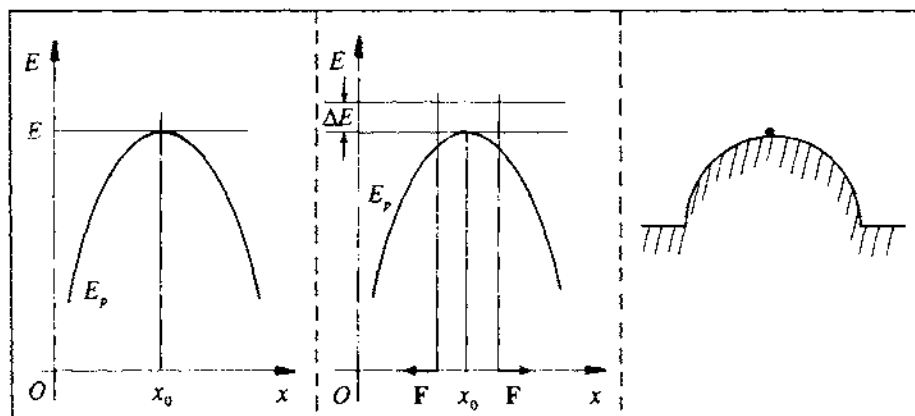
6.10.1. Oreka egonkorra



6.16. irudia. Oreka egonkorra. a) Oreka-posizioa. b) Oreka-posizioaren inguruko indarrak. c) Analogia mekanikoa.

Oreka-posizioan energia potentzialaren kurbak minimo bat du (6.16.a. irudia). Honela izanik, perturbazio bat gertatzen bada (ΔE delako energia-gehikuntzaz adieraziko duguna), partikula potentzial-osin batean geldituko da bertatik irten ezinik, eta sortzen diren indarrak oreka-posizioarantzkoak izango dira. Horixe da 6.16.a. eta 6.16.b. irudietan adierazi dena. Horrez gain, 6.16.c. irudian analogia mekaniko bat egin da, problema intuitiboki ulertu ahal izateko. Zer esanik ez, perturbazioaren ondoren oreka (geldiunea) lortzeko, marruskadura-indarrek egon behar dute. Bestela, partikula oreka-posizioaren inguruan arituko litzateke etengabe.

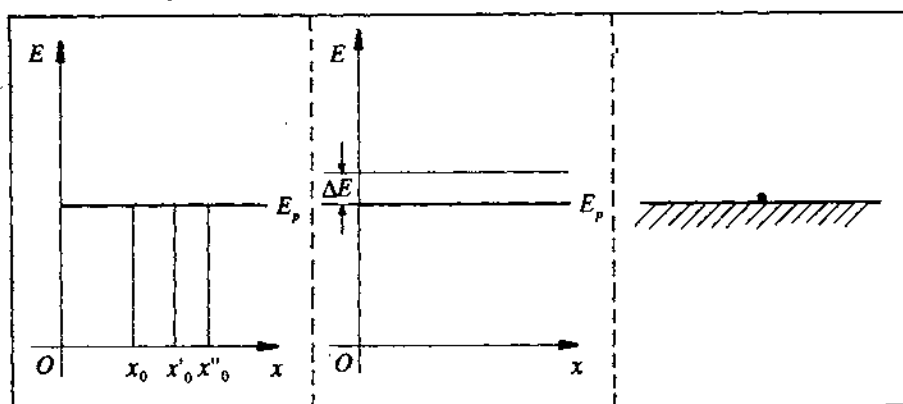
6.10.2. Oreka ezegonkorra



6.17. irudia. Oreka ezegonkorra. a) Oreka-posizioa. b) Oreka-posizioaren inguruko indarrak. c) Analogia mekanikoa.

Kasu honetan modu berean eramaten da arrazonamendua. Baina perturbazioaren bidez oreka apurtu egiten da guztiz, indarrek partikula x_0 -tik urruntzera baitaramate.

6.10.3. Oreka indiferentea



6.18. irudia. Oreka indiferentea. Posizio guztiak dira orekakoak.

Guztiak dira oreka-posizioak. ΔE emanez, marruskadurarik ez balego, partikula abiadura konstantez higituko litzateke.

7. gaia

Partikula-sistemen dinamika

Orain arteko gaietan partikula puntualak aztertu ditugu. Gorputz finituak ere puntualak balira bezala erabili ditugu. Oraingo gai honetan, partikula askoz osaturiko sistemak aztertuko ditugu, beren artean lotura berezirik kontsideratu gabe. Gero, hurrengo bi gaietan, solido zurrun gisa bildurik dauden partikula-sistemak aztertuko ditugu.

Partikula-sistemak aztertzean kalkuluak errazteko, zenbait puntu berezi definituko ditugu, masa-zentroa eta grabitate-zentroa adibidez. Horietan finkaturik, magnitude dinamikoen eboluzioa aztertuko dugu, bereziki momentu lineala, momentu angeluarra eta energia magnitudeak masa-zentroaren koordinatuen bidez adierazirik eta magnitude horien inguruko kontserbazio-teoremak azterturik.

7.1. MASA-ZENTROA ETA GRABITATE-ZENTROA

Partikula bat definitzean, beraren posizioa zehazteko, nahikoa da posizio bektorea ezagutzea. Orain, partikula asko ditugularik, bakoitzaren posizio bektorea erabiltzea baino egokiago, beste puntu berezi bat definitzea da: *masa-zentroa*. Bestalde, masa-zentroaren baliokide modura beste kontzeptu bat ere erabili ohi da, *grabitate-zentroa* alegia. Ikusiko dugunez, berez definizio desberdina duten bi puntu horiek toki berean daude grabitate-eremu uniformearen kasuan, hots, baliokideak dira. Dena den, bi puntu horiek definitu ondoren, sistemaren higidura eta magnitude zinematikoak puntu berri horien funtzioan adieraziko ditugu.

7.1.1. Masa-zentroa

m_i masadun partikula ($i = 1, 2, \dots, n$ izanik, partikula desberdinak adierazteko) $\mathbf{r}_i$ puntuan egonik, sistemaren masa-zentroa honelaxe definitzen da:

$$\mathbf{r}_{MZ} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (7-1)$$

M delakoa sistemaren masa osoa izanik,

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (7-2)$$

Beraz, honelaxe idatz dezakegu:

$$\mathbf{r}_{MZ} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (7-3)$$

Masa gauza jarraitu gisa hartzen bada, elementu diferentzial bakoitzaren masa dm izango da, elementuari dagokion posizio bektorea $\mathbf{r}$, eta aurreko batukaria integrala izango da. Orduan,

$$\mathbf{r}_{MZ} \equiv \frac{\int_M \mathbf{r} dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M \mathbf{r} dm}{M}. \quad (7-4)$$

Hemengo integralak bere mugak ditu, noski, masa jarraitua oso-osorik hartzekoak.

Bektore horren hiru osagai cartesiarrak hauexek dira masa diskretuen kasuan:

$$x_{MZ} = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_{MZ} = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_{MZ} = \frac{\sum m_i z_i}{M}. \quad (7-5)$$

Eta masa jarraituen kasuan:

$$x_{MZ} = \frac{\int x dm}{M}; \quad y_{MZ} = \frac{\int y dm}{M}; \quad z_{MZ} = \frac{\int z dm}{M}. \quad (7-6)$$

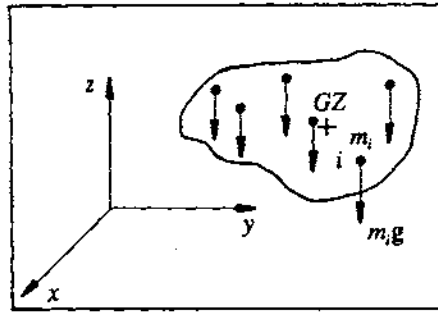
7.1.2. Grabitate-zentroa

Masa-zentroaren kontzeptuaren antzekoa da, guztiz berdina ez bada ere. Hara nola sortzen den. Demagun partikula-sistema eremu grabitatorio uniforme batean dagoela. Sistemako partikula bakoitzaren gainean, grabitateak $m_i \mathbf{g}$ indarra egiten du. Eta $m_i \mathbf{g}$ bektoreez (kursoriez) osaturiko sistemaren erresultantea

$$M \mathbf{g} = \sum_i m_i \mathbf{g} \quad (7-7)$$

da, masa osoa (7-2) eran definitua izanik. Erresultante hau aplikatzen deneko puntuari, sistemaren orientazioa zeingura dela, *grabitate-zentroa* deritzo.

Grabitatearen azelerazioa bektore konstatea denean, masa-zentroa eta grabitate-zentroa puntu berebean daude, eta bi hitz horiek sinonimotzat har daitezke. Hauex izanen da kasurik arruntena. Dena den, $\mathbf{g}$ aldatuz doanean, grabitate-zentroak eta masa-zentroak ez dute zertan puntu berean egonik.



7.1. Irudia. Grabitate-zentroa partikulen pisuez osaturiko bektoreen sistema-zentroa da.

Ikusi denez, ba, kontzeptualki, definizioaren arabera, bi gauza desberdin dira masa-zentroa eta grabitate-zentroa. Lehen, masen posizioen arabera matematikoki definitu dugun puntua da. Bigarrena, oster, indar batzuen zentroa. Hala ere, praktikan berdintzat hartzen dira, zeren, baldintzak oso arraroak ez badira, biak puntu berean baitaude.

7.2. PARTIKULA-SISTEMA BATEN MASA-ZENTROAREN HIGIDURA

Goazen orain masa-zentroarekin zerikusirik duten beste magnitude batzuk aztertzen. Masa-zentroaren abiadurarekin hasiko gara. Aurreko puntuan ikusi dugun (7-3) adierazpena denborarekiko deribatuz,

$$\frac{d\mathbf{r}_{MZ}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \right) = \frac{\sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M}. \quad (7-8)$$

Definizioz, deribatu hori *masa-zentroaren abiadura* da eta $\mathbf{v}_{MZ}$ ikurrak adierazten da. Beraz,

$$\mathbf{v}_{MZ} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M}. \quad (7-9)$$

Erlaziona dezagun orain sistemaren momentu lineala masa-zentroaren abiadurarekin. Partikula bakoitzaren momentu lineala kontuan hartuz,

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i. \quad (7-10)$$

Eta gainezarmenaren printzipioaz, hauex izango da sistema osoaren momentu lineala:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{MZ}. \quad (7-11)$$

(Azkenean masa-zentroaren abiaduraren definizioa erabili dugu). Ikus daitekeenez, «*partikula-sistemaren momentu lineala masa guztia masa-zentroan bildurik balego bezala kalkula daiteke*». Hemendik ondorio interesgarriak atera daitezke.

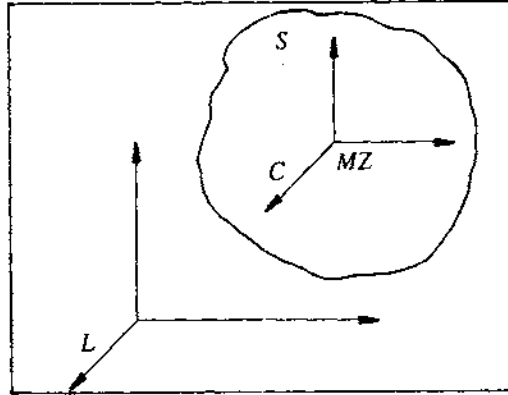
Demagun S sistema isolaturik dagoela, hau da, sistemaren gainean kanpoko indarrik eragiten ez duela. Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioaren arabera,

$$\mathbf{P} = \text{ktea.} \quad (7 - 12)$$

Beraz,

$$M\mathbf{v}_{MZ} = \text{ktea} \Rightarrow \mathbf{v}_{MZ} = \text{ktea.} \quad (7 - 13)$$

Hots, masa-zentroa abiadura konstantez higitzen da edozein inertzia-sistemarekiko.



7.2. irudia. Partikula-sistema isolatuaren kasuan, masa-zentroko sistema inertziala da.

Bestalde, kasu horretan jatorria masa-zentroan duen erreferentzia-sistema bat hartuz, lehengoaren paraleloa izanik, sistema berri hori ere inertziala da (7.2. irudia). Masa-zentroan definitu dugun sistema inertzial horri *masa-zentroaren erreferentzia-sistema* deritzo (edo *sistema erreferentzial propioa*) eta C letraz adierazten da. Sistema hau sarritan erabiltzen da Fisikan. Bertan,

$$\mathbf{v}_{MZ} = 0 \quad (7 - 14)$$

da eta, horrela,

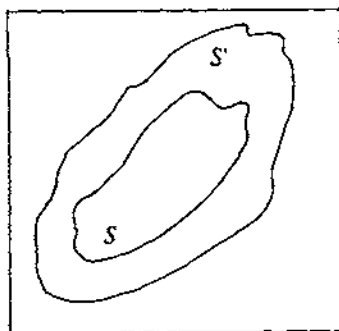
$$\mathbf{P} = 0. \quad (7 - 15)$$

Partikula-sistematik aparte dagoen erreferentzia-sistemari, *laborategiko sistema* deritzo eta L letraz adierazteko ohitura dago.

7.2.1. Masa-zentroaren azelerazioa eta indarrak

Demagun, orain, S partikula-sistema ez dagoela isolaturik. Beraz, ezin aplika diezaiokegu aurreko lerroetan esanikoa.

Dena den, bere inguruan dagoen S' partikula-sistemarekin batera kontsideratuz, bien batura den $S + S'$ sistema isolaturik dagoela esan dezakegu (beti egin dezakegu horrelako aukera; besterik ezean, S' unibertsoa osatzeko falta den beste guztia izan daiteke).



7.3. irudia. S sistema ez-isolatuari S' sistema egokia gehituz, bien artean osatutako $S + S'$ sistema isolatutzat jo dezakegu.

Bi sistemek osaturiko multzoa hartuz,

$$\mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{S'} = \mathbf{k} \mathbf{e}_a, \quad (7-16)$$

eta, horren arabera, denborarekin gertatzen diren aldakuntzak aztertuz, baldintza hau beteko dutela ondoriozta dezakegu:

$$\Delta \mathbf{P}_S = -\Delta \mathbf{P}_{S'}. \quad (7-17)$$

Aldakuntza horiek gertatzen direneko denbora-tarteaz zatituz eta limitera eramanez,

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}_{S'}}{dt}. \quad (7-18)$$

Bestetik, bosgarren gaian emaniko definizioaren arabera (ikus 5.4. atala),

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = \mathbf{F}_{\text{kanpo}}. \quad (7-19)$$

Hemen $\mathbf{F}_{\text{kanpo}}$ delakoa S sistemaren gainean S' sistemak egiten duen indar osoa da. *Kanpo-indar osoa* izena emango diogu. Baina

$$\mathbf{P}_S = M \mathbf{v}_{MZ} \quad (7-20)$$

denez gero,

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{MZ}}{dt} = M \mathbf{a}_{MZ}, \quad (7-21)$$

hots,

$$\mathbf{F}_{\text{kanpo}} = M \mathbf{a}_{MZ}, \quad (7-22)$$

non $\mathbf{a}_{MZ}$ delakoa masa-zentroaren azelerazioa den. Hain zuzen ere, definizioz,

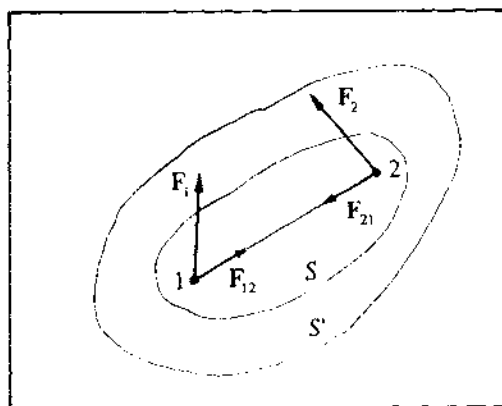
$$\mathbf{a}_{MZ} \equiv \frac{d\mathbf{v}_{MZ}}{dt}. \quad (7-23)$$

Lorturiko (7-22) emaitzak ondokoa esan nahi du: «*Sistema baten gainean kanpo-indarrak egiten ari diren kasuetan, sistemaren masa-zentroa masa guztia bertan bildurik batego bezala eta indar bakarra kanpo-indarren erresultantea balitz bezala higitzen da*». Hau da, sistema osoaren masa bereko partikula bat kanpo-indar erresultantearen eraginpean eta masa-zentroan egonik, partikula horrek sistemaren masa-zentroak duen higidura berbera izango luke.

7.2.2. Bi partikulaz osaturiko sistema

Gauzak errazago azaltzeko eta aurreko kontzeptuak adibide gisa erabiltzeko, bi partikulaz osaturiko sistema aztertuko dugu. Bi partikula horiek (1 eta 2) kanpoko eta barneko eragina pairatzen ari direla kontsideratuko dugu, eta $S + S'$ sistemen multzoa isolaturik dagoela. Egoera horren adierazpen grafikoa 7.4. irudian egin da. Notazioari dagokionez, F_1 , delakoa 2 partikulak 1 partikulari egiten dion indarra da eta F_{21} delakoa 1 partikulak 2 partikulari egiten diona, F_{12} eta F_{21} barne-indarrak dira, noski, eta Newton-en hirugarren legea betetzen dute aldi oro, hots,

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (7-24)$$



7.4. irudia. Bi partikulaz osaturiko sistema, kanpo- eta barne-indarrak azaldorik.

Bestalde, F_1 eta F_2 kanpo-indarrak dira, S' sistemaren eraginez sortuak.

Kanpoko erreferentzia-sistema inertzial batetik kontsideraturik,

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}, \quad (7-25a)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}, \quad (7-25b)$$

eta bien bi tuketaz,

$$\frac{d\mathbf{P}_S}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{kanpo}, \quad (7-26)$$

Ikus daitekeenez, kanpo-indar osoa kanpo-indar guztien arteko batura edo erresultantea da, eta horixe da momentu lineal osoa aldatzeko kontuan hartu behar dena; gainera, horri dagokionez, barne-indarren eragina ez da ageri (elkar ezabatzen baitute). Kanpo-indarren erresultantea honelaxe adieraz daiteke n partikularen sistemaren kasuan:

$$\mathbf{F}_{\text{kanpo}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (7-27)$$

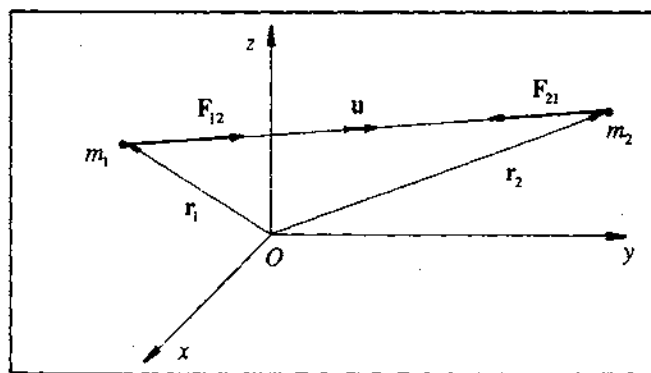
7.3. MASA LABURBILDUA

Demagun, orain, bi partikulaz osaturiko sistema isolatua. Kasu honetan barne-indarrek eragiten dute soilik. Demagun indar horiek akzio-erreakzioaren legea betetzen dutela, eta, horrez gain, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ delakoaren norabidea dutela, hau da,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad \text{eta} \quad \mathbf{F}_{12} = F_{12}\mathbf{u}, \quad (7-28)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (7-29)$$

izanik (7.5. irudia).



7.5. irudia. Bi partikulako sistema isolatua.

Inertzia-sistema batean dagoen behatzaileak honelaxe aplikatuko du Newton-en bigarren legea:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad (7-30a)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}, \quad (7-30b)$$

Ekuazio bien arteko kenketa eginez,

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}, \quad (7-31)$$

eta hortik honako hau lor daiteke:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}. \quad (7-32)$$

Azter dezagun gehitxoago adierazpen hori. Hasteko, lehenengo zatiak azelerazio erlatiboa adierazten digu:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \mathbf{a}_{12}. \quad (7-33)$$

Hots, 4.1. atalean azaldu genuenez, $\mathbf{a}_{12}$ delakoa m_1 masak m_2 masarekiko duen azelerazio erlatiboa da.

Bestalde, $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ egiteko ohitura dago, eta orduan,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7-34)$$

defini dezakegu. Honela sorturiko μ elementu berriari, bi partikulaz osaturiko sistemaren *masa laburbildua* deritzo. Erraz froga daitekeenez, masaren dimentsioa du. Ikus dezagun horren esangura fisikoa zein den.

Azken bi definizioak goiko (7-32) adierazpenera eramanik, hauxe dugu:

$$\mathbf{F}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}. \quad (7-35)$$

Hau da, masa laburbildua erabiliz, $\mathbf{a}_{12}$ azelerazioa (1 partikulak 2 partikularekiko duen azelerazioa, alegia) erraz kalkula daiteke, $\mathbf{F}_{12}$ indarrak masa laburbilduan eraginez sortuko lukeen azelerazioa kalkulatz, hots, (7-35) adierazpena erabiliz. Horrela, bi gorputzen sistema '*gorputz bakarraren sistema baliokidera*' laburbildu dugu. Sistema berri honetan, partikula batekin eta inertzia-sistemarekiko paraleloki higitzen den sistema batetik egiten dira behaketak; eta bertatik, beste partikularen higidura erlatiboa aztertzen da, beronen masa masa laburbildua balitz bezala kalkuluak eginez.

Dena den, kasu batzuetan, partikula baten masa bestearena baino askoz handiagoa denean, partikula handiarekin doan erreferentzia-sistema inertzialtzat har dezakegu, jarraian ikusiko dugunez. Hara! Demagun $m_2 \gg m_1$ dela. Argi dagoenez, orduan

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \approx m_1 \quad \left(\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0 \text{ baita} \right) \quad (7-36)$$

da, eta adierazpen orokorrera eramanez:

$$\mathbf{F}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12} \approx m_1 \mathbf{a}_{12}. \quad (7-37)$$

Baina, bestalde, momentu linealaren kontserbazioaren arabera,

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2 \rightarrow m_1 \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta \mathbf{v}_2}{\Delta t}, \quad (7-38)$$

eta $m_2 \gg m_1$ denez, limitean

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|a_2|}{|a_1|} \rightarrow 0, \quad (7-39)$$

hots,

$$|a_2| \rightarrow 0. \quad (7-40)$$

Hau da, kasu honetan m_2 masarekin doan erreferentzia-sistemak ez du ia-ia azeleraziorik; edo, bestela esanda, sistema inertzializat har daiteke, azalpen honen hasieran esan dugun legez. Sistema horretan finkaturik, m_1 masaren higidura azter dezakegu, beronen gainean eragiten duen indarra elkarrekintza-indarra izanik (F_{12}).

Bi gorputzen problema hau sarri ageri da Fisikan, problema korapilatsuagoren baten laburpen gisa. Honela Ilargia-Lurra sistema modu honetan azter daiteke Lurretik. Berdinki azter daiteke Eguzkiaren inguruko sistema planetarioa edo eta hidrogenoaren atomoa (Mekanika Kuantikoan sartu gabe). Dena den, liburu honetan ez dugu horretaz gehiagorik sakonduko.

7.4. MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMA

Oraingo puntu honetan, partikula-sistema baten momentu angeluarraren teorema aztertzen saiatuko gara. Argi dagoenez, erreferentzia-sistema inertzial baten jatorriarekiko partikula-sistemak duen momentu angeluar osoa partikula guztien momentu angeluarren batura da:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{L}_i. \quad (7-41)$$

Momentu angeluar osoaren denborarekiko aldaketa aztertuko dugu. Horretarako, demagun bi partikulaz osaturiko sistema bat dugula. Azterketa errazteko asmoz hartu dugu sistema sinple hau, baina arrazonamendua edozein partikula-multzotarako da baliagarria.

Azterketa orokorra izan dadin, barne-indarrak ($\mathbf{F}_{12}$ eta $\mathbf{F}_{21}$) eta kanpo-indarrak ($\mathbf{F}_1$ eta $\mathbf{F}_2$) kontsideratuko ditugu. Barne-indarrei dagokienez, akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen dutela kontsideratuko dugu, hots $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ dela; eta halaber, indar horiek $\mathbf{r}_{12}$ bektorearen norabidea dutela, 7.6. inudian ageri den bezala (honetaz (7-28) adierazpena berrikus daiteke).

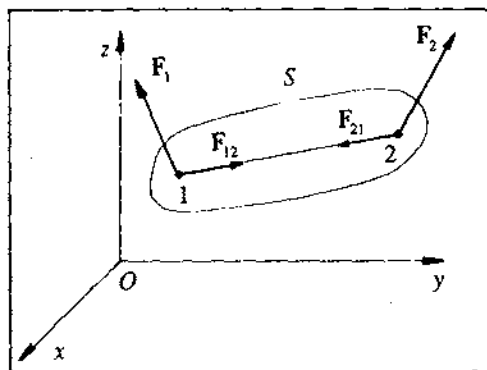
Oxyz sistema inertziala dela kontsideratuko dugu. Sistema honen jatorriarekiko momentuak kontsideratuz, eta partikulen momentu angeluarraren teorema (5.7. atala) kontuan hartuz,

$$\frac{d\mathbf{L}_1}{dt} = \boldsymbol{\tau}_1, \quad (7-42a)$$

$$\frac{d\mathbf{L}_2}{dt} = \boldsymbol{\tau}_2, \quad (7-42b)$$

hemen $\mathbf{L}_1$ eta $\mathbf{L}_2$ direlakoak 1 eta 2 partikulen momentu angeluarrak izanik, eta $\boldsymbol{\tau}_1$ eta $\boldsymbol{\tau}_2$ direlakoak partikula horien gainean eragiten ari diren indarren momentuak. Bi adierazpen horiek batuz,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2. \quad (7-43)$$



7.6. irudia, bi partikulatako sistema, barne- eta kanpo-indarrek.

$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}$ delakoa partikula-sistemaren momentu angeluar osoa da, noski. Baina ikus dezagun, $\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2$ baturak zenbat balio duen:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}, \quad (7-44a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}, \quad (7-44b)$$

eta bien arteko batuketa eginez,

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}. \quad (7-45)$$

Baina

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0} \quad (7-46)$$

da, $\mathbf{r}_{12}$ eta $\mathbf{F}_{12}$ paraleloak baitira.

Beraz, hauxe dugu azkenean:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2. \quad (7-47)$$

Alegia, bi partikulaz osaturiko sistema baten momentu angeluarraren aldakuntzak kanpo-indarren momentuaren menpekotasuna du soilik. Ikusi dugunez, akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen duten barne-indarrek ez dute eraginik momentu angeluarrari dago-kionez. Eraitza hori bi partikularen kasurako lortu dugu, baina, dena den, erraz frogatu daiteke beste edozein partikula-kopuruz osaturiko sistemaren kasurako ere.

Hauxe da, hain zuzen ere, partikula-sistema baten momentu angeluarraren teorema: «Partikula-sistema baten momentu angeluarraren aldakuntzak kanpo-indarren momentuaren menpekotasuna du soilik». Matematikoki esateko, momentu angeluarraren denborarekiko deribatua kanpo-indarren momentuaren berdina da.

Kasu berezi modura, kanpo-indarren momentu osoa nulua bada,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (7-48)$$

da, eta orduan,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{konstantea.} \quad (7-49)$$

Honetan, ba, kasu honetan momentu angeluarrak konstante dirau denboran zehar.

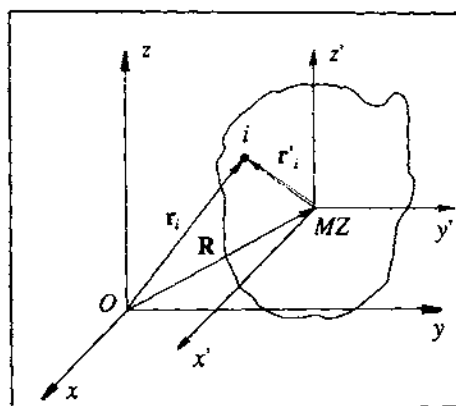
7.4.1. Momentu angeluarraren adierazpena masa-zentroaren koordinatuen bidez

Demagun $Oxyz$ sistema inertziala. Beronen jatorriarekiko partikula-sistemak duen momentu angeluarra ondokoa da:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \quad (7-50)$$

Hemen i delakoak partikula generiko bat adierazten du ($i = 1, 2, \dots, n$). Jatorria masa-zentroan duen beste sistema bat kontsideratuko dugu ($O'x'y'z'$), $O' \equiv MZ$ izanik. Sistema horren ardatzek $Oxyz$ sistemaren ardatzen paralelo diraute denbora osoan (7.7. irudia).

Masa-zentroaren posizio bektorea $\mathbf{R}$ letraz izendatuko dugu. $Oxyz$ sisteman egiten diren neurketak azenturik gabe adieraziko ditugu, eta $O'x'y'z'$ sisteman egiten direnak, azentuaz; alegia, i partikularen posizio bektorea $\mathbf{r}_i$ izango da $Oxyz$ sisteman eta $\mathbf{r}'_i$ $O'x'y'z'$ sisteman.



7.7. irudia. Jatorria masa-zentroan duen $O'x'y'z'$ sistema, paraleloki higitzen ari da $Oxyz$ sistema inertzialarekiko.

7.7. irudian ageri denez,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i. \quad (7-51)$$

Deribatuz eta $O'x'y'z'$ sistemak birarik egiten ez duela kontuan hartuz:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i, \quad (7-52)$$

$\mathbf{V}$ delakoa masa-zentroaren abiadura izanik ($\mathbf{V}$ hau aurreko $\mathbf{v}_{MZ}$ berbera da). Horien arabera, momentu angeluarra honelaxe azalduko da:

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i). \quad (7-53)$$

Adierazpen hori garatuz, lau eratako gaiak ageri zaizkigu:

$$a) \quad \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} = \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{V} = \mathbf{R} \times M \mathbf{V}, \quad (7-54a)$$

$$b) \quad \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) = \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) = \mathbf{0}, \quad (7-54b)$$

$$c) \quad \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (7-54c)$$

$$d) \quad \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \quad (7-54d)$$

(7-54b) eta (7-54c) nuluak dira, bertako parentesietako baturak nuluak direlako, zeren jatorria masa-zentroan duen sisteman masa-zentroaren posizio bektorea nulua baita, hots,

$$\mathbf{r}'_{MZ} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}{M} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}. \quad (7-55)$$

Azkenean, (7-53) honelaxe geratuko zaigu:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \quad (7-56)$$

Beraz, partikula-sistema baten momentu angeluarra masa-zentroaren koordinatuen bidez adieraztean, bi gaiz osatzen dela ikusi dugu. Lehen gaiak ($\mathbf{R} \times M \mathbf{V}$ delakoak) masa guztia puntualki masa-zentroan trinkoturik balego edukiko lukeen momentu angeluarra adierazten du. Bigarren gaiak ($\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$ delakoak) masa-zentroarekin duen sistemaren jatorriarekiko —masa-zentroarekiko, alegia— duen momentu angeluarra adierazten du.

Honelaxe ere idatz daiteke:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M \mathbf{V} + \mathbf{L}', \quad (7-57)$$

bertan $\mathbf{L}'$ masa-zentroarekiko momentu angeluarra izanik ($\mathbf{L}_{MZ}$ ere idatzi ohi da), alegia,

$$\mathbf{L}' \equiv \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \quad (7-58)$$

7.5. SISTEMA BATEN ENERGIA ZINETIKOA ETA POTENTZIALA

Lehenengo pauso gisa, definitu egingo dugu sistemaren energia zinetikoa, eta gero masa-zentroaren koordinatuen bidez adierazten saiatuko gara. Definizioz, sistemaren energia zinetikoa sistemako partikulen energia zinetikoen batura da, hots:

$$E_k \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2. \quad (7-59)$$

Idatz dezagun adierazpen hori masa-zentroaren koordinatuen bidez. Aurreko atalean ikusi dugunez,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i, \quad (7-60)$$

$$\mathbf{v}_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i). \quad (7-61)$$

Beraz,

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i). \quad (7-62)$$

Adierazpen hori garaturik, ondoko gaiak geratzen zaizkigu:

$$a) \quad \sum_i \frac{1}{2} m_i V^2 = \frac{1}{2} V^2 \left(\sum_i m_i \right) = \frac{1}{2} M V^2, \quad (7-63a)$$

$$b) \quad \sum_i m_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}'_i = \mathbf{V} \cdot \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right) = \mathbf{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) = 0, \quad (7-63b)$$

$$c) \quad \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i{}^2. \quad (7-63c)$$

Hortaz, azkenean hauxe geratuko zaigu:

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i{}^2. \quad (7-64)$$

Momentu angeluarraren kasuan egin dugunaren antzera, honelaxe idatz dezakegu:

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + E'_k, \quad (7-65)$$

$$E'_k \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i{}^2 \quad (7-66)$$

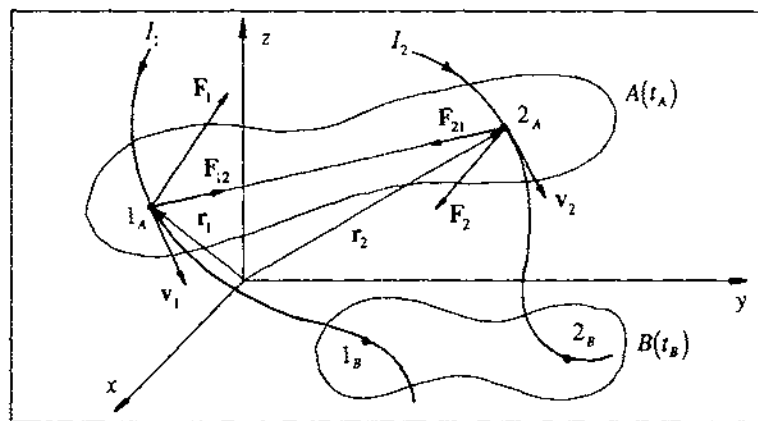
izanik.

Hots, partikula-sistema baten energia zinetikoa bi gairen batuketaz adierazten da. Lehenak masa guztia masa-zentroan trinkoturik edukiko lukeen energia zinetikoa adierazten du, eta bigarrenak, sistemak masa-zentroaren inguruko higiduran duen energia zinetikoa.

Energia zinetikoaren adierazpena ezagutu ondoren, indarrek egiten duten lanaren eta sistemaren energia zinetikoaren artean dagoen erlazioa aztertuko dugu. Azalpenak errazteko, bi partikulaz osaturiko sistema aztertuko dugu oraingoan ere (7.8. irudia).

t_A aldiunean sistema A egoeran dago, partikulak 1_A eta 2_A puntuetan egonik. Lehenago esan dugunez, $\mathbf{F}_{12}$ eta $\mathbf{F}_{21}$ barne-indarrak dira ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) eta $\mathbf{F}_1$ eta $\mathbf{F}_2$ kanpo-indarrak. Dena den, 1 eta 2 partikulak higitzen ari dira, eta t_B aldiunean sistema B egoeran dago,

partikulak 1_H eta 2_H puntuetan egonik. Denetara, I_1 eta I_2 direlakoak bi partikulen ibilbideak dira. Bestalde, $Oxyz$ sistema inertziala dela kontsideratu dugu.



7.8. Irudia. Bi partikula osaturiko sistemaren eboluzio denborala. 1 eta 2 partikulen ibilbideak adierazirik.

Aurreko gai batetik dakigunez (ikus 6.2. atala), honelaxe adieraz daiteke indarrek egiten duten lana:

$$W = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_I, \quad (7-67)$$

alegia, integrala partikularen ibilbidean barrena eginez. Beraz, guztira sistema horretan indar guztiek egiten duten lana hauxe izanen da:

$$\underbrace{\int_A^B (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) \cdot d\mathbf{r}_1}_I + \underbrace{\int_A^B (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) \cdot d\mathbf{r}_2}_I \quad (7-68)$$

Zer esanik ez, oro har,

$$d\mathbf{r}_1 \neq d\mathbf{r}_2. \quad (7-69)$$

Gai horiek honelaxe bil ditzakegu. Batetik:

$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1}_I + \underbrace{\int_A^B \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2}_{I_2} = W_{\text{kanpo}}, \quad (7-70)$$

Hori kanpo-indarrek egiten duten lana da. Bestetik, barne-indarrei dagokienez,

$$\underbrace{\int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1}_{I_1} + \underbrace{\int_A^B \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2}_{I_2} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1}_{I_1} - \underbrace{\int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_2}_{I_2} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) =$$

$$\int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = W_{\text{barne}}. \quad (7-71)$$

Azken hau barne-indarrek egiten duten lana da. Beraz, lan osoa kanpo-indarrek eta barne-indarrek egiten duten lanen batura izango da, hots,

$$W = W_{\text{kanpo}} + W_{\text{barne}}. \quad (7-72)$$

Baina zertarako erabiltzen da lan hori? Hara! Kontsidera dezagun Newtonen bigarren legea bi partikula horien kasurako; alegia:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1, \quad (7-73a)$$

$$\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2. \quad (7-73b)$$

Bakoitza berari dagokion ibilbidearen arabera integratuz eta bien emaitzak batuz,

$$\int_A^B (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}) \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_A^B (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}) \cdot d\mathbf{r}_2 = W_{\text{kanpo}} + W_{\text{barne}}, \quad (7-74)$$

$$W_{\text{kanpo}} + W_{\text{barne}} = \underbrace{\int_A^B m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1}_{I_1} + \underbrace{\int_A^B m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2}_{I_2}. \quad (7-75)$$

Kalkula dezagun azken gaien balioa:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_A^B m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1}_{I_1} + \underbrace{\int_A^B m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2}_{I_2} &= \int_A^B m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_1 dt + \int_A^B m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 dt = \\ &= \int_A^B \frac{1}{2} m_1 d(v_1^2) + \int_A^B \frac{1}{2} m_2 d(v_2^2) = \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right]_A^B = E_{k,B} - E_{k,A}, \end{aligned} \quad (7-76)$$

hau da, energia zinetikoaren gehikuntza adierazten da. Guztira, hauxe dugu:

$$W_{\text{kanpo}} + W_{\text{barne}} = E_{k,B} - E_{k,A}. \quad (7-77)$$

Hots, barne eta kanpo-indarren artean egiten duten lana, sistemaren energia zinetikoa aldatzeko erabiltzen da. Bestalde, esandakoak edozein indar-motaren kasurako balio du, kontserbakorrak izan zein ez izan.

7.5.1. Energia propioa

Demagun barne-indarrak kontserbakorrak direla. Kasu horretan barne-indarrek egiten duten lana funtzio potentzial baten bidez ($E_{p,12}$) adierazi ahal izango da, alegia:

$$W_{\text{barne}} = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = E_{p,12,A} - E_{p,12,B}. \quad (7-78)$$

Eta aurreko adierazpena eramanez,

$$(E_k + E_{p,12})_B - (E_k + E_{p,12})_A = W_{\text{kanpo}}. \quad (7-79)$$

($E_k + E_{p,12}$) kantitateari *energia propioa* deritzo eta U letraz adierazi ohi da. Ikus daitekeen bezala, barne-indarrak kontserbakorrak direnean definitzen da energia propioa. Bestalde, kasu horretan

$$W_{\text{kampo}} = U_B - U_A = \Delta U \quad (7-80)$$

da; hots, kanpo-indarrek egiten duten lana energia propioa aldatzeko erabiltzen da.

Partikula-sistema isolaturik badago (edo kanpo-indarrek lanik egiten ez badute),

$$W_{\text{kampo}} = 0, \quad (7-81)$$

$$U_B - U_A = 0, \quad (7-82)$$

$$U_B = U_A = \text{ktea.} \quad (7-83)$$

Hau da, sistema isolatuaren kasuan, energia propioak konstante dirau higiduran zehar.

Energia propioarekin bukatzeko, ohar bat egingo dugu. Orain arte, bi partikularen kasuaz hitz egiten ari gara. Dena den, edozein partikula-kopururen kasurako ere defini daiteke energia propioa, barne-indarrak kontserbakorrak direnean. Honelaxe preseski:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i < j} E_{p,ij}. \quad (7-84)$$

Bigarren batuketan bi partikulen arteko konbinazio posible guztiak adierazi nahi dira, hau da, partikula-bikote guztiak.

7.5.2. Energia mekaniko osoa

Demagun, orain, kanpo-indarrak ere kontserbakorrak direla. Orduan,

$$W_{\text{kampo}} = E_{p,\text{kampo},A} - E_{p,\text{kampo},B} \quad (7-85)$$

da, eta aurreko puntuko adierazpena eramanez,

$$W_{\text{kampo}} = U_B - U_A, \quad (7-86)$$

$$(U + E_{p,\text{kampo}})_A = (U + E_{p,\text{kampo}})_B. \quad (7-87)$$

Horrela, denboran zehar konstante dirauen magnitude berri bat ageri zaigu:

$$E = U + E_{p,\text{kampo}} = E_k + E_{p,\text{barne}} + E_{p,\text{kampo}}. \quad (7-88)$$

Magnitude berri honi sistemaren *energia osoa* deritzo. Ikusi dugunez, indar guztiak (barnekoak eta kanpokoak) kontserbakorrak direnean, partikula-sistemaren energia osoak konstante dirau higiduran zehar. Hauxe da energiaren kontserbazioaren teoremaren orokorpena.

7.6. TALKAK

Hizkuntza arruntean talka hitzak esangura zehatz xamarra du: bi gorputz desberdin erlatiboki higitzen ari dira, eta une batean elkar jo egiten dute; talka edo kolpearen ondoren deformaturik ager daitezke edo ez, baina, edozertara, kasu orokorrean, gorputzek hasieran zuten higidura-egoera aldaturik geratuko da.

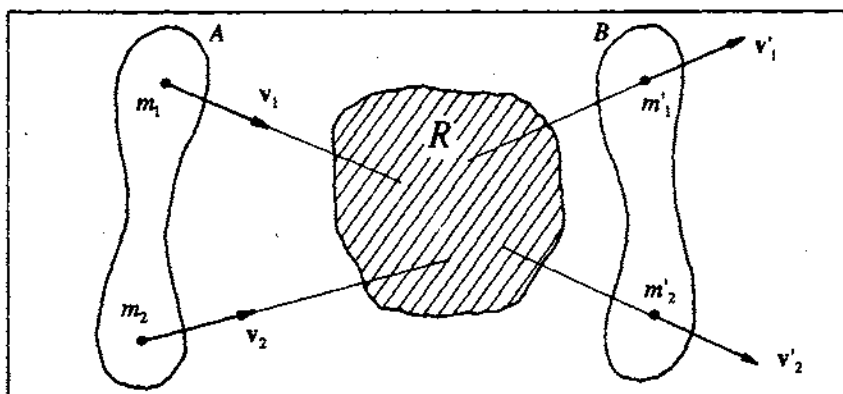
Fisikan ere horrelako zerbait adierazi nahi da. Dena den, ez da zertan 'kontaktu' edo

'ukipen fisikorik' gertatu, zeren, izatez, hitz horrek ez baitu zentzurik mikroskopikoki. Edozein modutan, bi gorputz edo partikula higitzen ari dira, eta espazioalde batean bien arteko elkarrekintza gertatzen da. Elkarrekintzaren kausaz, aldatu egin daitezke partikulak eurak ere (berau nahitaezkoa izan ez arren); eta, edonola ere, partikulen higidura aldatu egiten da. Kasu horretan talka bat gertatu dela esaten da. Bestalde, talka aurretik eta ondotik dauden partikulak berberak direnean, *sakabanaketa* izena ematen zaio talkari (batez ere, bi partikularek arteko talkan).

Talken azterketa oso garrantzizkoa da Fisikan. Hainbat gertakari talka gisa azter daitezke, hauen artean Fisika mikroskopikoaren arlokoak nagusi izanik. Hor ditugu oinarritzko partikulekin egiten diren esperimentu gehienak; izan ere, oinarritzko partikula gehienak talken bidez lortu eta aztertu izan dira.

Laborategietan talka gisa antolatzen diren esperimentuetan, ikertzaileek aldeztu aurretik ezagunak dituzte talka aurreko baldintzak —zein partikula diren eta zein abiaduraz higitzen diren—, zeren berek nahi duten moduan prestatzen baitute talka. Esperimentua egitean, talka ondoko partikulak identifikatu behar izaten dituzte, horien magnitude dinamikoak neurtuz eta arazoaren azterketa mekanikoa eginez.

Goazen, ba, talken azterketa fisikoa egitera. Demagun talka aurretik m_1 eta m_2 masadun partikulak v_1 eta v_2 abiadurez higitzen ari direla. Talkan bien arteko elkarrekintza gertatzen da R eskualdean; eta gero m'_1 eta m'_2 masadun partikulak ageri dira —lehenengo berberak izan daitezke edo ez— v'_1 eta v'_2 abiadurez (ikus irudia).



7.9. irudia. Bi partikularek arteko talka. R eskualdea 'talka' gertatu denekoa da.

Demagun talka egiten duten partikulek sistema isolatua osatzen dutela. Barne-indarrak baino ez dago. Hain zuzen, 7.9. irudian, A delakoaz talka gertatu aurretik partikula-sistemak zuen egoera adierazi da; B delakoaz, talka ondokoa. Honetaz ohar bat egin behar da: talken iraupena oso laburra ohi dela kontuan hartuz, eta, bestalde, talken kausaz barne-indarrek hartzen dituzten balioak kanpo-indarrenak baino askoz handiagoak izaten direla kontuan hartuz, arbuia egin ohi dira bigarren horien ondorioak, lehenengoenekin konparatuz. Suposizio horrek ondoko kontsiderazioak egitera garamatza:

- Talkak dirauen bitartean (hau da, oso denbora-tarte laburrean, ia bat-batean) partikula-sistema isolatuta balego bezala har daiteke.
- Talkak dirauen bitartean, arbuia egin daiteke kanpo-indarren lana, barne-indarren lanarekin konparatuz.

Sistema isolaturik egonik, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa betetzen da, hau da:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m'_1 \mathbf{v}'_1 + m'_2 \mathbf{v}'_2. \quad (7-89)$$

Modu berean $W_{\text{kanpo}} = 0$ da, bi partikulen sistema isolaturik baitago. Beraz,

$$W_{\text{barne}} = E_{k,B} - E_{k,A}. \quad (7-90)$$

Liburu batzuetan, barne-indarrek egiten duten lan hori Q letraz adierazten da. Preseski, Q magnitude berri horren arabera, ondoko eran sailkatzen dira talkak:

a) $Q = 0$ denean,

$$E_{k,B} - E_{k,A} = 0, \quad (7-91)$$

$$E_{k,B} = E_{k,A}. \quad (7-92)$$

Hau da, talkan kontserbatu egiten da sistemaren energia zinetikoa. Talka *elastikoa* izan dela esaten da.

b) $Q \neq 0$ denean,

$$E_{k,B} \neq E_{k,A}. \quad (7-93)$$

Talka *inelastikoa* dela esaten da. Bi eratako talka inelastikoak daude:

$Q < 0$ denean, talkan galdu egiten da energia zinetikoa. Talka *endoergikoa* dela esaten da.

$Q > 0$ denean, irabazi egiten da energia zinetikoa. Talka *exoergikoa* deritzo.

Bukatzeko, zenbait ohar egingo ditugu:

- Sistema isolatua bada, eta barne-indarrak kontserbakorrak badira, ondokoa geratuko zaigu:

$$E_{k,B} - E_{k,A} = W_{\text{barne}} = E_{p,\text{barne},A} - E_{p,\text{barne},B}, \quad (7-94)$$

$$(E_k + E_{p,\text{barne}})_A = (E_k + E_{p,\text{barne}})_B. \quad (7-95)$$

$$U_A = U_B. \quad (7-96)$$

Hau da, kasu honetan, kontserbatu egiten da energia propioa.

- Puntu honetan egin dugun azterketan, laborategiko sistema erabili dugu behaketa-sistema gisa, L sistema alegia. Dena den, berdin egin liteke, masa-zentroaren sistema erabiliz (C delakoa, alegia).

8. gaia

Solido zurruna

Aurreko gaian partikula-sistemen dinamika aztertu dugu, eta bertan edozein sistema-motari buruzko magnitudeak aztertu ditugu. Oraingo gai honetan sistema jakin bat aztertuko dugu: solido zurruna.

Geroago zehazki definituko badugu ere, diogun ezen solido zurruna bere forma mantentzen duen partikula-sistema dela. Ikusiko dugunez, sistema berezi honen azterketan teknika eta magnitude bereziak erabiltzen dira, hala nola inertzia-momentuak, inertzia-tentsorea, eta beste. Hain zuzen ere, solido zurrunari buruzko lehen gai honetan, magnitude berri horien prestaketan arituko gara, horien bidez solidoaren higidura-egoera definitu ahal izateko, gero bigarren gai batean magnitude horien bidez solido zurrunaren dinamika aztertzeke.

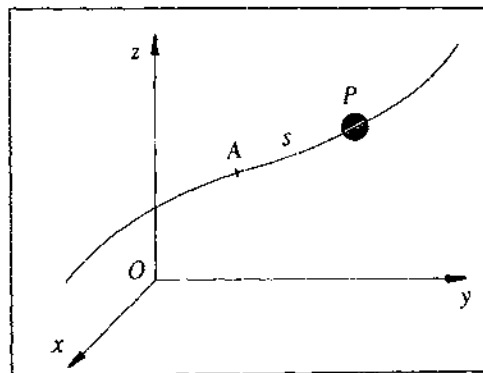
8.1. LOTURA-BALDINTZAK. SISTEMA BATEN ASKATASUN-GRADUAK. SOLIDO ZURRUNA

Sistema baten egoera adierazteko behar diren aldagai independenteei sistema horren *askatasun-graduak* deritze. Horrela, adibidez, sistema partikula bakar batez osaturik badago, 3 askatasun-gradu dituela esango dugu, eta horiek partikularen hiru koordinatu kartesiarrak edota beste hiru kordenatu berezi izan daitezke.

Baina demagun partikula horren higidurari mugaren bat jartzen diogula. Kasu horretan lehenagoko 3 koordinatuak ezin daitezke edonolakoak izan; beren artean erlazio jakin bat ageri da. Koordinatuen artean *lotura* bat jarri dugula esanen dugu. Lotura, ba, higidurari jartzen zaion muga edo baldintza da, eta horregatik *lotura-baldintzen* bidez adierazten da.

Adibide baten laguntzaz hobeki ulertuko dugu arazoa. Demagun partikula bat dugula, eta partikula hori ibilbide konkretu batean higitzera behartu nahi dugula. Asmo hori burutzeko, burdin-hari batean barrena higitzen den bola zulatu bat kontsidera dezakegu, idunekoa batean dauden bolen antzera jarrita dagoela (8.1. irudia).

Berez, partikulak hiru askatasun-gradu ditu, P puntuaren (x,y,z) koordinatuak, adibidez. Baina kasu honetan partikula ezin daiteke edozein modutan higi, burdin-hariak mugatu egiten baitu higidura. Horixe da, hain zuzen ere, partikulak duen lotura.



8.1. irudia. P puntuan dagoen partikula hari deformaezin baten norabidean ibiltzera behartu da.

Matematikoki, lotura hori burdin-hariak osatzen duen kurbaren ekuazioen bidez adierazten da. Dakigunez, kurba bat bi ekuazioen bidez adierazten da espazioan, zeina

$$f_1(x,y,z) = 0 \quad \text{eta} \quad f_2(x,y,z) = 0 \quad (8-1)$$

gainazalen arteko ebakidura den. Ekuazio horiek puntuaren koordenatuak bete behar dituzten *lotura-baldintzak* dira. Halaber, burdin-hariak partikularen gainean egiten duen indarrari, *lotura-indarra* deritzo. Ez gara hemen lotura-baldintzen sailkapena egiten hasiko, baina diogun ekuazio arrunten bidez adieraz daitezkeenak soilik kontsideratuko ditugula. (8-1) eran adieraz daitezkeenak preseski, teknikoki 'lotura holonomoak' deritzenak.

Lotura-baldintzak direla kausa, koordenatuak ez dira jadanik elkarren independenteak, beren artean bi lotura-baldintza baitaude. Beraz, jadanik askatasun-graduak ez dira 3 izango, 1 baizik ($3 - 2 = 1$). Preseski, honelaxe adierazten dira partikula batek dituen askatasun-graduak:

$$\text{Askatasun-graduen kopurua} = 3 - \text{lotura-baldintzen kopurua.}$$

Guk ipini dugun adibidean, partikulak askatasun-gradu bakarra duela argi dago, zeren puntu finko batetik (A -tik) burdin-harian barrena P puntura dagoen distantzia ($\overline{AP} = s$) emanez gero, partikularen posizioa guztiz definiturik geratzen baita.

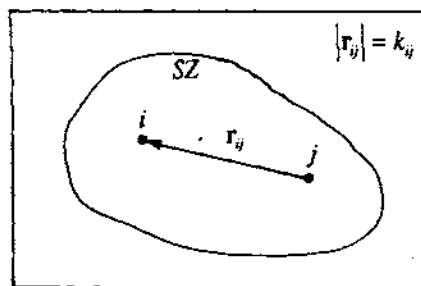
Demagun, orain, n partikulaz osaturiko sistema. Loturarik gabe, $3n$ askatasun-gradu ditu. Sistema horrek m lotura-baldintza (elkarrekiko independenteak) baditu, askatasun-graduen kopurua ondokoa izango da:

$$\text{Askatasun graduen kopurua} = 3n - m.$$

Zer esanik ez, $m < 3n$ izan behar da. Hain zuzen, $m = 3n$ bada, ez du higitzeko posibilitaterik eta sistema osoa eta partikula bakoitza geldi egotera beharturik daude.

8.1.1. Solido zurruna

Askatasun-graduak eta loturak zer diren azaldu ondoren, goazen orain solido zurruna definitzera. Zer da solido zurruna?



8.2. irudia. Solido zurrunean edozein bi punturen arteko distantzia konstantea da aldi orotan.

Sólido zurruna n partikulaz osaturiko sistema bat da (kontaezinak gehienetan, asko baitira), baldintza hau betetzen duena: edozein bi partikularen arteko distantziak konstante dira aldi orotan (8.2. irudia), hots,

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_{ij}| = k_{ij} = \text{ktea.} \quad (8-2)$$

Naturan ez dago erabat zurruna den gorputzik, baina lehen hurbilketa batean, sólido deformagaitzak sólido zurruntzat har ditzakegu.

Zenbat askatasun-gradu dituzte sólido zurrunek? Hara! Batetik, n partikula izanik, $3n$ askatasun-gradu ditugu. Baina $|\mathbf{r}_{ij}| = k_{ij}$ erako lotura-baldintzak ditugu tartean, eta hauek

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (8-3)$$

dira. Baina, bestalde, n handia bada,

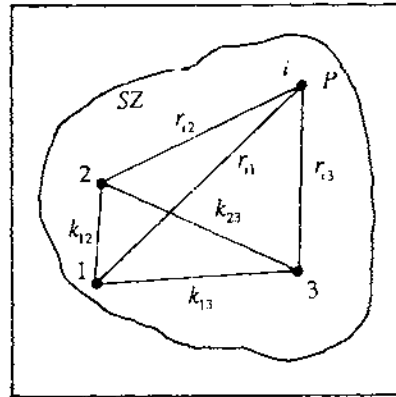
$$\frac{n(n-1)}{2} \gg 3n \quad (8-4)$$

da. Nola izan daiteke hori? Arrazoa oso sinplea da. Izatez, (8-2) baldintzak ez dira guztiak elkarrekiko independenteak. Sólido zurrun baten posizioa finkatzeko, lerro zuzen berean ez dauden hiru punturen koordinatuak zehaztea nahikoa da, zeren, lotura-baldintzak kontuan edukirik, beste edozein puntu hiru puntu horien funtzioan lor baitaiteke, 8.3. irudian ageri den bezala.

Hiru puntuek $3 \cdot 3 = 9$ askatasun-gradu dituzte, baina, sólido zurrun batekoak izanik, ondoko hiru lotura-baldintzak daude:

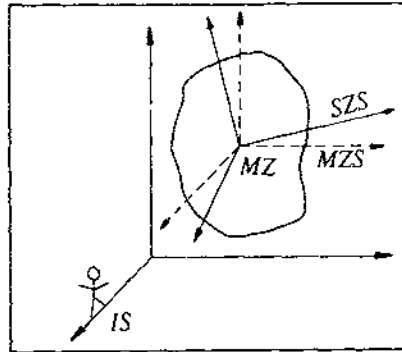
$$|\mathbf{r}_{12}| = k_{12}, \quad |\mathbf{r}_{13}| = k_{13}, \quad |\mathbf{r}_{23}| = k_{23}. \quad (8-4)$$

Beraz, guztira, $9 - 3 = 6$ askatasun-gradu dira. Hots, sólido zurrun askeak 6 askatasun-gradu ditu.



8.3. irudia. Solido zurruneke hiru punturen (1, 2 eta 3 puntuak) posizioa finkatu ondoren, beste edozein punturen posizioa erabat finkaturik dago lotura-baldintzen bidez.

Gehienetan, honelaxe aukeratzen dira askatasun-graduak: batetik 3, *IS* sistema inertzialean masa-zentroaren koordinatu cartesianak definitzeko, eta bestetik 3, masa-zentroarekin eta sistema inertzialarekiko paraleloki higitzen den sistemarekiko (*MZS*) solido zurrunarekin loturik doan sistemak (*SZS* delakoak) duen orientazioa adierazteko (normalki, hurrengo atalean ikusiko ditugun Euler-en angeluak izango dira).

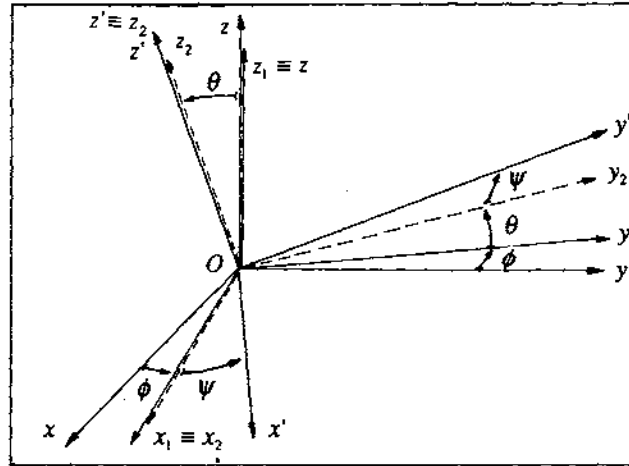


8.4. irudia. Solido zurrunaren askatasun-graduak finkaturik daude, alde baterik masa-zentroa (*MZ*) eta bestetik bertan jatorria izanik solidoarekin lotuta doan sistema (*SZS*) definituz.

8.2. EULER-EN ANGELUAK

Solidoarekin loturik doan erreferentzia-sistemaren orientazioa adierazteko erabiltzen dira. Aurreko atalean esan dugunez, solido zurrunaren sistema (*SZS*) solido zurrunean finkaturik dagoen sistema da. Beraren jatorria masa-zentroan dago, eta masa-zentroaren sistemarekiko definitzen da, hots, *MZS*rekiko. Hiru dira orientazioa adierazten duten askatasun-graduak; hortaz, hiru magnitude independente definitu behar dira. Hiru magnitude horiek modu desberdinez aukera daitezke, baina arruntena *Euler-en angeluak* aukeratzea da.

Honela definitzen dira Euler-en angeluak (ikus 8.5. irudia): $Oxyz$ sistemak MZS adierazten du eta $Ox'y'z'$ sistemak, SZS . $Ox'y'z'$ sistemaren orientazioa, hiru angelu independenteren bidez adierazten da. Ikus dezagun nola pasatzen den $Oxyz$ sistematik $Ox'y'z'$ sistemara hiru biraketa elkarren ondoan eginez.



8.5. irudia. Euler-en angeluak.

- 1) Oz ardatzaren inguruan, ϕ balioko biraketa. Biraketa honen bidez $Oxyz$ sistematik $Ox_1y_1z_1$ sistemara pasatzen da.
- 2) Ox_1 ardatzaren inguruan, θ balioko biraketa. Biraketa honen bidez, $Ox_1y_1z_1$ sistematik $Ox_2y_2z_2$ sistemara pasatzen da.
- 3) Oz_2 ardatzaren inguruan, ψ balioko biraketa. Biraketa honen bidez $Ox_2y_2z_2$ sistematik $Ox'y'z'$ sistemara pasatzen da.

$$Oxyz \xrightarrow{\phi} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\theta} Ox_2y_2z_2 \xrightarrow{\psi} Ox'y'z'$$

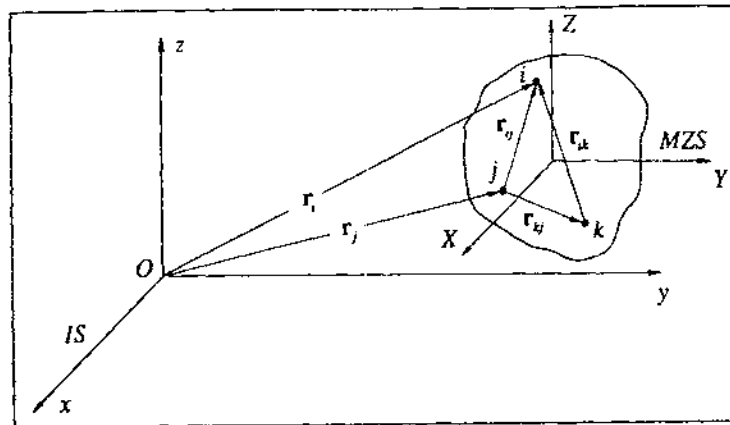
ϕ , θ eta ψ angeluak Euler-en angeluak dira. Ondoko izenak hartzen dituzte:

- ϕ : prezesio-angelua
- θ : nutazio-angelua
- ψ : biraketa propioaren angelua

Hiru biraketa horiek noranzko positiboan hartzen dira.

8.3. SOLIDO ZURRUNAREN ABIADUREN EREMUA. TRANSLAZIO ETA BIRAKETA HUTSAK

Solido zurrunaren puntuen abiadurak eta abiadura horien arteko erlazioak aztertuko ditugu atal honetan.



8.6. irudia. Solido zurrunaren abiaduren eremua aztertzeko erreferentzia-sistemak.

Kontsidera ditzagun i eta j puntuak. 8.6. irudian ikus daitekeenez,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{ij} \quad (8-6)$$

Denborarekiko deribatuz,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} \quad (8-7)$$

Baina

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad \text{eta} \quad \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j \quad (8-8)$$

dira (abiadura hauek sistema inertzialarekikoak dira, noski).

Bestalde, solido zurrunaren puntuak izanik, $|\mathbf{r}_{ij}| = k$ tea da; eta 4.3. atalean ikusi genuenez,

$$\frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij} \quad (8-19)$$

Hemen $\boldsymbol{\omega}$ delakoa $\mathbf{r}_{ij}$ bektoreak pairatzen duen biraketa adierazten duen abiadura angeluarra da. Beraz, hauxe dugu:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij} \quad (8-10)$$

Arrazonamendu berdinari jarraituz, i eta k puntuen abiadurak ondoko eran erlaziona ditzakegu:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{ik} \quad (8-11)$$

Hemengo formula honetan $\boldsymbol{\omega}'$ jarri dugu, ez baitakigu lehenengo $\boldsymbol{\omega}$ berbera ote den. Dena den, $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$ dela frogatuko dugu jarraian. Horretarako,

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{kj} + \mathbf{r}_{ik} \quad (8-12)$$

idatziko dugu. Hemen (8-10)-eko $\mathbf{r}_{ij}$ (8-12)-ko balioaz ordezkatzuz, eta kalkuluak eginez,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{kj} + \mathbf{r}_{ik}). \quad (8-13)$$

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{kj}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ik}. \quad (8-14)$$

Baina parentesi artekoa $\mathbf{v}_k$ da, izatez. Beraz, ondokoa dugu:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ik}. \quad (8-15)$$

Eta (8-11) eta (8-15) adierazpenak konparatuz eta i eta k edozein bi puntu direla kontuan hartuz, $\boldsymbol{\omega}$ eta $\boldsymbol{\omega}'$ abiadurek berdinak izan behar dutela dakusagu, alegia, frogaturik dago honako hau:

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}. \quad (8-16)$$

Zer esan nahi du honek? Hitz arruntez esanik, solido zurrunez edozein puntutan abiadura angeluar berbera dagoela, hau da, solido zurruna multzo modura $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarraz higitzen dela eta solido zurruna osatzen duten puntu guztiek biraketa-higidura horretan parte hartzen dutela.

Honela, ba, i puntuaren abiadura masa-zentroaren abiaduraren funtzioan adierazi nahi badugu, modu honetan egingo dugu:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{MZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i. \quad (8-17)$$

Hemen $\mathbf{r}'_i$ bektorea, i puntuak MZS sisteman duen posizio-bektorea da, noski, eta

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{MZ}. \quad (8-18)$$

Konpara dezagun orain abiaduraren adierazpen hau kurtsore-sistematik aztertzean (ikus 2.4. atala) lortu genuenarekin.

SOLIDO ZURRUNAREN
ABIADUREN EREMUA

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{MS} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$$

KURTSORE-SISTEMAK

$$\boldsymbol{\tau}_O = \boldsymbol{\tau}_O + \mathbf{R} \times \overrightarrow{OO'}$$

Ikus daitekeenez, bi adierazpen hauek funtzio berbera betetzen duten bi adierazpen analogoak dira. Letra desberdinez, baina gauza berbera direla ikusiko dugu.

i eta MZ bi puntu dira.

$\boldsymbol{\omega}$: solido zurrunez edozein puntutan balio berbera duen bektorea da.

$\mathbf{v}_i$ delakoa $\mathbf{v}_{MS}$ delakoaren funtzioan adierazten da.

O' eta O bi puntu dira.

$\mathbf{R}$: espazioko aldaezin bektoriaia. Puntu guztietan balio berbera du.

$\boldsymbol{\tau}_O$ delakoa $\boldsymbol{\tau}_O$ delakoaren funtzioan adierazten da.

Analogia honetan ondoko korrespondentziak daude:

abiadura lineala

$\mathbf{v}$

$\boldsymbol{\tau}$

momentua

abiadura angeluarra

$\boldsymbol{\omega}$

$\mathbf{R}$

erresultantea

$\mathbf{r}'_i$

$\overrightarrow{OO'}$

Beraz, 2. gaian kurtso-re-sistemak aztertzean ikusi genituen propietate eta ondorio guztiak aplikatu ahal izango ditugu solido zurrunaren abiaduren eremuaren kasuan ere, alegia,

aldaczin bektoriala: ω		$\mathbf{R}$: aldaczin bektoriala
aldaczin eskalarra: $\omega \cdot \mathbf{v}$		$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}$: aldaczin eskalarra
$\mathbf{v}$ eta ω paraleloak diren puntuetan, abiadura lineala minimoa izango da. Puntu horiek ω -ren norabidea duen zuzen batean daude. Nolabait sistemaren <i>ardatz zentrala</i> da.		$\boldsymbol{\tau}$ eta $\mathbf{R}$ paraleloak diren puntuetan, momentua minimoa izango da. Puntu horiek $\mathbf{R}$ -ren norabidea duen zuzen batean daude, eta zuzen horri <i>ardatz zentrala</i> deritzo.
Sistema honen momentu minimoari, <i>labainketa-abiadura</i> deritzo: v_d		m : momentu minimoa.

Solido zurrunaren abiaduren eremuan ageri den ardatz zentralari *biraketa eta labainketaren aldiuneko ardatza* deritzo. Zergatik? Ardatz horretako puntuek ω eta v_d dituzte, denek berdin; hau da, solidoak ardatz horrekiko biraketa (ω) du eta denbora berean ardatz horren norabidean transladatzen ari da (v_d). Nolabait biraketa-ardatzaren norabidean labainketa bat gertatzen ari dela esan dezakegu. Emaitza honi *Chasles-en teorema* deritzo, eta solido zurrunaren higidura orokorrean ardatz baten inguruko biraketa eta ardatz horren norabideko labainketa batera eginez sor daitekeela dio.

Modu berean, aurreko adierazpenetan ikusi denez, solido zurrunaren higidura edozein puntutara (i) laburbil daiteke, biraketa baten (ω) eta abiadura lineal baten ($\mathbf{v}_i$) konposizio modura. Zer esanik ez, laburbilpena egiteko hartzen den puntua, masa-zentroa izan daiteke eta normalki horixe egiten da. Baina beste edozein puntu ere har daiteke, nahi edo komeni izanez gero. Azter ditzagun zenbait kasu berezi.

8.3.1. Biraketarik gabeko higidura ($\omega = 0$)

Kasu honetan,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{Mz} \quad (8-19)$$

Puntu guztiek abiadura lineal berbera dute, eta gainera abiadura angeluarra nulua da edonon. Beraz, ez dago biraketarik. Higidura hori *translazio hutsezko* higidura da.

8.3.2. Labainketarik gabeko higidura ($v_d = 0$)

Demagun, orain, puntu baten abiadura nulua dela denbora osoan (bestela esateko, puntu hori finko dagoela esan nahi dugu, geldí dagoela). Kasu honetan $v_d = 0$ da, zeren gutxienez puntu horretan $\mathbf{v} = 0$ baita.

Beraz, biraketa eta labainketaren aldiuneko ardatza puntu horretatik pasatzen da. Eta labainketa-abiadura zero baliokoa denez, ardatz zentrolean ez dago labainketarik; hots, solido zurruna *biraketa hutsez* higitzen da, puntu finkotik pasatzen den ardatz baten inguruan.

($\mathbf{V}$ eta $\boldsymbol{\omega}$ aldakorrak izan daitezke; dena den, aldiune bakoitzean balio konketuak hartzen dituzte). Beraz, O puntuarekiko momentu angeluarra kalkulatzeko, lehen gaia ($\mathbf{R} \times M\mathbf{V}$) oso erraz lortuko da, baina bigarren gaiaren lorpena, $\sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$ delakoarena alegia, zailagoa izango da.

Dena den, orain bigarren gai hori solidoaren abiadura angeluarraren funtzioan kalkulatzeko saiaturiko gara. Gai hori MZS sistemaren jatorriarekiko (masa-zentroarekiko) momentu angeluarra da, eta $\mathbf{L}'$ letraz adieraziko dugu:

$$\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \quad (8-24)$$

Esan dugunez, masa-zentroaren inguruan solidoak $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarra du. Beraz,

$$\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i. \quad (8-25)$$

$$\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i). \quad (8-26)$$

Biderketa bektorial bikoitzak honela egin daitezke:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (8-27)$$

Honelatan, ba,

$$\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) = (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}'_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}'_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}'_i = r_i'^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_i) \mathbf{r}'_i. \quad (8-28)$$

Eta $\mathbf{L}'$ -ren adierazpencan sartuz:

$$\mathbf{L}' = \sum_i m_i [\mathbf{r}'_i{}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_i) \mathbf{r}'_i] (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i). \quad (8-29)$$

Bektore honek $O'x'$, $O'y'$ eta $O'z'$ ardatzen norabideetan (hots, Ox , Oy eta Oz direlakoenetan) dituen osagaiak hauek dira:

$$L'_x = \omega_x \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i{}^2 - x_i'^2) - \omega_y \sum_i m_i x'_i y'_i - \omega_z \sum_i m_i x'_i z'_i, \quad (8-30a)$$

$$L'_y = -\omega_x \sum_i m_i x'_i y'_i + \omega_y \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i{}^2 - y_i'^2) - \omega_z \sum_i m_i y'_i z'_i, \quad (8-30b)$$

$$L'_z = -\omega_x \sum_i m_i x'_i z'_i - \omega_y \sum_i m_i y'_i z'_i + \omega_z \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i{}^2 - z_i'^2). \quad (8-30c)$$

Puntu honetara heldurik, izendapen berri batzuk eginen ditugu:

$$\sum_i m_i (\mathbf{r}'_i{}^2 - x_i'^2) \equiv I_{xx} : x' \text{ ardatzarekiko inertzia-momentua}, \quad (8-31a)$$

$$-\sum_i m_i x'_i y'_i = I_{xy} : O'x'y' \text{ planoarekiko inertzia-biderkadura}, \quad (8-31b)$$

Eta berdin beste ardatz eta planoekiko, azpindizek aldatuz.

Izendapen berrien ondoren, honelaxe idatziko ditugu momentu angeluarraren osagaiak:

$$L'_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \quad (8-32a)$$

$$L'_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \quad (8-32b)$$

$$L'_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \quad (8-32c)$$

Zer esanik ez, planoekiko inertzia-biderkaduren definizioa kontuan hartuz:

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}, \quad (8-33)$$

Aurreko hiru osagaien itxura aztertuz, bertan L' eta ω bektoreen osagaien arteko erlazioa ageri dela ikusiko dugu. Erlazio hori matrizialki idatz daiteke. Era honetan, hain zuzen ere:

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (8-34)$$

edo laburturik:

$$L' = \tilde{I} \omega, \quad (8-35)$$

$\tilde{I}$ delakoa ondoko eran adieraz daitekeen magnitudea izanik:

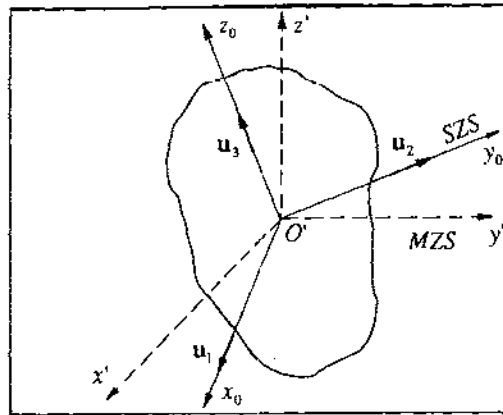
$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (8-36)$$

$\tilde{I}$ delakoa bigarren ordenako tentsore simetrikoa da eta *inertzia-tentsorea* deritzo. Momentu angeluarra eta abiadura angeluarra erlazionatzen ditu. Bi bektore horiek, bestalde, ez dute zertan norabide berbera edukirik, $\tilde{I}$ delakoa ez baita eskalarra tentsorea baizik, eta (8-35) adierazpeneko osagaien biderkadura, matrizeen biderkaduraren arauen bidez egiten baita.

8.5. INERTZIA-ARDATZA ETA MOMENTU NAGUSIAK

Aurreko puntuan esan dugunez, kasu orokorrean L' eta ω bektoreen norabideak ez dira berdinak. Hala ere, ω delakoak norabide jakin batzuk hartzen dituenean, posible da L' -k eta ω -k norabide berbera edukitzea.

L' eta ω bektoreen norabideak berdinak direnean, ω bektorearen norabidea duen ardatza *inertzia-ardatz nagusia* dela diogu. Sólido zurrunaren kasuan, eta masa-zentroari dagokionez lorturiko L' -ren kasuan, beti da posiblea gutxienez hiru ardatz nagusi aurkitzea. Hiru ardatz horiek elkarrekiko perpendikularrak dira. Guk ez dugu frogatuko hori horrela denik, horretarako behar den tresna matematikoa goragoko maila batekoa da eta. Baina ontzat hartuko dugu eta horretan finkatuko gara, hurrengo azalpenak egitean.



8.8. irudia. Inertzia-ardatz nagusien bidez definituriko erreferentzia-sistema.

Har dezagun, orain, ardatz nagusiez osaturiko triedroa (O', x_0, y_0, z_0) (ikus 8.8. irudia). Sistema hori finkoa da solido zurrunean, eta solido zurrunaren sistematzat (SZS) hartuko dugu. Sistema honen ardatzen norabideetako bektore unitarioak $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ eta $\mathbf{u}_3$ dira. Saia gaitezen $\mathbf{L}'$ eta $\boldsymbol{\omega}$ bektoreak sistema honetan dituzten osagaien bidez adierazten. Modu berean, $\bar{\mathbf{I}}$ inertzia-tentsorea ere adierazi beharko dugu sistema berri honetan. Osagaiak ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) eta (L_1, L_2, L_3) letrez izendatuko ditugu.

Demagun, orain, $\boldsymbol{\omega}$ -k x_0 ardatzaren norabidea duela, hots, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{u}_1$ dela. Ardatz nagusia izanik, $\mathbf{L}'$ -k ere norabide berbera eduki behar du: $\mathbf{L}' = L_1 \mathbf{u}_1$. Bestalde, (8-35) erabiliz, eta adierazpen horren osagaiak SZS sisteman idatziz:

$$L_1 = I_{x_0 x_0} \omega_1 + I_{x_0 y_0} \omega_2 + I_{x_0 z_0} \omega_3, \quad (8-37a)$$

$$L_2 = I_{y_0 x_0} \omega_1 + I_{y_0 y_0} \omega_2 + I_{y_0 z_0} \omega_3, \quad (8-37b)$$

$$L_3 = I_{z_0 x_0} \omega_1 + I_{z_0 y_0} \omega_2 + I_{z_0 z_0} \omega_3. \quad (8-37c)$$

Eta $\mathbf{L}'$ eta $\boldsymbol{\omega}$ bektoreen osagaien balioa kontuan hartuz,

$$L_1 = I_{x_0 x_0} \omega_1, \quad (8-38a)$$

$$L_2 = 0 = I_{y_0 x_0} \omega_1, \quad (8-38b)$$

$$L_3 = 0 = I_{z_0 x_0} \omega_1. \quad (8-38c)$$

Beraz, $I_{y_0 x_0} = I_{z_0 x_0} = 0$ izango dira. Bestalde, $\boldsymbol{\omega}$ delakoari beste ardatz nagusi baten norabidea emanik, $I_{x_0 y_0} = 0$ dela frogatu daiteke. Honelatan, ba, ardatz nagusiek osaturiko erreferentzia-sisteman (SZS delakoan), inertzia-tentsorearen osagaien artean zero ez diren bakarrak $I_{x_0 y_0}$, $I_{y_0 z_0}$ eta $I_{z_0 x_0}$ dira. Osagai horiek, I_1 , I_2 eta I_3 eran adierazi ohi dira.

Beraz, inertzia-ardatz nagusiek osaturiko sisteman, honelaxe idatziko da inertzia-tentsorea:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (8-39)$$

hots, sistema horretan diagonalizaturik dago. I_1 , I_2 eta I_3 direlako balioak inertzia-ardatz nagusiekiko inertzia-momentuak dira eta *inertzia-momentu nagusiak* deritze.

Jarraian, oso sinpleki adieraziko dugu $\mathbf{L}'$ eta $\boldsymbol{\omega}$ bektoreen arteko erlazioa SZS sisteman. Demagun, $\boldsymbol{\omega}$ -k edozein norabide duela. Orduan, $\mathbf{L}'$ -k ere beste norabideren bat edukiko du. Bien osagaien arteko erlazioa hauex izango da:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (8-40)$$

Hau modu honetan ere idatz daiteke:

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3, \quad (8-41)$$

$$\mathbf{L}' = I_1 \omega_1 \mathbf{u}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{u}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{u}_3, \quad (8-42)$$

Bukatzeko, zenbait kasu bereziren aipamena egingo dugu:

- $I_1 = I_2 = I_3$ denean, $\mathbf{L}' = \lambda \boldsymbol{\omega}$. Kasu hau *ziba esferikoa* izenez ezaguna da.
- $I_1 = I_2 \neq I_3$ denean, *ziba simetrikoa* deritzo. $x_0 y_0$ planoko ardatz guztiak dira nagusiak. Adibide gisa errugbi-baloia eta umek jostailu modura erabiltzen dituzten ziba arruntak aipa ditzakegu.
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ denean, *ziba asimetrikoa* deritzo.

Bestalde, ondokoa esan behar da: gorputz homogeneo batek simetria-ardatzen bat badu, simetria-ardatz hori inertzia-ardatz nagusietako bat da.

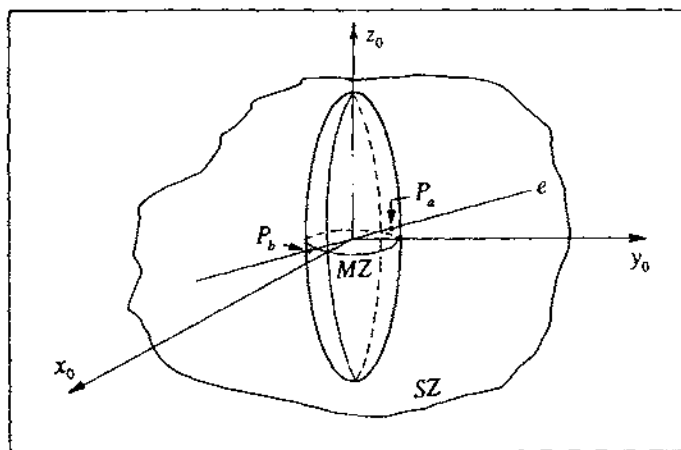
8.6. INERTZIA-ELIPSOIDEA

Orain eraiketa geometriko berezi bat egingen dugu. Demagun masa-zentrotik pasatzen den norabide bat (e). I delakoa e ardatzarekiko solidoak duen inertzia-momentua izanik, masa-zentrotik hasi eta e norabidearen alde bietara $1/\sqrt{I}$ segmentu bat hartuko dugu, modu horretan P_a eta P_b puntuak lortuz.

Maila honetan frogatuko ez badugu ere, horrela definituriko P puntuen leku geometrikoa elipsoide bat dela frogatu daiteke. Elipsoide hori masa-zentroan definitzen denean, *masa-zentroko inertzia-elipsoidea* deritzo. Beste edozein puntutan ere defini daiteke, eta orduan *inertzia-elipsoide* izenez ezagutzen da, besterik gabe.

8.9. irudian inertzia-ardatz nagusiak hartu ditugu erreferentzia-sistematzat (x_0, y_0, z_0). Bertan ikus daitekeenez, elipsoidearen ardatz nagusiak inertzia-ardatz nagusiak dira (erraz frogatu daiteke hori). Ardatz nagusien norabideetan elipsoideak dituen erradioek (a, b, c erradioek hurrenez hurren) ondoko balioak dituzte:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_1}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_3}}. \quad (8-43)$$



8.9. irudia. Inertzia-elipsoidea.

Bestalde, hiru ardatz nagusiek osaturiko erreferentzia-sisteman, elipsoidearen ekuazioa ondokoa izango da:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \quad (8-44)$$

edota a , b eta c -ren balioak kontuan hartuz,

$$I_1 x_0^2 + I_2 y_0^2 + I_3 z_0^2 = 1. \quad (8-45)$$

Hauxe da, ba, baldintza horietan, elipsoidearen ekuazioa. Dena den, bestelako erreferentzia-sisterra bat hartuz gero, formula hori era korapilatsuagoan agertuko da.

Bukatzeko, eta masa-zentroko inertzia-elipsoidea kontsideratuz, aipa ditzagun zenbait kasu berezi:

- Ziba simetrikoaren kasuan, adibidez $I_1 = I_2$ denean, $a = b$ da, eta beraz, inertzia-elipsoidea biraketazkoa da, z_0 ardatzaren inguruan.
- Ziba esferikoaren kasuan, $I_1 = I_2 = I_3 = I$ denez, $a = b = c$ da, eta beraz, inertzia-elipsoidea esfera bat da, izatez:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2, \quad (8-46)$$

bertan $R = 1/\sqrt{I}$ izanik.

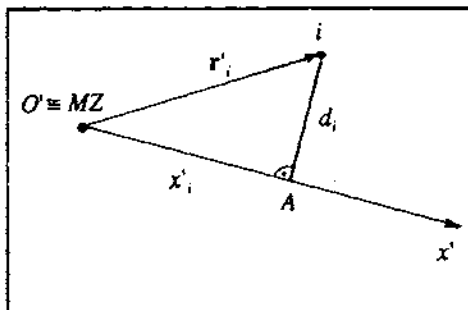
8.7. INERTZIA-MOMENTUEN KALKULUA

8.4. atalean honako modu honetan definitu genuen ardatz batekiko inertzia-momentua (x' ardatzarekikoa),

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i'^2 - x_i'^2). \quad (8-47)$$

Ikus dezagun, definizio horrek duen esangura geometrikoa zein den. Horretarako, 8.10. irudiaz baliatuko gara; irudi horretan ikus daitekeenez, $\overline{IA}$ segmentua $O'x'$ ardatzaren perpendikularra da. Beraz,

$$r_i'^2 - x_i'^2 = |\overline{IA}|^2 = d_i^2. \quad (8-48)$$



8.10. irudia. Inertzia-momentuaren esangura geometrikoa.

Hemen d_i delakoa i puntutik $O'x'$ ardatzera dagoen distantzia da. Beraz, inertzia-momentua honelaxe lortuko da:

$$I_{xx} = \sum_i m_i d_i^2. \quad (8-49)$$

Beste edozein ardatzekiko ere, partikulen masen eta horietako bakoitzetik ardatzera dagoen distantziaren karratuaren arteko biderkaduren batuketaz lortzen da inertzia-momentua:

$$I_e = \sum_i m_i d_i^2, \quad (8-50)$$

hemen d_i delakoa e ardatzera dagoen distantzia izanik.

Masa jarraitua denean, honelaxe egiten da kalkulua:

$$I_e = \int_M d^2 dm. \quad (8-51)$$

Esandakoa argitzeko, adibide modura, bi partikula-sistema konkreturen inertzia-momentuak kalkulatu ditugu.

8.7.1. Masa diskretuz osaturiko sistema

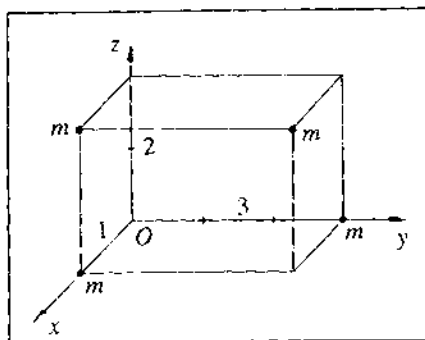
Lau masa berdin (m) ertzak 1, 2 eta 3 metrokoak dituen paralelepipedo baten lau erpinetan daude, 8.11. irudian ageri den bezala. Hiru ardatz koordinatuekiko inertzia-momentuak eta inertzia-tentsorea lortzen saiatuko gara.

Emandako definizioen arabera,

$$I_{xx} = m \cdot 2^2 + m \cdot 0 + m \cdot 3^2 + m \cdot (3^2 + 2^2) = 26m,$$

$$I_{yy} = m \cdot 1^2 + m(1^2 + 2^2) + m \cdot 0 + m \cdot (1^2 + 2^2) = 11m,$$

$$I_{zz} = m \cdot 1^2 + m \cdot 1^2 + m \cdot (1^2 + 3^2) + m \cdot 3 = 21m.$$



8.11. Irudia, masa diskretuz osaturikoa sistema.

Inertzia-tentsorea kalkulatzeko (jatorrian noski), inertzia-biderkadurak kalkulatu behar dira:

$$I_{xx} = -\sum_i m_i x_i y_i = -(m \cdot 1 \cdot 0 + m \cdot 1 \cdot 0 + m \cdot 1 \cdot 3 + m \cdot 0 \cdot 3) = -3m,$$

$$I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = -(m \cdot 1 \cdot 2 + m \cdot 1 \cdot 0 + m \cdot 1 \cdot 2 + m \cdot 0 \cdot 0) = -4m,$$

$$I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = -(m \cdot 0 \cdot 2 + m \cdot 0 \cdot 0 + m \cdot 3 \cdot 2 + m \cdot 3 \cdot 0) = -6m.$$

Beraz, irudiko erreferentzia-sisteman solido zurrun modura harturiko partikula-sistema horren inertzia-tentsorea honako hau da:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 26m & -3m & -4m \\ -3m & 11m & -6m \\ -4m & -6m & 21m \end{pmatrix}.$$

8.7.2. Masa jarraituz osaturiko sistema

Kalkula dezagun orain masa jarraitua duen sistema baten inertzia-momentua. Konkre-
tuki, 8.12. irudian adierazi den h lodierako eta R erradiodun disko zilindriko baten inertzia-
momentua kalkulatu dugu x ardatzarekiko. (8-51) adierazpenean esan dugunez,

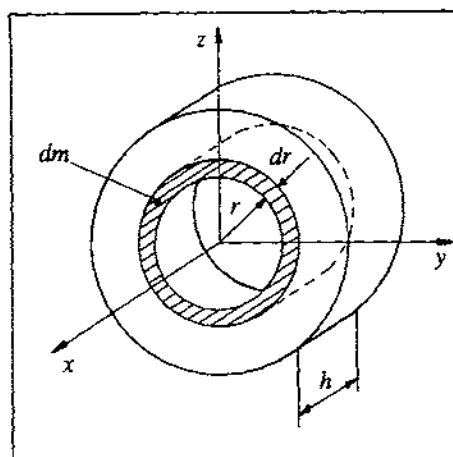
$$I_{xx} = \int d^2 dm.$$

Hemen dm elementuko partikula guztiek ardatzetik d distantzia berberera egon behar dute. Horretarako 8.12. irudian ageri den dm elementuaren motakoak hartuko ditugu, hau da, ardatz gisa x ardatza duten eraztun finak (dr zabalerakoak). Materialaren dentsitatea ρ bada,

$$dm = \rho 2\pi r h dr$$

izango da, eta elementu oso hori x ardatzetik r distantziara dagoenez,

$$I_{xx} = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h dr = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \rho 2\pi h \frac{R^4}{4}.$$



8.12. irudia. Disko zilindriko trinkoa.

Bestalde, disko osoaren masa kontuan edukiz,

$$M = \rho \pi R^2 h.$$

$$I_{xx} = \frac{1}{2} (\rho \pi R^2 h) R^2 \rightarrow I_{xx} = \frac{1}{2} MR^2.$$

8.7.3. Biraketa-erradioa

Zenbait taulatan kontzeptu hau ageri da eta horregatik interesgarria da beraren esangura adieraztea. Gorputz batek biraketa-ardatz batekiko duen *biraketa-erradioa* hauxe da: «gorputz horren masa osoa puntu batean bildurik balego puntu horretatik ardatzera egon behar lukeen distantzia, puntuak ardatzarekiko duen inertzia-momentua gorputzak duen berbera izan zedin». Definizio horren arabera, biraketa-erradioa K bada,

$$MK^2 = I_e. \quad (8 - 52)$$

Beraz,

$$K = \sqrt{\frac{I_e}{M}}. \quad (8 - 53)$$

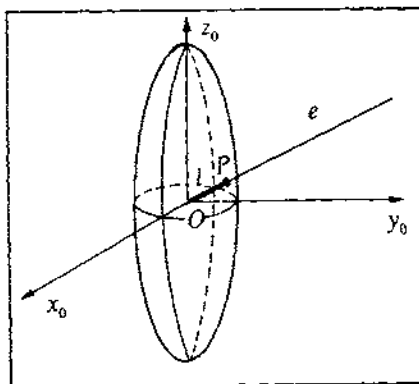
Adibidez, kalkula dezagun biraketa-erradioa aurreko adibideko kasuan:

$$I_e = \frac{1}{2} MR^2 \rightarrow K = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} MR^2}{M}} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Berdin kalkula daiteke beste edozein kasutan ere.

8.7.4. Poinso-en formula

Formula honen bidez, eta inertzia-elipsoidean finkaturik, edozein norabidetako ardatzarekiko inertzia-momentua lortuko dugu norabide horren kosinu zuzentzaileen funtzioan. Kalkuluak errazteko, masa-zentroko elipsoidea aztertuko dugu, eta erreferentzia gisa, ardatz nagusiak hartuko ditugu (8.13. irudia).

8.13. irudia. e norabideko inertzia-momentuaren kalkulurako irudia.

Demagun e norabidea. Emandako definizioaren arabera,

$$\overline{OP} = l = \frac{1}{\sqrt{I_e}}. \quad (8-54)$$

Bestalde, P puntuaren koordenatuak (x_0, y_0, z_0) izanik, kosinu zuzentzaileak hauek dira:

$$\alpha = \frac{x_0}{l}, \quad \beta = \frac{y_0}{l}, \quad \gamma = \frac{z_0}{l}. \quad (8-55)$$

Hemendik x_0, y_0 eta z_0 bakanduz eta elipsoidearen ekuaziora eramanez,

$$I_1(l\alpha)^2 + I_2(l\beta)^2 + I_3(l\gamma)^2 = 1. \quad (8-56a)$$

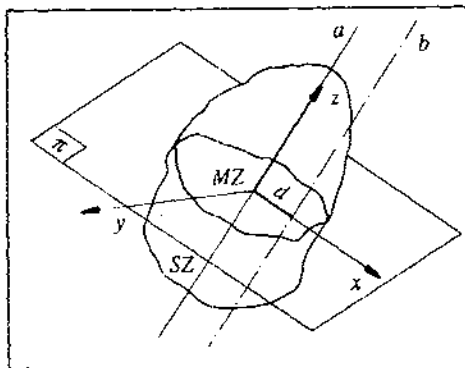
Beraz, azkenean hauxe geratuko zaigu:

$$I_e = I_1\alpha^2 + I_2\beta^2 + I_3\gamma^2. \quad (8-56b)$$

Formula honi *Poinsot-en formula* deritzo, eta dakusagunez, beronen bidez e ardatzarekiko inertzia-momentua kalkula daiteke.

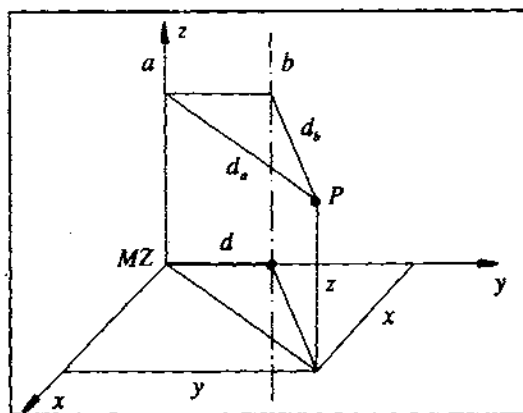
8.7.5. Steiner-en formula

Formula honen bidez bi ardatz paralelorekiko inertzia-momentuen arteko erlazioa adierazten da. Zehazki, bi ardatzetako bat masa-zentrotik pasatzen da (8.14. irudia).



8.14. irudia. Steiner-en formularen azalpena.

8.14. irudian ageri den bezala, a ardatza masa-zentrotik pasatzen da eta b ardatza a ardatzaren paraleloa da. Bien arteko distantzia d da. Izatez, I_a eta I_b erlazionatu nahi ditugu. π plano a eta b ardatzen perpendikularra da.



8.15. irudia. a eta b ardatzak erreferentzia-sistema egokian.

Problemaren formulazioa errazteko, a ardatza Oz ardatz gisa hartuko dugu, O puntua masa-zentroa izanik (8.15. irudia). Gainera, Ox eta Oy ardatzak planoko edozein ardatz perpendikular izan daitezke, baina, berriro ere errazteko, Oy ardatza a eta b zuzen paraleloek osatzen duten planoan hartuko dugu. (Egindako errazketek ez diote orokortasunik kenduko gure problemari).

Honela eginik eta P delakoa solidoaren edozein puntu izanik, puntu honetatik a eta b ardatzetara dauden distantziak ondokoak dira,

$$d_a = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (8-57a)$$

$$d_b = \sqrt{x^2 + (y-d)^2}, \quad (8-57b)$$

eta inertzia-momentuak,

$$I_a = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \omega_y \sum_i m_i d_{ai}^2, \quad (8-58a)$$

$$\begin{aligned} I_b &= \sum_i m_i d_{bi}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d) = \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_i m_i d^2 - 2d \sum_i m_i y_i. \end{aligned} \quad (8-58b)$$

Hemen $\sum_i m_i y_i = 0$ da, jatorria masa-zentroan baitago. Beraz,

$$I_b = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \left(\sum_i m_i \right). \quad (8-59)$$

Azkenean hauxe dugu:

$$I_p = I_o + Md^2. \quad (8-60)$$

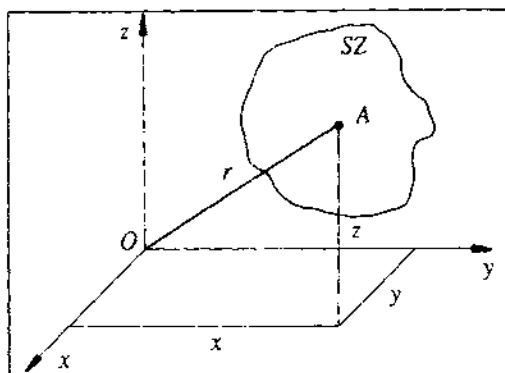
Adierazpen horri *Steiner-en formula* deritzo.

8.7.6. Inertzia-momentu polarra

Bukatzeko, kalkulu askotan lagungarria gertatzen den magnitude berri bat definituko dugu: *puntu batekiko inertzia-momentu polarra*.

Demagun 8.16. irudiko solido zurruna. Ondoko eran definituko dugu O puntuarekiko (jatorriarekiko) inertzia-momentu polarra:

$$I_{pO} \equiv \int_M r^2 dm. \quad (8-61)$$



8.16. irudia. O puntuarekiko inertzia-momentu polarra definitzeko magnitudeak.

Ikus daitekeenez, inertzia-momentuen antzera definitu dugu, baina ardatz baterako distantziak jarri ordez, puntu baterako distantziak jarritz. Hortaz, hauek idatz ditzakegu:

$$I_{pO} = I_z + \int_M z^2 dm, \quad (8-62a)$$

$$I_{pO} = I_y + \int_M y^2 dm, \quad (8-62b)$$

$$I_{pO} = I_x + \int_M x^2 dm, \quad (8-62c)$$

eta hirurak atalez atal batuz,

$$3I_{pO} = I_x + I_y + I_z + I_{pO}, \quad (8-63)$$

hau da,

$$I_{pO} = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z). \quad (8-64)$$

Formula honek erraztu egiten du zenbait inertzia-momenturen kalkulua.

8.7.7. Adibidea

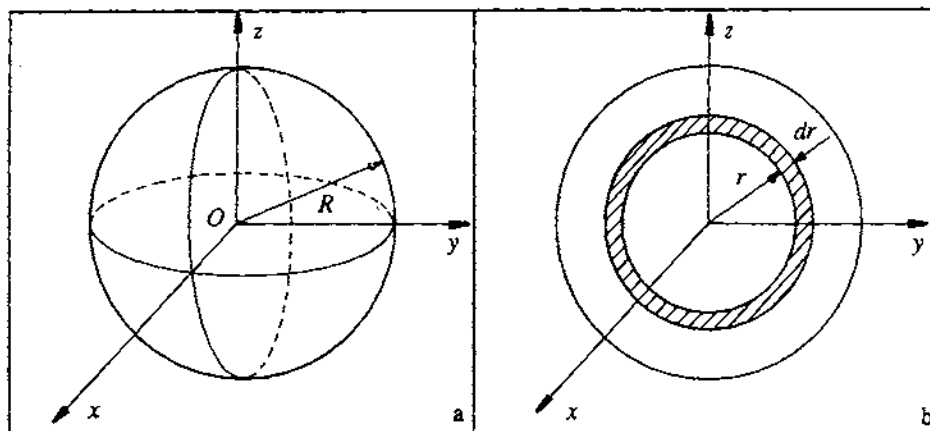
Esfera homogeneo batek bere zentrotik pasatzen den ardatz batekiko duen inertzia-momentua kalkulatu dugu adibide modura.

8.16. irudian ikus daitekeenez, simetria,

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}.$$

Beraz,

$$I_{po} = \frac{1}{2} 3I_{xx} \rightarrow I_{xx} = \frac{2}{3} I_{po}.$$



8.17. irudia. Esferaren inertzia-momentuaren kalkulurako gaiak.

Lehenengo, ba, ardatzen jatorriarekiko inertzia-momentu polarra kalkulatu dugu. Horretarako, dm elementu gisa, r erradiodun eta dr lodieradun azal esferikoa hartuko dugu (8.17.b),

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Honelatan, ba, hauxe izango da inertzia-momentu polarra:

$$I_{po} = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \rho 4\pi \int_0^R r^4 dr = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right) R^2 = \frac{3}{5} MR^2.$$

Azkenean, aurreko emaitza erabiliz, ardatzarekiko inertzia-momentua ondokoa izango da:

$$I_{xx} = \frac{2}{3} I_{po} = \frac{2}{5} MR^2.$$

9. gaia

Solido zurrunaren dinamika

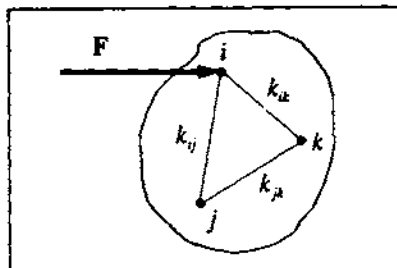
Aurreko gaian solido zurrunaren definizioa eman dugu, eta, bide batez, solidoaren azterketa dinamikorako beharrezkoak diren magnitude berezi batzuk definitu eta aztertu ditugu, hala nola inertzia-tentsorea, inertzia-momentuak eta beste. Halaber, solidoaren abiaduren eremua aztertu dugu, hitz batez, *solido zurrunaren zinematika*. Baina abiadura horiek eta berorien aldakuntzak (azelerazioak alegia) ez ditugu solidoaren gainean eragiten ari diren indarrek in erlazionatu. Hauxe da, hain zuzen, oraingo gai honetan *solido zurrunaren dinamika* aztertzean egingo duguna.

9.1. SOLIDOAREN DINAMIKAREN EKUAZIOAK. INDARREN SISTEMAREN TORTSOREA

Azter ditzagun, lehenik eta behin, solidoan eragiten duten indarren portaera eta eragina. Indar batek solidoaren puntu batean eragitean, puntu horren higidura aldatzeko joera du. Baina solidoaren partikulen arteko distantziek konstanteak izan behar dutenez, partikula guztiak indar horren eraginpean geratzen dira. Hau da, $\mathbf{F}$ indarrak i partikulan eragiten badu,

$$|\mathbf{F}_{ij}| = k_{ij} \quad \text{eta} \quad |\mathbf{F}_{ik}| = k_{ik} \quad (9-1)$$

lotura-baldintzak bete behar direnez, indarraren eragina j eta k partikuletara ere hedatzen da (9.1. irudia).



9.1. Irudia. i puntuan zuzenki diharduen indarrak j eta k puntuetan ere eragiten du.

Hori dela eta, berezia gertatzen da solidoaren dinamika, beste partikula-sistemenarekin konparatuz, eta horregatik kasu honetan teknika bereziak erabiltzen dira higiduraren azterketarako, hala nola inertzia-tentsorea eta beste.

Edozein modutan, gainezarmenaren printzipioan oinarrituz eta indarrak kurtsoak direla kontuan hartuz, indar-sistemaren eragina aztertzean, 2.4. atalean kurtso-sistemak aztertzean ikusi genuen biltze-modua erabili behar dugu. Hau da, indar-sistema osoa solidoaren edozein puntutara laburbil daiteke, puntu horretan indar erresultantea ($\mathbf{F}$) eta momentu erresultantea ($\boldsymbol{\tau}$) emanik.

Kurtso-sistemen propietateak (ikus 2. gaia) kontuan edukiz, $\mathbf{F}$ eta $\boldsymbol{\tau}$ direlakoek ondoko berezitasunak dituztela esan dezakegu:

- $\mathbf{F}$ delakoa espazioko aldaezin bektoriala da.
- $\boldsymbol{\tau}$ aldatuz doa puntuaren arabera. Kasurako $\boldsymbol{\tau}_A$ delakoa A puntuarekiko momentua izanik, B puntuarekikoak balio hau izango du:

$$\boldsymbol{\tau}_B = \boldsymbol{\tau}_A + \mathbf{F} \times \vec{AB} = \boldsymbol{\tau}_A + \mathbf{F} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \quad (9-2)$$

- $\mathbf{F}$ -ren norabidea duten zuzenak, $\boldsymbol{\tau}$ bereko puntuen leku geometrikoak dira.
- $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}$ biderkadura espazioko aldaezin eskalarra da.
- Ardatz zentrolean $\boldsymbol{\tau}$ minimoa da eta $\mathbf{F}$ -ren norabidea du.
- $\boldsymbol{\tau}$ eta $\mathbf{F}$ bikoteak *tortsore* izeneko multzoa osatzen du. Tortsore honek definitzen du solidoaren dinamika, solidoak dituen loturekin batera.

Honelatan, ba, solido zurrunaren dinamika aztertzeko, *indar-sistemaren tortsorea* kontsideratu beharko dugu; hots, *higiduraren aldakuntzen sortzailea* $\boldsymbol{\tau}$ eta $\mathbf{F}$ bektoreek osaturiko *tortsorea* izango da.

Ikus dezagun orain nolako eragina duen tortsoreak. Solido zurruna, berez, partikula-sistema bat da. Beraz, 7. gaian partikula-sistemei buruz emandako legeak beteko ditu. Erreferentziakotzat inertzia-sistema bat hartzen badugu, 7.2. eta 7.4. ataletan adierazitako legeak beteko dira; hau da, alde batetik:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{MZ}}{dt} = M\mathbf{a}_{MZ}. \quad (9-3)$$

Beste alde batetik, ondoko erlazioa beteko dute ardatzen jatorriarekiko momentu angeluarak ($\mathbf{L}$ delakoak) eta indarren momentuak ($\boldsymbol{\tau}$ delakoak):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (9-4)$$

Bi ekuazio horiek dira solido zurrunaren —eta beste edozein sistemaren— dinamika (hau da, denborarekiko eboluzioa edo higidura, azken batez) arautuko duten oinarriko ekuazioak.

9.1.1. Masa-zentroarekiko ekuazioak

Aurreko ekuazio biak inertzia-sistema baten jatorriarekiko idatzirik daude. Hala ere, askoz ere praktikoago gertatzen da ekuazio horiek masa-zentroarekiko idaztea, eta horixe da orain egingo duguna. Bi kasu aztertuko ditugu:

a) $\mathbf{F} = 0$ denean. Kasu honetan,

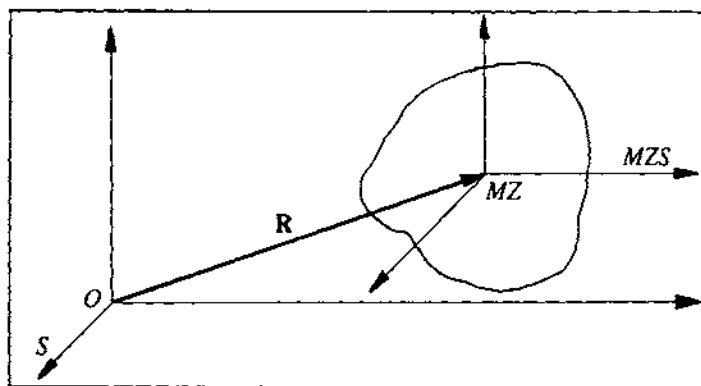
$$M\mathbf{a}_{MZ} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_{MZ} = 0. \quad (9-5)$$

Beraz, jatorria masa-zentroan edukiz inertzia-sistemako ardatzen ardatz paraleloak dituen erreferentziazko sistema —7. gaian C deituriko sistema— sistema inertziala da. Beraz, masa-zentroarekiko

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} \quad (9-6)$$

erlazioa beteko da (aurreko gaiko notazioa erabilirik).

b) $\mathbf{F} \neq 0$ denean. Kasu honetan masa-zentroarekin doan sistema ez da inertziala; hori dela eta, ezin aplika dezakegu lehengo metodoa. Dena den, ondoko arrazonomenduz ikusiko dugunez, ondorio berdintsura helduko gara.



9.2. irudia. S sistema inertziala da. MZS ez da inertziala, baina S sistemarekiko paraleloki gigitzen ari da.

Bi sistemetako ardatzak elkarren paraleloak dira binaka; S sistema inertziala da, MZS , ordea, ez da inertziala, jatorriak (MZ -k) azelerazioa baitu. Beraz, S sistema inertzialaren jatorriarekiko momentuei dagokienez,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (9-7)$$

da. Baina $\mathbf{L}$ eta $\boldsymbol{\tau}$ ondoko moduan daude erlazionaturik $\mathbf{L}'$ eta $\boldsymbol{\tau}'$ direlakoekin:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{L}', \quad (9-9)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{F} \times \mathbf{R}, \quad (9-9)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{R} \times \mathbf{F}. \quad (9-10)$$

(9-8) denborarekiko deribatuz,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times M\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{L}'}{dt}. \quad (9-11)$$

Bestalde,

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} \quad (9-12)$$

denez,

$$\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{V} \times \mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (9-13)$$

Beraz, aurreko (9-11) adierazpenera eramanik,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{M}\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \frac{d\mathbf{L}'}{dt}. \quad (9-14)$$

(9-7) eta (9-10) kontuan hartuz, azkenean hauxe dugu:

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}. \quad (9-15)$$

Hots, adierazpen hau beti betetzen da, masa-zentroa abiadura konstantez zein azelerazioz higitu arren. Baldintza bakarra ondokoa da, alegia, masa-zentroarekin doazen ardatzek ez dezatela birarik egin. Bi kasutan aztertutakoa laburbilduz, puntu honetan solido zurrunaren oinarritzko ekuazioak aztertu ditugu. Hauexek dira preseski:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{A}. \quad (9-16a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{edo} \quad \boldsymbol{\tau}' = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}. \quad (9-16b)$$

Dena den, ekuazio horiek ez dira lehen ikustaldi batean pentsa litekeen bezain sinpleak. Zailtasunen iturria, solido zurrunaren kasuan momentu angeluarrak abiadura angeluarraren funtzioan hartzen duen forma da. Izan ere, aurreko gaitik dakigunez,

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} \quad (9-17)$$

da. Hemen, $\bar{\mathbf{I}}$ delakoa inertzia-tentsorea da (ez da, beraz, eskalar bat), eta horrela $\mathbf{L}$ eta $\boldsymbol{\omega}$ bektoreak ez dira zertan norabide berekoak izanik. Hori dela eta, kalkuluak korapilatu egiten dira kasurik orokorrean.

Guk, lehen maila honetan, zenbait kasu berezi aztertuko ditugu, adibide gisa. Horien artean, biraketa askea eta ardatz finkoaren inguruan biratzen ari den solidoa aukeratu ditugu. Ikusiko dugunez, kasu horietan kalkuluak erraztu egingen dira neurri batez.

Edozein modutan, eta solidoaren dinamika aztertzen ari garenez, oso baliagarria gertatuko zaigu solidoaren energia zinetikoak abiadura angeluarraren funtzioan hartzen duen adierazpena ikustea, eta horixe da hurrengo puntuan egingo duguna.

9.2. SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA ZINETIKOA

Solido zurruna partikula-sistema bat denez, ondoko eran adierazten da beraren energia zinetikoa masa-zentroaren koordinatuen eta masa-zentroko sistemaren bidez (ikus 7.5. atala):

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2. \quad (9-18)$$

Masa-zentroaren sistema paraleloarekiko (*MZS*-rekiko) energia zinetikoa adierazten duen bigarren gaia E'_k letraz izendatuko dugu:

$$E'_k \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2. \quad (9-19)$$

Kalkula dezagun, ba, E'_k -ren balioa. Gorputza solido zurruna denez, 8.4. atalean ikusita-koaren arabera,

$$\mathbf{v}_i' \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i' \quad (9-20)$$

da, masa-zentroaren abiadura nulua baita masa-zentroaren sisteman. Bestalde,

$$v_i'^2 = \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_i' = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i'), \quad (9-21)$$

eta ondoko berdintza kontuan edukiz,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (9-22)$$

hauxe dugu:

$$v_i'^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i') = \omega^2 r_i'^2 - (\omega_x x_i' + \omega_y y_i' + \omega_z z_i')^2. \quad (9-23)$$

E'_k -ren adierazpenean ordezkatzuz, honelaxe idatz dezakegu azkenean solido zurrunak masa-zentroarekiko duen energia zinetikoa:

$$E'_k = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2I_{xy} \omega_x \omega_y + 2I_{xz} \omega_x \omega_z + 2I_{yz} \omega_y \omega_z). \quad (9-24)$$

Dena den, aukeratu dugun erreferentzia-sistema masa-zentrotik pasatzen den edozein izan daiteke. Bete behar duen baldintza bakarra hauxe da, alegia, erreferentzia-sistema inertzial batekiko birarik ez egitea. Ardatzak inertzia-ardatz nagusiak badira, E'_k -ren adierazpena itxura honetakoa da, aurreko gaiko notazioa erabiliz (ikus 8.5. atala):

$$E'_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2), \quad (9-25)$$

hemen

$$I_{x_0 x_0} = I_1, \quad I_{y_0 y_0} = I_2, \quad I_{z_0 z_0} = I_3, \quad \omega_{x_0} = \omega_1, \quad \omega_{y_0} = \omega_2, \quad \omega_{z_0} = \omega_3 \quad (9-26)$$

deituz, eta bestalde

$$I_{x_0 y_0} = I_{x_0 z_0} = I_{y_0 z_0} = 0 \quad (9-27)$$

direla kontuan hartuz.

Edozertara, ikusi berri dugun ardatz nagusiei buruzko adierazpena erabiltzen da ia beti. Kasu honetan, ba, demagun $\boldsymbol{\omega}$ bektoreak ardatz nagusi baten norabidea duela etengabe (adibidez $O'x_0$ ardatzarena). Orduan,

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{x_0} = \omega \\ \omega_2 &= \omega_{y_0} = 0 \\ \omega_3 &= \omega_{z_0} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E'_k = \frac{1}{2} I_1 \omega^2. \quad (9-28)$$

Biraketa-ardatza nagusia ez bada, $E_k = 1/2(I_c \omega^2)$ da eta Poinso-en formulaz erraz lor daiteke I_c . Dakusagunez, kasu horretan oso adierazpen erraza ageri da energia zinetiko osoa adierazteko:

$$E_k = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2. \quad (9 - 29)$$

9.2.1. Energia zinetikoa eta lana

Bukatzeko, azter dezagun sistemaren gainean egiten den lanaren eta energia zinetikoaren arteko erlazioa. 7.5. atalean ikusi genuenez, edozein partikula-sistemaren kasuan ondokoa idatz dezakegu:

$$W_{\text{kampo}} + W_{\text{barne}} = E_{k,B} - E_{k,A}. \quad (9 - 30)$$

Baina solidoak dituen loturak kontuan harturik, $W_{\text{barne}} = 0$ izango da, hots,

$$W_{\text{kampo}} = \sum_i \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = 0, \quad (9 - 31)$$

zeren, $\mathbf{F}_{ij}$ eta $\mathbf{r}_{ij}$ elkarren paraleloak direnez eta $|\mathbf{r}_{ij}| = c_{ij}$ denez, $\mathbf{F}_{ij}$ eta $d\mathbf{r}_{ij}$ perpendikularrak baitira, eta, beraz, $\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = 0$ baita. Honelatan, ba,

$$W_{\text{kampo}} = E_{k,B} - E_{k,A}. \quad (9 - 32)$$

Bestalde, kanpo-indarrak kontserbakorrak direneko kasuan,

$$W_{\text{kampo}} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad (9 - 33)$$

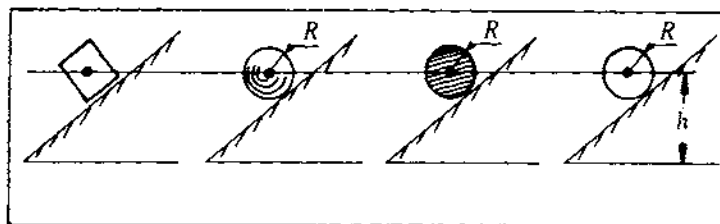
idatz dezakegu, eta azkenik, energia mekanikoari dagokionez,

$$(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = E. \quad (9 - 34)$$

Horixe da solido zurrinari dagokion energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioa, E_p delakoa kanpo-indarrei dagokien energia potentziala izanik.

9.2.2. Adibidea

Masa bereko kuboak, esfera, zilindroak eta eraztuna aldaia berberean behera askatu dira, altuera beretik eta aldiune berean (9.3. irudia). Kuboa labaintzen ari da, marruskadurarik gabe. Beste hirurak errotatzen ari dira energiari galduta gabe. Zein ordenatan helduko dira behera?



9.3. irudia. Lau gorputzak modu berean askatu dira.

9.1. taula

kuboa	esfera	zilindroa	eraztuna
$E_k = \frac{1}{2} MV^2$	$I_{MZ} = \frac{2}{5} MR^2$	$I_{MZ} = \frac{1}{2} MR^2$	$I_{MZ} = MR^2$
	$\omega = \frac{V}{R}$	$\omega = \frac{V}{R}$	$\omega = \frac{V}{R}$
	$E_k = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_{MZ} \omega^2$	$E'_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \frac{V^2}{R^2}$	$E'_k = \frac{1}{2} \left(MR^2 \right) \frac{V^2}{R^2}$
	$E_k = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} MR^2 \frac{V^2}{R^2}$	$E'_k = \frac{1}{4} MV^2$	$E'_k = \frac{1}{2} MV^2$
	$E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) MV^2$	$E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) MV^2$	$E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) MV^2$
$E_k = \frac{1}{2} MV^2$	$E_k = \frac{7}{10} MV^2$	$E_k = \frac{3}{4} MV^2$	$E_k = MV^2$

9.1. taulan adibideko gorpuzte dagozkien energia zinetikoen adierazpenak jarri dira masa-zentroaren abiaduraren funtzioan, balio horiek lortzeko metodoa azalduz. Beraz, taulako emaitzak kontuan hartuz, masa-zentroko abiadura berbera edukiz, ondoko eran sailkatuko genituzke energia zinetikoak, txikienetik handienara:

$$E_{k, \text{kuboa}} < E_{k, \text{esfera}} < E_{k, \text{zilindroa}} < E_{k, \text{eraztuna}} \quad (9-35)$$

Azter dezagun orain energiaren kontserbazioa. Lan egiten duen kanpo-indar bakarra grabitatearena da (hau da, kontserbakorra). Beraz, $E_p = 0$ aldaparen behealdean hartuz,

$$E = E_p + E_k = \underbrace{Mgh + 0}_{\text{goian}} = \underbrace{0 + E_k}_{\text{behean}} \quad (9-36)$$

Kasu guztietan, behean gorputzak duen energia (E_k) hauxe da:

$$E_k = Mgh. \quad (9-37)$$

Ondorioz, behera heltzean honelaxe sailkatu ahal izango ditugu abiadurak, txikienetik handienara:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kuboa : } \frac{1}{2} MV_k^2 = Mgh \\ \text{esfera : } \frac{7}{10} MV_e^2 = Mgh \\ \text{zilindroa : } \frac{3}{4} MV_z^2 = Mgh \\ \text{eraztuna : } MV_{er}^2 = Mgh \end{array} \right\} V_k > V_e > V_z > V_{er}. \quad (9-38)$$

Eta sailkapen honek edozein altueratarako balio du. Hortaz, kuboa helduko da lehena, esfera bigarrena, zilindroa hirugarrena eta eraztuna azkena.

9.3. BIRAKETA ASKEA

Solidoaren gainean inolako indarrik ez momenturik eragiten ez badu ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$) solido hori libreki biratzen ari dela diogu. Kasu honetan ondoko ekuazioak betetzen dira; batetik:

$$\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{V} = \text{ktea.} \quad (9-39)$$

Beraz, masa-zentroa abiadura konstantez ari da higitzen, eta bertan erreferentzia-sistema inertziala aukera dezakegu. Bestetik,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L} = \text{ktea.} \quad (9-40)$$

Gainera, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ denez, $\boldsymbol{\tau}$ momentuak edozein puntutan balio du zero. Hortaz, edozein punturekiko momentu angeluarrak ere konstante dira.

Energiari dagokionez, kanpo-indarrik ez dagoenez,

$$W_{\text{kanpo}} = 0. \quad (9-41)$$

Ondorioz,

$$E_k = \text{ktea} \quad (9-42)$$

da, hots, energia zinetikoak konstante dira.

Hiru ekuazio horiek dira, hortaz, solidoaren higidura askearen onarritzko ekuazioak. Horiek erabiliz ebazten da problema.

Ekuazio horietan oinarriturik, azter dezagun $\mathbf{L}$ -ren eta $\boldsymbol{\omega}$ -ren arteko erlazioa. Daki-gunez,

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}. \quad (9-43)$$

Baina hemen $\bar{\mathbf{I}}$ delakoa inertzia-tentsorea da, hots, ez da eskalar bat. Eta aurreko gaian ikusi genuenez —ikus 8.4. atala—, oro har, $\mathbf{L}$ -k eta $\boldsymbol{\omega}$ -k norabide desberdinak dituzte. Gainera, solidoa higitzen ari denez, $\bar{\mathbf{I}}$ tentsorearen elementuak ere aldatuz doaz. Horrela, $\mathbf{L}$ bektorea konstantea izan arren, kasu orokorrean $\boldsymbol{\omega}$ ez da konstantea izango.

Hala ere, lehen uneko biraketa-ardatza inertzia-ardatz nagusia bada, adibidez, $O'x_0$ ardatza, ondokoa idatzi ahal izango dugu:

$$\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\omega}. \quad (9-44)$$

Hemen $I_1 = I_{\text{tot}}$ delakoa inertzia-momentu nagusia da. Eta definizioz, $\boldsymbol{\omega}$ eta $\mathbf{L}$ bektoreak norabide berekoak dira.

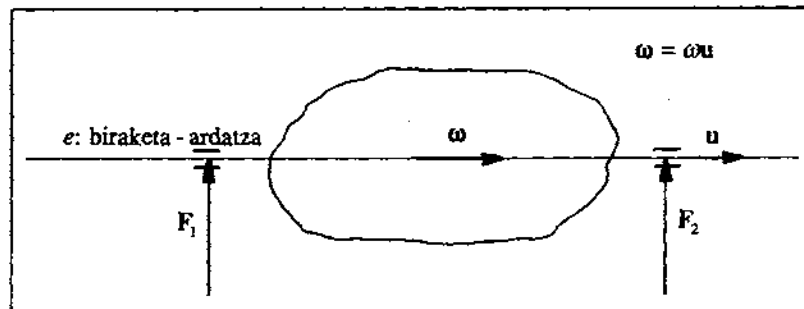
Bestalde, $\mathbf{L} = \text{ktea}$ denez, ez dago arrazoi berezirik $\boldsymbol{\omega}$ -k ere konstante iraun ez dezan. Beraz, baldintza horiek beteaz,

$$\boldsymbol{\omega} = \text{ktea.} \quad (9-45)$$

Dena dela, ikusi dugunez, $\boldsymbol{\omega}$ bektorea konstante izan dadin, lehen uneko higidura angeluarra inertzia-ardatz nagusi baten inguruan gertatu behar da.

9.4. ARDATZ FINKOAREN INGURUAN BIRATZEN ARI DEN SOLIDOAREN HIGIDURA

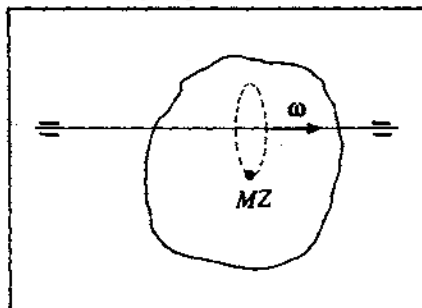
Kasu honetan, kanpo-indarren bidez, behartu egiten da solidoa ardatz finko baten inguruan biratzera. Beraz, biraketa hau ez da askea izango, eta oro har $F \neq 0$ eta $\tau \neq 0$ izango dira.



9.4. irudia. Ardatz finkoaren inguruan biratzera beharturiko solido zurruna.

Alboko irudian F_1 eta F_2 bektoreek ardatzaren euskarrietan egiten diren indarrak adierazten dituzte (hemen kasu sinpleena aukeratu dugu, hau da, marruskadurarik gabe biratzen ari den solidoarena). Horiez gain, bestelako indarrek ere eragin dezakete, hala nola grabitatearenak. Zer esanik ez, nahiz eta irudian e ardatza horizontalki irudikatu dugun, biraketa-ardatzak edozein norabide eduki dezake.

Azterketan 9.1. ataleko ekuazio berberak erabili behar dira, kasu orokorrean $F \neq 0$ eta $\tau \neq 0$ direla kontuan hartuz. Ikus ditzagun gerta daitezkeen zenbait kasu berezi.



9.5. irudia. Masa-zentroa biraketa-ardatzean ez dagoeneko kasua.

9.4.1. Masa-zentroa ez dago biraketa-ardatzean

Masa-zentroak ibilbide zirkularra du; beraz,

$$A = a_{MZ} \neq 0. \quad (9-46)$$

Solidoaren gaineko indar guztien erresultantea (kanpokoak eta ardatzari eusten diotenak kontuan hartuz) honelaxe erlazionatuko da masa-zentroaren azelerazioarekin:

$$F = Ma_{MZ} \neq 0. \quad (9-47)$$

Kasu honetan korapilatu egiten da higiduraren azterketa, eta ez gara hemen horretaz luzatuko. Soilik aipatu, ardatza 'estatikoki orekaturik' ez dagoela esaten dela eta teknikako

9.4.2. Masa-zentroa biraketa-ardatzean dago

Kasu honetan,

$$\mathbf{a}_{M/Z} = \mathbf{0} \quad (9 - 48)$$

da, eta, ondorioz, solidoaren gaineko indar erresultantea nulua da, hots,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_{M/Z} = \mathbf{0}. \quad (9 - 49)$$

Nola interpreta daiteke hori? Honela: nahiz eta kanpo-indarrak eragiten egon, euskarriek egiten dituzten indarrek ($\mathbf{F}_1$ eta $\mathbf{F}_2$ direlakoek) orekatu egiten dute sistema – indarrei dagokienez – eta erresultantea nulua da. Sistema *estatikoki orekanurik* dagoela esaten da.

Indarren erresultantea nulua izan arren, momentuak ez du zertan nulua izanik. Edozein modutan, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ denez, $\boldsymbol{\tau}$ aldacizina da eta balio bera du espazioko edozein punturekiko. Kasu honetan bi azpikasu berezi aztertuko ditugu:

a) Biraketa-ardatza inertzia-ardatz nagusia da

Ardatz nagusia izanik,

$$\mathbf{L} = I_c \boldsymbol{\omega} = I_c \omega \mathbf{u}, \quad (9 - 50)$$

Bestalde,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I_c \omega \mathbf{u})}{dt} = I_c \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u}, \quad (9 - 51)$$

zeren I_c eta $\mathbf{u}$ konstanteak baitira.

Azelerazio angeluarraren definizioaren arabera,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}. \quad (9 - 52)$$

Beraz, era honetan erlazioa dezakegu bektorialki indarren momentua azelerazio angeluarrarekin:

$$\boldsymbol{\tau} = I_c \alpha \mathbf{u}. \quad (9 - 53)$$

Hemendik bi ondorio atera daitezke:

- Euskarrietako indarrek hartzen dituzten balioei esker, $\boldsymbol{\tau}$ momentuak biraketa-ardatzaren norabidea du.
- Indarren momentuaren moduluak ondoko erlazioa du solidoaren azelerazio angeluarrarekin:

$$\tau_c = I_c \alpha. \quad (9 - 54)$$

Bukatzeko, ikus dezagun $\tau_c = 0$ denean gertatzen dena:

$$\tau_c = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \omega = \text{ktea}. \quad (9 - 55)$$

Prozesu hau alderantziz ere azter daiteke, hau da, aztertzen ari garen kasuan,

$$\omega = \text{ktea} \Rightarrow \tau_c = 0. \quad (9 - 56)$$

Masa-zentroa biraketa-ardatzean egonik, horrez gain biraketa-ardatza inertzia-ardatz nagusia denean, ardatz finkoaren inguruan biratzen ari den solidoa *dinamikoki orekaturik* dagoela esaten da.

Hemen zergatikoa azalduko ez dugun arren, diogun ezen, ardatza dinamikoki orekaturik dagoenean, euskarrietan egiten diren indarrek ez dutela biraren abiadura angeluarraren menpekotasunik eta, abiadura angeluarra edozein izanik, balio bera dutela. Horregatik, makina eta motor guztietako errotoreak orekatu egiten dira dinamikoki (eta, lehen esandakoaren arabera, estatikoki ere).

b) Biraketa-ardatza ez da inertzia-ardatz nagusia

Momentu angeluarraren eta abiadura angeluarraren arteko erlazioa hauxe denez,

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}, \quad (9-57)$$

oraingoa $\mathbf{L}$ -k eta $\boldsymbol{\omega}$ -k norabide desberdinak dituzte.

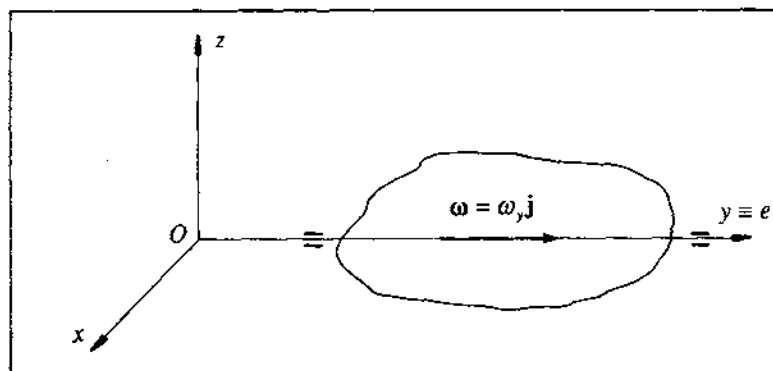
Dinamikaren ekuazioa hauxe denez,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (9-58)$$

momentuak e ardatzaren norabidean duen osagaia kontsideratuz, ondokoa idatzi ahal izango dugu osagai horri dagokionez (ardatza finkoa baita):

$$\tau_e = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_e = \frac{dL_e}{dt}. \quad (9-59)$$

Ikus dezagun zenbat balio duen L_e delakoak.



9.6. irudia. Biraketa-ardatza inertzia-ardatz nagusia ez deneko kasurako azterketa.

Har dezagun, adibidez, Oy ardatza e ardatzean. Hori eginez,

$$L_e = L_y = I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \quad (9-60)$$

(ikus 8.4. atala). Bistakoa denez, I_{xy} eta I_{yz} inertzia-biderkadurak ageri zaizkigu, Oy delakoa ez baita ardatz nagusia. Baina $\boldsymbol{\omega} = \omega_y \mathbf{j}$ denez ($\omega_x = \omega_z = 0$),

$$L_e = I_{yy}\omega_y = I_e \omega \quad (9-61)$$

Beraz,

$$\tau_e = \frac{dL_e}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt}. \quad (9-62)$$

Hots, kasu honetan ere honelaxe adieraz dezakegu:

$$\tau_e = I_e \alpha_e \quad (9-63)$$

alegia, (9-54) adierazpenaren antzera. Noski, kasu honetan e ardatzarekiko osagaiak baino ez ditugu kontuan hartu adierazpen horretan. Beste norabideetan bestelako erlazio batzuk daude. Horretan datza, hain zuzen, aurreko kasuarekiko desberdintasuna.

9.5. ZENBAIT ADIBIDE

Gai honen azalpenarekin bukatzeko, adibide bi aztertuko ditugu, aipaturiko puntu teori-koak praktikan nola aplikatzen diren ikusteko.

9.5.1. Biraketa askea

Gorputz solido bat indarririk eragiten ez duen eta hutsik dagoen espazioalde batera jaurti da, lehen unean bere masa-zentroak V abiadura izanik, eta abiadura angeluarra ω baliokoa izanik.

- Zein magnitude kontserbatuko dira jaurti ondoren?
- Zein baldintzatan kontserbatuko da ω ?

Argi dagoenez, teorian aztertu dugun biraketa askeari dagokio problema hau, alegia.

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}.$$

Beraz,

$$\mathbf{F} = M\mathbf{A} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{V} = \text{ktea},$$

hau da, masa-zentroaren abiadurak konstante iraungo du. Bestalde,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L} = \text{ktea}.$$

denez, momentu angeluarrak ere konstante iraungo du.

Energiari dagokionez,

$$W_{\text{kampo}} = 0$$

denez,

$$E_k = \text{ktea},$$

hots, gauza bera gertatzen da energia zinetikoarekin.

Kasurik orokorrean ez dago hiru horiez besteko kontserbazio-legerik. Esate baterako, abiadura angeluarrari dagokionez,

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}$$

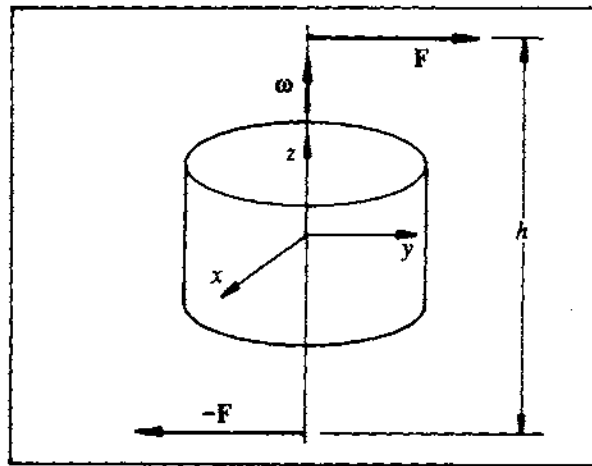
denez, $\mathbf{L} = k\mathbf{\omega}$ den arren, $\mathbf{\omega}$ -k ez du, kasu orokorrean, konstante irauten (ikus 9.3. atala). Hala ere, hasierako $\mathbf{\omega}$ -k ardatz nagusi baten norabidea badu,

$$\mathbf{L} = I_1 \mathbf{\omega}$$

delako kontuan harturik, kasu honetan $\mathbf{L}$ -k eta $\mathbf{\omega}$ -k norabide berbera dutenez, $\mathbf{\omega}$ ere kontserbatu egiten da. Baina horretarako baldintza bat jarri dugula kontura gaitezke.

9.5.2. Disko baten higadura-aldaketaren azterketa

Alboko 9.7. irudian adierazi den diskoa $\mathbf{\omega}$ abiaduraz biratzen ari da e ardatz nagusiaren inguruan. Oreka dinamikoan dagoela, A eta B puntuetan $(\mathbf{F}, -\mathbf{F})$ indar-bikotea aplikatzen da, irudian azaldu den eran. Nolakoak izango da diskoak pairatuko duen higadura-aldaketa?



9.7. irudia. 9.5.2. adibideari dagokion diskoa.

Oreka dinamikoan dagoenez, diskoak duen momentu angeluarra hauex da:

$$\mathbf{L} = I_e \mathbf{\omega} = I_e \omega \mathbf{k},$$

zeren e ardatza inertzia-ardatz nagusia baita.

Bestalde,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

denez, indarren momentua hauex izango da, harturiko erreferentzia-sisteman:

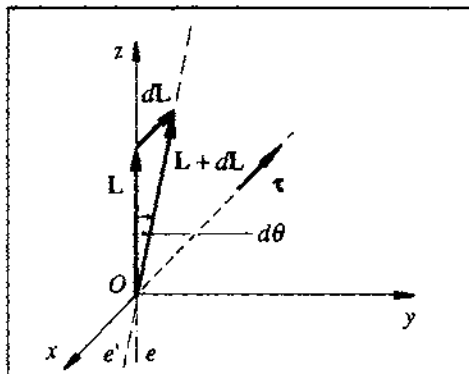
$$\boldsymbol{\tau} = -Fh\mathbf{i},$$

Beraz, momentu hau aplikatzean,

$$-Fh\mathbf{i} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

$$d\mathbf{L} = -Fh d\mathbf{i}.$$

Ikus daitekeenez, momentu angeluarraren aldaketa ($d\mathbf{L}$) momentuaren ($\mathbf{L}$) beraren perpendikularra da, $d\mathbf{L} \perp \mathbf{L}$, eta hori etengabe gertatzean, momentu angeluarra norabidez aldatuko da baina ez moduluz (higidura zirkular uniformeaz azelerazio zentripetuak abiadura norabidea aldatzen duen modu berean). Bestalde, biraketa-ardatza inertiako nagusia izanik, momentu angeluarrak abiadura angeluarraren norabide berbera du, $\mathbf{L} // \boldsymbol{\omega}$. Ondorioz, biraketa-ardatzaren biraketa bat gertatuko da, $d\theta$. Oy ardatzaren inguruan hain zuzen, 9.8. irudian grafikoki ageri denez.



9.8. irudia. Ox norabideko indar-momentuak Oy inguruko biraketa sorrazten du.

Hain zuzen ere, $\mathbf{L} + d\mathbf{L}$ bektoreak $d\theta$ angelua osatuko du $\mathbf{L}$ bektorearekin Oxz planoan. Beraz, diskoaren ardatza Oxz planoan higituko da. Oy ardatzarekiko biratuz. Hori da e ardatzaren higidura.

Ikus daitekeenez, intuitiboki pentsa daitekeenaz bestelakoa da sortzen den higidura. Intuitiboki pentsatuz, lehen ikustaldi batean e ardatzak Ox ardatzaren inguruan biratu beharko duela dirudi; baina kalkuluak eginez, Oy ardatzaren inguruan biratzen duela ikusten da.

10. gaia

Estatika

Puntuaren eta partikula-sistemen dinamika aztertzean, indarren eta higidura-aldaketen arteko erlazioak aipatu ditugu. Orain dinamikaren kasu 'berezi' bat, mugako kasu bat aztertuko dugu: higidurarik ez dagoeneko. Azterketa hau *Estatika* izeneko atalean egiten da. Horixe da, hain zuzen ere, Estatika: «gorputzen pausagunea aztertzen duen *Mekanika-ren atala*». Gai honetan ikusiko dugunez, Estatikaren muina indar-sistemaren orekan datza, bai partikularen kasuan eta bai solido zurrunaren kasuan.

Dena den, higidura kontzeptu erlatiboa dela dakigunez, erlatibotasun hori kontuan eduki beharko dugu. Gainera, Newton-en printzipioak sistema inertzialekiko emanak direnez, kontuan eduki beharko da hori inertiakoak ez diren sistemak erabiltzean. Kasu horretan, 5. gaian ikusi genuen sistema ez-inertzialen dinamikan (5. 9. atala) finkatuko gara, noski, indarrak zehazterakoan.

10.1. PUNTU MATERIAL BATEN OREKA-BALDINTZAK

Bi pausotan aztertuko dugu arazo hau: lehenik, erreferentzia gisa sistema inertzial bat hartuz, eta gero, sistema ez-inertziala kontsideratuz.

10.1.1. Sistema inertziala

Partikula puntualari Newton-en legeak aplikatzen zaizkio. Orekan, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ da; beraz, indarrek bete behar duten baldintza hau da:

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (10-1)$$

Partikula puntual baten gainean eragiten ari direnez, indarrak konkurrenteak dira, konkurrentzia-puntua partikula bera izanik. Beraz, puntu horrekiko:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}. \quad (10-2)$$

Baina baldintza hori ez dugu erabiliko partikularen kasuan, partikularekin beti eta halabeharrez bete behar baita. Honelatan, ba, indar erresultantearen baldintza, (10-1), baino ez dugu. Baldintza hori bektoriala denez, hiru baldintza eskalar ageri dira:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad (10-3a)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad (10-3b)$$

$$\sum_i F_{iz} = 0. \quad (10-3c)$$

Baldintza horretaz gainera —hots, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ —, puntua geldi egon dadin, abiadurak ere nulua izan behar du:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (10-4)$$

Dena den, abiaduraren erlatibotasuna kontuan hartuz, $\mathbf{v} = \mathbf{ktea}$ ere orekatzat hartu behar dugu, kasu honetan ere indar-sistema orekan baitago.

10.1.2. Sistema ez-inertziala

Kasu honetan indar 'benetakoez' gainera, indar 'irudikariak' hartu beharko ditugu kontuan, hau da, *inertzia-indarrak*. Sistema ez-inertzialen dinamika aztertzean (5.9. atala), partikularen higidura arautzen duen ekuazioa ondokoa dela ikusi genuen:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{A} = m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'. \quad (10-5)$$

Estatikan ari garenez, kasu honetan 'estatika erlatiboan',

$$\mathbf{a}' = \mathbf{0}. \quad (10-6)$$

Ekuazio honetan, gaiek ondoko esangura dute. Batetik, $m\mathbf{a}$ edozein sistema inertzialetatik neurtzen den indarra da. 'Benetako' indarra edo indar erresultante 'errealak' dela esan ohi da. Bestalde, $-m\mathbf{A}$, $-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$, $-m\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ eta $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ere kontsideratu behar ditugu, eta hauek guztiok inertzia-indarrak ditugu, kontuan hartu beharrekoak, sistema ez-inertzialean baikeude.

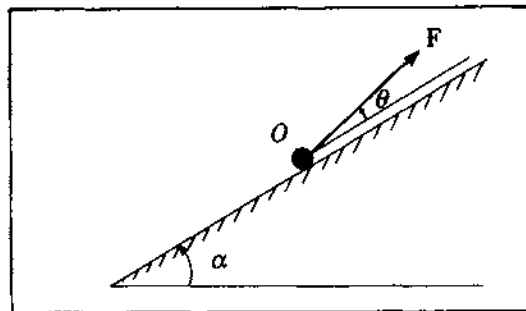
Beraz, estatika ez-inertzialean partikularen oreka-baldintzak hauexek dira:

$$\sum_i \mathbf{F}_{i, \text{benetakook}} + \sum_i \mathbf{F}_{i, \text{irudikariak}} = \mathbf{0}. \quad (10-7)$$

10.1.3. Zenbait adibide

Aurreko lerroetan ikusitakoa hobeki ulertzeko, partikularen estatikari buruzko adibide pare bat jarriko dugu. Lehena, sistema inertzial batekikoa, eta bigarrena sistema ez-inertzial batekikoa.

- «Plano inklinatu batean m masadun partikula bat dago marruskadurarik gabe. Planoak α angelua osatzen du horizontalarekin. Zer modulu eduki behar du planoarekin θ angelua osatzen duen $\mathbf{F}$ indarrak, partikula geldi egon dadin?». (ikus 10.1. irudia).



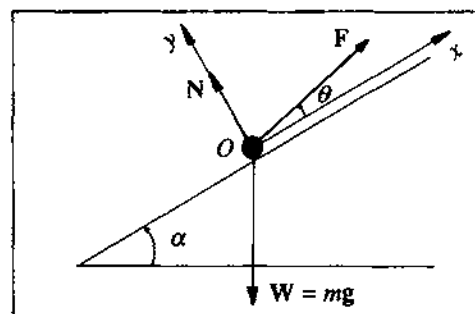
10.1. irudia. Adibideko plano inklinatuko partikula.

10.2. irudian ageri den bezala, eragiten ari diren indarrak (partikularen gainean, noski) hauek dira:

$W = mg$: pisua

N : planoaren normala (marruskadurarik ez baitago)

F : kalkulatu beharreko indarra.



10.2. irudia. Indarren eskema.

Hirurak planokideak eta konkurrenteak dira. Beraz, oreka-baldintzen arabera,

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

Kalkuluak errazteko, irudian ageri den Oxy sistema hartuko dugu erreferentziakotzat. Bertan,

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 &\rightarrow F \cos \theta - mg \sin \alpha = 0, \\ \sum F_{iy} = 0 &\rightarrow N + F \sin \theta - mg \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Bi ekuazioko sistema horretatik, F eta N kalkula ditzakegu. Preseski, lehen ekuaziotik,

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \theta},$$

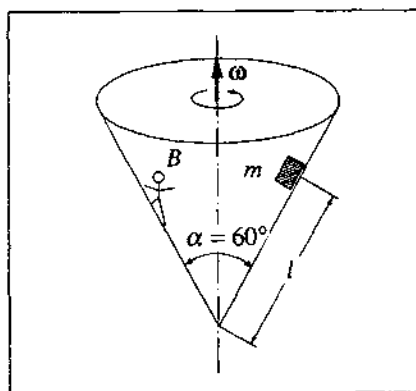
eta bigarrenetik,

$$N = mg \cos \alpha - F \sin \theta = mg \cos \alpha - \frac{mg \sin \alpha \sin \theta}{\cos \theta},$$

$$N = \frac{mg \cos(\alpha + \theta)}{\cos \theta}.$$

Hortaz, problema ebatzita dago.

- «*m* masadun gorputz bat, erpinean $\alpha = 60^\circ$ -ko angelua duen kono baten barnean dago, erpinetik l distantziara. Konoa biraka ari da bere ardatzaren inguruan ω abiadura angeluarraz. Konoaren eta gorputzaren arteko murruskadura-koefiziente estatikoak $\mu = 0,25$ balio du. Zer mugen artean alda daiteke konoaren abiadura angeluarra, gorputza konoarekiko geldi egon dadin?». (Ikus 10.3. irudia).



10.3. irudia. m masadun gorputza ω abiadura angeluarraz biraka dagoen konoaren gainean.

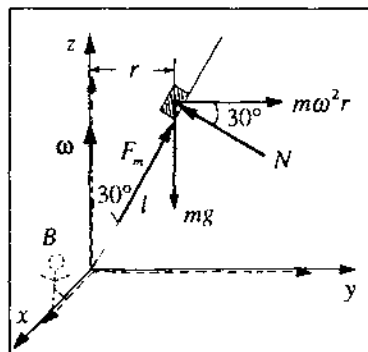
Kasu hau sistema ez-inertzial batekiko estatikarena da. Hain zuzen, ω konstantea dela kontsideratuko dugu, inertzia-indarren kalkulua errazteko.

Beherantz jausten hasten deneko muga aztertuko dugu lehenik. Konoarekin higitzen den behatzaileak (B delakoak) geldirik dakusa m masa. Beraz, indarrak (benetakoak eta inertiakoak) orekan daude, behatzaileak darabilen erreferentzia-sisteman.

Inertzia-indar bakarra indar zentrifugoa da, zeren

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{0}$$

baitira.



10.4. irudia. B behatzaileak (ez-inertziala) kontuan hartu behar dituen indarrak, gorputza beherantz jausten hasteko denean.

Bestalde, marruskadura-indarraren balioa hauxe izango da:

$$F_m \leq \mu N.$$

Zehatzago hitz eginez, beherantz erortzen hasteko mugan, balio hau izango du,

$$F_m = \mu N = 0,25N,$$

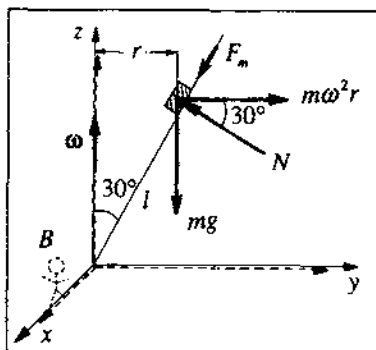
eta gorputza beherantz erortzeko mugan dagoenez, indar horren noranzkoa goranzkoa da, 10.4. irudian ageri den bezala. Guztira, B behatzailearen sistemarekiko oreka-baldintzak hauexek dira:

$$y: m\omega^2 r - N \cos 30 + 0,25N \sin 30 = 0,$$

$$z: -mg + N \sin 30 + 0,25N \cos 30 = 0.$$

Bi ekuazio hauetatik ω eta N kalkula ditzakegu. Hain zuzen, ω honi ω_1 deituko diogu eta behera jausteko muga adierazten du. Kalkuluak eginez, beraren balioa hauxe dela ikus daiteke:

$$\omega_1 = 1,43 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$



10.5. irudia. B behatzaileak (ez-inertziala) kontuan hartu behar dituen indarrak, gorputza gorantz higitzen hasten denean.

Azter dezagun orain gorantz labaintzen hasteko muga. Kasu horretan, gorantz higitzen hasteko muga adierazten ari garenez, F_m delakoak beheranzko noranzkoa edukiko du eta beraren modulua hauex izango da:

$$F_m = \mu N = 0,25N.$$

Dena dela, oraingo normalaren balioa eta lehengoarena desberdinak dira, eta berdin gertatzen da ω -rekin.

Aurreko kasuan eginiko arrazonamenduaren antzerakoaz, oreka-baldintzak hauexek direla ikus daiteke:

$$y: \quad m\omega^2 r - N \cos 30 + 0,25N \sin 30 = 0,$$

$$z: \quad -mg + N \sin 30 + 0,25N \cos 30 = 0.$$

Sistema honetatik ω eta N kalkulatuko ditugu. Oraingo ω honi ω_2 deituko diogu eta goiko muga adieraziko digu. Kasu honetan lortuko dugun emaitza hauex da:

$$\omega_2 = 2,64 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Beraz, partikula geldi egon dadin, abiadura angeluarraren balioak ondoko eran egon behar du mugaturik:

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

10.2. SOLIDO BATEN OREKA-BALDINTZAK

Dakigunez, bi dira solidoaren dinamika arautzen duten ekuazioak:

$$- \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{MZ}. \text{ Indar-erresultanteak translaziozko higidura-aldaketa sortzen du.}$$

$$- \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \text{ Biraketazko higidura-aldaketa sortzen dutenak indar-momentuak dira.}$$

Beraz, oreka lortzeko, bi baldintza behar dira:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad (10-8a)$$

$$\sum_i \boldsymbol{\tau}_i = 0. \quad (10-8b)$$

Zer esanik ez, indar erresultantea nulua bada, indar-momentu erresultanteak balio berbera du puntu guztietan; eta batean nulua bada, beste guztietan ere nulua izango da.

Idatzitako baldintzak bektorialak direnez, izatez, espazioan sei baldintza eskalar ditugu:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0, \quad (10-9a)$$

$$\sum_i \tau_{ix} = 0, \quad \sum_i \tau_{iy} = 0, \quad \sum_i \tau_{iz} = 0. \quad (10-9b)$$

Indar guztiak planokideak direnean, sei baldintza horiek hirutara laburtzen dira. Oxy ardatzak aipaturiko planoan harturik, hiru baldintza hauek ditugu:

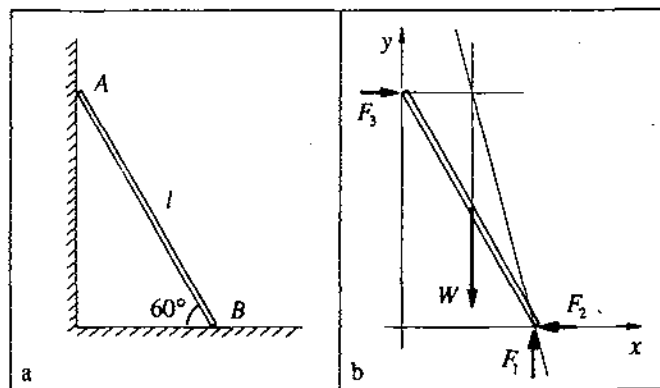
$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad (10-10a)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad (10-10b)$$

$$\sum_i \tau_{iz} = 0, \quad (10-10c)$$

10.2.1. Adibideak

- «*l* luzerako eskailera bat marruskadurarik ez duen horma baten kontra jarri da, horizontalarekin 60° -ko angelua osatuz. Zoluaren marruskadurari esker, eskailera ez da eroriko. Hormak ez du marruskadurarik. Eskaileraren pisua W bada, zenbat balio dute hormak eta zoluak eskailerari egiten dizkioten indarrek?»



10.6. irudia. a) l luzerako eskailera hormaren kontra jarritik. b) Eskaileraren gainean eragiten ari diren indarrak.

10.6.b. irudian eskaileraren gainean eragiten ari diren indarrak adierazi dira:

W pisua (masa-zentroan).

F_1 eta F_2 B puntuan eragiten duen indarraren osagai bertikal eta horizontala. Guzti-
ra, hauxe da zoluak eginiko indarra. Indar horrek ez du normalaren
norabidea, marruskadura baitago.

F_3 A puntuan hormak eginiko indarra. Hormaren perpendikularra da, marrus-
kadurarik ez baitago.

Indar guztiak planokideak dira eta, horregatik, (10-10) ekuazioak erabili beharko ditugu:

$$\sum F_{ix} \rightarrow F_3 - F_2 = 0,$$

$$\sum F_{iy} \rightarrow -W + F_1 = 0,$$

$$\sum (\tau_{iB}) \rightarrow W \frac{l}{2} \cos 60 - F_3 l \sin 60 = 0.$$

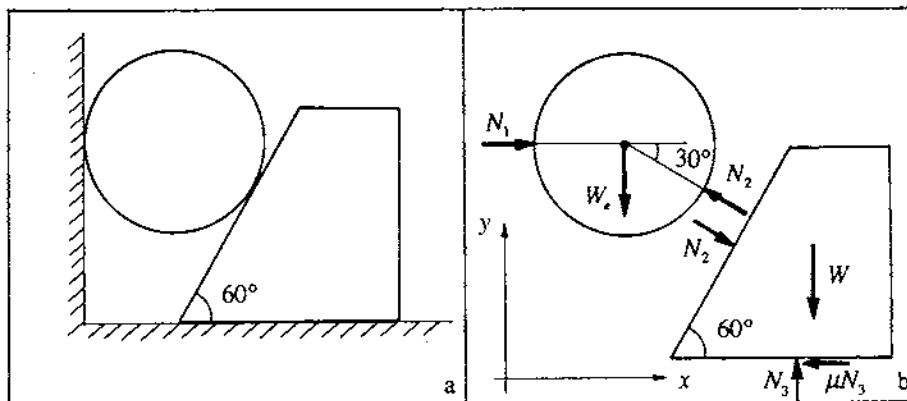
Sistema honetatik F_1 , F_2 eta F_3 kalkula daitezke:

$$F_1 = W,$$

$$F_2 = \frac{W \cot 60}{2} = 0,29W,$$

$$F_3 = \frac{W \cot 60}{2} = 0,29W.$$

- «10.7. irudiko ziriak 10 kg-ko masa du, lurrarekiko duen marruskadura-koefiziente estatikoa $\mu = 0,3$ izanik. Kalkula bedi esferak izan dezakeen masarik handiena, ziria higi ez dadin. Ziria irauliko ez dela onartuko da»



10.7. irudia. a) Ziriak eta esferaz osaturiko sistema. b) Bi solidoen gainean eragiten ari diren indarrak.

Eskuineko 10.7.b. eskeman bi solidoen gainean eragiten ari diren indarrak adierazi dira. Bi solidoek orekan egon behar dute. Azter ditzagun banan-banan.

Esfera. Hiru indarrek konkurrenteak izan behar dute, esfera orekan baitago. Beraz nahikoa da $\sum \mathbf{F}_i = 0$ egitea, alegia,

$$x : N_1 \sin 60 = 0,$$

$$y : N_2 \cos 60 - W_e = 0.$$

Beraz, bi ekuazio ditugu.

Ziria. Irauliko ez dela dakigunez, ez dugu zertan erabilirik $\sum \tau_i = 0$ baldintza.

Irauliko ez dela esateak, azken batez, N_3 delakoak oreka lortzeko behar duen posizioa hartuko duela esan nahi du. Indarrei dagokienez,

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

eginez,

$$\begin{aligned} x : \quad N_1 \sin 60 - \mu N_3 &= 0, \\ y : \quad N_2 \cos 60 + N_3 - W_e &= 0. \end{aligned}$$

Horrela, denetara, lau ezezagun hauek dituzten lau ekuazio ditugu:

$$N_1, N_2, N_3 \text{ eta } W_e.$$

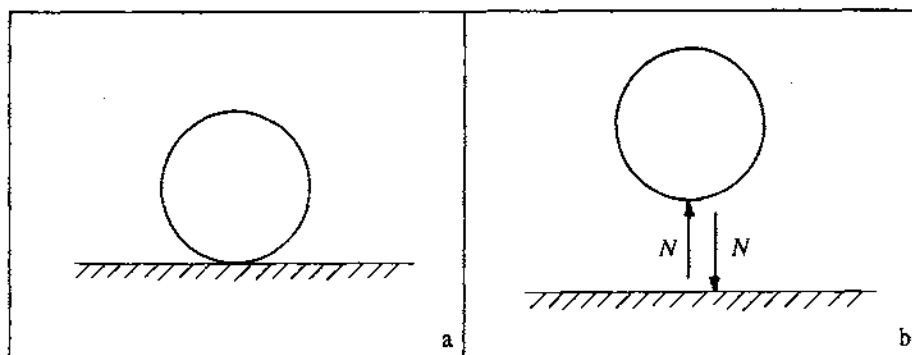
Lau ekuazioetako sistema hori ebatziz, erraz lor dezakegu W_e -ren balioa, eta aldi berean gorputzen arteko ukipen-indarrena ere. Emaitza hauek lortuko dira:

$$\begin{aligned} N_1 &= 3,63 \text{ kg}, & N_2 &= 4,19 \text{ kg}, \\ N_3 &= 12,1 \text{ kg}, & W_e &= 2,1 \text{ kg}. \end{aligned}$$

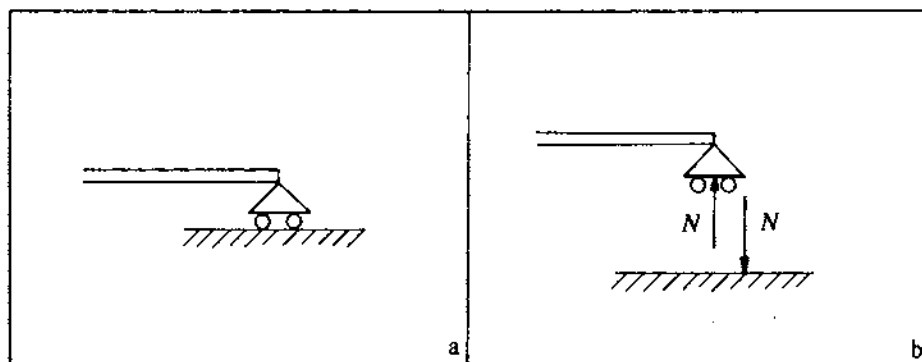
10.3. SOLIDOAK ETA LOTURAK

Solidoek harreman edo lotura bereziak izan ditzakete beste gorputzekin. Lotura horien bidez mugatu egiten da nolabait solidoaren higidura. Edozein modutan, problemak ebazteko, 'kendu' egiten dira loturak eta horien ordezt beste gorputzek loturetan solidoari egiten dizkieten indarrak jartzen dira, 'lotura-indarrak' alegia. Zer esanik ez, lotura-indarrek bete egiten dute akzio-erreakzioaren printzipioa, solidoen arteko ukipenez sortutako indarrak baitira.

Galdera honetan lotura-moten sailkapena egingo dugu, bide batez mota bakoitzari dagozkion lotura-indarrak adieraziz:



10.8. irudia. Marruskadurarik gabeko lotura.



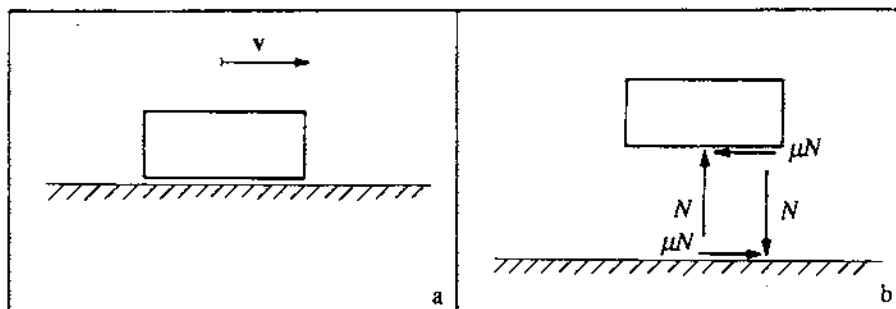
10.9. irudia. Marruskadurarik gabeko lotura.

a) Ukipen hutseko loturak. Bi solido elkar ukitzen ari dira. Ukipen hau marruskaduraz edo marruskadurarik gabe izan daitekeenez, bi azpimota daude.

a.1) Marruskadurarik gabeko ukipena. Kasu honetan lotura-indarrek gainazalen perpendikularren norabidea dute (ikus 10.8. eta 10.9. irudiak).

a.2) Marruskaduradun ukipena. Kasu honetan indarrak ez du normalaren norabidea. Bi osagai jartzen dira (ikus 10.10. irudia):

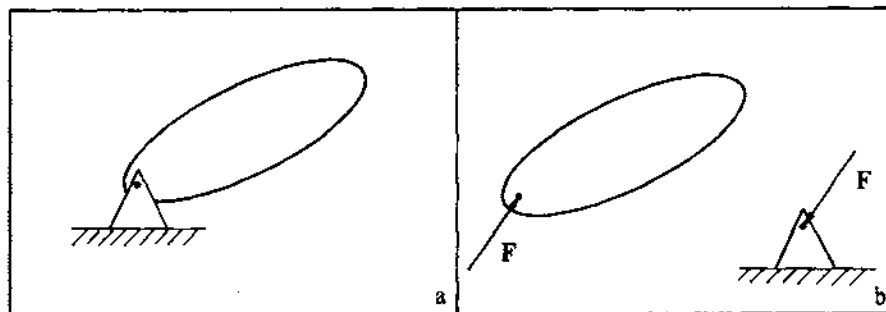
- N , osagai normala.
- $F_m \leq \mu N$ (estatikan), norabidea gainazalaren ukitzalea da eta higitzeko joeraren aurkako noranzkoa du, gainazalen elkarrekiko higidura erlatibo posiblearen aurkako, jakina.



10.10. irudia. Marruskaduradun ukipenaren marruskaduraren kausatutako osagai tangentea eduki behar da kontuan.

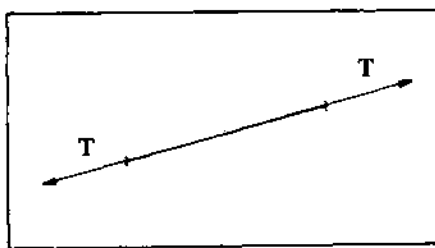
Normalaren kokalekuaren arazoa ez da problema, gorputza iraultzen ez bada. Behar den lekuan egon da, $\sum \tau_i = 0$ izan dadin.

b) Puntu finkoa duen solidoa. Indarrak edozein norabide har dezake, puntu finkotik pasaturik, noski (10.11. irudia). Kalkuluak errazteko, indar horren osagaiak erabiltzen dira gehienetan: F_x, F_y .



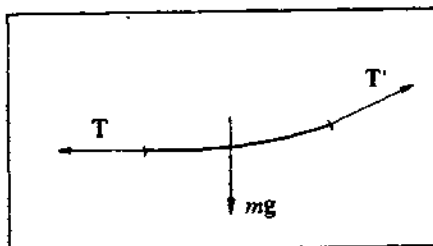
10.11. irudia. Puntu finkoa duen solidoa.

c) **Sokak.** Masa gabeko soken kasuan, sokak zuzentzat hartzen ditugu. Tentsio-indarra ager daiteke soilik, eta tentsio horrek balio berbera du sokaren edozein puntutan (10.12. irudia).



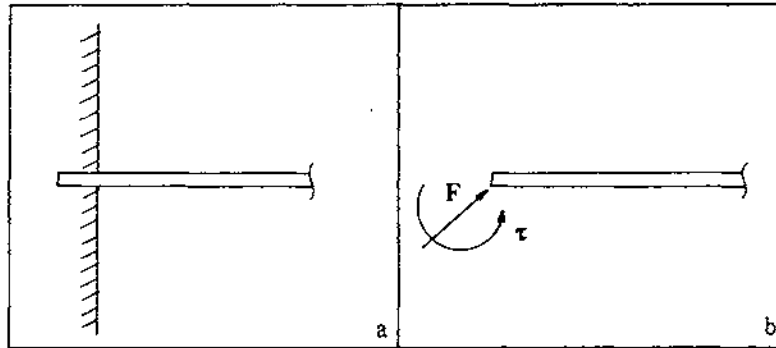
10.12. irudia. Masa gabeko soka.

Sokaren masa kontuan hartzean, tentsioa aldatuz doa puntutik puntura (10.13. irudia).



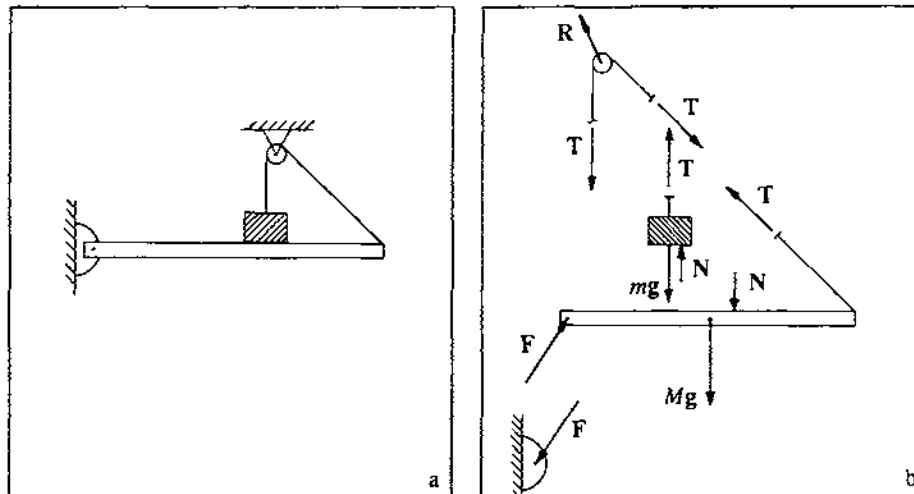
10.13. irudia. Masadun soka.

d) **Barrak.** Kasu honetan barrak tentsio eta konpresio-indarrak egin ditzake, baita beste edozein noranzkoko ere, barra zurruna bada. Horrez gain, barra horman ongi finkaturik badago, indarraz gainera momentu bat ere sorrazten du loturak (10.14. irudia).

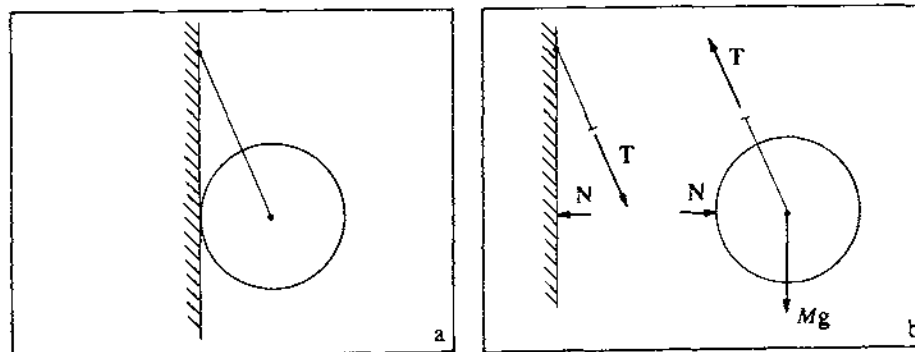


10.14. irudia. Horman finkaturiko barra zurrana.

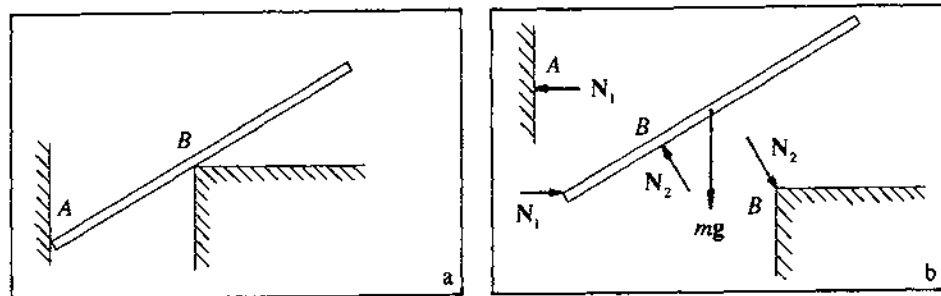
Galdera honi amaiera emateko, zenbait kasutako indarren eskemak adieraziko ditugu. Kasu hauetan guztietan, loturak dituen solido baten estatika aztertu da (10.15., 10.16. eta 10.17. irudietan).



10.15. irudia. a) Gorputz solidoen sistema. b) Indarren eskema.



10.16. irudia. a) Gorputz solidoen sistema. b) Indarren eskema.



10.17. irudia. a) Gorputz solidoen sistema. b) Indarren eskema.

10.4. LAN BIRTUALEN PRINTZPIOA

Oraingo sail honetan, solidoez osaturik dauden eta marruskadurarik gabekoak diren sistemen oreka aztertzean interesgarri gerta daitekeen ebazpide bat azaltzen da. Ebazpide honek ez die ezer kentzen ez gehitzen aurreko sailetan ikusi ditugun ekuazio orokorrei; izan ere, horiek kasu guztietan baitira aplikagarriak. Ebazpide honen interesgarritasuna honetan datza, alegia, zenbait problema bereziren ebazpena nabariki errazten duela; besterik ez.

Demagun orekan dagoen sistema mekaniko bat. Oro har, solidoez osaturik dagoela kontsideratuko dugu, eta solido horien artean lotura batzuk daudela. Orekan egonik, sistema horretako partikula guztiak ere orekan daude. Sistema horretako i partikularen gainean hiru eratako indarrek eragiten dute:

$\mathbf{F}_i^{\text{kan}}$ Kanpotik eragiten ari diren indarrak.

$\mathbf{F}_i^{\text{bar}}$ Barne-indarrak. Sistemako beste partikulen kausaz sortutakoak. Preseski, i partikulari j partikulak egiten dion indarra $\mathbf{F}_{ij}$ deituko dugu, $\mathbf{F}_{ji}$ indarra i partikulak j partikulari egiten diona izanik. $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ dela suposatuko dugu, eta gainera, indar horiek bektorearen norabidea dutela (hots, akzio-erreakzioaren printzipioa). Hortaz, i partikularen gaineko barne-indarren erresultantea ondoko izango da:

$$\mathbf{F}_i^{\text{bar}} = \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (10-11)$$

$\mathbf{F}_i^{\text{tot}}$ Loturetan sistemari egiten zaizkion indarrak.

Zer esanik ez, orekan:

$$\mathbf{F}_i^{\text{kan}} + \mathbf{F}_i^{\text{bar}} + \mathbf{F}_i^{\text{tot}} = 0. \quad (10-12)$$

Kontsidera dezagun orain kontzeptu berri bat: *desplazamendu birtual infinitesimala*. Berau, «loturak apurtu gabe gerta daitekeen desplazamendua da». Zer esanik ez, sistema orekan dagoenez, desplazamendu hori ez da goiko indarrek sortua. Nolabait esateko, askakizun matematikoa da; horregatik deritzo “birtual” eta ez “erreal”.

i partikularen posizio-bektorea $\mathbf{r}_i$ izanik, $\delta\mathbf{r}_i$ desplazamendu birtual infinitesimala izendatuko dugu. $\delta\mathbf{r}_i$ infinitesimala denez, eta loturak apurtzen ez direnez (definizioz), desplazamendu birtual horretan egiten den lan birtuala hauxe izanen da (i partikulan):

$$\delta W = \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 = (\mathbf{F}_i^{\text{kan}} + \mathbf{F}_i^{\text{bar}} + \mathbf{F}_i^{\text{lot}}) \cdot \delta\mathbf{r}_i. \quad (10-13)$$

Eta sistema osoarena:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{\text{kan}} + \mathbf{F}_i^{\text{bar}} + \mathbf{F}_i^{\text{lot}}) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (10-14)$$

Azter ditzagun banan-banan gai hauek:

– $\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{kan}} \cdot \delta\mathbf{r}_i$: Indar hauek guztiok ij bikoteka bil ditzakegu. Honela,

$$\mathbf{F}_{ij} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \delta\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot \delta\mathbf{r}_i - \mathbf{F}_{ij} \cdot \delta\mathbf{r}_j = \mathbf{F}_{ij} \cdot (\delta\mathbf{r}_i - \delta\mathbf{r}_j) = \mathbf{F}_{ij} \cdot \delta\mathbf{r}_{ij}. \quad (10-15)$$

Eta solidoak aztertzen ari garenez, i eta j partikulen arteko distantziak konstante iraun behar du; hortaz, $\mathbf{F}_{ij}$ eta $\delta\mathbf{r}_{ij}$ perpendikularrak dira. Beraz,

$$\mathbf{F}_{ij} \cdot \delta\mathbf{r}_{ij} = 0. \quad (10-16)$$

Eta guztira,

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{bar}} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (10-17)$$

– $\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{lot}} \cdot \delta\mathbf{r}_i$: desplazamendu birtualak loturak apurtu gabe gertatzen direnez, $\mathbf{F}_i^{\text{lot}}$ indarrak desplazamenduen perpendikularrak dira, loturetan marruskadurarik ez badago. Kasu honetan lotura-indarrek ez dute lanik egiten. Beraz,

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{lot}} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (10-18)$$

Honela, (10-17) eta (10-18) adierazpenak (10-14)-ra eramanez, azkenean hauxe lortuko dugu:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{kan}} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (10-19)$$

Hauxe da, hain zuzen ere, *lan birtualen printzipioa*: «Orekan dagoen eta solido zurrunez osaturikoa den sistema bateko loturetan marruskadurarik ez badago, kanpo-indarrei dagokien lan birtuala nulua da».

Printzipio honen aplikamodua adierazteko, adibide batzuk jarriko ditugu.

Eta **P**-k eta **F**-k bertikalaren norabidea dutenez, 10.19 irudiko erreferentzia-sistema hartuz, hauexek dugu:

$$-P\delta y_B + F\delta y_A = 0.$$

Posizioari dagokionez, desplazamendu birtualak kontuan hartuz, askatasun-gradu bakarra dugula ikus dezakegu, zcina α angeluaren bidez adieraz dezakegun. Beraz, δy_A eta δy_B kalkulatu ditugu α -ren funtzioan, eta horretarako, lehenik y_A eta y_B kalkulatu behar ditugu.

$$y_A = l \cos \alpha,$$

$$y = l \cos \alpha - \sqrt{l^2 - (l - l \sin \alpha)^2} = l \left[\cos \alpha - \sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha} \right].$$

Desplazamendu birtual infinitesimalak hauexek dira:

$$\delta y_A = -l \sin \alpha \delta \alpha,$$

$$\delta y_B = -l \left[\sin \alpha + \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}} \right] \delta \alpha.$$

Honelatan, ba, P -ren eta F -ren arteko erlazioa hauexek izango da:

$$\frac{P}{F} = \frac{\delta y_A}{\delta y_B} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}}}.$$

Eta orekan $\alpha = 30^\circ$ dela esan digutenez, emaitza hauexek da:

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{2} \rightarrow F = 2P.$$

10.5.2. Lau barrak osaturiko sistema

- «10.20. irudiko lau barrak berdinak dira eta beren artean giltzaturik daude muturretan, plano bertikal batean eta marruskadurarik gabe.

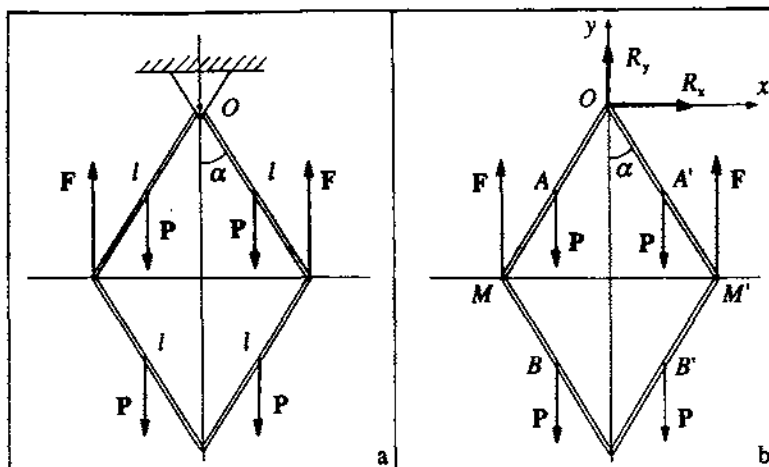
Lor bedi ezker eta eskuinaldeko giltzaduretan egin behar diren F indar bertikal berdinen balioa, irudiko posizioan sistemak orekan iraun dezan.

Zein izango da O puntuko giltzaduran eginiko erreakzioa?».

Irudietan sistema mekaniko horren gainean egiten ari diren indarrak adierazi dira. Lan birtualen printzipioak dioenez,

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_M + \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_M + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_{A'} + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_B + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r}_{B'} = 0,$$

$$\mathbf{F} \cdot \delta (\mathbf{r}_M + \mathbf{r}_{M'}) + \mathbf{P} \cdot \delta (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{A'} + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{B'}) = 0.$$



10.20. irudia, Lau barraz osaturiko adibideko sistema.

Irudiko erreferentzia-ardatzez baliaturik, behar ditugun bektoreen adierazpenak idatziko ditugu:

$$\mathbf{F} = F\mathbf{j},$$

$$\mathbf{P} = -P\mathbf{j},$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_M + \mathbf{r}_{M'} = -2l \cos \alpha \mathbf{j} \\ \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{A'} + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{B'} = -4l \cos \alpha \mathbf{j} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta(\mathbf{r}_M + \mathbf{r}_{M'}) = 2l \sin \alpha \delta \alpha \mathbf{j} \\ \delta(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{A'} + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{B'}) = 4l \sin \alpha \delta \alpha \mathbf{j} \end{cases}$$

Lan birtualen ekuaziora itzuliz,

$$(F\mathbf{j}) \cdot (2l \sin \alpha \delta \alpha \mathbf{j}) + (-P\mathbf{j}) \cdot (4l \sin \alpha \delta \alpha \mathbf{j}) = 0,$$

$$F2l \sin \alpha \delta \alpha \mathbf{j} - P4l \sin \alpha \delta \alpha \mathbf{j} = 0.$$

Azkenean, ondoko emaitza lor dezakegu:

$$F = 2P.$$

Dena den, O puntuko giltzadurako erreakzioa lortzeko, ezin dezakegu lan birtualen printzipioa erabil, zeren, aipaturiko puntua finko dagoenez gero, desplazamendurik egiteko aukerarik ez baitauka. Beraz, estatikako lehenengo legea aplikatuko dugu, hau da,

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_i &= 0, \\ -4P\mathbf{j} + 2 \cdot 2P\mathbf{j} + R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= 0. \end{aligned}$$

Hemendik emaitza hau lortuko dugu:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0.$$

Honelatan, ba, O puntuan ez dago erreakziorik; hots, bertako euskarria kenduko bagenu ere, sistemak orekan iraungo luke berdin-berdin.

Ondorioz, emaitza hau lortuko dugu:

$$F = P \cot \alpha.$$

Berez, hauxe da probleman eskatu digutena. Baina lan birtualen printzipioa aplikatu ondoren, ikus dezagun nolakoa izango litzatekeen ebazpena, estatikako funtsezko ekuazioak erabiliz. Lehenengo eta behin indar guztien erresultantea (planoko bi osagaiak) eta indarren momentua anulatu egiten direneko baldintzak ipini beharko genituzke, hau da,

$$\sum_i F_{ix} = 0 \rightarrow R_x - F = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \rightarrow R_y + N - 3P = 0,$$

$$\sum_i \tau_i = 0 \rightarrow N \cdot 2l \cos \alpha - P \frac{3}{2} l \cos \alpha - Pl \cos \alpha - P \frac{l}{2} \cos \alpha = 0.$$

Baina ikus daitekeenez, hiru ekuazio eta lau ezezagun daude, R_x , R_y eta N eta F alegia. Hortaz, beste ekuazio bat falta zaigu, problema hau matematikoki ebatzirik gera dadin. Hori egiteko, eskuinaldeko barraren oreka aztertu beharko genuke, adibidez, M puntuarekiko momentuak hartuz. Honelaxe, hain zuzen:

$$-Fl \sin \alpha + Nl \cos \alpha - P \frac{l}{2} \cos \alpha = 0.$$

Ekuazio honetatik eta aurreko multzoko azkenetik, erraz atera daiteke F indarraren balioa,

$$F = P \cot \alpha.$$

Zer esanik ez, lehengo balio berbera lortu dugu. Hala ere, bistakoa denez, estatikako funtsezko printzipioak erabiltzean, lau ekuazio planteatu ditugu, eta lehenengo biak alferrekoak gertatu zaizkigu. Kasu honetan, metodoak alderatuz, argi eta garbi nabari da lan birtualen printzipioaren erabilerak daukan ahalmena, F indarraren balioa zuzenki eman baitu.

11. gaia

Elkarrekintza grabitatorioa

Bostgarren gaian zenbait printzipio orokor eman ditugu, Newton-en Mekanikaren legeak deritzenak, hain zuzen ere. Beraietan, indarrak azaldu dira gorputzen arteko higiduraren aldaketen kausa. Beraz, Fisikaren helburu nagusienetarikoa indar horien ikerketa da, preseski. Eskala makroskopikoan, ukipen-indarrak alde batera utzirik, bi indar-mota nabarmen ditzakegu soilik: elkarrekintza grabitatorioa eta elkarrekintza elektromagnetikoa. Eskala mikroskopikoan, aldiz, beste bi daude: elkarrekintza ahula eta elkarrekintza bortitza. Liburu honetan lehenengo biak aztertuko ditugu soilik, gai honetan elkarrekintza grabitatorioa aztertutik; geroago, elkarrekintza elektromagnetikoa 18tik 24ra bitarteko gaietan aztertuko dugu.

11.1. GRABITAZIOAREN LEGE UNIBERTSALA

Gaur egun dakigunez, elkarrekintza grabitatorioa Lurretik hurbil dauden gorputzen higiduran, itsasgora eta itsasbeheretan eta planeten mugimenduan igartzen da batik bat. Interpretazio zuzena Newton-ek eman zuen, mendeetan zeharreko eztabaida argituri. Berak frogatu zuenez, gorputz guztien arteko erakarpen-indarrak sortzen dira, eta horrela, gorputz baten pisua, gorputz horren eta Lurraren artean dagoen erakarpen-indarraren neurria da. Kontzeptu horrek, errotik irauli zituen ordura arte Lurraz eta izarren higiduraz zeuden iritziak, eta Fisikaren historian aro berri bat abiarazi zuen. Horregatik, oso interesgarria dateke, Newton-en ebazpena heldu arte historian aro honetan emaniko pausoak ikustea, laburki bada ere.

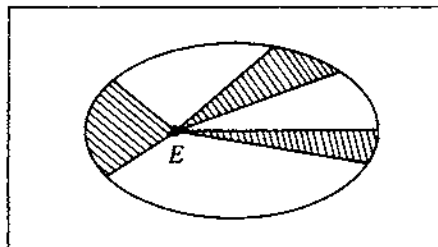
Antzinadanik arreta handienaz aztertua izan da Astronomia. Gizona, unibertsoaren zentro gisa kontsideratzen zuten greziarrek, eta, Lurrean bizi zirenez gero, unibertsoko erdigunea Lurra zela uste zuten. Beste planetak eta Eguzkia bera ere Lurraren inguruan biraka zirkulu zentrokideak eginez higitzen ziren, ustez. Hala ere, teoria hori ez zetorren bat behaketa esperimentalekin. Kristo ondoko II. mendean, Ptoloméok beste teoria bat proposatu zuen: Lurra geldirik zegoen, baina planeten ibilbideak ez ziren zirkunferentziak, askoz ere eite korapilatsuagoak baizik. Gaur egungo hitzetan, Lurrean kokaturiko sistema inertzial batetik deskribaturiko higidura planetarioaren azterketa hurbildua egin zuen Ptolomeok.

XVI. mendera arte Ptolomeo-ren teoria hori izan zen nagusi. Mende horretan, Nicolaus Koppernigk poloniarrak (1473-1543) beste teoria hau azaldu zuen: planeta guztiak (Lurra barne) Eguzkiaren inguruan ari dira biratzen. Teoria horri *heliozentrikoa* deritzo, eta, izatez, jadanik Kristo aurretiko III. mendean proposatu zuen Aristarko Samoskoak (K. a. 320-250). Koppernigk-en teorian eta Tycho Brahe-ren (1546-1601) neurketetan finkatuz, planeten higiduran erregularitasun batzuk aurkitu zituen Johann Kepler alemaniarrek (1571-1630), eta bere izenaz ezagunak diren hiru legeetan bildu zituen.

11.1.1. Kepler-en legeak

Planetek Eguzkiaren inguruan duten higidurari buruzko neurketa esperimentaletan finkatuz, Kepler-ek honako hiru lege hauek plazaratu zituen:

1. Planetak orbita eliptikoetan higitzen dira Eguzkiaren inguruan, Eguzkia foku batean egonik.
2. Edozein planetaren Eguzkiarekiko posizio bektoreak elipsearen azalera berdina estaltzen ditu denbora-tarte berdinetan. Edo gauza bera dena, planetek beren orbitan duten Eguzkiarekiko abiadura areolarra konstantea da.
3. Orbita osatzeko behar duten periodoaren karratua Eguzkirainoko batez besteko distantziaren kuboaren proportzionala da.



11.1. irudia. Kepler-en bigarren legea: Denbora-tarte berdinetan, Eguzkitik planetarako bektoreak azalera berdina estaltzen ditu.

11.1.2. Grabitazioaren lege unibertsala

XVII. mendean, Kepler-en lege enpirikoak oinarritzat hartuz, Newton-ek ondokoa ondorioztatu zuen: «Planetek Eguzkiarekiko duten higidura, Eguzkiaren eta planeten arteko indar baten ondorioa da».

Ondorio honetara heltzeko, ikus dezagun arrazonamendua zein izan omen zen:

1. Kepler-en lehenengo legeak dioskunez planetek Eguzkiarekiko duten higidura laua denez gero, planeten gainean eragiten duen indar-eremua zentrala da.
2. Bigarren legetik, planetaren ibilbidea zirkularra deneko kasu berezian, ondokoa dugu:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = k \text{ tea} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \quad (11-1)$$

non A abiadura areolarra den.

Azelerazioaren adierazpena hauxe da koordenatu polarretan:

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta \quad (11-2)$$

non, higidura zirkularren kasuan ($r = R = \text{ktea dela kontuan hartuta}$),

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -r\omega^2, \quad (11-3)$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad (11-4)$$

diren. Beraz,

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r \mathbf{u}_r. \quad (11-5)$$

Kopernigk-en erreferentzia-sistema inertzializat harturik, hauxe dugu:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \quad (11-6)$$

non $\mathbf{F}$ Eguzkiak planetaren gainean eragiten duen indarra, m_i planetaren masa inertziala (geroxeago definituko dugu horren esangura modu zehatzean) eta $\mathbf{a}$ Kopernigk-en erreferentzialarekiko planetak duen azelerazioa diren.

Hori horrela izanik,

$$\mathbf{F} = -m_i \omega^2 r \mathbf{u}_r = -m_i \frac{(2\pi)^2}{T^2} r \mathbf{u}_r. \quad (11-7)$$

(honetaz, ikus 5.8. atala).

3. Orbitaren periodoaren karratua Eguzkiaren eta planetaren arteko batez besteko distantziaren kuboaren proportzionala da, hots,

$$T^2 \propto r^3. \quad (11-8)$$

Beraz, azkenengo formulari sartuz, ondokoa lortuko dugu:

$$\mathbf{F} \propto -\frac{m_i}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-9)$$

Azkenez, hauxe dugu indarraren adierazpena:

$$\mathbf{F} = -\frac{km_i}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-10)$$

Hortaz, planetaren ibilbidea zirkularra deneko kasuetan, planetaren higiduraren sortzaila Eguzkiak planeta horren gainean eragiten duen ondoko motako indarra dugu:

- Indar zentrala.
- Indar erakarlea.
- Planetaren masaren proportzionala, eta Eguzkitiko distantziaren karratuaren alderantziz proportzionala.

Planeten higidura zirkularra izan ordez eliptikoa denean ere, Kepler-en legeak oinarritzat hartuz, Eguzkiak planeten gainean eragiten duen indarra, planetaren higiduraren sortzailea alegia, hauxe izanen dugu:

$$\mathbf{F} = -k \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-11)$$

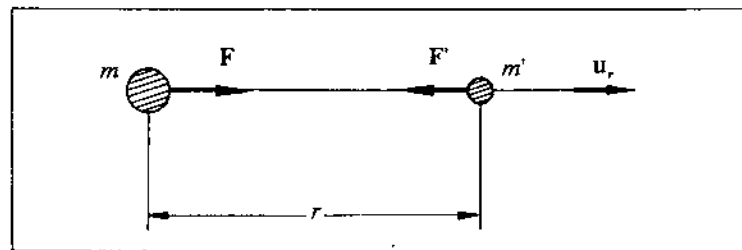
Newton-ek edozein gorputz biren kasurako orokortu zuen emaitza hori. Hau da, edozein gorputz biren artean elkarrekintza bat dago, eta horri elkarrekintza grabitatorioa deritzo. Beraz, A eta B gorputzak baldin baditugu, akzio-erreakzioaren printzipioaren arabera, A gorputzak B delakoaren gainean eta B gorputzak A gorputzaren gainean indar grabitatorio bana egiten dute, eta indar bi horiek balio bereko modulua, norabide berbera, baina aurkako noranzkoak dituzte.

Horrela, bada, Newton-ek gorputz guztien arteko elkarrekintza mota berekoa zela adieraziz, grabitazioaren lege unibertsala postulatu zuen: «*Gorputz biren artean sortzen den elkarrekintza grabitatorioa, beren masen zuzenki proportzionalak eta bien arteko distantziaren karratuaren alderantziz proportzionalak diren bi indar erakarle berdin bidez adierazten da*».

Formula batean adierazirik, honelaxe azal daiteke lege hori:

$$\mathbf{F}' = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r = -\mathbf{F}, \quad (11-12)$$

non m eta m' partikula bien masak diren, eta r horien arteko distantzia diren; bestalde, $\mathbf{u}_r$ bektorea, bi partikulak lotzen dituen zuzenaren norabideko bektore unitarioa da, 11.2. irudian argi ikus daitekeenez:



11.2. irudia. Bi gorputzen arteko indar grabitatorioek bi gorputzak lotzen dituen zuzenaren norabidea dute.

Horrez gain, emandako erlazioan ageri den γ konstanteari, *grabitazioaren konstante unibertsala* deritzo; horri buruz geroxago mintzatuko gara.

Ohar gaitezen, halaber, elkarrekintza grabitatorioa deskribatzen duten indarrak erakarleak direla beti. Aldiz, geroago ikusiko dugunez, indar elektromagnetikoak erakarleak edo aldaratzaileak izan daitezke.

Bestalde, edozein bi gorputzen artean eragiten duen indar grabitatorioa neurtzen baldin badugu (esperimentu hau tortsio-balantza baten bidez egin daiteke: Cavendish-en balantzaren bidez, esaterako), esperimentua mota bereko esfera desberdinez errepikatuz, bien arteko indar grabitatorioa esferen bolumenaren proportzionala dela ondoriozta daiteke.

Hori dela eta, gorputz bakoitzaren *masa grabitazionala* defini dezakegu (m_g), zeinaren erakarpena indar grabitatorioaren proportzionala den. Beraz, ondoko erlazio hau idatz dezakegu:

$$\mathbf{F}_{12} = -m_{1g}m_{2g}\mathbf{f}_{12}(r_{12}), \quad (11-14)$$

non m_{1g} eta m_{2g} gorputz bien masa grabitazionalak diren, eta $\mathbf{f}_{12}(r_{12})$, gorputz bien arteko distantziaren funtzio bat.

Bestalde, esperimentu honetan masa berberak erabiliz, indar grabitatorioa zentrala eta bi gorputzen arteko distantziaren karratuarekiko alderantziz proportzionala dela ondoriozta dezakegu, hots,

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma' \frac{m_{1g}m_{2g}}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (11-15)$$

non γ' proportzionaltasun-konstantea den.

Honela eginez, gorputz baten masa inertziala (m_i) eta masa grabitazionala (m_g) modu desberdinetan definitu ditugu.

Newton-ek postulatu zuenez, Eguzkiaren eta planeten arteko elkarrekintza eta edozein bi gorputzen artekoa izaera berekoak direla onartzen badugu, honako erlazio honetara iritsiko gara:

$$\frac{m_g}{m_i} = k. \quad (11-16)$$

Hau da, edozein gorputzen kasuan, beraren masa grabitazionalaren eta masa inertzialaren arteko erlazioak balio berekoa izan behar du beti.

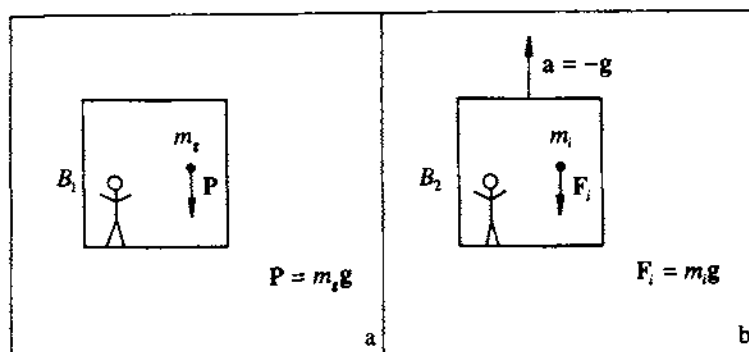
Bertan jarri dugun k delakoa 1 baliokoa aukera dezakegu, beste magnitude fisikoen unitateak era egokian hautatuz gero. Beraz, beste hitz batzuetan adierazita, masa inertziala eta masa grabitazionala balio berekoak direla postulatu dugu:

$$m_i = m_g = m. \quad (11-17)$$

Horixe da, preseski, masa inertzialaren eta masa grabitazionalaren *baliokidetza-printzipioa*.

Ohar gisa, diogun ezen lehen aipatu dugun γ konstantearen balioa, $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ hain zuzen, baliokidetza-printzipioa onartzen badugu finka daitekeela soilik ($k = 1$ eginez, alegia).

Bide batez, esan beharrekoa da ezen antzinako Mekanikak onartu egin zuela printzipio hau, baina ez zuela interpretatu. Horrexegatik, printzipio honi interpretazio baliagarria emateko adibide ezagun bat jarriko dugu, bi igogailuri buruzkoa, hain zuzen ere (11.4. irudia).



11.4. irudia. a) Lehenengo igogailua inertziala da baina bertan g baliadun eremu grabitatorioa dago. b) Igogailua -g azelerazioaz higitzen ari da.

Demagun bi behatzaile desberdin igogailu itxi bitan daudela. Lehenengoa, B_1 , izendatuko duguna, Lurraren erakarpen grabitatorioaren pean dago. Bigarrena, B_2 , ostera, grabitaterik ez dagoen espazioalde batean dago, baina beraren sistema (igogailua) -g azelerazioa pairatzen ari da.

Biak partikula berberaren higidura aztertzen ari dira. Batetik, B_1 behatzailea sistema inertzial batean dago; beraz, honako indar hau neurtuko du (pisua):

$$P = m_i g. \quad (11-18)$$

Bestetik, B_2 delakoak, sistema ez-inertzial batean dagoenez gero, inertzia-indar hau neurtuko du:

$$F_i = -m_i a = m_i g. \quad (11-19)$$

Eta, baliokidetza-printzipioaren arabera:

$$P = m_i g = F_i = m_i g = mg. \quad (11-20)$$

Eraitza horretatik abiatuz, ondorio honetara irits gaitezke: «Behatzaile batek ezin dezake igarri bere laborategia eremu grabitatorio uniforme baten barruan dagoen ala ez». Eta, aurreko hori orokortuz, «Naturaren lege fisikoak grabitate-eremu uniformearen eta sistema azeleratuen arteko desberdintasun dinamikoa ez igartzeko modukoa izateko eran idatzi behar dira». Hauexek biok dira, hain zuzen, baliokidetza-printzipioaren enuntziatuak. Baliokidetza-printzipio honek garrantzi handia du Erlatibitatearen Teoria Orokorra formulatzerakoan, baina liburu honetan, aipamenaz gain, ez gara horretaz luzatuko.

11.3. EREMU GRABITATORIOA

Elkarrekintza grabitatorioa matematikoki aztertzeko, eremu bektorial berezia definitu ohi da espazioan: eremu grabitatorioa. Ikus dezagun nola definitzen den eta nolako propietateak dituen.

11.3.1. Eredu grabitatorioa

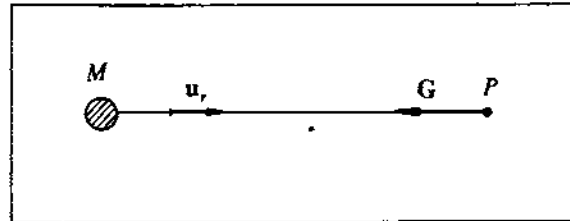
Esan dugunez, M masa espazioko puntu batean jartzen bada, beraren eragina espazio osora hedatzen da; horrela, beste puntu batean m masa jartzen bada, indar hau jasango du, M masa dela kausa:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-21)$$

Hori horrela izanik, ondoko moduan definitzen da *eremu grabitatorioaren intentsitatea*: «Espazioko puntu batean eremu grabitatorioak duen $\mathbf{G}$ intentsitatea, puntu horretan jarritako masa-unitateak pairatzen duen indarra da».

Kontuan hartzekoa da $\mathbf{G}$ eremu grabitatorioa eremu bektoriala dela, eta, definizioak berak dioskunez, m dagoen puntuan balio hau duela:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-22)$$



11.5. irudia. M masak P puntuan sortutako eremu grabitatorioa.

Erraz nabari daitekeenez, $\mathbf{G}$ eta $\mathbf{u}$, bektoreak norabide berekoak baina aurkako noranzkokoak dira (ikus 11.5. irudia). Bestalde, demagun $m_1, m_2, \dots$ masak ditugula, eremu bana sortzen dutenak. Jakina, gainezarmenaren printzipioa erabiliz, P puntuan legokeen m masak ondoko $\mathbf{F}$ indarra pairatuko luke:

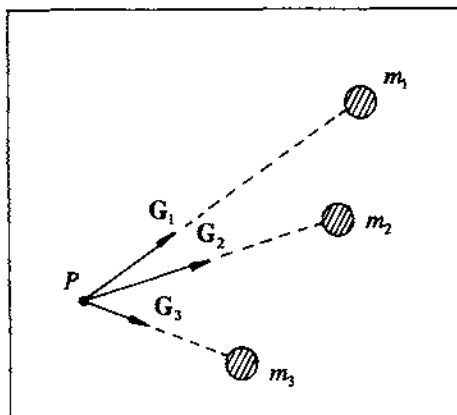
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = -\gamma \frac{mm_1}{r_1^2} \mathbf{u}_1 - \gamma \frac{mm_2}{r_2^2} \mathbf{u}_2 - \dots = -m\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i, \quad (11-23)$$

non r_i delakoa m partikularen eta m_i delakoaren arteko distantzia den, eta $\mathbf{u}_i$ delakoa partikula biak lotzen dituen zuzenaren bektore unitarioa (11.6. irudia).

Beraz, eremuen definizioa erabiliz, P puntuan dagoen eremua hau da:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots = \sum_i \mathbf{G}_i. \quad (11-24)$$

Hots, ondorio honetara iritsiko gara: $\mathbf{G}$ eremua masa guztiek sortzen dituzten eremuen batura da, eta hori lortzeko, eremuen kasurako ere, gainezarmenaren printzipioaz baliu gaitzke.



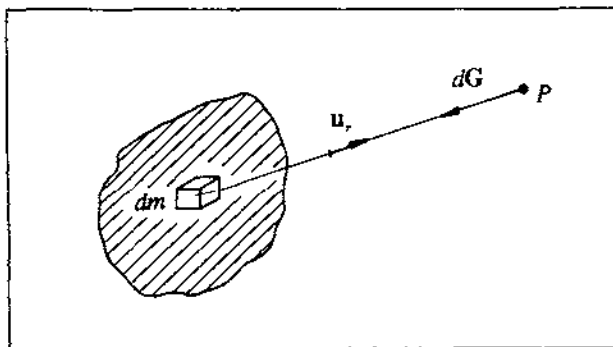
11.6. irudia. Masa diskretuen banaketaz sorturiko eremu grabitatorioa.

Modu berean, eremua sortzen duen masa jarraitua deneko kasuan, dm elementu diferentzial bakoitzari (11.7. irudia) dagokion eremua ondokoa da,

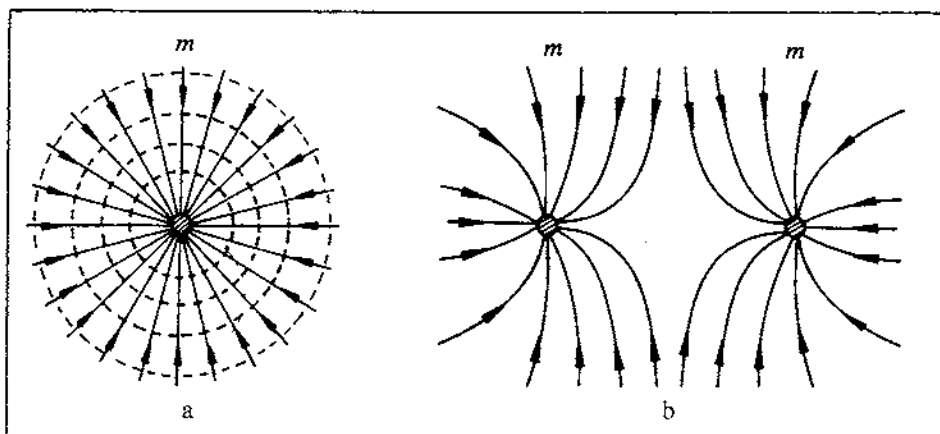
$$dG = -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (11-25)$$

eta intentsitate osoa aurreko adierazpenaren bolumen osorako integrazioaren bidez lor dezakegu:

$$\mathbf{G} = \int dG = -\gamma \int \frac{dm}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-26)$$

11.7. irudia. Masa jarraituaren kasuan dm elementuari dagokion eremua.

A.1. eranskinean aipatuko denez, eremu grabitatorioa espazioko lerro orientatuak diren indar-lerroen edo korrontc-lerroen bidez adieraz daiteke grafikoki, puntu bakoitzean indar-lerroak eremu grabitatorioaren intentsitatearen ukitzaileak izanik (ikus 11.8. irudiak). Espazioko puntu bakoitzetik lerro bakar bat pasatzen da, eta eremu grabitatorioaren intentsitatea handiagoa den lekuetan, lerroen kontzentrazio handiagoa ere agertzen da. Ohar gisa, diogun ezen eremu elektriko eta magnetikoen kasuetan hitzarmen berberaz baliatzen garela; baina grabitazioaren kasuan sortzen diren indarrak crakarleak direnez gero, eremu grabitatorioari dagozkion indar-lerroen noranzkoa beti eremua sortzen duen masarantz doa.



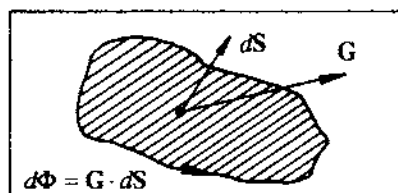
11.8. irudia. a) m masa bakarraren eremu grabitatorioari dagozkion indar-lerroak. b) Bi masen sistemari dagozkionak.

11.3.2. Gauss-en teorema

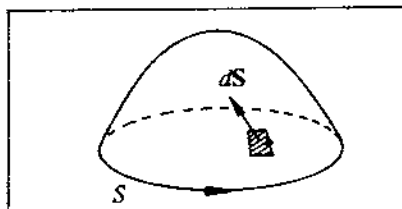
Aurreko puntuarekin loturik, atal honetan Gauss-en teorema aztertuko dugu eremu grabitatorioaren kasurako. Kasu orokorra sakonkiago ulertzeko, eta ondorioa iristeko emango ditugun urratsak hobeki ulertu ahal izateko, ikus A-3 eranskina.

Demagun gainazal lau infinitesimal bat. Gainazal honen puntu batean eremu grabitatorioak G balioa badu, dS azalera-elementua izanik, gainazal infinitesimala zeharkatzen duen G eremuaren fluxua hau da (ikus 11.9. irudia):

$$d\Phi = G \cdot dS. \quad (11-27)$$



11.9. irudia. dS gainazal lauan zeharreko fluxuaren kalkulua.



11.10. irudia. Gainazal finituaren kasuan integrazioa egin behar da.

Gainazal finitua denean (11.10. irudia), integratu egin behar da aurreko adierazpena, fluxu osoa lortzeko:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} \quad (11 - 28)$$

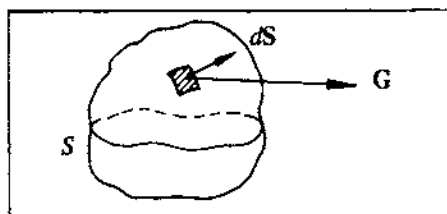
non irizpide bat hautatu behar den, $d\mathbf{S}$ bektorearen noranzkoa finkatzeko (ikus eranskina).

Gainazal itxietan, Gauss-en teorema aplika dezakegu. Beraz, eranskinaren arabera

$$\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = 4\pi \quad (11 - 29)$$

betetzen dela kontuan hartuz, S gainazalak inguratutako esparruan dagoen m partikula puntual batek sorturiko eremu grabitatorioaren fluxua ondokoa da:

$$\oiint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma m. \quad (11 - 30)$$



11.11. irudia. Gainazal itxiaren kasuan Gauss-en teorema aplika dezakegu.

Eta gainezarmenaren printzipioaren ondorio modura:

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma m_S, \quad (11 - 31)$$

m_S delakoa gainazalak bere barnean gordetzen duen masa osoa izanik.

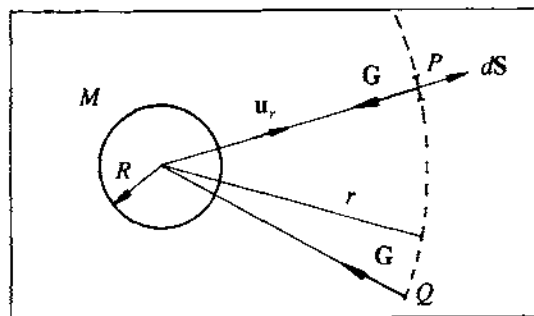
Emaitza hau baliagarria dugu oso, simetria esferikoa duten zenbait kasutarako, adibidez. Esandakoa baieztatzearen, ondoko adibidea aztertuko dugu.

11.3.3. Masa esferikoak sorturiko eremu grabitatorioa

«Demagun R erradioa eta M masa dituen esfera solido eta homogeneoa, eta lor ditzagun:

- a) esferaz kanpoko puntu batean sorturiko eremu grabitatorioa,*
- b) esfera barneko puntu batean sorturikoa».*

a) Ondoko 11.12. irudian nabaria denez, simetria dela eta, $\mathbf{G}$ bektoreak erradioaren norabidea izango du, eta, noski, lehenago ikusi dugunez, beraren noranzkoa masaranzkoa izango da. Bestalde, simetriak haxe ere halabehartzen du: r erradioko esfera zentroki-deko gainazaleko puntu guztietan eremuak modulu berbera eduki behar du.



11.12. irudia. M masa esferikoak inguruko P puntuan sorturiko eremua.

Beraz, esfera horretan zeharreko fluxua honelaxe lor daiteke. Kontuan harturik

$$\mathbf{G} = -G\mathbf{u}_r, \quad (11-32)$$

$$d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_r. \quad (11-33)$$

direla, r erradiodun esferan zeharreko fluxua hauxe izango da:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S G dS = -G \oint_S dS = -G4\pi r^2, \quad (11-34)$$

zeren S azaleraren balioa $4\pi r^2$ baita.

Bestalde, Gauss-en teorema erabiliz,

$$\Phi = -4\pi\gamma M \quad (11-35)$$

da, non M delakoa R erradioko esferaren masa osoa den.

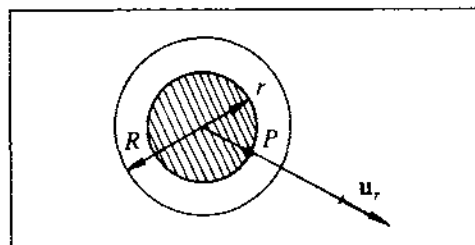
Azken emaitza bi horiek batera jarritz, ondorio honetara irits gaitezke:

$$G = \frac{\gamma M}{r^2}. \quad (11-36)$$

Beraz, bektorialki idatziz,

$$\mathbf{G} = -\frac{\gamma M}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (11-37)$$

b) Esferaren barruko puntuen kasurako ere, simetriari buruz esandako ohar guztiek modu berean balio dute. 11.13. irudian ikus daitekeenez:



11.13. irudia. Esferaren barruko puntuetako eremu grabitatorioaren kalkulurako elementuak.

Beraz, r erradioko esferako puntu guztietan ($r < R$ izanik) G eremuak modulu berbera du, eta lehen egin dugun bezalaxe, esfera horren azaleran zeharreko fluxu osoa hauxe izango da:

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = -G4\pi r^2. \quad (11-38)$$

Bestalde, Gauss-en teorema aplikatuz,

$$\Phi = -4\pi\gamma m \quad (11-39)$$

non m delakoa r erradiodun esferaren masa osoa den.

R erradioko esfera homogeneoa denez, m masaren balioa honelaxe lortuko dugu:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \\ m &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = \frac{r^3}{R^3} M. \quad (11-40)$$

zeren ρ masa-dentsitatea konstantea baita.

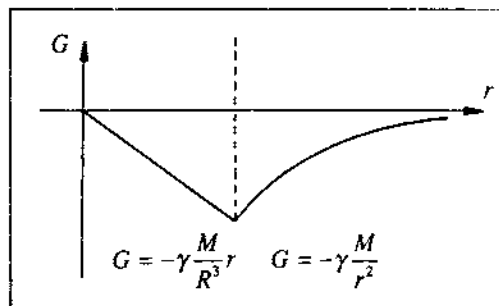
Aurreko balio hori kontuan hartuz, eta fluxu osorako lorturiko emaitza biak konparatuz,

$$G = \frac{\gamma M}{R^3} r, \quad (11-41)$$

hots, P puntuan dagoen eremua hauxe da:

$$\mathbf{G} = -\frac{\gamma M}{R^3} r \mathbf{u}_r. \quad (11-42)$$

Azkenez, esfera homogeneoak barnean eta kanpoan sorturiko eremu grabitatorioaren tankera 11.14. irudian dagoen modura adieraz dezakegu grafikoki.



11.14. irudia. Masa esferikoak sorturiko eremu grabitatorioa (zeinu eta guzti) erradioaren funtzioan.

Dakusagunez, Gauss-en teorema erabiliz, erraz kalkulatu dugu esfera batek sorturiko eremu grabitatorioaren intentsitatea, espazioko edozein puntutarako. Horrez gain, aurreko emaitzak direla medio, berriro ere irits gintezke Newton-en legearen adierazpenera. Honetan datza, batik bat, Gauss-en teoremaren garrantzi handia.

Beti bezala, energia potentziala konstante batez indeterminaturik dago, lana energia potentzialen kendura gisa agertu baita. Hala ere, ohituraz, partikula biren arteko elkarrekintza grabitatorioa aztertzean (eta beste kasu batzuetan ere bai; ez guztietan, baina) batetik besterako distantzia handituz doanean, E_p energia zerorantz doala onartzen da (ohituraz); hots, hizkera matematikoan:

$$r \rightarrow \infty, \quad E_p \rightarrow 0. \quad (11-47)$$

Beraz,

$$E_p(r \rightarrow \infty) = 0 = K \text{ eginez,} \quad (11-48)$$

$$E_p = -\gamma \frac{mm'}{r}. \quad (11-49)$$

11.4.2. Potentzial grabitatorioa

Aurreko atalean frogatu dugunez, eremu grabitatorioa kontserbakorra da; beraz, eremu potentzial baten gradiente gisa adieraz daiteke (ikus 6.7. atala), alegia,

$$\mathbf{G} = -\text{grad}V, \quad (11-50)$$

non V delako eremu eskalarrari *potentzial grabitatorioa* deritzon.

m masa baten r distantziarako potentzial grabitatorioa formula honen bidez lor daiteke:

$$V = -\gamma \frac{m}{r}, \quad (11-51)$$

non beti agertzen zaigun konstante gehigarria infinituan potentzial nulua izateko moduan aukeratu dugun.

Masa bat baino gehiago ditugunean, gainezarmenaren printzipioa aplika dezakegu; horrela, masa diskretuen kasuan honako adierazpen honetara iritsiko gara:

$$V = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i}. \quad (11-52)$$

Modu berean, masa jarraitua den kasurako, honelaxe kalkulatu dugu potentzial grabitatorioa, bolumen-integral hori masa dagoeneko bolumen osora hedaturik:

$$V = -\gamma \int \frac{dm}{r}. \quad (11-53)$$

Bestalde, behin potentzial grabitatorioak balio berbera dueneko puntu guztiak batera hartuz gero, *gainazal ekipotentzialak* lor ditzakegu. Alegia, gainazal ekipotentzialak potentzial grabitatorioaren balio berbera duten puntuen leku geometrikoak dira. Partikula puntual bakarraren kasuan, gainazal horiek esferikoak dira, partikula puntuala esferen zentroa izanik. Gainazal horiek aurreko 11.8.a irudian puntuka marrazturikoak dira.

Horrez gain, eremu kontserbakor guztietan gertatzen denez, eremu grabitatorioaren norabidea gainazal ekipotentzialen perpendikularra da puntu bakoitzean. Alegia, 11.8.a irudiko indar-lerroak erradialak dira.

V eta E_p eremu eskalarren arteko erlazio erlazioa erraz atera dezakegu bien adierazpenak kontrajarriz, hots:

$$V = \frac{E_p}{m'} \quad (11 - 54)$$

Beraz, G delakoa masa-unitateko indarra den moduan, potentzial grabitatorioa masa-unitateko energia potentziala dela esan dezakegu.

11.5. INDAR ZENTRAL KONTSEBAKORREN ERAGINPEKO HIGIDURA. KEPLER-EN PROBLEMA

Atal honetan, indar zentral kontsebakorren pean mugitzen ari den partikula baten abiadura aztertuko dugu. Honezkero, distantziaren karratuaren proportzionala den indar baterako partikularizatzeari ekingo diogu, berau baita grabitazioari dagokion kasua. Horrela eginez, planetek Eguzkiarekiko duten higidura edo satelite artifizialek Lurraren inguruan dutena ezagut dezakegu, adibidez.

Ikerketa erraztearren, bi gorputzez osaturiko sistema aztertzeraz mugatuko gara. Planetek Eguzkiarekiko duten higiduraren kasuan, espazioan dauden beste planeta edo izar guztien eragina arbuia garritzat jotzen dugula esan gura du horrek.

7.3. atalean azaldu denez, bi gorputzen higidura erlatiboa aztertzean, lehenengo gorputza sistema inertzial batean finko balego bezala eta bigarrena *masa laburbildua* deritzona elkarrekintzazko indarraren eragin pean mugituko balitz bezala azter daiteke problema (gorputz bakararen problema baliokidea deritza horri).

Oroitu gaitezten masa laburbilduaren adierazpenaz, gorputz biei masak m eta m' direneko kasuan:

$$\mu = \frac{mm'}{m + m'} \quad (11 - 55)$$

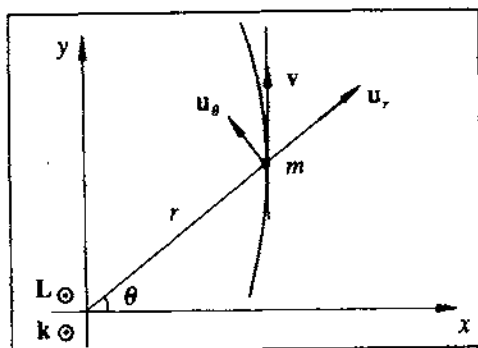
Orain, $m' \gg m$ baldintza betetzen dela suposatuko dugu. Hauxe da, hain zuzen ere, Eguzkia-planeta edo eta Lurra-satelite artifiziala sistemetan gertatzen dena. Kasu horretan, $\mu \approx m$ dela jar dezakegu, alegia, planetaren edo satelite artifizialaren masa.

11.5.1. Indar zentral kontsebakorren peko higidura

Suposa dezagun masa handiarekin (m' -ekin) batera doan sistema inertzialaren koordinatu-jatorrian kokatuta dagoen behatzaile bat m masako gorputzaren higidura aztertzen ari dela (m' ia mugitzen ez dela jo dezakegu, eta, ondorioz, bertako sistema inertzializat har dezakegu). Koordinatu-jatorriarekiko indar-momentua nulua denez (indarra zentrala baita),

$$L = \text{ktea} \quad (11 - 56)$$

da, non L delakoa jatorriarekiko momentu angeluarra den.



11.16. irudia. Indar zentralen eraginpeko higidura lauaren adierazpena, higidura gertatzen ari deneko planoan.

Hori horrela bada, 5. gaian frogatu denez, higidura laua dela eta abiadura areolarra konstantea dela ondorioztatuko dugu (11.16. irudia), hau da,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{ktea.} \quad (11-57)$$

Beraz,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad (11-58)$$

zeren

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \quad (11-59)$$

baita, $\mathbf{k}$ bektore unitarioa planoaren perpendikularra den Oz ardatzari dagokiona izanik.

Bestalde, 11.16. irudian erraz nabari dezakegunez, $\mathbf{r}$ posizio bektorea duen m masako gorputzaren abiadura hauxe izango da:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \quad (11-60)$$

Honelatan, $\mathbf{u}_r$ eta $\mathbf{u}_\theta$ bektore unitarioak elkarren perpendikularrak direla kontuan hartuz,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (11-61)$$

Orain, $d\theta/dt$ delakoaren eta L momentu angeluarraren moduluaren arteko erlazioa erabiliz,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}. \quad (11-62)$$

Eta, azkenez, gorputz bien arteko indarra $V(r)$ potentzialetik eratorria bada, hauxe dugu higitzen ari den gorputzaren energia osoa:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (11-63)$$

zeinak, energiaren kontserbazio-legeak dioskunez, konstante dirauen.

Beraz, ondoko bi ekuazio diferentzial hauexek atera ditugu:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]}, \quad (11-64)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (11-65)$$

Ekuazio bi horietan oinarriturik, orbitaren ekuazio diferentziala lortzeko, aski da r eta θ koordenatuak erlazionatzea, denborarekiko menpekotasuna alde batera utzirik:

$$d\theta = \frac{Ldr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}}, \quad (11-66)$$

non E eta L , lehen esan dugunez, konstanteak diren.

Integrazioa egin ondoren,

$$\theta = \int \frac{Ldr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} + \theta' \quad (11-67)$$

dugu, θ' konstantea izanik.

Geroagoko kalkuluatarako komenigarria izango zaigunez, $u = 1/r$ aldagai-aldaketa burutuko dugu. Horren arabera, era honetara eman ahal izango dugu orbitaren ekuazioa:

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2mV(u)}{L^2} - u^2}}. \quad (11-68)$$

Jakina, hauxe da orbitaren ekuazioa $V(r)$ potentzial zentralerako, $L \neq 0$ deneko kasuetarako. Erraz froga daitekeenez, $L = 0$ denean, ibilbidea zuzena izango da, eta indar-zentrotik pasatuko da.

Indar grabitatorioaren kasuan, $V = -kr^{-1}$ motako potentziala sartu behar da aurreko emaitzan, indar grabitatorioen eraginpean higitzen diren gorputzen higidura ezagutzeko. Problema honi Kepler-en problema deritzo, eta hurrengo atalean aztertuko dugu.

11.5.2. Kepler-en problema

Bi partikularen problemari gaudela, bietako baten masa bestearena baino askoz handiagoa delako hurbilketari jarraituz ($M \gg m$), Kepler-en problemari dagokion indarra honelakoxea izanen da:

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (11-69)$$

$V = -kr^{-1}$ potentzial batetik eratorria, hain zuzen.

Problema honetan, k horren balioa ondokoa da:

$$k = \gamma mM. \quad (11-70)$$

Bestalde, lehen egin dugun aldagai-aldaketa berbera erabiliz, honako hau da potentziale-rako adierazpena:

$$V = -ku. \quad (11-71)$$

Eta, balio hau orbitaren ekuazioan sartuz,

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2}u - u^2}}. \quad (11-72)$$

Integral hori ebazteko, Matematikak eskaintzen digun bidea honako hau da: a , b eta c direlakoak konstanteak izanik,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(-\frac{b+2cx}{\sqrt{q}} \right), \quad (11-73)$$

idatz dezakegu, non $q = b^2 - 4ac$ den, $c < 0$ eta $b^2 - 4ac > 0$.

Gure problemari aplikatzeko, konstante horien balioak ondokoak izango dira:

$$a = \frac{2mE}{L^2}, \quad (11-74)$$

$$b = \frac{2mk}{L^2}, \quad (11-75)$$

$$c = -1. \quad (11-76)$$

Beraz, q delakoari dagokionez,

$$q = \left(\frac{2mk}{L^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \right). \quad (11-77)$$

Eta, azkenean lortuko dugun emaitza, honako hau izango da:

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{L^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}}. \quad (11-78)$$

Bukatzeko, alderantzizko aldagai-adaketa eginez ($u = 1/r$ ordezkatzuz), orbitaren ekuazioa lor dezakegu:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right], \quad (11-79)$$

edo beste konstante batzuen bidez idatzita,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta')}, \quad (11-80)$$

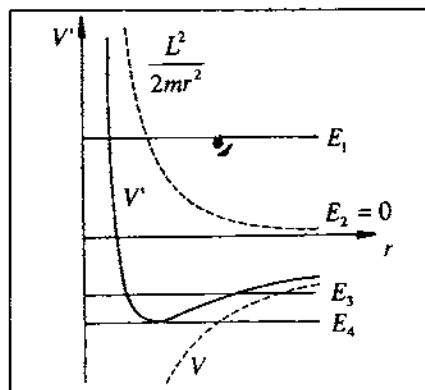
$$\text{non } p = \frac{L^2}{mk} \text{ eta } \varepsilon = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \text{ diren.}$$

Beraz, jatorrian kokaturiko foku batekiko konikaren adierazpena erdietsi dugu, ε delakoa *exzentrikotasuna* izanik.

Honaino heldu garelarik, derragun ezen orbitaren tankera ε magnitudearen menpekoa dela, ondoko eskemaren arabera:

$$\begin{aligned} \varepsilon > 1, E > 0 & : \text{hiperbola;} \\ \varepsilon = 1, E = 0 & : \text{parabola;} \\ \varepsilon < 1, E < 0 & : \text{clipse;} \\ \varepsilon = 0, E = -\frac{mk^2}{2L^2} & : \text{zirkunferentzia.} \end{aligned}$$

Eredu honetatik atera ditugun ondorioak bat datoz 11.17. iruditik atera ditzakegunekin:



11.17. irudia. Kepler-en problemari dagokion energia potentzial eraginkorren irudia.

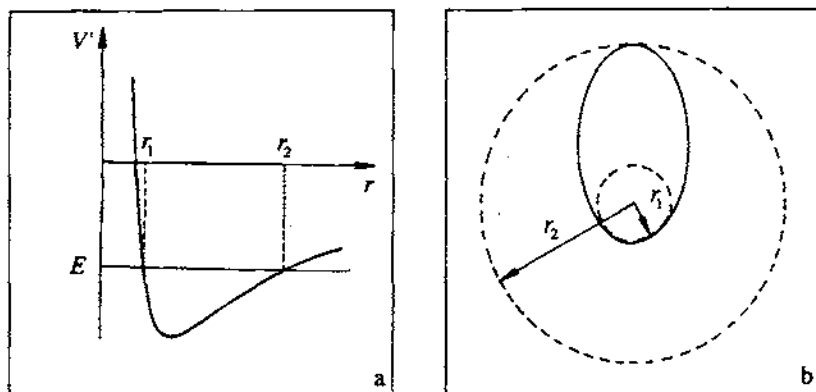
Irudi honetan, $V = -k/r$ eta $V' = V + L^2/2mr^2$, energia potentzial eraginkorra deritzona (ikus 6.8. atala), dira hain zuzen ere. Modu honetan, lehenago 6. gaian ikusitakoarekin bat eginik, hauxe idatz dezakegu:

$$E = V' + \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \quad (11-81)$$

Adierazpen honetan oinarriturik, energia osoaren balioen arabeko orbita posibleen azterketa egin dezakegu, energia potentzial eraginkorraren grafikoak erabiliz.

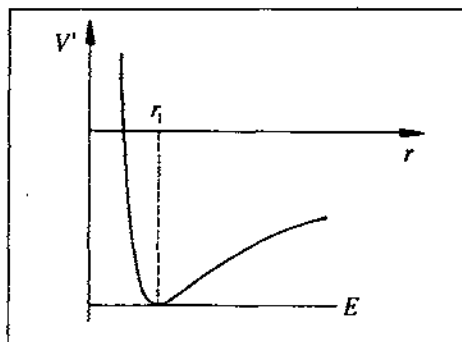
i) $E < 0$: **orbita eliptikoak eta zirkularrak.**

11.18. irudietan dakusagunez, eta energia zinetikoak positiboa izan behar duenez, bi distantziaren artean mugaturik geratuko da higidura (r_1 " r " r_2).



11.18. irudia. a) Energia negatiboari dagokion eskema. b) E energia negatiboari dagokion orbita eliptikoa.

Kasu berezi gisa, $E = -mk^2/2L^2$ denean, hots, energiak balio minimoa duenean, orbitak zirkularra izan behar du derrigorrez (11.19. irudia).



11.19. irudia. Energia minimoari higidura zirkularra dagokio ($r = r_1$).

Orbita zirkular hauetan, masen arteko distantziak konstante iraun ahal izateko, indar zentrifugoak eta grabitatorioak balio berekoak izan behar dute, hau da,

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2}; \quad (11-82)$$

hortaz, energia zinetikoa ondokoa izango da,

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r}, \quad (11-83)$$

eta energia osoa,

$$E_k = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r} = -\gamma \frac{mM}{2r} = -\frac{mk^2}{2L^2} < 0, \quad (11-84)$$

eta hori energia osoak har dezakeen baliorik txikiena da.

ii) $E > 0$: **orbita hiperbolikoak**

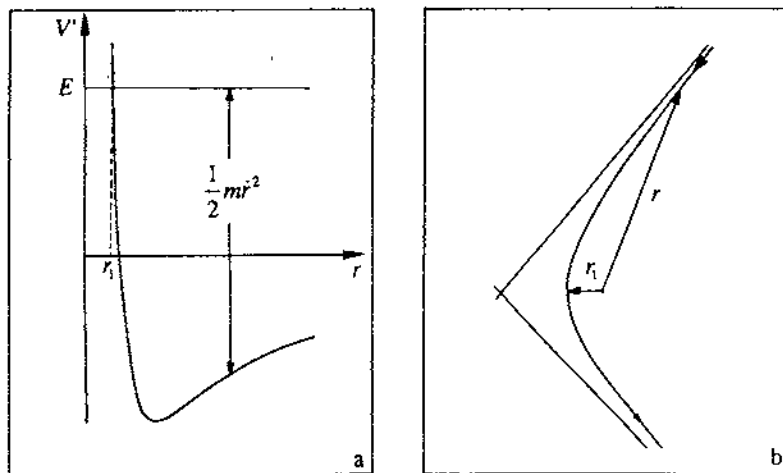
Ostera, energia positiboa denean, orbita irekia da, eta planeta infinituraino urrun daiteke, bertan oraindik ere abiadura ez-nulua izanik:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{r} > 0. \quad (11-85)$$

$r \rightarrow \infty$ kasurako limitea buruturik,

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 > 0, \quad (11-86)$$

$$\text{bertan } v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}} \text{ izanik.}$$



11.20. irudia. a) Energia positiboari dagokion eskema. b) Energia horri dagokion orbita hiperbolikoa.

iii) $E = 0$: **orbita parabolikoak**

Hauetan ere, orbita irekia da, eta infinituraino hel daiteke 'planeta', infinituan duen abiadura, ordea, nulua izanik:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{r}, \quad (11-87)$$

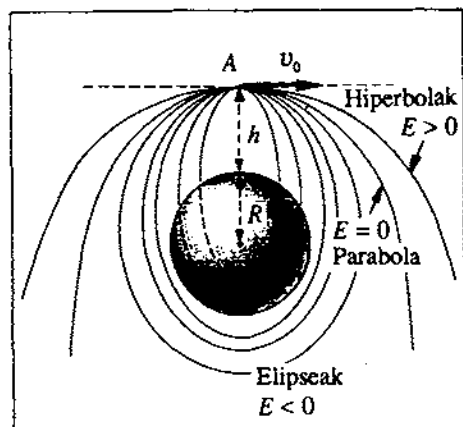
eta $r \rightarrow \infty$ kasurako limitea buruturik,

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = 0 \Rightarrow v_\infty = 0. \quad (11-88)$$

Aurreko kasu orokorretik abiatutik, modu berean azter daiteke Lurretik jaurtikitako satelite artifizialekin gertaturikoa (ikus 11.21. irudia).

Demagun sateliteak bere ibilbideko punturik altuenean (h altueran) v_0 abiadura horizontala duela. Energia osoa hauxe izango da:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM}{R+h}. \quad (11-89)$$



11.21. irudia. Lurraren satelite artifizial posibleen orbiten sailkapen eskematikoa.

Eta lehentxoago esandakoaren arabera, E delakoa positiboa, nulua eta negatiboa izan arau, ibilbidea hiperbolikoa, parabolikoa edo eliptikoa izanen da, hurrenez hurren. Proiektilen higidura ere, problema honen barnean aztertutik dago, 11.21. irudian ikus daitekeenez.

11.6. ZENBAIT ADIBIDE

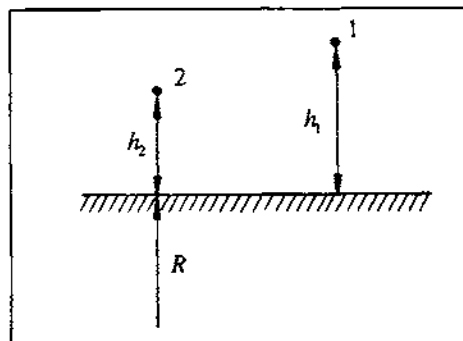
11.6.1. Lurraren gainazaleko potentzial grabitatorioa

Lehen ikusi dugunez, Lurak sortutako eremu grabitatorioaren energia potentziala, masa osoa zentroan kontzentratutik balego bezala kalkula daiteke:

$$E_p = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (11-90)$$

Eta R Lurraren erradioa izanik, lurrazalaren gainean h altueran dagoen edozein punturen erradioa $r = R + h$ eran adieraz daitekeenez,

$$E_p = -\gamma \frac{Mm}{R+h}. \quad (11-91)$$



11.22. irudia. Lurraren gainazaleko bi punturen azterketarako hurbilketa.

Beraz, 1 puntutik 2 puntura pasatzean (ikus 11.22. irudia) burutuko den lana honako hau izango da:

$$W = E_{p,1} - E_{p,2} = \gamma M m \frac{h_1 - h_2}{(R + h_2)(R + h_1)}. \quad (11 - 92)$$

Bestalde, h_1 zein $h_2 \ll R$ direla kontuan harturik,

$$W \approx \gamma \frac{M}{R^2} (h_1 - h_2) m. \quad (11 - 93)$$

Baina, $g = \gamma M/R^2$ lurrazalean gorputz askeek pairatzen duten azelerazioa da, grabitazioa dela kausa. Horrexegatik, era honetan idatzi ohi da energia potentzial grabitatorioa, lurrazaletik larregi aldentzen ez diren masetarako:

$$E_p = mgh. \quad (11 - 94)$$

11.6.2. Lurretik jaurtikitako gorputzen ihes-abiadura

Ihes-abiadura infinituraino heltzeko behar den abiadura minimoa da. Minimoa izateko, energia osoak nulua izan behar du:

$$E = \frac{1}{2} m v_{ih}^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0. \quad (11 - 95)$$

non R Lurraren erradioa eta v_{ih} delakoa ihes-abiadura diren. Beraz,

$$v_{ih} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 1,13 \cdot 10^4 \text{ m/s}. \quad (11 - 96)$$

Ikus daitekeenez, ihes-abiadurak ez du gorputzaren masaren menpekotasunik.

11.6.3. Lurraren zentrotiko r distantziatik pausagunetik askatutako gorputzak lurrazalera heltzean izango duen abiadura

Indar grabitatorioa kontserbakorra denez gero,

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \gamma \frac{mM}{R}. \quad (11 - 97)$$

Hasierako abiadura nulua izanik, $v_1 = 0$ da; beraz,

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right), \quad (11 - 98)$$

$$v_2 = \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (11 - 99)$$

Kasu berezi gisa, infinitutik datorkigun gorputzaren heltze-abiadura azter dezagun. $r \rightarrow \infty$ limitea aurreko emaitzan sartuz,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 1,13 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \quad (11 - 100)$$

eta kontserbakortasunak agintzen duen legez, ihes-abiaduraren balio berekoa da, hain zuzen.

12. gaia

Elastikotasuna

Hamargarren gaian solidoaren estatika aztertzean, puntu desberdinetan eginiko indarren arteko oreka zen aztergai nagusia. Oro har, indarrak kurtsoretzat harturik, berek sorturiko kurtso-re-sistema aztertu genuen, bere osotasunean. Hala ere, bertan ez genuen aztertu solidoaren zati edo parte batean eragiten duten indarrak zein diren, ez eta indar horiek gorputzaren forman duten eragina ere.

Izatez, han zurruntzat hartu genuen solidoa, alegia, indarren eraginpean ezer deformatuko ez balitz bezala, eta hori lehenengo hurbilketan soilik da egokia, hots, indarrak txikiak direnean. Hala ere, gorputz errealak ez dira zurrunak, deformagarriak baizik.

Lehenengo mailan, gorputz errealak solidoetan (deformagarriak) eta fluidoetan banatzen dira, nahiz eta bien arteko banaketa erabat zehatza ez den. Nolabait esateko, solido deformagarriek eite aski definitua dute, kanpo-indarren eraginez eite hori aldatu egin daitekeen arren, denboralki bederen. Solido errealeen portaera da, hain zuzen, gai honetan aztertuko duguna. Ostera, fluidoek ez dute eite definiturik eta oso indar txikiz, ia lanik egin gabe, eite hori aldatu egiten da, daudeneko ontziarena hartzeraino. Fluidoek ezaugarriak eta propietateak hurrengo gaian aztertuko ditugu.

Solidoen kasura itzuliz, diogun ezen orain arte erabilitako 'solido zurrun' kontzeptua eredu matematiko erabilgarria baino ez dela, zeren, azken batez, materia erreala deformatu egiten baita kanpo-indarren eraginpean, gehiago edo gutxiago. Deformazioa solidoaren barneko molekulen arteko indarrekin erlazionaturik dago, noski. Dena den, gai honetan ez gara portaera molekularraz arituko, magnitude neurgarriak aztertzeaz baizik.

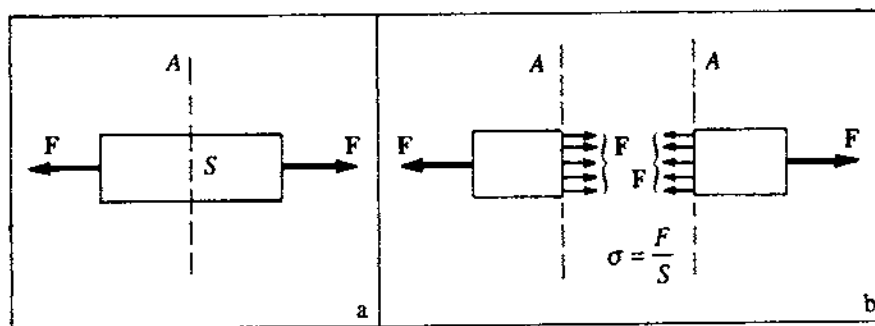
12.1. SOLIDOAREN BARNEKO ESFORTZUAK

Ingurune jarraituetan (bai solidoetan zein fluidoetan) bi eratako indarrak eduki behar ditugu kontuan: bolumen-indarrak eta gainazal-indarrak.

Bolumen-indarrak bolumen edo masaren arabekoak dira, kanpoko eremu batek sortuak. Adibide gisa, pisua aipa dezakegu. Gorputzean zehar hedaturiko indar horiek adierazteko, ingurune jarraituen kasuan magnitude intentsibo bat erabiltzen da: bolumen-unitateko indarra edo, bestela esanda, *masa-unitateko indarra*, aurrekoarekin dentsitateaz erlazionatzen dena. Hain zuzen ere, pisuaren kasuan masa-unitateko indarra $\mathbf{f} = -g\mathbf{k}$ da, g delakoa grabitatearen azelerazioa izanik. Era honetako indarrak eremuak aztertzen direnean ikusiko ditugu.

Bestetik, gainazal-indarrak ingurune jarraituaren barne-tentsioen adierazleak dira eta bertako elementu bat hartzean beraren gainazalean eragiten dutenak dira. Azken hauek dira gai honetan aztertuko ditugunak, eta ikusiko dugunez, kasu honetan ere magnitude intentsiboak erabiliko ditugu, *gainazal-unitateko indarrak* alegia, *esfortzu* edo *neke* izenez ere ezagunak direnak.

Adibide baten laguntzaz abiatuko gara, orekan dagoen solido baten barnean eragiten duten gainazal-indarrak aztertuz.



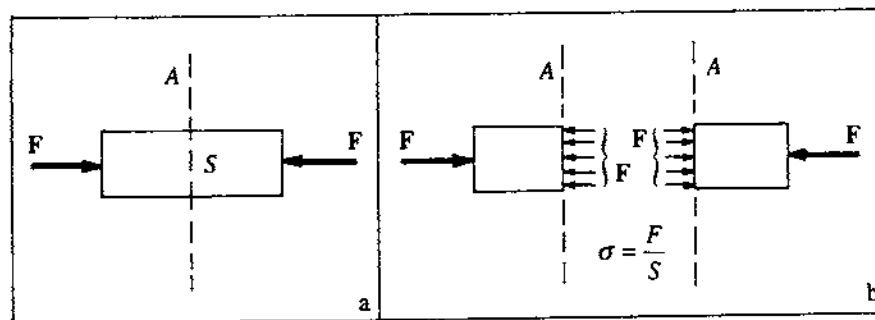
12.1. irudia. a) S sekziotako barra F tentsioaren eraginpean. b) A planoko tentsio-egoera.

Demagun barra bat, S sekzio uniformeduna, F indarren bidez tentsio-egoeran dugula (12.1. irudia). Azter dezagun sekzio normal bati dagokion plano baten tentsio-egoera. A plano muturretatik hurbilegi ez badago, tentsioa uniformeki banatuta dagoela jo dezakegu. Baldintza horietan, honela definitzen da gainazal horretako tentsio-egoera edo *nekea* :

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (12-1)$$

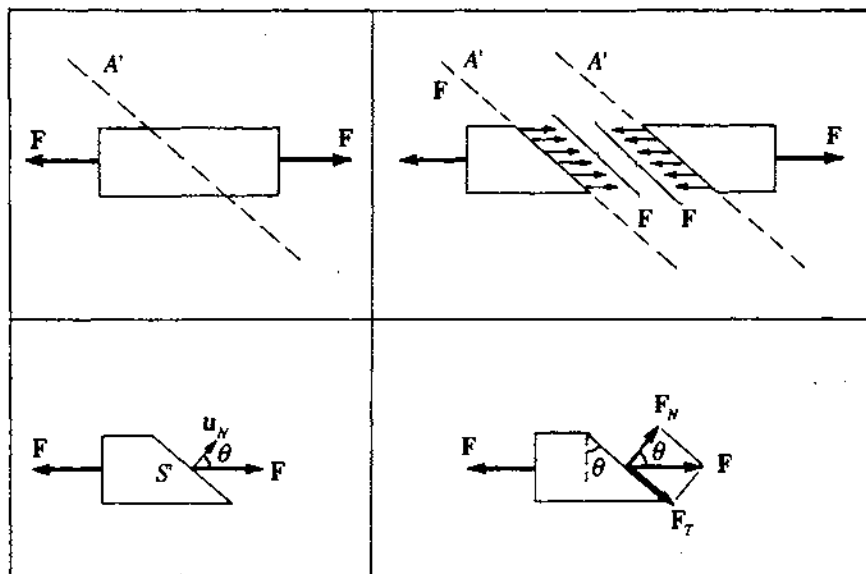
Kasu honetan neke hori tentsiozkoa da eta gainera normala, indarraren norabidea gainazalaren perpendikularra baita.

Hurrengo 12.2. irudian konpresio-egoeran dagoen barra bat adierazi da. Bertako nekea lehengo modu berean definitzen da eta, noski, hau ere normala da, nahiz konpresiozkoa izan.



12.2. irudia. a) S sekziotako barra F konpresioaren eraginpean. b) A planoko konpresio-egoera.

Dena den, hasierako kasura itzuliz, ikus dezagun zer gertatuko den, bestelako A' plano bateko tentsio-egoera aztertzean (12.3. irudia).



12.3. irudia. Tentsioan dagoen barraren kasuan, A' planoari dagokion indar-egoera.

Oraingoa indarraren norabidea ez da gainazalaren perpendikularra, eta, kalkuluen erraztasunerako, norabide normalean eta (norabide) tangenzialean deskonposa dezakegu:

$$F_N = F \cos \theta, \quad F_T = F \sin \theta. \quad (12-2)$$

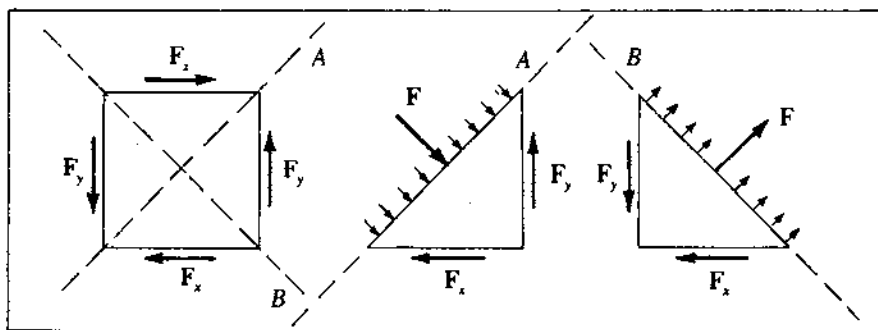
Indar hauek S' azalera duen A' gainazal lauan eragiten dute eta horrela *neke normala* (σ) eta *neke tangenziala* (τ) —azken hau *ebakidura-tentsioa* ere deitua— defini ditzakegu sekzio horretan, ondoko eran:

$$\sigma = \frac{F_N}{S'}, \quad (12-3)$$

$$\tau = \frac{F_T}{S'}. \quad (12-4)$$

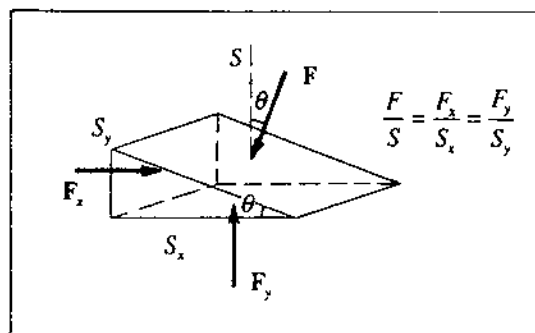
Dakusagunez, horrela definituriko *nekea* ez da magnitude bektoriala, zerbait korapilatsuago baizik, eta sekzio horretako nekea definitzeko, indar erresultanteaz gain (F) gainazal-elementuaren bektore unitarioa (u_N) ere ezagutu behar da. Izatez, nekea bigarren ordenako tentsorea da, eta solido baten barneko neke-egoera adierazteko, *neke-tentsorea* (edo *esfortzu-tentsorea* ere deitua) eman behar da.

Ingurune jarraitu baten barneko esfortzuak nolakoak diren ikusteko, bestelako adibide batzuk jar ditzakegu. Kasurako, demagun kubo baten gainean bi indar-bikotek eragiten dutela gainazalen norabide tangenzialean, 12.4. irudian adierazi den bezala. Solido hori orekan dago; halaber, orekan daude bertako elementu guztiak. Oreka horretan oinarrituz, solidoaren barneko plano desberdinetako nekeak azter ditzakegu; horrela, A planoan konpresioa dagoela eta B planoan tentsioa dagoela ikus dezakegu.



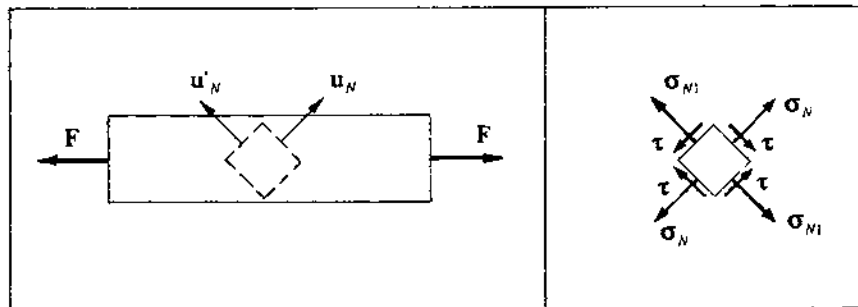
12.4. irudia. Kuboaren gainean bi indar-bikotek eragitean, kuboaren barneko plano desberdinetan sorturiko nekea.

Hurrengo gaien ikusiko dugunez, orekan dauden fluidoek ez dute inolako ebakidura-tentsiorik, zeren bestela planoak elkarrekiko labaintzen hasiko bailirateke. Hori dela eta, hidrostatan, fluidoan orekan alegia, gainazal-indar guztiak konpresiozkoak dira eta, hain zuzen, neke normalari *presio hidrostatikoa* deritzen eta balio berbera du puntu bateko norabide guztietan, 12.5. irudian adierazi den bezala.



12.5. irudia. Hidrostatan, fluidoan guztien egoera berdina da, konpresiozkoa. Konpresio horren balioa presio hidrostatikoa da.

Bukatzeko, hurrengo adibidean, tentsio egoeran haren barneko elementu baten neke-egoera adieraziko dugu. 12.6. irudian ikus daitekeenez, orokorki, gainazal guztietan neke normala eta neke tangentiala ageri dira.

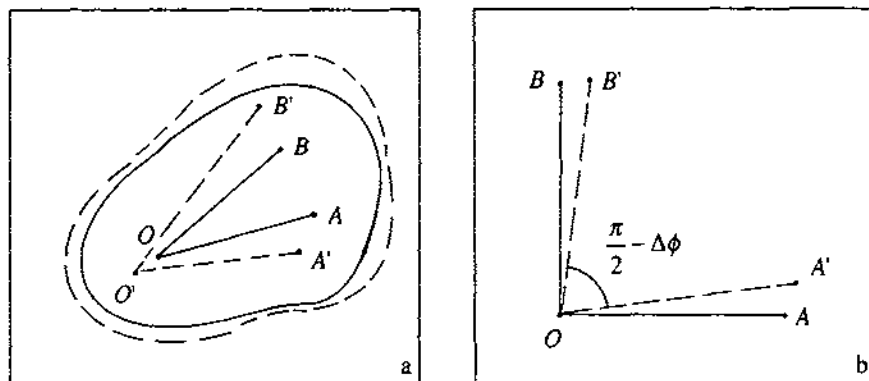


12.6. irudia. a) Haren bat tentsiopean, b) Plano desberdinetan neke normala (σ_N) eta neke tangentiala (τ) ageri dira.

12.2. DEFORMAZIO UNITARIOAK

Solido errealak ez dira guztiz zurrunk; ondorioz, indarren eraginpean aldatu egiten dira solidoaren barneko puntuen arteko posizio erlatiboak. Hain zuzen ere, erlazio bat dago solidoaren deformazioen eta neke-egoeraren artean eta horixe da atal honetan axola diguna.

Oro har, bi eratako deformazioak azter ditzakegu: luzetarakoak eta angeluarrrak. Lehenengo pausoa, modu orokorrean definituko ditugu. Demagun solidoaren barneko hiru puntu ditugula, A , O eta B , lerro berekoak ez direnak (12.7.a irudia). Indarren eraginpean A' , O' eta B' posizioetara pasatu dira. Solido hori deformatu egin dela esango dugu, baldin OA edo OB distantzietariko bat aldatu bada (luzetarako deformazioa) edo AOB angelua aldatu bada (deformazio angeluarra).



12.7. irudia. a) Solido deformagarriaren hiru punturen posizio-aldaketa.
b) Deformazio angeluarra.

Azterketarako, deformazio unitarioak (edo intentsiboak) hartzea komeni zaigu, hau da, luzera- edo angelu-unitateari dagozkionak. Honela, deformazioaren eraginez hasieran l_0 luzera duen elementua ($l_0 + \Delta l$) edukitzera pasatzen bada, luzetarako deformazio unitarioa modu honetan definitu ohi da:

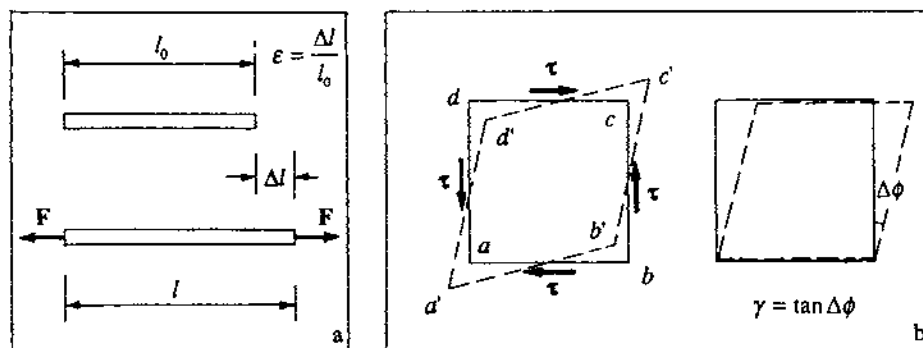
$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (12-5)$$

Era berean, hasieran $\pi/2$ angelua osatzen duten OA eta OB zuzenkiek deformazioaren ostean $(\pi/2 - \Delta\phi)$ angelua osatzen badute (12.7.b irudia), deformazio angeluar unitarioa honela definitu ohi da:

$$\gamma = \tan \Delta\phi \quad (12-6)$$

(kontuan eduki angelu txikietan $\tan \Delta\phi \approx \sin \Delta\phi \approx \Delta\phi$ dela).

Orain erraz ikus dezakegu nola aurreko atalean aipaturiko neke-mota bakoitzari deformazio unitario berezia dagokion.



12.8. irudia. a) Tentsioari dagokion luzetarako deformazioa. b) Ebakidura-tentsioari dagokion deformazio angeluarra.

Batetik, 12.8.a irudian tentsioan dagoen makila bat adierazten da; argi dagoenez, luzetarako deformazioa izango du. Tentsiopean egon ordez konpresioan balego, gauza bera egingo genuke, baina makila luzatu beharrean laburtu egingo litzateke, hots, Δl negatiboa izango litzateke. Bestetik, 12.8.b irudian ebakidura-tentsioen eraginpean dagoen elementu bat adierazi da; bertan deformazio angeluarra ageri da soilik, lehenengo hurbilketan aldean luzera konstantetzat harturik.

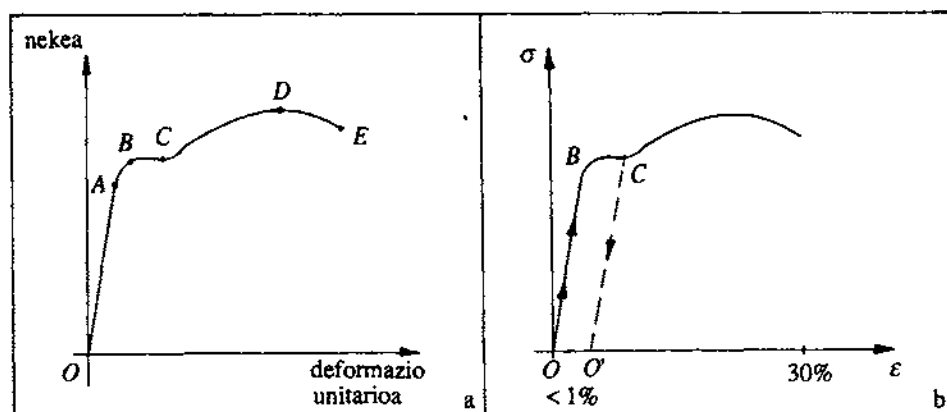
Aurreko atalean adierazitako kasuei bukaera emateko, presio hidrostatikoz sorturiko deformazio berezia aipatuko dugu. Kasu honetan bolumen-unitateko deformazioa aztertu ohi da; alegia, V_0 hasierako bolumena presioaren eraginez ΔV balioan aldatzen bada, bolumen-unitateko deformazioa honako hau izango da:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0}. \quad (12-7)$$

12.3. MATERIALEN PORTAERA

Orain arte, gorputz solidoen barneko esfortzuak alde batetik eta deformazioak bestetik aztertu ditugu, elkarrekin zerikusirik ez balute bezala. Hala ere, material bakoitzaren kasuan lotura estua dago horien artean, esperimentalki froga daitekeenez. Dena den, material guztiek ez dute portaera berdinek, ez eta hurrik eman ere. Adibide gisa hiru material berezi aipatuko ditugu: metal harikorra, metal ez-harikorra eta kautxua. Kasu guztietan tentsio hutsean dauden materialen portaera kontsideratuko dugu, erraztasunaren izenean, eta nekearen eta deformazioaren arteko erlazioa adierazten duen kurba aztertuko dugu.

Metal harikorraren kasuan, kurba horrek zenbait parte desberdin dauzka. Hain zuzen, 12.9.a irudian ikus daitekeenez, OA tartean nekea eta deformazioa elkarren proportzionalak dira; hortaz, OA tartea zuzena da, eta A puntua *proportzionaltasun-muga*. A eta B puntuen tartean ez da proportzionaltasunik gordetzen; baina, hala ere, eragiten diharduen tentsioa edo nekea desagertzean, materialak hasieran zeukan luzera berreskuratzen du, nolabait esateko OB kurba atzeranzko noranzkoan eginez, hots, B -tik O -ra. Gauzak horrela, OB tartean materiala *elastikoa* dela esaten da, B puntua *elastikotasun-muga* izanik.

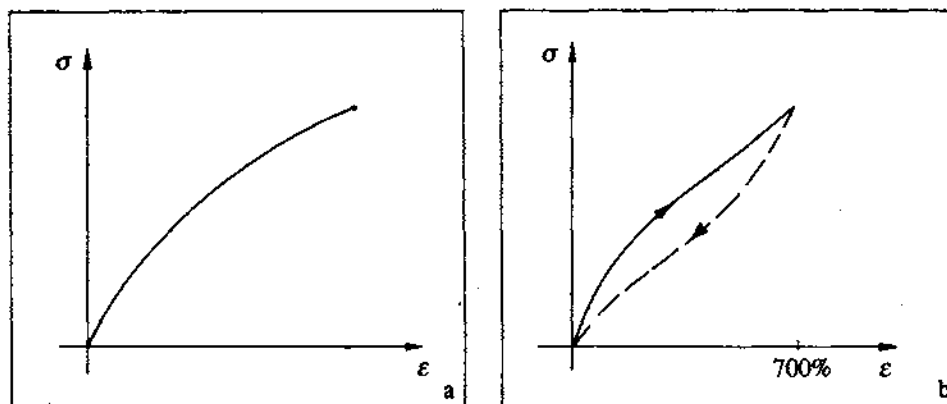


12.9. irudia. Metal harikorraren deformazioaren kurba.

Hortik gorako nekeak eragitean, deformazio unitarioa askoz arinago handitzen da eta, elastikotasunari dagokionez, oso portaera desberdina dauka. Hain zuzen, demagun C puntura heltzean kendu egiten dugula tentsioa gradualki (12.9.b); orduan ez da C puntutik O puntura berriz kurba bereberean zehar itzultzen, CO' kurbatik baizik, hau da, esfortzua kentzean hasierakoa baino handiagoa den luzera geratuko da, edo bestela esanda, *deformazio iraunkorra* lortuko da. BC tarteak ia horizontala da eta makila asko luzatzen da nekea kasik handitu gabe. Fenomeno horri *fluentzia* deritzen eta B puntuari dagokion nekeari, *fluentzia-nekea*.

C puntutik aurrera pasatzeko, berriro handitu behar da nekea, eta D puntura heldu arte portaera elastikoan baino askoz deformazio handiagoa lortzen da. Ostera, D eta E puntuen artean, nekea moteldu arren ere, deformatuz dirau materialak, harik eta E puntuan apurtu egiten den arte. B eta E puntuen artean materialak portaera ez-elastikoa edo plastikoa duela esaten da.

Elastikotasun-mugaren eta etendura-puntuaren artean deformazio handia badago, materiala *harikorra* dela esan ohi da. Preseski, metal askoren kasuan (urrea, kobrea,...) *harikortasuna* oso praktikoa gertatzen da. Ostera, muga horien arteko deformazio txikia bada, materiala *hauskorra* dela esaten da.



12.10. irudia. a) Burdinurtuaren diagrama. b) Kautxuaren diagrama.

Alboan dauden 12.10. irudietan, burdinurtuari (metal ez-harikorra) eta kautxuari dagozkien portaerak adierazi dira. Burdinurtuaren kasuan, alde batetik proportzionaltasuna ia berehala desagertzen da, eta bestetik ez da fluentziarik agertzen. Apurturaren prozesua ere modu hauskorrean gertatzen da. Kautxuaren kasuan deformazio unitarioak askoz ere handiagoak dira, nahiz eta proportzionaltasunik agertzen ez den. Bestetik material hau elastikoa da, zeren esfortzua desagertzean hasierako luzera berreskuratzen baitu. Hala ere, fenomeno oso interesgarria gertatzen da tentsioa desagertzean. Hain zuzen, 12.10.b irudian adierazita dagoenez, beste bide batetik itzultzen da hasierako puntura. Neke hazkorreko eta beherakorreko kurben desberdintasun horren kausaz, *histeresi elastikoa* gertatzen da, histeresi magnetikoaren antzekoa. Proportzionaltasuna dago histeresi-zikloaren azaleraren (kurba bien arteko azalera) eta materialaren barnean galduriko energia elastikoaren artean. Energia hori bero gisa agertzen da, noski. Horrelako kautxu edo goma batzuen histeresi handia oso baliagarria izaten da bibrazioak xurgatzeko, makina batzuen oinarrietan adibidez.

12.4. HOOKE-REN LEGEA, ELASTIKOTASUN-MODULUAK

Material harikorrak aztertzean ikusitako proportzionaltasun-aldeak garrantzi handia du fisikan eta ingeniarietan. Alde horretan *Hooke-ren legea* betetzen da, nekearen eta deformazio unitarioaren arteko proportzionaltasun zuzena adierazten duena hain zuzen ere. Newton-en garaian bizi izandako Robert Hooke (1635-1703) jakintsu ingelesak aztertu zuen lehen aldiz aipaturiko portacra, eta beraren ohorean izen hori eman zaio legeari. Bestelako hitzez esanda, «*nekearen eta deformazio unitarioaren arteko erlazioa konstantea da*» (proportzionaltasunaren mugen barnean, noski) eta konstante horri *elastikotasun-modulua* deritzen. Edozertara, mota desberdinetako esfortzuak daudenez, modulu desberdinak definitu ohi dira kasu bakoitzean.

Lehenengo eta behin, luzetarako neke eta deformazioak aztertuko ditugu. Esperimentuak eginez ikus daitekeenez, luzetarako nekeak maila bereko deformazio unitarioak sortzen ditu tentsioan zein konpresioan. Hain zuzen ere, bi magnitude horien arteko erlazio konstanteari *Young-en modulua* deritzen eta Y letraz adierazi ohi da:

$$Y = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F_N / S}{\Delta l / l_0}. \quad (12-8)$$

Deformazio unitarioa dimentsiorik gabeko magnitudea izanik, nekeak eta Young-en moduluak dimentsio berberak dituzte eta, beraz, 'indarra azalera unitateko' magnitudea da (MKS sisteman, $N \cdot m^{-2}$). Ingeniarietan kg/mm^2 unitatetan eman ohi da.

Ebakidura-nekeei dagokien deformazio unitarioa aztertzean lortzen den moduluari, *zurruntasun-modulua* edo *tortsio-modulua* deritzen, eta G letraz adierazi ohi da:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_T / S}{\tan \phi}. \quad (12-9)$$

Unitateei dagokienez, aurreko moduluari buruz esandakoa errepika dezakegu. Bestetik, material gehienetan zurruntasun-modulua Young-en moduluaren erdiaren eta herenaren tartekoa ohi da, geroago adieraziko den 12.1. taulan ikus daitekeenez.

Bukatzeko, presio hidrostatikoa bolumenaren txikiagotzearekin lotzen duen modulua emango dugu, *konprimagarritasun-modulua* deritzona hain zuzen:

$$B = - \frac{p}{\Delta V / V_0} \quad (12 - 10)$$

Adierazpen horretan zeinu negatiboa presioa gehitzearekin bolumena txikiagotu egiten dela kontuan hartuz jarri da, hots, gehikuntza negatiboa izanik modulua positiboa izan dadin. Modulu honen alderantzizkoari *konprimagarritasun-koefizientea* deritzo:

$$k = \frac{1}{B} = - \frac{\Delta V / V_0}{p} \quad (12 - 11)$$

12.1. taulan zenbait materialen elastikotasun-moduluen balioak ageri dira.

12.1. taula
Zenbait materialen elastikotasun-moduluak

Materiala	Young-en modulua	Zurruntasun-modulua	Konprimagarritasun-modulua
Altzairua	2,0	0,84	1,6
Aluminioa	0,70	0,24	0,70
Kobrea	1,1	0,42	1,4
Burdina	0,91	0,70	1,0
Letoia	0,91	0,36	0,61
Nikela	2,1	0,77	2,6
Beruna	0,16	0,056	0,077
Beira	0,55	0,23	0,37
Wolframioa	3,6	1,5	2,0

Unitateak: 10^4 kg/mm^2 .

12.5. POISSON-EN KOEFIZIENTEA

Esperimentalki ikus daitekeenez, makila bat tentsiozko esfortzu baten eraginpean luzatzean, zeharkako sekzioa txikiagotu egiten da; bestalde, konpresiozko esfortzuaren eraginpean laburtzean, zeharkako sekzioa handiagotu egiten da. Halaber, guztira jota, trakziopean bolumena handiagotu eta konpresiopean txikiagotu egiten dela neurtzen da. Esperimentu askoren bidez frogatu ahal izan denez, makila zirkularren kasuan, trakziopean zein konpresiopean, erradioaren deformazio unitarioaren ($\Delta r/r$) eta luzeraren deformazio unitarioaren ($\Delta l/l$) arteko erlazioa konstantea da material bakoitzerako. Konstante hori *Poisson-en koefizientea* izenez ezaguna da, eta honelaxe adierazten da:

$$\mu = - \frac{\Delta r / r}{\Delta l / l} \quad (12 - 12)$$

Koefiziente hori zenbaki adimentsionala da. Adierazpeneko minus zeinua, koefiziente positiboa izan dadin jarri da, erradioaren eta luzeraren gehikuntzak aurkako zeinukoak baitira.

Azter dezagun portaera horrek dakarren bolumen-aldaketa. Makilaren luzera era honetara handiagotzen da:

$$\frac{l + \Delta l}{l} = 1 + \frac{\Delta l}{l} = 1 + \varepsilon, \quad (12-13)$$

Poisson-en koefizientea erabiliz, honela laburtuko dira zeharkako luzerak:

$$\frac{r + \Delta r}{r} = 1 - \mu \varepsilon, \quad (12-14)$$

eta zeharkako azalera, honelaxe:

$$\frac{S + \Delta S}{S} = (1 - \mu \varepsilon)^2. \quad (12-15)$$

Beraz, makilaren bolumena erlazio honen arabera handiagotuko da:

$$\frac{V + \Delta V}{V} = (1 + \varepsilon)(1 - \mu \varepsilon)^2 \approx 1 + \varepsilon - 2\mu \varepsilon. \quad (12-16)$$

Azken adierazpen honetan ε oso txikia dela hartu dugu kontuan, eta, ondorioz, ε^2 arbuia dugu. Hots, bolumenaren gehikuntza unitarioa hauxe izango da:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon - 2\mu \varepsilon = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (12-17)$$

Ikus dezagun adierazpen honetatik atera daitekeen ondorio bat. Trakzioz eragitean $\varepsilon > 0$ denez gero, $\mu > 0,5$ balitz, bolumena txikiagotu egingo litzateke, gauza guztiz bitxia berau. Bestetik, $\mu = 0,5$ izanik ez litzateke bolumen-aldaketarik gertatuko.

Esperimentalki neur daitekeenez, goma eta parafinaren kasuetan μ koefizienteak ia 0,5 balio du, eta horrela trakzioz luzatzean ez da ia bolumena aldatzen.

Bere garaian Poisson-ek modu analitiko batez, materialen eraketarako hipotesi gisa teoria molekularra hartuz, $\mu = 0,25$ balioa kalkulatu zuen material isotropoen kasurako. Esperimentalki, metaletarako antzeko balioak neurtu izan dira. Adibidez, altzairuaren kasuan $\mu = 0,3$ da; hormigoia kasuan μ oso txikia da ($1/8 \div 1/12$) eta kortxoaren kasuan ia nulua.

12.6. MALGUKIAK

Teknologian era desberdinetako mekanismoetan erabiltzen diren tresnak dira malgukiak. Fisikaren arloan ere oso interesgarriak dira, zeren malgukiek sorturiko indarren eraginez higidura oszilakor harmonikoa sortzen baita.

Atal honetan malguki idealak aztertuko ditugu. Izen honekin materialaren proportzionaltasun-mugaren barnean lan egiten dutenak adierazi nahi ditugu. Hooke-ren legea betez alegia. Beraz, Young-en modulurako erabilitako definizioetik:

$$Y = \frac{F/S}{\Delta l/l_0}, \quad (12-18)$$

$$F = \frac{Y}{Sl_0} \Delta l. \quad (12-19)$$

Y , S eta l_0 konstanteak direla gogoraraziz, hirurak k konstante bakar batez bil ditzakegu. Bestetik l luzera-gehikuntza x koordenatuaren bidez adieraziz, honako hauxe dugu,

$$F = kx, \quad (12-20)$$

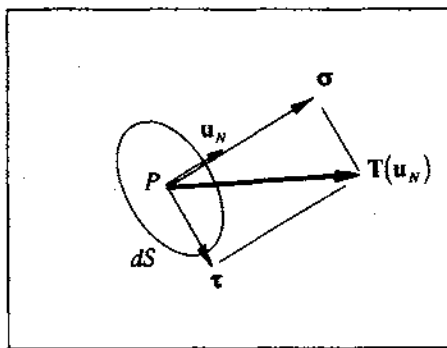
hots, luzapena indarraren proportzionala da. Izatez, Hooke-ren legea modu honetara proposatu izan zen hasieran; eta horixe da indar elastikoen eragina adierazteko era arrunta.

Dena den, gehienetan malgukiak helize modura jarritako burdinazko hariak dira. Kasu honetan, izatez, kontuan hartu behar den ebakidura-esfortzua da, baina edozertara, muga batzuen barnean, malguki osoaren luzapena indarraren proportzionala da, eta oraindik ere aplikagarria da $F = kx$ indarra.

k konstanteari malgukiaren *konstante berreskuratzailer* edo *zurruntasun-konstantea* deritzen. Dimentsioei dagokienez, indarra/luzera da, eta nazioarteko SI sisteman $N \cdot m^{-1}$ unitatetan ematen da.

12.7. ESFORTZUEN TENSOREA

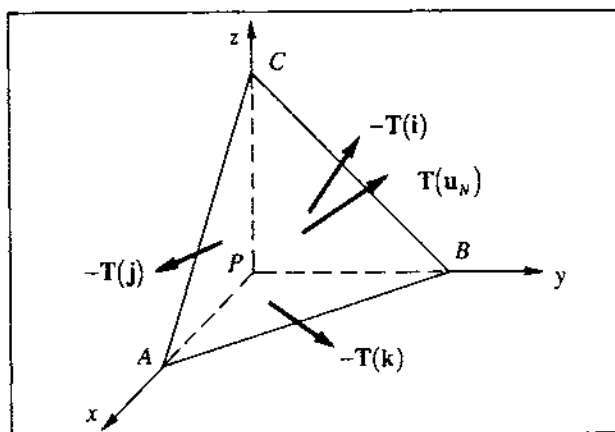
Ingurune jarraitu bateko puntu baten neke-egoera adierazteko, bektore bat baino zerbait gehiago behar da, zeren puntu bakoitzean infinitu esfortzu defini baitaitezke, puntu hori barnean daukan gainazal-elementu bakoitzerako bat hain zuzen. Adierazpen egokia neke edo esfortzuen tensorearen bidez ematen da, eta segidan ikusiko dugunez, puntu horretatik pasatzen diren hiru gainazal ortogonaletako neke-egoera ezagutuz, puntu horretatik pasatzen den beste edozein gainazaletakoa ezagut dezakegu.



12.11. irudia. dS gainazal infinitesimaleko neke-egoera.

Demagun ingurune jarraituko P puntutik pasatzen den dS gainazal lau infinitesimala, zeinaren bektore unitario normala u_N den (12.11. irudia). Dakigunez, gainazal horri dagokion nekea σ (esfortzu normala) eta τ (esfortzu tangentiala) nekeen bidez adieraz daiteke, edo bestela bien baturaz lortzen den T bektorearen bidez. Guztira, dS gainazalean egiten ari den indarra TdS da, eta T hori u_N bektorearen funtzioa da, $T(u_N)$ eran adieraz

dezakeguna. Ikus dezagun nola idatz dezakegun $\mathbf{T}$ bektorea hiru gainazal ortogonaletako nekeen bidez.



12.12. irudia. Tetraedro infinitesimalaren gainazal-ortogonalen nekeen adierazpena.

Demagun ingurune jarraituaren barnean $PABC$ tetraedroaren dinamika aztertzen ari garela, beronen PA , PB eta PC ertzak ardatz koordinatuaren paraleloak izanik (12.12. irudia). ABC gainazalaren bektore normala $\mathbf{u}_N$ da, beronen kosinu zuzentzaileak α , β , γ izanik; hots, $\mathbf{u}_N = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$. Beste aurpegietako bektore unitarioak $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ dira. Hona hemen tetraedroaren gainean eragiten duten bolumen-indarrak eta gainazal-indarrak:

- Bolumen-indarrak honelaxe adieraziko ditugu:

$$\Delta m \mathbf{f} = \rho \Delta V \mathbf{f}, \quad (12-21)$$

non ρ dentsitatea eta ΔV tetraedroaren bolumena diren.

- Bestalde, aurpegi desberdinetako gainazal-indarrak ondokoak dira:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{u}_N) \Delta S, \\ \mathbf{T}(-\mathbf{i}) \Delta S_x = -\mathbf{T}(\mathbf{i}) \Delta S_x, \\ \mathbf{T}(-\mathbf{j}) \Delta S_y = -\mathbf{T}(\mathbf{j}) \Delta S_y, \\ \mathbf{T}(-\mathbf{k}) \Delta S_z = -\mathbf{T}(\mathbf{k}) \Delta S_z, \end{cases} \quad (12-22)$$

eta azalerei dagokienez,

$$\begin{cases} \Delta S_x = \Delta S \cos \alpha, \\ \Delta S_y = \Delta S \cos \beta, \\ \Delta S_z = \Delta S \cos \gamma. \end{cases} \quad (12-23)$$

Beraz, bolumen- eta gainazal-indarrak kontuan edukiz, dinamikaren bigarren legcaren arabera,

$$\rho \Delta V \mathbf{f} + \Delta S [\mathbf{T}(\mathbf{u}_N) - \cos \alpha \mathbf{T}(\mathbf{i}) - \cos \beta \mathbf{T}(\mathbf{j}) - \cos \gamma \mathbf{T}(\mathbf{k})] = \rho \Delta V \mathbf{a}, \quad (12-24)$$

non a delakoa kontsideraturiko elementuaren azelerazioa den. Gaien berrordenaketa eginez eta ΔS azaleraz zatituz,

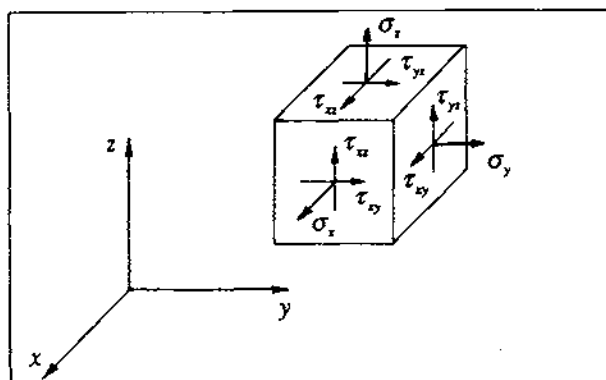
$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_N) - \cos \alpha \mathbf{T}(\mathbf{i}) - \cos \beta \mathbf{T}(\mathbf{j}) - \cos \gamma \mathbf{T}(\mathbf{k}) = \rho \frac{\Delta V}{\Delta S} (\mathbf{a} - \mathbf{f}); \quad (12-25)$$

eta tetraedroa gero eta txikiagoa eginez, limitean $\Delta V/\Delta S \rightarrow 0$ dela kontuan hartuz, azke-nean P puntuaren ondoko erlazioa lor dezakegu:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_N) = \mathbf{T}(\mathbf{i}) \cos \alpha + \mathbf{T}(\mathbf{j}) \cos \beta + \mathbf{T}(\mathbf{k}) \cos \gamma, \quad (12-26)$$

hots, hiru gainazal ortogonaletako neke-egoera zein den jakinik, beste edozein gainazaletakoa jakin daiteke.

Aurreko adierazpenaz baliatuz bestelako erara idatziko ditugu nekeak, osagai normal eta tangentialen bidez. Horretarako kontsidera dezagun ingurune jarraituko elementu kubiko ideal bat, alboko 12.13. irudian dagoen modukoa.



12.13. irudia. Kubo infinitesimalaren aurpegiei dagozkien nekearen osagai normal eta tangentialak.

Ondoko erara idatz ditzakegu $\mathbf{T}(\mathbf{i})$, $\mathbf{T}(\mathbf{j})$ eta $\mathbf{T}(\mathbf{k})$ bektoreak:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{i}) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}, \\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}. \end{cases} \quad (12-27)$$

Momentu angeluarraren kontserbazioa erabiliz froga daitekeenez, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Bestalde, adierazpen hauek $\mathbf{T}(\mathbf{u}_N)$ -ra eramanez, hauek dira $\mathbf{T}$ bektorearen osagaiak:

$$\begin{cases} T_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma, \\ T_y = \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma, \\ T_z = \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma, \end{cases} \quad (12-28)$$

eta emaitza hau honela adieraz daiteke matritzialki:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad (12-29)$$

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{u}_N, \quad (12-30)$$

$$\bar{\mathbf{T}} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \text{ izanik.} \quad (12-31)$$

Honela definituriko $\bar{\mathbf{T}}$ magnitudeari *esfortzuen tentsorea* deritzo eta beraren bidez edozein gainazal hartuta, hots, $\mathbf{u}_N$ bektore unitarioa ezagututa, gainazal horren gaineko neke-egoera zein den jakin daiteke. Ikus daitekeenez, bektorea baino korapilatsuago den zerbaitez —bigarren ordenako tentsore batez— adierazten da P puntuko neke-egoera. Izan ere, diogun ezen historikoki tentsore hitza adibide honetatik datorrela ('tentsio' hitzari lotuta). Bestalde, lorturiko adierazpena 8.4. atalean inertzia-tentsorea aztertzean lorturikoaren oso antzekoa da. Orduko kasuan bezala, oraingo tentsore hau ere bigarren ordenako tentsore simetrikoa da. Orduan egiten genuenaren antzera, simetrikotasun hori dela eta, hemen ere *norabide nagusiak* defini daitezke. Hauek zer diren azaltzea erraza da. Orokorki $\mathbf{T}(\mathbf{u}_N)$ eta $\mathbf{u}_N$ bektoreek norabide desberdinak dute. Hain zuzen, bi bektore horiek norabide berekoak egiten dituztenak dira norabide nagusiak. Hots, norabide nagusiei dagozkien gainazaletako nekeak normal hutsak dira, osagai normala baino ez dute.

Emandako erlazio tentsorialen bitartez ingurune jarraituko P puntuko neke-egoera definitzen bada ere, egoera elastikoa zein den jakiteko zerbait gehiago behar da. Bide beretik abiatuz, deformazio-egoera adierazteko deformazioen tentsorea defini daiteke, eta gero, emandako Hooke-ren legearen orokorpenez, bi tentsoreen arteko erlazioa adieraz daiteke. Dena den, liburu honetan ez gara azterketa horretan gehiago sartuko. eta eginiko aipamenarekin geratuko gara.

13. gaia

Fluidoek mekanika

Zazpigarren gaian partikula-sistemen dinamika aztertu genuen. Ez genuen zehaztu, ordea, zer eratako sistema zen, edo, hobeki esateko, han azalduko printzipioak edozein motatako sistemekin erabiltzeko modukoak ziren.

Hurrengo gai bietan sistema konkretu eta berezia aztertu genuen, solido zurruna hain zuzen. Sistema hori bere partikulen arteko loturaren bidez definitu genuen, partikula-bikoteen arteko distantziek konstante dirautela kontuan izanik. Hamabigarren gaian distantzia horien aldaketak aipatu ditugu elastikotasuna aztertzean, hala ere, solido-egitura mantenduz (solido deformagarria, hori bai). Gai honetan beste mota bateko sistema berezia aztertuko dugu, fluidoek osatzen dutena preseski. Horretarako, lehenik eta behin, fluido kontzeptuaren esangura definitu beharko dugu, denbora berean fluidoek ezaugarriak adierazten dituzten magnitudeak definituz, hala nola, biskositatea eta beste. Ondoren, fluidoek estatikaren eta dinamikaren funtsezko lege eta ekuazioak azalduko ditugu, dena Fisika Orokorreko testu bati dagokion mailan, hau da, kasu sinpleenak azterturik.

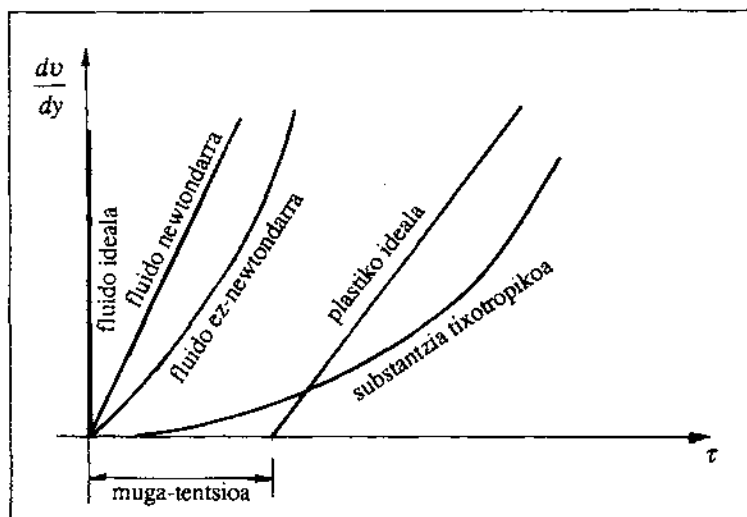
I. FLUIDOEN PROPIETATEAK

13.1. FLUIDOEN DEFINIZIOA ETA SAILKAPENA

Oro har, fluidoak ebakidura-tentsioen eraginpean etengabe deformatzen diren substantziak dira, ebakidura-tentsioak nahi bezain txikiak direlarik ere. Aurreko gaian ikusi dugunez, ebakidura-tentsioa gainazal baten gainean egiten den indarraren osagai tangentialaren eta azaleraren arteko erlazioa da, hau da, ebakidura-indarraren eta beronek eragiten duen gainazalaren azaleraren arteko erlazioa.

Emaniko definizioa hobeki ulertzeko, adibide berezi batetik abiatuko gara. Hain justu, 13.1. irudian adierazi den modura, bi xafla paralelo lau ditugu: 1 delakoa geldi dago eta 2 xaflaren gainean F indarrak eragiten du, xaflaren norabidean. Xafla bien artean substantzia bat dago. Xaflak nahiko luze eta zabalak dira bien arteko distantziarekin konparatuz, hegaletako efektuak arbuiaitu ahal izateko moduan.

F indarrak ebakidura-tentsioa sortzen du xaflen arteko substantzian. Xaflen azalera S baldin bada, ebakidura-tentsio horren balioa F/S izango da.



13.2. irudia. Material desberdinen portaera, Newton-en legearekin konparatuz.

Irudi honetan ebakidura-tentsioaren eta deformazioaren abiadura angeluarraren arteko erlazioa ageri da grafikoki. Dakusagunez, hiru eratako fluidoak aipatzen dira:

- *Fluido newtonarrak*. Hauek zehazki betetzen dute Newton-en legea. Biskositate-koefizientea konstantea da, hots, koefiziente horrek ez du ebakidura-tentsio-arekiko menpekotasunik.
- *Fluido idealak*. Berez, fluido newtonarren kasu bereziak dira; fluido idealen biskositate-koefizientea nulua da: $\mu = 0$. Hau da, barne-marruskadurarik gabekoak dira.
- *Fluido ez-newtonarrak*. Hauen kasuan ez dago erlazio linealik τ eta dV/dy direlakoan artean.

Horiez gain, plastikoen jokabidea ere adierazi da irudian. Ikus daitekeenez, muga-tentsiotik gora fluidoaren antzera jokatzen dute. Bestalde, substantzia tixotropikoak oso bereziak dira, eta berauen kasuan, biskositateak aurreko deformazio angeluarraren menpekotasuna du (inprimatzeko tintak era honetakoak ohi dira).

Biskositatearen arabera emaniko definizioaz gain, bestelako sailkapenik ere egin daiteke fluidoaren artean. Arruntena, konprimagarritasunaren arabera da. Labur esanda, alde batetik *likidoak* ditugu, ia-ia konprimaezinak, eta bestetik *gasak*, presioarekin dentsitatea nabarmenki aldatzen dutenak. Arrunki, likidoek berezko bolumena dutela esan ohi da, eta gasak dauden ontziaren bolumena hartzen dutela.

Dena den, aurreko sailkapenera itzuliz, oro har, gas arruntak eta lar lodiak ez diren likidoak fluido newtondartzat har daitezke lehenengo hurbilketan. Ostera, likido lodiak eta puntu kritikoaren inguruko egoceran dauden gasak ez-newtondartzat hartu behar izaten dira.

Atal honi amaiera emateko, interesgarri gerta daiteke, lehengo bi xafen kasuan mota desberdinetako substantziekin zer gertatzen den ikustea:

- Fluidoaren kasuan, goiko xafila abiadura konstantez higiarazteko, nahikoa da etengabeko indar infinitesimala egitea.
- Tartean plastikoa ipiniz gero, eta beraz xafilei itsatsirik egonik, goiko xafila mugikorra ez litzateke higituko muga-tentsiora heldu arte, eta hortik gainerako indar-gehikuntzek fluidoaren kasuan bezalako eragina edukiko lukete, abiadura konstantea sortuz.
- Solido elastikoen kasuan (xafilei itsatsirik egonik) deformazioak muga bat du, eta gero, sistema gelditu geratzen da orekan. Deformazioaren eta tentsioaren artean proportzionaltasuna dago, aurreko gaian ikusi dugunez.
- Xafilen artean hutsa balego (xafilak bata bestetik bereizirik mantenduz), goiko xafila ez litzateke abiadura konstantez higituko, azelerazio konstantez baizik.
- Xafilen artean solido ez-itsatsia badago, solidoaren arteko marruskadura agertzen da, eta goiko xafila abiadura konstantez higiarazteko, indar finitua (ez-infinitesimala) behar da.

13.2. BISKOSITATEA

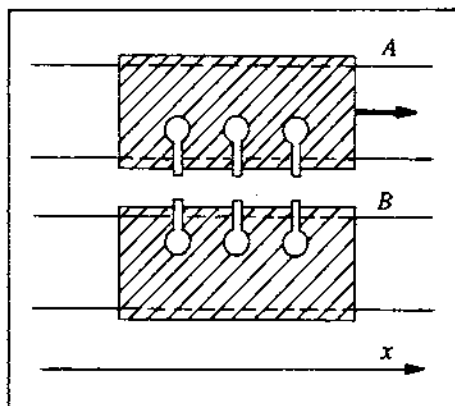
Biskositatea fluidoaren ezaugarria da. Beraren kausaz, fluidoek erresistentzia oposatzen diete ebakidura-tentsioei. Izan ere, biskositate izeneko magnitudea aurreko puntuan aipaturiko Newton-en legean ageri da, ebakidura-tentsioa eta beronen kausaz sortzen den deformazio angeluarraren abiadura erlazionatuz:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (13-3)$$

Biskositate-koefizienteak fluido-mota bakoitzaren ezaugarria da. Zenbait kasutan oso handia da, alkitranaren kasuan adibidez; likido arruntetan askoz txikiagoa da (uretan adibidez), eta gasetan (airean, nitrogenoan...) guztiz arbuigarria, aurrekoekin konparatuz. Esperimentalki ikusi denez, muga batzuen barnean, fluidoaren biskositate-koefizienteak ez du ia presioaren menpekotasunik; baina, oster, tenperaturaren menpekotasuna du.

Bi dira, batez ere, fluidoaren biskositatearen kausak: molekulen arteko kohesio-indarrak eta molekulen artean gertatzen den momentu linealaren transferentzia. Azken kausa hau, solidoetan ez bezala, fluidoaren ezaugarria da, zeren, dakigunez, fluidoaren barneko plano finko bat harturik, alde batetik besterako molekulen transferentzia gertatzen baita etengabe.

Molekulen transferentziak ebakidura-tentsioan duen efektua ulertzeko, Streeter liburutik hartutako adibide bat jarriko dugu. Demagun bi bagoi ditugula bi trenbide paralelotan, alboko 13.3. irudian adierazi denez. Bagoiek belakiak dituzte ura gordetzeko, eta gainera ponpa batzuk ura beste bagoira perpendikularki jaurtitzeko. Ponpak etengabe funtzionatzen ari dira, modu berean bagoi bietan; horrela, bagoi bakoitzaren masak (hots, ur-kantitateak) konstante dirau denbora guztian.



13.3. irudia. Molekulen transferentziaren kausaz sortzen den biskositate-efektua azaltzeko ereduak.

Demagun *A* bagoia eskuinerantz higitzen ari dela hasierako aldiunean, eta *B* bagoia geldirik dagoela. Bigarren bagoi honi heltzen zaion uraren momentu linealak *x* norabidean osagai ez-nulua duenez, *B* bagoia higitzen hasiko da poliki; eta, alderantziz, *A* bagoia balaztatzen. Momentu linealaren transferentzia gertatzen ari da eta ebakidura-tentsio birtual baten funtzioa betetzen ari da. Modu berean, fluidoaren barnean plano finko bat kontsideraturik, antzeko efektua gertatzen da molekulen transferentziari dagokionez, eta horrek zerikusia du biskositate-koefizientearekin.

Biskositatearen kausa nagusiak zein diren aipatu ondoren, ikus dezagun tenperatura-ren arabera nola aldatzen den, fluido-mota desberdinen kasuan. Hain zuzen, esperimentalki neurtu denez, likidoen biskositatea txikiagotu egiten da tenperatura goratzean. Gasena, oster, handiagotu. Zer dela eta portaera desberdin horiek?

Likidoetan, kohesio-indarrek askoz ere eragin handiagoa dute biskositatean, momentu linealaren transferentziak baino. Tenperatura goratzean, bibrazio-maila handiagoa denez, kohesioa txikiagotu egiten da; momentu linealaren transferentzia, berriz, handiagotu. Erlatiboki lehenengoak garrantzi handiagoa duenez, biskositatea txikiagotu egiten da.

Gasetan, oster, alderantziz gertatzen da. Hauetan momentu linealaren transferentzia eduki behar da nagusiki kontuan; horregatik, biskositatea handitu egiten da tenperatura-rekin.

Esandakoa osatzeko, biskositate kontzeptuari buruzko ohar bat egin behar dugu. Oro har, fluidoan dinamikan erabili behar den kontzeptua da. Estatikaren kasuan deformazio angeluarraren abiadura nulua denez, hots, fluido-geruzen arteko higidurarik ez dagoenez, $dv/dy = 0$ da, eta ondorioz ez da ez ebakidura-tentsiorik, ezta biskositatearik ere, kontsideratu behar.

13.2.1. Biskositatearen unitateak

Azter dezagun, lehenik, biskositate-koefizientearen dimentsioak zein diren. (13-3) adierazpenetik μ -ren dimentsio-ekuazioa lor dezakegu:

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{dv/dy} \right] = ML^{-1}T^{-1}. \quad (13-4)$$

Preseski, cgs sisteman, biskositatearen unitateari *poise* deritzo (P laburduraz eman ohi da), J. L. M. Poiseuille (1799-1869) mediku eta filosofo frantziarraren ohoretan ipinitako izena beratu, eta honela adieraz daiteke oinarritzko unitateen bidez:

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ dina} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (13-5)$$

Poise unitatea handi xamarra denez, oso erabilia da *zentipoise* izeneko unitatea: $1 \text{ zentipoise} = 1 \text{ cP} = 10^{-2} \text{ P}$. Hain zuzen, urak 20°C -ko tenperaturan $1,0$ zentipoiseko biskositate-koefizientea du.

MKS sisteman biskositate-unitateari *poiseuille* deritzo (Pl),

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}, \quad (13-6)$$

eta erraz egiazta daitekeenez,

$$1 \text{ Pl} = 10 \text{ P}. \quad (13-7)$$

Bestalde, μ koefizientea *biskositate absolutua* edo *biskositate dinamikoa* izenez ere ezaguna da. Horretaz, 13.1. taulan biskositate dinamikoaren zenbait balio adierazi dira, baita tenperaturarekiko aldaketa ere.

13.1. taula
Biskositate-koefizienteak (μ)

Tenperatura ($^\circ\text{C}$)	Errizino-olioa (poise)	Ura (zentipoise)	Airea (mikropoise)
0	53	1,792	171
20	9,86	1,005	181
40	2,31	0,656	190
60	0,80	0,469	200
80	0,30	0,357	209
100	0,17	0,284	218

13.2.2. Biskositate zinematikoa

Zenbait kasutan beste koefiziente bat erabiltzen da, ondoko eran definiturikoa hain zuzen:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (13-8)$$

ν delako honi *biskositate zinematikoa* deritzo eta biskositate dinamikoa dentsitateaz zatituz lortzen da. Preseski, cgs sisteman biskositate zinematikoaren unitateari *stokes* deritzo (St):

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\rho} \right] = L^2 T^{-1}, \quad (13-9)$$

$$1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (13-10)$$

Hemen sakonki aztertuko ez badugu ere, diogun ezen biskositate zinematikoak paper garrantzitsua jokatzen duela fluidoaren garraioaren azterketan, karga-galera deritzona kalkulatzeko (ikus 13.9. atala). Azken batez, garraiatzen den fluidoaren masa-unitateko galera adierazten da beraren bidez, eta hori oso kontuan hartzekoa da fluidoaren banaketarako hodien diseinuan.

II. FLUIDOEN ESTATIKA

13.3. PRESIO HIDROSTATIKOA. HIDROSTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA

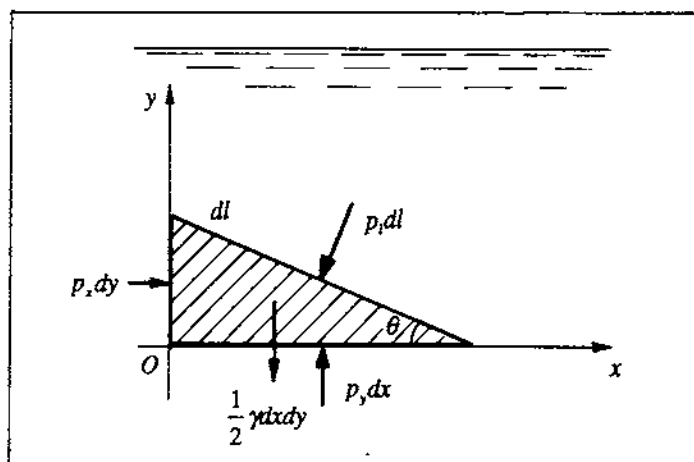
Fluidoaren Estatikaren azterketan abiatzeko, kontzeptu berezi bat definitu behar dugu lehenik eta behin: *presio hidrostatikoa*, edo laburrago esanik, *presioa*.

Gainazal lau batean eragiten duen batez besteko presioa gainazal horren gainean perpendikularki eragiten duen indarra beraren azaleraren balioaz zatituz lortzen da. Beraz:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (13-11)$$

Zatiketa hori limitera eramanez, S azalera gero eta txikiagoa eginez, puntu bateko norabide batean (azaleraren perpendikularren norabidean) dagoen presioa definitu ohi da. Segidan ikusiko dugunez, geldirik dagoen fluido ideal batean puntu bateko presioa kontsideratzean, presioak balio berbera du norabide guztietan.

Hurrengo azalpena errazteko, bi dimentsiotan aztertuko dugu problema, baina azalpena erraz orokor daiteke hiru dimentsiotako kasurako. Demagun ziri formako fluido-elementu prismatiko bat (altuera unitatekoa), geldirik dagoen fluido batean (13.4. irudia). Ez dago, beraz, ebakidura-tentsiorik, bestela desplazamenduak egongo bailirateke. Indarrak (presioak alegia) gainazalen norabide perpendikularrean eragiten ari dira soilik.



13.4. irudia. Orea estatikoan dagoen fluidoaren elementu prismatikoaren eragiten ari diren indarrak.

Irudian, elementu diferentzial horretan eragiten ari diren indarrak adierazi dira, non

$$p_x : 1 \cdot dy \text{ aurpegiko batez besteko presioa,}$$

$$p_y : 1 \cdot dx \text{ aurpegiko batez besteko presioa,}$$

$$p_l : 1 \cdot dl \text{ aurpegiko batez besteko presioa,}$$

$$\gamma : \text{pisu espezifikoa (batez besteko balioa)}$$

diren (irudiko planoaren norabide perpendikularrean prismak duen altuera 1 baliokoa dela kontsideratuko dugu). Hortaz, x eta y norabideetako oreka-ekuazioak hauek dira:

$$p_x dy - p_l dl \sin \theta = 0, \quad (13-12)$$

$$p_y dx - p_l dl \cos \theta - \frac{\gamma dx dy}{2} = 0, \quad (13-13)$$

non, geometrikoki ikus daitekeenez,

$$\sin \theta dl = dy, \quad (13-14)$$

$$\cos \theta dl = dx \quad (13-15)$$

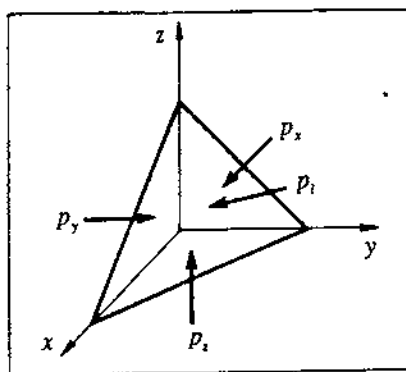
diren. Beraz, aurreko ekuazioak ondoko eran adieraziko ditugu:

$$p_x dy - p_y dx = 0, \quad (13-16)$$

$$p_x dx - p_l dx - \gamma \frac{dx dy}{2} = 0. \quad (13-17)$$

Bigarren ordenako diferentzialak arbuiauz, limitean, O puntuan norabide guztietan dagoen presioa berbera dela ikus daiteke, hots,

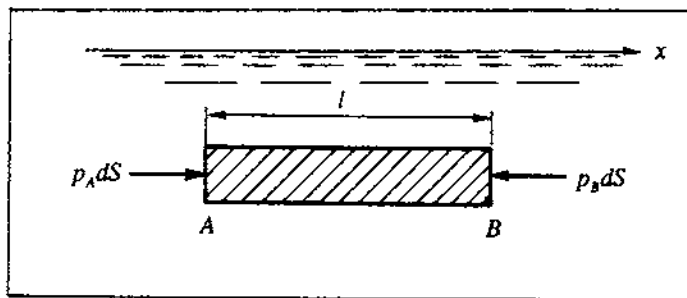
$$p_x = p_y = p_l. \quad (13-18)$$



13.5. irudia. Oinarritzko tetraedroa hiru dimentsiotan.

Arazo hau hiru dimentsiotan frogatu nahi bagenu, 13.5. irudiko elementua (tetraedroa) aztertuko genuke eta emaitza berbera lortuko genuke (irakurleak ariketa modura frogatu dezake hori).

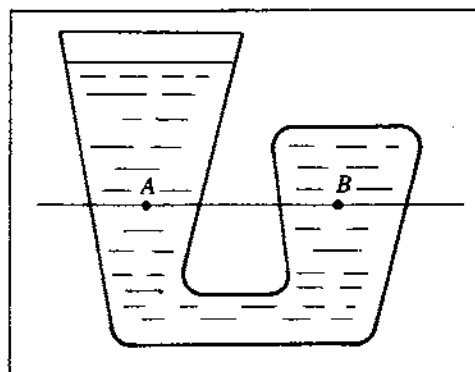
Puntu bateko norabide desberdinetan dagoen presioa berbera dela ikusi ondoren, goazen orain puntutik puntura dagoen presio-aldaketa aztertzeraz. Lehen pauso batean, horizontal bereko puntuetan presio berbera dagoela ikusiko dugu.



13.6. irudia. Altuera diferentzialeko prisman, norabide horizontalean eragiten ari diren presio-indarrak.

Demagun 13.6. irudian ageri den fluido-elementu prismatikoaren oreka aztertzen ari garela. Bertan, x ardatzaren norabidean eragiten duten indar bakarrak $p_A dS$ eta $-p_B dS$ dira. Argi ikus daitekeenez, fluidoaren orekan dagoenez,

$$p_A dS - p_B dS = 0 \rightarrow p_A = p_B. \quad (13 - 19)$$



13.7. irudia. Altuera berean dauden A eta B puntuetan presio berdina dago.

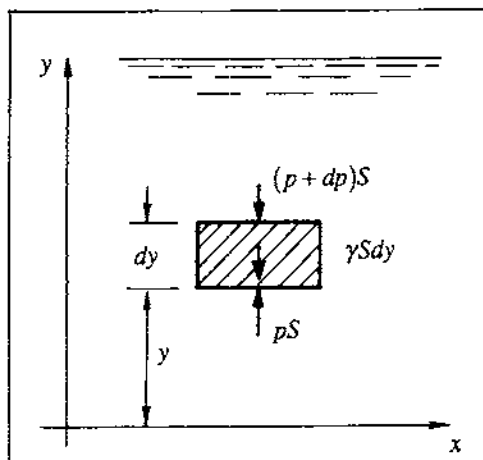
Emaitza hori erraz orokor daiteke horizontal bereko puntu guztietara, eta, horrela, alboko 13.7. irudian, presio berbera dago A eta B puntuetan, A eta B puntuak fluidoaren barneko lerro horizontal batez lot baitaitezke.

Eman dezagun orain bigarren pausoa, bertikalaren norabidean dagoen presio-aldaketa ikusteko. Demagun 13.8. irudiko prisma bertikala. Beraren oinarriaren azalera S balio du, eta altuera infinitesimala du, dy . Alboko irudian, orekan, y norabidean eragiten ari diren indarrak adierazi dira. Orekan daudenez, erresultanteak nulua izan beharko du,

$$pS - (p + dp)S - \gamma S dy = 0, \quad (13 - 20)$$

hots,

$$dp = -\gamma dy. \quad (13 - 21)$$



13.8. irudia. Altuera diferentzialeko prisma norabide bertikalean eragiten ari diren indarrak.

Ekuazio diferentzial hori *Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa* da. Bertan, presioaren aldakuntza altueraren aldakuntzarekin erlazionatu da. Pixka bat aztertuz ikus dezakegunez, presioaren aldaketa fluido-elementuaren pisuaren ondorio zuzena da.

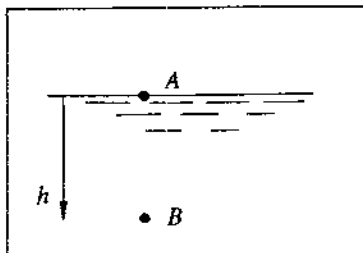
Aurreko ekuazio diferentziala guztiz orokorra da eta fluido konprimagarri zein konprimaezinen kasurako balio du. Dena den, *fluido konprimaezinen* kasuan erraz integra daiteke ekuazio hori, zeren, $\gamma = \text{ktea eginez}$, hauxe baitugu:

$$\int dp = -\gamma \int dy, \quad (13-22)$$

$$p = -\gamma y + K, \quad (13-23)$$

non K konstantea y koordenatuaren jatorriaren aukeraren arabera den.

Puntu honi bukaera emateko, ohar batzuk egingo ditugu:



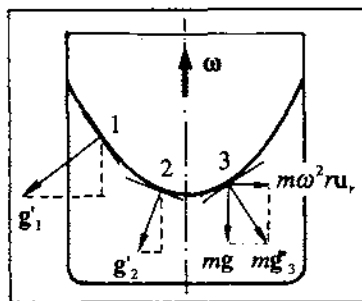
13.9. irudia. A puntutik B puntura pasatzean dagoen presioaren gehikuntza altuera-desberdintasunaren proportzionala da.

1. Batzuetan ohitura dago, presioaren gehikuntza sakoneraren arabera emateko. Hots, h koordenatua gainazaletik beherantz neurtzen da. Kasu horretan era honetara kalkulatzen da A puntutik B puntura (13.9. irudia) dagoen gainpresioa:

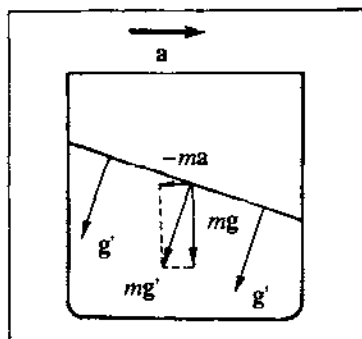
$$p_B - p_A = \Delta p = \gamma h. \quad (13-24)$$

2. Fluidoan Estatika erlatiboa aztertzean, azelerazioak badago, inertzia-indarrak ere hartu behar dira kontuan, eta grabitate 'eraginkorrak' (irudietako g' delakoak) ez du bertikalaren norabidea; ezta kanpoko gainazalak horizontalarena ere, g' delakoaren perpendikularrena baizik; eta hori gainazalaren puntu bakoitzean gertatzen da.

Hain zuzen, 13.10. eta 13.11. irudietan horrelako bi adibide adierazi dira. Lehenean, fluido biskatsua biraka jarri da ontzi batean ω abiadura angeluarraz. Biraka ari den sistema ez-inertzialean fluidoaren orekan dago. Indar zentrifugoaren eraginez, gainazalak paraboloiden baten forma hartzen du. Bigarrenean, ontziak azelerazio konstantea jasaten du eta sistema ez-inertzial horretako oreka erlatiboan gainazal laua da, baina aldatasarekin; hots, ez da horizontala.



13.10. irudia. Ontzia biraka ari delarik, fluidoaren gaineko gainazalak paraboloiden baten forma hartzen du.

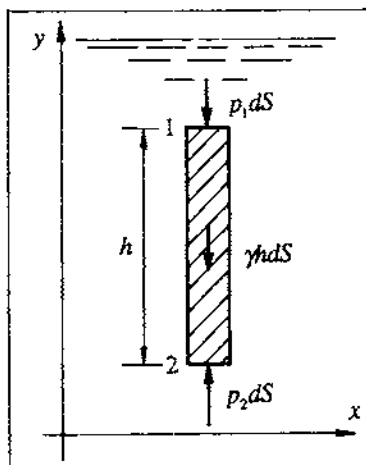


13.11. irudia. Ontzia azeleraturik egotean, beraren sistemako grabitate eraginkorra ez da bertikalaren norabidekoa.

3. Zer esanik ez, hemen ez ditugu gainazal-tentsiozko problemak kontsideratu, fluidoaren barneko arazoak baizik. Gainazal-tentsiozkoak hurrengo gaian aztertuko ditugu.
4. Pascal-en printzipioa ere gehi daiteke, likido guztiz konprimaezinen kasuan edozein puntutan eginiko presio-aldaketa likidoko beste puntu guztietara hedatzen dela esanez. Dena den, arazo hau uhin mekanikoen hedapenean aztertuko da zehatzago, uhinen hedapen-abiadura kontuan hartuz.

13.4. FLOTAZIOAREN ARAZOA

Flotazioaren funtsa ulertzeko, Hidrostatikaren ekuazioan oinarrituko gara; bestalde, kalkuluak eta azalpenak errazteko, fluido konprimaezinen kasua aztertuko dugu.



13.12. irudia. Fluidoaren barneko prisma, norabide bertikalean eragiten ari diren indarrak.

Demagun fluidoaren barneko prisma bertikal bat, zeinaren oinarriaren azalera dS den. Horri dagokionez, 13.12. irudian y norabidean prisma horren gainean eragiten ari diren indarrak adierazi dira. Fluido konprimaezina denez, prismaren pisua $\gamma h dS$ da. Orekan,

$$-p_1 dS - \gamma h dS + p_2 dS = 0, \quad (13-25)$$

$$(p_2 - p_1) dS = \gamma h dS; \quad (13-26)$$

hau da, 1 eta 2 puntuen arteko presio-desberdintasuna azalera-unitateko prismaren pisua da:

$$p_2 - p_1 = \gamma h. \quad (13-27)$$

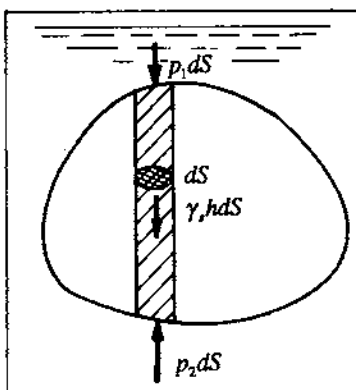
Izatez, ondorio hau zuzenki lor dezakegu Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa aplikatuz ere.

Dena den, presio-aldaketa nolakoa den ikusi ondoren, kontsidera dezagun orain fluidoaren barnean jarri den solido bat, eta ikus dezagun nolakoak diren solido horretan eragiten duten indarrak.

Demagun solidoaren prisma bertikal bat, eta azter ditzagun bertan eragiten duten indarren osagai bertikalak, prismaren sekzio zuzena dS izanik (13.13. irudia).

- Beheranzko indarra, solidoaren pisuaren kausaz: $\gamma h dS$.
- Goranzko indarra, presio-desberdintasunaren kausaz:

$$(p_2 - p_1) dS = \gamma h dS. \quad (13-28)$$

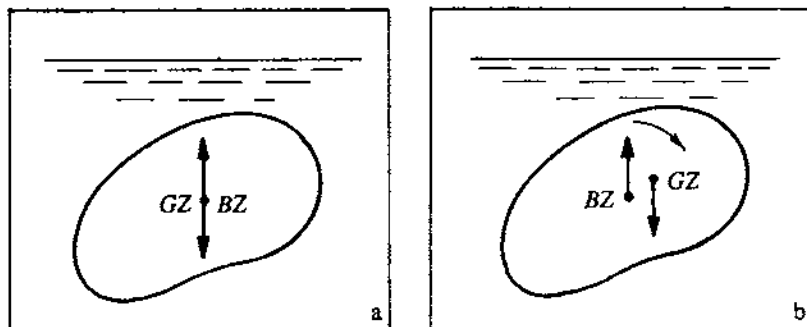


13.13. irudia. Solidoaren prisma bertikalean eragiten ari diren kanpo-indarrak.

Hemen γ_f eta γ_s fluidoaren eta solidoaren pisu espezifikokoak dira. Dakusagunez, $\gamma_f > \gamma_s$ bada, solidoak gorantz egingo du eta flotatu egingo du. Ostera, $\gamma_f < \gamma_s$ bada, hondora joango da.

Prisma diferentzial horrekin egin duguna solidoa osatzen duten prisma guztiekin eginez, erraz lor daiteke Arkimedes-en printzipioa: «*Fluido baten barnean dagoen solidoak gorantz indar edo bultzada bat jasaten du, eta bultzada horrek solidoak desplazaturiko fluidoaren pisuaren balioa du*». Bultzadaren aplikazio-zentroa, fluido desplazatuaren grabitate-zentroan jarri behar da.

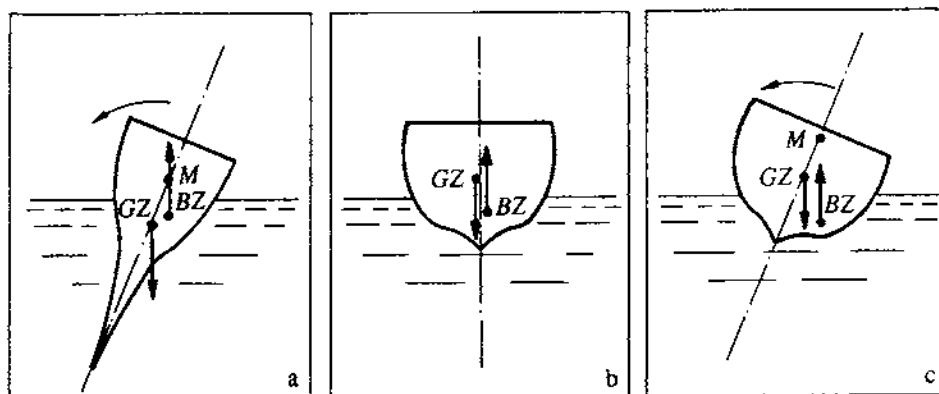
Aipaturiko zehaztasun honen ondorioz, uretan dauden gorputzen orekari buruzko zenbait iruzkin egin ditzakegu. Esan dugunez, gorputz solido homogeneo bat urpean sartzean bultzadaren zentroa (BZ) eta solidoaren grabitate-zentroa (GZ) puntu berean daude (13.14.a irudia). Ostera, solidoa homogeneoa ez bada, bultzadaren eta pisuaren arteko momentua azaltzen da, gorputza jarrera berezian jartzeko joera agertuz, 13.14.b irudian adierazi denez.



13.14. irudia. Bultzada-zentroaren eta grabitate-zentroaren posizioak. a) Solido homogeneoa. b) Solido ez-homogeneoa.

Dena dela, aurreko irudietan uretan erabat murgildurik dauden gorputzen kasuak aipatu ditugun arren, interesgarriagoak gerta daitezke praktikan, uraren gainazalean flotatzen ari diren itsasontzien arazoak. Kasu horretan, oreka egonkorra izan dadin, nahikoa da itsasontziaren grabitate-zentroa bultzada-zentroa baino beherago eta bertikal berean

egotea. Izan ere, grabitate-zentroa zenbat eta beherago egon, hobe; horregatik belaontzien kasuan berunez lastratzen da behealdea, grabitate-zentroa beheartzeko (ikus 13.15.a irudia). Hala ere, baldintza hori ez da beharrezkoa eta gehienetan ez da horrela izaten; zer esanik ez, horretan garrantzi handia du itsasontziaren formak.



13.15. irudia. Itsasontzien kasu desberdinetako grabitate-zentroaren eta bultzada-zentroaren posizioak.

Azter dezagun 13.15.b eta c irudietan ageri den kasua. Grabitate-zentroa gorago dago bultzada-zentroa baino. Itsasontzia okertzean, grabitate-zentroa toki berean geratzen da, baina bultzada-zentroa beste puntu batera pasatzen da, itsasontziaren formaren kausaz, urpeko bolumena berbera izan arren. Baina BZren bertikalak itsasontziaren 'ardatza' GZ puntua baino gorago ebakitzen badu (M puntuan hain zuzen), itsasontzia zutitza daraman indar-momentua sortuko da, itsasontziari egonkortasuna emanik. M puntu horri *metazentroa* deritza eta oso ondo aztertu beharrezkoa da, itsasontziak diseinatzerakoan.

III. FLUIDOEN DINAMIKA

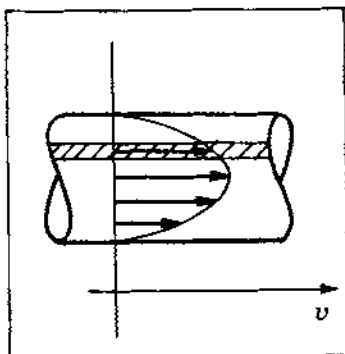
13.5. FLUXU-MOTAK

Fluidoaren Estatikatik Dinamikara pasatzeko, fluidoaren higiduren sailkapen bat egingo dugu lehenik eta behin. Oro har, fluidoak higitzen ari denean, fluidoaren korrantea edo *fluxua* dagoela esaten da, nahiz eta fluxu hitza sekzio batean zehar denbora-unitatean pasatzen den fluido-kantitatea adierazteko ere erabili. Sailkapenean ikusiko denez, fluidoaren higidura-motak adierazteko, oso irizpide desberdinak erabiltzen dira, eta irizpide bakoitzaren arabera sailkatze-modu bat ageri da.

A. Biskositatearen eragina kontuan edukirik

A.1. *Fluxu turbulentua*. Fluidoaren partikulek oso ibilbide irregularrak dituzte, erabat zurrunbilotsuak. Ebakidura-tentsio handiak sortzen dira. Ezin daiteke zuzenki erabil Newton-en biskositate-legea. Energia zinetikoaren galera handia dago (gutxi gorabehera, abiaduraren karratuaren proportzionala).

A.2. *Fluxu laminarra*. Partikulen higidura lamina edo xafla antzeko batzuetan gertatzen da, eta lamina bakoitza albokoekiko labaintzen da. Newton-en legea betetzen da. 13.16. irudian sekzio bateko laminatako abiaduren banaketa adierazi da.



13.16. irudia. Fluxu laminarrean dagoen fluidoaren abiaduren banaketa.

B. Marruskadura eta konprimagarritasunaren arabera

B.1. *Fluxu ideala*. Marruskadurarik ez duena eta denbora berean konprimaezina dena. Marruskadurarik ez duenez, biskositate-koefizientea nulua da.

B.2. *Fluxu erreala*. Fluxu idealaren baldintzak betetzen ez dituen.

C. Temperatura eta beroarekiko portaeraren arabera

C.1. *Fluxu isoterma*. Kasu honetan ez dago tenperaturaren aldaketarik.

C.2. *Fluxu adiabatikoa*. Fluidora ez da berorik sartzen eta ez bertatik ateratzen ere. Fluxu adiabatiko itzulgarriari (hau da, marruskadurarik gabeari) *isoentropikoa* deritzen.

D. Denborarekiko aldakuntza kontuan edukiz

D.1. *Fluxu iraunkorra*. Espazioko puntu konkretu batean fluidoaren propietateak eta higidura bera ere denbora osoan berberak direnean, fluxua iraunkorra dela esan ohi da. Horrelakoetan, ρ dentsitatea, p presioa, T tenperatura eta $\mathbf{v}$ fluidoaren abiadura izanik, edozein puntutan,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (13 - 29)$$

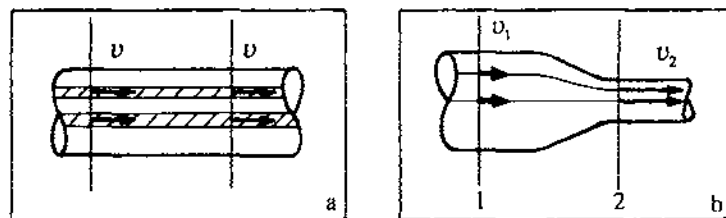
D.2. *Fluxu ez-iraunkorra edo denborarekiko aldakorra*. Aurreko baldintzak betetzen ez direnean, hots, puntu berean denborarekin ρ , p , T edota $\mathbf{v}$ aldatuz doazenean.

E. Espazioarekiko aldakuntzaren arabera

E.1. *Fluxu uniformea*. Espazioko puntu guztietan abiadura berbera, hots,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0. \quad (13 - 30)$$

E.2. *Fluxu ez-uniformea*. Abiadura desberdina puntu desberdinetan. Zer esanik ez, fluxua ez-uniformea izan arren, iraunkorra izan daiteke (13.17. irudia).

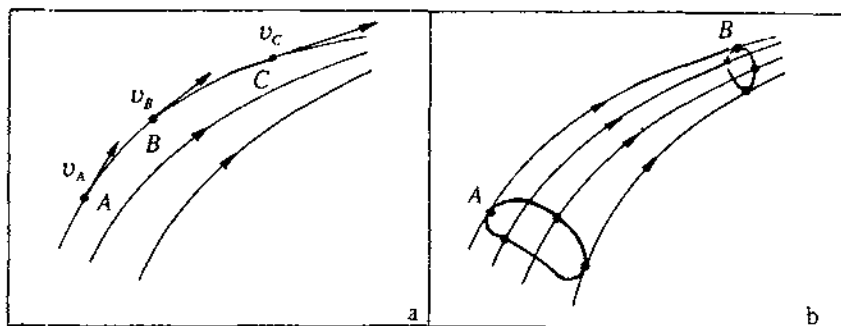


13.17. irudia. a) Fluxu uniformea. b) Fluxu ez-uniformea.

Fluxuen sailkapenarekin bukatzeko, oso praktiko gertatuko zaizkigun bi definizio emango ditugu. Fluxu laminarraren kasurako emanak izango dira, eta gero Dinamika osoan erabiltzekoak.

Korronte-lerroa. Puntu guztietan abiaduraren norabidearen ukitzailea da (13.18.a). Erregimer iraunkorran partikula batek egiten duen bidea adierazten du. Fluxu laminarrean korronte-lerroek ez dute elkar ebakitzen, erregimena iraunkorra bada.

Ageri denez, honela definituriko korronte-lerroak fluidoaren partikulen abiadurek osaturiko eremu bektorialaren (abiadura-eremua deiturikoaren) eremu-lerroak dira, preseski (ikus A eranskina).



13.18. irudia. a) Korronte-lerroak abiaduraren norabidearen ukitzaileak edo tangenteak dira puntu guztietan. b) Korronte-hodia.

Korronte-hodia. Kurba itxi batetik (A) pasatzen diren korronte-lerro guztiek, korronte-hodi bat osatzen dute (13.18.b irudia). Fluxua iraunkorra denean, korronte-hodiak finkoak dira eta horietan ez da fluidorik sartzen ez irteten.

13.6. REYNOLDS-EN ZENBAKIA

Biskositatea kontuan edukirik fluidoaren higiduraren ekuazioak aztertzean, oso ekuazio-sistema korapilatsua lortzen da. Hain zuzen ere, deribatu partzialak dituzten ekuazio diferentzial batzuk lortzen dira, *Navier-Stokes-en ekuazioak* izenez ezagunak direnak; eta ekuazio horien soluzioa aztertzea oso gauza zaila da (ikus *Mekanika eta Uhinak* liburua, UEU, 1992).

Zailhasun hori gainditzeko asmoz, fluidoaren fenomeno mekanikoak aztertzeko geratzen den bide praktikoa, antzeko ereduen azterketa esperimentalak egitea da. Beste eskala batean (txikiagoa gehienetan) sistemaren modelo edo eredu bat prestatzen da, eta gero analogiaz, orokortu egiten dira ondorioak. Eredu-teoriaren barnean gaude, beraz. Eredu-teorian, bi fluido dinamikoki antzekoak izan daitezten, ondoko baldintzak bete behar dira:

a) Sistemek edo muntaiek geometrikoki antzekoak izan behar dute.

b) Korrante-lerroek ere antzekoak izan behar dute.

Baldintza horiek betetzen dituzten modelo desberdinen arteko erlazioak zenbaki adimentsional batzuen bidez adierazten dira. Horrela, esperimenduetan modeloen bidez lorturiko datuak erabiliz, sistema errealean lortuko diren emaitzak kalkula daitezke.

Parametro edo zenbaki adimentsional horietariko bat *Reynolds-en zenbakia* da. Beste gauza batzuen artean, zenbaki horren laguntzaz fluxu laminarraren eta fluxu turbulentuaren arteko mugak ezagut daitezkeela azpimarratu behar da. Guk adibide gisa aipatuko dugu hemen, nahiz eta beste era askotako zenbaki praktikoagoak ere erabiltzen diren.

Fluxu konkretu baten kasuan, honelaxe defini daiteke Reynolds-en zenbakia:

$$R = \frac{v l \rho}{\mu}, \quad (13 - 31)$$

non v : fluxuaren abiadura berezi bat,

l : luzera berezia,

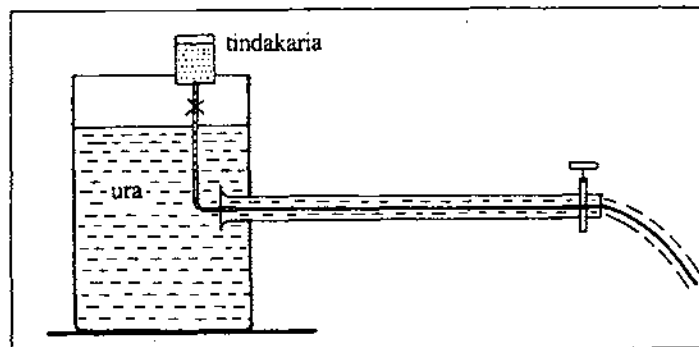
ρ : fluidoaren dentsitatea eta

μ : fluidoaren biskositate-koefizientea diren.

Erraz frogatu daitekeenez, magnitude adimentsionala da, hots,

$$[R] = L^0 M^0 T^0. \quad (13 - 32)$$

Zenbaki honen azterketarako, 13.19. irudian adierazi den esperimendua egin zuen Reynolds-ek.



13.19. irudia. Reynolds-en muntaia. Biltegi handian ura dago eta biltegi txikitik tindakaria askatzen da.

Muntaian ikus daitekeenez, uraren hodiaren barrutik tindakari-haria sorrarazten da. Fluxu laminar iraunkorrean, hari edo txorro fin hori ez da apurtzen eta zuzen bat ageri da hodi garden horizontalean, urarekin nahastu gabe. Ostera, erregimena turbulentu bihurtzean, txorroa apurtu egiten da eta tindakaria laster nahasten da urarekin.

Reynolds-ek abiadura berezizat bidez besteko abiadura (V) hartu zuen eta luzera berezizat hodiaren diametroa (D), bere zenbaki adimentsionala honelaxe definiturik:

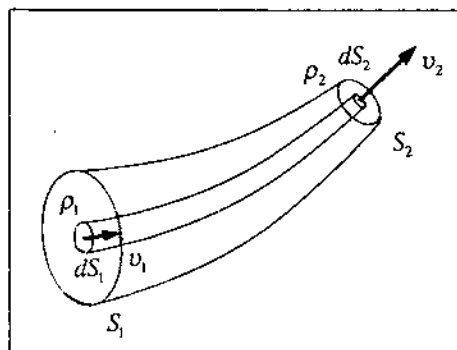
$$R = \frac{VD\rho}{\mu}. \quad (13-33)$$

Baldintza horietan, beirazko hodietan bibrazioak ekiditeko oso neurrak arduratsuak eginez, $R < 12000$ mugaraino fluxu laminarra egon zitekeela frogatu zuen. Gaur egun tresna modernoekin eta perturbazioak ekidinez, $R < 40000$ mugaraino ere altxatu da fluxu laminarraren Reynolds-en zenbakia. Hortik gora fluxua beti da turbulentua. Horregatik, zenbaki hori fluxu laminarraren goiko zenbaki kritikotzat hartzen da.

Dena den, hodi arruntetan askoz ere akats eta perturbazio gehiago daudenez, askoz lehenago hasten da turbulentzia, eta mugako Reynolds-en zenbakiak $2000 \div 4000$ balio du; eta, horregatik, beheko zenbaki kritikotzat $R = 2000$ hartzen da. Hortik beherako zenbakien kasuan, fluxua laminarra da.

13.7. JARRAITUTASUNAREN EKUAZIOA

Gauzak gehiegirik ez korapilatzeke, fluxu laminar iraunkorra aztertuko dugu. Demagun, ba, korronte-hodi bat eta bertan S_1 eta S_2 sekzio normalak (kalkuluak errazteko hartuko ditugu sekzio normalak).



13.20. irudia. Fluxu laminar eta iraunkorrean dagoen fluidoaren korronte-hodia infinitesimala.

Kontsidera dezagun barneko korronte-hodi infinitesimal bat (13.20. irudia). Fluxua iraunkorra bada, dS_1 sekziotik denbora-unitatean sartzen den masa eta denbora-unitate berean dS_2 sekziotik irteten dena berdinak dira. Matematikoki idatzirik,

$$\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2, \quad (13-34)$$

non ρ_1 eta ρ_2 sekzio bakoitzeko dentsitateak diren eta v_1 eta v_2 abiadurak.

Idatzitako ekuazioa jarraitutasunaren ekuazio diferentziala da, fluxu laminar eta iraunkorraren kasuan. Izatez, masaren kontserbazioaren printzipioaren ondorio zuzena da. Bestalde, korronte-hodi osorako integratuz,

$$\int_{S_1} \rho_1 v_1 dS_1 = \int_{S_2} \rho_2 v_2 dS_2. \quad (13-35)$$

Ekuazio honetako atalek *kaudal masikoa* izeneko magnitudea definitzen dute, Fisi-karen arloan sarri erabiltzen den kontzeptua berau. Oro har, S sekzioan zeharreko kaudal masikoa (Q) honelaxe definitu ohi da:

$$Q = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (13-36)$$

non $d\mathbf{S}$ delakoa sekzioaren gainazal-elementu diferentzialari dagokion bektorea den. Hots, kaudal masikoa $\rho \mathbf{v}$ eremu bektorialaren fluxua da (ikus A eranskina). Fluxu laminar iraunkorraren kasuan, jarraitutasunaren ekuazioa kaudalaren kontserbazioaren ekuazioa da. Horrez gain fluidoak konprimaezina bada, orduan $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ denez, hauxe dugu:

$$\int_{S_1} v_1 dS_1 = \int_{S_2} v_2 dS_2. \quad (13-37)$$

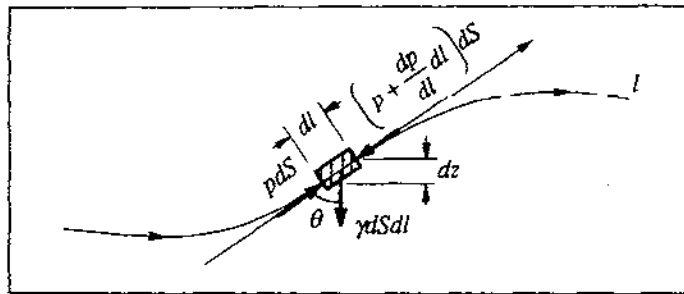
Adierazpen honetan *kaudal bolumetrikoa* eman da. Batez besteko abiaduren funtzioan jarriz,

$$V_1 S_1 = V_2 S_2, \quad (13-38)$$

non V_1 eta V_2 direlakoak fluidoak S_1 eta S_2 sekzioetan dituen batez besteko abiadurak diren, hurrenez hurren. Bukatzeko, ohar gisa diogun ezen kaudal hitza fluxu hitzaren sinonimotzat hartzen dela sarri.

13.8. HIGIDURAREN EKUAZIOA KORRONTE-LERRO BATEAN. BERNOUILLI-REN EKUAZIOA. ENERGIAREN EKUAZIOA

Puntu honetan ere, kalkuluak errazteko, fluxua laminarra eta iraunkorra dela kontsideratuko dugu eta, halaber, marruskadurarik ez dagoela (fluido ideala). Korronte-lerro bat harturik (13.21. irudia), Mekanikako Newton-en bigarren legea ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ alegia) aplikatuko dugu.



13.21. irudia. Korronte-lerroko prisma diferentzialaren gaineko indarrak.

Demagun l korronte-lerroa dugula eta kontsidera dezagun bertan fluidoazko prisma diferentzial bat (beronen oinarria dS da, eta altuera, dl). Korronte-lerroaren tangentearen norabidean Newton-en legea erabiliz eta bigarren ordenako infinitesimoak arbuizatu, ekuazio hau lortuko dugu:

$$p dS - \left(p + \frac{dp}{dl} dl \right) dS - \gamma dS dl \cos \theta = \frac{\gamma}{g} dS dl a_t; \quad (13-39)$$

hemen p : presioa,
 γ : pisu espezifikoa eta
 a_t : l norabide tangentiallean azelerazioak duen osagaia izanik.

Kasu honetan ez dugu ebakidura-tentsiorik kontsideratu zeren, fluido ideala hartuz, barne-marruskadurarik ez dagoela esan baitugu, alegia, biskositaterik ez dagoela.

Eragiketak eginez, hauxe lor dezakegu:

$$\frac{dp}{dl} dSdl + \gamma dSdl \cos \theta + \frac{\gamma}{g} dSdl a_t = 0, \quad (13-40)$$

eta $\gamma dSdl$ delakoaz sinplifikaturik,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dl} + \cos \theta + \frac{a_t}{g} = 0. \quad (13-41)$$

Hemen ondoko aldaketak egin ditzakegu,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{dz}{dl}, \\ a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dl} \frac{dl}{dt} = v \frac{dv}{dl}. \end{cases} \quad (13-42)$$

Horrelatan, azkenean hauxe dugu:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dl} + \frac{dz}{dl} + \frac{v}{g} \frac{dv}{dl} = 0. \quad (13-43)$$

Horixe da, berez, energiaren oinarritzko ekuazioa modu diferentzialean idatzirik. Aurreko ekuazioko gaiak dl faktoreaz biderkatuz, ondoko adierazpena lor dezakegu,

$$\frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{1}{g} v dv = 0, \quad (13-44)$$

eta ekuazio hau korrante-lerro batean barrena integratuz,

$$\int \frac{dp}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = K. \quad (13-45)$$

K delakoa integrazio-konstante bat da, eta korrante-lerro konkretu bakoitzaren kasuan balio bat du. Bestalde, ekuazio hori erabat integratzeko, $\gamma = \gamma(p)$ ezagutu behar dugu fluido konprimagarrien kasuan. Adibidez, fluido konprimaiezina kontsideratzen badugu, $\gamma = \text{ktea}$ hartuko dugu, eta orduan honako emaitza izango dugu:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = K. \quad (13-46)$$

Azter dezagun adierazpen honetako gaien esangura:

$$-z = \frac{mgz}{mg} \quad \text{Ikus daitekeenez, pisu-unitateko energia potentzial grabitatorioa da.}$$

$$-\frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2/2}{mg} \quad \text{Gai honek pisu-unitateko energia zinetikoa adierazten du.}$$

 $-p/\gamma$

Aurreko bi gaien analogiatatik, pisu-unitateko presio-energia dela esan dezakegu. Gai hau fluidoan kasuan agertzen da soilik, eta solido elastikoen kasuko energia potentzial elastikoaren antzekoa da. Berez, barne-energia potentzialaren zati bat da.

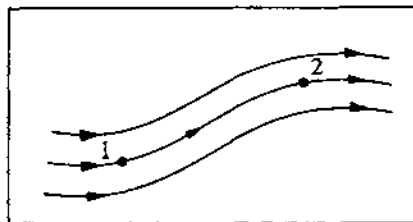
Beraz, aurreko ekuazioa korrante-lerro batean barrenako energiaren kontserbazioaren ekuazioa da. Zenbait liburutatik gaituz biderkatuz ageri ohi da, eta *Bernoulli-ren ekuazioa* izenez da ezaguna. Honako hau, preseski:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{ktea.} \quad (13-47)$$

Bistan dagoenez, azken hau masa-unitateko energiaren ekuazioa da.

Honelatan, ba, korrante-lerro bereko bi puntu kontsideratuz (13.22. irudia), honelaxe aplikatuko da energiaren ekuazioa (fluido konprimaezinen kasuan, noski):

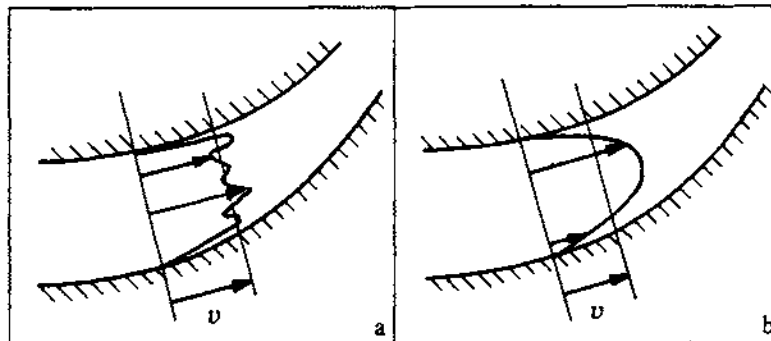
$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (13-48)$$



13.22. irudia. Korrante-lerro bereko bi punturen kasuan energiaren kontserbazioa aplikatuko dugu.

13.9. ENERGIAREN EKUAZIOAREN OROKORPENA

Praktikan ez ohi da korrante-lerro bakar bat kontuan hartzen, korrante-hodi bat baizik, hots, korrante osoa. Horregatik zenbait zuzenketa egin behar izaten dira energiaren ekuazioan, korrante errealek kontsideratzean.



13.23. irudia. Abiaduren banaketa. a) Fluxu turbulentua. b) Fluxu laminarra.

Lehenengo zuzenketa energia zinetikoa adierazten duen gaiari buruzkoa da. Aurreko 13.23. irudietan, hodiaren zeharkako sekzioetan dagoen abiaduren banaketa adierazi da. Biskositatearen kausaz, korrante-lerroen arteko marruskadura ageri da. Hodiaren hormak ukitzen dauden puntuetan, abiadura nulua izango da, eta hodiaren erdialdean, handiena. Fluxu turbulentuan abiaduren banaketa oso irregularra izango da; fluxu laminarrean, ordea, erregularra (hodi zirkularretan abiadurak banaketa parabolikoa izango du). Dena den, normalean korrante osoaren adierazle gisa batez besteko abiadura hartzen da, baina gero, aipaturiko efektua kontuan hartzeko, zuzenketa-faktore bat (α) jarri behar izaten da. Energia zinetikoaren gaia honelaxe aldatu ohi da:

$$\frac{v^2}{2g} \rightarrow \alpha \frac{V^2}{2g}. \quad (13-49)$$

Fluxu laminarraren kasuan $\alpha = 2$ da eta fluxu turbulentuan zuzenketa-faktoreak $\alpha = 1,01 \div 1,10$ tarteko balioak izaten ditu.

Bestalde, fluido errealek biskositatea dute eta horren kausaz, energia mekanikoa galtuz doa, bero-energia sortuz. Beraz, zer esanik ez, fluidoaren mekanika ongi aztertzeko, ikuspegi termodinamikoa oso kontuan eduki behar da.

Barne-marruskadurarekin lotuta doan energiaren galeraren kausaz, hodi horizontaletan hedatzean, fluidoaren presioa motelduz doa distantziarekin. Honen zergatikoa azaltzea oso erraza da. Hodiak sekzio konstantea badu eta fluidoak erabat betetzen badu, konprimaezina bada (uraren kasuan adibidez), batez besteko abiadura berbera eduki behar du sekzio guztietan. Eta Bernouilli-ren ekuazioan energiaren galera egonik, efektu horien ondorioz, presioaren beherapena dugu, sarri *karga-galera* deritzona. Karga-galera hori oso kontuan hartu behar izaten da, adibidez, hirietako ur-banaketarako sarreak antolatzean, biltegitiko distantziarekin presioa motelduz baitoa.

Dena den, problema sinplifikatuz, korrante-lerroetan energiaren galera dagoela esan dezakegu. Lerro bereko 1 eta 2 puntuen arteko galera hori adierazteko,

$$E_1 = E_2 + G_{12} \quad (13-50)$$

idatz dezakegu, non G_{12} delakoa 1 eta 2 puntuen artean galduriko energia den (pisu-unitateko).

Bestalde, korrantearen barruan energia ematen duten tresnak edo aparatuek ere egon daitezke, hala nola, ponpak, motorrak, helizeak eta abar. Horien eragina ere kontuan hartuz (E_m), honelaxe idatz daiteke energiaren ekuazio orokorra, korrante bateko bi sekzioren artean:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + E_m = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + G_{12}. \quad (13-51)$$

13.10. MOMENTU LINEALAREN EKUAZIOA

Fluidoaren azterketa labur hau osatzeko, momentu linealaren ekuazioa azalduko dugu. Orain arte egin dugunaren antzera, arazoa errazteko, fluxu iraunkor, laminar eta konprimaezina kontsideratuko dugu.

13.11. SOLIDOEN HIGIDURA FLUIDO BATEN BARNEAN

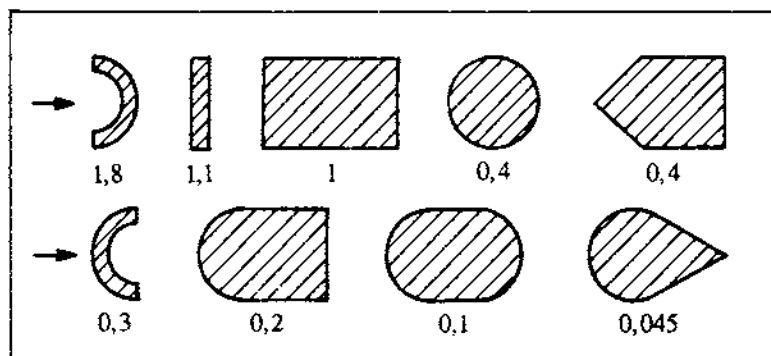
Flotazioaren arazoa aztertzean, geldi dagoen gorputz solido batek fluidoaren barnean pairatzen dituen indarrak aztertu ditugu. Orain, Dinamikaren arloan egonik, higitzean indar haietaz gainera jasaten dituenak aztertuko ditugu.

Bi ikuspuntu baliokide kontuan izanik azter dezakegu higidura hori. Fluidoak geldi egonik eta solidoa beraren barnean higituz edo, alderantziz, gorputz solidoa fluidoaren korrante baten barnean geldi dagoela jorik. Zer esanik ez, bigarren ikuspuntua aukeratu gero, oso kontuan hartu beharko dugu fluidoaren fluxu-mota, hau da, laminarra ala turbulentua den.

13.11.1. Marruskadura-indarra eta eite-koefizientea

Dudarik ere ez, higidura aztertzean, lehenik kontuan eduki behar den faktorea marruskadurarena da. Aurreko ataletan fluidoaren barneko marruskadura biskositate-koefizientearen bidez aztertu dugu nahiko era errazean. Fluidoaren barnean solidoa sartzean, arazoa korapilatu egiten da, beste zenbait faktore eduki behar baitira kontuan, hala nola eite-koefizientea.

Gorputz solidoaren formak edo eiteak zerikusia handia du korrante-lerroek beraren inguruan hartzen duten itxurari dagokionez. Ondorioz, tankeraren arabera, marruskadura handiagoa edo txikiagoa izan daiteke, edo zurrunbilo gehiago edo gutxiago sor daitezke, hots, horrek zerikusia izango du sortuko den fluxu-motarekin ere. Solidoaren tankerak duen eragina *eite-koefizientea* deritzon koefiziente adimentsional baten bidez adierazten da. Adibide modura, 13.25. irudian zenbait profilen eite-koefizienteak adierazi dira.



13.25. irudia. Zenbait profilen eite-koefizienteak.

Marruskadura-indarrak moteldu nahi direnean, gorputzari eite aerodinamikoa ematen zaio, koefiziente txikiak lorturik. Ostera, fluidoak egiten duen indarra handia izatea nahi dugunean —turbina baten abarretan, adibidez—, guztiz alderantziz jokatzen da.

Oro har, solidoak fluidoaren barnean jasaten duen indarra zehazki kalkulatzeko ez da erraza, baina, hala ere, badira bi formula berezi, bi kasu berezitarako balio dutenak, eta hemen azalpen berezirik gabe emango ditugunak. Lehenengoa, *Stokes-en formula* da, eta higidura erlatiboa laminarra izanik esfera bat fluidoaren barnean higitzen denean erabiltzen da. Jasaten duen marruskadura-indarra hau da:

$$F = 6\pi\mu v, \quad (13 - 58)$$

non r esferaren erradioa, μ biskositate-koefizientea eta v abiadura diren.

Fluxua turbulentua denean, beste hurbilketa bat erabiltzen da, *Newton-en formula* deiturikoa hain zuzen,

$$F = \frac{1}{2} k \rho S v^2, \quad (13 - 59)$$

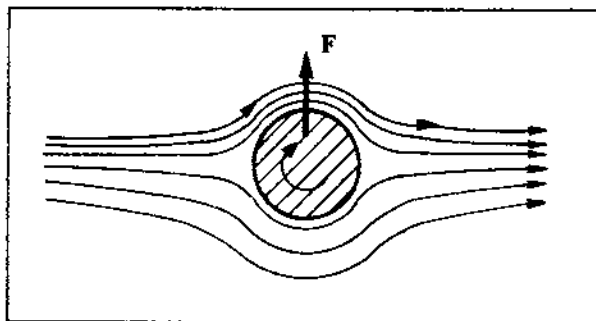
non k eite-koefizientea, ρ dentsitatea, S abiadurakiko perpendikularra den sekzioa eta v abiadura diren. Dena den, formula hau abiadurak handiegiak ez direnean erabil daiteke soilik, halakoetan bestelako formula batzuk erabili behar baitira. Edozertara, ikus daitekeen, fluxu turbulentuaren kasuan marruskadura-indarra abiaduraren karratuaren proportzionala da, eta fluxu laminarrean abiaduraren lehenengo berreturaren proportzionala.

13.11.2. Antzekotasuna eta modeloak

Fluidoek kasuan higidura zehazki aztertzea oso zaila gertatzen den arren, esperimentalki ikusi denez, geometrikoki antzekoak diren bi gorputz solidok antzeko baldintzetan pairatzen dituzten indarrak konparagarriak dira arau zehatzen bidez. Honela, bi gorputz antzekok fluxu turbulentuan fluido baten barruan pairatzen dituzten indarrak, antzekotasun-erlazioaren karratuaren proportzionalak dira. Lege horrek garrantzi handia dauka, zeren horrela izanik, modelo txikietan egindako esperimentuetan oinarritu baitaiteke neurri handiko tresnen portaeraren azterketa (auto, hegazkin edo itsasontziena, adibidez).

13.11.3. Magnus efektua

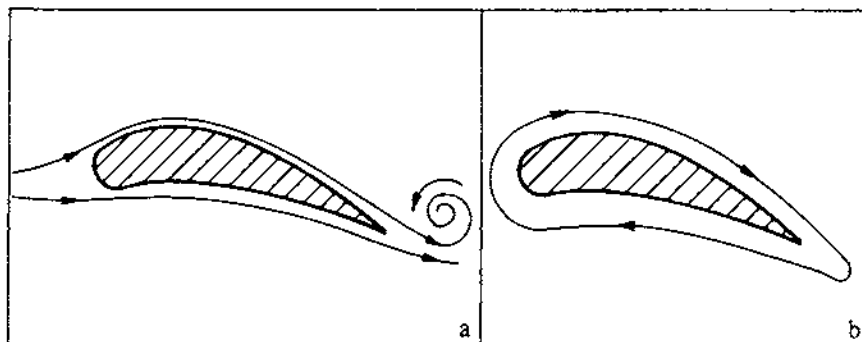
Orain arteko kasuetan ez dugu biraketa-higidura kontsideratu gorputz solidoari dagokionez. Hori gertatzen denean, solidoaren higidura ez da plano batean jazotzen. Adibidez, futboleko baloiak 'efektua' hartzen duenean gertatzen dena, *Magnus efektua* izenez ezaguna da Fisikan. Efektu horren zergatikoa ulertzeko, demagun bere ardatzaren inguruan biraka dabilen zilindro bat dugula, higitzen ari den fluido baten korrante-lerroen artean (13.26. irudia).



13.26. irudia. Magnus efektua.

Irudian adierazi denez, goialdetik doazen korrante-lerroak, zilindroaren higiduraren noranzkoa berbera dutenez, azeleraturik gertatzen dira, fluidoaren biskositatearen kausaz; alderantziz, behealdekoak dezeleraturik. Bi aldeek artean abiaduren desberdintasuna ego-

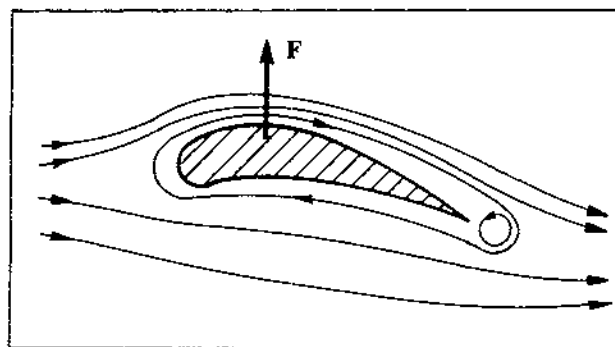
tean, presio-desberdintasuna ere agertuko da Bernouilli-ren ekuazioaren arabera, eta, ondorioz, goialderanzko indar bat agertuko da, zilindroa harantz higitzera eramango duena.



13.27. irudia. Hegazkin-hegoen inguruko korronteen sorrera. a) Biskositatearen eta asimetriaren ondoriozko zurrumbiltoa. b) Hegoaren inguruko korrontea.

13.11.4. Bultzada aerodinamikoa

Hegazkinen hegoen kasuan, goranzko bultzada lortzeko, Magnus efektuaren antzeko zerbaitez baliatzen gara. Fluidoaren biskositatearen eta hegoaren asimetriaren kausaz, zurrumbilto bat sortzen da hegoaren atzekaldean (13.27.a irudia). Baina 'hegazkina-airea' sisteman inolako kanpo-indarririk eragiten ez duenez, momentu angeluarrak hasieran bezala mantendu behar du. Hori dela eta, hegoaren inguruan aurkako noranzkoa duen aire-zirkulazio bat sortzen da, 13.27.b irudian adierazi den bezala; guztira sortzen diren korrante-lerroak 13.28. irudian adierazi dira.



13.28. irudia. Hegazkin-hegoen inguruko korrante-lerroak.

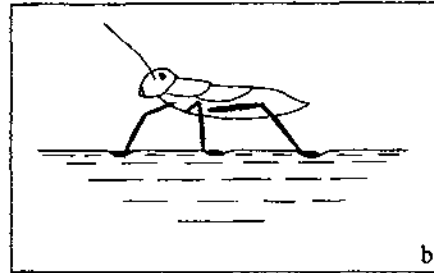
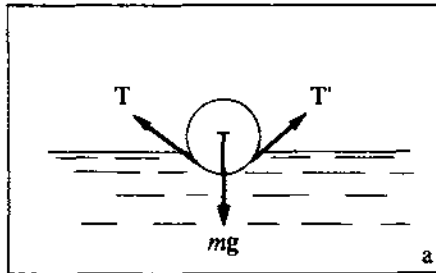
Ondorioz, hegoaren goialdetik airearen abiadura handiagoa da behealdetik baino, eta horrek behealdeko presioa goialdekoa baino handiagoa dela esan nahi du; horrela, goranzko bultzada agertzen da. Bultzada aerodinamiko horrek berdin antzera jokatzen du belaeontzietan edo itsasontzien lemetan.

14. gaia

Likidoen gainazalen berezitasunak

Aurreko gaien fluidoaren mekanika aztertzean, fluidoaren barneko korrante-lerroak eta korrante-hodiak hartu ditugu abiapuntutzat. Hala ere, esperimentu askotan ikusten denez, fluidoak mugatzen dituzten gainazalean fenomeno bereziak gertatzen dira, aurreko gaien adierazitako legeen bidez azaltzen ez direnak eta gai honetan aztertuko ditugunak. Aipa ditzagun horrelako fenomeno batzuk:

- Uraren gainazalean orratz bat arduraz jarritz gero, orratza bertan gera daiteke uretan murgildu eta hondora joan gabe, orratzaren dentsitatea urarena baino askoz handiagoa izanda ere, hots, bultzada hidrostatikoa orratzaren pisua baino txikiagoa izan arren. Fenomeno hau are nabarmenago agertzen da, aldez aurretik orratza koipez igurtziz gero (14.1.a irudia).
- Aurreko fenomenoaren bide beretik, guztiok dakigunez, zapatariak deritzen intsektuak (*Gerris lacustris*) uraren gainean ibiltzeko gai dira (14.1.b irudia).



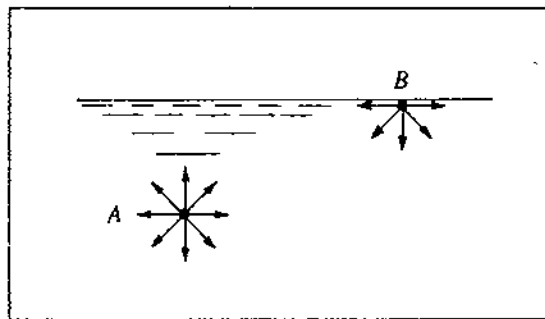
14.1. irudia. Gainazal-tentsioaren kausaz, zenbait gorputz txiki uraren gainazalcan egon daitezke, barrura sartu gabe.

- Ba dakigu, halaber, likidoak hodi kapilarretan gora (edo behera) egiteko gai direla.
- Xaboi-burbuilen sorkuntza edo xaboiztaturiko uretan sortzen diren xafiak, fluidoaren mekanikan ikusiriko propietatez kanpo azaldu behar dira.

Horiek guztiok eta beste batzuk gainazal-fenomenoak dira, eta, funtsean, gainazal-tentsioa deritzon propietatearen bidez azaltzen dira.

14.1. GAINAZAL-TENTSIOA

Likidoen molekulen arteko kohesio-indarrak, Van der Waals-en indarrak deritzenak, likido-egitura posible egiten dutenak hain zuzen, oso handiak dira distantzia txikiak, eta tarte batzuetan r^{-7} delakoaren arabera aldatzen dira.



14.2. irudia. Likidoaren barneko (A) eta gainazaleko (B) puntuetako kohesio-indarrak.

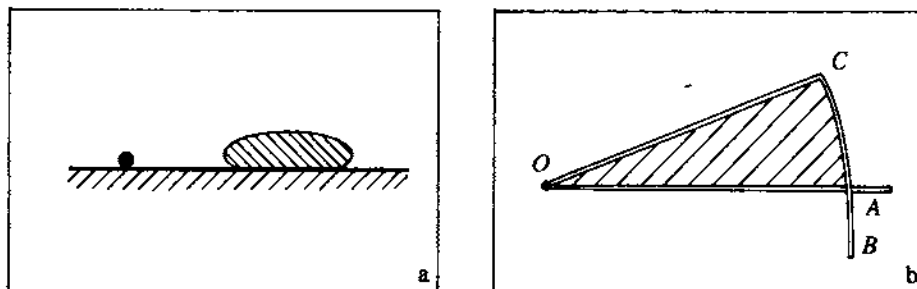
Hori dela eta, desberdintasun nabarmena dago, likidoaren barnean (A) edo likidoaren gainazalaren inguruan (B) dauden molekulen egoeren artean (ikus 14.2. irudia). Likidoaren barneko molekulak (A), norabide guztietan indar berdinez erakarria denez, erresultante nulua du guztira. Ostera, gainazaletik hurbil dagoen molekula kasuan (B), inguruko molekulen erakarpeneren erresultanteak likidoaren barnerantz orientaturik dagoen indar bat sortzen du. Hots, kohesio-indarrek barnerantz erakartzen dituzte gainazaleko molekulak, eta berez, berez soilik eragingo balute, likidoari ahalik eta azalerarik txikiena emango liokete. Gainazalaren forman eragiten duten kohesio-indar horiei *gainazal-indarrak* ere baderitze.

Dena den, likidoaren kantitatea oso txikia ez denean, gehienetan gainazal-indar horiek ez dute ia eragin nabarmenik pisuarekin konparatuz (bolumen-indarra); eta likidoaren bolumen jakin baterako zenbat eta likido horren mugako gainazala handiagoa izan, hainbat eta hobeto nabarmentzen dira. Ikus dezagun hori zehaztasun handiagoz.

Pisu-indarrak bolumenaren proportzionalak dira eta, gainazalakook ez bezala, azalera handitzera jotzen dute. Demagun, ba, tanta esferikoak ditugula. Tanten r erradioa txikiagoa hartzean, tanten azalera ($4\pi r^2$) bolumena ($4/3\pi r^3$) baino astiroago egiten da txiki. Beraz, erradioa txikiagoa den arau, erlatiboki, gainazal-indarrek bolumen-indarrek baino garrantzi handiagoa dute. Hori da 14.3.a irudian adierazi dena: merkuriozko tanta txikia ia erabat esferikoa da, eta tanta handia txapalduta ageri da pisuaren nagusitasunaren kausaz.

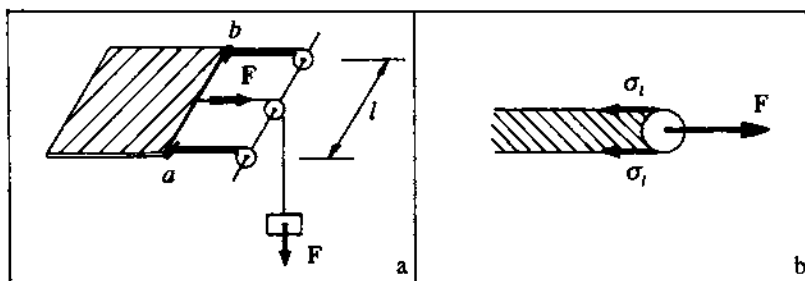
Likidozko xafla meheek baldintza onak dituzte gainazal-fenomenoak agertzeko, pisu txikia eta azalera handia baitute; adibidez, ur xaboizatuarekin presta daitezkeen xafla finek. Alboko 14.3.b irudian O puntuan giltzaturik dagoen burdin harizko triangelu bat dugu. Ur xaboizatuan sarturik, triangeluari ur xaboizatuaren xafla bat itsasten zaio, OAC gainazala sortuz. Esperimentua egitean, argi ikus daiteke OA eta OC hurbildu egiten direla.

Hots, gainazal-indarrek xafla likidoaren gainazala ahalik eta txikien bihurtzera jotzen dute, eta gainazal horren planoan eragiten dute.



14.3. irudia. Gainazal-indarren eta pisuaren arteko garrantzi erlatiboa. a) Merkurioko tanta txikia (esferikoa) eta handia (txapala). b) Ur xaboizatutako xafla.

Aurreko esperimentuaren bidetik, neurketa berezia egingo dugu. Oraingoan, 14.4. irudian ageri den modura, marko errektangeluarra hartuko dugu ab burdin hari edo alanbre higikorrekin, eta likidozko xafla markoaren eta ab burdin hariaren artean jarritz. Besterik gabe, ab higitu egiten da, xafla likidoa txikituz baitoa. Baina pisu txiki bat jarritz, oreka lor dezakegu. Oreka horri dagokionez, zerbait bitxi gertatzen da hala ere: ab burdin haria batera edo bestera mugitu arren, oreka mantendu egiten da. Gertaera horrek ondokoa adierazi nahi du, alegia, oreka gordetzeko egin behar den indarra, ab burdin hariaren luzeraren arabera dela.



14.4. irudia. Gainazal-tentsioa aztertzeko markoa. F indarrak orekatu egiten ditu gainazal-indarrak.

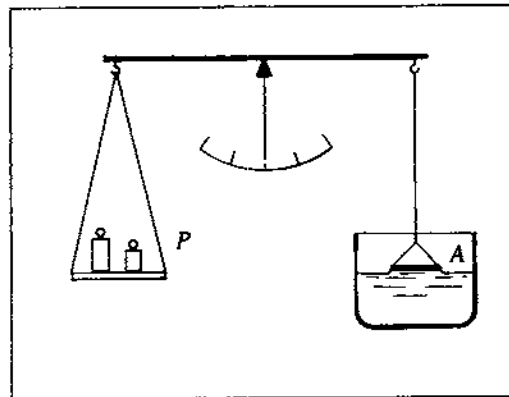
Hain zuzen, esperimentu asko eginez, F indarraren eta gainazalarekiko ukipen-luzeraren arteko proportzionaltasuna dagoela ikusten da. Proportzionaltasun-konstanteari *gainazal-tentsioa* deritzo eta likidoaren ezaugarria da. Izatez, aurreko burdin hariaren kasuan bi gainazal daudenez, $2l$ luzera eduki behar dugu kontuan eta honela definitu ohi da gainazal-tentsioa:

$$\sigma = \frac{F}{2l} \quad (14-1)$$

Dimentsionalki $F \cdot L^{-1}$ edo $M \cdot T^{-2}$ izanik, unitateak $N \cdot m^{-1}$ dira. Bestalde, esan dugunez, gainazal-tentsioa likido bakoitzaren ezaugarria da, baina esperimentalki neurtu denez, tenperaturarekin aldatu egiten da. Hain zuzen, tenperatura goratzean beheratu edo moteldu egiten da oro har, 14.1. taulan uraren kasurako eman diren balioetan ikus daitekeenez.

14.1. taula. Gainazal-tentsioaren balio esperimentalak.

Airearekin ukipenean dagoen likidoa	Temperatura °C	Gainazal-tentsioa $N \cdot m^{-1}$
Ura	0	0,0756
Ura	20	0,0728
Ura	60	0,0662
Ura	100	0,0589
Oliba-olioa	20	0,0320
Alkohol etilikoa	20	0,0223
Bentzenoa	20	0,0289
Glizerina	20	0,0631
Merkurioa	20	0,4650
Karbono tetrakloruroa	20	0,0268
Oxigenoa	-193	0,0157
Neona	-247	0,00515
Helioa	-269	0,00012



14.5. irudia. Tentsimetroa.

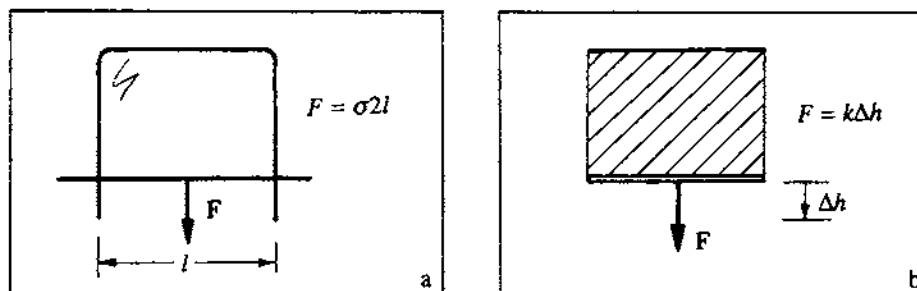
Normalean gainazal-tentsioak neurtzeko erabiltzen den tresna, *tentsimetroa* deritzona da (14.5. irudia). Honetan, burdin harizko A zirkunferentzia bat (r erradiokoa) jartzen da

likidoaren gainazalean, balantzarekin orekatuz. Gero pisua gehituz doa, likidotik askatu arte, eta orduan,

$$\sigma = \frac{P}{2 \cdot 2\pi r} \quad (14-2)$$

eginez lor dezakegu gainazal-tentsioa.

Bukatzeko, ohar bat egingo dugu gainazalen portaerari dagokionez. Lehenengo begirada batez, mintz elastikoez dutenaren berdina dela pentsa daiteke, baina bada bien arteko desberdintasun funtsezkorik, jarraituan azalduko dugunez.

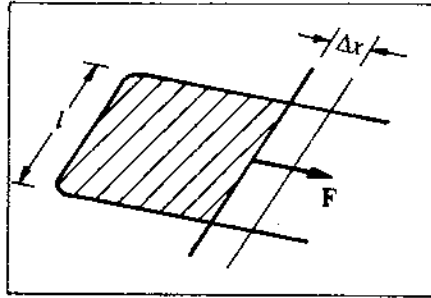


14.6. irudia. Indarrekiko portaera desberdinak. a) Xafla likidoa. b) Mintz elastikoa.

Azalpenerako, lehenago ikusitako marko errektangeluarreko xafla likidoa eite bereko mintz elastiko mehe batekin konparatuko dugu (14.6. irudia). Marko errektangeluarrean egindako esperimentuan, oreka edozein puntutan lortzen da, indarra gainazalarekiko ukipen-luzeraren proportzionala delarik. Mintz elastikoaren kasuan ostera, indar bakoitzerako oreka-posizio bakarra dago eta indarra luzapenaren (deformazio unitarioaren) proportzionala da. Oso portaera desberdinak, beraz.

14.2. GAINAZAL-UNITATEKO ENERGIA

Hasierako gaira itzulirik, likidoaren gainazaleko molekulek barneranzko indarra jasaten dutela ikusi dugu. Alderantziz, likidoaren barneko molekula bat gainazalera eramateko, aipaturiko indar hori gainditu beharko da, eta, azken batean, lana egin beharko da indar horren aurka, eta lan hori 'pilaturik' egongo da gainazalean *energia potentzial* eran. Zer esanik ez, hori egitean handiagotu egin dugu likidoaren gainazala, bertara molekula gehiago eramanez. Hots, gainazal-tentsioak gainazalaren handitzearen aurka jotzen du, horrek energia potentzialaren handipena baitakar, eta horregatik likidoek energia hori minimoa egitera jotzen dute.



14.7. irudia. Gainazala handitzeko, lana egin behar da.

Azter dezagun gainazala handitzean azalera-unitatea gehitzeko egin behar den lana. Demagun lehengo marko errektangeluar berbera dugula eta Δx luzatu dugula xafla likidoa (14.7. irudia).

F indarrak egin duen lana hauxe da:

$$\Delta W = F \cdot \Delta x, \quad (14 - 3)$$

eta, bestetik, xaflak bi alde dauzkala kontuan hartuz, gainazalaren azalcraren gehikuntza ondokoa izango da:

$$\Delta S = 2l\Delta x. \quad (14 - 4)$$

Beraz, gehikuntzarako azalera-unitateko egin behar den lana:

$$\frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F\Delta x}{2l\Delta x} = \sigma, \quad (14 - 5)$$

hots, gainazal-tentsioa. Alderantziz esanik, «gainazal-tentsioa likidoaren gainazala azalera-unitatez handiagotzeko behar den energia da».

Azken adierazpenetik, gainazal-tentsiorako unitate gisa joule $\cdot$ m⁻² ere har dezakegula ikus daiteke, aurretik emandako unitate-motarekin bat datorrena, hots:

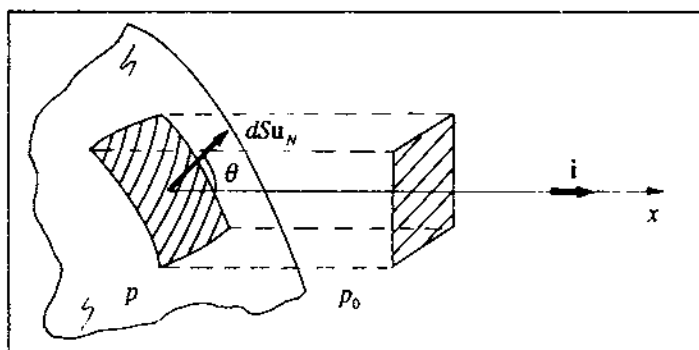
$$1 \frac{\text{joule}}{\text{m}^2} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (14 - 6)$$

14.3. XAFLA LIKIDOAREN KURBADURARI DAGOKION PRESIO-DESBERDINTASUNA. LAPLACE-REN LEGEA

Gainazal-tentsioaren kausaz, likido baten gainazalak kurbadura edukitzean, tentsio bereziak ageri dira, eta, ondorioz, orkan presio desberdinak daude kanpo eta barne-aldeetan. Dena den, desberdintasun txiki bat dago xafla likidoen eta likidoen mugen artean eta horregatik bizpahiru kasu aztertuko ditugu.

14.3.1. Xafla likido diferentziala

Demagun likidozko burbuila baten elementu diferentziala, dS , alboko irudian adierazi den modukoa.



14.8. irudia. Azalera diferentziala eta beraren proiektzioa.

Burbuilaren barneko presioa p da eta kanpoko p_0 . Azalera-elementua $dS_{\mathbf{u}_N}$ izanik, presio-desberdintasunaren kausaz elementu horrek jasaten duen indarra hau da:

$$(p - p_0)dS_{\mathbf{u}_N}. \quad (14 - 7)$$

Eta x norabidean duen proiektzioa:

$$(p - p_0)dS_{\mathbf{u}_N} \cdot \mathbf{i} = (p - p_0)dS \cos \theta, \quad (14 - 8)$$

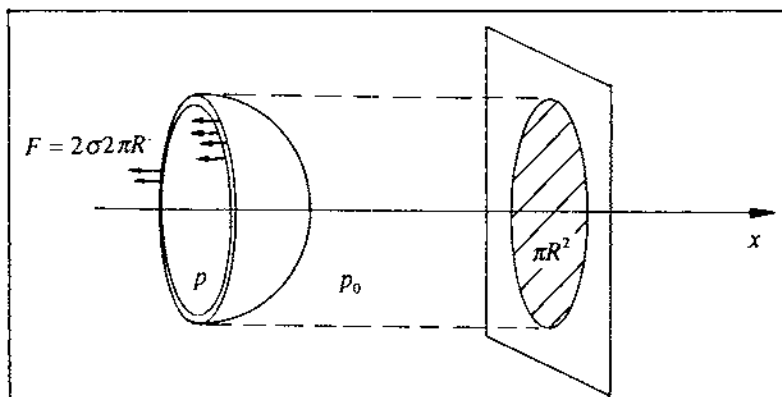
hots, x ardatzaren plano perpendikularrean proiektaturiko azaleraren eta barne eta kanpoko presio-diferentziaren arteko biderkadura.

14.3.2. Burbuila esferikoa

Demagun orain xafla likidozko burbuila osoa daukagula, ur xaboiztatuzkoa adibidez (14.9. irudia). Azal dezagun holako gainazal esferikoaren erdiaren oreka.

Bi motako indarren arteko eragina aztertu behar da edozein norabidetan (adibidez x norabidean):

- Presio-desberdintasunari dagokiona, $(p - p_0)\pi R^2$, zeren proiektaturiko azalera πR^2 baita.
- Gainazal-tentsioari dagokiona: $2 \cdot 2\pi R\sigma$. Hemen bi aldiz kontsideratu dugu burbuila-erdiaren ebakiduraren perimetrea, berez xaflak bi gainazal baititu, kanpoko eta barnekoa.



14.9. irudia. Burbuila esferikoaren erdia eta beraren proiektzioa.

Beraz,

$$(p - p_0)\pi R^2 = 4\pi R\sigma, \quad (14-9)$$

$$(p - p_0) = \frac{4\sigma}{R}. \quad (14-10)$$

Hots, presio-desberdintasuna erradioaren alderantziz proportzionala da. Hori dela eta, gauza bitxiak gertatzen dira. Adibidez, hodi baten bi muturretan erradio desberdineko bi burbuila batera puzten badira, erradio txikikoak behartu egingo du airea erradio handikora sartzen, hau da, burbuila txikia txikiagotu eta handia handiagotu egingo dira.

14.3.3. Tanta likidoa

Tanta likidoen kasuan gainazal bakarra dago, eta orduan, aurreko kasuan ez bezala, perimetro bakarra hartu behar da kontuan. Horregatik, tanta esferikoaren kasuan likidoaren barneko presioaren eta kanpoko airearen presioaren artean dagoen desberdintasuna, ondokoa da:

$$p - p_0 = \frac{2\sigma}{R}. \quad (14-11)$$

14.3.4. Laplace-ren legea

Tanta likidoaren eitea esferikoa ez bada, kurbadura-erradio nagusien R_1 eta R_2 bidez eman daiteke barne eta kanpoko presioen arteko desberdintasuna, honelaxe, hain zuzen:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (14-12)$$

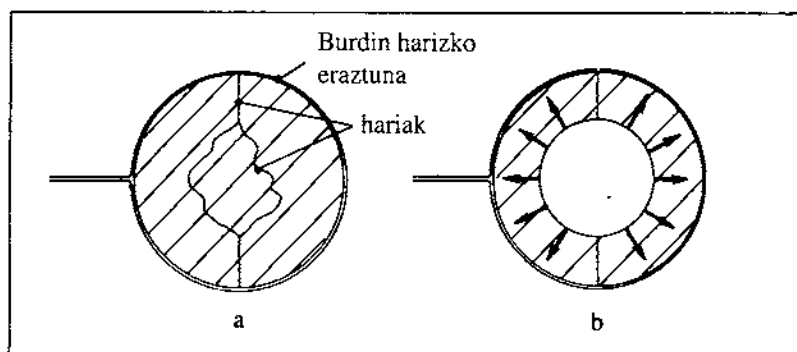
Lege honi *Laplace-ren legea* deritzo eta, bistakoa den bezala, esferaren kasuan $R_1 = R_2 = R$ izanik aurreko emaitza berbera lortzen da.

Emandako formula honetaz ohar bat egin behar da. Gainazalak konbexuak ala konkaboak diren, zeinu desberdinez hartzen dira erradioak; preseski kurbadura-zentroa likidoaren barnealderantz dagoenean —tantaren kasua— erradio positiboa hartzen da, eta

orduan gainpresioa dago. Ostera, kanpoalderantz dagoenean —hodi kapilarretako kasua, geroago ikusiko dugunez—, erradio negatiboa hartzen da eta, izatez, kasu horretan depresioa dago.

14.4. LIKIDOEN GAINAZALEN AZALERA MINIMOA

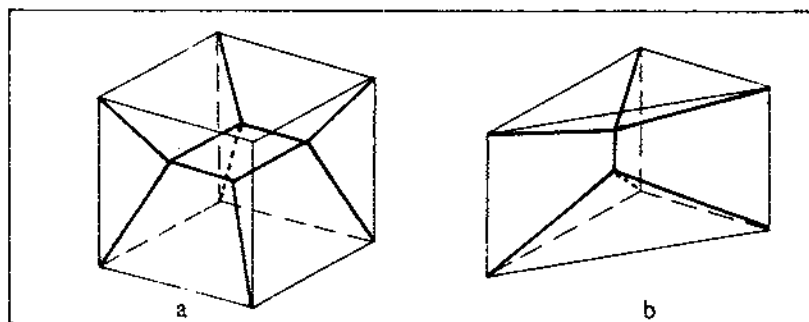
Likidoen gainazalak, tentsioaren eraginpean dagoenez gero, txikiagotzera jotzen du, presioen desberdintasunarekin orekan jartzeko moduko azalerarik txikiena lortu arte. Horrela, adibidez, olio astunezko bolumen txiki bat dentsitate bereko ur-alkohol nahastura batean xiringatzean, elkarrekin nahasten ez direnez, azkenean olioak nahasturaren barnean flotatzen duen tanta esferikoaren forma hartzen du, hots, azalera txikieneko eitea. Dentsitateen berdinketa hori pisuaren efektuak ekiditeko egiten da, horrela Arkimedes-en bultzadak pisua orekatzen baitu.



14.10. irudia. Azalera minimorako joera adierazten duen esperimentua.

Esandakoa adierazteko, beste esperimentu erraz bat ere aipa dezakegu. Hari-inguru bat burdin harizko eraztun batean lotu dugu 14.10 irudian ageri modura, eta ur xaboiztatutako ontzi batean sartu-atereaz, likido-xafla bat lortuko dugu eraztunaren barnean, eta haria xafla horretan nolabait flotatzen egongo da (ikus *a*) irudia). Baina hariaren barnealdeko xafla orratz batez ziztatzean, hari-inguruak zirkunferentzia-forma hartuko du laster gainazal-tentsioaren eraginez, era horretara azalerarik txikiena lortuz (14.10.b irudia).

Xafla likidoen jokabide horrek, bestela analitikoki oso nekez ebatz daitezkeen zenbait problema matematikoren ebazpenean lagun diezaguke. Demagun, esate baterako, burdin harizko egitura batek mugatzen duen azalera minimozko gainazala lortu nahi dela. Xafla likidoen propietateetan finkatuz, oso erraz ebatz daiteke problema. Burdin harizko egitura ur xaboiztatutan sartuz eta xafla likidoa orekara iritsi arte pixka batean itxaronez, xaflaren formak berak emango digu ebazpena. Alboko 14.11. irudian, forma kubiko eta prismatikoein lortutako bi ebazpen ageri dira.

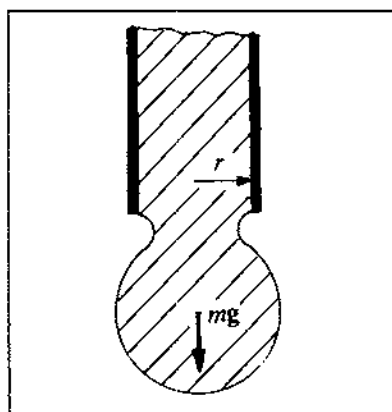


14.11. irudia. Azalera minimoaren bidezko ebazpenak.

14.5. TANTEN SORKUNTZA

Tanta-kontagailuaren muturrean tanta sortzean, lehenengo hurbilketa batean bederen, kontsideratu egin daiteke, ezen tanta hori bere pisua hodiaren zirkunferentziari dagokion gainazal-tentsioak sorturiko indarraren berdina denean hasten dela erortzen (ikus 14.12. irudia), hau da, ondoko berdintza betetzen denean:

$$mg = 2\pi r\sigma. \quad (14-13)$$



14.12. irudia. Tanta-kontagailuaren muturreko tantaren sorrera.

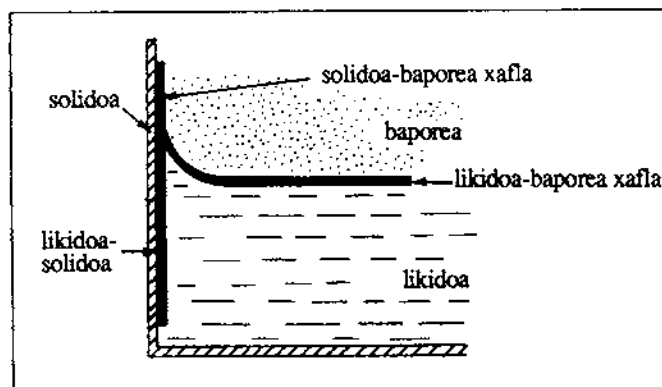
Arazoa zehaztasun handiagoz aztertzean, ordea, esandakoa oker dagoela ikus daiteke, eta zenbait zuzenketa egin behar dira, korrekzio-faktore batez adieraz daitezkeenak. Dena den, zuzenketa egokiak eginez, metodo horrek gainazal-tentsioak neurtzeko balio dezake.

Emandako azalpen kualitatiboan ageri denez, gainazalean dagoen likido-geruzak erresistentzia azaltzen du, barneko likidoa eror ez dadin, eta zorro gisakoa da, likido hori gorderik.

Bestalde, tanta-kontagailu berean bi likido desberdinez sortzen diren tanten pisuak, beren gainazal-tentsioen proportzionalak direla ikus daiteke. Hori dela eta, metodo hau egokienetarikoa da gainazal-tentsioak neurtzeko.

14.6. UKIPEN-ANGELUA. GAINAZAL SOLIDOEN GAI NEKO TANTAK

Orain arte, likidoaren eta gasaren (airearen) arteko bananketako gainazaletan agertzen diren tentsioak aztertu ditugu soilik. Hala ere, gehienetan likidoak ontzi solidoetan gordetzen dira eta orduan bestelako gainazalak ere eduki behar dira kontuan.



14.13. irudia. Solidoa-likidoa-baporea sistemetako ukipen-gainazalak.

Zehazkiago mintzatuz, 14.13. irudian adierazienez, hiru bananketa-mota daude, hiru ukipen-gainazal, eta horietariko bakoitzari gainazal-tentsio berezia dagokio. Xafla bakoitzak zenbait molekulatako lodiera du. Ondokoak dira hiru xaflak, bakoitzak bere gainazal-tentsioa duela:

- Solidoa-likidoa xafla, zeinaren gainazal-tentsioa σ_{SL} den.
- Solidoa-baporea xafla, σ_{SB} gainazal-tentsioa duena.
- Likido-baporea xafla, σ_{LB} gainazal-tentsioa duena. Izatez, azken hau orain arte σ deitutakoa da.

Solidoaren alboan likidoak hartzen duen kurbadura, aipaturiko hiru gainazal-tentsioen funtzioa da. Arazoa aztertzeko, kasu konkretu batetik abiatuko gara.

Lehenago aipaturiko hiru xaflaketako elementu txikiak hartuko ditugu, lauak balira bezala harturik, 14.14. irudian adierazi den modura, diagramaren norabide perpendikularrean luzera-unitatekoak izanik. Lau indarren arteko oreka aztertu beharko dugu. Batetik, hiru gainazal-tentsioak, eta bestetik, solidoak isolaturiko xafla-zatiari egiten dion atxikidura- edo erakarpen-indarra, A deituko duguna (solidoaren perpendikularra).

Oreka-baldintzak hauexek dira:

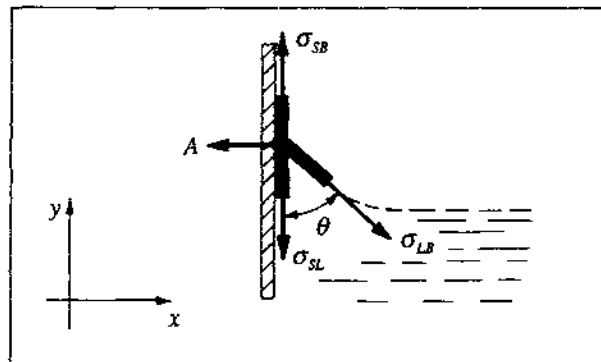
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \sigma_{LB} \sin \theta - A = 0, \quad (14-14a)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \sigma_{SB} - \sigma_{LB} \cos \theta - \sigma_{SL} = 0, \quad (14-14b)$$

eta hortik

$$A = \sigma_{LB} \sin \theta, \quad (14-15a)$$

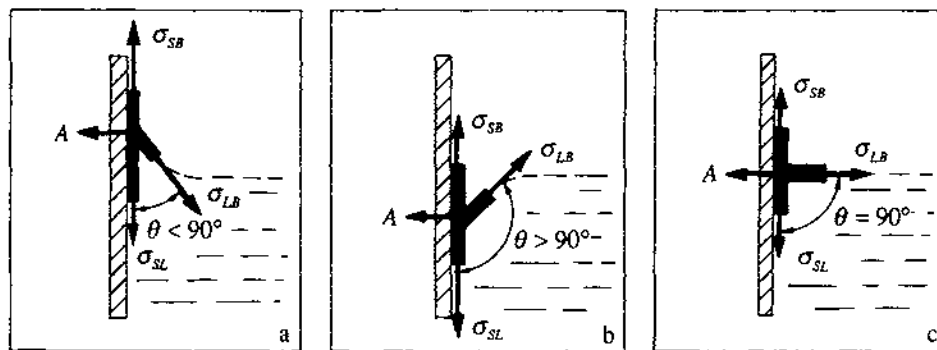
$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SB} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LB}}. \quad (14-15b)$$



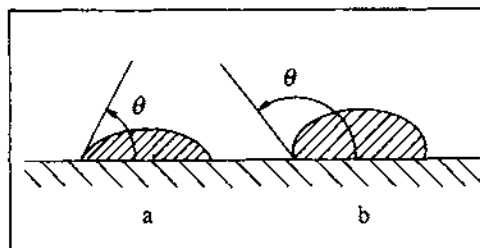
14.14. irudia. Hiru xafletako gainazal-tentsioak.

Ikus daitekeenez, hasieran emandako hiru gainazal-tentsioen bidez θ angelua kalkula daiteke, eta halaber atxikidura-indarra. Hain zuzen, θ angeluari *ukipen-angelua* deritzo.

Ukipen-angelua σ_{SB} eta σ_{SL} gainazal-tentsioen menpekoea da, hots, solidoaren eta likidoaren (honekin batera doa baporea) izaeraren araberrakoa. Hiru kasu desberdin ager daitezke. Kasu batzuetan $0^\circ < \theta < 90^\circ$ da, 14.15.a irudian bezala, eta orduan likidoak *busti* egiten du solidoa. Beste batzuetan $\theta > 90^\circ$ da ($\sigma_{SB} < \sigma_{SL}$) eta orduan likidoak *ez* du solidoa bustitzen (14.15.b). Adibidez, merkurioaren eta beiraren arteko angelua 145° ingurukoa da eta, beraz, merkurioak *ez* du beira bustitzen. Bukatzeko $\sigma_{SB} = \sigma_{SL}$ denean, $\theta = 90^\circ$. Horixe da uraren eta zilarrezko ontzien artean gertatzen dena (14.15.c).



14.15. irudia. Hiru ukipen-kasu desberdin. a) Likidoak busti egiten du solidoa. b) Likidoak ez du solidoa bustitzen. c) Mugako kasua ($\theta = 90^\circ$).



14.16. irudia. Bi tanta desberdin. a) Zolua busti egiten da. b) Ez da bustitzen.

Ukipen-angeluaz esandakoak zerikusi handia du tantek solidoen gainean duten formarekin, solidoa bustitzen den ala ez kontuan izanda. Hain justu, 14.16. irudian bi tanta desberdin adierazi dira. Lehenengoan $\theta < 90^\circ$ da eta tanta horrek busti egiten du; bigarrenean, oster, $\theta > 90^\circ$ izanik, ez du zorua bustitzen.

Bukatzeko, ukipen-angeluaren aldaketan zenbait gaik duten eragina aipatuko dugu, *detergenteek* dutena esate baterako. Hauen bidez $\theta > 90^\circ$ izatetik $\theta < 90^\circ$ izatera pasa daiteke eta hori oso interesgarria da urarekin ongi bustitzeko eta garbitzeko. Beste gai batzuek alderantzizko efektua lortzeko balio dute. Gai *iragazgaizleak* dira, hau da, iragazgaiztu egiten dutenak; horretarako, urarekin 90° baino handiagoa den ukipen-angelua sortzen dute.

Likido batzuek ukipen-angelu ia nulua dute beira arruntarekin, berunezko beirarekin, pyrexarekin eta kuartzo urtuzko beirarekin. Hauxe da, adibidez, uraren, alkoholaren, eterraren eta azido azetikoaren kasua, besteren artean. Beste likido batzuen ukipen-angeluak asko aldatzen dira solidoaren arabera, 14.2. taulan ikus daitekeenez.

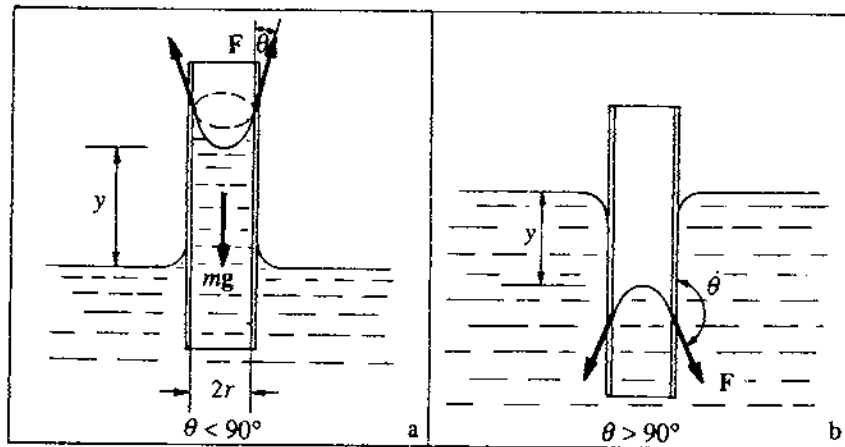
14.2. taula. Ukipen-angeluak.

Likidoa	Horma	Ukipen-angelua
-bromonaftalenoa ($C_{10}H_7Br$)	Beira arrunta	5°
	Berunezko beira	$6^\circ 45'$
	Pyrexia	$20^\circ 30'$
	Kuartzo urtuzko beira	21°
(CH ₂ I ₂)	Beira arrunta	29°
	Berunezko beira	30°
	Pyrexia	29°
	Kuartzo urtuzko beira	33°
Ura	Parafina	107°
Merkurioa	Beira arrunta	140°

14.7. KAPILARTASUNA. JURIN-EN LEGEA

Ukipen-angelua dela eta, likidoaren gainazalean bi solido bata bestetik oso hurbil jartzean, likidoak portaera berezia eduki dezake, gorantz edo beherantz eginez. Efektu hori argi ikusten da hodi oso finetan, *hodi kapilar* deritzenetan ('ile-hodiak' alegia).

Ukipen-angelua $\theta < 90^\circ$ bada, likidoa hodian gora igotzen da oreka-altueraraino. Oster, $\theta > 90^\circ$ denean, beherantz egiten du. Hodiaren barnean gainazalak hartzen duen eite kurbatuari *meniskoa* deritza, eta alboko irudietan adierazi den erakoa izan daiteke.



14.17. irudia. Mota desberdinetako meniskoak ukipen-angeluaren arabera.

Kalkula dezagun likidoa igotzen deneko altuera. $\theta < 90^\circ$ denean (14.17.a irudia). Hodiaren barne-erradioa r izanik, ukipen-luzera $2\pi r$ da. Kalkuluetarako hurbilketa eginez, hodi kapilarreko y altuerako eta r erradioko likidozko zilindroa bere likido-baporea geruzarekin isolatuki kontsideratuko dugu, beraren gainean eragiten ari diren indarren arteko oreka aztertzeko. Goranzko indarra ondokoa da:

$$F = 2\pi\sigma_{LB}\cos\theta. \quad (14-16)$$

Beheranzko indarra likidozko zutabearena da (menisko ingurua arbuizatzuz):

$$mg = \rho\pi r^2 y g. \quad (14-17)$$

Orekan:

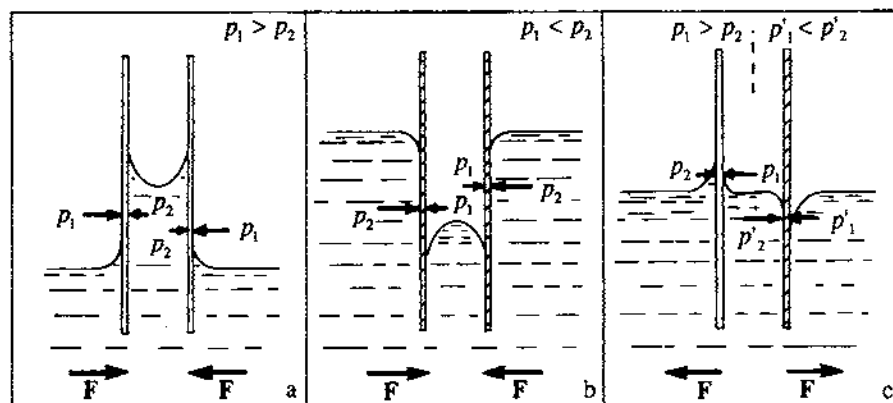
$$\rho g \pi r^2 y = 2\pi \sigma_{LB} \cos\theta \quad (14-18)$$

$$y = \frac{2\pi\sigma_{LB}\cos\theta}{\rho g} \frac{1}{r}. \quad (14-19)$$

Hain zuzen ere, horixe da kapilartasunari buruzko *Jurin-en legea*. Labur esanda, likidoa hodi kapilarrean gora igotzen deneko altuera, hodiaren erradioaren alderantziz proportzionala da. Kasurako, urarekin eta 0.01 mm-ko rayonezko kapilarrean $y = 1,5$ m lor daiteke.

Beheraketa kapilarraren kasuan adierazpen berbera erabil daiteke, kasu honetan $\cos\theta < 0^\circ$ izanik. Beheraketa solidoa bustitzen ez den kasuetan gertatuko da, hala nola merkurioa beirazko ontzian dagoenean, orduan meniskoa beheranzkoa baita, 14.17.b irudian dagoenaren modukoa. Hain zuzen, 1 mm-ko erradioa duen beirazko hodi batean $y = 5$ mm-ko beheraketa lortzen da merkurioan.

Kapilartasunaz azaltzen dira bizitza arrunteko hainbat fenomeno ezagun, adibidez tinta paper lehortzaileetara nola pasatzen den, edo kafea azukre-koskorretan gora nola doan, edo eta alkoholak edo gasolinak txiskeroako metxan gora nola egiten duen.



14.18. irudia. Xaflak mota berekoak direnean, xaflen artean indar erakarlea sortzen da (a eta b). Mota desberdinetakoak direnean (c), indar aldaratzailea.

Bestalde, kapilartasunaren kausaz, bi xafla solido lau eta leun likido baten gainazalaren inguruan eta likidoarekin ukipenean elkarren ondoan jartzean, erakarpene-indarra agertzen da xaflen artean biak era berekoak direnean, alegia biak bustitzen badira edo bat bera ere bustitzen ez bada, alboko lehenengo 14.18.a eta b irudietan ikus daitekeenez. Ostera, mota desberdinako xaflen artean —bata busti eta bestea bustitzen ez dena— indar aldaratzailea sortzen da (14.18.c).

15. gaia

Higidura oszilakorra

Gure ausardia ez litzateke lar handia izango higidura-mota hau beste guztien artean garrantzizkoena dela esango bagenu, izan ere berau guztiz lagungarri gertatzen baita Fisikaren arlo asko eta askotako fenomenoak aztertzeke orduan. Mekanika Klasikotik hasita, Elektrikara pasatuz, hortik uhin-fenomenoen esparrura, eta Fisika Kuantikora iritsi arte, jokamolde oszilakorra naturaren baitan dagoela baieztatu dezakegu.

Esan barik doa, kapitulu honetan barrena ikusiko duguna, higidura oszilakorrari buruzko gainbegirada baino ez dela, oszilazioak beren konplexutasun osoan aztertzeke behar den lehenbiziko urratsa alegia. Bi dira horretara mugarazten gaituzten zioak, alegia, batetik geure helburuetarako sakontasun handiagorik ez dugula behar, eta, bestetik, sakonkiago aztertzen saiatuko bagina ere, berehala matematika aldetik zailtasunek eragotziko liguketela.

Beraz, aipatutako arrazoietara makurtuz, funtsezkoak diren ereduak azalduko ditugu soilik, beraien azterketan ahalik eta urrats matematiko gutxien erabiliz, xehetasun eta nabardura zenbait hurrengo ikasturte baterako utziz (ikus *Mekanika eta Uhinak*, UEU, Bilbo, 1992).

15.1. OSZILAZIO HARMONIKOAK

Hauexek dira higidura oszilakorrik oinarritzkoenak, zeren beste edozein higidura oszilakor oszilazio harmonikoetan deskonposa baitaiteke, Fourier-en garapenaren bidez buruturiko azterketa matematikoak argi frogatzen duenez. Beraz, nahitaezkoa da oszilazio harmonikoak ondo aztertzea, eta horretan jardungo dugu lehenbiziko hiru ataletan.

Dimentsio bakarreko kasuan, oszilazio harmonikoak egiten dituen partikularen higiduraren ekuazioa modu honetan adieraz dezakegu:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (15 - 1)$$

Hona hemen idatzitako sinboloen izen eta esangura:

- x : *elongazioa* deritzo, eta partikularen posizioa adierazten du.
- A : *amplitudea* deritzo, eta bistakoa denez, elongazioaren balio maximoa ematen digu. Amplitudearen unitateak elongazioari dagozkion berberak dira, funtzio trigonometrikoak dimentsio gabekoak dira eta.

$\omega t + \varphi$: *aldiuneko fasea* deritzo, eta radianetan neurtzen da.

ω : *maiztasun angeluarra* edo *pultsazioa* deritzo, eta radian segundoko unitatetan neurtzen da, t denbora segundotan ipintzen denean.

φ : *hasierako fasea* deritzo, eta fasearen balioa adierazten du $t = 0$ aldiuncan. Zer esanik ez, faseari berari dagozkion unitateetan neurtzen da, radianetan alegia.

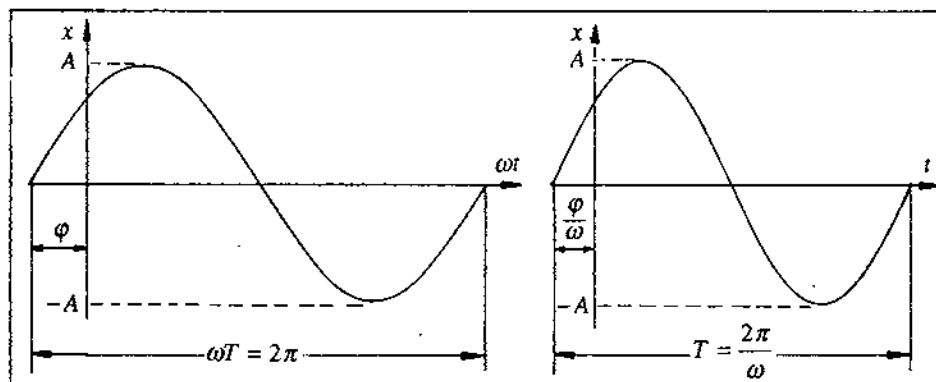
Pultsazioarekin zuzenki erlazionaturik dauden beste magnitude bi ere erabiliak izaten dira, honako hauek preseski:

ν : *maiztasuna*, zeinak denbora-unitatean burutzen den oszilazio-kopurua adierazten duen. Ziklo, oszilazio edo bibrazio segundoko delako unitatean neurtzen da, edo, laburkiago, hertzetan ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). ω eta ν -ren arteko erlazioa honako hau da:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (15-2)$$

T : *periodoa*, hots, oszilazio oso bat burutua izan dadin igaro behar den denbora. Eskuarki, segundotan neurtu ohi da, eta definiziotik beretik erraz atera daitekeenez, maiztasunaren alderantzizkoa da, hots,

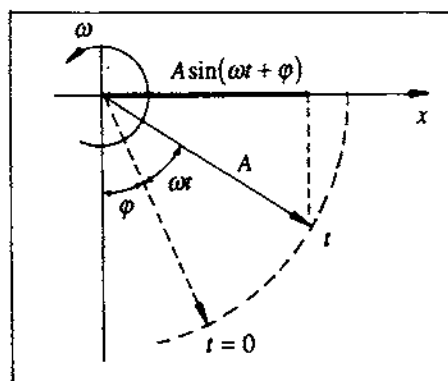
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (15-3)$$



15.1. irudia. Oszilazio harmonikoaren $x(\omega t)$ eta $x(t)$ adierazpen grafikoak.

Oszilazio harmonikoa irudikatzeko, hurrengo adierazpide bi hauetaz baliu gaitzeko:

- i) $x(\omega t)$ eta $x(t)$ direlako grafikoen bidez. Azken batez, sinu funtzioaren adierazpen grafikoak dira, eskalaz aldaturik. Eskala-aldaketa horrek inongo zailtasunik ez dakarrenez, irudiak ematera mugatuko gara (15.1. irudia).
- ii) *Bektore biratzaile* edo *fasorearen* bidez. Demagun A modulua duen bektore bat, zeina ardatzen jatorriaren inguruan ω abiadura angeluarraz biraka ari den, erlojuaren orratzen alderantzizko noranzkoan. Hasierako aldiuncan bektoreak eta ardatz bertikalaren beheko adarrak φ angelua osatu dute.



15.2. irudia. Bektore biratzailearen bidezko adierazpena.

Aipaturiko bektoreak x ardatzean edozein aldiuntan duen proiektzioa kalkulatzeko badugu, ondoko balioa lortuko dugu (ikus bedi 15.2. irudia),

$$A \sin(\omega t + \varphi), \quad (15 - 4)$$

azken hau oszilazio harmonikoaren elongazioari dagokion adierazpena izanik. Bigarren metodo hau lehenengoa baino emankorragoa da, oszilazio bi edo gehiago gainezarri behar direneko kasuei begira batez ere (ikus hurrengo 15.4. atala).

15.2. OSZILAZIO HARMONIKOAREN ZINEMATIKA ETA DINAMIKA

Lehenengo eta behin ondokoa argitu behar dugu, alegia, fenomeno oszilakor guztiak ez direla Mekanikaren arloa mugatzen. Beraz, litekeena da solido baten tenperatura era oszilakorrean aldatzea; edota zilindro batean sortutako gasaren presioak, pistoi batek eragindakoak esaterako, gorabehera harmonikoak pairatzea; edota beste hainbeste adibide. Horrelako kasuetan ere, erabilgarriak dira segidan azalduko ditugun kontzeptuak, kasu bakoitzari bere interpretazio egokia emanez, jakina.

Behin aurrekoa finkaturik, partikula baten dimentsio bakarreko higidura harmonikoa aztertzeari ekingo diogu, zinematikaren ikuspuntutik. Lehenbizi, dakusagun partikularen abiadura zein den. Horretarako elongazioaren denborarekiko deribatua egingo dugu, hau da,

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \sin\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (15 - 5)$$

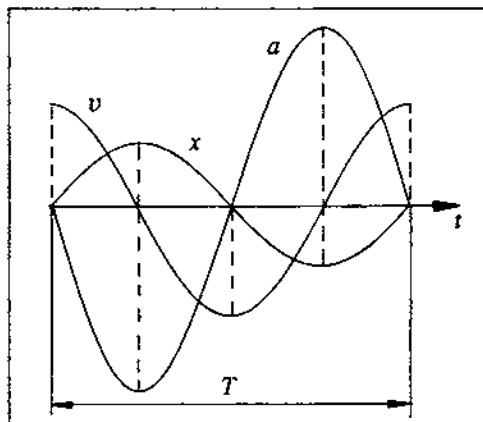
Argi dagoenez, abiaduraren bilakaera harmonikoa da, balio maximoa $A\omega$, maiztasun angeluarra ω , eta hasierako fasea $(\varphi + \pi/2)$ izanik.

Ondoren, lortutako abiadura berriro denborarekiko deribatuz, azelerazioa erdietsiko dugu. Hara:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \sin[\omega t + (\varphi + \pi)]. \quad (15 - 6)$$

Erraz kontura gaitzkeenez, abiadura ez ezik azelerazioa ere era harmonikoan aldatzen da, balio maximoa, maiztasun angeluarra eta hasierako fasea, $A\omega^2$, ω eta $(\varphi + \pi)$ izanik, hurrenez hurren.

Ondoko 15.3. irudian elongazioaren denborarekiko bilakaera, abiadurarena eta azelerazioarena batera ikus daitezke. Bereziki interesgarria da aipaturiko magnitudeen balio minimo, nulu eta maximoek agertzen duten aldi berekotasunaz ohartzea.



15.3. irudia. $x(t)$, $v(t)$ eta $a(t)$ funtzioen adierazpen grafikoa.

Lortutako adierazpenetatik eta elongazioari dagokionetik, erraz atera ditzakegu v -ren eta x -ren arteko erlazioa, baita a -ren eta x -ren artekoa ere; horretarako t denbora ezabatu besterik ez da behar. Beraz, hona hemen erlazioak, horien osagarri den 15.4. irudiaz lagundurik:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}. \quad (15-7)$$

$$a = -\omega^2 x. \quad (15-8)$$

$x = -A$	$x = 0$	$x = A$
$v = 0$	$v = \pm \omega A$	$v = 0$
$a = \omega^2 A$	$a = 0$	$a = -\omega^2 A$
$\xleftarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$ $\xleftarrow{\quad}$	$\xrightarrow{\quad}$
$-A$	O	$+A$
		x

15.4. irudia. Elongazioak, abiadurak eta azelerazioak oszilazioaren muturretan eta zentroan dituzten balioak.

Higidura harmonikoaren azterketa dinamikoari gagozkiola, demagun partikula higiduraren masa m dela, eta aplika dezagun Newton-en bigarren legea:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (15-9)$$

Kontuan har bedi, hemen ez dugula erabili behar zertazun bektorialik, gure aztergaia norabide bakarreko higidura da eta; horregatik, nahikoa da moduluaz. Bestalde, arestian atera dugunez, higidura harmonikoan ondoko erlazioa betetzen da:

$$a = -\omega^2 x. \quad (15-10)$$

Azken erlazio bietatik ekuazio hau lor dezakegu:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (15-11)$$

Ekuazio horri higidura harmonikoaren ekuazio diferentziala deritzo, eta beraren intergarritasuna Mekanikaren arloa ez eze, Fisikaren beste hainbat arlotara hedatzen da. Izan ere, demagun zirkuitu elektriko baten azterketan ari garela, eta egindako ikerketen ondorioz, I korrante-intentsitateari dagokion ekuazio deferentziala lortu dugula, zeina tankera honetakoa den,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \beta I = 0 \quad (\beta > 0 \text{ eta konstantea izanik}). \quad (15-12)$$

Begi bistan dagoenez, ekuazio hau eta lehentxoago ikusi duguna erabat antzekoak dira; hots, tankera matematiko berekoak dira, behinik behin. Antzekotasun horretan finkaturik, ondokoak baieztatu ditzakegu:

- batetik, zirkuituak daroan korrantea era harmonikoan aldatzen da, hau da, denbora-epe finko eta erregularretan korrantearen noranzkoa aldatu egiten da, eta aldiune zehatz batzuetan anulatu egiten da (hain zuzen ere, noranzkoaz aldatzera doanean), eta har ditzakeen balioak maximoa den batek mugaturik daude;
- bestetik, korrantearen aldaketen maiztasun angeluarra hauex da:

$$\omega = \sqrt{\beta}. \quad (15-13)$$

Hemendik, erraz lor ditzakegu T periodoa eta ν maiztasuna.

Berriro ere Mekanikara itzulirik, azter ditzagun, adibide gisa, higidura harmonikora, edo, ikusiko dugunez, ia-ia harmonikora moldatzen diren zenbait kasu.

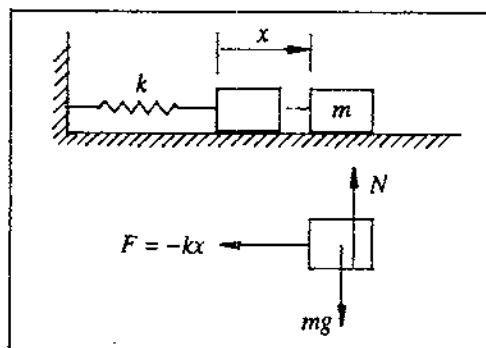
15.2.1. *Malguki bati loturiko partikula*

Jakina denez, malguki bat luzatzean edota laburtzean, beraren elastikotasunaren kausaz, deformazioarekin nolabait erlazionaturik dagoen indar bat sortzen du malgukiak. Erlazio hau mota desberdin askotakoa izan daiteke, guztion arteko sinpleena ‘linealak’ deritzen malgukiei dagokiena izanik. Beraz, honelako malguki bat erabiltzean, ondokoa da malgukiak sortutako indarra, deformazioaren funtzioan:

$$F = -kx. \quad (15-14)$$

Erlazio honetan, k delakoa malgukiaren ezaugarria da, konstante elastikoa deritzona, beraren dimentsioak $[F \cdot L^{-1}]$ edo $[M \cdot T^{-2}]$ izanik. Bestalde, x delakoa malgukiak pairatzen duen deformazioa da, nahiz luzapena izan, nahiz laburpena izan. Bistakoa denez, malgukiak pairatutako deformazioa eta sortutako indarra elkarren aurkako noranzkokoak dira.

Honelako malguki bati m masako partikula bat lotzen badiogu, eta hau bere oreka-posiziotik aldendu eta gero askatzen badugu, partikularen gainean eragiten duten indarrak 15.5. irudian ageri direnak dira (diogun, bide batez, inolako marruskadurarik ez dagoela suposatu dugula, eta halaber, malgukiaren masa arbuigarria dela kontsideratuko dugula). Beraz, partikularen higidurari dagozkion ekuazioak ondokoak izango dira:



15.5. irudia. Malgukia-partikula sistema. x elongazioa izatean eragiten ari diren indarrak.

$$F = -kx = ma, \quad (15-15a)$$

$$N - mg = 0. \quad (15-15b)$$

Horietako lehenengotik, ekuazio hau lor dezakegu:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (15-16)$$

Azk. n ekuazio hori ikusita, hauxe ondoriozta dezakegu, alegia, partikulak oszilazio harmonikoak egingo dituela, eta horien maiztasun angeluarra $\omega = \sqrt{k/m}$ izango dela.

15.2.2. Pendulu sinplea

Labur esanda, m masa duen partikula bat, zeina l luzerako hari batetik zintzilik dagoen, horixe da pendulu sinplea. Lehenengo adibidean bezala, oraingoan ere ez dugu marruskadurarik kontuan hartuko, eta hariaren masa arbuiautuko dugu. Bestalde, pendulu sinplea aztertzean, haria zurrina dela kontsideratu ohi da, alegia, ez dela deformatzen.

Behin oreka-posiziotik aterata eta aske lagata, pendulua etengabeko tiki-taka batean hasten da, ondoko ekuazioen arabera (ikus 15.6. irudia):

$$F_t = -mg \sin \theta = ma_t, \quad (15-17a)$$

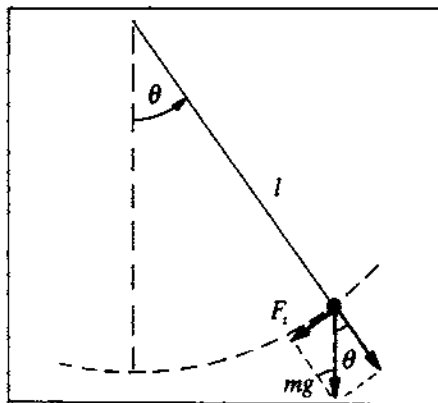
$$a_t = l \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (15-17b)$$

Bi ekuazio horietatik, beste hau lortuko dugu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (15-18)$$

Azkenez lortu duguna, pendulu sinplearen higidura-ekuazioa alegia, oszilazio harmonikoen ekuazio diferentzialaren tankera bertsukoa da, bere-berekoa ez bada ere, θ -ren ordez $\sin \theta$ funtzioa baitu. Dena den, angelu txikietarako betetzen den $\sin \theta \rightarrow \theta$ baliokidetzaz aplikatuz, aise konpon dezakegu nabardura hori, zeren $\sin \theta \approx \theta$ eginez,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (15-19)$$



15.6. irudia. Pendulu sinplea.

Eta hemendik haxe ondorioztatuko dugu, hots, pendulu sinplearen oszilazioak, anplitude txikikoak direnean, ia-ia harmonikoak direla, beraien periodoa ondokoa izanik:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (15-20)$$

Ohar modura diogun ezen pendulu sinplearen higidura aztertzean, norabide tangenzialean eragiten duen F_t indarra besterik ez dugula kontuan hartu, norabide normalean eragiten dutenek —hariaren tentsioak eta pisuaren osagai erradialak alegia— gure helburuetarako ezelako garrantzirik ez dutelako. Bestalde, anplitude angeluarra txikia ez denean, $\sin\theta \approx \theta$ hurbilketa ez da egokia, eta orduan honelaxe adieraz dezakegu periodoa:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right], \quad (15-21)$$

non θ_0 delakoa anplitude angeluarra den (radianetan emanik, noski). Dena den, θ_0 txikia denean, emaitza hau (15-20) adierazpenekoaren oso antzekoa dela ikus daiteke.

15.2.3. Pendulu fisikoa

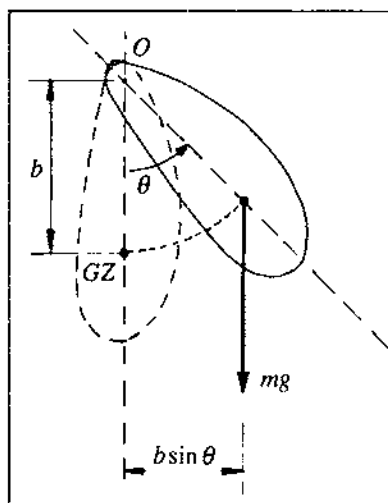
Demagun 15.7. irudiko solidoa, zeina O ardatz finkotik esekita dagoen, beraren masa m , eta GZ grabitate-zentrotik bira-ardatzarako distantzia b izanik. Solidoaren higidura aztertzean, aurreko adibideetan egin dugun legez, inongo marruskadurik ez dagoela suposatuko dugu.

Hain zuzen, 9. gaian ikusi genuenez, gure solidoaren biraketa-higidura ondoko ekuazioaren arabera da:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (15-22)$$

I delakoa O puntuarekiko inertzia-momentua izanik. Irudian erakutsitako posizioan, haxe da O ardatzarekiko indar-momentua:

$$\tau = -mgb \sin\theta. \quad (15-23)$$



15.7. irudia. Pendulu fisikoa.

Azken ekuazio biok bateratuz, beste hau atera dezakegu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I} \sin\theta = 0. \quad (15-24)$$

Aurreko adibidean gertatu zaigun era berean, pendulu fisikoaren higidura-ekuazioa ez da zehazki oszilazio harmonikoei dagokiena, hemen ere $\sin\theta$ ageri baitzaigu. Hala eta guztiz ere, pendulu sinplearen kasuan erabilitako ildo berberari jarraituz, anplitude txikiko oszilazioak ia-ia harmonikoak direla esan dezakegu. Hurbilketa hori onartuta, hona hemen pendulu fisikoaren higiduraren periodoa:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mgb}{I}}. \quad (15-25)$$

15.3. OSZILAZIO HARMONIKOETAKO ENERGIA

Berriro ere eredu mekanikoaz baliatuko gara energiaren gorabeherak aztertzeko, aldeztu aurretik jakinaraziz ezen lortuko ditugun emaitzak Fisikaren beste arlo askotara hedagarriak direla. Beraz, $F = -kx$ indar elastikoaren eraginpean higitzen ari den partikula hartuko dugu aztergai.

Geroxeago frogatuko dugunez, planteaturiko indar elastikoa kontserbakorra da, eta, energia osoari gagozkiolarik, zati bitan banatuta kontsideratuko dugu, alegia, energia zinetikoa eta energia potentziala.

– **Energia zinetikoa.** Higidura harmonikoaren abiaduraren eta posizioaren arteko (15-7) erlazioan oinarriturik, honelaxe idatz dezakegu energia zinetikoa:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2). \quad (15-26)$$

Bestalde, atal honetako hasieran ω , k eta m magnitudeak lotzen dituen (15-16) adierazpena gogoratu, horien arabera $\omega = \sqrt{k/m}$ denez, honelaxe geratuko zaigu energia zinetikoa:

$$E_k = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2). \quad (15-27)$$

– **Energia potentziala.** Indar kontserbakorrak aztertzean (7. gaia), ondoko erlaziora heldu ginen:

$$F = -\nabla E_p. \quad (15-28)$$

Dimentsio bakarreko kasuan, aurreko erlazioak oso tankera sinplifikatua hartzen du, indarraren moduluaz, hauex hain zuzen ere:

$$F = -\frac{dE_p}{dx}. \quad (15-29)$$

Aurreko adierazpena planteatu dugun indarrari aplikatuz gero, honako energia potentzial elastiko hau geratuko zaigu:

$$-\frac{dE_p}{dx} = -kx, \quad (15-30)$$

$$dE_p = kx dx, \quad (15-31)$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 + K. \quad (15-32)$$

Integraziotik sorturiko K konstantea baztertzeke asmoz, hauex onartuko dugu usadioari amore emanez, alegia, $x = 0$ denean energia potentziala ere nulua dela ($E_p = 0$). Beraz, x elongazioaren edozein baliotarako, hauex da energia potentzialaren adierazpena:

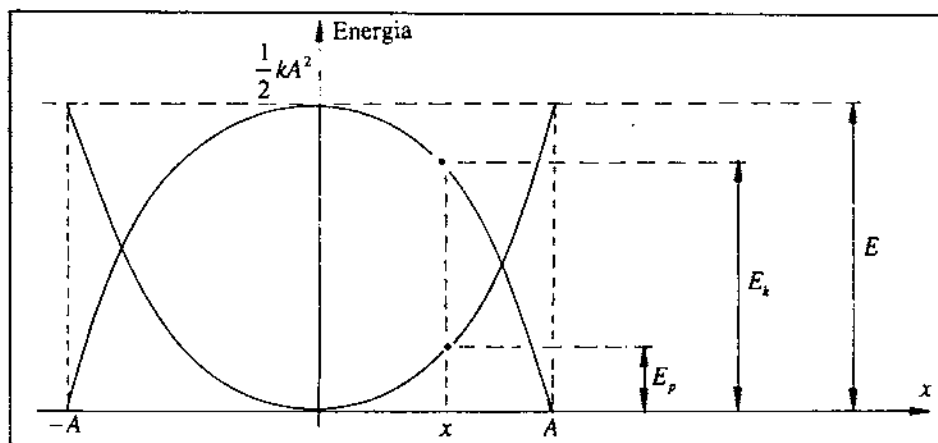
$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (15-33)$$

Azkenez higidura harmonikoari dagokion energia osoa —*bibrazio-energia* ere deitutakoa— lortzeko, berau osatzen duten zati biak, zinetikoa eta potentziala alegia, batu besterik ez dugu egin behar, hots:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 = ktea. \quad (15-34)$$

Aurreko guztia laburbilduz, higidura harmonikoan, eta antzekoak diren beste fenomeno oszilakor askotan ere, energia osoa kontserbatu egiten da, energia zinetikoa eta potentziala etengabe aldatuz doazen arren.

Energiari eskainitako atalari bukaera emateko, ondoko 15.8. irudia aztertuko dugu, non energia zinetikoaren (goranzko parabola) eta potentzialaren (beheranzko parabola) bilakaera grafikoki adierazi den, beraien baturak, hots, energia osoak, beti ere konstante dirauela azpimarratuz.



15.8. irudia. Higidura harmonikoaren energia zinetikoa eta energia potentziala, elongazioaren arabera.

Ageri denez, oreka-posizioan ($x = 0$) energia osoa era zinetikoan dago; horrela, energia zinetikoa maximoa da, lehenago ikusi dugunez, oreka-posizioan abiaduraren balioa absolutua maximoa da eta. Ibilbidearen muturretan ($x = \pm A$), berriz, energia zinetikoa anulatu egiten da, puntuotan partikula higikorra, une batean bada ere, gelditu egiten baita.

Energia potentzialari dagokionez, beraren bilakaera aztertzeke nahikoa da 7. gaian azalduko kasu honi aplikatzea.

15.4. OSZILAZIO HARMONIKOEN KONPOSIZIOA

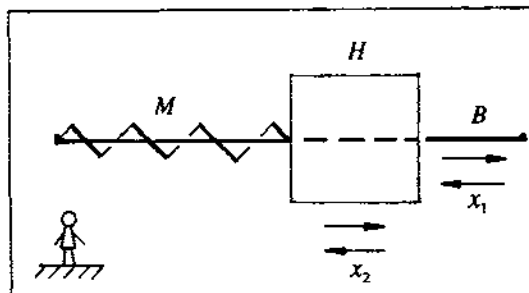
Berrir ere eredu mekanikoari loturik, aldi berean oszilazio biren eraginpean ari den partikula baten higidura erresultantea arakatzeari ekingo diogu atal honetan, eta horretarako, ondoko kasu berezietan finkatuko gara:

1. Norabide eta maiztasun bereko oszilazio biren konposizioa.
2. Norabide bereko baina maiztasun desberdineko oszilazio biren konposizioa.
3. Norabide perpendikularretan eta maiztasun berberarekin gertatzen diren oszilazio biren konposizioa.

Hiru kasuetan gainezarmenaren printzipioan oinarrituko gara higidura erresultantea lortzeko. Has gaitzen, ba, kasuok banan-banan aztertzen.

15.4.1. Norabide eta maiztasun bereko oszilazioen konposizioa

Pentsa dezagun 15.9. irudian adierazitako muntaia darabilgula, non H higikaria, M malgukiak eraginik, B barrarekiko oszilatzen ari den. Aldi berean, B barra ere oszilatzen ari da norabide horizontalean kanpoko eragin baten ondorioz, aipatutako oszilazio biak maiztasun berekoak izanik.



15.9. irudia. B barra oszilatzen ari da. Aldi berean, H higikaria B barrarekiko oszilatzen ari da.

Gure helburua hauxe da, hots, higidura erresultantea zein den erdiestea, sistematik kanpo dagoen edozein behatzailerekiko. Horretarako, demagun oszilazioen adierazpen matematikoak ondoko hauek direla:

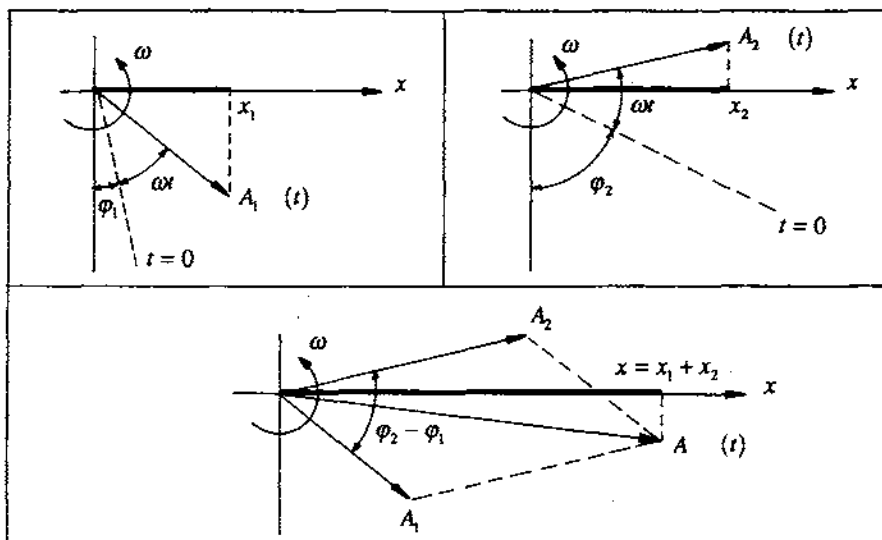
$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (15-35a)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (15-35b)$$

x_1 delakoa barrak kanpoko behatzailearekiko duen elongazioa izanik, eta x_2 delakoa higikariak barrarekiko duena. Gainezarmenaren printzipioaren arabera, hauxe izango da bila ari garen higidura erresultantearen ekuazioa:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (15-36)$$

Hain zuzen, $x_1(t)$, $x_2(t)$ eta $x(t)$ adierazpenek emandako higidurak 15.10. irudian ageri den modura irudikatzen dira, zein bere bektore biratzailearen eskemaren bitartez.



15.10. irudia. x_1 eta x_2 higiduren eta beraien konposizioaren bektore biratzaile bidezko adierazpena.

x_1 eta x_2 higidurak maiztasun berekoak direnez, fasoreen ω abiadura angeluarra berbera da. eta A_1 eta A_2 bektoreek pausagunean diraute elkarrekiko, eta irudian biek osatutako paralelogramoa bloke modura ari da biraka. Horrela, paralelogramoaren diagonalak, A bektoreak alegia, higidura erresultantea adieraziko digu. Horren amplitudea, hots, A bektorearen modulua, eta φ hasierako fasea erraz ater daitezke kosinuaren teorema bidez, emaitzak hauexek izanik:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (15-37)$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (15-38)$$

Azkenez, ondokoa ondoriozta dezakegu, alegia, norabide eta maiztasun bereko oszilazio harmoniko biren biltzetaz, beste oszilazio harmoniko bat sortzen dela, zeinaren maiztasuna lehenengo biei dagokien berbera den, eta zeinaren amplitudea eta hasierako fasea goiko adierazpenetan emandakoak diren.

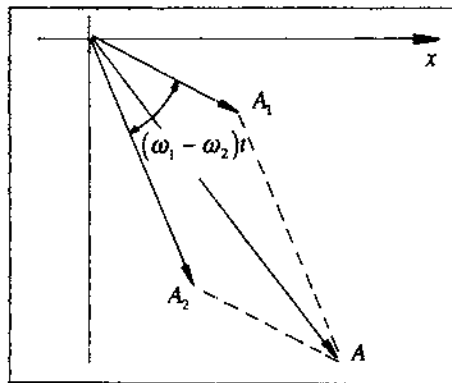
15.4.2. Norabide berbera baina maiztasun desberdinak dituzten oszilazioen konposizioa

Aurreko kasuan erakutsi dugun muntaiari berriro ere helduz, kontsidera dezagun oraingo honetan, H higikariak B barrarekiko egiten dituen oszilazioen maiztasuna eta barraren higidurari dagokiona desberdinak direla. Hau da, era matematikoa adierazita, aurrekoen ordez honako hauek idatziko ditugu, $\omega_1 \neq \omega_2$ izanik:

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t, \quad (15-39a)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t. \quad (15-39b)$$

Hemen $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ dela suposatu dugu, halako suposizioak ez baitio emaitzari orokortasunik kentzen, eta, bide batez, kalkuluak nabarmenki errazten baititu.



15.11. irudia. Maiztasun desberdineko bektore biratzaileen kasuan, $(\omega_1 - \omega_2)t$ angelua adierazten du.

Lehenengo kasuan urratutako arrazoibide berbera erabiliz, berriro ere bektore biratzaileen eskemaz baliatuko gara bigarren hau ebazteko (15.11. irudia), eta gainera menaren printzipioa aplikatuz, hauxe izango da higidura erresultantea:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t. \quad (15-40)$$

Kontuan hartu beharreko nabardura garrantzitsua honako hau da, hots, x_1 eta x_2 oszilazioen maiztasun desberdinak direla kausa, irudiko paralelogramoa ez dela bloke modura biraka aritzen, eta, beraz, bektorearen modulua —higidura erresultantearen 'anplitudea' nonbait— konstante iraun barik aldatuz doala aldiunez aldiune.

Kalkula dezagun, ba, sasiaplitude horren balioa edozein aldiunetan. Hain justu, 15.11. irudian ikus daitekeenez,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t}. \quad (15-41)$$

Kosinu funtzioaren balioak $-1 < \cos(\omega_1 - \omega_2)t < +1$ tartekoak direla gogoraziz, sasiaplitudearen muga absolutuak hauek izango dira:

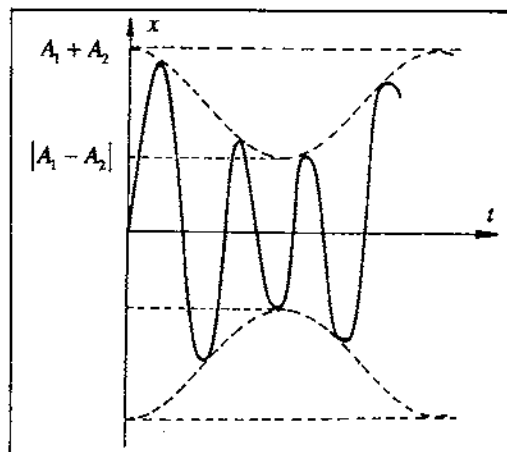
$$A_{\max} = A_1 + A_2 \rightarrow \cos(\omega_1 - \omega_2)t = 1, \text{ edo } (\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi \text{ denean};$$

$$A_{\min} = |A_1 - A_2| \rightarrow \cos(\omega_1 - \omega_2)t = -1, \text{ edo } (\omega_1 - \omega_2)t = (2n+1)\pi \text{ denean}.$$

Bestalde, A -ren aldaketen maiztasun angeluarra eta periodoa ondokoak ditugu:

$$\omega_A = |\omega_1 - \omega_2|, \quad T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (15-42)$$

Ondoko 15.12. irudian $x(t)$ grafikoa erakusten da, bide batez bertan A -ren bilakaera puntuka emanez. Anplitude aldakorrei —era honetakoei zein beste eratakoei ere— *anplitude modulatuak* deitu ohi zaie hizkera teknikoan.

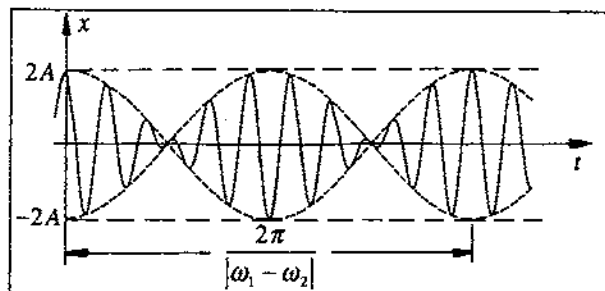


15.12. irudia. Maiztasun desberdineko bi oszilazioen konposizioaz lortzen den higidura.

x_1 eta x_2 oszilazioak anplitude berekoak direnean, konposizioa aski sinplifikaturik geratzen da matematikaren ikuspuntutik, ondoren ikus dezakegunez:

$$x = x_1 + x_2 = \left[2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right] \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \quad (15-42)$$

Emaitza horri dagokion grafikoa ondoko 15.13. irudian ageri dena da, non, bistakoa denez, sasiaplitudearen muga-balio absolutuak $A_{\min} = 0$ eta $A_{\max} = 2A$ diren.



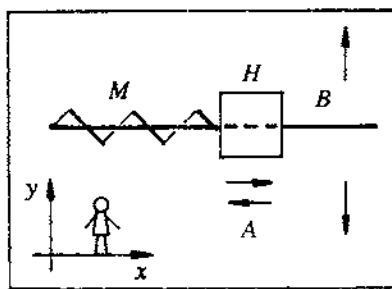
15.13. irudia. Maiztasun desberdineko baina anplitude berdineko bi oszilazioen konposizioa.

15.4.3. Norabide perpendikularretako oszilazioen konposizioa

Azkenez, 1. eta 2. kasuetan ideiak finkatzeko asmatu dugun tramankulua beste modu batez erabiliko dugu 3. kasu honetan. Hain zuzen, higikaria barraren alde batetik bestera ari den bitartean, barrak berekiko norabide perpendikularrean jardungo du oszilatzeko, higidura bion maiztasuna berbera izanik (15.14. irudia). Hauen anplitudeak A eta B letren bidez adieraziko ditugu, norabideak bereizteko x eta y ardatzak erabiliz. Hona hemen, ba, oszilazio biak matematikoki idatzita:

$$x = A \sin \omega t, \quad (15-44)$$

$$y = B \sin(\omega t + \delta). \quad (15-45)$$



15.14. irudia. Barra eta malgukiaren oszilazioak norabide perpendikularretan gertaizen ari dira.

Argi dagoenez, lehenengo oszilazioari hasierako fase nulua egokitu zaio. jokabide horrek eragiketak nabarmenki errazten baititu; zer esanik ez, horrek ez die kentzen ezelako orokortasunik ondorioei.

Has gaitezen goiko ekuazioetatik t denbora ezabatzen. Hara:

$$x = A \sin \omega t \rightarrow \sin \omega t = \frac{x}{A} \rightarrow \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}, \quad (15-46)$$

$$y = B(\sin \alpha \cos \delta + \cos \alpha \sin \delta) \rightarrow \frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \delta + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \delta, \quad (15-47)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2 \cos \delta}{AB} xy = \sin^2 \delta. \quad (15-48)$$

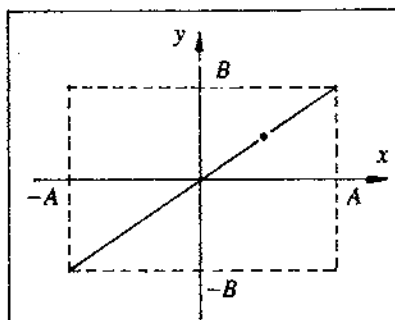
Hauxe da higikariaren ibilbidearen ekuazio kartesiarra, zeina elipse-tankerakoa den, hain zuzen ere. Hortik, era orokorrean ondokoa esan dezakegu, alegia, maiztasun berarekin eta norabide perpendikularretan gertatzen diren oszilazio harmoniko bi konposatzean higidura eliptikoa sortzen dela.

Ondoren, kasu berezi batzuen azterketa egingo dugu, δ angeluaren zenbait baliorako.

- $\delta = 0$. Oszilazioak elkarrekiko fasean daude, edo fase berekoak dira. Aurreko balioa emaitza orokorrera eramanda, ekuazio hau dugu:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2xy = 0 \rightarrow y = \frac{B}{A}x. \quad (15-49)$$

Hitz gutxitan esanda, elkarrekin fasean dauden oszilazio perpendikularren konposiziotik, fase berekoa den beste oszilazio zuzen bat lortzen da (15.15. irudia).



15.15. irudia. $\delta = 0$ desfaseari dagokion oszilazio konposatua.

- $\delta = 0$ izan barik, $\delta = \pi$ balitz (fase-aurkako oszilazioak), ondorioak oraintsu atera ditugun antzekoak lirateke, ibilbidearen norabideari dagokionez salbu, zeina 15.15. irudiko paralelogramoaren beste diagonalarena litzatekeen.

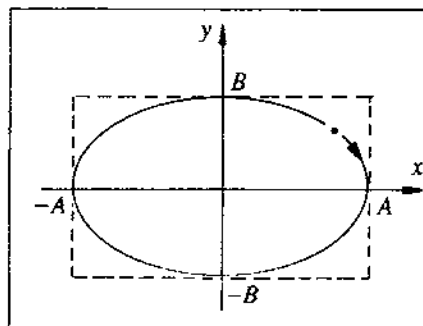
Edozein kasutan ere, higidura erresultantearen anplitudea $\sqrt{A^2 + B^2}$ da, jatorritik higikarirako distantzia, t aldiunean, hauxe izanik:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \alpha. \quad (15-50)$$

- $\delta = \pi/2$. Kasu honetan ere, aurrekoan erabilitako jokabide berberari jarraituz, emaitza orokorrera eramango dugu $\delta = \pi/2$ balioa, eta ondokoa lortuko dugu:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (15-51)$$

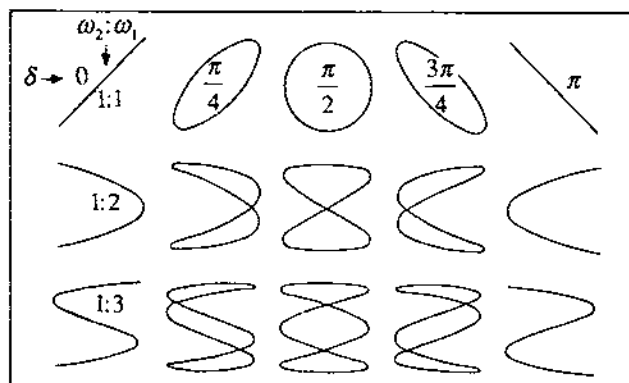
Ekuazio hori 15.16. irudiko elipseari dagokio, zeina higikariak erlojuaren orratzen noranzkoan ibiltzen duen. Hasierako higiduren anplitudeak (A eta B) balio berekoak suertatuz gero, elipsea zirkunferentzia bihurtzen da, aise uler daitekeenez.



15.16. irudia. $\delta = \pi/2$ desfaseari dagokion konposizioa.

- $\delta = 3\pi/2$ balitz, ondorioak aurreko kasuan agertu zaizkigun bezalatsukoak lirateke, higiduraren noranzkoa izan ezik, alderantzizkoa litzakeke eta.

Azkenez, oszilazio perpendikularren konposizioari bukaera emanez, aipa dezagun, azaleko aipamena egiteko besterik ez bada ere, batu beharreko higidurak maiztasun berekoak ez direnean gertatzen dena. Horrelako kasuetako ibilbide erresultanteak eite askotakoak izan daitezke, beti ere harrigarri samarrak diren eitekoak egia esan, oro har *Lissajous-en* kurbak deritzenak, eta zenbait liburuk bitxikeria moduan agertzen dituztenak. Ohiturari jarraikiz, guk ere horietako kurba batzuk eskaini ditugu 15.17. irudian, hasierako δ fase-diferentziaren zenbait baliotarako, maiztasunen arteko zatidura 1:1, 1:2 eta 1:3 izanik.



15.17. irudia. Norabide perpendikularretako higidura oszilakorren konposizioa: Lissajous-en kurbak.

15.5. BILAKABIDE IRAUNGIKORRAK. OSZILAGAILU INDARGETUA

Orain arte oszilazio harmonikoak aztertzen aritu gara, prozesu-mota horiek zeharo teoriakoak direla aldeztuz aurretik adierazirik. Izan ere, 15.3. atalean oszilazio harmonikoen energia osoak konstante dirauela ikusi dugu. Haatik, errealitatean besterik gertatzen da bibrazio-

-fenomenoetan; hots, zenbait bilakabide direla kausa, oszilagailuak darabilen energia txikituz doa, eta honekin batera oszilazioen anplitudea ere. Adibide gisa, autoetako indargetzaileena ipin dezakegu. Jakina denez, txasisaren eta gurpilen ardatzen arteko lotura malguki bidez egiten da (kasu batzuetan, malgukien ordeztak balaztak erabiltzen dira; gure arrazonamenduari berdintsu dio baina). Hori besterik erabiliko ez balitz, errepideko zulgune bakoitzetik pasatzean, kotxea etengabeko oszilazioan hasiko litzateke, gora eta behera, behera eta gora, egonkortasun-egoerari ezin eutsiz eta bidaiarien erosotasuna erabat hautsiz. Batere atsegin ez den efektu hori motel dadin, malgukiez gainera beste pieza batzuk kokatzen dira txasisaren eta ardatzen artean, indargetzaileak hain zuzen ere. Indargetzailearen mutur bat txasisean ezartzen da, bestea ardatzari tinkatzen zaio. Txasisa ardatzarekiko goranzko eta beheranzko higidura erlatiboan hastean, indargetzaileak daukan enbologia biskositate handiko fluido baten barnean higitzera beharturik dago, eta fluidoak egiten dion erresistentzia dela medio oszilazioen energia galduz doa, bide batez higiduraren anplitudea gero eta txikiagoa gertatuz. Zer esanik ez, moteltze-prozesua laburragoa edota luzeagoa izan daiteke, erabilitako indargetzaile-motaren arabera.

Oszilazio indargetuen gaiari heltzeko, aipatu dugun adibidea baino egokiagorik nekez topa genezake, eta hori abiapuntutzat harturik arituko gara. Izan ere, ibilgailuen esekidura-sisteman indar-mota bik dihardute: kontserbakorra bata, malgukiak sorturikoa; eta iraungikorra bestea, indargetzaileen barneko marruskadurari zor zaiona. Lehenengoa, enbologia-aren bere oreka-posiziotiko x desplazamenduaren proportzionala da; bigarrena, oster, enbologia-aren fluidoarekiko v abiadura erlatiboaren proportzionala. Hona hemen indar bakoitzari dagokion adierazpen matematikoa:

$$F_k = -kx \quad (\text{indar elastikoa; kontserbakorra}),$$

$$F_d = -\lambda v \quad (\text{marruskadura-indarra; iraungikorra}).$$

Aurreko adierazpenetan, ibilgailuak bere esekidura-sisteman darabiltzan malguki guztien konstante elastikoak k koefizienteak biltzen ditu nolabait; bestalde, λ koefizientea indargetzaileen barneko fluidoaren biskositatearen menpekkoa da.

Masa oszilakorra —ibilgailuarena berarena, alegia— m dela suposatuz, bibrazioei dagokien ekuazioa ondokoa izango da:

$$F = F_k + F_d = ma, \quad (15-52)$$

$$-kx - \lambda v = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (15-53)$$

$$-kx - \lambda \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (15-54)$$

Bistakoa denez, ekuazio hori —zeinari *oszilazio indargetuen ekuazio diferentziala* deritzen— ez da oszilazio harmonikoei dagokiena (ikus bedi 15.2. atala). Bien arteko desberdintasuna $-\lambda dx/dt$ gaian datza, espero izatekoa zenez, oszilazioak motelazten dituen bera baita. Gai berri honen agerpenak zerbait korapilatzen digu arazoa, matematikaren ikuspuntutik bestetik ez bada ere. Dena den, eragiketa matematikoak sakonki aztertzea helburutzat ez dugunez, emaitza fisikoak erakustera mugatuko gara.

Lehenbizi, emaitza fisikoen azalpena ahalik eta era laburrenean gerta dakigun, lortu dugun ekuazioan idazkerako aldaketa zenbait egitea komeni zaigu. Hain zuzen,

$$\frac{\lambda}{m} = 2\gamma \quad \text{eta} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (15-55)$$

ipiniko ditugu; herrela, ekuazioak honako itxura hau hartuko du:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (15-56)$$

Aurrera jo baino lehen, diogun ezen arestian sartu ditugun koefiziente berrietako bat, ω_0 delakoa hain zuzen, ez dela koefiziente matematiko hutsa, esangura fisikoa ere badu eta. Izan ere, 15.2.1. adibidean ikusi genuenez, $\sqrt{k/m}$ balioa indargetzerik gabeko oszilazioen maiztasun angeluarra da, eta horrexegatik ω_0 delakoari *oszilagailuaren oinarritzko maiztasun angeluarra* deitu ohi zaio.

Berriro ere hariari gagozkiola, tarteko eragiketa guztien gainetik jauzi eginda, nagusiak diren kasu biak aipatu eta kualitatiboki aztertuko ditugu, ondorio fisikoak zer nolakoak diren azaltzeko asmoz:

15.5.1. Indargetze txikia

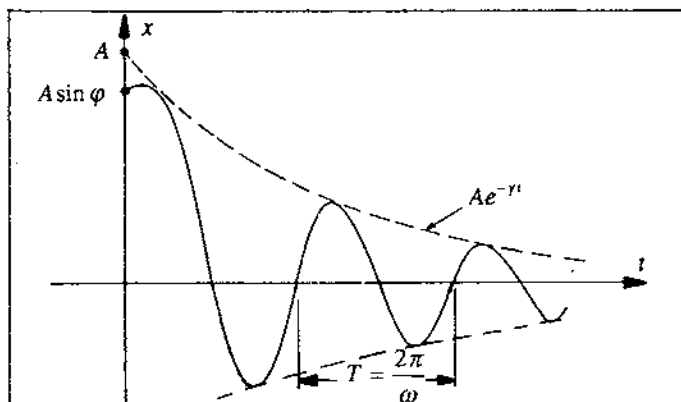
$\gamma < \omega_0$ denean, ekuazio diferentzialaren emaitza honelakoa da,

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (15-57)$$

non A -ren eta φ -ren balioak hasierako baldintzen menpekoak diren. Bestalde, ω -ren balioa ondokoa da:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (15-58)$$

Alboko 15.18. irudian kasu honi dagokion grafikoa erakutsi da. Bertan nabarmen ikus daitekeenez, oszilazioen sasiaplitudea, konstante iraun barik, denboran zehar txikiagotuz doa (puntuak adierazitako kurba), txikiagotze hori indargetze-prozesuaren ondorio zuzena izanik.

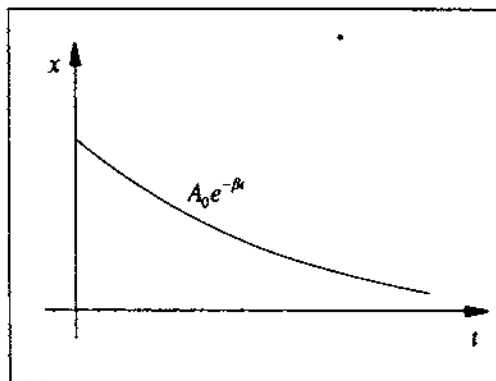


15.18. irudia. Higidura oszilakor indargetua. Anplitudea txikiagotuz doa.

15.5.2. Indargetze handia

$\gamma > \omega_0$ denean. Kasu honetako emaitza 15.19. irudian ageri den beheratze exponen-
tziala da. Agerian dagoenez, hemen oszilazioez mintzatzeak ere bere esangura galtzen du
erabat; izan ere, indar iraungikorraren eragina hain da handia, ezen oszilazio soil bat ere
burutzea oztopatzen eta galarazten duela; alegia, elongazioaren balioa ez da zeinuz aldatzen.
Beraz, behin oszilagailua bere oreka-posizioetik desplazatu eta askatu ondoren, bertara
abiatzen da, hortik bestalderantz sekula pasatu gabe. Kasu honen adibiderik ezagunena,
zenbat bulegotako ateetan erabiltzen diren indargetzaileetan aurki dezakegu.

Ohar gisa, aipaturiko bi kasuen arteko muga-kasua ere badagoela esan dezakegu,
indargetze kritikoa deritzonari dagokiona ($\gamma = \omega_0$ denean). Dena den, hemen ez dugu
horretaz gehiagorik sakonduko.



15.19. irudia. Indargetzea handia denean, ez dago oszilaziorik, eta elongazioa
esponentzialki motelduz doa.

Atal honetan barrena ikusitakoaren laburpen modura, diogun indargetze-prozesuak
oszilagailuari dagokion energiaren galera dakarrela, hots, higitzen diharduen bitartean
oszilagailua bere energia galduz doala, inguruneari emanez; horren ondorioz, higidura
erabat amaitu arte, bibrazioaren anplitudea gero eta txikiagoa da.

15.6. OSZILAZIO BORTXATUAK. ERRESONANTZIA

Aurreko kasu guztietan, behin hasierako baldintzak emanik, oszilagailua bere kontura
oszilatzen ari zela kontsideratu dugu, indargetze-indarraz aparteko inolako kanpo-indar
eragilerik gabe. Demagun, orain, bibratzen ari den oszilagailu indargetu bati kanpoko indar
batek eragiten diola. Biz

$$F_e = F_0 \cos \omega_e t \quad (15 - 59)$$

aipaturiko indar eragilearen adierazpena. Beraz, 15.5. ataleko F_k indar kontserbakorraz eta
 F_d indar iraungikorrak gainera F_e indar eragilea lanean ari denean, hauxe da higiduraren
ekuazioa:

$$F = F_k + F_d + F_e = ma, \quad (15 - 60)$$

$$-kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_e t = ma. \quad (15 - 61)$$

Aurreko atalean sartutako γ eta ω_0 koefizienteak berriro erabiliz, eta urrats matema-
tiko sinple batzuk emanez, ekuazio hau lortuko dugu:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \cos \omega_c t. \quad (15-62)$$

Ekuazio horri *oszilazio bortxatuen ekuazio diferentziala* deritzo. Beraren ebazpena luzeegia
denez gero, beste barik emaitza idatzi eta aztertu egingo dugu.

Emaitza orokorra osatzen duten gaiak honako hauek dira:

- Egoera iragankorrari dagokiona, zeina oszilazio indargetuetan azaldu dugunaren antzekoa den. Hasieran, bibrazioaren lehenengo aldiuncetan batik bat, gai honek bere garrantzia badu ere, laster bihurtzen da arbuigarri, ondoren aipatuko dugun bigarren gaiarekin alderaturik. Hortik datorkio 'iragankor' izena eta horrexegatik hemen ez dugu kontuan hartuko.
- Egoera iraunkorrari dagokiona. Izenak berak dioskunez, hauxe da iraun egiten duen gaia eta, beraz, beronen azterketari ekingo diogu. Hona hemen, ba, emaitza orokorraren gai iraunkorra, oszilazio bortxatuak sorrarazten dituen, alegia:

$$x = A \sin(\omega_c t - \varphi). \quad (15-63)$$

Ikus daitekeenez, oszilazio bortxatuen maiztasun angeluarra indar eragilearen oszila-
zioarena da. A anplitudeari eta φ hasierako faseari dagokienez, garatuko ez ditugun eragi-
keta astun batzuk burutu ondoren, hauexek dira lortuko ditugun balioak:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_c^2}}, \quad (15-64)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega_c^2 - \omega_0^2}{2\gamma \omega_c}. \quad (15-65)$$

Aurreko guztia ikusirik, orain bagaude prest oszilazio bortxatuen mamari heltzeko.
Has gaitezen, ba, oszilagailuaren abiadura erdiesten. Honakoa da:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0 \omega_c / m}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_c^2}} \cos(\omega_c t - \varphi) = v_m \cos(\omega_c t - \varphi). \quad (15-66)$$

Aurreko adierazpena laburtzeko asmotan, abiaduraren anplitudeari v_m deitu diogu;
agerikoa denez, horrek hainbeste parametroren menpekotasuna erakusten du, hara nola F_0 ,
 ω_c , m ,... parametroena. Menpekotasun horien guztien artean, bereziki interesgarria da, ω ,
maiztasun angeluarrarekikoa, eta hori aztertzen jardungo dugu hurrengo lerroetan.

Lehenengo eta behin, $v_m = f(\omega_c)$ funtzioaren grafikoa lortzen saiatuko gara. Beraz,
 v_m -ren adierazpenetik erraz atera daitekeenez:

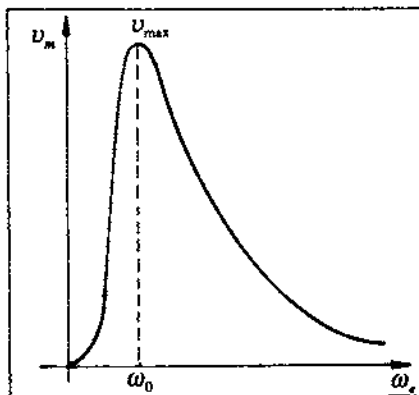
$$\omega_c \rightarrow 0 \text{ egitean, } v_m = \omega_c \frac{F}{m\omega_0^2} \text{ da.} \quad (15-67)$$

Hitz gutxitan, $\omega_c = 0$ denean, $v_m = 0$ da; eta ω_c -ren balio txikiatarako, v_m eta ω
lotzen dituen erlazioa lineala da, lehenbiziko hurbilketa batean behintzat.

Bestaldetik, ondoko hau ere argi ikus dezakegu:

$$\omega_e \rightarrow \infty \text{ egitean, } v_m \rightarrow 0. \quad (15-68)$$

Azkenez, v_m -ren balio maximoa ateratzeko, beraren ω_e -rekiko deribatua egin beharko genuke. Ez dugu, ordea, horrelakorik egingo, luzcegi joko luke eta; hortaz, berriro ere emaitza zuzenki ematera mugatuko gara. Alboko 15.20. irudian ageri denez, abiaduraren anplitu-dearen balio maximoa $\omega_e = \omega_0$ denean gertatzen da.



15.20. irudia. Oszilagailu bortxatuaren abiadura maiztasun bortxatzailearen funtzioan.

Ebazpide matematiko laburrari eskaintako azpiatal honi bukaera emateko, diogun, ezen $\omega_e = \omega_0$ denean, $\varphi = 0$ dela (ikus bedi lehenago emandako φ -ren adierazpena).

Orain, eman diezaiegun ateratako emaitza matematikoei beren esangura fisikoa. Hara:

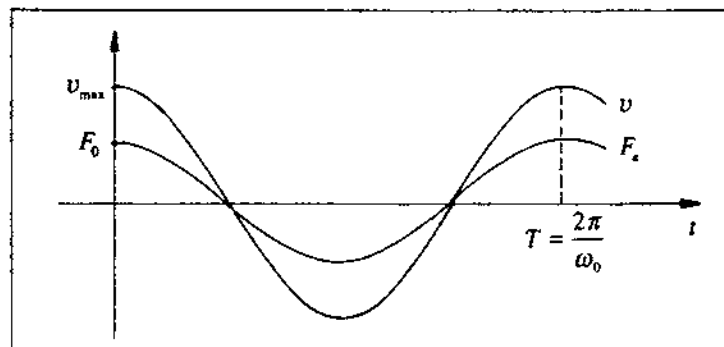
- abiaduraren anplitudea maximoa denean, oszilagailuaren energia zinetikoa ere maximoa da;
- egoera hori suerta dadin, indar eragilearen maiztasunak oszilagailuaren oinarritzko maiztasunaren balio berbera eduki behar du ($\omega_e = \omega_0$), eta orduan oszilagailuaren abiadura eta indar eragilea fasean ari dira ($\varphi = 0$).

Beste era batean esanda, baldintza horiek gertatuz gero, alegia $\omega_e = \omega_0$ eta, beraz, $\varphi = 0$ direnean, kanpoko iturri eragiletik oszilagailurako energia-trukea ezin hobea da. Hori dela eta, aipatutako baldintzak betetzen direnean, *energia-erresonantzia* dagoela esaten da.

Ondoko 15.21. irudian, oszilagailuaren abiaduraren eta indar eragilearen bilakaerak erakutsi dira, energia-erresonantziaren kasuan. Bertan ikus daitekeenez, bata maximoa denean, bestea ere maximoa da; bata anulatzen deneko unean, bestea ere anulatzen da; bata kanpoko aldatzen duenean, besteak ere aldatu egiten du; etab. Hitz batez, zeharo fasean ari dira denboran zehar.

Erresonantziaren fenomenoari eman diogun gainbegirada honetan gogotik ahalegin-duko bagina ere, nekez lortuko genuke beraren garrantzia behar den moduan azpimarraztea. Izan ere, teknikaren arloan, eraikuntzan konkretuki, nahiz zientziaren arloan, Fisika atomikoan batik bat, ugari jazotzen dira era bateko edo besteko erresonantziak. Dena den,

esandako eremuak darabilgun mailatik at daudenez, diogun liburu honetan bertan erre-sonantziaren adibide ezagunenetako bat ikertzeko aukera izango dugula, korrante alternoari eskainitako gaian hain zuzen ere (23. gaia).



15.21. irudia. Energia-erresonantziaren kasuan ($\omega_e = \omega_0$ denean), indarraren eta abiaduraren adierazpen grafikoa.

15.7. OSZILAGAILUAREN INPEDANTZIA

Aurreko lerroetan aipaturiko korrante alternoaren gaian ikusiko dugunez, korrante alternoa daroaten zirkuituak aztertzean, magnitude berri batzuk erabili beharko ditugu. Magnitude horiek Elektrikan ez ezik Fisikaren beste zenbait arlotan ere lagungarri gerta daitezkeela kontuan izanik, oraingo atal honetan horien lehenbiziko azalpena egingo dugu.

Magnitudeon sorrera zikuitu elektrikoen teoriari irmoki estekaturik dagoenez, egokitu zaizkien izenei elektrizitate-kutsua darie argi eta garbi; halarik ere, esan bezala, korrante alternoaren esparruaz gainera, beste zenbaitetan ere badago haietatik baliatzeko aukera. Aurkeztu nahi ditugun magnitudeen nondik norakoa hobeki uler dadin, 15.6. atalean erabili dugun oszilagailu bortxatuaren abiaduraren anplitudea berrartuko dugu. Hona hemen:

$$v_m = \frac{F_0 \omega_e / m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_e^2}} \quad (15 - 69)$$

Orain, 15.5. atalean egindako ordezkapenak desegitea komeni zaigu, goiko azalpenari beste itxura bat ematearren. Hots,

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \quad \text{eta} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (15 - 70)$$

direla gogoratzuz, honelaxe idatz dezakegu abiaduraren anplitudea:

$$v_m = \frac{F_0 \omega_e / m}{\sqrt{\left(\omega_e^2 - \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 \omega_e^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(m\omega_e - \frac{k}{\omega_e}\right)^2 + \lambda^2}} \quad (15 - 71)$$

Adierazpen horretatik abiatuta, zorioneko magnitude berriak definitzen hasiko gara:

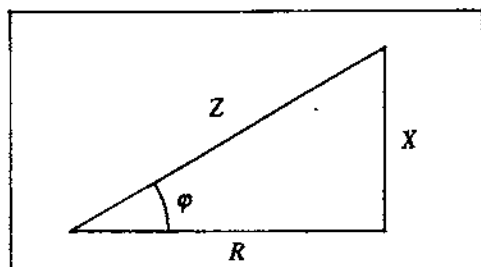
– erreaktantzia: $X = m\omega_e - \frac{k}{\omega_e}$,

– erresistentzia: $R = \lambda$,

– inpedantzia: $Z = \sqrt{\left(m\omega_e - \frac{k}{\omega_e}\right)^2 + \lambda^2} = \sqrt{X^2 + R^2}$.

Esan beharrik ez dago, X , R eta Z magnitudeak lotzen dituen erlazioa 15.22. irudiko triangelu zuzenaren bitartez irudika daitekeela. Areago, triangeluan markatutako angelua, 15.6. atalean ageri den φ angelu berbera dela aise froga dezakegu, honelaxe hain zuzen:

$$\varphi = \arctan \frac{\omega_e^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_e} = \arctan \frac{\omega_e^2 - k/m}{(\lambda/m)\omega_e} = \arctan \frac{m\omega_e - k/\omega_e}{\lambda} = \arctan \frac{X}{R}. \quad (15-72)$$



15.22. irudia. Inpedantzien triangelua: erreaktantzia, erresistentzia eta inpedantzia grafikoki adierazteko era.

Ondorioz, goiko triangeluan, zeinari *inpedantzien triangelua* deitu ohi zaion, R -k eta Z -k osatzen duten angeluak indar eragilearen eta oszilagailuaren abiaduraren arteko desfasea adierazten du. Bukatzeko, zenbait kontsiderazio egingo ditugu φ angelu honek har ditzakeen balioez:

- $\varphi > 0$ denean. Kasu honetan $X > 0$ da (edo $m\omega_e > k/\omega_e$), eta v atzeraturik doa F_e -rekiko bektore biratzaileen eskeman.
- $\varphi < 0$ denean. Kasu honetan $X < 0$ da (edo $m\omega_e < k/\omega_e$), eta v aurreraturik doa F_e -rekiko.
- $\varphi = 0$ denean. Kasu honetan $X = 0$ da (edo $m\omega_e = k/\omega_e$), eta v eta F_e fase berean doaz. Hauxe da, hain zuzen ere, 15.6. atalean aztertu dugun energia-erresonantziaren fenomenoan betetzen den baldintza.

16. gaia

Uhinak

Fisikaren oinarrian dauden bi kontzeptu, partikularena eta uhinarena dira. Partikulatza materia-kantitate txikia hartzen dugu, eta, orain arte egin dugun modura, badakigu beraren higidura aztertzen. Uhinak zerbait desberdina da. Uhin kontzeptua olatuen higidurarekin lotu ohi dugu, eta, izatez, uhin-fenomenoak zer diren adierazten digute olatuek.

Uhin hitzarekin, toki batean sorturiko perturbazioa inguruko puntuetara hedatzean gertatzen den fenomeno fisikoa adierazi nahi dugu. Eta uhin kontzeptuaren barnean lehenengo begiradan oso desberdintzat hartzen diren gertakariak biltzen dira, hala nola, itsasoko olatuak, soinua edota uhin elektromagnetikoak. Uhinei esker, azken batez, seinaleak bidal daitezke puntu batetik bestera, nolabait esateko, materia bera bidali gabe. Erraz ulertzekoa da, beraz, uhinen azterketak duen garrantzia.

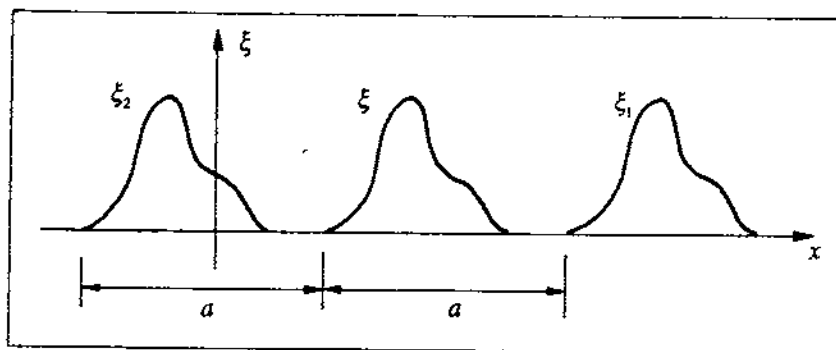
Gai honetan uhinen adierazpen orokorraz arituko gara, zer diren definituz, matematikoki nola adieraz daitezkeen ikusiz eta zenbait adibide aztertuz. Dena den, uhinen propietate orokorren azterketa hurrengo gaian egingo dugu, eta uhin elektromagnetikoak eremu elektromagnetikoa aztertu ondorako utziko ditugu.

16.1. UHINEN ADIERAZPEN MATEMATIKOA

Lehenik eta behin, uhinak zertan datzan azalduko dugu. Hara! Espazioko puntu batean, gertaera fisiko baten kausaz magnitude fisiko baten perturbazioa jazo da; ondoren perturbazio hori inguruko puntuetara hedatu da espazioan zehar, eta puntu horietan magnitude fisiko berberaren perturbazioa gertatu da. Horrelako kasuetan uhin-fenomeno baten aurrean gaudela esaten da. Beraz, bi faktore nagusik definitzen dituzte uhinak: magnitude fisiko batek puntu batean duen aldakuntzak eta aldakuntza horren hedapenak. Ikus dezagun, ba, nola adieraz dezakegun hori matematikoki:

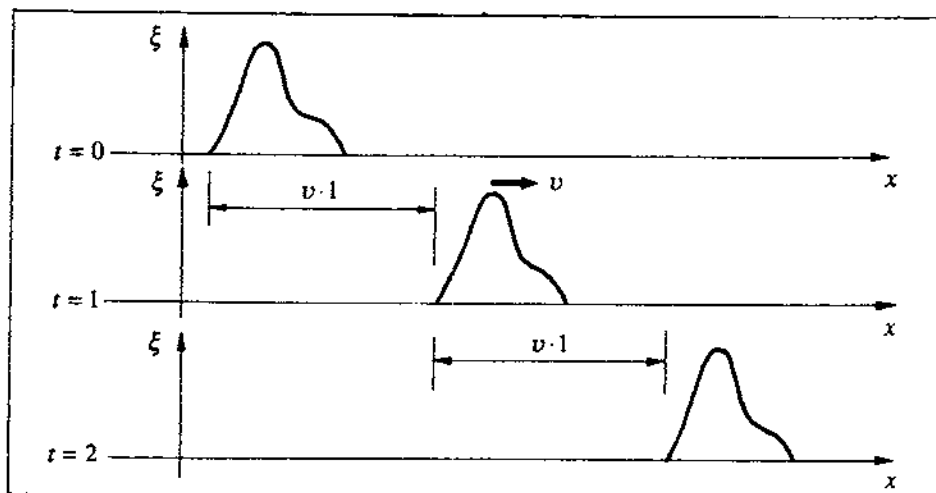
Demagun $\xi = f(x)$ funtzioa, non f delakoa edozein funtzio den. Hain zuzen, 16.1. irudian, horrelako $\xi = f(x)$ funtzio batekin batera, $\xi_1 = f(x - a)$ eta $\xi_2 = f(x + a)$ funtzioak ere adierazi ditugu.

Argi ikus daitekeenez, $\xi_1 = f(x - a)$ funtzioak ξ -ren eite berbera du, baina a distantziak desplazaturik dago eskuin alderantz. Bestalde, $\xi_2 = f(x + a)$ funtzioak ere ξ -ren eite berbera du, baina ezker alderantz desplazaturik dago, hau ere a distantziak.



16.1. irudia. ξ_1 eta ξ_2 funtzioak ξ funtzioa desplazatuaz lortu dira.

Funtzio desplazatuaren eraiketa horretan finkaturik, $a = vt$ eginez, $\xi = f(x - vt)$ alegia, denborarekin eskuin alderantz desplazatzen den funtzio bat lortuko da. Hain zuzen, 16.2. irudietan funtzio horrek hiru aldiune desberdinetan dituen eitea eta kokapena adierazi dira. Bertan ikus daitekeenez, desplazamenduaren —hau da, hedapenaren— abiadura v da.



16.2. irudia. $\xi = f(x - vt)$ funtzioaren adierazpena hiru aldiuntan.

Orain, hasieran emandako definiziora itzuliz,

$$\xi(x, t) = f(x - vt) \quad (16 - 1)$$

funtzioa eite berbera gorderik eskuin alderantz v abiaduraz hedatzen den uhin baten adierazpen matematikoa dela esan dezakegu. Preseski, v delakoari *hedatze-abiadura* edo *fase-abiadura* deritzo. Bestalde, uhin hori distortsiorik gabe —hots, beti eite berberaz— eta noranzko bakarrean hedatzen dela azpimarratu behar da. Modu berean eginez, era honetan adieraziko da ezkererantz hedatzen ari den uhina:

$$\xi(x, t) = f(x + vt). \quad (16 - 2)$$

Ohar gisa diogun ezen dimentsio bakarreko uhinak aztertzen ari garela, eta orokorpena geroago egingo dugula.

Dena den, orain arte uhinaren adierazpen zuzenaz jardun dugu, baina ez dugu galdetu ea matematikoki nondik datorren adierazpen hori edo, bestela esanda, uhin-fenomenoa zer ekuazio diferentzialen ebazpena den. Besterik gabe, uhin unidimentsionalari dagokion ekuazio diferentziala idatziko dugu, eta ondoren, lehentxoago emaniko funtzioek ekuazio hori betetzen dutenetz aztertuko dugu.

Uhinak deskribatzen dituen ekuazioa honako hau da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (16-3)$$

bertan v delakoa fase-abiadura izanik. Ekuazio honek berdin balio du $+x$ zein $-x$ noranzkoarekin hedatzen diren uhinetarako.

Ekuazio horren soluzio orokorra hau da:

$$\xi(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt). \quad (16-4)$$

Izatez, soluzio honetan bi uhin agertzen dira, bakoitza noranzko batean hedatzen dena. Kasu konkretu batzuetan uhin batekin nahikoa izango da, eta beste batzuetan —islapenaren edo uhin geldikorren kasuan, adibidez— biak erabili beharko ditugu.

Ikus dezagun soluzio horrek goiko ekuazioa betetzen duela. Ondoko aldagaiak erabiliz,

$$u_1 = x - vt \quad \text{eta} \quad u_2 = x + vt, \quad (16-5)$$

era honetara idatz ditzakegu deribatuak:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + v \frac{\partial f_2}{\partial u_2}, \quad (16-6)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} + v^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_2^2}. \quad (16-7)$$

eta, ikus daitekeenez, ebazpen horrek ongi betetzen du uhinen ekuazio diferentziala, lehenagoko (16-3) delakoa alegia.

16.2. UHIN UNIDIMENTSIONAL HARMONIKOA

Orain arte esanikoan, uhina adierazteko erabili dugun f delakoa edozein funtzio izan da. Hemen, adibide gisa, kasu berezi bat aztertuko dugu: uhin sinusoidal edo harmonikoaren kasua. Bestalde, kasu hau oinarritzkoena da, zeren, uhin-funtzioaren Fourier-en analisia eginez, edozein uhin periodiko uhin harmonikoen batuketa modura idatz baitaiteke.

Uhin harmonikoaren adierazpen matematikoa hau da:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt), \quad (16-8)$$

non k delakoa *uhin-zenbakia* deritzon konstantea den.

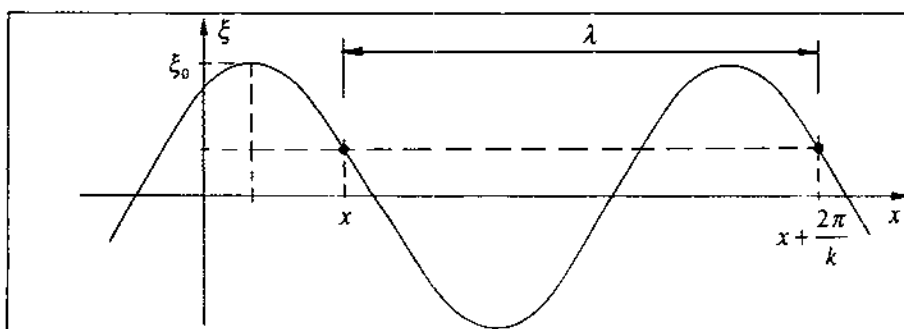
Azter ditzagun adierazpen horren berezitasunak. Sinu funtzioa periodikoa izanik, eta emandako uhina espazioaren eta denboraren funtzioa denez, uhinak bi eratako periodikotasunak ditu: espaziala eta denborala.

– **Periodikotasun espaziala.** Demagun t aldiunea eta bila ditzagun aldiune horretan perturbazio-egoera berean dauden bi puntu, horretarako, angelua 2π balioaz handitzean sinu funtzioa errepikatu egiten dela kontuan hartuz, hots,

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \left[k(x - vt) + 2\pi \right] = \\ &= \xi_0 \sin k \left[\left(x + \frac{2\pi}{k} \right) - vt \right] = \xi \left(x + \frac{2\pi}{k}, t \right).\end{aligned}\quad (16-9)$$

Beraz, aldiune batean perturbazioa modu berean ageri da x eta $x + 2\pi/k$ puntuetan edo, bestela esanda, egoera fisikoa errepikatu egiten da espazioan $2\pi/k$ luzera bakoitzeko. Uhin harmonikoak periodikotasun espaziala duela esaten da; periodo espazialari *uhin-luzera* deritzen, eta λ ikurraz adierazten da:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.\quad (16-10)$$



16.3. irudia. Uhin-funtzioaren adierazpen grafikoa t aldiunean.

Hain zuen ere, 16.3. irudian uhinaren adierazpen grafikoa dago, t aldiunean, uhin-luzeraren esangura agerturik.

– **Periodikotasun denborala.** Kontsidera dezagun, bestetik, espazioko x puntua, eta bila ditzagun puntu horretan perturbazio-egoera bereko bi aldiune:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \left[k(x - vt) + 2\pi \right] = \\ &= \xi_0 \sin k \left[k - v \left(t - \frac{2\pi}{kv} \right) \right] = \xi \left(x, t - \frac{2\pi}{kv} \right).\end{aligned}\quad (16-11)$$

Honelatan, ba, x puntuan perturbazioa modu berean ageri da t eta $t - 2\pi/kv$ aldiunetan, hots, egoera fisikoa errepikatu egiten da $2\pi/kv$ denbora-tarte bakoitzeko. Uhinak periodikotasun denborala duela esaten da eta $2\pi/kv$ denbora-tarteari *periodoa* deritzen eta P ikurraz adierazi ohi da. Periodoaren alderantzizkoa aldakuntzaren edo uhinaren *maiztasuna* da, ν letraz adierazten dena:

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{kv}{2\pi}.\quad (16-12)$$

Azken magnitude honekin batera, *maiztasun angeluarra* definitzen da:

$$\omega = 2\pi\nu = kv. \quad (16-13)$$

Bi periodikotasunak erlazionaturik daude fase-abiaduraren bidez:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ P = \frac{2\pi}{kv} \end{array} \right\} \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{P}, \quad (16-14)$$

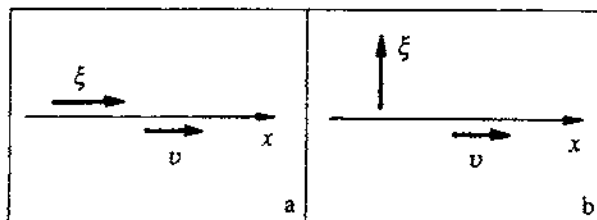
edo beste modu batera esateko, fase-abiadura dela eta, periodo batean uhina uhin-luzera batez hedatzen da.

16.3. UHIN-MOTAK

Aurreko puntuetan uhinen adierazpen matematiko orokorra egin dugu, baina ez gara aritu uhinen sailkapena egiten. Horixe da, hain zuzen, orain egingo duguna.

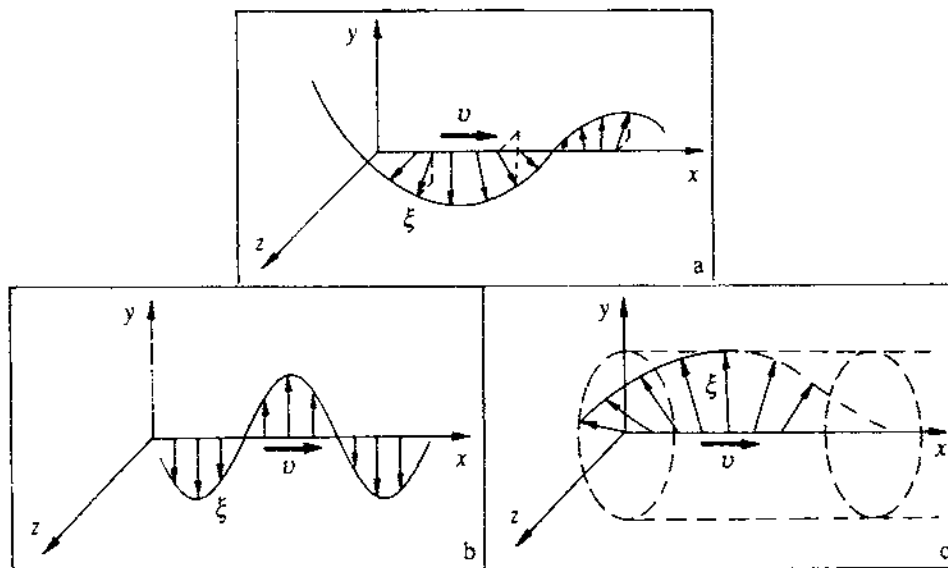
Sailkapen desberdinak egin ditzakegu, sailkatzeko erabiltzen dugun irizpidearen arabera. Lehenengo sailkapena perturbazioa pairatzen duen magnitude fisikoari begira egin daiteke; hots, magnitude hori eskalarra denean (airearen presioa, uraren dentsitatea, etab.), *uhin eskalarra* dela diogu; ordea, magnitudea mota bektorialekoa denean (indarra, eremu elektrikoa, etab.), *uhin bektoriala* dela diogu. Uhin bektorialeki gagozkicla, hainbat kasu aipa ditzakegu, hala nola:

- *Luzetarako uhinak*. Kasu honetan bektore aldakorraren norabidea eta hedapenarena berberak dira, hau da, ξ magnitude perturbatua eta v abiadura norabideakideak dira (16.4.a). Esate baterako, gorputz solidoetan hedatzen diren uhin elastikoetan sortutako konpresio eta espantsio-indarren kasua mota honetakoa da.



16.4. irudia. Perturbazioaren eta hedatze-abiaduraren norabideak. a) Luzetarako uhinak. b) Zeharkako uhinak.

- *Zeharkako uhinak*. Kasu honetan perturbazioaren norabidea eta hedapenaren norabidea elkarren perpendikularrak dira. Adibidez, soka bateko uhinak zeharkako uhinak ditugu; halaber, itsasoko gainazaleko olatuak eta uhin elektromagnetikoak ere zeharkako uhinak dira.



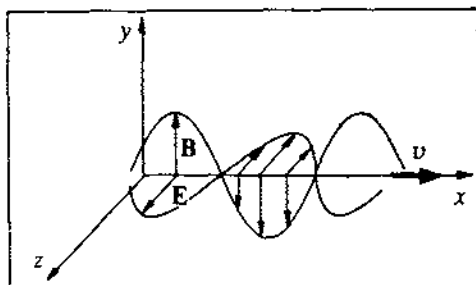
16.5. irudia. a) Polarizatu gabeko uhina. b) Lincalki polarizaturiko uhina.
c) Zirkularki polarizaturiko uhina.

Zeharkako uhinen kasuan *polarizazioa* gerta daiteke. Uhinen polarizazioaren funtsa 16.5. irudien bidez azalduko dugu.

Perturbazioa pairatzen duen ξ magnitudea x ardatzaren inguruko edozein norabidetan jazotzen denean, uhina polarizatu gabe dagoela esaten da (16.5.a). Magnitude perturbatua beti plano eta norabide berean gertatzen denean, uhina *linealki polarizaturik* dagoela esaten da (16.5.b). ξ magnitude perturbatua modulu konstantea badu, baina norabidez aldatuz badoa, *zirkularki polarizaturik* dagoela esaten da (16.5.c).

Bestelako sailkapena ere egin daiteke, hedapenerako ingurune materialik behar dutenetz kontuan hartuz. Irizpide honen arabera, bi eratako uhinak daude:

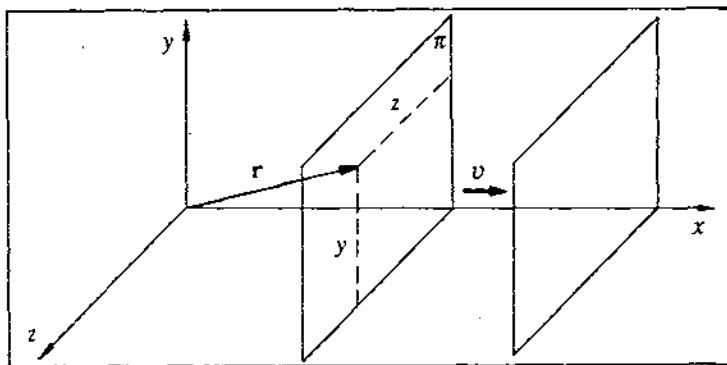
- *Uhin mekanikoak.* Ingurune materiala behar dute hedatzeko. Uhin elastikoak eta presio-uhinak ditugu sail honetakoak. Perturbazioa espazioko puntu batean gertatzen da, eta materiaren barneko loturaren edo mihiztaduraren bidez (elastikotasuna, presioa...) alboko puntuetara hedatzen da. Zer esanik ez, honelako uhinak ez dira hutsean hedatzen. Uhin mekanikoen artean, soinua, solidoetako uhin elastikoak, uretako olatuak eta beste ditugu. Uhin mekanikoen ulerpenera oso intuitiboa eta agerikoa izanik, mende honen hasierara arte uhin guztiek horrelakoak izan behar zutelako uste zen, argia eta uhin elektromagnetikoak barne, eta horregatik argia hedatzen zeneko ustezko ingurunearen bila aritu ziren fisikariak, 'eterra' izena eman ziotenaren bila hain zuzen. Geroago, uste hori okerra zela ikusi zen, eta uhin elektromagnetikoek ingurune materialaren premiarik ez zutelako.
- *Uhin elektromagnetikoak.* Hauek hutsean ere hedatzen dira, argiaren abiaduraz. Beraz, ez dute 'eter' edo bestelako inguruneren beharrik. Izatez, bi plano perpendikularretan gertatzen diren eremu elektrikoaren ($\mathbf{E}$) eta eremu magnetikoaren ($\mathbf{B}$) aldakuntzak dira. Uhin elektromagnetikoak 24. gaian aztertuko ditugu.



16.6. irudia. Uhin elektromagnetikoa.

Orain arte aztertu dugun $\xi = f(x - vt)$ funtzioak, $+x$ noranzkoan hedatzen den uhin bat adierazten digu; hala ere, ez dugu zertan pentsaturik, uhin hori x ardatzean baino ez dagoenik.

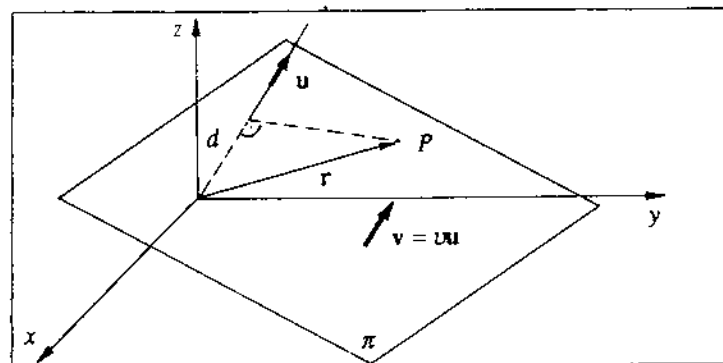
Demagun ξ funtzioa (eta beronek adierazten duen perturbazioa) espazio osoko puntuetan gertatzen dela, eta t aldiunean x koordenatu bereko puntuetan (hots, π planoko puntuetan) ξ funtzioak balio berbera duela. Puntu horiek guztiok *uhin-fronte* berekoak dira. Oro har, uhin-fronteak fase berberaz oszilatzen duten (edo perturbaturik dauden) puntuen leku geometrikoak dira. Kasu honetan, noski, uhin-fronteak x ardatzaren plano perpendikularrak dira.

16.7. irudia. Uhin-frontea lau denez, perturbazioak balio berbera du π planoko puntu guztietan.

Esandakoa kontuan harturik, hiru dimentsiotan interpretaturik, $\xi = f(x - vt)$ funtzioak x ardatzaren norabidean eskuinerantz v abiaduraz hedatzen den uhin lau bat adierazten du. Eta $x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}$ denez, $\mathbf{i}$ hedapenaren norabidea izanik, honelaxe idatz dezakegu:

$$\xi = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} - vt). \quad (16-15)$$

Arrazoibide berbera erabiliz, u norabidean hedatzen den hiru dimentsioko uhin lauaren ekuazioa jarriko dugu.

16.8. irudia. u norabidean hedatzen ari den uhin-fronte laua.

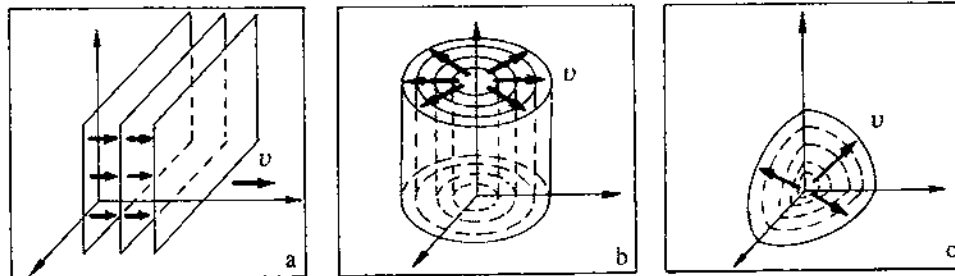
Jatorritik neurtuta, P puntutik iragaten den uhin-fronte lauraino dagoen distantzia d izanik (16.8. irudia),

$$d = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} \quad (16-16)$$

da, eta uhinaren adierazpen matematikoa honako hau izango da:

$$\xi = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - vt). \quad (16-17)$$

Dena den, hiru dimentsioko uhinen kasuan uhin-fronteek planoaz bestelako forma geometrikorik ere har dezakete eta kasu orokorrean edozein itxuratakoak izan daitezke. 16.9. irudietan horrelako hiru kasu ageri dira.



16.9. irudia. Uhin-fronte desberdinak. a) Uhin lauak. b) Uhin zilindrikoak. c) Uhin esferikoak.

Ohar gisa diogun ezen uhinak iturritik urrun daudenean eta aztertutako uhin-frontearen zatiaren dimentsioak bertatik iturrirako distantziarekin alderaturik arbuigarriak direnean, kalkuluetarako lehenengo hurbilketan uhin zilindrikoak eta esferikoak lautzat har daitezkeela, eta sarri horrela egiten dela.

Bukatzeko, hiru dimentsioko uhinei dagokien ekuazioa emango dugu:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = v^2 \Delta \xi. \quad (16-18)$$

Ikus dezakegunez, dimentsio bakarrekoaren orokorpena da. (16-18) adierazpencan ageri den eta $\Delta \xi$ edo $\nabla^2 \xi$ ikurraz adierazten den eragileari *laplacearra* deritzo.

16.4. ZENBAIT ADIBIDE

Adibide batzuen bitartez, uhinen ekuazio diferentziala problema batzuetako baldintza fisikoetatik nola lor daitekeen ikusiko dugu, bide batez, fase-abiadurak ingurunearen propietateekin duen zerikusia agerian jarriko.

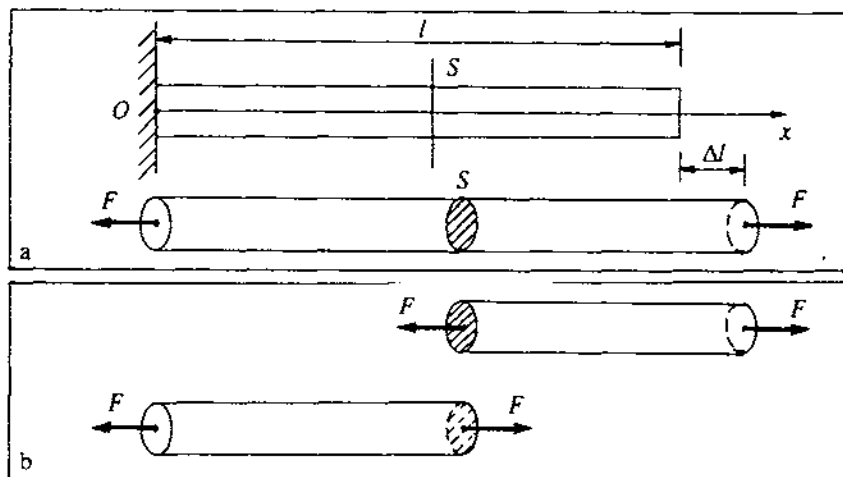
16.4.1. Luzetarako uhin elastikoak hagaxka batean barrena

Luzetarako uhinen kasu berezi bat aztertuko dugu, hagaxka elastiko batean barrena ardatzaren norabidean gertatzen ari diren uhinena hain zuzen ere. Pisuaren ondorioak alde batera uzteko, hagaxka horizontalki jarrita dagoela joko dugu. Bestalde, hagaxkaren mutur bat finkoa dela kontsideratuko dugu eta beste muturra aske dagoela, bertan indar egiteko moduan (16.10. irudia).

Dakigunez, hagaxkaren muturrean F indar konstantea etengabe egitean, elastikotasuna dela eta, luzatu egingo da, Hooke-ren legea betetzen dela kontuan hartuta (ikus 12. gaia). Dena den, luzapena gorabehera, orekan, azkenean sekzio normal guztietan eragiten duen indarrak balio berbera du, eta luzapena ondokoa da:

$$\Delta l = \frac{F}{YS} l, \quad (16-19)$$

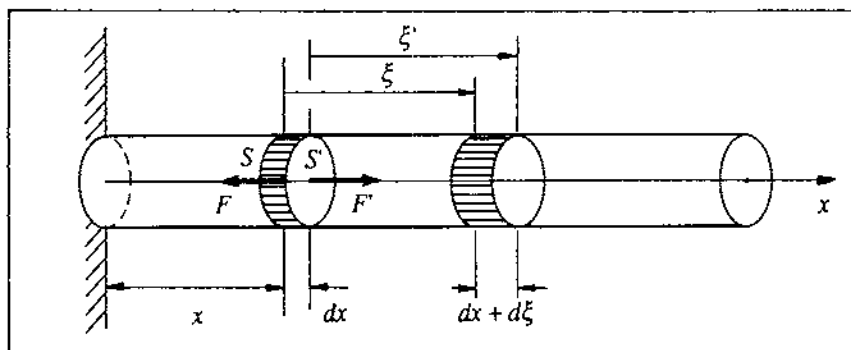
Y delakoa Young-en modulua izanik.



16.10. irudia. a) Indar konstantearen eraginpean, hagaxka Δl luzatzen da. b) Orekan sekzio normal guztietan indar berbera dago eragiten.

Baina muturrean F indar aldakorra egitean, $F(t)$, sekzio normaletan aldiune bakoitzean eragiten ari den indarra x aldagaiaren funtzioa ere izango da, indarraren aldaketa ez baita bat-batean beste muturrera hedatuko; hots, guztira, $F(x, t)$ izango dugu. Hauxe da preseski uhinen azterketarako interesatzen zaigun kasua. Zer esanik ez, indarraren aldakortasuna kontuan izanik, elementu diferentzial bakoitzaren portaera aztertu beharko dugu (16.11. irudia).

S eta S' sekzioen artean dagoen zati diferentziala aztertuko dugu. S sekzioan F indarra eragiten ari da eta S' sekzioan F' indarra. Dena den, aldiune horretan sekzio horien desplazamenduak ξ eta ξ' dira, hurrenez hurren. Azter dezagun, ba, bi sekzio horien arteko materialaren portaera, bi ikuspegi desberdinez.



16.11. irudia. Oreakan S eta S' sekzioen arteko dx elementu diferentziala higitzen eta zabaltzen ari da, edozein aldiunetan $(dx + d\xi)$ izanik.

a) **Ikuspegi elastikoa.** Zati diferentzial horren deformazio unitarioa ondokoa da:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (16 - 20)$$

Kontuan hartu behar da $\xi = \xi(x, t)$ dela, noski. Bestalde, F eta F' indarren artean dF desberdintasuna dagoela kontuan edukiz eta diferentzia hori arbuaiatuz, ondoko eran jar dezakegu elementu diferentzialari dagokion Hooke-ren legea:

$$F = YS\varepsilon = YS \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (16 - 21)$$

b) **Ikuspegi mekanikoa.** Zati horretan eragiten ari den indar netoa hauxe da:

$$F' - F = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx. \quad (16 - 22)$$

Bestalde, zatiaaren masa

$$dm = \rho S dx \quad (16 - 23)$$

da, ρ dentsitatea izanik. Argi dagoenez, hemen $d\xi \ll dx$ dela kontsideratu dugu, eta ondorioz ρ dentsitatea konstantetzat jo dugu.

Bestalde, azelerazioa

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (16 - 24)$$

denez, era honetan idatz dezakegu Newton-en bigarren legea:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx - \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (16 - 25)$$

hots, ikuspegi mekanikotik haxe lortuko dugu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (16-26)$$

Orain ikuspegi elastikoa eta mekanikoa konbinatuz, (16-21) adierazpenetik haxe dugunez,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (16-27)$$

balio hori (16-26) adierazpenera eramanez, haxe lortuko dugu:

$$YS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (16-28)$$

Beraz, azkenean honelaxe idatz dezakegu sekzio baten desplazamenduaren, $\xi(x, t)$ delakoa-ren, eboluzioa deskribatzen duen ekuazio diferentziala:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (16-29)$$

Ikus dezakegunez, ekuazio hau uhin baten ekuazio diferentziala da. Zer esan nahi du horrek? Sekzioen desplazamenduek (ξ direlakoek) uhin-higiduraren propietateak dituztela, ondoko fase-abiaduraz hain zuzen ere:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \quad (16-30)$$

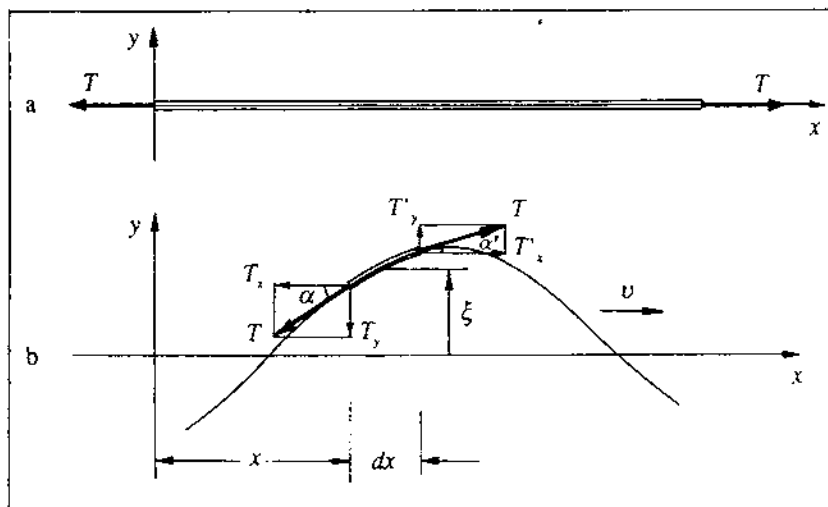
Fase-abiadurak materialaren ezaugarrien menpekotasuna du, beraren Young-en modulua-rena eta dentsitatearena preseski. Bestalde, kasu honetan bai desplazamenduek eta bai hedapenaren abiadurak x ardatzaren norabidea dutenez, luzetarako uhinak dira.

Azken ohar gisa diogun ezen egindako kalkulu teorikoetan zenbait hurbilketa egin ditugula; baina, hala ere, esperimentalki neurtu denez, aurreko kalkuluak ongi egokitzen zaizkio errealitateari.

16.4.2. Zeharkako uhinak soka batean zehar

Zeharkako uhinen azterketa teorikoa egiteko, adibide konkretua jarriko dugu. Demagun soka bat T tentsioaren eraginpean orekan dagoela horizontalki (16.12.a irudia). Zenbait hurbilketa egingo ditugu azterketa errazteko, hala nola sokak pisua eduki arren pisu hori oso txikia dela eta horrela T tentsioaren eraginpean orekan erabat horizontalki dagoela.

Oreka-egoeran egonik, demagun sokaren puntu bat desplazatu egin dugula norabide perpendikularrean eta ondoren soka bere kasa utzi dugula. Zer gertatuko da hortik aurrera? 16.12.b irudian sokaren zati baten egoera adierazi da aldiune batean (desplazamendua oso handiturik, noski).



16.12. irudia. a) Soka orekan, T tentsioaren eraginpean. b) Zeharka perturbaturiko soka.

Hasteko, zenbait hurbilketa egingo ditugu kalkuluak erraztearren. Batetik, zeharkako bibrazioaz kanpo soka higitzen ez denez, tentsio berbera kontsidera dezakegu puntu guztietan; bestetik, desplazamendu txikien kasuan tentsio hori orekakoa dela jo dezakegu.

Azter dezagun y norabidean sokaren elementu diferentzialak duen higidura. Norabide horretako indar erresultantea hauxe da:

$$\left. \begin{array}{l} T'_y = T \sin \alpha' \\ T_y = T \sin \alpha \end{array} \right\} \rightarrow F_y = T(\sin \alpha' - \sin \alpha), \quad (16-31)$$

eta desplazamendua txikia izanik α ere txikia denez, $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ hurbilketa eginez:

$$F_y = T(\tan \alpha' - \tan \alpha) = T d(\tan \alpha), \quad (16-32)$$

Eta, izatez, $\tan \alpha = f(x, t)$ denez, hauxe dugu:

$$F_y = T \frac{\partial}{\partial x} (\tan \alpha) dx. \quad (16-33)$$

Bestalde, $\tan \alpha$ hori sokaren malda da, hots:

$$\tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (16-34)$$

Azkencan, hauxe da y norabideko indarra:

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx. \quad (16-35)$$

Ondoren, Newton-en bigarren legea aplikatzeko, soka-elementuaren masa eta y norabidean duen azelerazioa idatzi behar ditugu. Luzera-unitateko masa ρ izanik,

$$dm = \rho dx \quad (\alpha \text{ txikia deneko hurbilketan } \cos \alpha \approx 1 \text{ eginez}), \quad (16-36)$$

$$a_y = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (16-37)$$

eta Newton-en bigarren legeaz baliaturik:

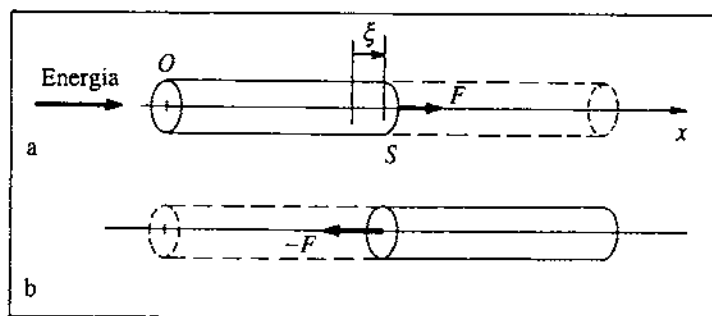
$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx, \quad (16-38)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (16-39)$$

Berriro ere uhinen ekuazio diferentziala ageri zaigu, fase-abiadura $v = \sqrt{T/\rho}$ izanik; bistakoa denez, ξ -ren eta v -ren norabideak elkarren perpendikularrak direnez, zeharkako uhinak hedatzen ari dira sokan.

16.5. MOMENTU LINEALAREN ETA ENERGIAREN HEDAPENA

Uhin mekanikoen kasuan perturbazioa espazioan zehar hedatzen da. Baina zer da perturbazio hori? Aurreko adibideetan ikusi dugunez, perturbazioa ξ koordenatuaren aldakuntza da, eta ξ hori denborarekin aldatuz doanez, $\partial \xi / \partial t$ balioko materiaren abiadura dago eta, ondorioz, momentu lineala eta energia zinetikoa. Bestalde, perturbazioa hedatu egiten denez, uhin-higiduran momentu lineala eta energia ere hedatu egiten direla esan dezakegu. Beraz, Fisikaren ikuspuntutik, horixe da uhin-higiduraren esangura: momentu linealaren eta energiaren hedapena.



16.13. irudia. Hagaxkan barrenako luzetarako uhinak. a) S sekzioaren ezkerreko zatian egiten den indarra. b) Eskuineko zatikoa.

Hedapen hori nolakoa den ikusteko, aurreko atalean aztertutako hagaxka elastikoaren kasua hartuko dugu abiapuntu modura.

Demagun S sekzioa (16.13. irudia). Beraren desplazamendua ξ da eta abiadura $\partial \xi / \partial t$. Ezkerreko parteak eskuinekoari egiten dion indarra $-F$ da. Beraz, denbora-unitateko ezkerreko parteak eskuinekoari ematen dion energia, hots, aldiuneko potentzia, ondokoa da:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -F \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (16-40)$$

Energiaren fluxua ezkerreko muturretik eskuinekorantz baldin bada, ezkerreko muturrean energia eman beharko da. Energia une labur batez soilik ematen bada, pultsu bat dugula esango dugu, eta perturbazioa mugaturik egongo da denboran. Ostera, energia eten-gabe ematen bada, uhin-multzo iraunkorra sortuko da, uhin-tren jarraitua, alegia. Hemen bigarren kasua aztertuko dugu, uhin elastiko harmonikoaren kasua hain zuzen ere. Kasu honetan desplazamendua honelaxe adieraziko dugu,

$$\xi = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin(kx - \omega t), \quad (16-41)$$

eta horren bidez aldiuneko potentzia lor dezakegu:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t), \quad (16-42)$$

$$F = YS \frac{\partial \xi}{\partial x} = YSk \xi_0 \cos(kx - \omega t), \quad (16-43)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = YS \omega k \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (16-44)$$

$v = \sqrt{Y/\rho}$ eta $kv = \omega$ direla kontuan hartuz:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = vS [\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)]. \quad (16-45)$$

Adierazpen hau aztertuz, bi ondorio atera ditzakegu:

- $\cos^2(kx - \omega t) \geq 0$ denez, $\partial W / \partial t \geq 0$ da. Beraz etengabe ari gara energia eskuinerantz bidaltzen O sekzioan.
- Bestalde $\partial W / \partial t = f(kx - \omega t)$ da, eta hori uhinen adierazpena da. Hots, potentziaren hedapenak ere uhinen ekuazioa betetzen du; hain zuzen ere, *energia-uhina* deritzo.

Aldiuneko potentziaren azken adierazpenean ikus daitekeenez, potentzia aldatuz doa denborarekin. Arrazoi horrengatik, interesgarria da denborarekiko batez besteko potentzia kalkulatzeko:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)} = vS [\rho \omega^2 \xi_0^2 \overline{\cos^2(kx - \omega t)}]. \quad (16-46)$$

Bestalde, periodikotasun denborala kontuan hartuz,

$$\overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos^2(kx - \omega t)] dt = \frac{1}{2}, \quad (16-47)$$

eta azkenean emaitza hau lortuko dugu:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)} = \frac{1}{2} vS \rho \omega^2 \xi_0^2. \quad (16-48)$$

Eraitza honen esangura hobeto ulertzeko, konparatu egingo dugu higidura oszilakorrean lorturiko beste batekin. Bertan ikusi genuenez, oszilagailuaren energia hau da:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2. \quad (16-49)$$

Beraz, makilaren bolumen-unitatearen oszilazioa aztertzean ondoko ordezkapenak erabiliz,

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \xi_0 && (\text{oszilazioaren anplitudea}), \\ m &\rightarrow \rho && (\text{dentsitatea edo bolumen-unitatearen masa}), \end{aligned}$$

uhin elastikoak sorturiko bibrazioaren kausaz bolumen-unitateko energia honelaxe adieraz dezakegu:

$$U = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2, \quad (16-50)$$

eta horri *energia-dentsitatea* deritzogu.

Horren arabera, denbora-unitateko ezkerreko muturretik bidaltzen den *batez besteko energia-fluxua* edo *batez besteko potentzia*, honako hau izango da:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = v S U. \quad (16-51)$$

Bestetik, S delakoa hagaxkaren sekzioa denez, vU balioa azalera-unitateko eta denbora-unitateko energia-fluxua da, eta uhinaren *intensitatea* deritzo:

$$I = \frac{1}{S} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = v U. \quad (16-52)$$

Hagaxkaren kasurako eraitza hauek erraz orokor daitezke bestelako uhinetarako. Azken batez, guztietan uhinarekin energiaren hedapena izango dugu, eta energiaren fluxua adierazteko, intentsitate kontzeptua erabiliko dugu.

17. gaia

Uhin-en propietate orokorrak

Beren hedapenean, uhinek zenbait propietate berezi dituzte, hala nola interferentziak, islapena, errefrakzioa eta difrakzioa. Hain zuzen, propietate orokor horiek dira gai honetan aztertuko ditugunak.

Interferentziak bi uhin desberdin ingurune berean hedatzean gertatzen dira, eta puntu bakoitzean gainezarmenaren printzipioa erabiliz aztertu beharko ditugu. Islapena eta errefrakzioa bi ingurune desberdinen arteko banaketa-gainazalean gertatzen dira: islapena hasierako ingurunerantz itzultzen den uhinari dagokio eta errefrakzioa bigarren ingurunerantz beste abiadura batez hedatzen den uhinari. Eta difrakzioa oztopoekin (edo zuloekin) aurkitzean uhinek duten portaerari dagokio.

17.1. INTERFERENTZIAK

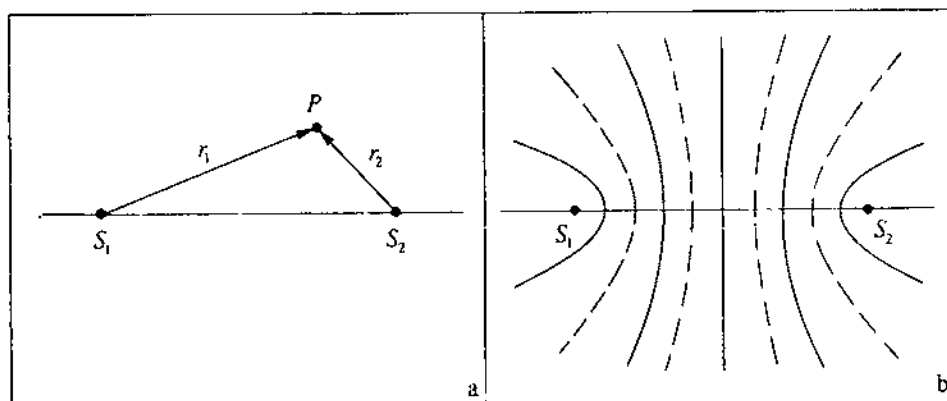
Demagun ingurune batean bi uhin-iturri desberdin ditugula. Puntu batera iturri bietatik datozen uhinak heltzean, bien eraginak gainezarri egiten dira, uhin-izaera galdu gabe eta interferentziak sortuz. Interferentzien ezaugarri orokorrak ulertzeko, kasu konkretu bat aztertuko dugu, bertako ondorio kualitatiboak beste kasuetara ere zabal daitezkeela kontuan izanik.

Azter ditzagun, adibidez, bi uhin-iturri puntual sinkronikok, S_1 eta S_2 izenekoek, sortzen dituzten interferentziak. Iturrietatik hedatzen diren uhin esferikoen adierazpen matematikoak hauexek dira,

$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1), \quad (17-1)$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2), \quad (17-2)$$

non sinuen argumentuen zeinuak aldatu dauden aurreko gaian erabilitakoekin konparaturik, geroko eragiketarako errazagoak gerta daitezkeen. Dena den, hori hasierako fasea aldatzea baino ez da, eta horrek ez du ezer funtsezkorik aldatzen. Bestalde, r_1 eta r_2 balioak edozein P puntutatik S_1 eta S_2 iturrietarako distantziak dira, 17.1. irudian adierazi den modura. Uhin bien kasuan $\omega = kv = (2\pi/\lambda) = 2\pi v$ delakoa maiztasun angeluarra da eta k delakoa, uhin-zenbakia. Alegia, maiztasun bereko uhin-en interferentzia aztertzen ari gara.



17.1. irudia. a) S_1 eta S_2 iturrietan sorturiko uhinen interferentzia. b) Gainazal bentral eta nodalak.

ξ magnitudea eskalarra dela joko dugu, kalkuluak errazteko. Ohar gisa esan behar da ezen, uhin esferikoak izanik, ξ_{0i} anplitudeak txikiagotuz doazela $1/r_i$ legearen arabera. Dena dela, P puntuan anplitudeak batu egiten dira maiztasun bereko higidura oszilakorrak batzen ziren modu berean (ikus 15.4. atala), puntuaren arabera fase desberdina dagoela eta fase-diferentzia honako hau dela kontuan izanik:

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2). \quad (17-3)$$

Hori dela eta, P puntu bakoitzean era honetan adieraziko da anplitude erresultantea:

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\delta}. \quad (17-4)$$

Azken adierazpen hau aztertuz ikus daitekeenez, puntu batzuetan anplitudeak gehitu egiten dira; hain zuzen, $\cos\delta = 1$ denean,

$$\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}, \quad (17-5)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2\pi n; \quad (17-6)$$

hots, $r_1 = r_2 = n\lambda$ denean, anplitudeak batu egiten dira. Holako puntuen leku geometrikoak lerro bentralak (planoan) edo *gainazal bentralak* (espazioan) dira, eta alboko puntuekin konparaturik, bertan anplitudea maximoa da. Ostera, $\cos\delta = -1$ denean,

$$\xi_0 = \xi_{01} - \xi_{02} \quad (\text{edo alderantziz, } \xi_{02} > \xi_{01} \text{ bada}), \quad (17-7)$$

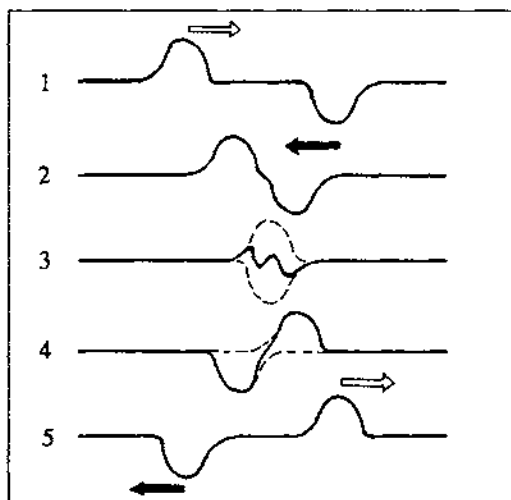
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \pi(2n+1), \quad (17-8)$$

$$r_1 - r_2 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (17-9)$$

eta puntu haetan anplitudeak minimoak dira. Holako puntuen leku geometrikoak *gainazal nodalak* dira espazioan (planoan, lerro nodalak).

Bestalde, $r_1 = r_2 = k$ tea delako baldintzak fokuak S_1 eta S_2 puntuetan dituen hiperbola bat definitzen du planoan, edo nahiago bada, biraketa-hiperboloidea espazioan. Gainazal hiperboliko horiek dira 17.1.b irudian adierazi direnak.

Interferentziei buruzko atal honi bukaera emateko, beste adibide bat aipatuko dugu. Demagun soka baten bi muturretatik bi perturbazio hedatzen ari direla, eta uhinek aurkako noranzkoa dutela. Elkarrekin topo egin arte, uhin bakoitza bere kasa hedatuko da. Bi uhinak toki berera heltzean, gainezarri egingo dira, hots, interferentzia gertatuko da, eta ondoren bakoitzak bere hedapena izango du, energia kontserbaturik, aldez aurretik interferentziarik egon ez balitz bezala. Prosezu osoa ondoko 17.2. irudian adierazi da.

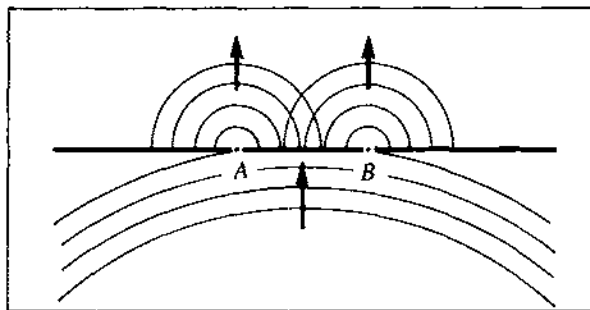


17.2. irudia. Soka batean aurkako noranzkoaz hedatzen ari diren bi uhin baten interferentzia.

17.2. HUYGENS-EN PRINTZIPIOA

Hamazazpigarren mendearen azken partean, Christian Huygens (1629-1695) izeneko fisikari danimarkarrak uhin mekanikoen hedapena ongi ulertzeko prozesu bat adierazi zuen, ondoren oso erabilgarria gertatu dena.

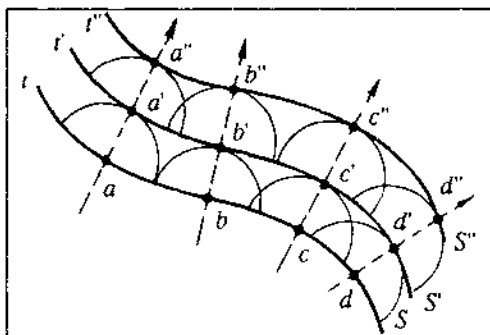
Uhina ingurune mekanikoko puntu batera heltzean, puntu hori bibratzen hasten da eta, beraz, uhin esferikoen iturri sortzaile bihurtzen da (noski, uhin esferikoak, baldin ingurunea isotropoa bada). Horrela, bada, uhin-higiduraren hedapena adierazteko, nahikoa da uhina heltzen deneko puntuak oinarritzko uhin berrien zentro edo iturritzat hartzea. Hori da hain zuzen ere *Huygens-en printzipioa*; alegia, oinarritzko uhin-fronteek gainazal inguratzailerik badute, guztien efektua uhin bakarraren efektuaren baliokidea da, uhin bakar horren uhin-frontea inguratzaila bera izanik.



17.3. irudia. A eta B zuloek uhin-iturri modura jokatzeko erakuslea.

Baldintza berezietan behatu egin daitezke aipaturiko oinarritzko uhinak. Adibidez, alboko 17.3. irudian uretan sorturiko gainazal-uhinen hedapena adierazi da. Bidean bi zulo txiki (A eta B) dituen horma edo traba bat jarritz, bertatik uhina beste aldera pasatzen dela ikus daiteke, eta bi zuloek iturri berrien lana egiten dutela.

Azal dezagun poliki prozesua. Dakigunez, uhin-gainazala edo uhin-frontea aldiun batean uhinaren perturbazioa fase berean dauden puntu guztien leku geometrikoa da. Demagun, ba, t aldiunean uhin-frontea irudiko S gainazalean dagoela (17.4. irudia). Gainazal horretako puntu bakoitzak uhin sekundarioak igorriko ditu, t' aldiunean zirkunferentzierdi txikien bidez adierazi direnak. Hauen interferentziaz, t' aldiunean guztien inguratzailea den S' uhin-gainazala lortzen da, eta bertan berriro errepikatuko da proze-sua, t'' aldiunean S'' gainazala eraturik. Eta horrela, etengabe hedatuz doa uhina.



17.4. irudia. Huygens-en printzipioaren arabera, uhin-fronte bakoitzeko puntuak uhin sekundarioen iturritzat bar ditzakegu.

Azalpena osatzeko, Huygens-en printzipioaren aplikaziorako agertzen diren zenbait traba azalduko ditugu. Lehenik eta behin, konturatu egin gaitezke ezen, uhin-gainazal bakoitzeko puntuen inguruko oinarritzko uhinak aipatzean eta grafikoki adieraztean, zirkunferentzierdiak jarri ditugula, nahiz eta, puntu horiek benetako iturriak balira, zirkunferentzia osoak (hots, esferak hiru dimentsiotan) jarri beharko genituzkeen. Dena den, uhinen hedapena adierazten ari gara eta kasu honetan noranzko bakarrean hedatzen da uhina; horregatik adierazi ditugu soilik, noranzko horri dagozkion zirkunferentzierdiak.

Beste oztopo bat, uhin-gainazalen arteko portaerari dagokiona da. Arazo hau uhinen interferentziaz uhin-fronteei dagokien emaitza berbera lortzen dela frogatuz ebazten da.

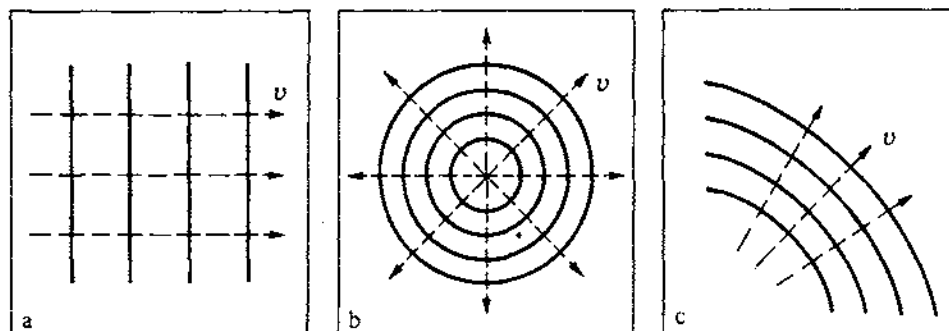
Hirugarren objektzio bat ere jar daiteke uhin elektromagnetikoen kasuan, oraingoan bibratzen duen partikula edo ingurunerik ez baitago. Hori dela eta, uhin mekanikoen kasurako hain egokia zen Huygens-en printzipioa berraztertutako beharra egon zen. Pasa den mendearen azken aldera Kirchhoff-ek era matematikoan adierazi zuen Huygens-ek intuitiboki emandako printzipioa. Beraz, hemen frogapenik emango ez dugun arren, gaitututako joko dugu oztopo hori ere.

17.3. MALUS-EN TEOREMA

Uhin-en hedapena nola gertatzen den ondo ulertzeko, aurreko printzipioarekin batera Malus-en teorema ematea ere komeni da.

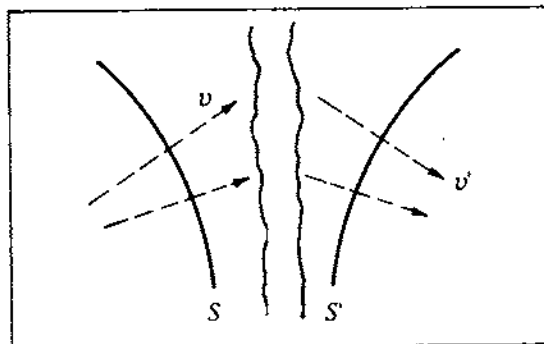
Puntu bakoitzean, uhin-gainazalen perpendikularrei *izpiak* deritzegu, eta uhinen hedapenaren norabidea adierazten dute. Izpi berberaren bidez uhin-gainazal desberdinetan lotzen diren puntuak *puntu izpikideak* edo *puntu korrespondenteak* deritze; adibidez, aurreko orrialdeko 17.4. irudian a , a' eta a'' elkarren puntu izpikideak dira, eta berdin b , b' eta b'' . Bestalde, uhin-gainazaleko puntuetan perturbazioaren fasea berbera denez, uhinak gainazal batetik hurrerora hedatzeko darabilen denborak berbera izan beharko du, neurtzeko hartzen den izpia edozein izanik ere. Horrela adieraz dezakegu, ba, Malus-en teorema: «*Bi uhin-gainazalako puntu korrespondenteen artean uhinak hedatzeko behar duen denbora berbera da puntu-bikotea edozein izanik*».

Gauzak horrela, aa' , bb' , cc' distantziak, uhinak puntu bakoitzean duen hedapen-abiaduraren arabera dira. Ingurune isotropo eta homogeneoetan, puntu guztietan eta norabide guztietan abiadura berbera denez, bi uhin-gainazalako puntu izpikideen bikoteen arteko distantzia ere berbera izango da. Gainera, horrelako inguruneetan izpiak lerro zuzenak izango dira, desbidera daitezkeen arrazoirik ez baitago. Hain zuzen, 17.5. irudian zenbait uhinen hedapen-gainazalak eta izpiak adierazi dira, ingurune isotropo eta homogeneo batean.



17.5. irudia. Ingurune isotropoko izpiak eta uhin-gainazalak. a) Uhin lauak. b) Uhin esferikoak. c) Edonolako formako uhinak.

Bestalde, bere hedapenean ingurune isotropo eta homogeen batetik beste batera pasatzen den uhina ere kontsidera dezakegu. Kasu horretan, batetik bestera pasatzean izpien norabidea aldatu egin daiteke; baina ingurune bakoitzean izpiak lerro zuzenak dira eta, zer esanik ez, uhin-gainazalen perpendikularrak. Beraz, izpien eta uhin-gainazalen arteko ortogonaltasuna kontserbatu egiten da uhinaren hedapenean zehar.

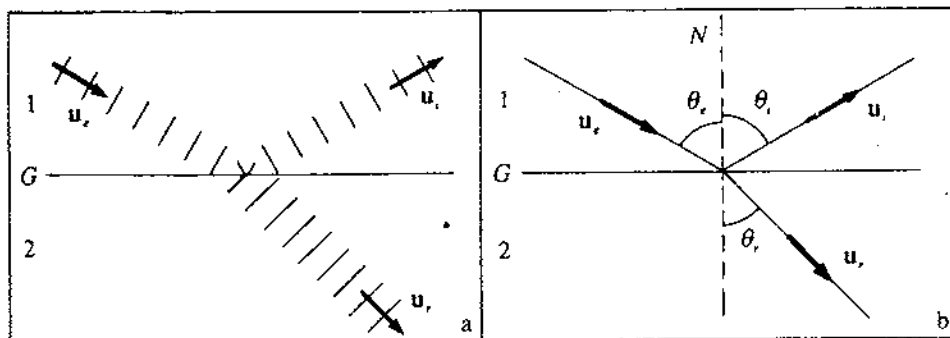


17.6. irudia. S inguruneetik S' ingurunerara pasatzean, abiadura eta norabide-aldaketak gerta daitezke.

17.4. UHINEN ISLAPENA ETA ERREFRAKZIOA

Uhina ingurune batean hedatuz doala beste ingurune baten mugara heltzean, banantze-gainazalean jokamolde berezia du, kasu orokorrean islatuz eta errefraktatuz, esperimentalki ikus daitezkeenez.

Arazo hau azaltzeko, demagun uhin lau bat, 1 ingurune isotropo eta homogeen u_1 bektorearen norabidean hedatzen ari dena (17.7. irudia). Demagun, halaber, beste ingurune isotropo eta homogeen desberdin bat dugula, 2 ingurunea, eta bien arteko banantze-gainazala, G, lau dela. Esperimentalki ikusienez, uhina G gainazalera heldu ondoren bi eratara hedatuko da. Batetik 1 ingurunean *uhin islatua* deritzona hedatuko da, u_1 norabidea duena; eta bestetik 2 ingurunean, *uhin errefraktatua*, u_2 norabidea duena, 17.7. irudietan adierazi den modura.



17.7. irudia. a) Uhin-fronte lauei dagozkien islapena eta errefrakzioa. b) Izpiak eta angeluak.

Azalpen kualitatiboak eman ondoren, fenomeno horietan esperimentalaki egiaztatu diren legeak aipatuko ditugu. Uhin lauen kasuan eta u_r , u_i eta u , bektoreen norabideak kontuan hartuz, hiru lege hauek betetzen dira:

1) Izpi erasotzailea, izpi islatua eta izpi errefraktatua plano berean daude, eta plano hori banantze-gainazalaren perpendikularra da; beraz, N normala ere plano horretan dago.

2) Eraso-angelua eta islapen-angelua elkarren berdinak dira:

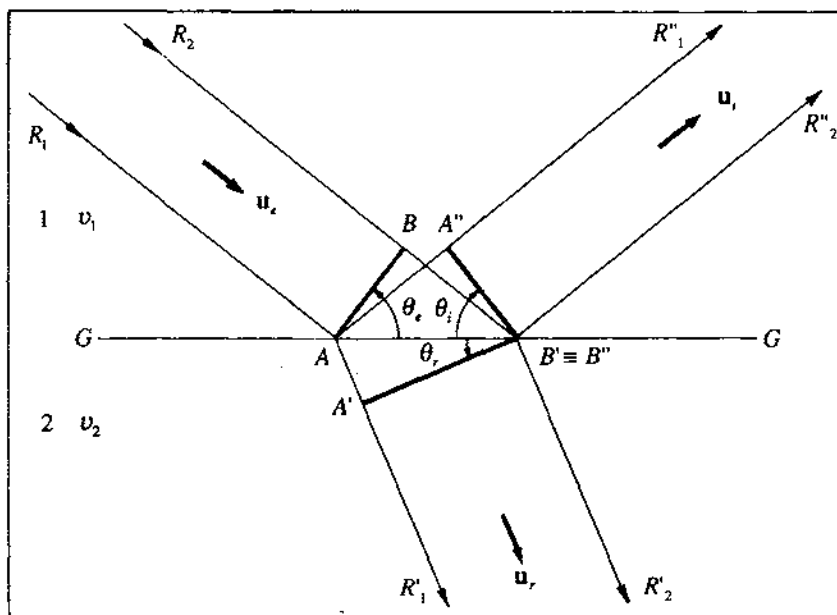
$$\theta_e = \theta_i. \quad (17-10)$$

3) Eraso-angeluaren eta errefrakzio-angeluaren sinuen arteko zatidura konstantea da:

$$\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_r} = n_{21}. \quad (17-11)$$

Hirugarren lege honi *Snell-en legea* deritzo, eta, n_{21} konstanteari, 2 ingurunearen 1 ingurunearekiko *errefrakzio-indizea*. Beraren balioa ingurune bien propietateen menpekoea da, baita uhinaren izaerarena ere.

Aurreko lege experimentalak teorikoki ere froga daitezke, uhinen hedapenaren oinarriko printzipioak erabiliz. Horrela eginez, lehenengo legea simetria-arrazoiengatik azal daiteke, zeren, izpi erasotzaileak eta N normalak plano bat osatzen dutenez, ez baitago arrazoirik izpi islatua eta izpi errefraktatua plano horretatik atera daitezen.



17.10. irudia. R_1 eta R_2 izpi paraleloen islapena eta errefrakzioa.

Beste bi legeak frogatzeko, bi izpi erasotzaile paraleloren jokamoldea aztertuko dugu uhin lauaren kasuan. Hain zuzen, 17.10. irudian ikus daitekeenez, R_1 eta R_2 izpi paraleloak

1 ingurunean hedatzen ari dira v_1 abiaduraz. Malus-en teoremaren ondorioz, bai izpi islatuak (R''_1 eta R''_2) zein izpi errefraktatuak (R'_1 eta R'_2) binaka paraleloak dira, eta uhin-fronteak izpien perpendikularrak, uhin lauekin ari baikara. Hortaz, $t = 0$ aldiunean AB gainazala kontsideratuko dugu, eta t aldiunean $A'B'$ eta $A''B''$ gainazalak uhin errefraktatuarena eta uhin islatuarena dira, hurrunez hurren. Ondoko erlazioak ditugu:

$$\overline{BB'} = v_1 t, \quad (17-12)$$

$$\overline{AA'} = v_2 t, \text{ (2 ingurunean hedatzen baita)} \quad (17-13)$$

$$\overline{AA''} = v_1 t = \overline{BB'}. \quad (17-14)$$

Bestalde, irudiaren geometria kontuan hartuz,

$$\sin \theta_r = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}, \quad (17-15)$$

$$\sin \theta_i = \frac{\overline{AA''}}{\overline{AB'}}, \quad (17-16)$$

$$\sin \theta_r = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}}. \quad (17-17)$$

Beraz, erraz ondoriozta dezakegunez,

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i \rightarrow \theta_r = \theta_i, \quad (17-18)$$

hots, bigarren legea betetzen da, eta gainera,

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}, \quad (17-19)$$

hau da, hirugarren legea. Hain zuzen, errefrakzio-indizea uhinak bi inguruneetan dituen hedapen-abiadura desberdinen ondorioa da. Hori dela eta, sarri txantilo modura erreferentzia-ingurune bat hartzen da —argiaren kasuan, hutsa— eta 'ingurune txantilo' horrekiko *errefrakzio-indize absolutua* definitu ohi da:

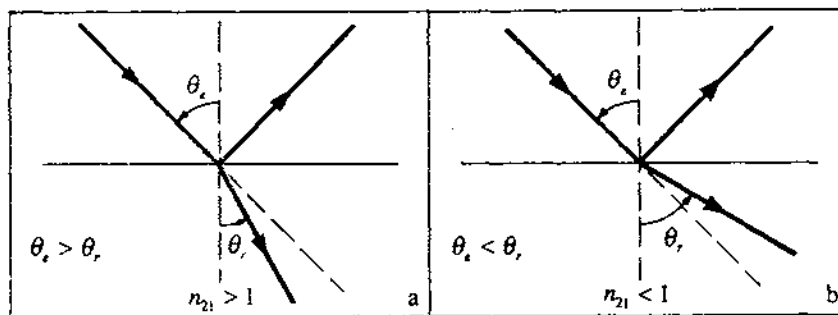
$$n = \frac{c}{v}. \quad (17-20)$$

Alegia, ingurunearen errefrakzio-indize absolutua uhinak ingurune txantiloian duen hedapen-abiaduraren (c) eta ingurunean duenaren (v) arteko erlazioa da. Indize honen bidez era simetrikoagoan idatz daiteke Snell-en legea:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (17-21)$$

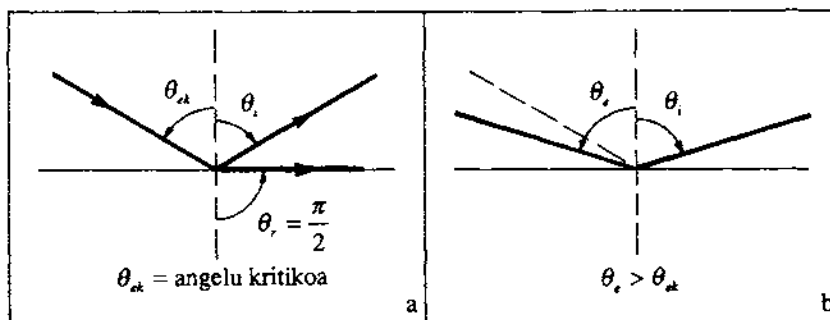
$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = n_{21} \rightarrow n_1 \sin \theta_r = n_2 \sin \theta_i. \quad (17-22)$$

Interesgarria da ikustea, n_{21} indizearen balioen arabera ($n_{21} > 1$ ala $n_{21} < 1$ izan) izpi errefraktatua normalerantz hurbildu ala normaletik urrundu egingo dela, 17.11. irudietan adierazi den modura.



17.11. irudia. a) $n_{21} > 1$ izanik, izpi errefraktatua normalerantz hurbiltzen da. b) $n_{21} < 1$ izanik, normaletik urruntzen da.

Bigarren kasuan, $n_{21} < 1$ denean, jokamolde berezia gertatzen da izpi erasotzailearen angelu batetik aurrera. Demagun $\sin \theta_i = 1$ balioa ($\theta_i = \pi/2$). Errefrakzio-ındizea $n_{21} < 1$ denez, θ_r horri eraso-angelu bat dagokio (θ_{ek} , $\sin \theta_{ek} < 1$ izanik), zeinari *angelu kritikoa* deritzon (17.12.a irudia).



17.12. irudia. a) Errefrakzio-angelu kritikoa. b) Islapen osoa.

Angelu hori baino handiagoak diren angeluetarako, Snell-en legearen arabera $\sin \theta_r > 1$ eduki be-harko genuke, baina hori ez da posiblea. Fisikoki, baldintza horietan errefrakzio-iririk ez dagoela eta *islapen osoa* gertatzen dela esan nahi du horrek (17.12.b irudia).

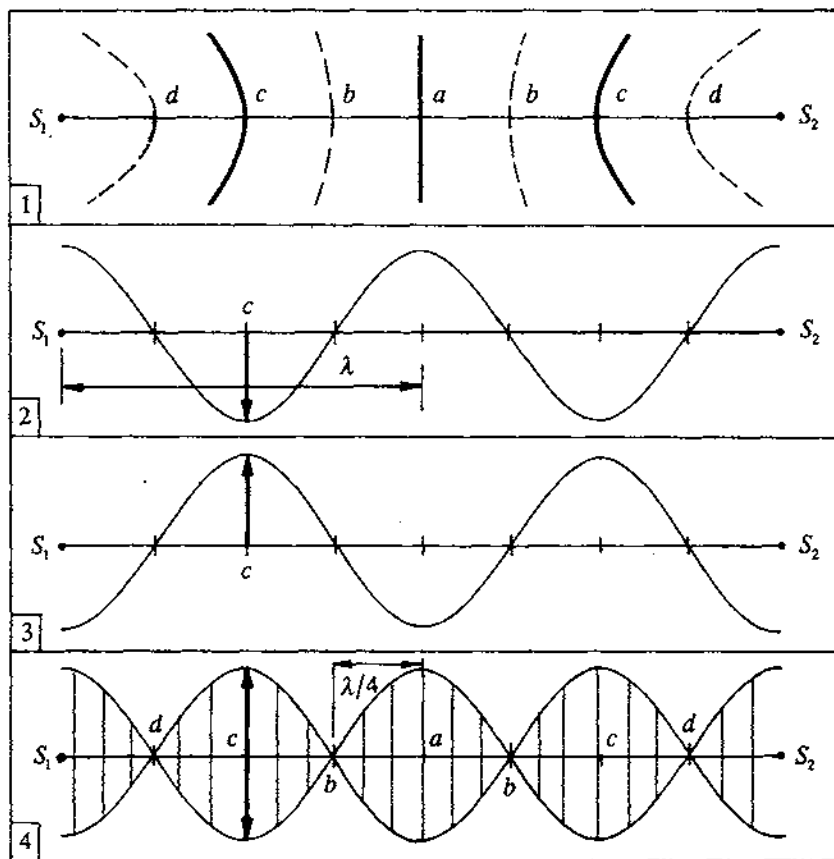
17.5. UHIN GELDIKORRAK

Uhin geldikorrak etengabe hedatzen ari diren uhinen interferentziaz sortzen dira. Garrantzi handia dute, adibidez, musika-tresna batzuen funtzionamenduan, hala noia organo-hodien kasuan. Ikusiko dugunez, arazo honetan zerikusi handia dute uhinak hedatzen direneko ingurunearen muga-baldintzek. Dena den, uhin geldikorrak zer diren azaltzeko, bi adibide berezitatik abiatuko gara.

Lehenengo kasuan, ingurune batean bi uhin-iturri puntual eta sinkroniko ditugula kontsideratuko dugu (S_1 eta S_2), eta bertatik etengabe uhin-tren harmonikoak eta esferikoak sortzen ari direla. Azalpena errazteko, biek uhin-luzera eta anplitude berbera dutela joko dugu, eta $\overline{S_1 S_2}$ distantzia uhin-luzera horren anizkoitza dela. 17.1. atalean ikusi dugunez, interferentziaren kausaz, puntu batzuetan bibrazio-egoera maximoa izango da eta beste batzuetan nulua, eta puntu horien leku geometrikoak hiperboloideak izango dira, fokuak S_1

eta S_2 puntuetan egonik (17.13.1. irudia). Nolanahi ere, S_1S_2 lerroko puntuak aztertuko ditugu, norabide bakarreko uhina balitz bezala. Uhinak etengabe sortzen dabiltzala, maximoak, a , c puntuetan dira; eta, interferentziaz, perturbazioa nulua da b , d puntuetan.

17.13.2. irudian, tarteko puntuen perturbazio-egoera adierazi da S_1 eta S_2 iturrietan perturbazio positibo maximoa dagoen aldiune batean. 17.13.3. irudian, gauza bera baina aurkako fasean. Hor ikus daitekeenez, S_1 eta S_2 bitarteko puntuen perturbazioak iturriek duten periodo berberaz aldatzen dira, nahiz eta puntu bakoitzean anplitudea desberdina den. Hori dela eta uhinaren forma ez da hedatzen, eta horregatik *uhin geldikorra* deritzo. Horixe da 17.13.4. irudian adierazi dena.

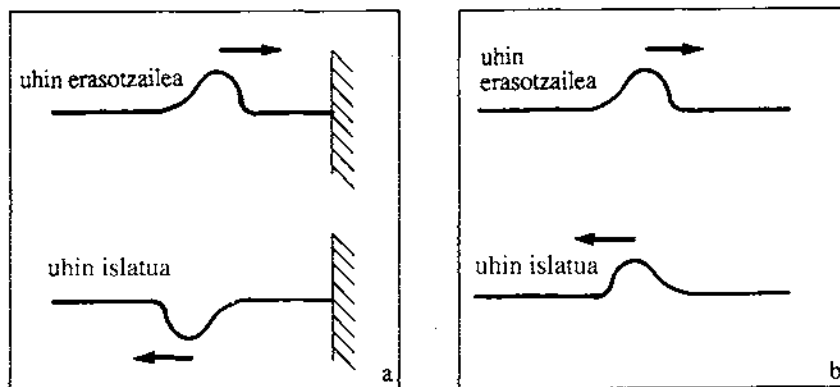


17.13. irudia. S_1 eta S_2 uhin-iturrietan etengabe sorturiko uhin harmonikoen interferentziaz eraturiko uhin geldikorrak.

Puntu batzuen bibrazioaren anplitudea nulua da, hots, perturbaziorik gabekoak dira, hala nola b eta d puntuak: *nodoak* deritze. Besteetan ordea, perturbazioaren anplitudea maximoa da, a eta c puntuetan adibidez: *sabelak* deritze. Irudietan ikus dezakegunez, elkarren ondoan dauden nodo eta sabelen arteko distantziak $\lambda/4$ balio du.

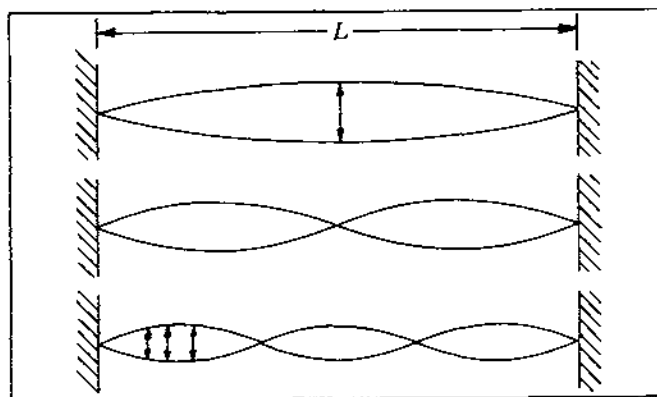
Aurreko kasua aztertu ondoren, pasa gaitezen soka batean sor daitezkeen uhin geldikorak aztertzeraz. Kasu honetan uhin geldikorak soken muturretan gertatzen diren islapenen ondorioz sortzen dira. Has gaitezen, ba, muturretako islapenak nolakoak diren ikusten.

Esperimentalki ikusi denez, era desberdinez gertatzen da islapena, sokaren muturraren egoera zein den kontuan hartuta, hots, muga-baldintzen arabera. Batetik, sokaren muturra finko lotuta dagoenean, uhin islatua aurkako fasean hedatuko da; ostera, muturra aske dagoenean, uhin islatuak fase berberarekin segituko du. Bi kasuen arteko desberdintasuna 17.14. irudietan adierazi da eskematikoki.



17.14. irudia. Sokaren muturretako islapena. a) Mutur finkoki lotua. b) Mutur askea.

Aipaturiko jokamoldea kontuan edukiz, bi muturrak loturik dituen sokaren kasuan sortzen diren uhin geldikorak azter ditzakegu. Etengabeko uhin-tren harmonikoa sortzen bada, muturrera heltzean islatu egingo da, eta ondorioz, uhin-luzeraren eta sokaren luzeraren proportzio egokien kasuan, uhin geldikorak sortuko dira. Maiztasuna handi samarra izanik, begiek ezin dute higidura segitu eta soka parte berezitan banaturik ikusten da, 17.15. irudietan bezala.



17.15. irudia. Bi muturrak finkoki lotuta dauzkan sokaren uhin geldikor posible batzuk.

Argi dagoenez, muturretan nodoak agertzen dira nahitaez, finko lotuta baitaude. Horrela, sokaren luzera L izanik, ondoko uhin-luzeretan sor daitezke uhin geldikorrak: $2L/1, 2L/2, 2L/3...$ Demagun tresna musikal baten soka dela. Uhinaren hedapenaren abiadura v izanik, uhin geldikorteko maiztasunak erraz kalkula daitezke. Hain zuzen,

$$v = \frac{v}{\lambda} \quad (17-23)$$

denez, uhin-luzera posibleak kontuan hartuz, hauexek dira horiei dagozkien maiztasunak:

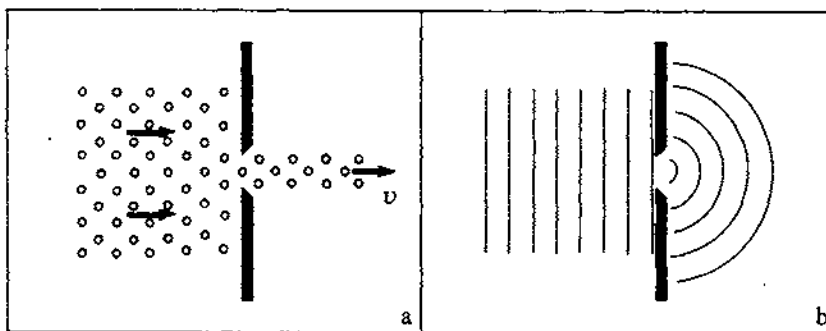
$$\frac{v}{2L}, 2\frac{v}{2L}, 3\frac{v}{2L} \dots \quad (17-24)$$

Maiztasun txikienari, hots, $v_1 = v/2L$ delakoari, *oinarrizko maiztasuna* deritzo. Besteak beraren anizkoitzak dira, $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1...$ alegia, eta *harmonikoak* deritze.

Bukatzeko, diogun ezen musikarako soka-tresnen kasuan, nota afinatzerakoan, hots, uhin geldikorrekin oinarritzko maiztasuna definitzerakoan, hiru oinarri fisiko hartzen direla kontuan. Izan ere, aurreko gaiko emaitza erabiliz (ikus 16.4. atala), honelaxe adieraz dezakegu maiztasun hori:

$$v_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (17-25)$$

Adierazpen honetan ageri den modura, v_1 maiztasunak L , T eta ρ parametroen menpekotasuna du. Beraz, soka zenbat eta luzeagoa izan, maiztasuna hainbat eta txikiagoa izango da, hots, tonu baxuagoa, pianoen soketan ikus daitekeenez. Bestalde, gitarraren sokek luzera berbera dutela kontuan hartuta, izatez, luze-laburtu egin daitezke atzamarrez zapalduz; eta afinatu nahi denean, tentsioa aldatzen da. Gainera, tonu baxuetarako sokak, lodiagoak izateaz gain, burdin hariz inguratutik ohi daude, luzera-unitateko masa, ρ , handiagotzeko.



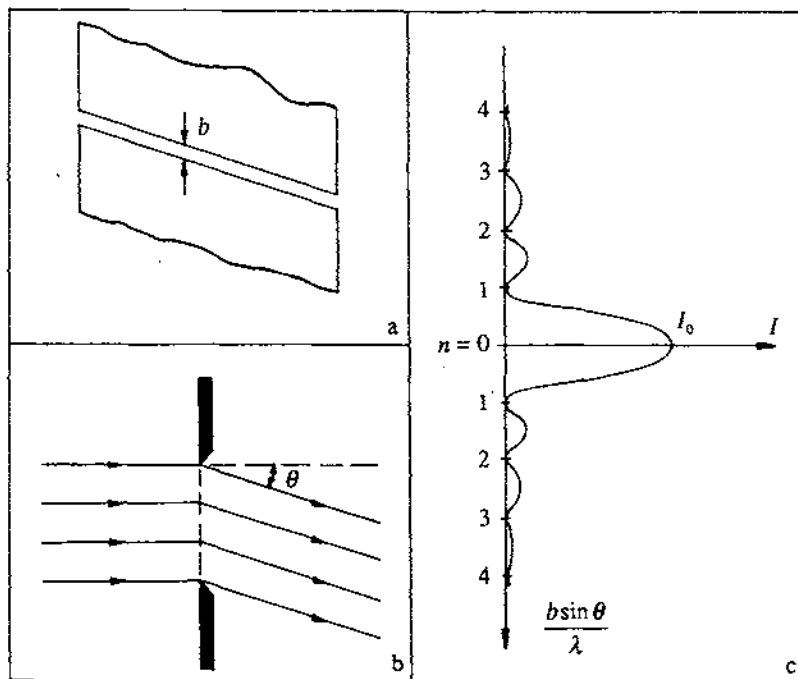
17.16. irudia. Partikulek (a) eta uhinek (b) zulo txikiaren oztopoan duten portaera desberdina.

17.6. UHINEN DIFRAKZIOA

Difrakzio izenarekin, hedapen lerrozuzenaz ezin azal daitezkeen fenomeno batzuk adierazten dira. Oro har, bere uhin-luzerarekin konparagarria den oztopo batekin topo egitean gertatzen den distortsioari deritzo *difrakzioa*. Oztopo hori zulo txikia duen pantaila bat izan

daiteke, adibidez, eta orduan argi ikus daiteke partikulek eta uhinek duten portaera desberdina. Demagun, kasurako, alde batetik v abiaduraz higitzen ari den partikula-sorta bat dugula, eta bestetik, uhina (17.16. irudia). Esperientziak erakusten duenez, partikulen kasuan, zuloa heltzen direnak aurrera pasatzen dira trabarik gabe, norabide berean; eta hormarekin topo egiten dutenak ez dira pasatzen. Ostera, uhinen kasuan, zuloaren beste aldean norabide desberdinetan hedatzen dira, lehenago Huygens-en printzipioa azaltzean esan dugun modura.

Difrakzioa pixka bat gehiago azaltzeko, kasu berezia aztertuko dugu, hain zuzen zulo errektangeluar batean izpi paraleloen kasuan gertatzen den difrakzioa, *Fraunhofer-en difrakzioa* izenaz ezaguna dena.



17.17. irudia. Fraunhofer-en difrakzioa. a) Zulo errektangeluarra. b) Izpien norabidearen definizioa. c) Uhinaren intentsitatea, norabidearen arabera.

Pantaila batean zulo errektangeluar oso estu eta luzea kontsideratuko dugu, muturretako efektuak arbuiaitzeko modukoa. Izpi erasotzaileak zuloaren planoaren perpendikularrak direla kontsideratuko dugu. Huygens-en printzipioaren arabera, zuloaren planoko puntuak uhin sekundarioen iturri bihurtuko dira. Horren bidez angelu desberdinetan hedatzen ari diren izpi difraktatuak experimentalki aztertzean, norabide batzuetan intentsitatea nulua dela ikusiko da (17.17. irudia). Norabide horiek ondoko erlazioaren bidez lor daitezke:

$$b \sin \theta = n\lambda, \quad (17-26)$$

b delakoa zuloaren zabalera eta n zenbaki osoa izanik. Hain zuzen, $n = 0$ balioan intentsitate maximoa dago. Intentsitatearen banaketa 17.17.c irudian adierazi da, $b \sin \theta / \lambda$ delakoaren funtzioan.

Intentsitatearen banaketa angeluar hori uhin sekundarioen interferentziaz azal daiteke, $\theta = 0$ denean, interferentzia hori biltzailea da, eta, ordea, n parametroaren balio osoetarako, deuseztatzailea. Ez dugu egingo arazoaren azterketa matematikoa, baina intentsitatearen banaketaren azken adierazpena emango dugu, ondokoa preseski,

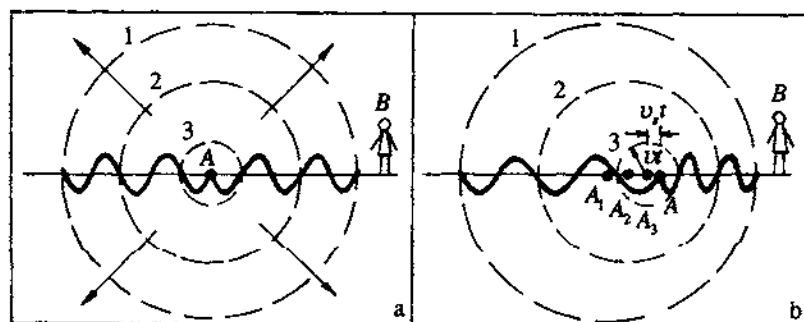
$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad (17-27)$$

non $u = \pi b \sin \theta / \lambda$ den. Adierazpen honetatik argi ikus dezakegu intentsitate nuluko angeluak $u = n\pi$ egiten dutenak direla, hots, $b \sin \theta = n\lambda$ egiten dutenak. Salbuespena $n = 0$ denean gertatzen da, orduan $I = I_0$ gertatzen baita, lehen esan dugunez.

17.7. DOPPLER EFEKTUA

Aurreko gaian uhin mekanikoen adibideak aztertzean, ingurunearen baldintzek duten garrantziaz konturatu gara. Behin iturritik abiatu ondoren, uhin mekanikoak ingurunean zehar eta ingurunearen bidez hedatzen dira, eta ingurunea isotropoa bada, hedapen-abiadurak balio berbera du norabide guztietan. Bestalde, lehenago ikusi dugunez, abiadura horrek ingurunearen propietateen menpekotasuna du. Baina uhin-fronteak esferikoak dira.

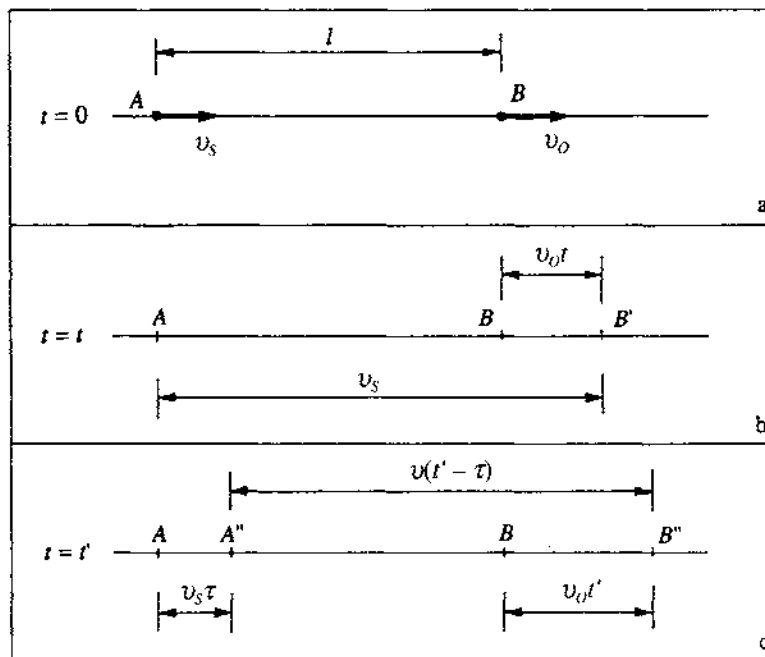
Hala ere, uhin-iturria edo behatzailea ingurunearekiko higitzen ari direnean —edo, hobeki esateko, elkarrekiko abiadura erlatiboa dutenean— behatzen diren uhin-fronteen maiztasunak (behatzaileak neurtuak) desberdinak dira. Efektu horri *Doppler efektua* deritzen.



17.18. irudia. a) A iturria geldi dago. b) A iturria B behatzailearengana hurbiltzen doa.

17.18. irudiek efektuaren sorrera adierazi nahi dute grafikoki. Bietan, iturriak uhin harmoniko jarraitua sortzen du. Lehenengoan, uhin-iturria (A) geldi dago ingurunearekiko, eta 1, 2 eta 3 esferak zentrokideek hiru unetan sorturiko uhin-fronteen egoera adierazten dute aldiune berean. Horrekin batera, uhinak iturriaren ezker eta eskuinaldean duen forma erakutsi da. Bigarren irudian eskuinalderantz higitzen ari den uhin-iturriaren kasua ageri da, hiru aldiunetan A_1 , A_2 eta A_3 puntuetan dagoela adierazita. Hain justu, 1, 2 eta 3 esferak iturria A_1 , A_2 eta A_3 puntuetan zegoenean sorturiko uhin-fronteak adierazten dituzte. Grafikoki ikus daitekeenez, behatzaileak maiztasun desberdinak neurtuko ditu iturriaren eskuin ala ezker aldean egonik; bestela esanik, iturria berarenganantz hurbiltzean ala berarengandik urruntzean.

Doppler efektua matematikoki ere azter daiteke. Hemen kasu konkretu bat aztertuko dugu soilik, kalkuluak gehiegi korapila ez daitezen. Hurrengo 17.19. irudietan adierazi dugu kasu hori.



17.19. irudia. a) Iturriak eta behatzaileak ingurunearekiko dituzten abiadurak eta $t = 0$ aldiuneko posizioak. b) $t = t$ aldiuneko posizioak. c) $t = t'$ aldiuneko posizioak.

Demagun ingurunea geldi dagoela sistema inertzial batekiko; prozesua sistema horretan aztertuko dugu. A puntua uhin-iturria izanik, x ardatzaren norabidean v_s abiaduraz higitzen ari dela kontsideratuko dugu. Modu berean, B behatzailea v_o abiaduraz higituko da, hau ere x ardatzaren norabidean; hots, x norabidean aztertuko dugu soilik Doppler efektua. Uhin-iturriak v maiztasunaz bidaltzen ditu uhinak, etengabe. Gure arazoa, B behatzaileak zein maiztasunez neurtuko dituen aztertzea da.

17.19.a irudian hasierako egoera ($t = 0$) adierazi da. Bertan, l delakoa aldiune horretan iturriaren eta behatzailearen artean dagoen distantzia da. Demagun $t = 0$ unean A -tik B -rantz irten den uhina; v abiaduraz hedatuko da ingurunearekiko eta $t = t$ unean helduko da B behatzailea dagoen punturaino, hots, B' punturaino (ikus 17.19.b irudia). Ondoko erlazio geometrikoak beteko dira:

$$\overline{AB'} = vt, \quad \overline{BB'} = v_o t, \quad (17-28)$$

eta, beraz:

$$vt = l + v_o t, \quad (17-7)$$

$$t = \frac{l}{v - v_o}. \quad (17-30)$$

Azter dezagun orain τ aldiunean iturritik bidali den uhina. Aldiune horretan iturria A'' puntuan dago, $\overline{AA''} = v_s \tau$ izanik. Uhin-fronte hori t' aldiunean helduko da behatzaileak dagoen punturaino, B'' -raino, $\overline{BB''} = v_o t'$ izanik (ikus 17.19.c irudia). Beraz, uhinak A'' -etik B'' -era joateko behar izan duen denbora $(t' - \tau)$ izan da, hots, $\overline{A''B''} = v(t' - \tau)$. Eta hirugarren irudiko erlazio geometrikoetan finkatuz:

$$v(t' - \tau) = l - v_s \tau + v_o t', \quad (17-31)$$

$$t' = \frac{l + (v - v_s)\tau}{v - v_o}. \quad (17-32)$$

Behatzaileak A eta A'' puntuetan sorturiko uhin-fronteen artean neurtuko duen denbora-tartea hauex da:

$$\tau' = t' - \tau = \frac{v - v_s}{v - v_o} \tau. \quad (17-33)$$

Demagun iturriak igorri dituen uhinen maiztasuna ν dela. Horrela bada, τ bitartean sorturiko uhinen kopurua $n = \tau \nu$ izango da. Behatzaileak n uhinak τ' bitartean ikusiko ditu pasatzen eta, beraz, $n = \tau' \nu'$. Gauzak horrela izanik, behatzaileak neurtuko duen maiztasuna (ν' alegia) modu honetan kalkulatu da:

$$\nu' = \frac{\tau \nu}{\tau'} \rightarrow \nu' = \frac{v - v_o}{v - v_s} \nu. \quad (17-34)$$

Aurrekoa da, preseski, Doppler efektuaren adierazpen matematikoa (AB lerroan). Argi ikus daitekeenez, $v_s \uparrow v_o$ baldin bada, $\nu \uparrow \nu'$ izango da. Hots, higidura erlatiboaren kausaz, uhin-iturriak igorri dituen uhinen maiztasuna eta behatzaileak neurtuko duena desberdinak izango dira.

Iturriaren eta behatzailearen arteko higidura erlatiboaren garrantzia hobeki agertzeko, v_o eta v_s abiadurak v -ekin konparatuz txikiak direneko kasuan, hurbilketa bat egingo dugu aurreko adierazpenean. Hain zuzen, $v_o \ll v$ eta $v_s \ll v$ direla jorik:

$$\nu' = \frac{v - v_o}{v - v_s} \nu = \frac{1 - v_o/v}{1 - v_s/v} \nu \cong \left(1 - \frac{v_o}{v}\right) \left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \nu, \quad (17-35)$$

$$\nu' \cong \left(1 - \frac{v_o}{v} + \frac{v_s}{v} - \frac{v_o v_s}{v^2}\right) \nu, \quad (17-36)$$

eta $v_o v_s / v^2$ arbuaituz:

$$\nu' \cong \left(1 - \frac{v_o}{v} + \frac{v_s}{v}\right) \nu = \left(1 - \frac{v_o - v_s}{v}\right) \nu = \left(1 - \frac{v_{os}}{v}\right) \nu, \quad (17-37)$$

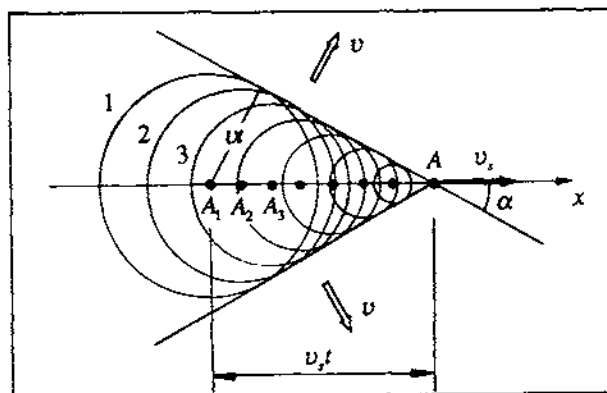
non $v_{os} \equiv v_o - v_s$ delakoa behatzaileak iturriarekiko duen abiadura den. Azken adierazpenean oinarrituz, hiru kasu aipa ditzakegu:

- $v_{os} > 0$ denean, behatzailea iturritik urruntzen ari da. Kasu honetan $\nu' < \nu$ da, hots, iturrikoa baino maiztasun txikiagoa neurtuko du behatzaileak.

- $v_{os} < 0$ denean, behatzailea iturrira hurbiltzen ari da, eta neurtuko duen maiztasuna iturriak bidali duena baino handiagoa izango da.
- $v_{os} = 0$ denean, $v = v'$ izango da; hots, maiztasun berbera neurtuko da iturrian zein behatzailea dagoen puntuan.

Ohar bat egin behar dugu orain arte esan dugunari buruz. Behin eta berriro aipatu ditugu uhin mekanikoak eta hedatzen direneko ingurunea. Dena den, zenbait nabardurarekin, Doppler efektua uhin elektromagnetikoen kasuan ere gertatzen da. Hain zuzen, izarretatik datorren argiaren Doppler efektua aztertuz kalkula daitezke izarrek Lurrarekiko dituzten hurbiltze- edo urruntze-abiadurak.

Bukatzeko, Doppler efektuarekin zerikusi handia duen kasu berezi bat aztertuko dugu. Zer gertatzen da, iturria uhinak ingurune horretan duen v hedapen-abiaduraz baino handiagoa den abiaduraz higitzen ari denean? Horri dagokionez, 17.20. irudian iturria $A_1, A_2, A_3, \dots$ puntuetan zegoela sorturiko uhin-fronte esferikoek (1,2,3... hurrenez hurren) aldiune jakin batean duten kokapena adierazi da.



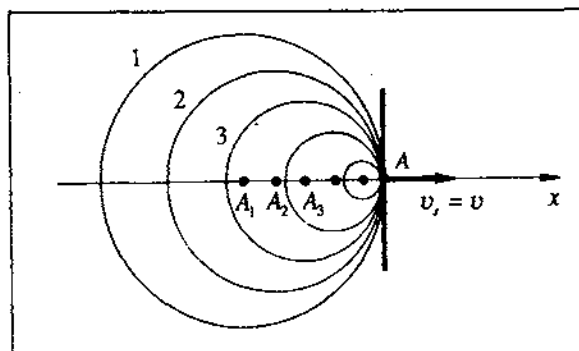
17.20. irudia. Mach-en uhinen sorrera.

Uhin-fronte guztien ukizalea den konoaren zabaladura-angelua hauex da:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_s} \quad (17-38)$$

Guztira, fronte koniko bat sortzen da. Horrelako kasuetan sortzen diren uhin konikoak *Mach-en uhinak* edo *talka-uhinak* deritze (17.20. irudia). Hauxe da, preseski, hegazkinak abiadura supertsonikoz —alegia, soinua baino bizkorrago— higitzen ari direnean gertatzen dena. Antzeko zerbait sortzen da itsasontziak ur baretan higitzen direnean. Uraren gainazalean uhinek dutena baino abiadura handiagoaz higitzean, angeluaren forma duten talka-uhinak sortzen dira.

Azalpena osatzeko, talke-uhinen egoera berezi gisa, *soinuaren horma* izenekoaren azalpen grafikoa egin da 17.21. irudian, hots, $v_s = v$ denean sortzen den egoera.



17.21. irudia. Soinuaren hormaren adierazpén grafikoa.

Irudian agerikoa denez, iturriaren aurrealdean hegazkinak sorturiko uhinak gainezarri egiten dira fasean, ondorioz perturbazio erresultantearen anplitudea nabarmenki gehituz. Adibidez, ingurunea eguratsa bada, iturriaren aurrealdean (hegazkinaren muturrean, kasu) airearen presioa askoz ere handiagoa izango da alboko puntuetan baino, eta, beraz, hegazkineko gidariak azeleratu nahi badu, presiozko 'hormaren' kontra jo behar du. Horixe da, hain zuzen ere, 'soinuaren hormaren apurketa' delako prozesua, zeina itzelezko zaratatsua izateaz gain, hegazkinaren egiturarako arriskugarria ere baden.

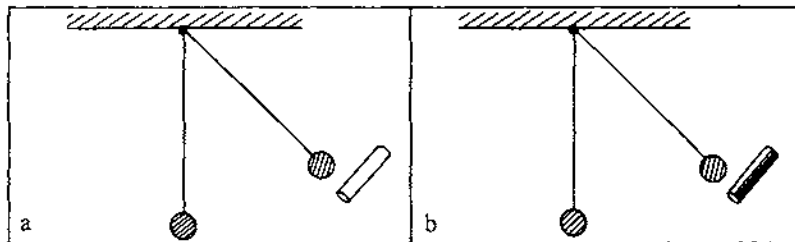
18. gaia

Elkarrekintza elektrostatikoa

Elkarrekintza elektrostatikoa aspaldidanik ezagututako fenomeno da. Historian zehar, honi buruzko lehenengo ikerketak antzinako greziarrek Kristo aurretiko seigarren mendean zenbait material larraz igurtziz egin zituztenak dira. Material horiek, igurtziak izan ondoren, propietate berezi bat hartzen zutela ikusi zuten: zenbait gorputz txiki crakar zitzaizketela, hain zuzen ere.

Dena den, ikerketa horien interpretazioan ez zen aurrerapen nabaririk egin, harik eta 1600. urtean Ingalaterrako erregearen osagilea zen William Gilbert-ek *De Magnete* izeneko lana argitaratu zuen arte, bertan beraren lehenengo esperientziak azalduz.

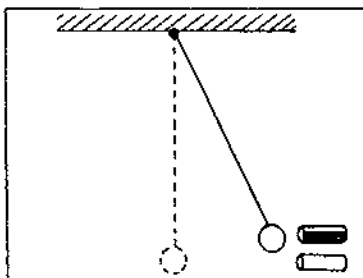
Demagun igurzketaren bidez elektrizaturiko beirazko ziri bat, kortxozko esfera baten aurrean jarri dugula. Beiraren elektrizazioa dela medio, kortxozko esfera beirari hurbilduko zaio. Esperientzia hau era berdinez elektrizaturiko anbarrezko ziri batekin errepikatzen badugu, beirarekin gertatutako erakarpen-fenomeno bera azaltzen dela ohartuko gara (18.1. irudia).



18.1. irudia. Mota desberdinetakoak izan arren, bai beirazko ziriak (a) eta bai anbarrezkoak (b) modu berean erakartzen dute kortxoa, igurtziak izan ondoren.

Esperientzia horietan oinarrituz, Gilbert-ek bi motatako materialak zudela aurkitu zuen: alde batetik, anbarak eta beirak bezalako jokabidea zeukatenak, zeintzuei 'elektrikoak' deitu zien, eta bestetik inolako indar erakarlerik eragiten ez zutenak; azken hauei 'ez-elektrikoak' izena jarri zien. Gaur egun, ongi jakina denez, material horiei 'eroaleak' eta 'dielektrikoak' deritze, hurrenez hurren.

Hurrengo ekarpen garrantzitsua ehun bat urte geroago etorri zen, Du Fay-ek material elektrikoaren artean elektrizazio desberdin bi zeudela frogatu zuenean. Horretaz jabetzeko, jar ditzagun oraingoan anbarrezko eta beirazko ziriak biak elkarren ondoan, baina ukitu gabe, eta kortxozko esferaren aurrean (18.2. irudia). Hori egitean, erakarpena handitu beharrean, moteldu edo erabat desagertu zela ikusi zuen Du Fay-ek. Mota honetako esperimenduei jarraituz, Du Fay-ek zenbait sustantzia igurtziz gero, batzuek elkar aldaratu eta beste batzuek elkar erakarri egiten zutela ikusi zuen, halaber. Hori guztia kontuan hartuz, elektrizazioa bi motatakoa zela ondorioztatu zuen: alde batetik beirak sortzen duena, zeinari 'positiboa' deritzon; eta bestetik anbarrek sorturikoa, 'negatiboa' deritzona, hain zuzen ere. Definizio hau, esan beharrik ez dago, guztiz arbitrarioa da, izenak alderantziz ere ipini ahal genituen eta.



18.2. irudia. Anbarrezko eta beirazko ziriak batera jartzean, erakarpena bakoitzak bere aldetik eragindakoa baino txikiagoa da.

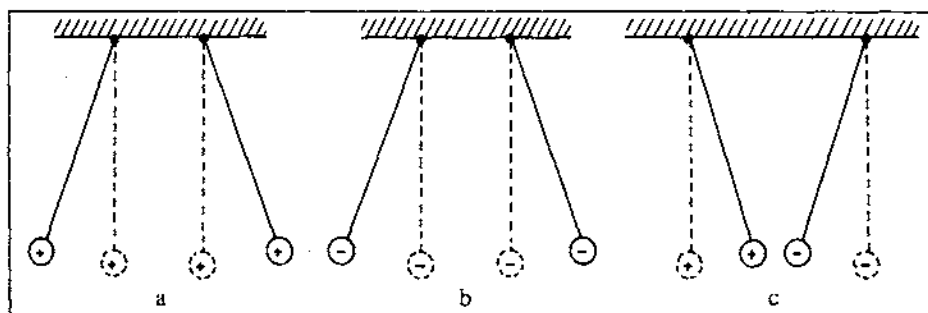
Hauxe izan da, hitz gutxitan, elektrostatikaren arloan emandako lehenengo pausoen deskribapena. Bestalde, sarrera honetako ohar gisa diogun ezen gai honetan kargak geldiuenean daudela joko dugula, alegia, abiadurarik eta azeleraziorik gabeko kargak eta beraiek sorturiko efektuak aztertuko ditugula, hain zuzen ere.

18.1. KARGA ELEKTRIKOA

Aurreko atalean ikusi dugunez, elektrizazioa bi motatan sailkatu ahal dugu: positiboa eta negatiboa. Honen ondorioa zein den jakiteko, segidan azalduko esperimentu honetan oinarrituko gara.

Har ditzagun kortxozko esfera bana duten bi pendulu, eta lehenik, beirazko ziri elektrizatuaz ukituko ditugu biak. Ukipenaren kausaz, elektrizatu egingo dira bolak eta, zer esanik ez, biek mota bereko elektrizazioa izango dute. Penduluak elkarren ondoan ipini bezain laster, boleak elkar aldaratu egiten dutela jabetuko gara (18.3.a irudia). Anbarrezko ziri elektrizatuarekin berdin egiten badugu, gauza berbera gertatzen dela ikusiko dugu (18.3.b irudia).

Zer ondorio atera dezakegu esperimentu horretatik? Aurrekoan oinarriturik, ondoko hau ondorioztatu dezakegu: «*Elektrizazio-mota berdina duten gorputzek elkar aldaratu egiten dute, eta, alderantziz, elektrizazio-mota desberdina dutenek, elkar erakarri*».



18.3. irudia. Mota bereko elektrizitatea duten gorputzek aldaratu egiten dute elkar (a eta b). Mota desberdinekoek, ordea, elkar erakartzen dute.

Elkarrekintza grabitazionalaren intentsitatea gorputz bakoitzari masa grabitazional bat egokituz arautu genuen era berean, gorputz baten elektrizazioa 'masa elektrikoa' definituz arautuko dugu. 'Masa elektriko' delako horri *karga elektrikoa* deritzo, eta q sinboloaz adierazi ohi dugu. Beraz, edozein gorputz edo partikula, oinarritzko bi propietate independentek araututa dago: masak (elkarrekintza grabitatorioa) eta kargak (elkarrekintza elektrikoa).

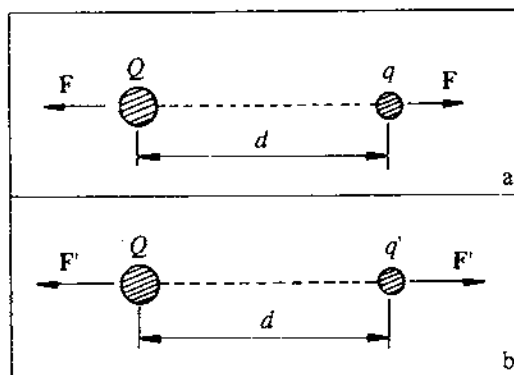
Elektrizazio positiboa azaltzen duen edozein gorputzek karga elektrikoa positiboa du, eta elektrizazio negatiboa azaltzen duen beste edozeinek karga elektriko negatiboa. Gorputz baten elektrizazio positiboaren eta negatiboaren kantitateak berdinak badira (hots, beraren karga osoa zero bada), *neutroa* dela esan ohi da. Beste era batera esanda, materia-
ren ezaugarri hau, karga elektrikoa alegia, magnitude eskalartzat jo behar dugu, praktikak halakoxea dela erakutsi digu eta.

18.1.1. Karga elektrikoaren definizio operazionala

Karga elektrikoa operazionalki definitzeko, ondoko prozedura erabiliko dugu. Batetik, q karga duen gorputz bat Q karga duen beste batetik d distantziara jarriko dugu, eta q kargaren gainean sorturiko F indarra neurtuko dugu (18.4.a irudia). Bestalde, Q kargatik d distantzia berdinerara beste q' karga bat jarriko dugu, eta honen gaineko F' indarra neurtuko dugu (18.4.b irudia). Hain zuzen, q eta q' kargen balioak F eta F' indarren proportzionalak direla kontsideratuko dugu definizioz, hau da:

$$\frac{q}{q'} = \frac{F}{F'}. \quad (18-1)$$

Beraz, q' kargari balio bat ematen badiogu, q kargaren balioa atera dezakegu, aurreko erlazioaren bidez. Kontuan hartzekoa da, definizio hori ematean hauxe suposatu dugula, alegia, elkarrekintza elektrikoak sorturiko indarra kargaren proportzionala dela. Beste hitz batzuetan esanda, aipaturiko zatidurak ez dauka Q eta d direlakoen menpekotasunik. Azken ondorio hori esperimenduetatik ateratakoa da.



18.4. irudia. Kargaren definizio operazionalerako indar-neurketak.

18.1.2. Kargaren kontserbazioaren printzipioa

Egindako esperimentuetan oinarrituz, ondoko baieztapena egin dezakegu: «*Isolaturik dagoen sistema batean karga osoa ez da inolako prozesutan aldatzen*». Hau kargaren kontserbazioaren printzipioa izenez ezaguna dugu. Karga positiboetara zein positiboa egokitzten diegu eta negatiboetara negatiboa, zeren, lehen aipatu denez, karga magnitude eskalarra baita, karga osoa karga guztien batura modura definituko dugu eta. Esperientziak frogatu duenez, karga kontserbatu egiten da esperimentu guztietan.

Bestalde, geroago ikusiko dugunez, karga ez da edozein kantitatetan agertzen, oinarritzko kargaren anizkoitzetan baizik, hots, kuantizaturik baizik; gainera, oinarritzko karga positiboa eta negatiboa neurri berekoak dira.

18.2. COULOMB-EN LEGEA

Elektrostatikan, partikula bik elkarri egiten dioten indarra Coulomb-en legearen bidez adierazten da. Izen hau Charles A. de Coulomb-en (1736-1806) oroimenez jarri zen, zeinak anitz ikerketa eta neurketa egin ondoren, lege hau proposatu zuen: «*Bi partikula kargatuen arteko elkarrekintza elektrostatikoa partikula horien karga-kantitateen zuzenki proportzionala da eta distantziaren karratuaren alderantziz proportzionala, elkarrekintzaren norabidea karga biek osatzen duten zuzenarena izanik*».

Izatez, kargaren definizio operazionala ematean egindako hipotesiaz definitu dugu halaber lege hau, kargaren proportzionaltasunari dagokionez. Ez, ordea, distantziari dagokionez.

Analitikoki, honelaxe adierazten da lege hau:

$$\mathbf{F}' = K_e \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (18-2)$$

non	q, q'	karga-kantitateak,
	r	partikula bien arteko distantzia,
	$\mathbf{u}_r$	karga biek osatzen duten zuzenaren norabideko bektore unitarioa,
	K_e	konstante berezia (elkarrekintza elektrostatikoari dagokiona)

diren, 18.5. irudian ikus daitekeen modura.



18.5. irudia. Bi partikula kargatuen arteko indarra.

Lege honen formulazioari buruz, zenbait ohar egin behar ditugu:

- a) Izatez, F' indarra q kargak q' kargaren gainean egiten duena da. Eta alderantziz, F indarra q' kargak q kargaren gainean egiten duena.

F' indarra analitikoki adieraztean, q kargatik q' kargarako noranzkoa duen bektore unitarioa hartu dugu. Orduan, formulako q eta q' kargak idaztean, bakoitza dagokion zeinuarekin idatzi dugu. Biak zeinu berekoak direnean, biderkadura positiboa da eta F' bektoreak u_r bektorearen noranzko berbera dauka, hots, indar aldaratzailea da. Ostera, zeinu desberdinekoak badira, biderkadura negatiboa da eta F' bektoreak u_r bektorearen aurkako noranzkoa dauka, hots, indar erakarlea da. Zeinuen irizpide hori kontuan hartuta, argi betetzen da akzio-erreakzioaren printzipioa, hau da, $F = -F'$.

- b) Coulomb-en legearen balioa, elektrostatikaren kokatzen da; hau da, kargak geldirik egon behar dute behatzailearen erreferentzia-sistemarekiko, edo lehenengo hurbilketatik, higitzekotan, oso abiadura txikiaz higitu beharko lukete, argiarenarekin alderaturik.

- c) Coulomb-en legea erabat zuzena izan dadin, kargak puntualak izan behar dute.

Begi bistakoa denez, lege hau elkarrekintza grabitazionalaren gaian aurkitu genuenaren antzekoa da. Han, ondoko hau aurkitu genuen:

$$F' = -\gamma \frac{mm'}{r^2} u_r. \quad (18-3)$$

Gehiago aztertuko ez badugu ere, guztiz argi ageri zaigu bi lege horien arteko paralelismoa.

Coulomb-en legearen adierazpenean, K_e eta q determinatzeke geratu zaizkigu oraingoz. Horretaz baliaturik, bietariko bati balio bat ematen badiogu, bestearen balioa zuzen lor dezakegu; alegia, bata finkatuta bestea erabat determinaturik geratuko da. Azken batez, unitate-modu bat definitzera garamatza horrek.

Arrazoi historikoen arabera, K_e konstantearen $10^{-7}c^2$ balioa eman zaio, non c delakoa argiak hutsean duen abiadura den. Hori dela eta, hau ere idatz dezakegu:

$$K_e = 10^{-7}c^2 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}, \quad (18-4)$$

non C delakoa karga-unitatea adierazteko darabilgun ikurra den. K_e -ren dimentsioak hauexek dira:

$$[K_e] = \text{ML}^3\text{T}^{-2}\text{Q}^{-2}. \quad (18-5)$$

Lehentxoago aipatu dugunez, behin K_e finkatuta egonik, q ere finkatuta geratuko da. Honetaz, q delakoaren unitatearen balioa definitzeko balia gaitezke; unitate hori *coulomb* izenaz ezagutzen da, eta C letraren bidez adierazten. Hauxe da, hain zuzen, coulomb unitatearen definizioa: «*coulomb karga-unitatea, hutsen beste karga berdin batetik metro batera jarrita, elkarren artean $8,9874 \cdot 10^9$ N-eko aldarapen-indarra sortzen duena da*».

Arrazoi praktikoak direla kausa, formuletan komenigarriagoa izaten da K_e era honetan adieraztea:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (18-6)$$

non ϵ_0 delakoa *hutsaren permitibitatea* deritzon magnitudea den. K_e -ri dagokion balioa kontuan hartuta, hauxe izango da ϵ_0 -ren balioa:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K_e} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^2 \text{ C}^{-2}, \quad (18-7)$$

eta beraren dimentsioak eta unitateak (nazioarteko SI sisteman):

$$[\epsilon_0] = \text{M}^{-1} \text{L}^{-3} \text{T}^2 \text{Q}^2 \quad (\text{hots, } \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^2 \text{C}^2 \text{ unitateak}). \quad (18-8)$$

Azkenean, Coulomb-en legearen itxura honelaxeakoa da:

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (18-9)$$

Ikus dezagun orain, q karga baten gainean karga-multzo batek ($q_1, q_2, \dots, q_n$ kargek osaturiko multzoak, esaterako) eragiten duen indarra zein den. Gaiñezarmenaren printzipioa erabiliz, hauxe ipin dezakegu:

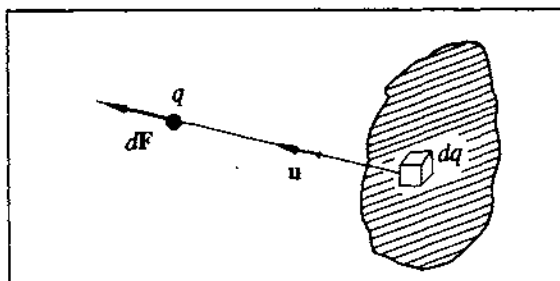
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i, \quad (18-10)$$

non r_i , q eta q_i kargen arteko distantzia den, eta $\mathbf{u}_i$ delakoa q eta q_i kargek eraturiko zuzenaren bektore unitarioa, q_i -tik q -ra orientaturik egonik, hain zuzen ere. Izatez, gainezarmenaren printzipioa erabiltzean ondoko hipotesi hau egiten dugu, alegia, q_i eta q kargen arteko elkarrekintzak ez duela ezelako aldaketarik pairatzen, inguruetan beste edozein karga egoteagatik.

Orain arte, karga zenbait puntutan kokatuta zegoela suposatu dugu; baina, horren ordez espazioaren eskualde batean era jarraituan hedaturik balego, dq karga txikiek sorturiko indarren integrazio bektoriala egin beharko genuke (18.6. irudia). Beraz, honelaxe idatziko dugu:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q dq}{r^2} \mathbf{u} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}, \quad (18-11)$$

non $\mathbf{u}$ bektorea dq eta q kargek eraturiko norabide aldakorrekiko zuzenaren bektore unitarioa den, lehen esan den bezalako orientazioaz.



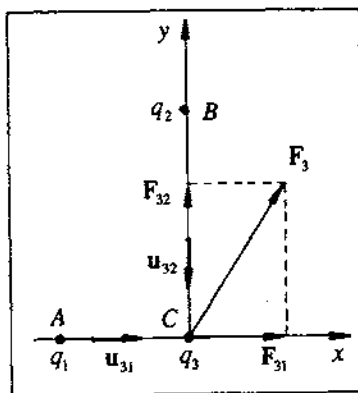
18.6. irudia. Era jarraituan banaturiko kargak eginiko indarra kalkulatzeko elementu diferentziala.

18.2.1. Adibidea

Demagun, q_1 , q_2 eta q_3 kargak ditugula, 18.7. irudian ageri den moduan jarririk eta ondoko balioak dituztela:

$$q_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}, \quad q_2 = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}, \quad q_3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ C},$$

$$\overline{AC} = 1,2 \text{ m} \quad \text{eta} \quad \overline{BC} = 0,50 \text{ m} \quad \text{izanik.}$$



18.7. irudia.

Lehenik, q_3 karga jasaten ari den indar erresultantea lortuko dugu. Irudian ageri denez,

$$\mathbf{F}_{31} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{31}^2} \mathbf{u}_{31} = 1,9 \cdot 10^3 \mathbf{i} \text{ N}, \quad \mathbf{F}_{32} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{32}^2} \mathbf{u}_{32} = 3,6 \cdot 10^3 \mathbf{j} \text{ N},$$

da, non $\mathbf{F}_{ij}$ sinboloen bidez j partikulak i partikularen gainean eragiten duen indarra adierazi dugun. Beraz,

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{31} = 1,9 \cdot 10^3 \mathbf{i} + 3,6 \cdot 10^3 \mathbf{j},$$

eta horren modulua hauxe da:

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2} = 4,06 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

18.3. EREMU ELEKTRIKOA

Coulomb-en legearen arabera, karga baten eragina espazio osora hedatzen da. Espazioko edozein puntutan beste karga bat jarritz gero, azken honek indar bat pairatuko du. Beraz, espazioan eremu bektorial bat definiturik dugula esan dezakegu. Hori dela eta, eremu elektrikoak era honetan defini genezake: puntu bateko eremu elektrikoak puntu horretan legokeen karga positiboaren unitateak jasango lukeen indar elektrikoak da. Hortaz, karga-unitateak jasaten duen indarra (hots, bektore bat) denez, eremu elektrikoak magnitude bektoriala da, eta $\mathbf{E}$ letraren bidez adieraziko dugu.

Eremu elektrikoak eremu bektoriala da, hots, espazioko puntu bakoitzari bektore bat dagokio. Analitikoki, eremu elektrikoak honelaxe adieraz dezakegu:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (18-12)$$

Adierazpen horretan, $\mathbf{F}$ indarra q "lekuko karga" edo froga-karga duen partikulari eragiten dioten indar elektriko guztien erresultantea da.

Nazioarteko SI unitate-sisteman, eremu elektrikoak NC^{-1} unitatetan neurtzen da, baita VM^{-1} -tan ere, gauza bera dena, noski (ikus 18.4.3. atala), beraren laborategiko balio normalak $10^4 \div 10^6 \text{ VM}^{-1}$ bitartekoak izanik. (18-12) adierazpena sakonki aztertuko ez badugu ere, begi bistako ondorio hau ateraz dezakegu. alegia: q karga positiboa denean $\mathbf{E}$ eta $\mathbf{F}$ direlakoek norabide eta noranzko berberak dituzte; osteraz, q negatiboa deneko kasuan, norabide bera baina aurkakoa noranzkoak dituzte.

Aurreko atalean ikusitako Coulomb-en legean oinarritzen garelarik, q karga puntual batek sorturiko $\mathbf{E}$ eremu elektrostatikoa honelaxe idatz dezakegu:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad (18-13)$$

non $\mathbf{u}_r$ bektore unitarioak norabide erradiala duen, zeina q dagoen puntutik $\mathbf{E}$ aztertzen ari garen punturantz orientatuta dagoen.

18.3.1. Zenbait kargak sorturiko eremu elektrikoak

Lehenago ikusitako gainezarmenaren printzipioan oinarriturik, n kargak osaturiko sistema bat duguncan, hauxe izango da karga-sistema horrek sortzen duen eremu elektrikoak (erresultantea):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i. \quad (18-14)$$

Fisikaren ikuspuntutik, horren esangura, hauxe da: puntu batean karga batzuek sorrarazten dituzten eremu elektrikoak biltzen direnean, guztirako emaitza eremu bakarraren baliokidetzat kontsidera daiteke, eta eta eremu erresultantearen intentsitatea (18-14) adierazpenaren bidez emanda datorkigu. Bestela esanda, azken hau eremu elektrostatikoak gainezarmenaren printzipioa betetzen duela suposatzen ari gara. Bestalde, kargak era jarraituan banaturik badaude, ondoko integrazioa egin beharko dugu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (18-15)$$

non, A integrazio-barrutia kargak dauden espazioaldera hedaturik dagoen.

Dakusagun, orain, eremu elektrikoari buruzko xehetasun bat. Eremu elektrikoak zehazkiago definitu nahi izango bagenu, honelaxe egin beharko genuke:

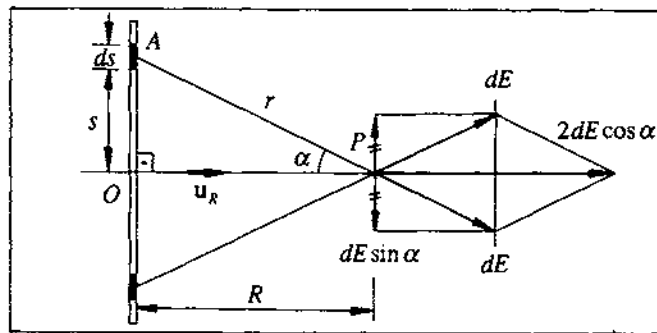
$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta q} \quad \text{edo} \quad \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{F}}{dq}, \quad (18-16)$$

hau da, froga-kargaren balioa zerorantz doanean indarraren eta kargaren arteko zatidurak hartzen duen balioa da eremua, alegia, karga-unitateko indarra. Xehetasun hori beharrezkoa da, zeren zenbait kasutan froga-kargaren presentzia hutsa, eremu elektrikoak sortzen duen karga-banaketa aldatzeko aski baita, eta beraz, eremu elektrikoaren balioa ez da berbera froga-karga sartu aurretik edo sartu ondoren, aipaturiko kargak, halaber, eremu elektros-tatikoa bat sortzen baitu.

Dena den, (18-14) eta (18-15) adierazpenek garrantzi handia dute, eremua kalkulatzeko prozedura egokia ematen digute eta.

18.3.2. Adibidea

Lor bedi luzera unitateko λ karga-dentsitatea duen hari batek sortzen duen eremu elektrikoak R distantzia duen intentsitatea.



18.8. irudia. O puntuarekiko simetrikoki diren bi elementu diferentzialek P puntuan sorturiko eremua.

Haria ds motako zatietan bana dezakegu, eta ds zati bakoitzari dagokion karga hauex da:

$$dq = \lambda ds. \quad (18-17)$$

Dakigunez, elementu horrek P puntuan sorturiko eremuaren modulua

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (18-18)$$

izango da, AP norabidean orientaturik.

Dena den, problema nabariro erraztuko zaigu, bere barnean dagoen simetrias jabetzen bagara. Hain zuzen, $dE \sin \alpha$ osagaia, beste ds batek duen $-dE \sin \alpha$ simetrikoarekin anulatu egingo da, eta horrela, guztira, 18.8. irudiko bi elementu diferentzial simetrikoen kasuan $2dE \cos \alpha$ soilik geratuko da OP norabidean. Hortaz, hari kargatu osoak sorturiko eremu elektrikoa (OP norabidean) hauex izango da:

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2dE \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2ds}{r^2} \cos \alpha. \quad (18-19)$$

Hemengo r eta α aldagaiak honelaxe daude erlazionaturik elkarrekin:

$$r = \frac{R}{\cos \alpha}. \quad (18-20)$$

Bestalde, irudian ikus daitekeenez, $s = R \tan \alpha$ da. Beraz,

$$ds = \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (18-21)$$

Azkenean, hauex izango da eremu elektrikoaren balioa:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (18-22)$$

Eta era bektorialcan idatzita:

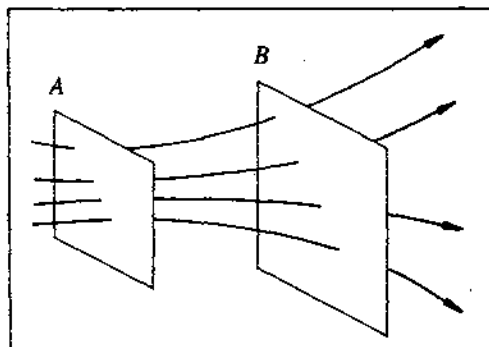
$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \mathbf{u}_R. \quad (18-23)$$

Adierazpen honetan, $\mathbf{u}_R$ bektore unitarioak OP zuzenaren norabidea du, eta haritik $\mathbf{E}$ aztertzen deneko punturantz orientaturik dago.

18.3.3. Eremu-lerroak

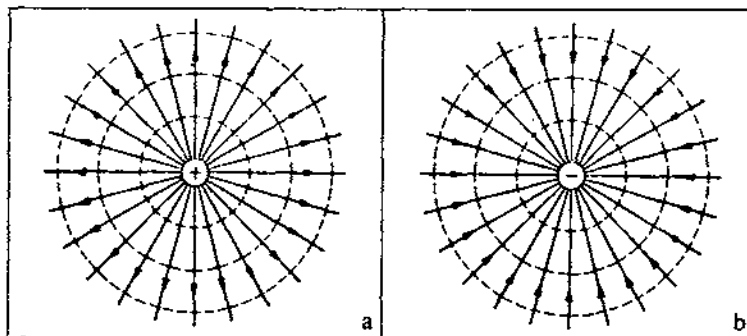
Eremu elektrikoa nolabaiteko era grafikoan adierazteko, *eremu-lerroak* erabili ohi dira. Eremu-lerroak karga positiboetan sortu edo hasten dira, eta karga negatiboetan bukatzen dira. Lerro jarraituak dira, beraien 'iturrietan' (karga positiboak) eta 'hobietan' (karga negatiboak) izan ezik. Eremu-lerroak karga positiboetan hasi eta negatiboetan amaitzen dira, eta karga puntualak eremu-lerroen puntu singularrak dira.

Karga batean sortzen edo amaitzen diren lerroen kopurua, karga horren balioaren proportzionala da. Lerro horien norabidea eremu elektrikoak puntu bakoitzean duen berbera da, eta lerro-dentsitatea eremu elektrikoaren intentsitatearen araberakoa da. Lerro-dentsitatearen bidez, eremu-lerroen perpendikularra den gainazal bat zeharkatzen duten gainazal-unitateko lerroen kopurua adierazi nahi dugu (18.9. irudia).

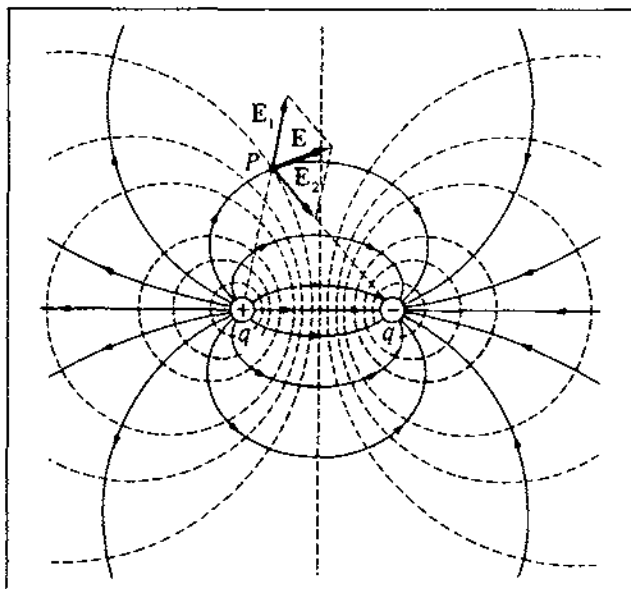


18.9. irudia. Eremu-lerroak A eta B gainazalak zeharkatzen. Lerro-dentsitatea (beraz, eremuaren intentsitatea) handiagoa da A gainazaleko puntuetan B gainazalekoetan baino.

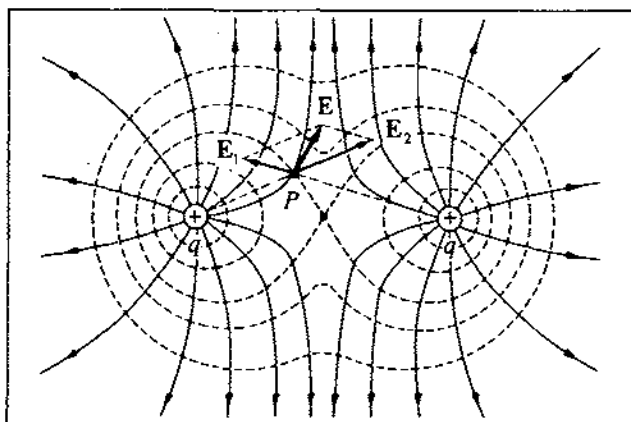
Eremu-lerroak *indar-lerroak* izenez ere badira ezagunak. Bestalde, eremu-lerroekin batera gainazal ekipotentzialak ere irudikatu ohi dira. Azken hauek puntu guztietan eremu-lerroen perpendikularrak dira, eta potentzial bereko puntuak biltzen dituzte. Esandakoaren azalpen eta justifikazioa 18.4.3. puntuan emango da. Halaber, A eranskinean sakonago aztertuko da arazoa. Nolanahi den, hurrengo 18.10., 18.11. eta 18.12. irudietan zenbait adibideri dagozkien eremu-lerroak (irudietako lerro jarraituak) eta gainazal ekipotentzialak (irudietako lerro ez-jarraituak) adierazi dira.



18.10. irudia. Karga puntual positibo (a) eta karga negatibo (b) baten inguruko eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.



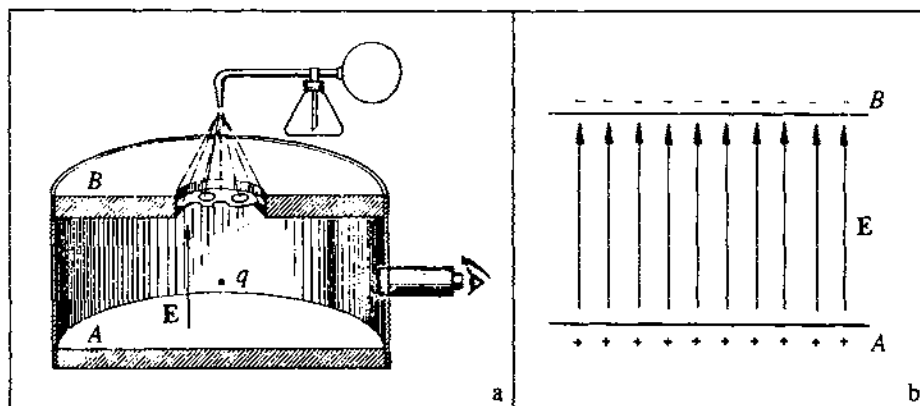
18.11. irudia. $+q$ eta $-q$ kargak sorturiko eremu elektrikoaren eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.



18.12. irudia. Bi karga berdinek sorturiko eremu elektrikoaren eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.

18.3.4. Kargaren kuantizazioa

Behin eremu elektrikoa zer den jakin ondoren, atzeko puntu batera itzul gaitezke, eta, kargaren kontserbazioaren aipamenari jarraipena emanez, kargaren kuantizazioa adierazten duen esperimentu bat aztertuko dugu. Esperimentu honen bidez, esan bezala, karga kuantizatuta dagoela ikusiko dugu, alegia, karga ez dela edozein kantitatetan agertzen, oinarriko kargaren anizkoitzetan baizik. Hori frogatu nahian, Millikan-ek egindako esperimentuan oinarrituko gara, eta beraz, segidan esperimentu hori zertan datzan ikusiko dugu.



18.13. irudia. a) Millikan-en esperimentua. b) A eta B plakaren arteko eremu elektrikoa.

Millikan-ek plaka bi, A eta B, paraleloki jarri zituen, eta goiko plakan (B delakoan hain zuzen) eginiko zulo batzuetatik, olio lainoztatua bota zuen (18.13.a irudia). Olio-tanta txikiak zuloetatik pasatzean, zuloen hormak igurtziz, kargatu egiten dira elektrikoki. Jaisten ari diren bitartean, olio-tanta bakoitzaren gainean eragiten ari diren indarrak hauexek dira:

- mg grabitatearena,
- $-6\pi\mu r v$ kutxa barruan dagoen gasarekiko marruskadura (hori Stokes-en formula da (ikus 5.6. atala)),
- $-m_p g$ goranzko bultzadaren indarra,

non μ biskositatea, r tantaren erradioa, v abiadura eta m_p fluidoaren masa desplazatua diren (ikus 13.4. atala).

Orain arte ez dugu E eremu elektrikoa kontuan hartu, oraindik ez baita olio-tanta sisteman sartu. Hau horrela izanik, tantaren erorketa-higidura adierazten digun ekuazioa honako hau da:

$$ma = mg - m_p g - 6\pi\mu r v. \quad (18-24)$$

Oso denbora-tarte laburrean olio-tantan gorantz eta beherantz eragiten ari diren indarrak orekatu egiten dira. Azelerazioa zero denean, v abiadurak hartzen duen balio konstanteari 'muga-abiadura' deritzo (ikus 5.6. atala), eta v_1 notazioaz adieraziko dugu; beraren moduluak hau da:

$$v_1 = \frac{(m - m_p)}{6\pi\mu r} g. \quad (18-25)$$

Behin hori ikusi ondoren, hurrengo pauso modura E eremu elektrikoa sartuko dugu, partikularen gaineko beste indar bat sorrazirik. Honen ondorioz, eremu elektrikoaren kausazko indarra ere kontuan hartzean, higidura-ekuazioa hau da:

$$ma = qE + mg - m_p g - 6\pi\mu r v. \quad (18-26)$$

Eremurik gabeko kasuan gertatu den bezalaxe, oso denbora laburrean $\mathbf{a} = 0$ egingo da; oraingo muga-abiadurari v_2 deituko diogu. Bektorialki:

$$0 = qE + mg - m_p g - 6\pi\mu r v_2, \quad (18-27)$$

eta tantak norabide bertikalean erortzen ari direla kontsideratuz, hemendik v_2 abiaduraren modulua aska dezakegu:

$$v_2 = \frac{qE + (m - m_p)g}{6\pi\mu r}. \quad (18-28)$$

Beraz, kargaren balioa hauxe izango da:

$$q = \frac{(m_p - m)g + 6\pi\mu r v_2}{E}, \quad (18-29)$$

eta (18-25) delakoa (18-29) adierazpenean sartuz, ondoko adierazpen hau lortuko dugu:

$$q = \frac{6\pi\mu r(v_2 - v_1)}{E}. \quad (18-30)$$

Aurrera segitu baino lehen, zenbait iruzkin egitea behar-beharrezkoa dugu:

- Higidura-ekuazioan ageri diren bektore guztiek norabide berbera dute, eta hauxe da hain zuzen ere, ekuazio hori aztertzerakoan magnitude eskalarrik balira bezala kontsideratzearen arrazoia.
- Stokes-en gaia, marruskadura-indarra denez gero, beti higiduraren aurkakoa da, eta horregatik abiaduraren aurkako noranzkoa du.

Teorikoki, (18-30) adierazpenetik q aurki dezakegu, v_1 , v_2 , r , μ eta E direlakoan funtzioan. Hala ere, praktikan q -ren aldaketak v_2 -ren aldaketen funtzioan neurtzea askoz errazagoa izaten da (kontuan izan, v_1 berbera dela beti). Hori dela eta, ondoko erlazio hau lor dezakegu:

$$\Delta q = \frac{6\pi\mu r}{E} \Delta v_2. \quad (18-31)$$

Millikan-en esperimentu honetan ikusi zenez, Δq kalkulatzearan ateratako balioak, beti suertatzen ziren karga elemental baten anizkoitzak. Karga elemental horri e deitu zitzaion, eta beraren balioa hauxe da nazioarteko SI unitate-sisteman:

$$e = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (18-32)$$

Orain arte, inolako esperimentuk ez du hori ukatu; beraz, funtsezko legetzat onar dezakegu, hau da: «*naturan agertzen diren karga guztiak e oinarritzko kargaren anizkoitzak dira; hots, karga elektrikoa kuantizaturik dago*». e delakoari oinarritzko karga deritzogu, eta beti m masa bati dagokio, oinarritzko partikula modura ezaguna duguna osatuz: elektroia.

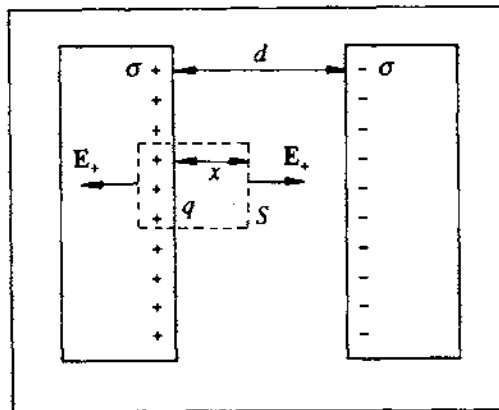
Sakonkiago aztertuko ez badugu ere, aipatu beharra daukagu, gaur egungo teoriak azken parragrafoan aipatutako ideia honekin batera ez datozela. Gaur egun unibertsorean oinarritzko osagaiak beste batzuk direla dakigu, alegia, leptoiak, quarkak eta bitarteko

bosoiak, quark batzuen karga $2e/3$, eta beste batzuen $-e/3$ izanik (baina ez dira era isolatuan aurkitu). Dena den, testu honetan e balioa hartuko dugu oinarritzko kargatzat.

18.3.5. Partikula kargatuaren higidura, eremu elektriko uniformeak

Lehenik, eremu elektriko uniformea zein den argituko dugu. Eremu elektriko uniformeak, definizioz, puntu guztietan intentsitate eta norabide berberak ditu, beraren indar-lerroak paraleloak dira, eta distantzia berdinetara daude.

Atal honetako gaian murgildu baino lehen, kalkula dezagun bi xafra kargatu eta paraleloak sorraraziriko eremu elektrikoa zein den. Honetarako, eranskinean aipatzen den Gauss-en teorema baliatuko gara, eta ertzetako arazoak arbuia garriak direla joko dugu. Beste aldetik ere, demagun azalera-unitateko karga-dentsitatea σ dela (18.14. irudia).



18.14. irudia. Bi xafra kargatu paraleloak sorturiko eremuaren kalkulua.

18.4. irudiko S albo-gainazaleko prisma Gauss-en teorema erabiliz (karga positibodun xafra kontsideratuko dugu soilik lehenengo kalkulu honetan), eta simetria zko kontsiderazioak erabiliz, hauxe idatz dezakegu:

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E}_+ \cdot d\mathbf{S} = 2E_+S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}. \quad (18-33)$$

Beraz, hauxe ondoriozta dezakegu:

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (18-34)$$

eta balio hori berbera da x edozein izanik. Bestalde, karga negatibodun xafra aztertzean, bi xafren arteko puntuetan norabide eta noranzko bereko eremua lortuko dugu,

$$E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (18-35)$$

eta, guztira, xafren arteko eremu osoa honako hau izango da:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = k\sigma, \quad (18-36)$$

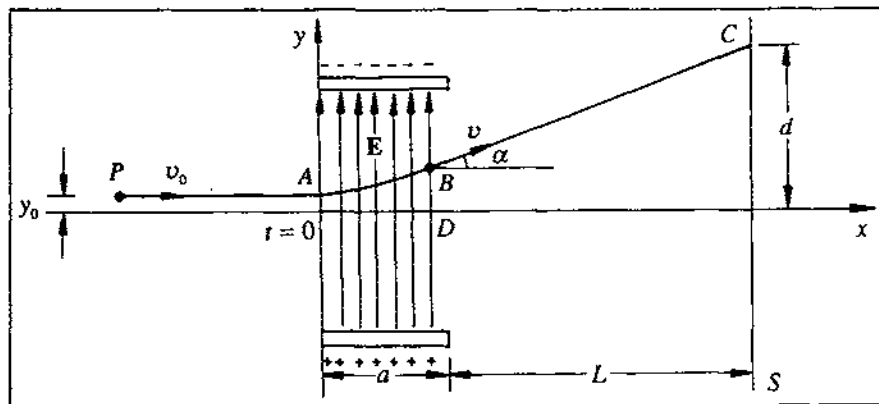
alegia, E eremu elektriko uniformea da xafen artean, eta beraren norabidea xafen perpendikularra da.

Azter dezagun, orain, nolakoa den partikula kargatu batek eremu horretan duen higidura. Newton-en $F = ma$ legetik abiatuz, $ma = qE$ dugu, eta hemendik, partikula kargatuak

$$a = \frac{q}{m} E \quad (18-37)$$

azelerazio konstantea izango du xafen arteko eremu elektriko uniformearen eraginpean.

Ikus dezagun, orain, partikula kargatua eremu elektriko uniforme batetik pasatzean nola higitzen den. Demagun 18.15. irudiko kasua. Lehenik, partikula v_0 abiaduraz jaurtiki da, eremu elektrikorik ez dagoen espazioalde batean. Beraz, A puntura iritsi arte ibilbide zuzen eta uniformea izango du. Gero eremu uniformea dagoen espazioaldera sartuko da (xafen artean) eta han a azelerazioa jasango du. Azelerazioa konstantea denez, AB ibilbidea parabolikoa izango dela esan dezakegu.



18.15. irudia. Partikula kargatuaren ibilbidea.

Esan dugunez, P partikula eremura sartu baino lehen, E delakoaren perpendikularra den norabide batean v_0 abiaduraz higitu da, eta eremutik irtetean v abiadura izan du. Beraz, nabaria denez, E eremuak aldatu egin du P partikularen higidura. Kalkula dezagun ibilbidearen ekuazioa.

Erreferentziatzko ardatzak irudian ageri diren modura kontsideratzen baditugu, eremuan zehar higitzen ari den bitartean, partikularen koordenatuak hauexek izango dira:

$$x = v_0 t, \quad (18-38)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} E \right) t^2, \quad (y_0 \text{ arbuiauturik}). \quad (18-39)$$

zeren, lehen ikusi dugunaren arabera, eremu elektriko uniforme baterako $a_y = qE/m$ baita. Aurreko bi ekuazioetatik t ezabatuz, hauxe lor dezakegu:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) \left(\frac{E}{v_0^2} \right) x^2, \quad (18-40)$$

Demagun Q karga puntu ezagun batean geldi dagoela (18.16. irudia). A puntutik B -ra Γ kurban zehar q karga eramatean, bigarren karga honen gaineko indar elektrikoak egindako lana hau da:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B F \cos \theta |d\mathbf{l}|, \quad (18-43)$$

non integral kurbilineo hori Γ kurban barrena kalkulatu den, eta orduan, 18.16.b irudian ikus daitekeenez, $\cos \theta |d\mathbf{l}| = dr$ da, hots, karga bien arteko distantziaren aldakuntza infinitesimala. F indarra adierazteko Coulomb-en legea erabiltzen baldin badugu, ondoko hau lortuko dugu:

$$W_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right), \quad (18-44)$$

eta ondorioz, lanak karga eramateko aukeratu den ibilbidearen menpekotasunik ez daukala esan dezakegu. Beraz, eremua kontserbakorra da, alegia,

$$W_{AB} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = f(A, B) \rightarrow \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = g(A) - g(B), \quad (18-45)$$

eta, kasu berezi gisa, B puntua A bihurtzekotan, hots, lana ibilbide itxian barrena kalkulatzear, garrantzi handiko adierazpen hau lor dezakegu:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (18-46)$$

Kalkulu horiek laburki egin baditugu ere, zehaztasun gehiagorako, liburu honen amaierako eranskinean ikus daitezke. Halaber, ohar gaitzen, hemen eta eremu grabitazionala ikusi genuenean egindako kalkuluak oso antzekoak direla; desberdintasuna konstanteetan datza soil-soilik.

Frogatu berri dugunez, karga batek sorturiko eremua kontserbakorra da, eta gainezar-menaren printzipioaren arabera, berdin gertatuko da edozein karga-banaketak sorturiko eremurako.

Eremua kontserbakorra denez, defini dezagun eremu bektorial horri dagokion eremu eskalarra, hau da, eremu horren eraginpean q kargak duen energia potentziala:

$$W_{AB} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{p,A} - E_{p,B} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (18-47)$$

Beraz, energia potentziala era honetan idatz dezakegu:

$$E_p(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + K. \quad (18-48)$$

Askotan, infinituko puntuen energia potentziala zerotzat hartzen da, hau da, $K = 0$. Hori egiten dugunean, E_p -ren adierazpena honelaxe geratuko zaigu:

$$E_p(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (18-49)$$

Dena den, beste kasu batzuetan ez da horrelaxe egiten, geroago ikusiko dugunez. Unitateei dagokienez, jakina denez, E_p jouletan neurtzen da MKSC sisteman.

18.4.1. Bi punturen arteko potentzial-diferentzia

Behin goikoa ikusi ondoren, perturbazio elektrostatikoa ere magnitude eskalar baten bidez deskriba dezakegu. Hori egiteko asmoz, potentzial elektrikoa eta potentzial-diferentzia definituko ditugu. Hain zuzen, karga bat puntu batetik bestera eramateko behar den karga-unitateko energiari, *potentzial-diferentzia* deritzo. Definizio honen arabera, A eta B puntuen arteko potentzial-diferentzia era honetan azal daiteke:

$$V_{AB} = \frac{E_{p,A} - E_{p,B}}{q}, \quad (18-50)$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right), \quad (18-51)$$

18.4.2. Potentzial elektrikoa

Puntu bateko V potentzial elektrikoa, definizioz, karga bat infinitutik aipaturiko puntu horretara eramateko behar den karga-unitateko energia da. Beraz,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (18-52)$$

Definizio honetan haxe onartu dugu implizituki, alegia, karga batek sortutako eremu elektrikoaren kasuan, kargatik oso urrun dauden puntuei (infinituan daudenei, hizkera matematikoaz) dagokien potentzial elektrikoa nulua dela, lehen azaldu dugun bezala. Aukera hori teoria mailako ariketa gehienetan egokia gertatzen bada ere, guztietan ez da horrela gertatzen, eta zenbait kasutan aldatu beharra dago, haren ordez beste suposamendu bat eginez, ondorio bitxi xamarrik, absurdorik ez esatearren, ager ez dadin. Arlo praktikokoan planteatzen diren problemetan, bestalde, potentzialaren balio nulua infinituko puntuei egokitu barik, lurrari ('masa'-ri hizkera teknikoaz) egokitu ohi zaio.

Orain arte egin dugun guztia, karga baterako izan da; dena den, ohi denez, karga asko daudeneko kasuan, gainezarmenaren printzipioaren laguntzaz, hori guztia orokortu ahal dugu. Karga-banaketa diskretua dugunean,

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (18-53)$$

eta karga-banaketa jarraitua dugunean,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{r}, \quad (18-54)$$

non, A integrazio-barrutia karga-banaketa gordetzen duen espazioaldea den.

18.4.3. *V-ren eta E-ren arteko erlazioa*

V eremu eskalarra eta E eremu bektoriala elkarrekin erlazionaturik daude (ikus 6.7 atala eta A eranskina). Ikusi genuenez, indar kontserbakorren kasuan honako erlazioa betetzen da:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_p. \quad (18-55)$$

Erlazio hau q' kargaz zatitzean, haxe dugu:

$$\frac{\mathbf{F}}{q'} = -\text{grad } \frac{E_p}{q'}. \quad (18-56)$$

Baina hau, begi bistan dagoenez, ondoko adierazpena bilakatzen da zuzen-zuzenki:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V. \quad (18-57)$$

Gradiente delakoari dagozkion propietateak eta gainerako zehaztasunak jadanik aztertuak izan direnez, ez ditugu berriro ere hemen errepikatuko. Dena dela, gradiente bektorearen (hots, eremuaren) eta gainazal ekipotentzialen arteko elkarren perpendikularitasunaz oroitzea ez da sobera egongo, 18.3.2. atalean ezelako justifikazio barik aipatu genuen eta. Bide batez, geroxeago erabili beharko denez, gogora dezagun ezen edozein norabidetako eremu kontserbakorren proiektzioa potentzialaren norabide-deribatuaren berdina dela, zeinuak aldaturik; hau da, labur esanda:

$$E_s = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta l}, \quad (18-58)$$

non s azpindizeak edozein norabide adierazten duen, ΔV eta Δl norabide horretan harturik. Horrela, V potentziala eremuaren funtzioan jar dezakegu (konstantea alde batera utzita),

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (18-59)$$

eta koordenatu cartesiarretan,

$$V = -\left[\int E_x dx + \int E_y dy + \int E_z dz \right]. \quad (18-60)$$

Kasu berezi batean, E eremua x ardatzaren norabidean badago eta uniformea bada (hots, $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, non E konstantea den), haxe dugu:

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int E dx, \quad (18-61)$$

eta E konstantea denez,

$$V = -Ex + K. \quad (18-62)$$

Lehen ohartarazi den legez (ikus 18.4.2. atala), zenbait ariketa teorikotan ez da egokia gertatzen infinituko potentziala nulua dela aukeratzea, hemengo kasu honetan argi eta garbi ikus daitekeenez. Ariketa honi hoberen moldatzen zaion aukera bestelakoa da, alegia, $x = 0$ denean $V = 0$ egitea, hain zuzen ere. Hori onartuz gero,

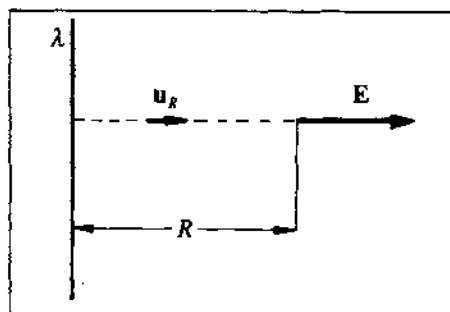
$$K = 0 \rightarrow V = -Ex. \quad (18-63)$$

18.4.4. Adibideak

Jarraian, pare bat adibide aztertuko ditugu aurreko kontzeptuak erabiltzeko.

i) Kalkula bedi hari uniformeki kargatuak R distantziara sortuko duen potentzial elektrikoa.

Eremu elektrikoaren 18.3.2. atalean, hari infinitu batek sorturiko eremu elektrikoa kalkulatu dugu. Orain, adierazpen hura abiapuntutzat hartuz, hari uniformeki kargatuak sortuko duen potentzial elektrikoa lortuko dugu (18.17. irudia).



18.17. irudia. Hari kargatuak sorturiko eremu elektrikoa.

Lehen ikusitakoaren arabera (18-23),

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} u_R \quad (18-64)$$

da, eta V lortzeko aurreko atalean ikusitako (18-59) erlazioaz baliatuko gara, hots,

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_R dR \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dR}{R} = -dV. \quad (18-65)$$

Ekuazio hori integratuz, V potentziala lor dezakegu:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + K. \quad (18-66)$$

Eremu elektriko uniformearen kasuan jazo zaigun antzera, hemengo honetan ere erabat desagokia ematen du $R \rightarrow \infty$ doanean $V = 0$ aukeratzeak. Aukera hori bazterturik, hurrengo hau onartuko dugu, $R = 1$ denean $V = 0$ egitea, alegia,

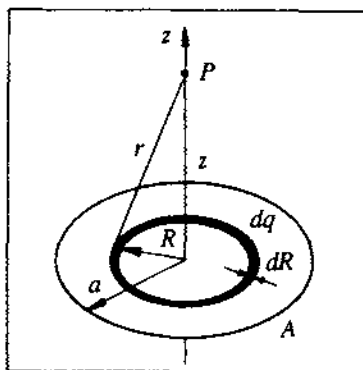
$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 1 + K \rightarrow K = 0, \quad (18-67)$$

eta, beraz, honelaxe idatz dezakegu hariak sorturiko potentziala:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R. \quad (18-68)$$

Hori horrela egin dezakegu, konstantearen balioa aukerakoa baita. Zilegia da egin duguna; eta, noski, kasu bakoitzean gehien komeni zaiguna aukeratuko dugu.

ii) Kalkula dezagun karga uniformea duen disko batek sortuko dituen eremu elektrikoa eta potentzial elektrikoa, bere ardatzeko puntuetan. Diskoaren erradioa a da, eta beraren gainazaleko karga-dentsitatea, σ . Ikus bedi, halaber, distantzia handi eta txikietarako zer gertatuko den (ikus 18.18. irudia).



18.18. irudia. Karga uniformea duen diskoak P puntuan sorturiko eremu elektrikoaren azterketa.

Aurreko adibidean, lehenik E eremua kalkulatu dugu eta gero V potentziala. Oraingoan, berriz, alderantzizko prozedurari jarraituko diogu: lehenik potentziala eta gero eremua kalkulatu dugu.

R erradioko zirkuluaren azalera $S = \pi R^2$ denez, berau diferentziazatuz 18.18. irudiko eraztun diferentzialaren azalera lor dezakegu:

$$S = \pi R^2 \rightarrow dS = 2\pi R dR. \quad (18-69)$$

Eta $dq = \sigma dS$ denez, ondoko hau izango da eraztun horren karga elektriko:

$$dq = 2\pi\sigma R dR. \quad (18-70)$$

Simetriad, P puntua eraztuneko puntu guztietatik r distantziara dagoenez, potentzialaren formula aplikatuz, hauxe lortuko dugu:

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}, \quad (18-71)$$

eta disko osoa kontsideratuz, mota bereko eraztunen integrazioa eginez:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{2\pi\sigma R dR}{r} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{R dR}{r}. \quad (18-72)$$

Baina $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$ denez, eta P puntuaren kasuan z konstantea denez, hauxe dugu:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{R dR}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R^2 + z^2)^{1/2} \Big|_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [(a^2 + z^2)^{1/2} - z]. \quad (18-73)$$

Adibide honetan, konstante gehigarria nulutzat hartu dugu. Diskotik distantzia handietara dauden puntuen kasuan, hurbilketa hau egin dezakegu:

$$a \ll z \rightarrow (a^2 + z^2)^{1/2} \approx z \left(1 + \frac{a^2}{2z^2} \right), \quad (18-74)$$

eta beraz,

$$V = \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 z}. \quad (18-75)$$

Bestalde, distantzia txikietara dauden puntuen kasuan,

$$a \gg z \rightarrow (a^2 + z^2)^{1/2} \approx a, \quad (18-76)$$

eta orduan,

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 z} (a - z). \quad (18-77)$$

E eremu elektrikoa kalkulatzeko, funtsezko papera jotzen du problemak daukan simetria kontuan hartzeak. Hain zuzen, z ardatzeko puntuei dagokienez, problemaren simetriatik, eremu elektrikoaren osagai bakarra z ardatzekoa izango da. Beraz, z ardatzeko puntuetarako,

$$E_z = \frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z^2 + a^2)^{1/2} - z \right], \quad (18-78)$$

$$E_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-\frac{2}{2(z^2 + a^2)^{1/2}} + 1 \right). \quad (18-79)$$

Lehen bezalaxe eginez, ondoko hurbilketak egin ditzakegu. Distantzia handietarako,

$$z \gg a \rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right] \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \right) \right], \quad (18-80)$$

alegia, z ardatzeko puntuei dagokienez, diskoaren zentroan legokeen karga batek sortuko lukeenaren berdina da, non jarritako karga disko osoarena den, hots:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi a^2}{z^2} = \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 z^2}. \quad (18-81)$$

Bestalde, distantzia txikietarako:

$$a \gg z \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (18-82)$$

18.5. PARTIKULA KARGATUAREN ERLAZIO ENERGETIKOAK, EREMU ELEKTRIKOAN ZEHAR HIGITZEN DENEAN. POTENTZIAL ELEKTRIKOAREN UNITATEAK

Eremu elektriko batean higitzen ari den partikula kargatu baten energia osoa segidan aipatuko dena da, baldin eta eremu grabitatorioaren eragina kontuan hartzen ez badugu, zeren eta eremu elektrikoarenarekin alderaturik, eremu grabitatorioaren energiarako ekarpena guztiz arbuia garria baita:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV. \quad (18-83)$$

Partikula kargatua P_1 -etik P_2 -ra higitzen denean, bertako potentzialak V_1 eta V_2 izanik hurrenez hurren, energiaren kontserbazioaren teorema honelaxe idatzi beharko dugu:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2, \quad (18-84)$$

eta 7.5. atalean ikusi genuenez, tarte horretan eremuak eginiko lana honako hau da:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q(V_1 - V_2). \quad (18-85)$$

Emaitza honetan oinarriturik, *volt* unitatearen definizioa eman dezakegu: «*coulomb* bateko kargak *joule* bateko energia irabazteko behar duen potentzial-diferentzia volt bat da». Beraz, unitateei dagokienez,

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J C}^{-1} = 1 \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{C}^{-1}. \quad (18-86)$$

(18-85) ekuazioan bi kasu bereizi behar ditugu:

- $q > 0$ denean, $V_1 > V_2$ izatea behar dugu, partikulak energia zinetikoa irabaz dezan; hots, partikulak potentzial elektriko handiagoko eskualdeetara joan behar du.
- $q < 0$ denean, osteraz, $V_1 < V_2$ izatea behar dugu; alegia, partikulak energia zinetikoa irabazteko, potentzial elektriko txikiagoko eskualdeetara joan behar du.

Bestetik, eV letren bidez adierazten den *elektronvolt* izeneko unitateak garrantzi handia du Fisika Atomikoaren arloan, bertan askotan agertzen baita elektroiaren karga. Begi bistakoa denez, eV energia-unitatearen balioa aurkitzeko, elektroiaren karga volt batez biderkatu besterik ez dugu egin behar, hots,

$$1 \text{ eV} = (1,6021 \times 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1 \text{ V}) = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (18-87)$$

Halaber, elektronvoltaren anizkoitzak ere oso erabiliak ohi dira:

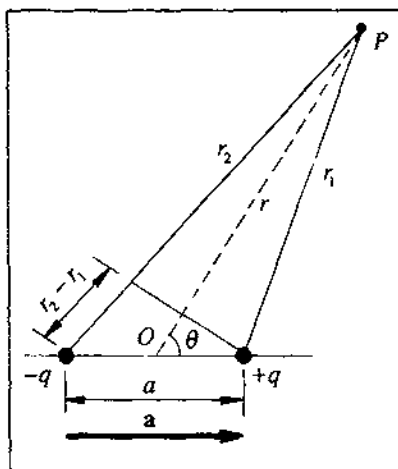
$$\text{Kiloelektronvolta} : 1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}.$$

$$\text{Megaelektronvolta} : 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}.$$

18.6. DIPOLO ELEKTRIKOA

Atal honetan karga-banaketa interesgarri bat aztertuko dugu: dipolo elektrikoa. Balio bereko eta aurkako zeinuko bi kargaz osatuta dago, bien arteko distantzia oso txikia izanik.

Begi bistakoa denez, multzo osoaren karga elektrikoa nulua da; baina hori horrela izanik ere, zenbait fenomeno interesgarri agertzen direla ikusiko dugu. Kasurako, karga osoa nulua izan arren, dipoloaren inguruko puntuetako eremu elektrikoa ez da nulua, jarraian ikusiko dugunez.



18.19. irudia. Dipolo elektrikoak P puntuan sorturiko eremuaren azterketa.

18.6.1. Momentu dipolarra. Dipoloaren potentzial eta eremua

Dipolo elektrikoaren momentu dipolarra era honetan definitu ohi da:

$$\mathbf{p} = qa, \quad (18-88)$$

non a delakoa karga negatibotik karga positibora doan bektorea den, eta q delakoa dipoloaren karga positiboa (ikus 18.19. irudia).

Hori ikusita, hurrengo pausoa dipoloak sorrarazten duen potentzial elektrikoa kalkulatzeko da; horretarako, (18-52) formula erabiliko dugu. Horren arabera, P puntuko potentzial elektrikoa honako hau da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}. \quad (18-89)$$

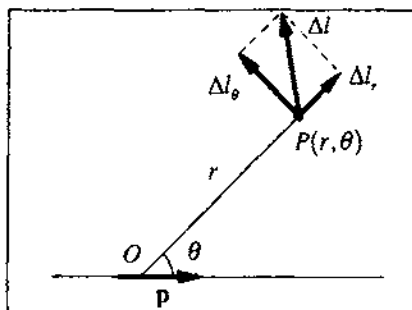
Dena den, praktikako kasu gehienetan ondoko hau gertatzen da, alegia, a distantzia oso txikia dela r distantziarekin alderaturik. Baldintza hori betetzen dela jotzen badugu, hurbilketa hauek egin ditzakegu:

$$r_2 - r_1 \cong a \cos \theta \quad \text{eta} \quad r_1 r_2 \cong r^2; \quad (18-90)$$

beraz, aurreko adierazpena era honetan idatz dezakegu:

$$V \cong \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (18-91)$$

Ekuazio hori koordenatu polarretatik koordenatu cartesianetarako transformazio-ekuazioen bidez transforma genezake, (18-57) adierazpenaren bidez eremu elektrikoa koordenatu errektangeluarretan lortuz. Dena den, normalean horrela erosoago izaten delakoan, koordenatu polarretan adieraziko dugu eremu elektrikoa.



18.20. irudia. Koordenatu polarretan P puntuari dagozkion oinarritzko desplazamenduak.

P puntuaren posizio-aldaketei dagokienez (18.20. irudia), koordenatu polarrak erabiliz, θ konstantea denean,

$$\Delta l_r = \Delta r, \quad (18-92)$$

eta r konstantea denean,

$$\Delta l_\theta = r\Delta\theta, \quad (18-93)$$

beti ere, Δr nahiz $\Delta\theta$ biak zerorantz doazela suposatuz.

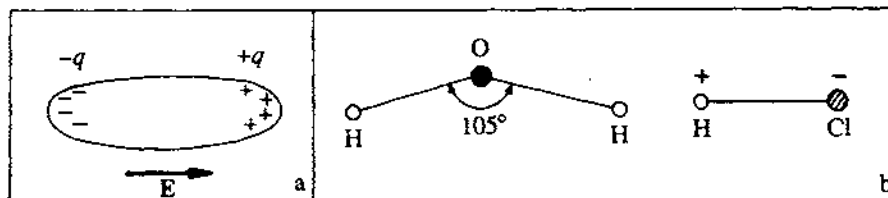
Lehen esan dugunez, eremu elektrikoa lortzeko potentzial elektrikoaren atalean ikusitako (18-57) ekuazioaz baliatu beharra dugu; hots, koordenatu polarretan:

$$E_r = -\lim_{\Delta l_r \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta l_r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (18-94)$$

$$E_\theta = -\lim_{\Delta l_\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta l_\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (18-95)$$

Arestian esandakoaren arabera, sistema osoaren karga anulatu egiten den arren, kargek duten desplazamenduaren kausaz eremu elektrikoa sortzen da, aurreko biak beraren osagaiak izanik.

Atomoetan, elektroien masa-zentroa eta nukleoaren masa-zentroa leku berean daude, eta beraz, atomoaren batez besteko momentu dipolar elektrikoa zero baliokoa da. Hala ere, eta geroago ikusiko dugunez, eremu elektrikoa sartzen badugu, aldatu egiten da elektroien higidura, eremu elektrikoak elektroien masa-zentroaren desplazamendua eragiten baitu nukleoaren masa-zentroarekiko, atomoa dipolo elektriko bilakatuz. Gauza bera gerta daiteke karga positibo eta negatiboak nahasturik daudeneko sistema neutro batean (18.21.a irudia). Atomoa polarizatu egin dela esan ohi da, p momentu dipolarreko dipolo bihurtuz. Logikoa denez, momentu hori kanpo-eremu elektrikoaren proportzionala da. Bestalde, zenbait molekula momentu dipolar iraunkorra izan dezakete. Molekula horiei 'polarrak' deritzegu; ura eta HCl molekula, esate baterako, itxura honetakoak dira (18.21.b irudia).

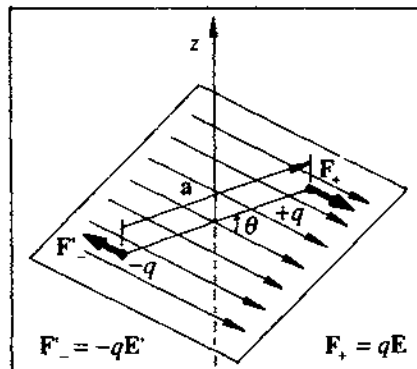


18.21. irudia. a) Eremu baten eraginez, guztira neutroa den sistema dipolo bihurtzeko. b) Molekula polarak: ura eta hidrogeno kloruroa.

18.6.2. Dipoloaren gaineko eremu elektrikoaren eragina

Dipolo elektrikoaren eremu elektrikoan ezartzen denean (18.22. irudia), dipoloaren karga bakoitzaren gainean indar bat sortzen da, bien erresultantea ondoko hau izanik:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q\mathbf{E} - q\mathbf{E}' = q(\mathbf{E} - \mathbf{E}'). \quad (18 - 96)$$



18.22. irudia. Dipoloaren gainean eremu elektrikoak sortzen dituen indarrak.

Begi bistakoa denez, eremua uniformea deneko kasuan, hots, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ denean, indar erresultantea nulua da, hots, $\mathbf{F} = 0$.

Dakusagun orain kasu berezi bat: eremu elektrikoaren eta dipoloaren paraleloki orientaturik daude, eta demagun norabide hau x ardatzarekin dela, hain zuzen. Hortaz, eremua uniformea ez bada,

$$E - E' = E(x + a) - E(x) = \frac{dE}{dx} a, \quad (18 - 97)$$

eta, beraz,

$$F = p \frac{dE}{dx}. \quad (18 - 98)$$

Hemendik haxe ondoriozta dezakegu: eremu elektrikoaren paraleloa den dipolo elektrikoaren eremua handituz doaneko noranzkoan higituko da. Eta alderantzizko emaitza lortuko da, baldin eta dipoloa eremuarekiko antiparaleloki ezartzen bada.

Bestalde, dipoloaren energia potentziala hauxe izango da:

$$E_p = -qV(\mathbf{r}) + qV(\mathbf{r} + \mathbf{a}), \quad (18-99)$$

non karga negatiboa $\mathbf{r}$ posizio-bektoreari dagokion puntuan dagoela eta karga positiboa $(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ puntuan dagoela suposatu dugun. Horrez gain, a kargen arteko distantzia r distantziarekin alderaturik oso txikia dela suposatuz gero, ondoko hau lortuko dugu, goiko adierazpenaren bigarren gaia seriean garatuz:

$$E_p = -qV(\mathbf{r}) + q[V(\mathbf{r}) + \mathbf{grad}V \cdot \mathbf{a}], \quad (18-100)$$

eta (18-57) erlazioa erabiliz:

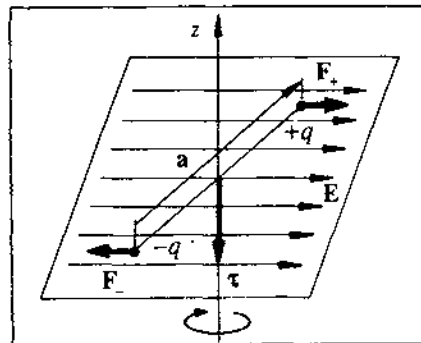
$$E_p = -\mathbf{E} \cdot q\mathbf{a} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta. \quad (18-101)$$

Horren arabera, energia potentzialaren balio minimoa $\theta = 0$ denean gertatzen da. Hau da, dipoloa orekan dago eremuarekiko paraleloki orientatzen denean.

Bestalde, dipoloa osatzen duten kargen indar-momentua sortzen dute. Ondoko 18.23. irudian ikus daitekeenez, honelaxe adieraz dezakegu momentu hori:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \times q\mathbf{E} = q\mathbf{a} \times \mathbf{E}, \quad (18-102)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (18-103)$$



18.23. irudia. Eremu elektrikoaren eraginpean dipoloak jasaten duen indar-momentua.

Argi dagoenez, indar-momentu elektrikoak dipoloa eremuarekiko paraleloki jartzera behartuko du, $\theta = 0$ denean orekan baitago.

19. gaia

Korronte elektriko zuzena

Aurreko gaien elkarrekintza elektrikoa estatikoki aztertu dugu soilik. Guztiok dakigunez, ordea, elektrizitatearen inguruko fenomeno gehienak dinamikoak dira. Hor ditugu, adibide gisa, etxean bertan darabilgun sare elektrikoa, edozein tresna elektrikok dauzkan zirkuituak, eta abar.

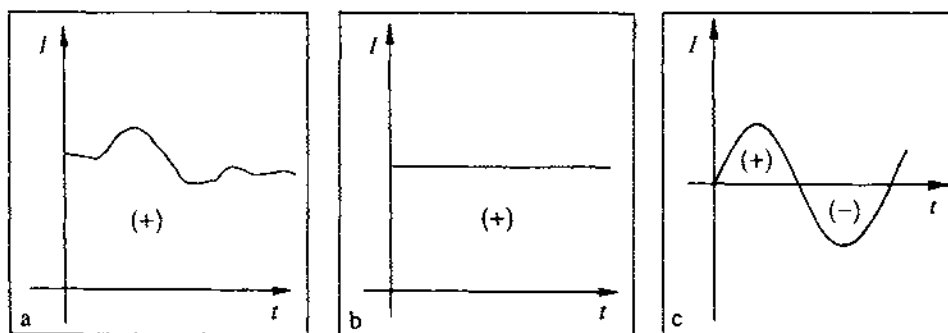
Elektrizitatea ikuspuntu dinamikotik aztertzean, oinarritzko kontzeptu bat ageri zaigu hasieratik: korronte elektrikoa. Zertan datza berau? Labur esanda, edozein gainazaletan zehar karga elektrikoen fluxua dagoenean, korronte elektriko bat gainazal hori zeharkatzen ari dela esaten da. Hots, azken batez, korronte elektriko hitzak kargen higidura edo garraioa adierazi nahi du, eta, bestalde, higidura hori kremu elektrikoaren eraginpean sortzen da.

Kargen garraioa mota desberdinetako materialetan gerta daitekeenez, oso kontuan hartzekoak izango dira material bakoitzaren ezaugarriak, eroankortasun elektrikoa aztertzean ikusiko dugun modura. Halaber, beharrezkoa izango da korrontea sortzeko tresnaren bat, sorgailu elektrikoa izenaz ezagutuko duguna, nolabait korronte elektrikoa modu iraunkorrean mantentzeko eremu elektriko egokia sortuko duena, hain zuzen ere. Horiexek izango dira gai honetan aztertuko ditugunak. Bestalde, zirkuituetatik dabilen intentsitatea zehazten duen Ohm-en legea aztertuko dugu, zirkuitu anizkoitzetara dagozkien Kirchhoff-en legeekin amaitzeko.

19.1. KORRONTE ELEKTRIKO ZUZENA

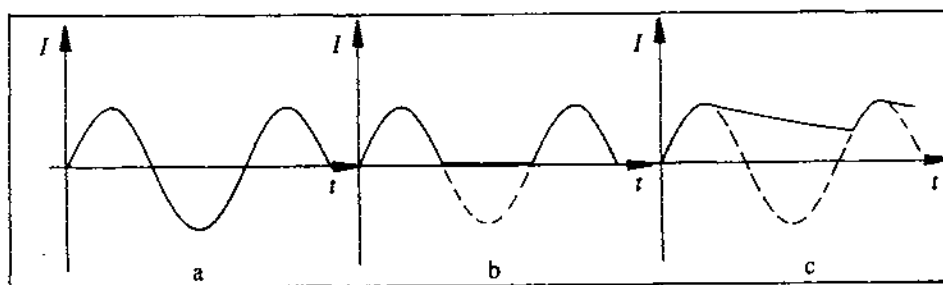
Korronte elektrikoari berari gagozkiola, lehenengo mailako sailkapenean, bi motatakoa izan daitekeela esan dezakegu: noranzkoa aldatzen ez denekoa, *korronte zuzena* deritzona, eta etengabe noranzkoa ziklikoki aldatuz doanekoa, *korronte alternoa*. Gai honetan korronte zuzenaren azterketari lotuko gaitzaizkio eta 23. gaien korronte alternoarenari. (Korronte zuzenari *korronte jarraitua* ere baderitzo zenbait liburutan).

19.1. irudian horrelako korronteek denborarekin duten aldaketa adierazi da eskematikoki, beti ere jakinik bestelako motatako edozein aldaketa ere gerta daitekeela, zer esanik ez.



19.1. irudia. a) Korrante zuzen ez-konstantea. b) Korrante zuzen konstantea. c) Korrante alfernoa.

Korrante elektriko zuzenaren iturri edo sorgailuak mota askotakoak izan daitezke. Pila eta metagailu elektrikoetan, prozesu kimikoen bidez lortzen dira indar elektroeragilea eta potentzial-diferentzia. Dinamoetan, ordea, energia mekanikoa da energia elektriko bihurtzen dena. Aipaturiko bi bide arrunt horiez gain, korrante zuzena erdiesteko beste bide bat ere badago, korrante alfernoaren artezketan (hots, zuzenketan) datzana hain zuzen. Bertan, artezgailuei esker (diodo erdieroaleak, esaterako) noranzko bakarreko korrantea lor dezakegu, kontrako noranzkoa ezabatuz. Ondoren, iragazki elektrikoaren bidez, leundu egin daiteke tentsioaren aldaketa, prozesuaren amaieran erdietsitako korrantea ia erabat leuna eta konstantea izateko moduan, hurrengo 19.2. irudian adierazi den bezala.



19.2. irudia. Korrante zuzena artezgailuen bidez lortzeko prozesua. a) Korrante alfernoa. b) Korrante arteztua (zuzena) c) Korrante arteztu eta iragazia (zuzena).

Edozelan ere, gai honetan korrante zuzen konstanteaz arituko gara nagusiki, izatez korrantearen atal egonkorra soilik aztertuz. Eta ezer baino lehen, korrantearen noranzkoa adierazteko onartu ohi den hitzarmena karga positiboena dela esango dugu, nahiz eta, eroaleen kasuan gertatzen den bezala, gehienetan benetan higitzen ari direnak karga negatiboak izan, hots, elektroaiak.

Korrante elektrikoaren aurkezpen orokor honi amaiera emateko, materialien sortzen dituen efektu batzuk aipatuko ditugu. Efektu nagusiak ondoko hiru motetan taldeka ditzakegu:

- Efektu termikoak: Eroaleak berotu egiten dira korrante elektrikoa pasatzean.
- Efektu kimikoak: Likido ionizatuak deskonposatu egiten dira korrante elektrikoaren eraginez.
- Efektu magnetikoak: Eroalearen alboan kokaturiko iparorratzak eremu magnetikoaren agerpena erakusten du, korronteak dirauen bitartean. Efektu magnetiko horiek motore elektrikoaren funtsa diren fenomeno mekanikoak sorrarazten dituzte, elkarrekintza magnetikoari buruzko gaia aztertzean ikusiko dugunez.

Bestelako efektuak ere badaude, baina gehienak aipaturiko hiruren artean sar daitezke. Adibidez, bonbiletako argia efektu termikoak sorturiko goritasunaren ondorioa dugu, izatez; edo eta gorputzean *shock* edo zartada elektrikoa jasotzean azaltzen diren efektu fisiologikoak, efektu termiko eta kimikoen arteko bateraketaren ondorioak dira.

19.2. KORRONTEAREN INTENSITATEA ETA DENTSITATEA

Korrante elektrikoa kuantitatiboki zehazteko, magnitude berezia definitu ohi da. Horrela, korrontearen barneko S zeharkako gainazala denbora-unitatean zeharkatzen duen karga elektrikoari *korrontearen intentsitatea* deritzo:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dq}. \quad (19-1)$$

Korrontearen intentsitatea magnitude eskalarra da eta beraren unitateari *ampere* (A) deritzo, André Marie Ampère (1775-1836) fisikari frantsesaren ohorez. Beraz, intentsitatearen dimentsioak eta unitateak honakoak dira:

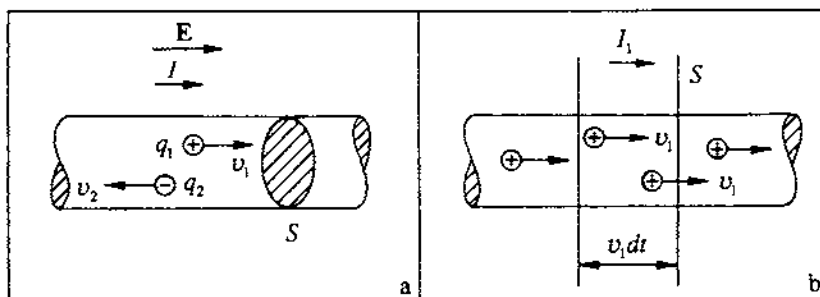
$$[I] = Q T^{-1}, \quad (19-2)$$

$$1 \text{ ampere} = 1 \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}}, \quad 1 \text{ A} = 1 \text{ C s}^{-1}. \quad (19-3)$$

Dena den, zenbait zirkuitutan ampere unitatea oso handia denez, sarritan miliamperea ($1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$) eta mikroamperea ($1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$) erabiltzen dira. Bestetik, magnitude eskalarra izan arren, intentsitatearen noranzkoaz mintzatuko gara, aurreko hitzarmenaren arabera karga positiboek S gainazala pasatzean duten batez besteko noranzkoa adierazi nahirik.

Berez, intentsitatea S gainazal finituari dagokio, eta horrekin batera, gainazal-unitateko intentsitatea ere definitzen da, *korrontearen dentsitatea* deritzona. Baina magnitude hori definitu aurretik, korrontearen izaera mikroskopikotik abiatuko gara.

Intentsitatea S gainazala zeharkatzen duten karga higikorren abiaduraren funtzioan jarriko dugu, eta horretarako, kasu konketu bat hartuz, S sekziodun eroale baten barneko higidura aztertuko dugu, eroale hori eremuaren eraginpean dagoela kondentsaturik.



19.3. irudia. a) Kargen higidura E eremuaren eraginpean. b) dt denbora-tartean, $v_1 dt$ bitartean daudenek zeharkatuko dute S gainazala.

Demagun bi eratako partikula kargatuak ditugula eroale baten barnean higitzeko moduan: positiboak, q_1 kargadunak, eta negatiboak, q_2 kargadunak. Ereku elektrikoaren eraginez, karga positiboak eremuaren noranzko berberaz higituko dira v_1 abiaduraz, eta karga negatiboak aurkako noranzkoaz v_2 abiaduraz, 19.3.a irudian adierazi den bezala. 19.3.b irudian karga positiboak jarri dira soilik. Demagun horrelako n_1 daudela bolumen-unitateko. Hain zuzen, dt denbora-tartean $v_1 dt$ altuerako zilindroan dauden kargak soilik zeharkatuko dute S gainazala; beraz, honelaxe adierazi ahal izango dugu intentsitatea:

$$dQ_1 = n_1 q_1 S v_1 dt, \quad (19-4)$$

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt} = n_1 q_1 v_1 S. \quad (19-5)$$

Modu berean, karga negatiboen intentsitatea ondokoa izango da:

$$I_2 = n_2 q_2 v_2 S. \quad (19-6)$$

Guztira, intentsitate osoa bien arteko batura izango da, zeren, karga negatiboak aurkako noranzkoaz higitu arren, karga negatiboen gutxipena karga positiboen gchipenaren baliokidea baita. Hots, intentsitate osoa hauxe izango da:

$$I = I_1 + I_2 = S \sum_i n_i q_i v_i. \quad (19-7)$$

Azkenez, korrontearen sekzio normaletik gainazal-unitateko pasatzen den intentsitateari *korrontearen dentsitatea* deritzo, eta honelaxe adierazten da:

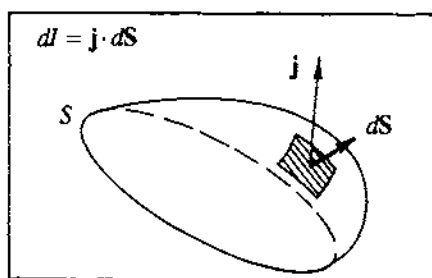
$$j = \frac{I}{S} = \sum_i n_i q_i v_i, \quad (19-8)$$

eta higiduraren norabidea kontuan hartuz, *korrontearen dentsitatea* izeneko bektorea definitu ohi da:

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i, \quad (19-9)$$

bertain partikula kargatuen mota guztiak kontsideratuz. Hain zuzen, karga-dentsitatea (ρ) erabiliz, honelaxe adieraz daiteke puntu bakoitzeko korrontearen dentsitatea:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (19 - 10)$$



19.4. irudia. Gainazal-elementua zeharkatzen duen korrontearen intentsitatearen definizioa.

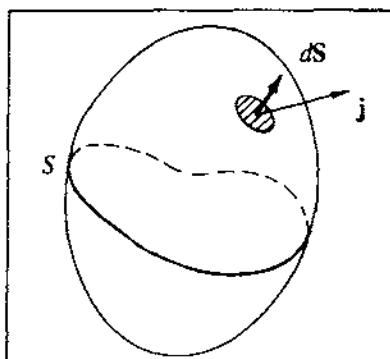
Azken definizioaren arabera, era honetan adieraziko dugu edozein eite duen gainazala zeharkatzen duen korrontearen intentsitatea:

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (19 - 11)$$

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (19 - 12)$$

19.3. JARRAITUTASUNAREN EKUAZIOA

Elkarrekintza elektrostatikoa aztertzean, kargaren kontserbazioaren printzipioa aipatu genuen; orain, kuantitatiboki aztertuko dugu printzipio hori.



19.5. irudia. Gainazal itxia.

Demagun 19.5. irudiko S gainazal itxia dugula (edonolakoa, baina behin aukeratu ondoren, finkoa) eta izan bedi q delakoa t aldiunean gainazal horren barnean dagoen karga. Oro har, egoera dinamikoan,

$$q = q(t) \quad (19 - 13)$$

izango da. Kargaren kontserbazioaren printzipioaren arabera, denbora-unitateko kargaren galera kanporantzko intentsitatea izango da; hots, denbora-unitatean kanporantz irteten den karga honako hau izango da:

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (19-14)$$

Bestalde, aldiune bakoitzean modu honetan adieraz dezakegu S -ren barneko karga, puntu bakoitzeko kargaren dentsitatearen funtzioan:

$$q = \iiint_V \rho \, dV. \quad (19-15)$$

Beraz, (9-14) eta (9-15) konbinatuz, azkenean era honetara adieraz dezakegu kargaren kontserbazioaren printzipioa, *jarraitutasunaren ekuazioa* deritzona:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV + \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (19-16)$$

Ohar gisa diogun ezen egoera dinamikoan $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ eta $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ direla. Dena den, hemendik aurrera gai honetan korrante egonkorak aztertuko ditugu soilik, hots, denbora-errekiko aldatzen ez direnak, eta orduan $\rho = \rho(\mathbf{r})$ eta $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ izango ditugu. Bestalde, gogora gaitezen Fluidoaren Mekanikan definituriko jarraitutasunaz, azken batez oso antzekoa baita. Han masaren kontserbazioa genuen jarraitutasunaren oinarria, eta hemen kargarena (ikus 13.7. atala).

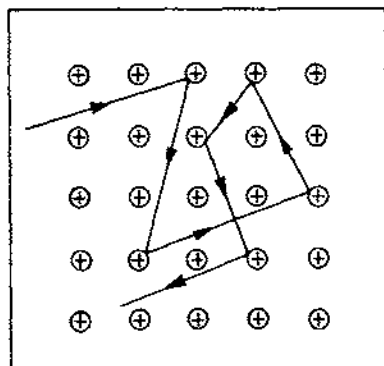
19.4. OHM-EN LEGEA EROALEEN KASUAN

Korrante elektrikoaren ikuspuntutik bi multzotan bana ditzakegu materialak: eroaleak eta dielektrikoak. Hemen eroaleak interesatzen zaizkigu batez ere, korronterako bide egokiak baitira.

Dielektrikoek ez dute karga askerik eta ez dute korrante iraunkorrik onartzen kanpo-eremu baten eraginpean, nahiz eta horren eraginez polarizatu egiten diren. Ostera, karga askeak daudeneko espazioaldean eremu elektrikoak eragiten badu, korrante elektrikoa sortuko da; horixe da, izatez, eroaleen kasua.

Demagun metal baten barneko korrantea aztertzen ari garela. Kristal-sare metalikoan karga positiboak finko daude, eta beraien inguruan, elektroi lotuez gainera, elektroi askeen hodeia dago. Elektroi horiek batera eta bestera higitzen ari dira, oso bizkor, atomoekiko talkak eginez. Nahiz eta higidura desordenatu hori abiadura handiz gertatu, batez besteko abiadura (bektoriala) nulua da eta, guztira, korrante makroskopiko netoa nulua da (19.6. irudia).

Eroalea eremu elektrikoaren eraginpean ipintzean, nolana hiko higidura honi beste higidura ordenatu bat gainezartzen zaio, eta horren abiadura elektroiaren abiadura baino askoz txikiagoa den arren, higidura horrek garrantzi handiagoa du, zeren kargen fluxu netoa sortzen baitu, korrante elektrikoa alegia.



19.6. irudia. Kristal-sare metalikoan elektroiak batera eta bestera higitzen ari dira.

19.4.1. Eroankortasun elektrikoa. Erresistibitate elektrikoa. Mota desberdinetako materialak

Beraz, dirudienez, erlazioren bat dago eremu elektrikoaren intentsitatearen eta korronte elektrikoaren artean, eta erlazio hori metalaren barne-egituraren ondorioa da.

Hain zuzen ere, erlazio horri *Ohm-en legea* deritza eta eroale bakoitzaren kasuan eremu elektrikoaren intentsitatearen eta korronte-dentsitatearen arteko proportzionaltasuna adierazten du, honelaxe preseski:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (19 - 17)$$

Adierazpen honetako σ proportzionaltasun-faktoreari, eroalearen *eroankortasun elektrikoa* deritza eta material bakoitzaren ezaugarria da. Dimentsionalki:

$$[\sigma] = \text{L}^{-3} \text{M}^{-1} \text{T} \text{Q}^2. \quad (19 - 18)$$

Izatez, emandakoa legea baino areago eroaleen propietate baten zehaztapenerako ekuazioa da. Baldintza horietan definituz gero, esperimentalki ikus daitekeenez, beste menpekotasun batzuez gain, eroankortasuna aldatu egiten da tenperaturaz, hots:

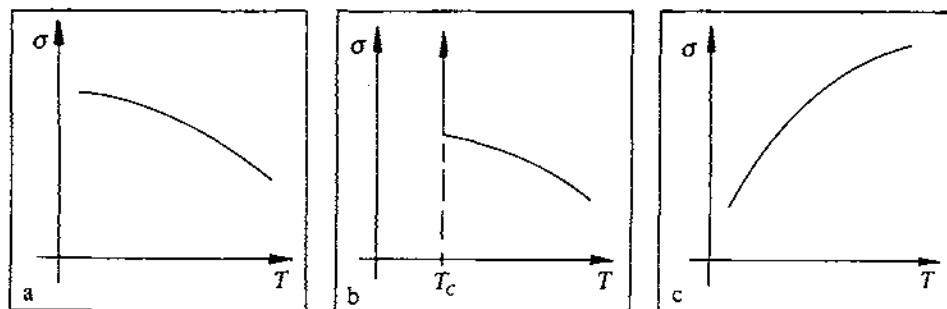
$$\sigma = \sigma(T). \quad (19 - 19)$$

Oro har, *eroale* metaliko arrunten kasuan eroankortasuna txikiagotu egiten da tenperatura igotzean. *Supereroaleen* portaera metal arruntena bezalakoa da, tenperatura oso baxuetan izan ezik; tenperatura beheratuz goazenean, tenperatura kritikora (T_c) heltzen gara eta horretatik behera pasatzean, eroankortasuna izugarri handia gertatzen da, $\sigma \rightarrow \infty$. Ostera, *erdi-eroaleen* eroankortasuna txikiagotu egiten da tenperatura beheratzean, eta tenperatura oso baxuetan ia isolatzaile modura jokatzen dute. Hiru material-mota horien portaera 19.7. irudian adierazi da.

Askotan, materialen *erresistibitate elektrikoa* definitzen da. Izatez, eroankortasunaren alderantzizko magnitudea da, hau da:

$$\rho_e = \frac{1}{\sigma}, \quad (19 - 20)$$

eta ageri denez, eroale arrunten kasuan handiagotu egiten da tenperatura igotzean.



19.7. irudia. Material desberdinen eroankortasunaren aldaketa tenperaturaren funtzioan. a) Eroale arrunta. b) Superoalea. c) Erdieroalea.

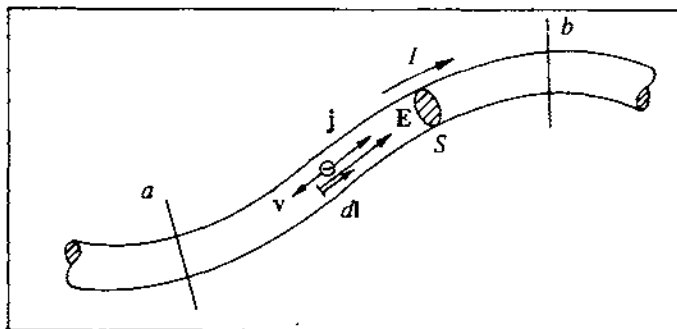
Azken ohar gisa, diogun ezen eroankortasun elektrikoa eskarlatzat hartu dugula eta hori soilik dela egokia eroale isotropoen kasuan. Eroale anisotropoetan, oro har $\mathbf{j}$ eta $\mathbf{E}$ bektoreek norabide desberdina eduki dezakete eta beraien arteko erlazioa honelaxe idatz daiteke:

$$\mathbf{j} = \bar{\sigma} \mathbf{E}, \quad (19-21)$$

nahiz eta hemen $\bar{\sigma}$ bigarren ordenako tentsorea den eta ondorioz $\mathbf{j}$ -k ez duen zertan edukirik $\mathbf{E}$ bektorearen norabidea. Dena den, gai honetan eroale isotropoaz arituko gara eta eroankortasun elektrikoa konstantetzat hartuko dugu.

19.4.2. Hari eroale baten erresistentzia elektrikoa

Zirkuituetako eroaleek hari-forma izaten dute gehienetan edo, bestela esanda, oso meheak ohi dira. Eroale meheen kasuan kalkulu errazak egin ahal izango ditugu.



19.8. irudia. Hari eroalearen barneko magnitudeak eta erlazioak.

Hari eroalearen barneko puntu batean erlazio hau izango dugu eremu elektrikoaren intentsitatearen eta korrante-dentsitatearen artean (ikus 19.8. irudia):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}. \quad (19-22)$$

Haria mehea denez, sekzio normaleko puntu guztietan $\mathbf{j}$ korrante-dentsitatea berbera dela joko dugu, hurbilketa eginez. Aurreko adierazpeneko atal biek hariaren norabideko $d\mathbf{l}$ luzera-elementuaz eskalarki biderkatuz, eta $\mathbf{j}$ eta $d\mathbf{l}$ norabide berekoak direla kontuan hartuz,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\sigma} j dl = \frac{I}{\sigma S} dl. \quad (19-23)$$

Korronte egonkorren kasuan jarraitutasunaren ekuazioaren arabera sekzio guztietatik intentsitate berbera pasatzen denez, a eta b sekzioen artean integratuz, hauxe lortuko dugu:

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I \int_a^b \frac{dl}{\sigma S}. \quad (19-24)$$

Lehenengo ataleko integralak a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia adierazten du, V_{ab} . Definizioz, bigarren atalekoak a eta b puntuen arteko *erresistentzia elektrikoa* ematen digu, eta R ikurraz adierazi ohi da:

$$R \equiv \int_a^b \frac{dl}{\sigma S}. \quad (19-25)$$

Sekzio uniformeko harien kasuan honelaxe lor daiteke erresistentzia elektrikoa:

$$R = \frac{L}{\sigma S}. \quad (19-26)$$

Definitu berria den erresistentzia elektrikoaren funtzioan, era honetan geratuko zaigu potentzial-diferentziaren, intentsitatearen eta erresistentziaren arteko erlazioa:

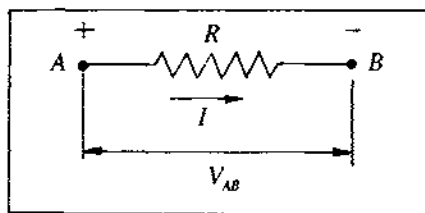
$$V_{ab} = RI, \quad (19-27)$$

eta hauxe dugu *Ohm-en legea*, beraren itxurarik arruntenean. Azken adierazpen honetan ageri denez, korrontearen kausa sortzailea soilik eremu elektrostatikoa denean, hari eroalearen muturren arteko potentzial-diferentzia erresistentziaren eta intentsitatearen arteko biderkadura dela ikus daiteke.

Erresistentzia elektrikoaren unitateari *ohm* deritzo, emandako legearen aurkitzailearen ohorez jarria: G. S. Ohm (1789-1854). Izatez, unitate eratorria da, volta/ampere hain zuzen, eta Ω ikurraz adierazten da. Erresistentzia handiak adierazteko, kiloohm ($1 \text{ k}\Omega = 10^3 \Omega$) eta megaohm ($1 \text{ M}\Omega = 10^6 \Omega$) unitateak erabili ohi dira. Normalean, zirkuituak eraikitzeke balio finkodun erresistentziak fabrikatzen dira. Eskematikoki, erresistentziak 19.9. irudiko ikurraz adierazi ohi dira.

19.4.3. Energia-galera erresistentzia elektrikoetan. Joule-ren legea

Partikula kargatuak sare metaliko batean zehar higitaraztean sortzen diren gehiegizko talken kausaz, energiaren galera dago eroalean korronte elektriko iraunkorra mantentzean, eta, kanpotik ikusita, galera hori bero modura ageri da. Ikus dezagun zer nolakoa den energia-galera erresistentzia elektrikoetan (19.9. irudia).



19.9. irudia. Erresistentzia elektrikoaren adierazpena, intentsitatearen noranzkoa eta potentzial-diferentziaren zeinua adierazirik.

Aurreko ataletik dakigunez, ondoko potentzial-diferentzia dago hariaren bi muturren artean,

$$V_{AB} = V_A - V_B = RI, \quad (19 - 28)$$

eta hau karga-unitateko egiten den lana da. Guztira, t denbora-tartean korrante zuzen konstanteaz garraiatuko den karga

$$Q = It \quad (19 - 29)$$

izango denez gero, tarte horretan erresistentzian galduko den energia

$$W = V_{AB}Q = RI^2t \quad (19 - 30)$$

izango da. Eraitza horri *Joule-ren legea* deritzen, eta lana denez, joule unitatetan eman ohi da. Hala ere, batzuetan kaloriatan ematen da, eta orduan honelaxe adierazten da:

$$W = 0,24 RI^2t \quad (\text{kalaria}). \quad (19 - 31)$$

Bestalde, denbora-unitateko energia-galera, hots, erresistentzian galtzen den potentzia, ondokoa da:

$$P = \frac{W}{t} = RI^2. \quad (19 - 32)$$

19.5. INDAR ELEKTROERAGILEA

Atal honetan erresistentzia soilak ez diren elementuek zirkuituetan duten portaera aztertuko dugu, alegia, sorgailu elektriko eta hargailu elektriko izenez definituko ditugun zirkuituen osagaien portaera.

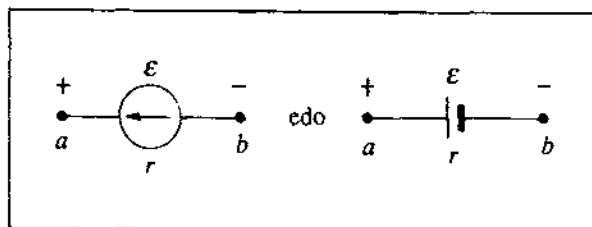
19.5.1. Sorgailu elektriko

Sorgailu elektriko, energia kimikoa —pilen kasuan— edo mekanikoa —dinamoen kasuan— edo beste mota bateko energia energia elektriko bihurtzen duen tresna da.

Sorturiko korrante elektrikoaren potentzia P izanik eta zirkuituan zehar bidaltzen den korrantearen intentsitatea I , honelaxe definitu ohi da *sorgailuaren indar elektroeragilea*:

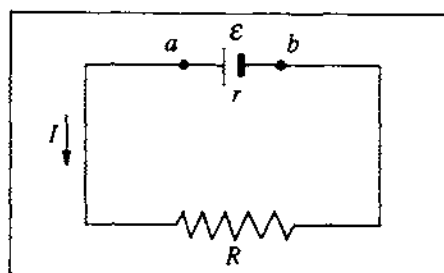
$$\varepsilon \equiv \frac{P}{I}. \quad (19 - 33)$$

Unitateei dagokienez, P wattetan datorrenez eta I amperetan, indar elektroeragilea voltetan neurtzen da, potentzial-diferentziaren modura. Grafikoki 19.10. irudian ageri den moduan adierazi ohi da korrante zuzenaren sorgailua. Irudietan jarri den r delakoak, sorgailuaren barne-erresistentzia elektrikoa adierazten du.



19.10. irudia. Sorgailu elektrikoaren zirkuituetan adierazteko erak.

Interesgarria gerta daiteke, sorgailua eta erresistentzia dituen zirkuituaren azterketa egitea eta, bereziki, bertako energiaren balantzea aztertzea (19.11. irudia).



19.11. irudia. Sorgailu elektrikoaren eta erresistentzia elektrikoaren osaturiko zirkuitua.

Zirkuitu horretan sortzen edo ematen den potentzia bakarra sorgailuarena da. Potentzia xurgatzeko, ordea, r (sorgailuaren barnekoa) eta R erresistentziak daude. Beraz, potentziaren balantzea honako hau izango da:

$$P = \epsilon I = rI^2 + RI^2 = (R + r)I^2, \quad (19 - 34)$$

eta hortik, modu honetan kalkulatu ahal izango dugu zirkuituko korrontearen intentsitatea:

$$I = \frac{\epsilon}{R + r}. \quad (19 - 35)$$

Oso interesgarria da erlazio hori, azken batez Ohm-en legearen orokorpen bat ematen baitigu, jarritako zirkuituaren kasuan. Bestalde, sorgailuaren muturren arteko potentzial-diferentzia ondoko eran adierazi ahal izango dugu zirkuituko beste magnitudeen bidez:

$$V_{ab} = RI = \epsilon - rI. \quad (19 - 36)$$

Azken adierazpena aztertuz, galdera hau egin dezakegu: Zer gertatzen da zirkuitua irekirik dagoenean, hau da, intentsitatea nulua denean? Orduan, intentsitatea nulua denez,

$$V_{ab, irekia} = \epsilon \quad (19 - 37)$$

izango da, noski. Beraz, emaitza hori interpretatuz eta aurrekoarekin konparatuz, zirkuitua ixtean, barne-erresistentziaren kausaz sorgailuaren muturren artean potentzial-diferentziaren rI beharpena gertatzen dela esango dugu.

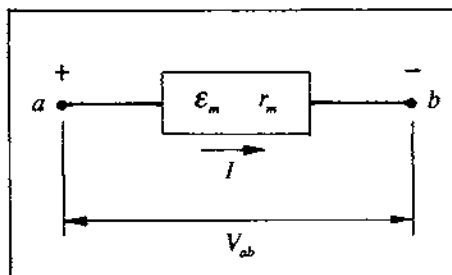
Indar elektroeragileari buruzko zenbait ohar egitea komeni da. Lehenik eta behin, azpimarratu egin behar da ezen, 'indar' izena ematen bazaio ere, ez dela Fisikan indar hitzarekin arrunki adierazten dena, beste zerbait baizik. Izatez, sorgailuaren barruan *karga-unitateko sorgailuak egiten duen lana* da indar elektroeragilea, hots:

$$\varepsilon = \frac{P}{I} = \frac{W/t}{Q/t} = \frac{W}{Q}. \quad (19-38)$$

Bestetik, nahiz eta indar elektroeragilea eta potentzial-diferentzia unitate berberetan ematen diren, ez dira gauza bera. Nolabait esateko, indar elektroeragileak potentzial-diferentzia sorrarazten du sorgailuaren muturren artean, eta horretarako beste mota bateko energia erabiltzen da, energia kimikoa (metagailuetan) edo energia mekanikoa (dinamoetan) adibidez.

19.5.2. Hargailu elektrikoa. Indar kontraelektroeragilea

Izen orokor modura, energia elektrikoa beroa ez den bestelako energia ere bihurtzen duen tresnari *hargailu elektrikoa* deritzo. Adibide gisa, motor elektrikoaren kasua aipa dezakegu, zeintzuetan korrante elektrikoaren eraginez energia mekanikoa sortzen den.



19.12. irudia. Hargailu elektrikoa adierazteko era, korrantearen noranzkoa eta potentzial-diferentziaren zeinua adierazirik.

Demagun a eta b puntuen artean V_{ab} potentzial-diferentzia konstantea dagoela eta bi puntu horietara r_m barne-erresistentzia duen hargailu elektrikoa konektatu dugula, eta ondorioz, a -tik b -ra I intentsitatea pasatzen dela (19.12. irudia). Egin dezagun energiaren balantzea:

- ab puntuen arteko potentzia $V_{ab}I$ da.
- Energiari dagokionez, hargailua elementu pasiboa da, nolabait esateko; hots, hartu egiten du energia. Baina hartzen duen energia bi erataraz gastatzen du: barne-erresistentzian $r_m I^2$ galera dago denbora-unitateko; bestetik, P potentzia elektrikoa beste mota bateko energia bilakatzen du.

Guztira, energiaren kontserbazioaren arabera:

$$V_{ab}I = r_m I^2 + P. \quad (19-39)$$

Beraz, $P = V_{ab}I - r_m I^2$ delakoa beste zerbait bilakatzen den potentzia da, adibidez, motor elektrikoaren kasuan energia mekaniko bihurtzen dena.

Ondoko eran definituriko magnitudeari,

$$\varepsilon_m = \frac{P}{I}, \quad (19-40)$$

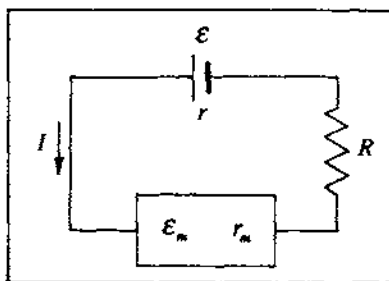
hargailuaren indar kontraelektroeragilea deritzo, eta hargailuaren ezaugarria da, barne-erresistentziarekin batera. Indar elektroeragilea bezala, hau ere voltetan neurtu ohi da. Bestalde, indar kontraelektroeragileari buruz, aurreko atalean indar elektroeragileaz eginiko oharren antzekoak egin ditzakegu, alegia, batetik, ez dela 'indarra', hargailuan beroaz gain karga-unitateko kontsumitzen den energia baizik, eta bestetik, voltetan neurtu arren, ez dela potentzial-diferentziarekin nahastu behar.

Indar kontraelektroeragilea erabiliz, hauxe da hargailuaren muturren arteko potentzial-diferentziaren adierazpena beste magnitudeen bidez:

$$V_{ab} = \varepsilon_m + r_m I. \quad (19-41)$$

19.5.3. Ohm-en legearen orokorpena

Zirkuitu berean sorgailua, hargailua eta erresistentzia batera agertzen direnean, modu berean egin dezakegu energiaren balantzea.



19.13. irudia. Sorgailuaz, erresistentziatz eta hargailuaz osaturiko zirkuitua.

Azken batez, sorgailuaren potentzia zirkuituan I intentsitateko korronea mantentzeko erabiltzen da:

$$\varepsilon I = \varepsilon_m I + r I^2 + r_m I^2 + R I^2, \quad (19-42)$$

hots, era honetan egongo dira erlazionaturik zirkuituko tresnen propietateak, bertatik pasatzen den intentsitatearekin:

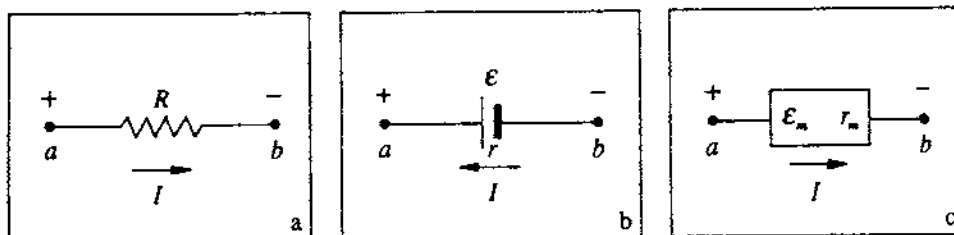
$$\varepsilon - \varepsilon_m = (r + r_m + R)I = \left(\sum_i r_i \right) I. \quad (19-43)$$

Eta kasu orokorrean, korrone zuzeneko zirkuitu berean zenbait sorgailu, hargailu eta erresistentzia ditugunean, ondokoa idatz dezakegu:

$$\sum_i \varepsilon_i - \sum_j \varepsilon_{mj} = \left(\sum_k r_k \right) I. \quad (19-44)$$

Hauxe da, hain zuzen, *Ohm-en legearen orokorpena* zirkuitu bakarraren kasuan.

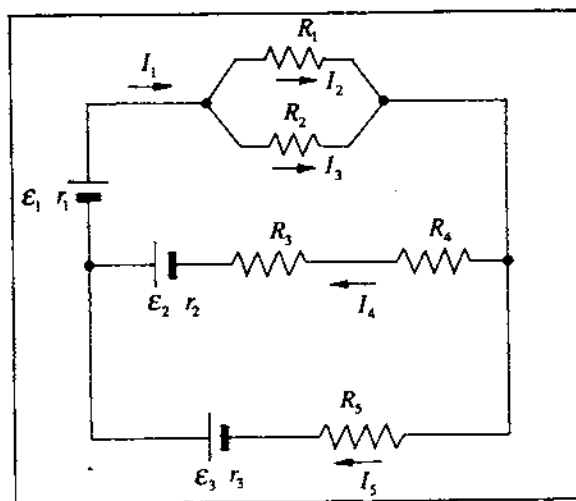
Bukatzeko, laburpen modura, 19.14. irudian grafikoki adieraziko dugu intentsitatearen noranzkoaren eta muturretako potentzial-diferentziaren arteko erlazioa, aipaturiko hiru elementuen kasuan. Ohar gisa diogun ezen hargailuek beren mutur edo borneak alderantziz konektaturik dituzten sorgailuen modura jokatzen dutela.



19.14. irudia. Tresna desberdinetako intentsitatearen noranzkoa eta potentzial-diferentziaren zeinua. a) Erresistentzia. b) Sorgailua. c) Hargailua.

19.6. KORRONTE ZUZENeko ZIRKUITU ANIZKOITZAK

Orain arte aztertu ditugun zirkuituetan, bide bakarra egon da; ondorioz, korrontearen intentsitatea berbera zen zirkuituko puntu guztietan, eta horrela, kalkuluak erraztu egiten ziren. Baina gehienetan zirkuituak ez dira bakunak anizkoitzak baizik; hau da, bide desberdinak daude, eta bide bakoitzak bere intentsitatea du. Horrelako kasuetan, bestelako teknikak erabili behar izaten dira korronteak ongi kalkulatzeko.



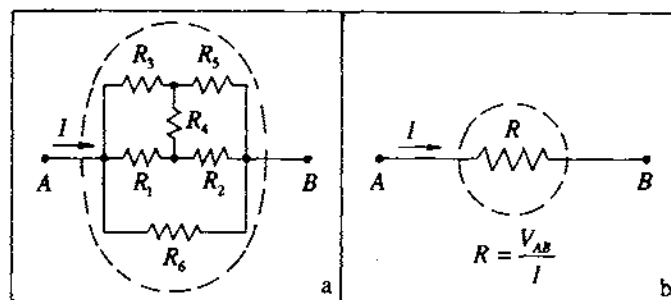
19.15. irudia. Zirkuitu anizkoitza. Bide bakoitzetik intentsitate jakin bat pasatzen da.

Adibide gisa 19.15. irudiko zirkuitu anizkoitza har dezakegu. Zirkuitu osoari *sare elektrikoa* deritzo. Bertan ikus daitekeenez, bertako elementuak modu desberdinez daude konektaturik elkarrekin. Bide berean eta elkarren ondoan bata bestearen atzetik jarriarik konektatzen direnean, *serie-konexioa* dugu. R_3 eta R_4 erresistentzien kasuan bezala. Kasu

horretan intentsitate berbera pasatzen da bi erresistentzietan barrena. Ostera, elementuak bi punturen arteko bi bide desberdinetan daudenean, *paralelo-konexioa* dugu, R_1 eta R_2 erresistentzien kasuan bezala. Oraingo kasu honetan potentzial-diferentzia berbera dago bi erresistentzien muturren artean, baina intentsitatea desberdina izango da, bi erresistentziak berdinak direnean izan ezik.

19.6.1. Erresistentzia elektrikoaren konbinazioen erresistentzia baliokidea

Aurreko konbinazioetan, multzoaren erresistentzia baliokidea lor dezakegu. *Erresistentzia baliokidea*, erresistentzia-multzoaren ordez jarri sare elektrikoaren beste elementuak korrante berberaz eta baldintza beretan iraunarazten dituen da, alboko irudian ikus daitekeenez.

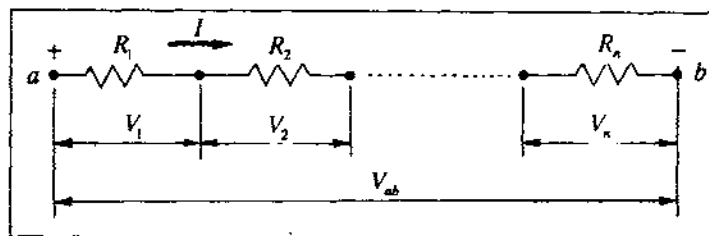


19.16. irudia. a) Zirkuitu anizkoitzeko elementuak, erresistentziez osatua. b) Erresistentzia baliokidea.

Ikus dezagun, adibidez, lehenago aipaturiko serie- eta paralelo-konexioetarako erresistentzia baliokideak zein diren.

Serie-konexioa

Kasu honetan erresistentzia guztiak zeharkatzen dituen intentsitatea, I , berbera da (19.17. irudia).



19.17. irudia. Serie-konexioan dauden erresistentziei dagozkien magnitude elektrikoak.

Erresistentzia bakoitzarekin Ohm-en legea erabiliz:

$$V_1 = R_1 I, \quad V_2 = R_2 I, \quad \dots, \quad V_n = R_n I, \quad (19-45)$$

eta bestetik,

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \sum_i V_i. \quad (19-46)$$

Guztira:

$$\frac{V_1}{I} + \frac{V_2}{I} + \dots + \frac{V_n}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad (19-47)$$

$$\sum_i \left(\frac{V_i}{I} \right) = \frac{\sum_i V_i}{I} = \frac{V_{ab}}{I} = R, \quad (19-48)$$

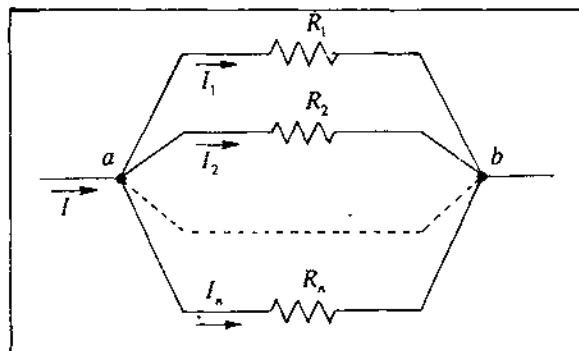
eta definizioz, erresistentzia baliokidea honelaxe adieraziko da:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_i R_i, \quad (19-49)$$

hots, *serie-konexioan erresistentzia baliokidea erresistentzien batura da.*

Paralelo-konexioa

Hemen, *a* eta *b* puntuen arteko potentzial-diferentzia bide guztietan berbera dela dakusagu (19.18. irudia).



19.18. irudia. Paralelo-konexioan dauden erresistentziak dagozkien magnitude elektrikoak.

Bestetik, *a* puntura heltzen den intentsitatea bide guztietatik banatzen da. Beraz,

$$V_{ab} = R_1 I_1, \quad V_{ab} = R_2 I_2, \quad \dots, \quad V_{ab} = R_n I_n, \quad (19-50)$$

eta jarraitutasunaren ekuazioak dioskunez,

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_i I_i. \quad (19-51)$$

$$I = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \dots + \frac{V_{ab}}{R_n} = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right). \quad (19-52)$$

Beraz, definizioz $I = \frac{V_{ab}}{R}$ denez, hauxe dugu:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (19-53)$$

Ondorioz, *paralelo-konexioan erresistentzia baliokidearen alderantzizko balioa erresistentzien alderantzizko balioen baturaren berdina da*. Adibidez, bi erresistentzia paraleloz elkarturik ditugunean,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (19-54)$$

19.6.2. Kirchhoff-en legeak

Zirkuitu anizkoitzak korapilatsuagoak direnean, eta erresistentzietan batera hargailuak eta sorgailuak ditugunean, ezin ditugu erresistentzia baliokideak arestian azaldu dugun modura lortu. Kasu honetan erabiltzen den metodoa G. R. Kirchhoff (1824-1887) iker-tzaileari zor zaio, eta, horregatik, *Kirchhoff-en legeak* izenez ezaguna da.

Legeak eman baino lehen, sare elektrikoaren egiturari dagozkion bi osagairen definizioak ikusiko ditugu. Sare elektrikoan, *korapiloa* bi eroale baino eroale gehiago batzen diren puntuak da. *Maila*, berriz, sare elektrikoan dagoen edozein ibilbide itxi. Definizio horiek agertu ostean, Kirchhoff-en legeak emateko prest gaude:

1. Korapiloen legea. Edozein korapilotarantz doazen intentsitateen batura zero baliokoa da, hots:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (19-55)$$

2. Mailen legea. Edozein mailatan dauden indar elektroeragileen arteko batura, maila horretako RI motako gaien baturaren berdina da, hots, potentzial-erorketa guztien baturaren berdina:

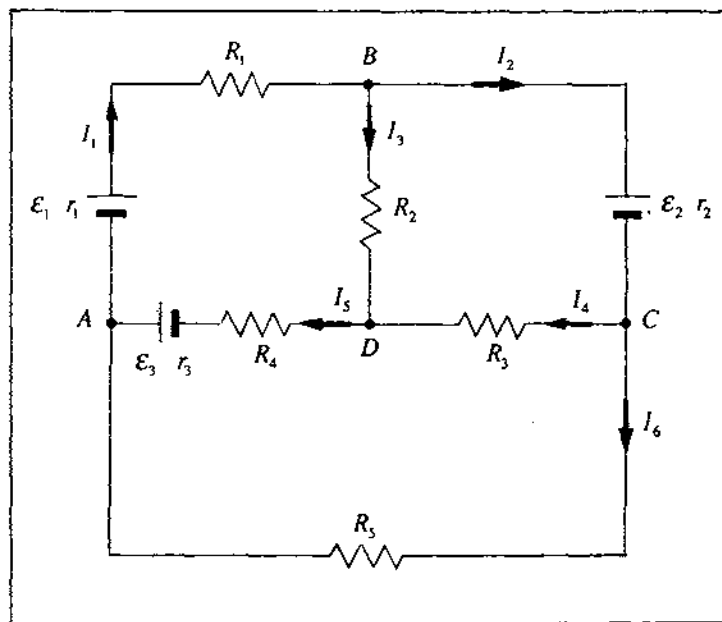
$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_j R_j I_j. \quad (19-56)$$

Zenbait ohar egingo ditugu bi lege horien esangurari buruz. Lehenengoak, azken batez, korapiloetan kargarik metatzen ez dela diosku; hots, jarraitutasunaren ekuazioa besterik ez da. Batura ongi egiteko, korapilotarantz doazen intentsitateei zeinu positiboa egokitzen zaie, eta korapilotik irteten direnei, zeinu negatiboa (edo alderantziz).

Mailen legea Ohm-en legearen orokorpenaren ondorio zuzena da. Indar kontraelektroeragileek alderantziz jarritako indar elektroeragileen antzera jotzen dute. Horrela eginik, ibilbide itxian barrena hauxe dugu:

$$\sum_i \varepsilon_i - \sum_j \varepsilon_{mj} = \sum_k R_k I_k. \quad (19-57)$$

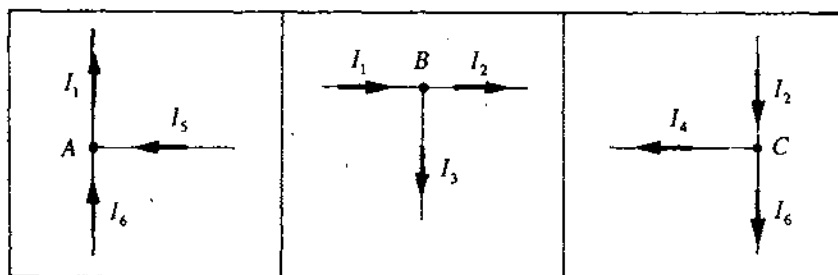
Hemen kontuz ibili behar da zeren, sarearen adarkadurak direla eta, hari desberdinetan intentsitate desberdinak baitaude.



19.19. irudia. Kirchhoff-en legeak erabiltzeko sare elektrikoa.

Kirchhoff-en legeak praktikan nola erabiltzen diren ikusteko, adibide bat jarriko dugu. Demagun 19.19. irudiko sare elektrikoa dugula, indar elektroeragile eta erresistentzia guztiak ezagunak ditugula, eta bide guztietatik doazen korronteen intentsitateak kalkulatu nahi ditugula.

Lehenengo, korapiloen legea erabiliko dugu. Guztira, lau korapilo ditugu: A, B, C, eta D. Dena dela, hauetariko hiru erabili ahalko ditugu soilik, laugarrenaz lortuko den ekuazioa beste hiruren konbinazio lineala baita. Hauexek dira korapiloak (19.20. ird.):



19.20. irudia. Aurreko irudiko sare elektrikoaren korapiloak eta intentsitateak.

Hartutako zeinu-irizpidea kontuan izanik:

$$A: \quad -I_1 + I_5 + I_6 = 0, \quad (19-58a)$$

$$B: \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0, \quad (19-58b)$$

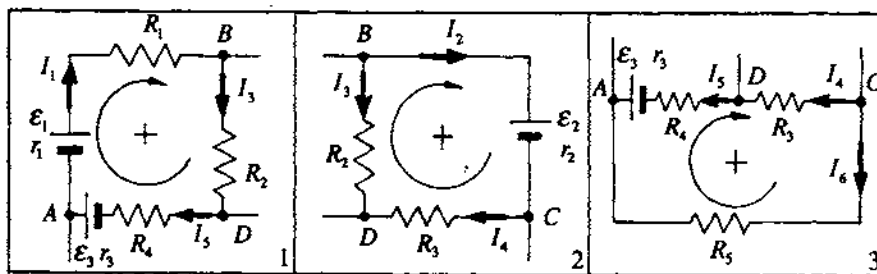
$$C: \quad I_2 - I_4 - I_6 = 0, \quad (19-58c)$$

eta guztien baturaz, D korapiloari dagokiona lor dezakegu:

$$D: \quad I_3 + I_4 - I_5 = 0. \quad (19-58d)$$

Ikus daitekeenez, D korapiloko ekuazioa besteen konbinazioa da. Hots, korapiloen legea erabiltzean, korapilo guztiak hartu behar dira bat izan ezik.

Goazen orain mailen legea erabiltzera. Hemen ere kontuz ibili beharko dugu konbinazio linealik ez egiteko, aukera desberdinak egon baitaitezke. Arrisku hori ekiditeko, maila bakoitzak gutxienez bide desberdin bat eduki beharko du. 19.21. irudian aukera bat erakusten da.



19.21. irudia. Aztertzen ari garen sare elektrikoaren mailak, eta beraietan aukeraturiko noranzkoak.

Irudian adierazi denez, maila bakoitzean noranzko bat aukeratu dugu ibilbide itxia egiteko. Zeinu-hitzarmen horrekin, indar elektroeragileak positiboak edo negatiboak dira, zeinu horretako intentsitateak sorrarazten dituzten ala ez kontuan hartuta. Honako ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$1: \quad \epsilon_1 + \epsilon_3 = r_1 I_1 + R_1 I_1 + R_2 I_3 + R_4 I_5 + r_3 I_5, \quad (19-59a)$$

$$2: \quad -\epsilon_2 = r_2 I_2 + R_3 I_4 - R_2 I_3, \quad (19-59b)$$

$$3: \quad -\epsilon_3 = -r_3 I_5 - R_4 I_5 - R_3 I_4 + R_5 I_6. \quad (19-59c)$$

Honelatan, ba, guztira sei ekuazio ditugu eta sei ezezagun (intentsitateak). Horiek askatuz, ebatzita egongo da problema. Zer esanik ez, emaitzetako baten bat negatiboa suertatuko balitz, horrek hauxe adieraziko liguke, alegia, intentsitate horri alde aurretik egokitu zaien noranzkoa ez, baizik eta aurkakoa dagokiola.

20. gaia

Elkarrekintza magnetikoa

Oso aspalditik marinelek bazekiten itsasoan norabidea finkatzen, iparrorratza deitutako tresnaz baliatuz. Izan ere, burdin minerala den magnetitazko orratzek, hari batez esekita edo ardatz bertikal batez cuntsita daudenean, joera berezia erakusten dute: ipar-hegoko norabidean jartzen dira. Joera hori dela eta, iparralderantz begira kokatzen den muturrari orratzaren 'ipar poloa' deritzo, eta besteari 'hego poloa'. Hortaz, halako orratz bi bata bestearen aurrean ipintzean, izen bereko muturrak bata bestetik aldentzen direla eta, berriz, izen desberdinekoak hurbiltzen direla ikusi denez gero, haxe ondorioztatu da: Lurra oso iman handia da, 'Ipar polo magnetikoa' daukana 'Hego polo geografikoan', eta alderantziz.

Polo magnetikoei buruzko teoria aski garatua izan zen, eta beraren azalbidea nolabait oinarritzeko asmotan, materiari beste ezaugarri berri bat egokitu zitzaion, 'propietate magnetikoa' delakoa alegia, zeina ordura arteko ezaugarri jakinei (inertzia propietatea edo masa, eta propietate elektrikoa edo karga) erantsi zitzaion. Hala ere, XIX. mendearen erdialdean Oersted, Faraday, Henry eta beste ikertzaile batzuek burutu zituzten ikerlanak zirela medio, lehengo teoria zaharra baztertu eta gure egunetara arte iraun duena onartu zen. Teoria horren arabera, elkarrekintza magnetikoa higitzen ari diren kargek elkarri egiten dioten eragina baizik ez da, eta beraz, elkarrekintza hori aztertzeke, nahikoa da partikulen karga eta abiadura ezagutzea, materiaren ezaugarri berririk zertan sarturik izan gabe.

20.1. PARTIKULA KARGATU HIGIKORREN GAINEKO INDARRAK

Partikula kargatu higikorrei eragiten dieten elkarrekintzak aztertzean, behin jatorri grabitatorioa edota elektrostatikoa dutenak kenduta, askotan beste indar bat aurkitzen dugu. Hori da, hain zuzen ere, *indar magnetikoa*. Hemen, aipaturiko indarraren adierazpen matematikoa aurkeztera mugatuko gara, nork eta nola eriden zuen, aurreragoko beste ikasturte baterako lagaturik. Higitzen ari den partikula kargatuaren gaineko indar magnetikoa hone-laxe adieraz daiteke:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (20 - 1)$$

non q partikularen karga, $\mathbf{v}$ partikularen abiadura eta $\mathbf{B}$ eremu magnetikoaren intentsitate-bektorea diren.

Ikus daitekeenez, grabitazioari eta elektrikari eskainitako gaietan ez bezala, oraingo honetan eremu-kontzeptua hasiera-hasieratik sartu dugu elkarrekintza magnetikoa azaltzeko, zeren, Fisikaren hainbeste arlotan gertatzen den antzera, magnetismoan ere eremu-kontzeptua baliabide egokia baita. Beraz, **B** eremu magnetikoaren intentsitate-bektorea edo, izen laburragoaz, *eremu magnetikoa* onartu eta erabiliko dugu, elkarrekintza magnetikoa adierazteko lagungarria zaigu eta.

Eremu magnetikoa higitzen diren kargak sortzen dute eta, horrez gain, eremuaren eta bera sorrarazten duten partikulen arteko loturak ere badaude. Haatik, ez dugu oraingoz horren ardurarik hartuko, eta puntu horiek 20.5. atalean eta ondokoetan aztertuko ditugu.

Ilidoari berriro helduta, goazen aurreko adierazpena aztertzerara. Has gaitezen eremu magnetikoaren dimentsioak erdiesten:

$$[B] = \left[\frac{F}{qv} \right] = \frac{MLT^{-2}}{QLT^{-1}} = MT^{-1}Q^{-1} = MT^{-2}I^{-1}. \quad (20-2)$$

Hortaz, nazioarteko SI unitate-sisteman eremu magnetikoaren unitatea, hots, *tesla* (T) deritzona, ondokoa dugu:

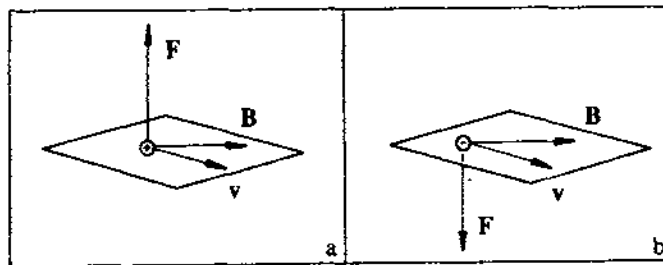
$$1 \text{ T} = 1 \text{ k gs}^{-2} \text{ A}^{-1}. \quad (20-3)$$

Orain, kalkula dezagun indar magnetikoaren modulua:

$$|F| = qvB \sin\theta. \quad (20-4)$$

Zer esanik ez, θ angelua **v** eta **B** bektoreek eratutakoa da.

Indarraren norabideari gagozkiola, alboko irudian erakutsi dira karga positibodun partikularren kasua zein negatibodunarena, biak ere biderketa bektorialaren aplikazio zuzenak izanik.



20.1. irudia. a) Karga positiboaren gaineko indar magnetikoa. b) Karga negatiboaren gainekoa.

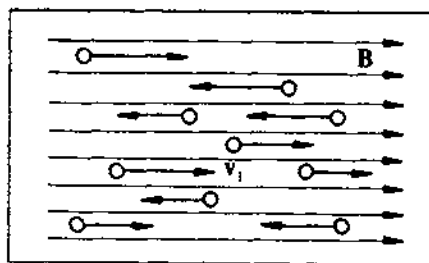
Azkenik, datorren atalari begira garrantzi handikoa den ohar bat egin behar dugu, eremu magnetikoa besterik ez dagoeneko espazioalde zeharkatzen duen partikula kargatuari buruz. Hona hemen oharra, era bitara adierazita:

- $\mathbf{F}$ bektorea $\mathbf{v}$ bektorearen perpendikularra denez, partikularen azelerazioa normala da oso-osorik, eta, beraz, abiaduraren moduluak konstante dira, norabidez etengabe aldatuz doan arren.
- Indar magnetikoak ez du lanik egiten, ibilbidearen perpendikularra baita. Beraz, partikularen energiak konstante dira eremu magnetikoaren eraginpean higitzean.

20.2. EREMU MAGNETIKOA ZEHARKATZEN DUEN PARTIKULAREN HIGIDURA. ADIBIDEAK

Lehenik eta behin, diogun ezen eremu magnetiko uniforme soilik hartuko dugula kontuan, laborategiko aparatu garrantzitsuenetan erabiltzen direnak horrelakoak izaten baitira, hala nola masen espektrografo eta espektrometroetan, ziklotroietan, eta abarretan.

Arazoa ahalik eta errazkien aztertzeko, hiru kasutan banatuko dugu.



20.2. irudia. Partikula kargatuaren abiaduraren norabidea eremuaren paraleloa denean, ez du indarririk jasaten.

20.2.1. $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ paraleloak dira

Kalkula dezagun 20.2. irudiko edozein partikulak jasaten duen indar magnetikoa ($\mathbf{v}_1$ abiadura daraman partikulak jasaten duena, adibidez), beraren karga-mota edozein izanik. Hara:

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}, \quad (20-5)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1}{m} \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (20-6)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \text{ktea}. \quad (20-7)$$

Hots, abiaduraren moduluak ez ezik, norabidea ere ez da aldatzen. Labur esanda, partikularen abiadura eremuaren paraleloa denean, beraren higidura zuzena eta uniforme da.

20.2.2. $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ perpendikularrak dira

Oraingo kasu honetan haxe dugu:

$$\mathbf{F}_2 = q\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \neq \mathbf{0}. \quad (20-8)$$

Beraz, abiaduraren norabidea aldatuz joango da (dakigunez, modulua ez). Haatik, abiaduraren norabide berria $\mathbf{v}_2$ eta $\mathbf{a}$ (edo $\mathbf{F}_2$) bektoreek osatzen duten planoan datzanez gero, norabide horrek eremuaren perpendikularra izaten iraungo du. Unez une arrazoibide berbera errepikatuz, partikularen ibilbidea eremuaren perpendikularra den plano batean gertatuko dela ondoriozta dezakegu, eta hortik:

$$F_2 = qv_2B = k\text{tea.} \quad (20-9)$$

Bestalde, indarra eta abiadura elkarren perpendikularrak direnez,

$$\mathbf{F}_2 = m \frac{v_2^2}{r} \mathbf{u}_N \rightarrow r = \frac{mv_2}{qB} = k\text{tea,} \quad (20-10)$$

$\mathbf{u}_N$ delakoa $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ bektoreek eraturiko planoaren perpendikularra izanik.

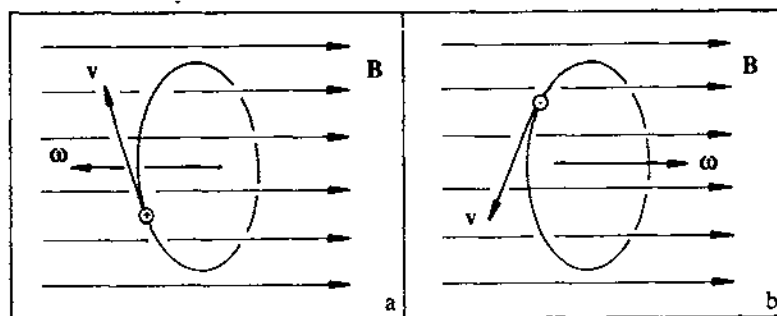
Kurbadura-erradio konstantea duen higidura lau bakarra dago, hots, higidura zirkularra, eta horixe izango da partikulak deskribatuko duena. Kalkula ditzagun higidurari dagozkion periodoa, maiztasuna eta abiadura angeluarra. Hauexek dira:

$$T = \frac{2\pi r}{v_2} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad (20-11)$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}, \quad (20-12)$$

$$\omega = 2\pi v = \frac{q}{m} B. \quad (20-13)$$

Bistakoa denez, hiru magnitudeok ez dute abiadurarekiko menpekotasunik.



20.3. irudia. a) Partikula positiboaren higidura B eremuaren plano perpendikularrean. b) Partikula negatiboaren ibilbidea.

20.3. irudian partikula positiboaren eta negatiboaren ibilbideak ageri dira. Bertan ikus daitekeenez, partikula positiboaren kasuan ω eta $\mathbf{B}$ bektoreen noranzkoak elkarren aurkakoa dira; partikula negatiboaren kasuan, aldiz, noranzko berekoak.

Laburki esanda, eremu magnetikoaren perpendikularra den abiadura duen partikularen higidura zirkularra da, zirkunferentziaren erradioa abiaduraren araberkia izanik. Periodoak, eta hortaz, maiztasunak eta abiadura angeluarrak, ordea, ez dute abiadura linealaren menpekotasunik. Abiadura angeluarra honelaxe adierazten da bektorialki:

$$\omega = -\frac{q}{m} B. \quad (20-14)$$

20.2.3. $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{B}$ bektoreek edozein angelu eratzen dute

Esan barik doa, oraingo hau kasurik orokorra dugula, eta aurreko bien batura, nonbait. Eremuaren eta abiaduraren arteko angelua θ dela jorik, deskonposa dezagun abiadura eremuaren norabide paraleloan eta perpendikularrean:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \begin{cases} v_1 = v \cos \theta, \\ v_2 = v \sin \theta. \end{cases} \quad (20-15)$$

Orain, goazen indarraren adierazpenera:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{B} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (20-16a)$$

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} \quad \text{eta} \quad \mathbf{F}_2 = q\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} \quad \text{izanik.} \quad (20-16b)$$

Berehala kontura gaitezke, horiexek direla 20.2.1 eta 20.2.2 azpiataletan, hurrenez hurren, agertu zaizkigun indarrak. Hortaz, gainezarmenaren printzipioan oinarriturik, aipaturiko kasu biak batera hartuz, oraingo kasu honi dagokion ibilbidea helizea dela ondorioztatu dezakegu. Areago, helizearen ardatza eremuaren paraleloa da, eta erradioa ondoko hau:

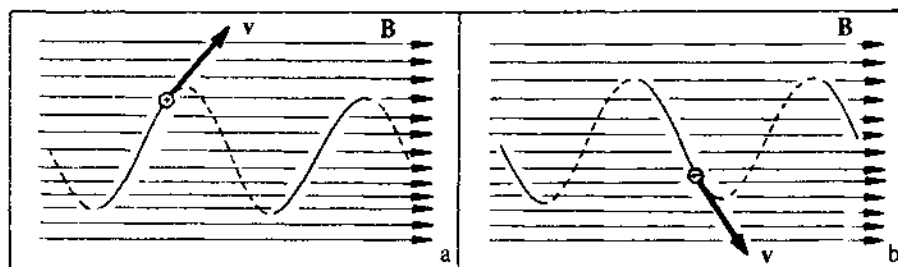
$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB}. \quad (20-17)$$

Abiadura angeluarrari, periodoari eta maiztasunari gagozkiela, berauek abiadura linealaren menpekotasunik ez dutenez, 20.2.2 azpiatalean aurkitutako emaitza berberak kasu honetarako ere balio dute.

Azkenik, diogun ezen helizea zehazki eta egokiro definiturik gera dadin, beraren ezaugarri bat falta zaigula, 'pausoa' delakoa alegia. Helizearen pausoa ondoko era honetan definitu ohi da: bira oso bat burutzeko igarotako denboran, ardatzaren norabidean korritzen den distantzia. Hortik, pausoa (δ) kalkulatzeko, ardatzaren (hots, eremuaren) norabidean abiadurak duen osagaia (v_1) eta bira oso bakoitzean pasatzen den denbora (T) biderkatu behar ditugu, hau da,

$$\delta = v_1 T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}. \quad (20-18)$$

Beraz, kasu orokorrean, eremu magnetikoan zehar doan partikula kargatuaren ibilbidea helize-tankerakoa da, beronen erradioa eta pausoa oraingo azpiatal honetan agertutakoak izanik, eta higiduraren ezaugarriak, T , v eta ω , alegia, 20.2.2 azpiatalekoak. Hain zuzen, 20.4. irudian partikula positiboaren kasurako helizea eta partikula negatiboaren kasurako ikus daitezke.



20.4. irudia. a) Partikula positiboaren ibilbide helikoidala, eremu magnetiko uniformean. b) Partikula negatiboarena.

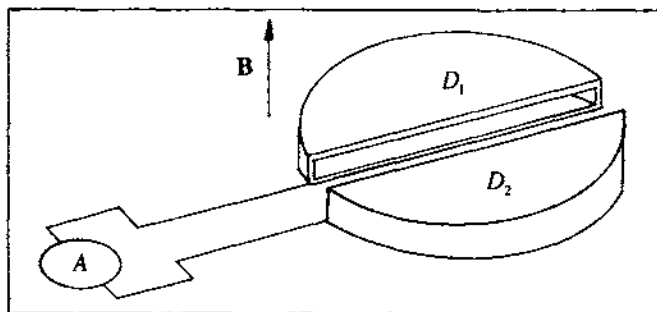
20.2.4. Adibideak

Aurreko kontzeptuen eta emaitzen aplikazio praktikoari lotuta dauden bi tresna garrantzitsuren aipamena egingo dugu adibide modura: masen espektrometroarena eta ziklotroiaarena.

Masen espektrometroa. Masen espektrometroak mota askotakoak badira ere, guztiek funts eta helburu berberak dituzte. Hona hemen bata eta bestearen berri laburra.

Aldez aurretik eremu elektrikoak azeleratu dituen atomo ionizatuak, beren abiaduraren perpendikularra den eremu magnetikoan zehar pasarazten dira, eta bertan zirkunferentzierdiko ibilbidea burutzen dute, pantailarekin topo egin arte. Pantailan ibilbidetaren erradioa neurtzen da, eta eremu elektrikoan erabilitako potentzial-diferentziaren bitartez abiadura zein den jakin daitekeenez, horren bidez eta $(20-10)$ adierazpena erabiliz. q/m erlazioa lor daiteke, hau da, ioien kargaren eta masaren arteko zatidura. Bestalde, era desberdinez, partikulen karga lor daiteke, eta ondorioz beraien masak ere. Horrela, masen espektrometroak oso aparatu egokiak dira elementu kimikoen isotopoak ikertzeko.

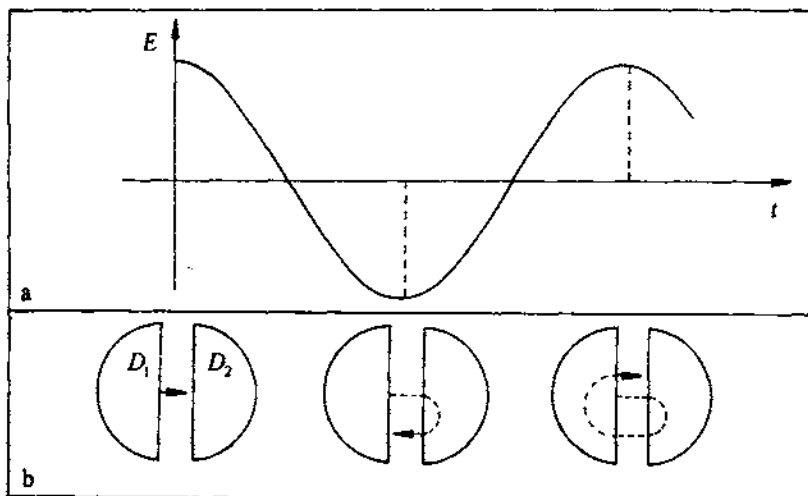
Ziklotroia. Bigarren eta azken adibide modura, partikulen azeleragailu-mota bat erakutsiko dugu: *ziklotroia*.



20.5. irudia. Ziklotroiaaren egitura. Partikula kargatuak D_1 eta D_2 piezen barnealdetik higitzen ari dira B eremuaren eraginpean.

Ziklotroia, 20.5. irudiko D_1 eta D_2 zilindroerdi bakoek osatzen dute. Pieza horiek uniformea eta beraien oinarrien perpendikularra den B eremu magnetikoak zeharkatuta

daude. Bestalde, D_1 eta D_2 piezak beren erradioarekin alderaturik oso txikia den distantziaz banandurik daude, eta ertz bien arteko espazioaldean, A alternadoreak sortutako eremu elektriko dago (geroxeago ikusiko dugunez, eremu elektrikoak konstante iraun barik, alternoa izan behar du). D_1 eta D_2 -ren erdialdean, irudian ageri ez den “ioi-kanoia” dago ezarrita, ziklotroian azeleratuak izango diren partikulak bertara jaurti ditzan.



20.6. irudia. a) Eremu elektriko alternoareen grafikoa. b) Partikularen ibilbidea jauzitik jauzira.

Ioi bat askatzen den bezain laster, eremu elektrikoak pieza baten barrura bidaltzen du (eremu elektrikoak maximoa denean askatzen da partikula). Piezaren barrualdean dagoen eremu elektrikoak nulua denez gero, eremu magnetikoak soilik eragingo dio ioiari, eta beronek abiaduraren balioa batere aldatu gabe zirkunferentziaz ibilbidea beteko du. Pieza baten baretik bestearenera pasatzen deneko uneetan, hots, ‘jauzi’ bakoitzean, eremu elektrikoak bultzatu egiten du partikula, eta horrela, partikularen energia handituz doa jauziz jauzi (20.6. irudia).

Abiadura handituz doan heinean, zirkunferentziazien erradioa ere gero eta luzeagoa gertatzen da, partikula ia piezen hegaleraino heldu arte. Orduan bertako eremu magnetikoa ahuldu eta ezabatu egiten da zeharo, eta ondorioz, behin haren eraginetik aske geratzean, ioia ziklotroitik ihesi doa, egokiro prestatutako zirrikitu batean zehar.

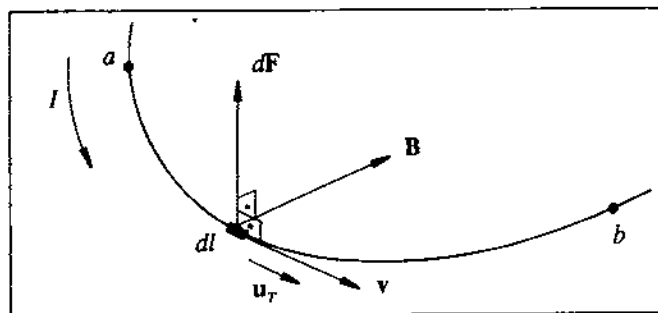
Ziklotroiaren jardueraren koxka ondoko ñabardura honetan datza: irudian ikus daitekeenez, eremu elektrikoaren noranzko-aldaketek eta ioiaren higidurak aldiberekoak izan behar dute, zeren bestela jauzi batzuetan partikulak energia irabazi ordez galdu egingo bailuke edo, beste era batera esanda, eremu elektrikoak bultzatua gertatu barik balaztatua izango bailitzateke. Zorionez, 20.2.2 azpiatalean erakutsitakoaren arabera, eremu magnetikoaren eraginpeko higidura zirkularren maiztasunak ez du abiaduraren menpekotasunik, eta, horri esker, nahiz eta gero eta arinago joan, ioiak beti erabiltzen du denbora berbera biraerdi bakoitza betetzeko. Beraz, hasieran eremu elektrikoak eta partikularen higidura sinkronizatuta egon badira, horrelaxe iraungo dute bilakabide osoan barrena (partikularen abiadura argiarenera gehiegi hurbiltzen ez bada, behintzat).

20.3. KORRONTTE ELEKTRIKOAREN GAINEKO INDAR MAGNETIKOA

Azalduta izan denez (ikus 19. gaia), korrante elektrikoa eroalearen barnetik higituz doazen elektroien multzoa besterik ez da. Ondorioz, korrante elektrikoak eremu magnetikoaren zelanbaiteko eragina pairatu behar du, eta horixe da orain aztertzea goazena. Azalpena kasu bitan zatituko dugu, arazoa hobeto ulertzeko.

20.3.1 Korrante lineala

Errealitatean benetako korrante linealik ez badago ere, kasu hau oso hurbilketa ona gerta daiteke zenbait egoeratan, korrontcak hari mehetxoetan barrena doazenean behinik behin.



20.7. irudia. Korrante linealaren dl elementu diferentzialaren gaineko indar magnetikoa.

20.7. irudiko hariaren dl zati txikia hartuta, eta beraren barruan dq karga v abiaduraz higitzen ari dela kontsideratuta, B eremuak egiten dion indarra hauxe izango da:

$$dF = dqv \times B. \quad (20-19)$$

Ondoren, hariaren norabidean eta korronttearen noranzkoan u_r bektore unitarioa erabilita, eta, aldi berean, abiaduraren eta intentsitatearen definizioak aplikatuta, hauxe dugu:

$$dF = dq \frac{dl}{dt} u_r \times B = \frac{dq}{dt} dl u_r \times B = I u_r \times B dl. \quad (20-20)$$

Adierazpen horretatik abiatutik, hariaren edozein zati finituren gaineko indarra kalkulatu dezakegu. Adibidez, a puntutik b punturainoko zatiak jasaten duena, hauxe izango da:

$$F = I \int_a^b u_r \times B dl. \quad (20-21)$$

Zer esanik ez, integrala ebazteko orduan, integrakizunaren izaera bektoriala hartu behar da kontuan. Haria zuzena eta eremua uniformea baldin badira, emaitza oso era errazean lor daiteke, honelaxe hain zuzen:

$$u_r \times B dl = ktea. \quad \rightarrow \quad F = I l_{ab} u_r \times B, \quad (20-22)$$

non l_{ab} luzera a eta b puntuen arteko zatiaren luzera den.

20.3.2. Karga-multzo higikorrak

Multzoaren edozein q karga-kopuru txikiren bolumena ΔV eta berorren abiadura $\mathbf{v}$ izanik, bolumen-unitateko $\mathbf{f}$ indarra hauxe izango da:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (20-23)$$

non ρ delakoak karga higikorraren dentsitatea adierazten duen.

Bestalde, karga higikorraren multzoak aztertzean (19.2. atala), korrante-dentsitatea izeneko bektorea ondoko era honetara definitu genuen,

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} \quad \text{edo} \quad \mathbf{j} = \rho\mathbf{v}, \quad (20-24)$$

eta hortik, bolumen-unitateko indarrari dagokion adierazpena honelaxe labur dezakegu:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (20-25)$$

Behin bolumen-unitateko indarra lortuta, karga higikorraren multzoaren zati finitu baten gainera kalkulatzeko, integratu besterik ez dugu egin beharko, hau da:

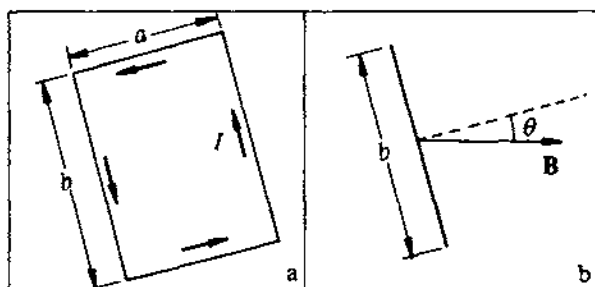
$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV, \quad (20-26)$$

non V delakoa hautatuko zatiaren bolumena den.

Aurreko azpiatalaren azkenaldean esandakoari berriro helduz, oraingo honetan ere, integrakizuna bektoriala dela azpimarratu behar dugu.

20.4. KORRONTE ELEKTRIKOAREN GAIKEKO INDAR-MOMENTU MAGNETIKOA

Eremu magnetikoak korrante elektrikoei eragindako indar-momentuen azterketa aski korapilatsua bada ere, hemen errazena eta, halaber, ohikoena den kasua erakustera mugatuko gara.



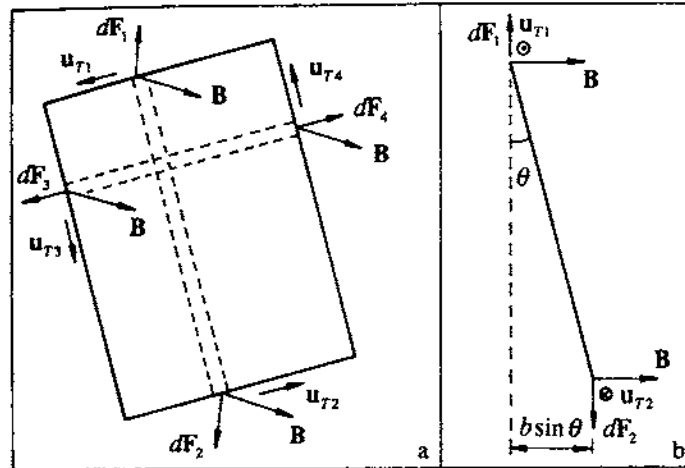
20.8. irudia. Hari edo zirkuitu errektangeluarrean eremu magnetikoak duen eraginaren azterketa.

Beraz, irudiko espira (zirkuitu) errektangeluarra jasaten duen indar-momentuan finikatuko gara, zeina $\mathbf{B}$ eremu uniformeak sortua den. Hain zuzen, I korrantea daraman espiraren planoaren norabide perpendikularrak θ angelua eratzen du eremuarekin, eta aldean luzerak a eta b dira, a luzerakoak eremuaren perpendikularrak izanik.

Lau aldeetan zati diferentzial bana kontsideratuz, eta bakoitzean eremuak sortzen duen indarra kalkulatu, ondoko emaitzetara helduko gara (ikus 20.9. irudia):

$$dF_1 = dF_2 = IB \, dl, \quad (20-27)$$

$$dF_3 = dF_4 = IB \, dl \cos \theta. \quad (20-28)$$



20.9. irudia. Zirkuitu errektangeluarrean B eremuaren eraginez sorturiko indarrak.

dF_3 eta dF_4 indarrei dagokienez, indar erresultantea nulua izateaz gain, beraien indar-momentu erresultantea ere nulua da, aplikazio-lerro berbera dute eta. Hortaz, b luzerako aldean gainean agertzen diren indarrak ahanzi egin ditzakegu, materialaren elastikotasuna itxuragabetzerik ez gertatzeko adinakoa dela jorik (bestela deformatu egingo litzateke zirkuitua).

dF_1 eta dF_2 indarrei gagozkiela, ordea, indar erresultantea nulua bada ere, beraien aplikazio-lerroak desberdinak direnez gero, indar-bikotea osatzen dute. beronen momentuaren modulua hauxe izanik:

$$d\tau = dF_1 b \sin \theta = IBb \, dl \sin \theta. \quad (20-29)$$

Hortik, integrazio bidez, segituan lor dezakegu espira osoaren gaineko indar-momentua.

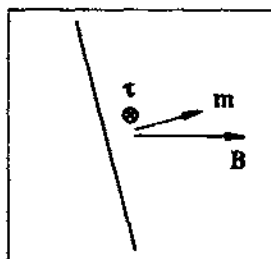
$$d\tau = IBb \sin \theta \int_0^n dl = IBb \sin \theta = ISB \sin \theta, \quad (20-30)$$

non S letraz espiraren aldeek mugaturiko gainazal lauaren azalera adierazi dugun.

Ikusi dugunez, oinarritzko indar diferentzial guztien erresultantea nulua denez gero, eremu magnetikoak espirari egiten dion efektu bakarra τ indar-momentua da, eta beronen balioa eta norabidea adierazpen bakar baten bitartez eman ahal izateko, espiraren *momentu dipolar magnetikoa* delako bektorea definituko dugu. Bektore horren modulua IS biderkadura da, eta norabidea espiraren planoaren perpendikularra, torlojuaren erregelaren arabera. Beraren dimentsioak $[IL^2]$ dira, eta unitatea, Am^2 , nazioarteko unitate-sisteman. Aurreko guztia laburbilduz, hona hemen momentu dipolar magnetikoaren adierazpena:

$$\mathbf{m} \equiv I \mathbf{S} \mathbf{u}_N, \quad (20-31)$$

$\mathbf{u}_N$ delakoa planoaren norabide perpendikularreko bektore unitarioa izanik, noranzkoaren irizpiderako korrontearen norabidearen araberrako torlojuarena harturik.



20.10. irudia. Espiraren momentu dipolar magnetikoaren, eremu magnetikoaren eta indar magnetikoaren norabideak.

Esan dugunez, espiraren momentu dipolar magnetikoa erabiliz, lehen kalkulatu dugun indar-momentua oso era trinkoaz idatz dezakegu, honelaxe hain zuzen (ikus 20.10. irudia):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (20-32)$$

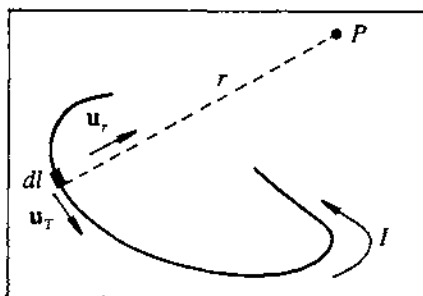
Irakurleak egiazta dezakeenez, biderkadura bektoriala garatuz, $\boldsymbol{\tau}$ -ren modulua eta norabidea erdiets daitezke.

Bukatzeko, ohar bi:

- Eremu elektrikoak dipolo elektrikoaren gainean sortzen duen indar-momentuak (ikus 18. gaia) eta eremu magnetikoak espiraren gainean sortzen duenak duten antzekotasuna dela eta, espirei *dipolo magnetikoak* deitu ohi zaie.
- Momentu dipolar magnetikoa definitzeko orduan, espira errektangeluarraren kasuan oinarritu garen arren, diogun ezen aipaturiko bektorearen erabilpenaren arloa askoz ere zabalagoa dela. Egia esan, korronte itxi guztiei $\mathbf{m}$ bektorea esleai dakieke, zirkuituaren tankera edo eitea edonolakoa izanda ere. Areago, ibilbide itxia korritzen duen edozein partikula kargatuk bere momentu dipolar magnetikoa du; adibidez, atomoaren erdigunearen inguruan biraka ari den elektroi bakoitzari bere $\mathbf{m}$ bektorea dagokio.

20.5. KORRONTE ELEKTRIKOAK SORTUTAKO EREMU MAGNETIKOA

20.1 atalean ohartarazi dugunez, higitzen ari diren partikula kargatuek eremu magnetikoa sortzen dute; hori dela eta, korronte elektrikoak karga higikorren multzoa denez gero, eremu magnetikoa sortuko du. Hala ere, korrontea eta berari dagokion eremua elkarrekin lotzen dituen harremana ez da erraza, nolabait esatearren, eta XIX. mendearen hasierako fisikari entzutetsuenak jo eta ke aritu ziren arazo hori ikertzen. Garai hartan garatutako lanei esker *Biot-Savart-en legea* lortu zen, zeina makina bat ikerketaren emaitza den. Hona hemen guk postulatu modura dakargun lege ospetsu hori:



20.11. irudia. Biot-Savart-en legearen adierazpenko elementuak.

$$\mathbf{B} = K_m I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl, \quad (20 - 33)$$

non $\mathbf{u}_T$ eta $\mathbf{u}_r$ direlakoak 20.11. irudian ageri diren bektore unitarioak diren, eta K_m , geroago zehaztuko dugun konstantea. Formula honen erabilbidea azaltzera pasatu baino lehenago, ñabarduna batzuk argitzea komeni da.

- Formula horrek, P bezalako edozein puntutako eremu magnetikoa kalkulatzeko balio du, hots, zirkuituak daroan korronte elektrikoak sortutakoa (ikus 20.11. irudia). Horixe da, hain zuzen ere, $\oint$ sinboloak adierazten duena, alegia, dl elementuak dauzkan lerroak itxia izan behar duela. Beraz, aurreko adierazpen finitutik ondoko era infinitesimalera pasatzean,

$$d\mathbf{B} = K_m I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl, \quad (20 - 34)$$

egiten den urratsa, urrats matematiko hutsa da. Hitz desberdinez esanda, ezin dezakegu era zuzenean baizta $d\mathbf{B}$ hori zirkuituaren dl zatia emaria denik. Izan ere, ez dago zirkuitutik dl bezalako zatirik bakartzeko modu esperimentalik, eta ondorioz, ez dugu zirkuituak daukan dl zati bakoitzak sortzen duen efektua neurtzerik.

- Aurrekoaren motako beste integral batzuetan gertatu zaigunez, oraingo honetan ere integrakizuna bektoriala dela hartu behar da kontuan.
- K_m koefizientea araukortasunerako faktorea besterik ez da, eta beraren balioa zein den 20.7. atalean ikusiko dugu. Dagozkion dimentsio eta unitateak, ordea, Biot-Savart-en legetik atera ditzakegu zuzenean, hots:

$$\text{dimentsioak: } [K_m] = [BI^{-1}L] = \text{MLT}^{-2}\text{I}^{-2},$$

$$\text{unitateak (nazioarteko sisteman): } \text{kg m s}^{-2}\text{A}^{-2} \text{ edo } \text{NA}^{-2}.$$

Bestalde, Coulomb-en legean K_e koefizientea $1/4\pi\epsilon_0$ zatiduraz ordezkatzean azaldu genuen arrazoi berberetatik, hemen ere $K_m = \mu_0/4\pi$ egiteko ohitura dago. Zer esanik ez, K_m eta μ_0 dimentsio eta unitate berekoak ditugu. Sartu berri dugun ordezkaketa ondoz, Biot-Savart-en legea honelaxe idatzi ohi da:

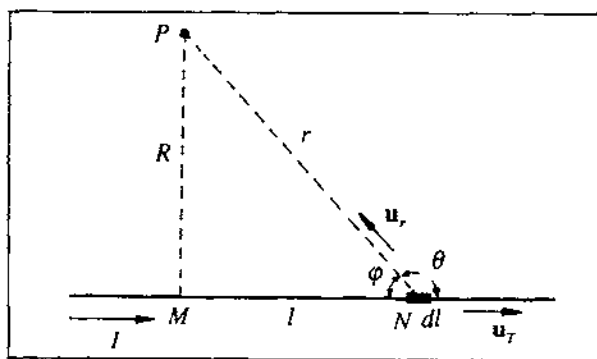
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (20 - 35)$$

- Bukatzeko, aitortu beharra dago ezen Biot-Savart-en legeak maila teorikoan garrantzi handia eduki arren, praktikari begira oso erabilgarritasun murriztua erakusten duela, integralaren ebazpena zailegia gertatzen baita, eite errazako zirkuituen kasuetan izan ezik.

20.6. BIOT-SAVART-EN LEGEAREN ERABILERAREN ADIBIDE BI

20.6.1 Korrante zuzen eta mugagabeak sortutako eremu magnetikoa

Esan dezagun, aldeztu aurretik, oraingo kasu hau erabat teorikoa dela, errealitatean mugagabea errealitate ez baitago. Dena den, Biot-Savart-en legea azaltzeko egokia izateaz gain, eroale zuzenak beren luzerarekin alderatuta hurbil dauden puntuetan sortzen duten eremu magnetikoaren hurbilketa ona da.



20.12. irudia. Korrante elektriko zuzenak P puntuan sortutako eremu magnetikoaren kalkulurako elementuak.

Demagun 20.12. irudian ageri den eroale zuzen eta infinitua. Haritik R distantziara dagoen edozein puntutan eremua kalkulatzeko, P puntuan adibidez, $\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r$ bidekadura bektoriala beti ere plano berberaren perpendikularra dela ikus dezakegu. Plano hori, hariak eta P puntuak eratuakoa da, eta beraz, $\mathbf{B}$ bektoreak plano horren perpendikularra izan behar du. Hortaz, eremuaren norabidea finkatuta dagoenez gero, beraren modulua lortu beharko dugu soilik, hots:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\sin \theta}{r^2} dl. \quad (20 - 36)$$

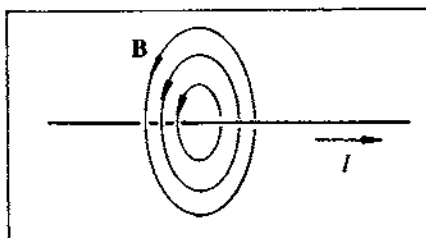
Integrala ebazteko, PNM triangeluan oinarrituko gara. Ikus daitekeenez,

$$\sin \varphi = \frac{R}{r} = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \rightarrow r = \frac{R}{\sin \theta}, \quad (20 - 37)$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{l} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \rightarrow dl = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta. \quad (20 - 38)$$

Orain integralera eramanez, eremuaren balioa hauxe izango da:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{R^2 / \sin^2 \theta} \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (20-39)$$



20.13. irudia. Korronte elektriko zuzenaren inguruko eremu magnetikoaren lerroak.

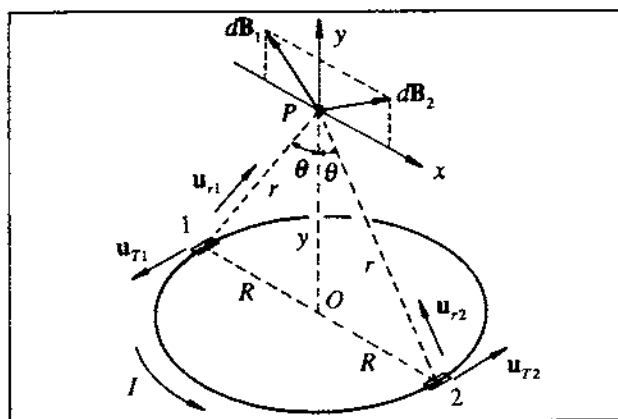
20.13. irudian eremu-lerroak ikus ditzakegu. Lerroak hariarekiko plano perpendikularretan dauden zirkunferentziak dira, beraien zentroak harian bertan dituztenak.

20.6.2 Korronte zirkularrak sortutako eremu magnetikoa

Kasu honetan, espira zirkular baten ardatzeko puntuetara mugatuko gara, zeren, espazioko beste edozein puntutan eremua aztertzen saiatuko bagina, ebatzi beharreko integrala korapilatsuegi gertatuko litzazuke eta.

Demagun, 20.14. irudiko espiraren ardatzean O zentrotik y distantziara dagoen P puntua eta zentroarekiko simetrikoak diren (1) eta (2) espiraren zati elementalak hartzen ditugula. Integralean elementu horien kausaz P puntuari dagozkion eremu diferentzialen moduluak ondokoak dira:

$$dB_1 = dB_2 = dB = \frac{\mu_0 I \sin \pi/2}{4\pi} \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl, \quad (20-40)$$



20.14. irudia. Korronte elektriko zirkularrak bere ardatzeko P puntuan sortutako eremu magnetikoaren azterketa.

20.14. irudiko ardatzetako osagaiak hauexek dira:

$$-dB_{1x} = dB_{2x} = dB \cdot \cos \theta, \quad (20-41a)$$

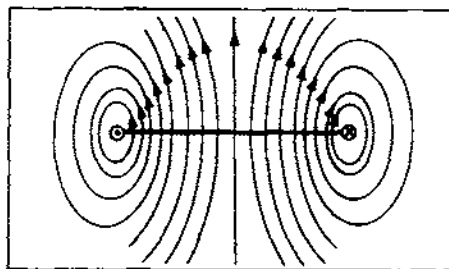
$$dB_{1y} = dB_{2y} = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta dl. \quad (20-41b)$$

Irudian ikus dezakegunez, dB_{1x} eta dB_{2x} osagaiek elkar anulatu egiten dute; dB_{1y} eta dB_{2y} , berriz, elkarrekin batzen dira. Hortaz, ardatzaren puntuetako eremua ardatzaren norabidekoa da. Kalkula dezagun, ba, eremuaren balioa:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \oint dl = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \sin \theta. \quad (20-42)$$

Adierazpen horretan bi parametro daude: r eta θ . Haatik, bistakoa denez, parametro bakar bat nahikoa da P puntuaren posizioa finkatzeko. Beraz, espiraren zentrotik P punturainoko y altuera aukeratuz, eremuaren moduluaren balioa hauxe da:

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2} (R^2 + y^2)^{3/2}. \quad (20-43)$$



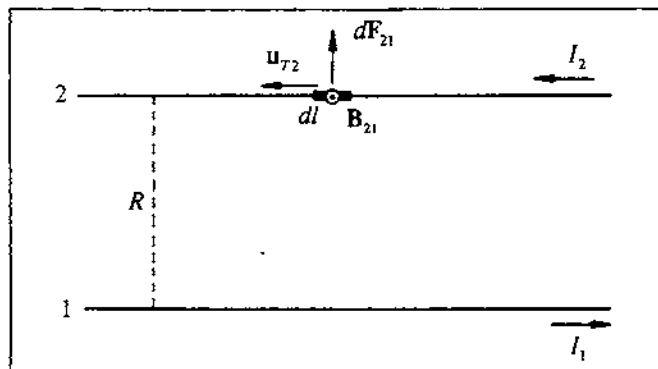
20.15. irudia. Espiraren ardatzetik pasaturik, espiraren planoaren perpendikularra den planoko eremu magnetikoaren lerroak.

Azkenez, 20.15. irudian espirak espazio osoan sortzen duen eremu magnetikoaren eremu-lerroak erakutsi ditugu. Eremu-lerroak, espiraren ardatzetik pasatzen den plano bati dagozkionak dira, eta halako plano guztietan berdin-berdinak dira.

20.7. KORRONTEEN ARTEKO INDARRAK

Orain arte ikusi duguna laburbilduz, batetik korrante elektrikoak eremu magnetikoaren sorburuak dira, eta bestetik eremu magnetikoek korrante elektrikoaren gaineko indarrak sortzen dituzte. Hortaz, berehalako ondorioa hauxe da, hots, korrante bi hartuz, elkarri eragin behar diotela. Ondorio horrek edozein korrante-multzotarako balio badu ere, guk hemen kasurik errazena baizik ez dugu aztertuko, preseski, zuzenak, paraleloak eta luzera infinitukoak diren bi korrenteren arteko elkarrekintza magnetikoa.

Beraz, har ditzagun eroale zuzen eta paralelo bi, R distantziaz banandurik daudenak. Batak I_1 korronea daroa, eta besteak I_2 (20.16. irudia).



20.16. irudia. Bi korrante zuzen eta paralelaren arteko indarra.

Lehenbizi, 1 korranteak bertatik R distantziara sortzen duen eremuaren balioa (modulua) idatziko dugu:

$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \quad (20-44)$$

Horren ondorioz, eremu horrek 2 eroalearen dl zatia egiten dion indarra hau da:

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 \mathbf{u}_{T2} \times \mathbf{B}_{21} dl \rightarrow dF_{21} = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} dl. \quad (20-45)$$

Beraz, 2 eroalearen luzera-unitateko indarra ondokoa dugu:

$$\frac{dF_{21}}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}. \quad (20-46)$$

Bistakoa den simetrian oinarriturik, hauxe egiazta dezakegu, alegia, 2 korranteak 1 korranteari egiten dion indarra lortu izan bagenu, emaitza berberera helduko ginatkeela (haatik, diogun ezen esandakoa akzio-erreakzioaren printzipioaren ondorioa ez dela, indar magnetikoek aipaturiko printzipioa zertan beterik ez baitute).

Harira itzuliz, aurreko adierazpena abiapuntutzat hartuta, μ_0 koefizientearen balioa emango dugu. Horretarako, 1948. urtean Pisuei eta Neuriei buruzko Hamaikagarren Bilera Orokorrean emaniko korrante elektrikoaren unitatearen definizioa erabili beharko dugu. Hona hemen definizioa: «*Ampere unitatea korrante-intentsitatearen unitatea da, hain zuzen ere, luzera infinituko bi eroale paralelo artez mantenduak direnean, eroaleen ebakidura-sekzioa arbuigarria izanik, eta hutsean bata bestetik metro batera jarrita daudela, bi eroaleen artean luzerako metro bakoitzeko $2 \cdot 10^{-7}$ newton balioko indarra sortzen duen korrante elektriko zuzenaren intentsitatea da*».

Definizio hori aurreko emaitzara eramanez gero, hauxe dugu:

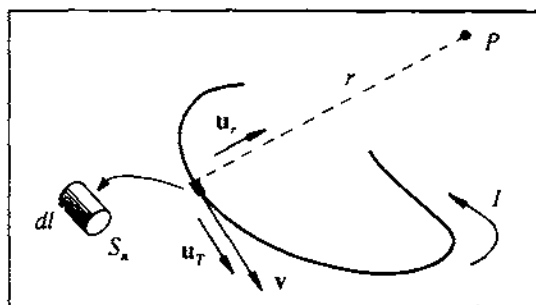
$$I_1 = I_2 = 1 \text{ A}, R = 1 \text{ m} \text{ eta } \frac{dF_{21}}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}^{-1} \text{ izanik,} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2} \text{ edo } \text{kg m s}^{-2} \text{A}^{-2}. \quad (20-47)$$

μ_0 koefizienteari hutsaren iragazkortasun magnetikoa deritzo.

20.8. PARTIKULA KARGATU HIGIKORREK SORTUTAKO EREMU MAGNETIKOA

Gai honen sarreran genioenez, eremu magnetikoak partikula kargatuen higiduraren ondorioak dira. Orain arte, oster, ez dugu erakutsi eremuaren eta partikula higiduraren arteko harremanik, ez era zuzenean bederen. Partikula kargatu bakar batek sortzen duen eremu magnetikoa oraingo atal honetan azalduko dugu, eta horretarako, 20.5. atalean kalkulatu genuen $d\mathbf{B}$ bektoreaz baliatuko gara. Orduan esandakoaren arabera,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{u}_T \times \mathbf{u}_r}{r^2} dl. \quad (20-48)$$



20.17. irudia. dl korrante-elementuak sorturiko eremu magnetikoaren azterketa.

Demagun, 20.17. irudiko dl zati txikiaren barneko karga higiduraren dentsitatea eta abiadura ρ eta $\mathbf{v}$ direla, hurrenez hurren. Hortaz, bertako $\mathbf{j}$ korrante-dentsitatea ondokoa dugu:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad (20-49)$$

eta, beraz,

$$I dl \mathbf{u}_T = j S_n dl \mathbf{u}_T = \mathbf{j} dV = \rho \mathbf{v} dV. \quad (20-50)$$

Ondorioz, aipatutako zati txikiak daukan kargak P puntuan sortzen duen eremua honelaxe idatz dezakegu:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho dV \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}. \quad (20-51)$$

Hemendik, berehala lor daiteke q partikula kargatu bakoitzak eremua eratzeko egiten duen ekarpena:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}. \quad (20-52)$$

Bestalde, partikula bakar baten $\mathbf{E}$ eremu elektrikoaren adierazpena (ikus 18. gaia) erabiliz, $\mathbf{E}$ eta $\mathbf{B}$ bektoreen arteko lotura estua honako era honetan adieraz dezakegu:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r}{r^2} \rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (20-53)$$

Behin honaino heldurik, atalari, eta oro har, gaiari bukaera emanik, hauxe aitortu behar dugu, alegia, karga higikorrek sortutako eremu magnetikoa erdiesteko erabili dugun arrazoibidea guztiz zuzena ez dela. Gauzak ondo egitekotan, oraindik ikusi ez ditugun gara-pen teoriko batzuen premian gaude; baina, nolanahi den, aurreko emaitza hurbilketa onar-garria dela ondo frogatuta dago, eta horregatik, maila honetan, besterik gabe ontzat emango dugu.

21. gaia

Eremu elektromagnetiko estatikoak

Aurreko gaitan Elektromagnetika estatikoa aztertzean, eremu elektrikoa eta magnetikoa definitu ondoren, funtsezko bi lege esperimental eman ditugu. Lege horiek, Coulomb eta Biot-Savart izenez ezaguturikoak alegia (bigarrenari Laplace-ren izena ere lotzen zaio batzuetan), lehenik eremu estatikoak kalkulatzeko aurkitu ziren legeak ditugu, eta oso praktikoak izaten dira kasu batzuetan. Baina badaude beste kasu askotan erosoagoak gertatzen diren lege orokorragoak, gai honetan ikusiko ditugunak hain zuzen ere.

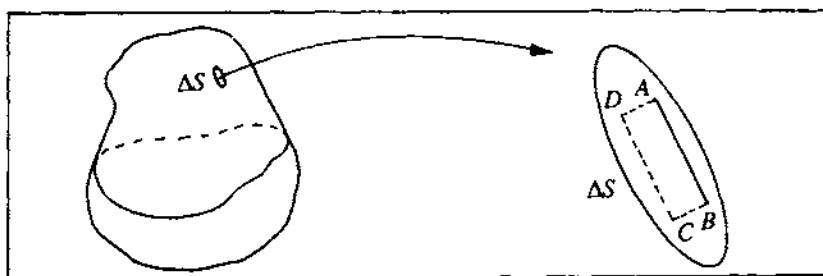
Izan ere, aipaturiko lege bakoitza bi lege integralen eran ipin daiteke, eta horrela lortzen diren lau legeak egokiagoak izango dira hurrengo gaian Elektromagnetika ez-estatikoa aztertzen hasteko.

21.1. EREMU ELEKTROSTATIKOAREN ZIRKULAZIOA

Jakina dugunez, eremu elektrostatikoa kontserbakorra da; beraz, edozein L kurba itxiren kasuan honako hau betetzen da:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (21-1)$$

hau da, eremu elektrostatikokoaren zirkulazioa nulua da.



21.1. irudia. Orekan dagoen eroalea.

Adibide moduan, orekan dagoen eroale bat kontsideratuko dugu (21.1. irudia). Har dezagun eroalearen gainazalaren oso zati txikia, irudian ikus daitekeena bezalakoa. Limitan ΔS gainazala laua dela suposa dezakegu; baita marrazturiko $ABCD$ paralelogramoaren

AD eta BC aldeak ΔS gainazalaren perpendikularrak direla ere. Alegia, CD aldearen ΔS gainazalean dago, eta AB aldearen paraleloa da, baina kanpotik. Eredu elektrostatikoa kontserbakorra denez gero, hauex beteko da:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (21-2)$$

Baina eroalearen kargak higitzen ez direnez gero (eroalea orekan baitago), bertan eremu-nulua da eta, ondorioz,

$$\int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (21-3)$$

Har ditzagun orain BC , DA eta AB aldeak hurrengo baldintzak betetzeko bezain txikiak:

$$\int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{E}(A) \cdot \mathbf{r}_{AB}, \quad (21-4)$$

(horretarako $r_{DA} \ll r_{AB}$ eta $r_{BC} \ll r_{AB}$ izan behar dira). Orain arte ikusitako adierazpenak bilduz, nahi bezain zehatza den hurbilketa honetan ondoko emaitza hau beteko da:

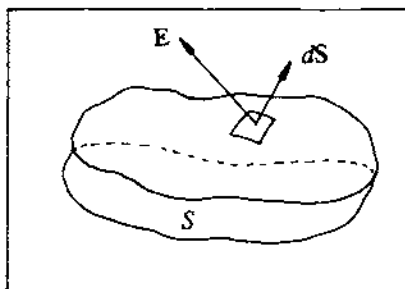
$$\mathbf{E}(A) \cdot \mathbf{r}_{AB} = 0, \quad (21-5)$$

eta $\mathbf{r}_{AB}$ bektorea ΔS gainazalaren paraleloa denez gero, «orekan dagoen eroale baten gainazalean (kanpoko aldean, noski) eremu elektrostatikoa aipaturiko gainazalaren perpendikularra dela» frogatu dugu.

Gauza bera ikusteko beste modu bat ondokoa dugu. Eroalearen eremu elektrostatikoa nulua denez gero, eroale osoa eta, bereziki, beraren gainazala, ekipotentzialak dira. Korronte-lerroak eta sestra-gainazalak (kasu honetan, eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak) elkarren perpendikularrak izango dira, eta, ondorioz, eremu-lerroen eta eroalearen gainazalaren artean gauza bera gertatuko da.

21.2. GAUSS-EN LEGEA

Har ditzagun S gainazal itxia eta jatorrian kokaturik dagoen q karga elektrikoa (21.2. ir.). Karga horrek sortutako eremu elektrostatiak aipaturiko gainazalean zehar duen fluxua hauex da:



21.2. irudia. Gainazal itxian zehar eremu elektrostatiak duen fluxuaren azterketa.

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}, \quad (21-6)$$

eta integral hau kalkulatzeko A.3. eranskinean esandakoaz balia gaitzke. Horrela, ba, q karga gainazaletik kanpo baldin badago, fluxu hori nulua izango da. Barruan badago, ordea, ondokoa izango dugu:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (21-7)$$

$\mathbf{r}_k$ puntuetan dauden n karga puntualek sortutakoa bada, $\mathbf{r}$ puntuko eremu elektrostatikoa hauxe izango da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}, \quad (21-8)$$

eta beraren fluxua ezagutzeko, aski da aurreko emaitza eta gainazal-integralen linealtasuna erabiltzea. Agerikoa denez, honako hau lortuko da:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k, \quad (21-9)$$

non batuketa hori S gainazalaren barruan dauden kargetara hedatuta dagoen. Era berean, eremu elektrostatiakoaren iturria ρ dentsitateko karga-banaketa jarraitua baldin bada, orduan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (21-11)$$

eta ondoko hau dugu dagokion emaitza:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV, \quad (21-12)$$

non V ikurrak S gainazalak mugatzen duen bolumena adierazten duen.

Nolanahi ere, honelaxe adieraz dezakegu lortutako emaitza: «*Eremu elektrostatiakoaren fluxua erabilitako gainazalaren barruan dagoen karga elektriko osoaren proportzionala da, eta proportzionaltasun-faktorea $1/\epsilon_0$ da*». Hortaz, barruko karga Q letraz adierazten badugu, hurrengo eran idatz dezakegu teorema hau:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (21-12)$$

Adierazpen horri *Gauss-en legea* deritzo.

Azpimarra dezagun ezen gainazaletik kanpora dauden kargen ekarpenak nulua direla, zeren beraiei dagozkien eremu-lerroek gainazala bi (edota lau, sei..., baina beti kopuru bikoitian) aldiz ebakitzen baitute, hau da, sartu eta gero irten egiten baitira.

21.2.1. Orekan dagoen eroalea

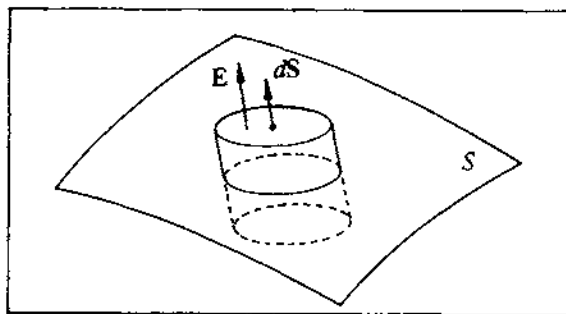
Emaitza honen baliagarritasunaz konturatzeko, kontsidera dezagun, berriro ere, orekan dagoen eroalea. Lehenago ikusi dugunez, barruko eremu elektrostatikoa nulua da. Beraz, eroalearen barnean dagoen edozein gainazal itxi aukeratuz gero, $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ fluxua nulua izango da; ondorioz, aipaturiko gainazalaren barruan ez dago karga elektrikorik. Hortaz, Gauss-en legearen ondorioz, «orekan dagoen eroalearen karga osoa beronen gainazalean egongo da, halaberharrez».

Hori dela eta, eroaleen kasuan bolumen-dentsitatea erabili beharrean, gainazal-dentsitatea (hau da, azalera-unitateko karga) dugu kontzepturik naturalena. Demagun ΔS azalera duen zatian Δq karga elektrikoa dagoela. Definizioz hauxe dugu, ba, gainazal-dentsitatea:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (21 - 13)$$

Arestian ikusi dugu zein den eremu elektrostatikokoaren norabidea orekan dagoen eroalearen gainazalean; kalkula ditzagun orain beraren modulua eta noranzkoa. Horretarako ere Gauss-en legeaz baliatuko gara. Har dezagun gainazalaren perpendikularra den zilindro txiki bat, 21.3. irudian ikus daitekeena bezalakoa. Gainazal zilindriko horretan zehar, $\mathbf{E}$ eremuaren fluxua nulua izango da, $\mathbf{E}$ delakoa eta azalera-elementua ematen duen bektorea elkarren perpendikularrak baitira. Barruan dagoen zilindroaren oinarrian eremua eta, ondorioz, fluxua nuluak izango direnez gero, zilindroak eta bere bi oinarriek osatzen duten gainazal itxian zehar kalkulaturiko fluxua goiko oinarriari dagokion hurrengo adierazpenak emandakoa izango da:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS. \quad (21 - 14)$$



21.3. Irudia. Orekan dagoen eroalearen gainazalaren inguruko eremua.

Gainazal itxi horren barruan σdS karga dago eta, beraz, hauxe dugu:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (21 - 15)$$

Ia esan gabe, eremua kanporanzkoa dela suposatuko dugu. Azken batez, hipotesi hau egia den ala ez lorturiko emaitzak diosku. Izan ere, aurreko lerroetan E ez da derrigorrez E eremuaren modulua; hain zuzen, σ negatiboa denean zeinu berekoa izango da E magnitudea ere, eta orduan eremuaren noranzkoa barruranzkoa dela adieraziko digu.

Orain arte esandakoa bilduz, ondoko hau frogatu dugu: «*orekan dagoen eroalearen gainazaleko eremu elektrikoa gainazal horren perpendikularra eta kanporanzkoa (barruranzkoa) da, σ dentsitatea positiboa (negatiboa) bada, eta $|\sigma|/\epsilon_0$ balioko modulua du*».

21.2.2. Karga-banaketa esferikoa

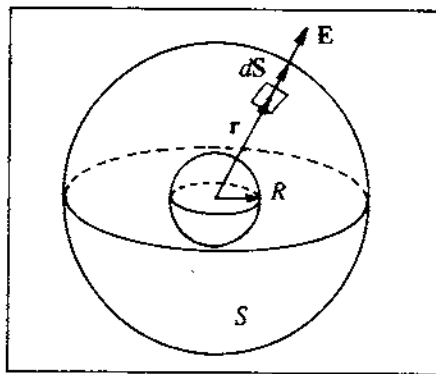
Hurrengo adibidean R erradioko esferan dagoen eta simetria esferikoa duen karga-banaketa jarraitua kontsideratuko dugu, eta kanpoaldean (hots, $r > R$ denean) sortzen duen eremu elektrikoa kalkulatzeko saiaturiko gara. Simetria esferikoa dela eta, eremu elektrikoak ere esferikoa izan behar du,

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r, \quad (21-16)$$

non koordinatuen jatorria esferaren zentroan aukeratu dugun. S gainazalak zentro berbera eta R baino erradio handiagoa baditu (ikus 21.4. irudia), haxe izango dugu:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E dS = E(r)4\pi r^2, \quad (21-17)$$

non q aipaturiko banaketaren karga osoa den.



21.4. irudia. Karga-banaketa esferikoa kanpoaldean sortutako eremu elektrikoa.

Beraz, esferatik kanpoko puntuetako eremu elektrikoa ondokoa da:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (21-18)$$

hots, zentroan kokaturiko q karga puntual hipotetiko batek sortuko lukeenaren berdina.

Gainera, $R \rightarrow 0$ limitean karga puntuala eta beronen eremu coulombarra berreskura ditzakegu. Hortaz, guk erabili dugun bidean Gauss-en legea teorema izan arren, Elektrostatikaren funtsezko legetzat ere har daiteke, eta haxe dugu legea deitzearen zergatikoa. Lege horretatik abiatuz, aski da simetria kontuan hartzea Coulomb-en legea teorema moduan lortzeko. Egia esan, kasurik orokorrean eremu bektorial bat era unibokoan zehazteko, beraren zirkulazioa eta fluxua (eta bai infinituan bete behar diren baldintza batzuk ere) ezagutu behar ditugu; baina azaldu berri dugun adibidean, simetria esferikoaren ondorioz, aski zaigu fluxua ezagutzea.

21.3. KONDETSADOREAK ETA ENERGIA ELEKTROSTATIKOA

Aurkako zeinuko karga elektrikoak (q eta $-q$) dituzten bi eroalek osaturiko sistema kontsideratuko dugu atal honetan. Orekan, sistemaren osagai bakoitzari potentzial elektrikoaren balio bat dagokio, eroaleak ekipotentzialak baitira. Balio bakoitzak aukeraturiko erreferentzia-mailaren menpekotasuna badu ere, bien arteko kendura, ΔV , era unibokoan dugu definiturik, eta honako zatidura hau kalkula dezakegu:

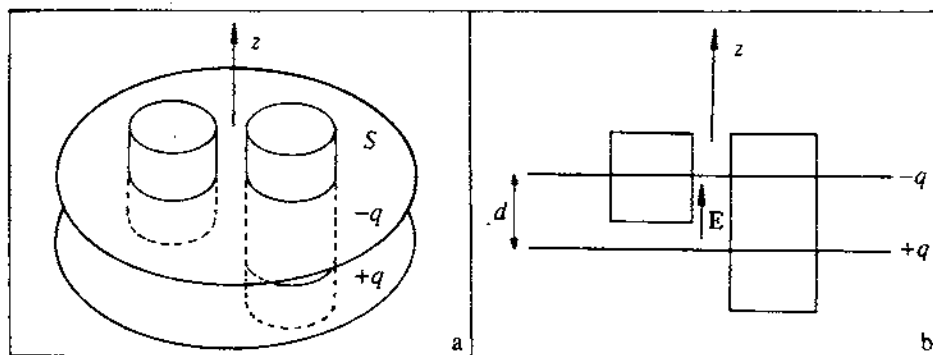
$$C \equiv \frac{q}{\Delta V}. \quad (21 - 19)$$

Kasurik interesgarrienetan (sisteman beste eroalerik ez badago, esaterako) zatidura horrek sistemaren geometriaren menpekotasun hutsa du; beraz, q eta ΔV magnitudeen arteko proportzionaltasun-konstantea da. Horrela gertatzen bada, sistema hori *C kapazitate elektrikoa duen kondentsadorea* dela esan ohi da. Nazioarteko unitate-sisteman kapazitatearen unitateari *farad* deritzo eta F letraz adierazten da. Hortaz, hauxe dugu:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2. \quad (21 - 20)$$

Adibide moduan, har dezagun *kondentsadore laua*, hau da, elkarren berdinak eta paraleloak diren bi eroale lauk osaturiko sistema (ikus 21.5. irudia). Plaken S azalarearekin konparaturik haien arteko d distantzia oso txikia dela suposatuko dugu, hau da, $d^2 \ll S$ betetzen dela. Hipotesi hori dela eta, simetria zilindrikoa dugula eta eremu elektrikoa $\mathbf{E} = E(z)\mathbf{k}$ dela suposa dezakegu. Arrazoi berberagatik gainazal-dentsitatea uniformetzat hartuko dugu, $\sigma = \pm q/S$. Irudian marraztu ditugun zilindroei Gauss-en legea aplikatuz gero, hauxe ikus daiteke: kondentsadoretik kanpo eremu elektrikoa nulua da eta plaken artean konstantea, ondoko baliokoa:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}. \quad (21 - 21)$$



21.5. irudia. Kondentsadore laua. a) Egitura orokorra. b) Plaken arteko eremua.

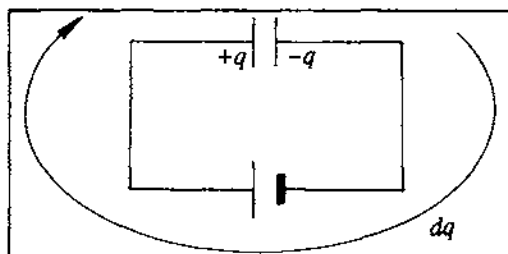
Bestalde, potentzial elektrostatikoaren definizioaren bidez, hauxe dugu:

$$\Delta V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 S}, \quad (21 - 22)$$

eta kapazitatearen definizioaren arabera:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}. \quad (21 - 23)$$

Lortutako emaitza, oso erabilgarria izanik ere, lehen hurbilketa baino ez da. Egiaitan, ertz-efektuak agertzen dira, eta eremua kondentsadorearen zentroan soilik da uniforme; bestalde, kanpoan txikia baina ez-nulua da.



21.6. irudia. Kondentsadorearen karga-prozesua.

Azter dezagun orain kondentsadorearen karga-prozesua. Une batean kondentsadorearen (hau da, plaka positiboaren) karga q baldin bada, plaken arteko potentzial-diferentzia $\Delta V = q/C$ izango da eta, beraz, plaka negatibotik positibora dq karga infinitesimala eramateko, ondoko lana egin behar du indar elektroeragilearen iturriak:

$$dW = dq \Delta V = \frac{1}{C} q dq. \quad (21 - 24)$$

Hortaz, prozesu osoan eginiko lana hauxe izango da:

$$W = \int_0^q dW = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C}, \quad (21 - 25)$$

$$W = \frac{1}{2} q \Delta V. \quad (21 - 26)$$

Kondentsadore lauaren kasu berezian, aurreko emaitzaren bidez honako hau lor daiteke:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd. \quad (21 - 27)$$

Baina Sd biderkadura kondentsadorearen bolumena denez gero (kontuz, bolumena V letraz adierazko baitugu), honeia ere idatz dezakegu emaitza hori:

$$W = \iiint \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) dV, \quad (21 - 28)$$

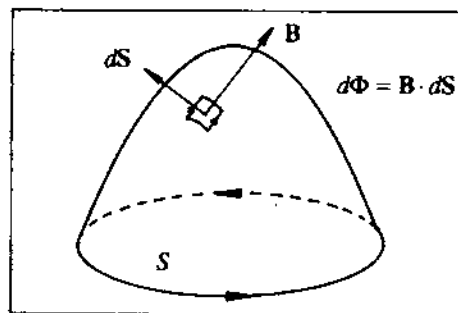
zeren kondentsadorean eremu uniforme integralarekiko konstantea baita.

Aurrekoak ez bezala, azken adierazpen horrek edozein kondentsadorearen kasurako balio du, eta oso interpretazio fisiko garrantzitsua du. Hara! Egindako lana kondentsadorean dagoen eremu elektrostatikoa eraikitzean izan da erabilia, eta, ondorioz, nahiko naturala da aipaturiko eremuan energia elektrostatikoko moduan metatua izan dela esatea. Hemen arrazoi sakonagorik emango ez badugu ere, esan dezagun ezen ikuspuntu horrek aparteko garrantzia izan duela, eta Fisikan oso emankorra izan den pentsamolde baten lehenengo adierazpena izan dela. Ideia horren arabera, edozein eremu eraikitzeko erabilitako lana bertan geratzen da energia moduan metatuta. Eremu elektrikoaren energiaren dentsitatea, beraz, $1/2\epsilon_0 E^2$ magnitudeak adierazitakoa izango da.

21.4. EREMU MAGNETIKOAREN FLUXUA

Demagun eremu magnetiko bat dagoen espazioko eskualde batean S gainazal orientatua aukeratu dugula (21.7. ird.). Gainazal horretan kalkulaturiko eremu edo indukzio magnetikoaren fluxuari *fluxu magnetikoa* deituko diogu:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (21 - 29)$$



21.7. irudia. Fluxu magnetikoa.

Nazioarteko unitate-sisteman, fluxu magnetikoaren unitateak *weber* izena du eta Wb ikurraren bidez adierazten da. Agerikoa denez,

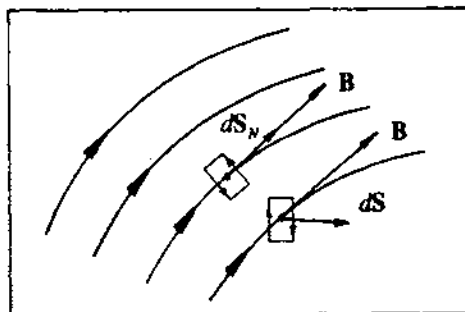
$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2 = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}. \quad (21 - 30)$$

Aukera dezagun espazioko puntu bakoitzean eremu magnetikoaren perpendikularra den gainazal infinitesimala, $d\mathbf{S}_N$ eta $\mathbf{B}$ bektoreak paraleloak eta noranzko berckoak izateko moduan. Egoera horri dagokion fluxu infinitesimala honako hau da:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_N = B dS_N. \quad (21 - 31)$$

Beraz, eremu magnetikoaren modulua gainazal normalaren azalera-unitateko fluxu magnetikoaren berdina dela frogatu dugu:

$$B = \frac{d\Phi}{dS_N}. \quad (21 - 32)$$

21.8. irudia. Gainazal normala, dS_N , eta edozein gainazal, dS .

Bestalde, erraz ikus daitekeenez, $\mathbf{B}$ eremu magnetikoaren norabidea eta noranzkoa, $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ fluxu infinitesimala positibo eta maximoa egiten duen $d\mathbf{S}$ bektorearenak dira. Ikusi berri dugun emaitza hori eremu magnetikoaren birdefinizioztat ere har dezakegu, eta ikuspuntu honen garrantzia adierazteko, esan dezagun gaur egun *tesla* baino maizago Wb/m^2 deritzola eremu magnetikoaren unitateari.

Indukzio edo eremu magnetikoaren eremu-lerroak (*indukzio-lerroak* ere baderitzenak) marrazteko, eremu elektrikoaren kasuan egindako hitzarmen berberaz baliatuko gara eta gainazal normalaren azaleraren unitateko lerro-kopurua eta eremu magnetikoaren modulua berdinak izango dira. Horrela, bada, indukzio-lerro bakoitzak weber bat adieraziko du, eta fluxu magnetikoa neurtzeko aski izango da gainazala zeharkatzen duten lerroak zenbatzea.

Orain arteko eremu magnetiko guztien kasuan (hau da, korrante elektrikoak edota kargen higidurak sorturiko eremuen kasuan) ikusi dugunez, «*edozein gainazal itxitan zehar neurtutako fluxu magnetikoa nulua da*», hots,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (21 - 33)$$

Emaitza hau orokorra da, baina teorema hau frogatzeko beharrezkoak diren tresna matematikoak ezagunak ez ditugunez gero, hemen beste bide bat, emankorragoa gertatzen dena, aukeratu dugu: aipaturiko emaitza naturaren funtsezko lege esperimentaltzat kontsideratu dugu, eta, duen esangura ikusteko, beraren parekoa den Gauss-en legeaz baliatuko gara.

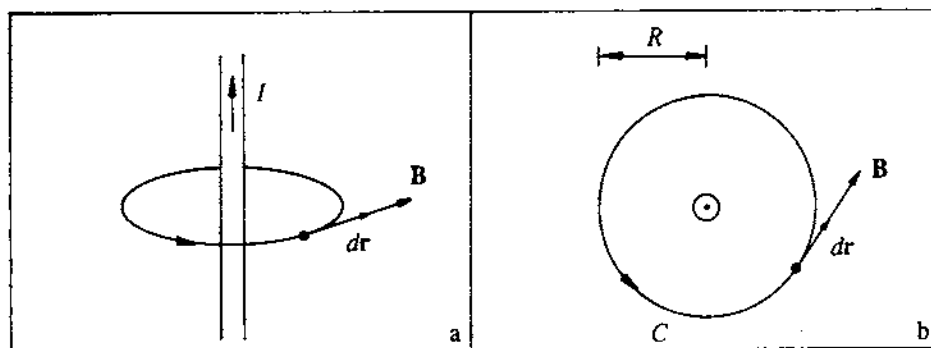
Eremu elektrikoaren kasuan eremu-lerroak karga elektrikoetan sortzen eta hiltzen dira. Kasu magnetikoan, oster, gainazal itxietan zeharreko fluxua nulua denez gero, barrura sartzen diren indukzio-lerro guztiak irten ere egiten dira; hau da, indukzio-lerroak itxiak dira. Beraz, indukzio-lerroek ez dute iturririk, ezta hobirik ere. Bestela esanda, eremu magnetikoa karga elektrikoaren higidurak sortzen du eta ez karga magnetiko hipotetiko batzuek.

Karga hipotetiko horiek, *monopolo magnetikoak* alegia, existitzen ez direla suposatuko dugu. Egia esan, teoria modernoek monopolo magnetikoen existentzia aurrean dute, teoria horien barruan aipaturiko monopoloek oso zeregin garrantzitsua bete behar baitute. Hala ere, hau idatzi dugunean aukera teoriko horrek ez du oraindik baieztapen esperimental sendorik aurkitu, eta hemendik aurrera ikusiko dugunak ez du monopoloen beharrik teoria interesgarria eta emankorra (eta, guzti-guztiak bezalaxe, partziala) izateko.

21.5. AMPERE-REN LEGEA

Kontsidera ditzagun eroale lerrozuzen infinitu batek sorturiko eremu magnetikoa eta eroalaren perpendikularra den zirkunferentzia (ikus 21.9.a irudia). Aurreko gai batean ikusi genuenez, zirkunferentziaren puntuetan B eremu magnetikoak tangentearen norabidea eta ondoko modulua ditu:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (21 - 34)$$



21.9. irudia. a) Korrante lerrozuzenak sorturiko eremu magnetikoa. b) Plano perpendikularreko adierazpena.

Beraz, zirkunferentzia 21.9.b irudian ikus daitekeen modura orientatuz gero, hauxe dugu:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint B ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint ds = \mu_0 I. \quad (21 - 35)$$

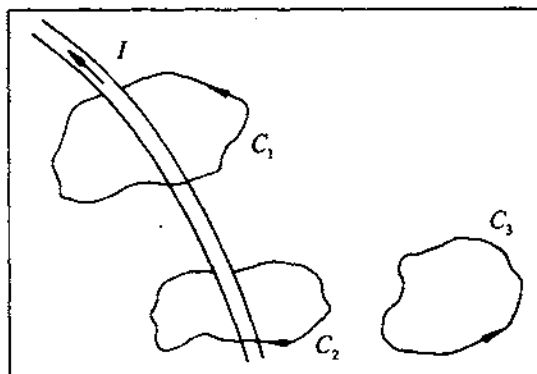
Hemen dr bektorearen modulua ds arku-luzeraren berdina dela hartuko dugu kontuan. Argi dago zirkunferentziaren orientazioa korrante elektrikoaren noranzkoaren arabera aukeratu dugula, eskuineko eskuaren arauaz baliatuz, alegia. Aipaturiko orientazioa kontra-koia balitz, aldatu egin beharko genuke emaitzaren zeinua, noski.

Lortu dugun emaitza azpimarratzekoa da, ez baitu erradioaren menpekotasunik. Izan ere, guk frogatu gabe ontzat emango dugun emaitza orokor baten oso kasu berezia baino ez da. Horrela, hurrengo 21.10. irudiko eroale eta ferro edo ibilbide itxien kasuetan lortzen diren zirkulazioak honako hauek dira:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I, \quad (21 - 36)$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = -\mu_0 I, \quad (21 - 37)$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (21 - 38)$$



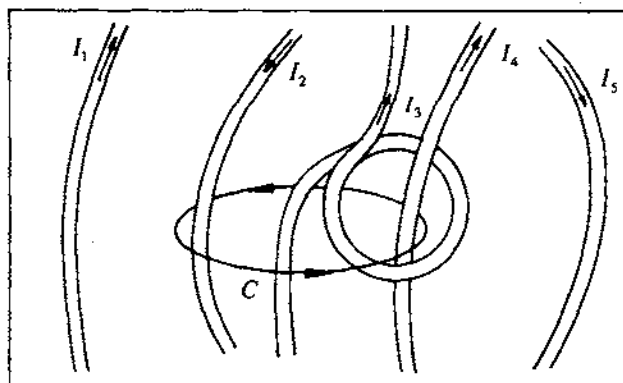
21.10. irudia. C_1 eta C_2 ibilbideek barnean hartzen dute korronea, C_3 ibilbideak ez.

Gainerzamenaren printzipioa eremu magnetikoaren kasuan ere betetzen denez gero, korrone batzuek sorturiko eremuaren kasuari dagokion emaitza orokorra, *Ampère-ren legea* hain zuzen, hau da:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_k I_k. \quad (21 - 39)$$

Aurreko adierazpenean batzen diren intentsitateak preseski C ibilbide itxiak "lotzen" dituenak dira, eta bakoitzak eskuineko eskuaren arauak emandako zeinua du. Adibidez, 21.11. irudiaren kasuan ondokoa dugu:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 (-I_2 + I_3 + I_3 + I_4). \quad (21 - 40)$$



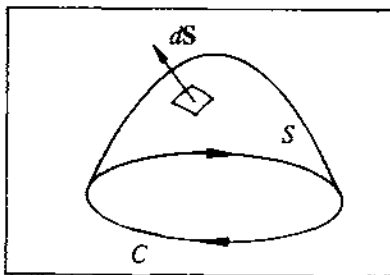
21.11. irudia. Ampère-ren legea C ibilbidearen kasuan erabiltzeko adibidea.

Ohar gaitezen hirugarren hariaren ekarpen bikoitzaz. Horrelako ekarpen anizkoitzak eta eskuineko eskuaren araua aplikatzeko modua argiago ikusten dira batzuetan, harien intentsitateak erabili ordez orokorragoa den korrone-dentsitatearen kontzeptuaz baliatzen bagara. Izan ere, C kurba itxiak "lotzen" duen intentsitatearen definizio zehatza honako

hau da:

$$I = \left(\sum_k I_k \right) = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (21-41)$$

non S delakoa C muga orientatua duen edozein gainazal orientatu den (21.12. irudia).



21.12. irudia. C ibilbide orientatua mugatzat duen gainazala, eta gainazal-elementuari dagokion noranzkoa.

Hortaz, Ampère-ren legearen adierazpen orokorra, kasu jarraituetan ere balio duena, honako hau da:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (21-42)$$

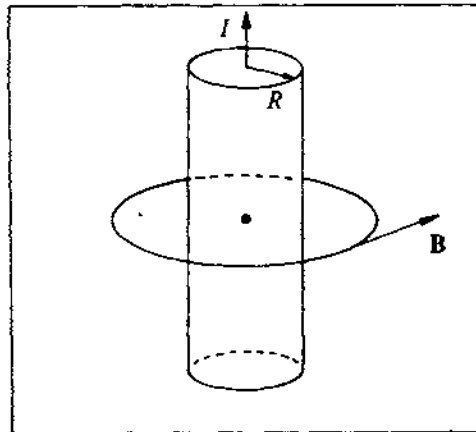
S gainazal orientatuaren muga C lerro itxia izanik. Beraz, « C lerro itxian barrena kalkulaturako eremu magnetikoaren zirkulazioa, aipaturiko lerroak lotzen duen intentsitatearen proportzionala da».

Honaino heldurik, Elektrostatikaren kasuan egin zenaren antzera, hemen ere ikusi berri ditugun bi legeak (hau da, Ampère-rena eta monopolo magnetikorik ez dagoela dioskuna) Magnetostatikaren oinarritzko legetzat har ditzakegu, eta hortik abiatutik lehen ikusitako beste emaitzak (hala nola Biot-Savart-Laplace-re legea) berreskura daitezke.

21.5.1. Korrante elektriko zuzena

Adibide moduan, kontsidera dezagun R erradioa eta simetria zilindrikoa dituen 21.13. irudiko korrante zuzen infinitua. Simetria zilindrikoa kontuan harturik, itxiak izateko, indukzio-lerroek irudian marraztu dugunaren modukoak izan behar dute. Ondorioz, eremu magnetikoaren norabidea eta noranzkoa irudikoak dira (noranzkoa zehazteko eskuineko eskuaren arauaz baliatu gara), eta modulua erdiesteko aski da simetria eta Ampère-ren legea erabiltzea. Horretarako, har dezagun integrazio-lerrotzat indukzio-lerroa bera, eta, B moduluak erradioaren menpekotasun hutsa duenez gero, hauxe lor daiteke:

$$\mu_0 I = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C B ds = 2\pi r B, \quad (21-43)$$



21.13. irudia. R erradiodun korrante elektriko zilindrikoak sorturiko eremu magnetikoa.

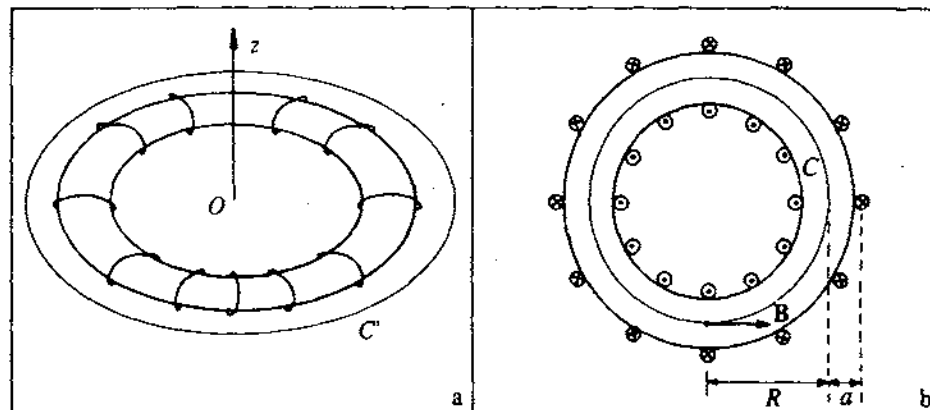
eta azkenik,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R). \quad (21 - 44)$$

21.5.2. Toru-itxurako solenoidea

Hurrengo adibidea toru-itxura duen 21.14. irudiko solenoideari dagokiona izango da. Agerikoa denez, sistemak OZ ardatzarekiko simetria du, espirak oso estuturik baldin badaude behintzat. Hortaz, indukzio-lerroak simetria berbera duten zirkunferentziak (hala nola irudietako C eta C' direlakoak) dira eta bakoitzean B modulua konstantea da. Beraz, integrazio-lerrotzat L luzerako indukzio-lerroa aukeratuz gero, hauxe dugu:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B \oint_C ds = BL. \quad (21 - 45)$$



21.14. irudia. a) Toru-itxurako solenoidea. b) C eta C' zirkunferentziei dagokien planoak.

Ampère-ren legearen ondorioz, torutik kanpoko $\mathbf{B}$ eremua nulua da, C' zirkunferentziak ez baitu inguratzen intentsitaterik bere barnean. Toruaren barruan, ostera, eremu magnetikoaren modulua honako hau da:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I, \quad (21 - 46)$$

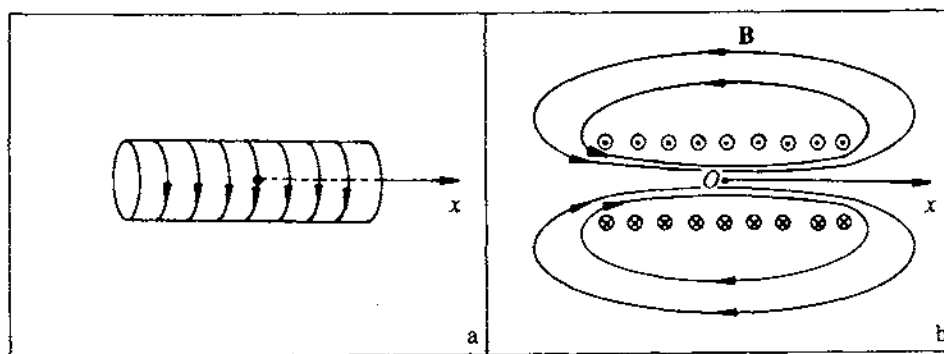
baldin solenoideak N espira baditu. Barruko erradioa kanpokoaren aldean arbuaitzen badugu (hau da, $a \ll R$ dela onartzen badugu), $n = N/L$ luzera-unitateko espira-kopurua solenoidearen konstante karakteristikoa da eta, azkenik, barruan

$$B = \mu_0 n I \quad (21 - 47)$$

izango da.

21.5.3. Solenoide zuzena

Azken adibidea solenoide luzeari dagokiona izango da. Indukzio-lerroen itxura 21.15. irudikoa denez gero, solenoidearen erdiko eskualdean gertatzen dena aztertzea mugatzen bagara, sistemak OX ardatzarekiko simetria duela suposa dezakegu.



21.15. irudia. a) Solenoide zuzena. b) Solenoidearen inguruko eremu-lerroak.

21.16. irudian adierazi den hurbilketan, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{i}}$ dela kontsideratuko dugu. Hain zuzen, C'' ibilbide itxiari Ampère-ren legea aplikatuz, eta puntu guztietan eremuak balio berbera duela kontsideratuz, eremuak konstantea izan behar duela ikus dezakegu batetik, eta bestetik nulua dela (egiatan, oso txikia). Bestetik, C' ibilbidearekin gauza hera eginez, barrualdean ere eremua konstantea izango dela ondoriozta dezakegu, nahiz eta orain ez den nulua izango. Barrualdean eremu magnetikoak duen modulua kalkulatzeko, aski da C lerroari Ampère-ren legea aplikatzea, izan ere, solenoideak luzera-unitatean n espira baldin baditu, honako hau lor daiteke:

$$BL = \mu_0 n LI, \quad (21 - 48)$$

eta azkenik,

$$B = \mu_0 n I. \quad (21 - 49)$$

22. gaia

Eremu elektromagnetiko aldakorrak

Aurreko gaian ikusi dugunez, Elektrostatika eta Magnetostatikaren funtsezko legeak era integralean ere adieraz daitezke. Esanik dagoenez, formulazio hau aurrekoaren baliokidea izan arren, lagungarri gertatzen da ikuspuntu teorikotik.

Gai honetan, berriro ere, lege integral batzuk aztertuko ditugu, baina aurrekoak ez bezala, hemengoak ez dira izango orain arte ezagutu ditugun beste legeen baliokideak, ez eta ondorioak ere, zeren, zenbait aldetatik ikusita behintzat, eduki berria izango baitute. Gainera, ez dira eremu estatikoez arituko, eremu aldakorrez baizik. Legeak integralak direla esatean, ez dugu adierazi nahi adierazpen diferentzialik ez dutenik, hemen erabiliko ditugun moduan era integralean agertuko zaizkigula baizik.

Gai honetan ikusiko duguna, funtsean Michael Faraday (1791-1867) eta James Clerk Maxwell (1831-1879) zientzialari ospetsuen lanen ondorioa da. Lehena XIX. mendeko fisikari esperimental nagusia izan zen, eta bigarrena teoriarari argitsuena. Azterketa hauen guztien laburpena *Maxwell-en ekuazioak* izenez ezagutzen da gaur.

Egia esanda, maila honetan ezin azter ditzakegu lege horiek behar bezala, oraindik oinarri nahikorik ez baitugu. Baina Boltzmann-ek, Gibbs-ek eta Maxwell-ek berak Teoria Zinetikoari buruz egindako lanak arbuiatu gabe, XIX. mendeko Fisikaren gailur gorena Maxwell-en lege horiek osaturikoa dela esan daiteke, dudarik ez. Fisikan egin diren bateratasunen arteko handienetakoa, gaur ere paradigmaticoa gertatzen dena, dugu lan hau. Eta Newton-en legeak ez bezala, Maxwell-enak Erlatibitatearen Teorian ere zilegiak dira. Izan ere, Maxwell-enak ez dira Galileo-ren erlatibitate-printzipioarekiko elkargarriak, eta, hemen ageri zen oztopoa gainditzeko, eterraren hipotesia egin zen, XIX. mendeko ikuspuntu mekanizistari amore emateko edo. Geroago, Einstein izan zen Maxwell-en legeak nolabait Newton-enak baino funtsezkoagoak direla konturatu zena, eta haietan finkatu zen Erlatibitate Bereziaren oinarriak ezartzeko.

22.1. HIGIDURAK SORTURIKO INDUKZIO ELEKTROMAGNETIKOA

Demagun espazioko eskualde batean eremu magnetiko uniforme eta konstantea dagoela. Eremu horren plano perpendikular batean bi eroalek osaturiko zirkuitua dago, 22.1. irudian ikus daitekeen geometria duena.

pausagunean eta duen tankeraz gordetzeko, indar elastikoak, eta agian bestelakoak ere, egon behar dira; baina, higidurarik ezari esker, ez dute inolako lanik egingo. Ordea, l luzeradun hagaxka higitzen ari da eta ondoko indar magnetikoaren eragina jasoko du:

$$I \int dr \times \mathbf{B} = -IlB\mathbf{i}. \quad (22-5)$$

Beraz, abiadura konstantez higitzeko, hurrengo balioa duen $\mathbf{F}_k$ kanpo-indar bat ezarri behar zaio:

$$\mathbf{F}_k = IlB\mathbf{i}. \quad (22-6)$$

Hemendik, kanpo-indarraren potentzia,

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v} = IlvB, \quad (22-7)$$

eta eroalearen sekzioa zeharkatzen duen karga-unitateko lana, hau da, indar elektroeragilea lor daiteke:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} = \frac{dW}{Idt} = Blv. \quad (22-8)$$

Hortaz, aurreko emaitza berreskuratu dugu, baita energia nondik datorren jakitea lortu ere.

Bestalde, 22.1. irudian adierazi denez, aldiune bakoitzean zirkuitua lerro itxi orientatua da; beraz, infinitu gainazal orientaturen mugatzat kontsidera dezakegu. Har dezagun, adibidez, zirkuituak eraturiko S laukizuzena, $d\mathbf{S} = dS\mathbf{k}$ azalera-elementua duena, alegia. Beroni dagokion fluxu magnetikoa hauxe dugu:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -B \iint_S dS = -Blx, \quad (22-9)$$

eta abiaduraren definizioa ($v = dx/dt$, kasu honetan) erabiliz:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -Blv. \quad (22-10)$$

Adierazpen honen eta (22-4) delakoaren arabera, indar elektroeragile indusitua eta fluxu magnetikoaren deribatuaren artean ondoko erlazioa betetzen da:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (22-11)$$

edota, kontzeptuak agerian idatzirik,

$$\oint_C \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (22-12)$$

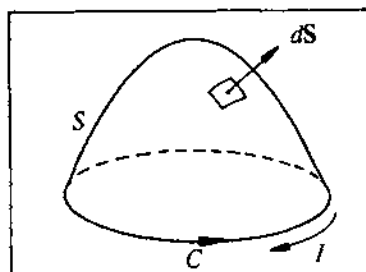
non C letrak zirkuitua adierazten duen.

Hemen oso kasu berezian ikusi badugu ere, azken emaitza hori guztiz orokorra dela frogatu daiteke. Izan ere, hauxe betetzen da: «*Eremu magnetiko estatiko batean higitzen edota deformatzen den zirkuituan, indar elektroeragile indusitua sortzen da, zirkuituak*

aldaketak indar elektroeragile indusitua sorrarazten du zirkuituan, eta horren balioa ondoko adierazpenak emandakoa dugu, *Faraday-Henry-ren legeak*, alegia:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (22-20)$$

Emaitza hori kasu esperimental berezi batzuetan ikusi zen lehendabizi, eta kasu guztietan beteko zela postulatu zen geroago. Beraz, funtsezko emaitza esperimental berritza onartu behar dugu eremu aldakorrek sortutako indukzio hori. Geroago ikusiko dugunez, eguneroko bizitzan oso fenomeno praktikoa da.



22.3. irudia. S gainazalean zeharreko fluxua handituz badoa, I noranzkoa duen korrante elektrikoa sortuko da C zirkuituan.

(22-20) adierazpeneko zeinu negatiboa dela eta, zirkuituan indusitutako korrontearen intentsitateak 22.3. irudian adierazitako noranzkoa izango du, S gainazal orientatua zeharkatzen duen fluxua handitu egiten bada behintzat (ohar modura diogun ezen C-ren noranzko positibotzat irudian adierazitakoa hartu dela). Baina Biot-Savart-Laplace-ren legearen arabera, intentsitate horrek eremu magnetiko berri bat sortuko du, eta azken honen fluxua hasierakoaren kontrakoa izango da. Emaitza hori *Lenz-en legea* delako izenez ezaguna da eta honelaxe adieraz dezakegu: «*korronte indusituaren noranzkoa bere kausari kontra egiteko modukoa da*». Agerikoa denez, lege hau Faraday-Henry-renaren ondorio hutsa dugu. Baina ez zen horrela izan Fisikaren historian, Lenz-en legea Faraday-Henry-ren legea baino lehenago izan baitzen ezaguna. Bestalde, kuantitatiboa izan ez arren, nahiko praktikoa gertatzen da kasu askotan.

Geroago ikusiko dugunez, indar elektroeragilea eremu ez-elektrostatiko baten zirkulazioa da. Hortaz, eremu magnetiko aldakorak **E** eremu elektriko (ez-elektrostatiko) bat agerrarazten du zirkuituan, ondoko lege hau betetzen duena hain zuzen:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (22-21)$$

non S ikurra C zirkuituak mugatutako edozein gainazal adierazten duen (22.3. irudia). Adierazpen hau lehenago idatzitako (22-20) adierazpenaren garapena da, izatez.

Antza denez, eremu elektriko horren kausa ez da zirkuitua, eremu magnetiko aldakorra baizik. Beraz, zer gertatzen da zirkuitua kentzen badugu? Hau da, C lerroa zirkuitu elektriko izan ordez edozein kurba geometriko itxi baldin bada, aldatu egingo da berak mugatutako gainazal batean zehar neurtzen den fluxu magnetikoa. Hori dela eta, egia ote

da C lerroan ere eremu elektriko bat agertuko dela, (22-21) emaitza betetzeko moduan?

Erantzuna lortzeko, ezin balia gaitzke orain arte ikasitakoaz. Baina esperientziak behin eta berriro diosku (22-21) emaitza kasu guzti-guztietan betetzen dela, eta, ondorioz, naturaren legetzat onartzera behartzen gaitu. Hauxe da, ba. Elektromagnetikaren funtsezko lege berria, gaur egunean *Faraday-Henry-ren legea* deritzona: «*Eremu magnetiko aldatokorrak eremu elektriko bat sortzen du, eta edonolako C kurba mugatzat duen edozein S gainazalen kasuan (22-21) adierazpena betetzen da*».

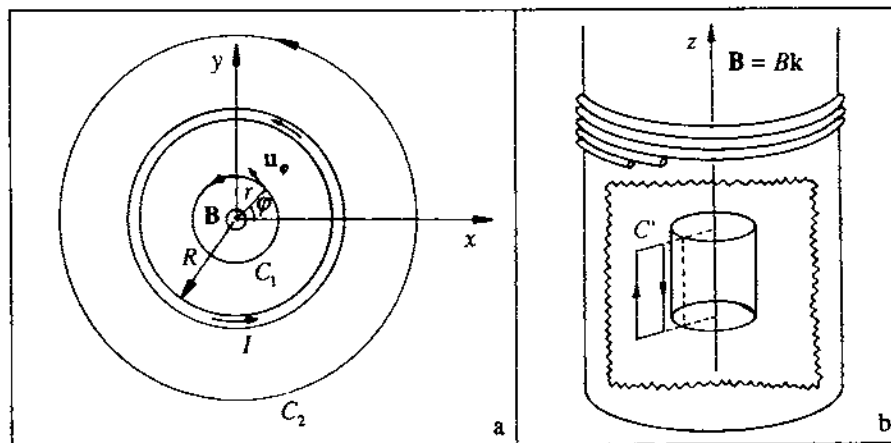
Beharbada, ez da guztiz argi geratu zer den (22-21) ekuazioko E magnitudea. 'Eremu elektriko' deitu diogu, espazioko puntu bakoitzean pausagunean legokeen karga unitateak pairatuko lukeen indarra baita. Hori izan da orain arte erabili dugun definizioa, eta bidezkoa eta komenigarria da hori jarraitzea. Hain zuzen, E eremuaren osagai bat elektrostatikoa izan daiteke, baina horrek ez dio ekarpenik egingo zirkulazio elektrikoari, noski.

Bestalde, egoera fisikoa estatikoa bada, eremu magnetikoak eta, beraz, bere fluxuak ez dute denboraren menpekotasunik izango. Ondorioz, kasu berezi horretan, Faraday-Henry-ren legea emaitza ezagun bihurtu zaigu: eremu elektrostatikoa kontserbakorra dela, hain zuzen.

22.2.1. Solenoide infinitua

Atal honi amaiera emateko, adibide bat ikusiko dugu. Kontsidera dezagun bere ardatza Oz ardatzean duen R erradiodun solenoide infinitua. Demagun solenoideko intentsitatea eta, beraz, eremu magnetikoa denborarekiko aldatuz doazela. Simetria zilindrikoa kontuan harturik, eremu elektriko indutituak r koordenatuaren menpekotasun hutsa izango du, eta C kurba 22.4.a irudiko C_1 edo C_2 baldin bada, hauxe beteko da:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = r E_\phi \oint_C d\phi = 2\pi r E_\phi. \quad (22-22)$$



22.4. irudia, Solenoide infinitua.

Bestalde, solenoidearen barruan eremu magnetikoa uniformea da; beraz, integrazio-gainazaltzat C_1 zirkunferentziak mugatzen duen zirkulua harturik,

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B\pi r^2 \quad (r \leq R). \quad (22-23)$$

Kanpoan, ostera, $\mathbf{B}$ eremua nulua denez, integrazio-gainazaltzat C_2 zirkunferentziak mugatzen duen zirkulua harturik, fluxurako R erradiodun zirkuluaren ekarpena izango dugu soilik, hots:

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B\pi R^2 \quad (r \geq R). \quad (22-24)$$

Lortutako emaitzak bilduz, eta (22-22)-ra eramanez, honako hau izango dugu:

$$E_\varphi = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \quad (r \leq R), \quad (22-25a)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB}{dt} \quad (r \geq R). \quad (22-25b)$$

Bestalde, Oz ardatza duen solenoidearen barneko zilindro bati Gauss-en teorema aplikatuz, E_R nulua dela ikus daiteke eta, azkenik, Faraday-Henry-ren legea irudiko C' lerroaren kasuan erabiltzeak (ikus 22.4.b irudia) E_z delakoa ere zero dela diosku. Baiezta-pen horien frogapen erraza irakurleari utziko diogu.

22.3. AUTOINDUKZIOA

Demagun zirkuitu bateko I intentsitate elektrikoa aldatu egiten dela. Intentsitate horrek sorturiko eremu magnetikoa, $\mathbf{B}$, eta, ondorio modura, bere fluxu magnetikoa, Φ , aldakorrak izango dira. Egoera horretan, ikusi berri dugun legearen arabera, zirkuituko indar elektroeragileak osagai induzitu bat izango du, ondokoa preseski:

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt}. \quad (22-26)$$

Definizioz,

$$L \equiv \frac{d\Phi}{dI} \quad (22-27)$$

magnitudeari, zirkuituaren *autoinduzio-koefizientea* (edo huts-hutsean *autoindukzioa*) deritzo, eta zirkuituaren geometriaren menpekotasun hutsa duen konstante karakteristikoa dela frogatu daiteke. Definizio honen arabera, honelaxe adieraz dezakegu *indar elektroeragile autoinduzitua*:

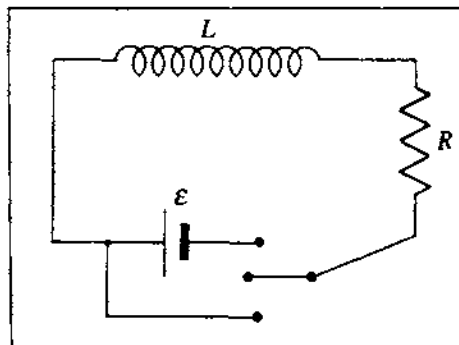
$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}. \quad (22-28)$$

Nazioarteko sisteman, autoindukzioaren unitateari *henry* deritzo (H laburduraz) eta

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ m}^2 \text{ kgs}^{-2} \text{ A}^{-2} \quad (22-29)$$

balioa du. Esan dugunez, autoindukzio-koefizientea zirkuitu osoari dagokion magnitudea da, baina eskuarki zirkuituaren zati batzuek (solenoidetarako eta abarrek) besteek baino ekarpen

handiagoa egiten diote balio horri. Hori dela eta, autoindukzio guztia kontzentratu batego bezala eta 22.5. irudiko ikurraren bidez irudikatu ohi da. Gainera, hitzarmen hau erresistentziaren kasuan eginikoaren parekoa dugu eta eroso gertatuko da geroago korrante alternoa aztertzean. Ondorioz, beheko irudian erakutsitako zirkuitua, *R-L zirkuitua* dela esan ohi da.



22.5. irudia. Erresistentzia eta autoindukzioa dituen zirkuitu elektrikoaren adierazpen grafikoa (*R-L zirkuitua*).

22.3.1. *R-L zirkuituaren karga eta deskarga*

Adibide moduan, eman dezagun zirkuituan $t = 0$ aldiunean ε indar elektroeragilea duen pila bat konektatu dugula. Hasieran nulua zen korrantea handituz hasiko da eta indar elektroeragile autoinduzitua ematen digun azkeneko emaitza kontuan hartzen badugu, era honetan izango dugu Ohm-en legea:

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR, \quad (22-30)$$

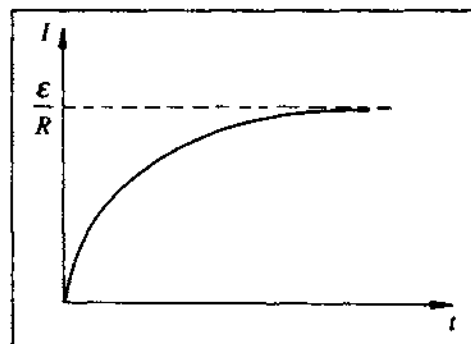
edota, $t = 0$ zenean $I = 0$ gurela kontuan hartuz:

$$\int_0^I \frac{dI}{I - \varepsilon/R} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt, \quad (22-31)$$

eta, integral horiek ebatzi eta gero, hauxe lortzen da:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (22-32)$$

Grafikoki 22.6. irudian ikus daitekeenez, I intentsitatea 0 izatetik ε/R baliora pasatuko da, prozesu exponenzialean. Ikuspuntu matematikotik, ez da inoiz lortuko azken egoera egonkor hori, baina ikuspuntu praktikotik, $\tau = L/R$ *lasaikuntza-denbora* deiturikoarekin konparaturik handia den denbora-tartea pasatu ondoren, I intentsitateak duen balioa ε/R dela kontsidera dezakegu.



22.6. irudia. Intensitatearen aldakuntza, R - L zirkuitua pilarekin konektatzean.

Alderantzizko prozesua ere azter daiteke, alegia, hasieran pilarekin konektaturik egonik ε/R intentsitatea zuen R - L zirkuitua deskonektatzean izango den aldakuntza. Izan ere, aurreko egoera horretatik abiatuta, pila zirkuitutik deskonektatzen badugu, ondoko ekuazioa izango dugu,

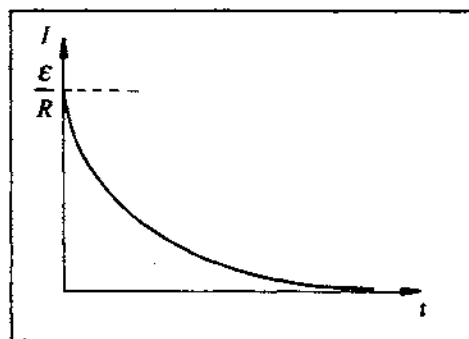
$$-L \frac{dI}{dt} = IR, \quad (22 - 33)$$

eta ekuazio hori hasierako baldintzak kontuan harturik integratuz,

$$\int_{\varepsilon/R}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt. \quad (22 - 34)$$

Beraz, denboraren arabera intentsitateak honako adierazpen hau izango du:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (22 - 35)$$



22.7. irudia. Intensitatearen aldakuntza, pila deskonektatzean.

Grafikoki 22.7. irudian adierazi dugunez, berriro ere τ lasaikuntza-denborarekiko handia den denbora-tartea pasatu ondoren, efektu praktikoko guztietarako egoera egonkorra helduko da, eta kasu honetan azkenean $I = 0$ baldintza beteko da.

22.3.2. Solenoide toroidalaren autoindukzioa

Hurrengo adibidea, aurreko gaien aztertu genuen solenoide toroidalarena izango da. Bertan ikusi genuenez (21.5.2. atala), solenoidearen espiren a erradioa toruaren R erradioa baino askoz txikiagoa baldin bada (ikus 21.14. irudia), barneko eremu magnetikoaren modulua $B = \mu_0 N I / l$ izango da. Bestalde, l luzera $2\pi R$ da. Espira bakoitzaren azalera $A = \pi a^2$ denez, hauxe izango da zirkuituko N espiretan neurtutako fluxu magnetikoa:

$$\Phi = BNA = \frac{\mu_0 N^2 I \pi a^2}{2\pi R}. \quad (22-36)$$

eta, autoindukzio-koefizientearen definizioa gogoratu, hauxe dugu:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2R}. \quad (22-37)$$

22.4. EREMU MAGNETIKOAREN ENERGIA

Ezaguna dugun, $\mathcal{E}$ indar elektroeragileak hornitutako potentzia $\mathcal{E}I$ da. Era berean, $\mathcal{E}_i$ indar elektroeragile induzituaren potentzia

$$\mathcal{E}_i = -LI \frac{dI}{dt} \quad (22-38)$$

izango da. Beraz, aurreko puntuan aztertu dugun R - L zirkuituaren kasuan, potentziaren ekuazioa ondokoa izango da:

$$\mathcal{E}I - LI \frac{dI}{dt} = RI^2; \quad (22-39)$$

hots, era honetan adieraz dezakegu sorgailuaren potentzia:

$$\mathcal{E}I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}. \quad (22-40)$$

Pilak hornitutako potentzia bi beharretan erabiltzen dela diosku ekuazio honen. Lehenengo gaia Joule efektuak erresistentzian bero gisa iraungiriko potentzia da, eta bigarrena, berriz, autoindukzioan eta eremu magnetikoa eraikitzeke irazia edo gastatua izan dela esan genezake, interpretaziorik naturalena egin nahi izatekotan. Hemen arrazonamendu sakonagorik emango ez badugu ere, horixe da egin ohi den interpretazioa, komenigarria gertatzen baita. Horrela, eremu magnetikoa eraikitzean ondoko lana egiten da:

$$W = \int P dt = L \int_0^I I dI = \frac{1}{2} LI^2. \quad (22-41)$$

Eremu elektrostatikokoaren kasuan egin zenaren antzera, eremu magnetikoa eraikitzen gastatu den lana, bertan energia magnetiko gisa metaturik geratzen dela suposatzen da. Horrela, zirkuituaren energia magnetikoa

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad (22-42)$$

baliokoa izango da.

Adibidez, zirkuitua pilarekin konektaturiko aurreko torua baldin bada, azken emaitzak hauxe diosku:

$$E_B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 a^2}{l} I^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Al. \quad (22-43)$$

Hemen, Al delakoa eremu magnetikoa dagoen eskualdearen bolumena denez gero,

$$U_B \equiv \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (22-44)$$

magnituda energia magnetikoaren dentsitatetzat har dezakegu.

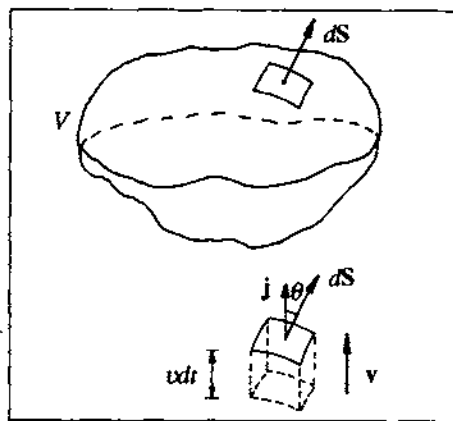
Berau oso kasu berezian ikusi dugun arren, guztiz emaitza orokorra da, eta, izatez, kasurik orokorrean ere *energia magnetikoaren dentsitatea* $B^2/2\mu_0$ dela frogatu daiteke. Bestalde, energia elektrostatikokoaren dentsitatea $U_E \equiv \epsilon_0 E^2/2$ dela esan dugu (ikus 21.3. atala). Frogapenik eman ez arren, esan dezagun emaitza honek kasu aldakorretan ere zutik dirauela. Berez, edozein eremu elektromagnetiko eraikitzeke erabilitako lana eremuan bertan geratzen da gordeta, eta energia elektromagnetikoaren dentsitatea hauxe da:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (22-45)$$

22.5. KARGAREN KONTSERBAZIOAREN PRINTZPIOA

Kontsidera dezagun 22.8. irudiko S gainazal itxia eta berak mugaturiko V bolumena. Eman dezagun espazioko eskualde horretan ρ karga dentsitatea dagoela eta $\mathbf{v}$ abiaduraz higitzen ari dela. Higidura honen ondorioz, V bolumenean dagoen karga elektrikoa osoa aldatuz joango da. S gainazalean zehar karga-fluxu bat egongo baita. Gainazaleko dS elementu infinitesimalari eta denbora-unitateari dagokien kanporanzko karga-fluxua (hau da, intentsitatea) honako hau izango da:

$$dI = \frac{\rho(v dt \cos \theta) dS}{dt} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (22-46)$$



22.8. irudia. dS gainazal txikia zeharkatzen duen kargaren kalkulurako elementuak.

Hemen, θ ikurrak $\mathbf{v}$ eta $d\mathbf{S}$ bektoreen arteko angelua adierazten du. Emaizta hori lortzeko, hidrodinamikan fluxua kalkulatzeko erabilitako metodoaz balia gaitzke. Horretarako aski da, dt tartean dS elementua zeharkatzen duen karga irudiko paralelepipedoaren barruan dagoena dela kontsideratzea.

Beraz, denbora-unitateko kanporanzko fluxu osoa kalkulatu berri ditugun antzeko ekarpenen batura (integrala) izango da:

$$I = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (22 - 47)$$

Emaizta hori ikusirik, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ bektoreari *korrante-dentsitatea* deritzo, horrela eginez korrante-intentsitatea korrante-dentsitatearen fluxua baita:

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (22 - 48)$$

Eroale baten kasuan, $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$ dugu, n delakoa partikula kargatuen (karga-eramaleen) dentsitatea izanik.

Esperientziak dioskuncz, karga elektriko osoak konstante irauten du. Beraz V bolumeneko karga osoa q baldin bada, denbora-unitatean q horrek duen aldaketa bolumenean sartzen den kargaren ondorioa izango da, eta, hortaz, barruranzko karga-fluxuaren berdina, hots,

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (22 - 49)$$

(zeinu negatiboa, barruranzko fluxua adierazteko jarri dugu). Baina Gauss-en legea erabil-tzen badugu, honelaxe adieraz daiteke karga elektrikoaren kontserbazioaren printzipioa:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (22 - 50)$$

edota

$$\oint_S \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (22 - 51)$$

S delakoa edozein gainazal itxi izanik.

Eremu elektromagnetikoa estatikoa baldin bada, orduan $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ dugu eta, beraz, hauxe da kargaren kontserbazioa:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (22 - 52)$$

22.6. AMPERE-MAXWELL-EN LEGEA. DESPLAZAMENDU-KORRONTEA

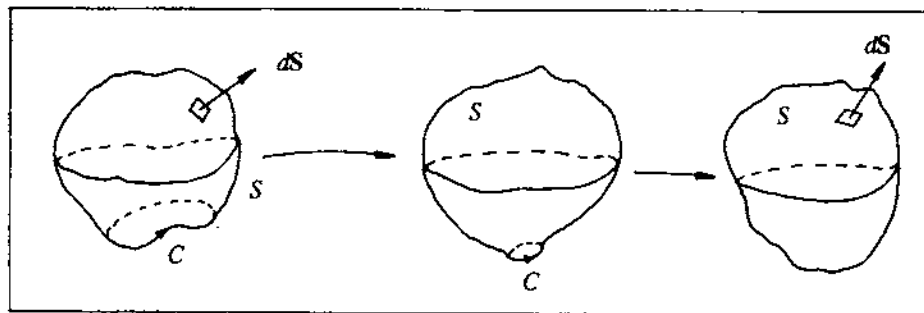
Har dezagun C muga orientatua duen S gainazala (oraingoz irekia). Ampère-ren legearen arabera (21.5. atala), hauxe dugu:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (22-53)$$

Demagun C lerroaren luzera osoa zerorantz doala, hurrengo 22.9. irudian adierazi dugun bezala. Agerikoa denez, limitean hauxe izango dugu:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (22-54)$$

integrazio-bidea luzera nulukoa baita.



22.9. irudia. C mugaren luzera zerorantz doa.

Azken bi ekuazio hauen ondorioz, honako hau lor daiteke:

$$\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (22-55)$$

hemen S gainazala itxia izanik; eta aurreko atalean ikusi dugunez, eremu estatikoen kasuan emaitza hau kargaren kontserbazioa da. Beraz, kargaren kontserbazioaren printzipioa Gauss-en eta Ampère-ren legeen ondorio hutsa da Elektrostatikaren. Baina eremuak aldakorak badira, ekuazio hori ez da halaberrez beteko eta kargaren kontserbazioaren adierazpen zilegia (22-51) ekuazioak emandakoa izango da. Argi dago hemen kontraesan batekin topo egin dugula.

Erraz asmatzen da arazo honen zergatikoa: Ampère-ren legeak ez du balio eremuak aldakorak badira. Hau ez da hain harrigarria, antzeko gauza gertatu baitzaigu beste lege batekin. Izan ere, elektrostatikaren ikusi genuen ondoko lege integrala, eremu elektrostatikoa kontserbakorra dela adierazten duena alegia,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (22-56)$$

ez da betetzen eremu magnetikoa aldakorra bada, eta kasu horretan Faraday-Henry-ren legea, hots,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (22-57)$$

erabili behar dugu haren ordeaz. Azken kasu honen ildotik abiaturik eta (22-51) emaitza kontuan harturik, benetako ekuazioa ondokoa dela pentsa genezake:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (22-58)$$

Izan ere, ekuazio hau lortzeko (22-53) delakoari gehitu behar zaion gaia, (22-57) emaitza aurkitzeko (22-56) ekuazioari atxeki zitzaionaren antzekoa da. Horrela, (22-58) ekuazioa egia balitz, kasu estatikoan Ampère-ren legea berreskuratuko genuke alde batetik eta, garrantzitsuagoa dena, kasurik orokorrean ere zuzena den kargaren kontserbazioaren legea lortuko litzateke ondorio modura, C lerroaren luzera zerorantz joatean.

Hala ere, goian egindako arrazionamendua ez da nahikoa (22-58) ekuazioa benetako legea dela baicztatzeko, azken baicztapena esperientziaren aldetik etorri behar baita. Baina horrelako intuizio batean finkaturik-edo, Maxwell-ek (22-58) ekuazioa proposatu zuen Ampère-ren legea ordezkatzeko. Ikusiko dugunaz, *Ampère-Maxwell-en legea* deritzon lege berri honen ondorioen artean, argiaren izaera elektromagnetikoa eta uhin-luzera guztietako uhin elektromagnetikoen existentzia daude. Fisikaren historian zehar egindako aurrean teoriko distiratsuenetakoa dugu hori! Jakina denez, geroxago Hertz-ek baicztatu egin zuen aurrean teoriko hori.

Esperientziaren aldetik, gaur egun ez da inolako zalantzarik: Ampère-Maxwell-en legea Elektromagnetika klasikoaren funtsezko postulatuaren artean dago.

Azter ditzagun lege honen ondorio batzuk. Gauzak ahalik eta errazen egiteko, suposa dezagun korrante elektrikorik ez dagoela. Kasu berezi honetan hauxe dugu:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (22-59)$$

non S gainazalaren muga C lerro orientatua den. Baina (22-21) Faraday-Henry-ren legea eremu magnetikoaren adierazpena baldin bada, aurreko ekuazioaren interpretazioa hauxe izango da: «*eremu elektriko aldakorrak eremu magnetiko bat sorrarazten du bere inguruan*». Indar elektroeragilearen definizioan finkaturik, ondoko adierazpeneko magnitudea,

$$\Lambda \equiv \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}, \quad (22-60)$$

indar magnetoeragile izenaz bataiatzen badugu, fluxu elektrikoaren aldaketa eta *indar magnetoeragile indusitua* lotzen dituen ekuazioa honako hau izango da:

$$\Lambda = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (22-61)$$

non

$$\Phi_E \equiv \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (22-62)$$

den. Begi bistan dago indar elektroeragile indusitua ematen digun ekuazioarekiko antzekotasuna (adibidez, (22-4) eta (22-60), eta, bestalde, (22-11) eta (22-61) konpara daitezke).

22.6.1. Desplazamendu-korrontea

Ampère-Maxwell-en legearen bigarren gaia ($\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$) bektorearen fluxua da, funtsean. Analogia formalaz baliaturik, bigarren gaiari,

$$\mathbf{j}_D \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (22-63)$$

bektoreari alegia, *desplazamendu-korrontearen dentsitatea* deitzen baldin badiogu, ondoko fluxua,

$$I_D \equiv \iint_S \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (22-64)$$

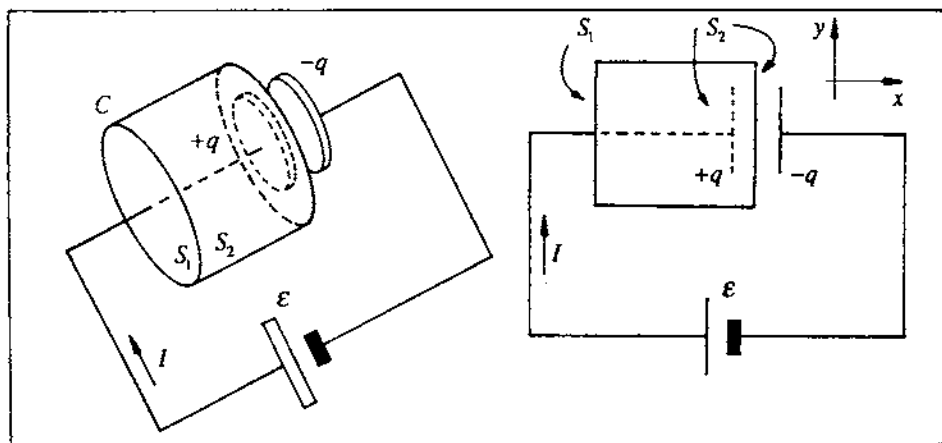
desplazamendu-korrontearen intentsitatea izango da eta, beraz, Ampère-Maxwell-en adierazpena haxe izango da:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 \iint_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) \cdot d\mathbf{S}, \quad (22-65)$$

edota, hitzez esanda: «*C* lerroan neurtutako zirkulazio magnetikoa korronte-intentsitate osoaren (hau da, kargen higidurak sorturikoaren eta desplazamendu-korrontearen intentsitatearen baturaren) proportzionala izango da, haien arteko zatidura hutsaren iragazkortasuna izanik».

22.6.2. Kondentsadorearen karga-prozesua

Adibide moduan, azter dezagun 22.10. irudiko kondentsadore lauaren karga-prozesua. Kontsidera ditzagun C muga zirkularra duen S_1 zirkulua eta S_2 gainazal zilindrikoa, azken honetan S_1 zirkuluaren paraleloa den oinarriko gainazala ere kontsideratuz, S_1 eta S_2 biak batera hartuz, bien artean gainazal itxia edukitzeko. Bestalde, kondentsadorearen xaflen azalera S da, eta bi xaflen arteko distantzia oso txikia dela kontsideratuko dugu, ertzen efektuak arbuiauz eremu uniformea kontsideratzeko.



22.10. irudia. Kondentsadore lauaren karga-prozesuaren azterketa.

Elektromagnetika estatikoak ez du balio egoera aldakor honetan. Izan ere, kondentsadorea guztiz kargatu arte, I intentsitatea ez da nulua izango hari eroalean; baina bai plaken artean, bertatik ezin baita kargarik pasatu. Beraz, Ampère-ren legea aplikatzekotan, ondoko kontraesana lortuko genuke:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \neq \mu_0 \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (22 - 66)$$

Espero izatekoa zenez, Ampère-Maxwell-en formulazio berria erabiliz ez dago arazorik. Lehen hurbilketan, eremu elektrikoa plaken artean dago kokaturik, eta bertan konstantea eta ondoko baliokoa da:

$$\mathbf{E} = E\mathbf{i}, \quad E = \frac{V}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{q}{\epsilon_0 S}. \quad (22 - 67)$$

Beraz, desplazamendu-korrontea hauxe izango da:

$$\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j_D \mathbf{i}, \quad j_D = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt}. \quad (22 - 68)$$

Ondorioz, Ampère-Maxwell-en legearen arabera, honako hau izango dugu S_1 gainazalean:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I, \quad (22 - 69)$$

eta S_2 delakoan:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_{S_2} \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 j_D S = \mu_0 \frac{dq}{dt}. \quad (22 - 70)$$

Baina,

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (22 - 71)$$

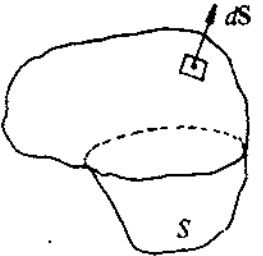
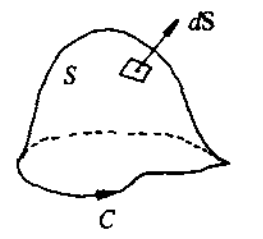
delako berdintza intentsitatearen definizioaren ondorio zuzena da. Aurreko kontraesana desagertu egin da!

22.7. MAXWELL-EN EKUAZIOAK

Aurreko gaian egin genuenez, hemen ere ikusitakoaren laburpena aurkeztuko dugu. Elektromagnetikaren funtsezko legeak 22.11. irudian adierazitakoak dira.

Maxwell-en ekuazioak deritze horiei, eta hutsean ρ karga-dentsitatea eta $\mathbf{j}$ korronte-dentsitatea iturritzat dituzten eremu elektromagnetikoak zein diren dioskute (deskribapena nahastezina izateko, muga-baldintza batzuk ezarri behar zaizkie baina). Lege horietaz gain, eremuen definizioa dugu, hau da, q kargaren gainean eragiten duen indar elektromagnetiko osoa indar elektriko eta magnetikoaren batura dela:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (22 - 72)$$

$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$		$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$		$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} =$ $= \mu_0 \iint_S \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$

22.11. irudia. Maxwell-en ekuazioak era integralcan.

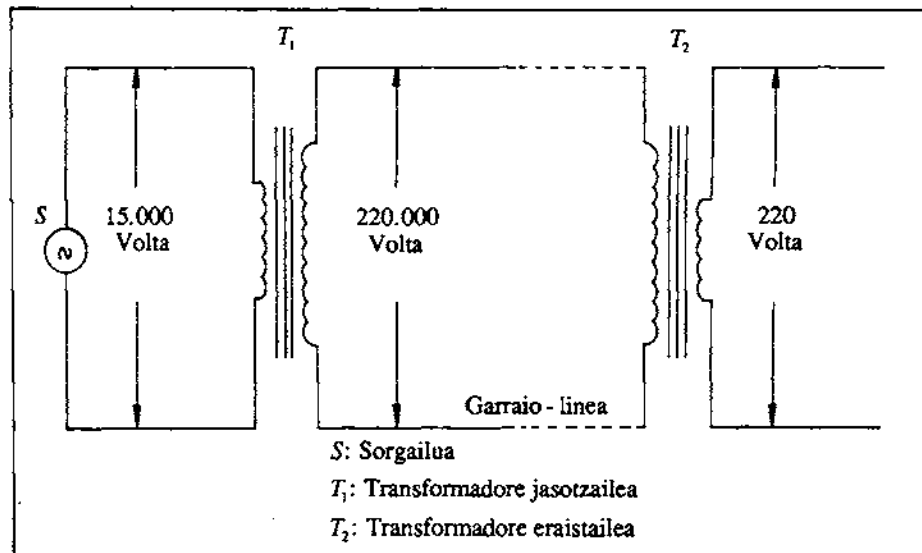
Azken adierazpen hori *Lorentz-en indarra* dela esan ohi da. Elektrodinamikaren beste emaitza guztiak lege horien ondorioztat kontsidera ditzakegu. Horrela, aurreko atalean ikusi dugunez, kargaren kontserbazioaren legea erraz lortzen da lege horietatik abiatutik. Beraz, Maxwell-en ekuazioak, Lorentz-en indarrarekin batera, gaur egungo Elektrodinamika klasikoaren oinarritzko postulatuak dira, Newton-en legeak Mekanika klasiko ez-erlatibistaren oinarritzko postulatuak diren bezalaxe.

23. gaia

Korronte alternoa

Gaur egun, energia elektrikoaren ia aplikazio gehienetan korronte alternoa erabiltzen da korronte zuzenaren ordez. Elektrizitatearen antzinako sasoian, energia elektrikoa ekoizpen-lekuaren inguruan kontsumitzen zen eta korronte zuzena erabiltzen zen. Hala ere, energia elektrikoaren distantzia handietako garraioaren beharra agertzean, korronte alternoa gertatu zen nagusi, garraioan zehar azaltzen diren energia-galerak gutxiagotzeko.

Izan ere, ez dugu ahaztu behar, garraio-galerak, Joule efektuak sorturikoak, intentsitatearen karratuaren proportzionalak direla, eta potentzia berbererako tentsio elektrikoa zenbat eta handiagoa izan, intentsitatea hainbat eta txikiagoa dela, eta galerak ere txikiagoak direla.



23.1. irudia. Energia elektrikoaren garraio-sistema arrunta, tarteko transformadoreen bidez.

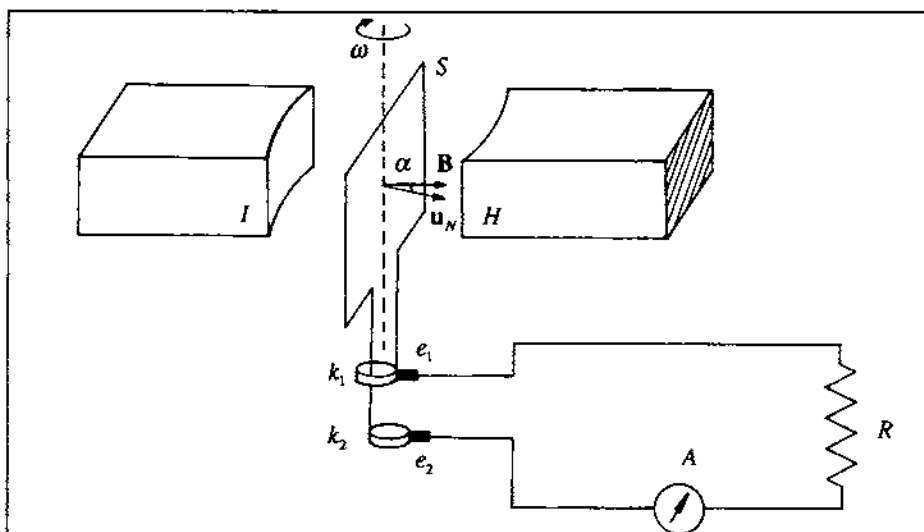
Arazo honetan, behin-betiko gauza izan zen transformadorearen agerpena, aparatu honen bidez erraza baita behe-tentsioan ekoizten den energia goi-tentsioan garraiatzea; eta gero, kontsumo-puntuetara heltzean, posiblea zaigu berriro ere, tentsio handian garraiatutako energia tentsio erabilgarrian ipintzea, beste transformadore bat erabiliz, noski. Eta transformadoreek korrante alfernoa eskatzen dute. Hain zuzen, 23.1. irudian ikus daiteke garraio-sistemaren eskema.

Bestalde, korrante zuzena behar izatekotan, erraz lor dezakegu korrante alfernotik abiatutik, bai artezgailuak erabiliz zein korrante alfernoz elikatutako korrante zuzeneko sorgailuen bidez.

Hortaz, sarrera honetan esandakoek argiro uzten dute, korrante alfernoaren erabilerak gaur egungo gizartean duen garrantziaren zergatikoa. Ondorioz, gai honetan korrante alfernoaren ezaugarri fisikoak aztertzen saiatuko gara.

23.1. KORRANTE ALFERNOAREN SORKUNTZA

Korrante alfernoko sorgailuaren —*alternadorea* ere deiturikoa— funtsa eremu magnetiko batean ω abiadura angeluar konstantez biratzen ari den espiran datza (ikus 23.2. irudia).



23.2. irudia. Alternadorearen egitura.

Espiraren muturrak, berekin batera biratzen ari diren k_1 eta k_2 bi eraztun biltzaileei, *kolektoreei*, soldaturik daude, eta e_1 eta e_2 bi eskuilen bidez, sortutako korrantea hartzen da, R erresistentziako alboko zirkuituan erabili ahal izateko. Espira zeharkatzen duen fluxua (eremua uniformea dela kontsideraturik) hauxe izango da:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \alpha, \quad (23-1)$$

non B eremu magnetikoaren intentsitatea den, S espiraren azalera eta α eremu magnetikoaren intentsitateak eta espiraren planotatik normalak eratzen duten angelua.

Bestalde, t denboran espirak biraturiko angelua $\alpha = \omega t$ dela kontuan izanik, $\Phi = BS \cos \alpha$ jarri ahal izango dugu. Ikus daitekeenez, fluxua aldakorra da, lege kosinoidal baten arabera. Beraz, fluxuaren aldakuntzak indar elektroeragile indusitua sortuko du, eta beraren balioa ondokoa izango da:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \alpha) = BS\omega \sin \alpha. \quad (23-2)$$

Eta $BS\omega = E_0$ eginez,

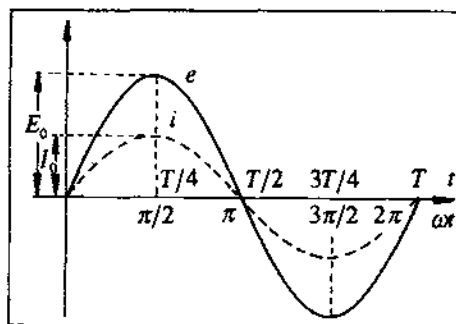
$$e = E_0 \sin \alpha. \quad (23-3)$$

Beraz, indar elektroeragilea periodiko eta sinusoidal da, beraren balio maximoa E_0 izanik. Ohar modura diogun ezen, korrante alternoari buruzko liburuetan egin ohi denez, e letra erabiliko dugula gai honetan indar elektroeragilea adierazteko, aurreko gaitako ε letra erabili ordez. Halaber, i letra erabiliko dugu intentsitatea adierazteko.

Orain, 23.2. irudiko zirkuituan dagoen R erresistentzian zehar pasatzen den korrantearen intentsitatea ondokoa da:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_0}{R} \sin \alpha = I_0 \sin \alpha. \quad (23-4)$$

Indar elektroeragilearen eta intentsitatearen adierazpen grafikoa 23.3. irudian ageri da.



23.3. irudia. Indar elektroeragilearen eta intentsitatearen adierazpen grafikoa, denboraren arabera.

Korrante alternoaren ezaugarrietako bat *maiztasuna* (ν) da. Dakigunez, maiztasuna T periodoaren alderantzizkoa da, alegia, korrantearen zeinuaren aldaketaren periodoarena. Matematikoki idatzita, $\nu = 1/T = \omega/2\pi$, edo gauza bera dena, $\omega = 2\pi\nu$.

Maiztasuna *hertzetan* neurtzen da, eta etxerako eta industriarako Europan erabiltzen den korrante alternoa 50 Hz-ekoa da. Periodoa $1/50$ segundokoa dela esan nahi du horrek, edo beste hitz batzuetan, periodoerdia edo *alternantzia* $1/100$ s-koa. Beraz, mota honetako korranteak 100 aldiz aldatzen du bere noranzkoa segundo bakoitzean.

Hori dela eta, korrante alternoak ez du adierazten, korrante zuzenaren kasuan gertatzen den modura, eroalearen sekzioan zehar elektroiak beti noranzko berean pasatzen direnik. Aitzitik, korrante alternoa $T = 2\pi/\omega$ periodoa duen elektroien bibrazioan datza; hots, metalean zeharreko elektroien higidura ondulatorioa da korrante hau.

Dena dela, korrante alernoaren efektuak, aipaturiko higidura ondulatorioaren hedapenak sorrarazitakoak direnez, korrante alternotzat eroalean zeharreko uhin horren hedapena jotzen dugu.

23.2. BATEZ BESTEKO BALIOA ETA BALIO ERAGINKORRA

Orain arte, indar elektroeragilearen eta intentsitatearen aldiuneko balioak (e eta i) eta balio maximoak (E_0 eta I_0) ikusi ditugu. Goazen, beraz, erabilgarritasun handiko beste balio bat definitzera: *balio eraginkorra*, hain zuzen.

$y(t)$ funtzio periodiko baten balio eraginkorra modu honetan definitu ohi da:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt}, \quad (23-5)$$

alegia, magnitude periodiko baten balio eraginkorra beraren karratuaren batez besteko balioaren erro karratua da. Gure kasuan, $y(t)$ delakoa $E_0 \sin \omega t$ edo $i = I_0 \sin \omega t$ izan daiteke. Beraz, intentsitatearen balio eraginkorra hauxe izango da:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 \sin \omega t]^2 dt}, \quad (23-6)$$

eta $\sin^2 \omega t$ funtzioaren batez besteko balioa $1/2$ dela kontuan hartuz:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (23-7)$$

Era berean eginez, korrante alernoaren indar elektroeragile eraginkorra honako hau izango da:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}. \quad (23-8)$$

Balio eraginkorraren kalkulu matematikoa eginik, goazen orain beraren esangura fisikoa aztertzeraz. Dakigunez, dt denboran korrante elektrikoaren eraginez R erresistentzian sorturiko dQ bero-kantitatea honako hau dugu: $Ri^2 dt$. Hortaz, korrantea konstantea ez denean, periodo batean sorturiko beroa hauxe izango da:

$$Q = R \int_0^T i^2 dt. \quad (23-9)$$

Integralaren emaitza korrante eraginkorraren funtzioan emanez,

$$Q = R I^2 T. \quad (23-10)$$

Honek adierazten digunez, korrante alernoaren intentsitatearen balio eraginkorra, denbora berean bero-kantitate berbera sorrarazten duen korrante zuzeneko intentsitatearen balioa da.

Bestalde, jakina denez, $y = y(t)$ funtzioaren batez besteko balioa honelaxe definitu ohi da:

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt. \quad (23-11)$$

Edozelan ere, $i = I_0 \sin \omega t$ motako funtzioen batez besteko balioetaz berba egiteak ez dauka inolako interesik, funtzio sinusoidalen kasuan nuluak baitira, zeren periodo bakoitzean edozein balio positibori magnitude bereko eta aurkako zeinuko beste balio bat baita-gokio.

Dena dela, funtzioak $y = y_0 \sin^2 \omega t$ motakoak direnean, batez besteko balioa ez da nulua, potentzia aztertzean ikusiko dugunez ($\sin^2 \omega t$ funtzioaren batez besteko balioa 1/2 baita).

Bestalde, korrante alternoaren tentsioa eta intentsitatea aipatzean, normalean beren balio eraginkorrak aipatu ohi ditugu, berauek baitira, hain zuzen ere, neurgailuek ematen dizkigutenak (adibidez, 220 volta, 14 ampere...). Hortaz, kontuan hartu beharrekoa da, balio maximoak $\sqrt{2}$ aldiz handiagoak direla.

Amaitzeko, gogora dezagun berriro ere 23. gai honetan zehar erabiliko dugun notazioa:

e, i	:	aldiuneko balioak
E_0, I_0	:	balio maximoak
E, I	:	balio eraginkorrak.

23.3. KORRANTE ALTERNOAREN EFEKTUAK ETA EZAUGARRIAK

Zerrenda bat osaturik, besterik gabe, korrante alternoaren propietate eta ondorio batzuk aipatuko ditugu:

- Korrante alternoak ez dauka polaritate finkorik; korrante zuzenak, ordea, bai. Horrek esan nahi du, ezen, korrante zuzeneko sorgailuen borneetako bata (positiboa dena) beti dagoela bestea (negatiboa) baino potentzial handiagoan. Korrante alternoko sorgailuetan, aldiz, alternantzia batean betetzen da hori.

Hori dela eta, korrante zuzeneko sorgailu edo metagailuak (pilak edo autoetako bateriak, adibidez) erabiltzen dituzten aparatuetan, polaritatea beti datorkigu azaldurik, eta konexioak burutzean, nahitaezkoa dugu polaritatea mantentzea. Aitzitik, korrante alternokoak diren etxeko tresna elektrikoetan, ez dago inolako polaritate-zeinurik.

Esandakoa kontuan harturik, erraz ikus daiteke ezen elektrolisian korrante zuzena erabili beharko dela, zeren, korrante alternoaren noranzkoa etengabe aldatzen denez gero, elektrodoen zeinua aldatu egiten baita etengabeki, eta ondorioz, berek jasotako materiala ere elektrodo batetik bestera joango baita.

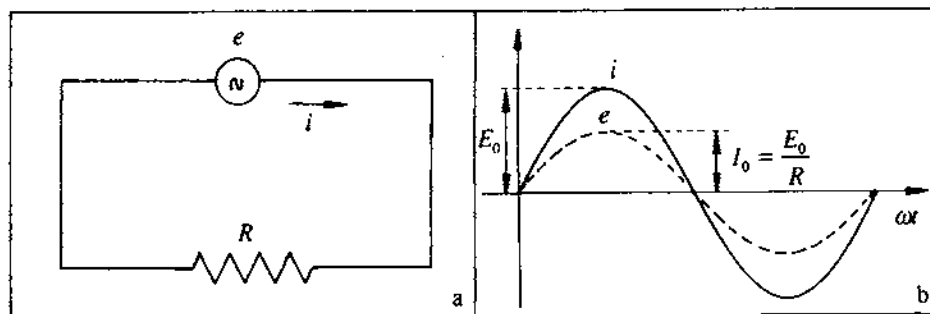
- Korrante alternoaren zirkulazioak, korrante zuzenarenak bezalaxe, beroa sorrarazten du. Arestian ikusi dugunez, $Q = RI^2t$ da, baina bertan intentsitatearen balio eraginkorra kontuan hartuz.
- Korrante alternoak eremu magnetikoa sortzen du. Zer esanik ez, korrantearen intentsitatea periodikoki aldatzean, sorturiko eremu magnetikoa ere periodikoki aldatuko da, eta eremuaren maiztasuna eta korrantearena berdinak izango dira.
- Korrante alternoak kondentsadoreetan zehar pasa daitezke, korrante zuzenaren kasuan gertatzen ez dena, zeren, kasu honetan, kondentsadoreak erresistentzia infinitua balitz modura jokatzen baitu, kargaldian eta deskargaldian salbu.

Oro har, korrante alernoaren intentsitatea ez da tentsioaren eta erresistentziaren arteko zatidura, zeren, geroago ikusiko dugunez, autoindukzioek eta kapazitateek sorturiko beste zenbait efektu ere kontuan hartu beharrekoak baitira.

- Oro har, zirkuituaren muturretan ezarritako tentsioa eta beronek sorrarazitako korrantearen intentsitatea ez daude fasean, hau da, ez dira aldi berean beren balio maximoetara iristen. Fase-diferentziak zirkuituaren elementuen eta maiztasunaren menpekoak dira.
- Aurreko lerroaldean esandakoaren arabera, kapazitateak eta autoindukzioak dauzkatzen zirkuituetako elementu desberdinen potentzial-diferentzien balio eraginkorren batura aljebraikoak ez du zertan izanik zirkuituan ezarritako tentsioaren balio eraginkorren berdina. Dena den, balio eraginkorren ordeztu aldiuneko balioak kontsideratzen baldin baditugu, aipaturiko batura ezarritako aldiuneko tentsioaren berdina da.

23.4. KORRONTE ALTERNOKO HARGAILUAK

Hiru motatakoak izan daitezke korrante alternoko hargailuak: erresistentziak, autoindukzioak eta kondentsadoreak. Ikus dezagun, bada, zein diren tentsioaren eta intentsitatearen arteko erlazioak hargailu horietako bakoitzean.



23.4. irudia. a) Erresistentzia hutseko korrante alternoko zirkuituaren adierazpen eskematikoa. b) Indar elektroeragilearen eta intentsitatearen eboluzio denborala.

23.4.1. Erresistentzia hutsa

Demagun R erresistentziaren borneyen artean $e = E_0 \sin \omega t$ tentsioa ezarri dugula (ikus 23.4. irudia). Dakigunez,

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t. \quad (23-12)$$

Zer esanik ez, balio eraginkorren dagokionez, $I = E/R$ izango da, irakurleak erraz frogatu dezakeenez. Hain zuzen, 23.4.b irudian ikus dezakegu funtzio horien adierazpidea. Ikus dezakegunez, fasean daude biak, hots, e eta i funtzioak aldi berean iristen dira beren balio maximo zein minimoetara. Bien artean ez dago desfaserik.

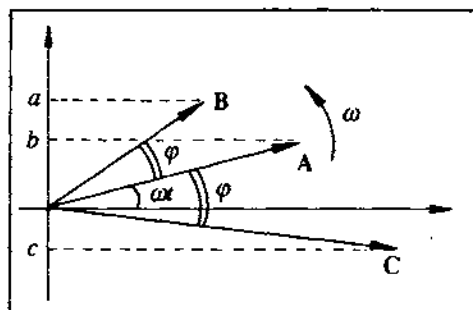
23.4.2. Korronte alternoaren adierazpen fasoriala

Bestalde, higidura oszilakorra izeneko 15. gaian ikusitakoaren arabera, funtzio sinusoidalak bektore biratzaileen bidez adieraz daitezke. Bektore horiei *fasoreak* ere bade-ritze.

Demagun, adibidez,

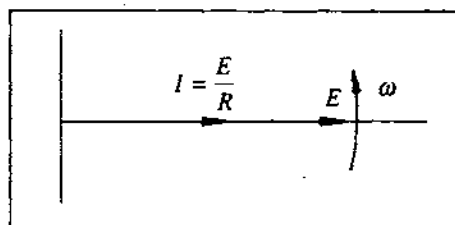
$$a = A \sin \omega t, \quad b = B \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{eta} \quad c = C \sin(\omega t - \varphi) \quad (23 - 13)$$

funtzio sinusoidalak ditugula. Horien adierazpide fasoriala 23.5. irudian ikus daiteke, fasore bakoitzaren luzerak A , B eta C izanik, hurrenez hurren. Nabaria denez, ardatz bertikalaren gaineko fasoreen proiektzioek adierazitako funtzioen aldiuneko balioak ematen dizkigute (sinu funtzioa izan ordez, kosinu funtzioa erabiliko bagenu, x ardatzeko proiektzioak hartuko genituzke). Dena den, magnitudeen balioez gain, korronte alternoa aztertzean erabateko garrantzia duen beste zerbait hautematen dugu adierazpide fasorialaren bitartez: fasoreen arteko posizio erlatiboak ezagutzea, hain zuzen ere.



23.5. irudia. a , b eta c funtzioen adierazpen fasoriala.

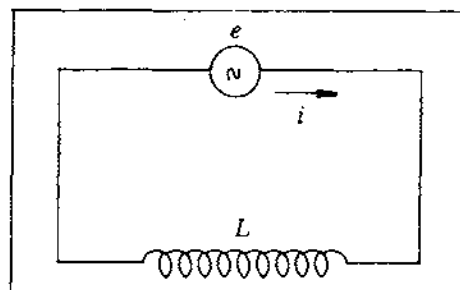
Erresistentzia hutseko kasuan, $e = E_0 \sin \omega t$ eta $i = I_0 \sin \omega t$ funtzioak ditugu. Beraz, fasoreen luzeratzat balio eraginkorrak harturik, eta adierazpidea $t = 0$ aldiunean eginik, alboko 23.6. irudian azaldu den eran gertatzen da tentsio eta intentsitatearen adierazpide fasoriala; hain justu, beren arteko desfaserik ez dagoenez, gainjarrita agertzen zaizkigu.



23.6. irudia. Erresistentzia hutseko zirkuituaren adierazpen fasoriala.

23.4.3. Autoindukzio hutsa

Oraingo kasuan demagun L autoindukzio-koefizientea daukan haril baten muturretan $e = E_0 \sin \omega t$ tentsio alternoa ezarri dugula (ikus 23.7. irudia). Erresistentzia arbuiagarria bada, ezarritako tentsioaren eta korrontearen intentsitatearen artean dagoen erlazioa hauxe izango da:



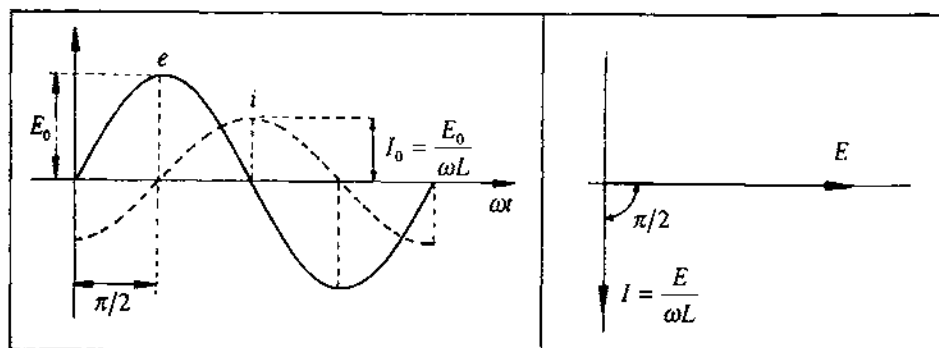
23.7. irudia. Autoindukzio hutseko zirkuitua.

$$e = L \frac{di}{dt}, \quad (23 - 14)$$

edo gauza bera dena,

$$i = \frac{1}{L} \int e dt = \frac{1}{L} E_0 \int \sin \omega t dt = \frac{E_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{E_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2). \quad (23 - 15)$$

Ikus daitekeenez, intentsitatea $\pi/2$ (edo 90°) atzeratuta dago tentsioarekiko; edo, beste modu batez esanda, tentsioa $\pi/2$ aurreratuta intentsitatearekiko, bai era analitikoan zein grafikoan egiazta daitekeenez (23.8. irudia).

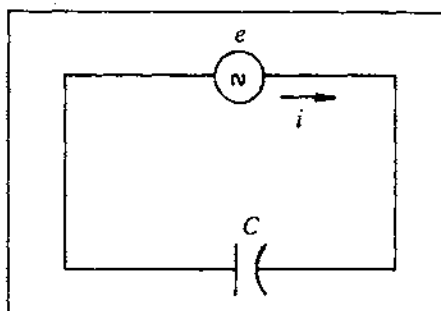


23.8. irudia. a) Autoindukzio hutseko zirkuituko indar elektroeragilearen eta intentsitatearen eboluzio denborala. b) Adierazpen fasoriala.

Aurreko adierazpenetako ωL delakoari *erreaktantzia induktiboa* deritzen, eta normalean X_L ikurraz adierazten da. Hortaz, balio eraginkorri dagokionez,

$$I = \frac{E}{X_L}. \quad (23 - 16)$$

Unitateei dagokienez, L autoindukzio-koefizientea *henry* unitatetan (H) neurtzen da; bestalde, $X_L = 2\pi\nu L$ biderkadurak erresistentziaren dimentsioa du, eta *ohm* unitatetan (Ω) neurtzen da. Nabaria denez, L -ren balio konstanterako erreaktantzia induktiboa maiztasunaren arabera emendatzen da.



23.9. irudia. Kapazitate besterik ez duen zirkuitua.

23.4.4. Kapazitatedun zirkuitua

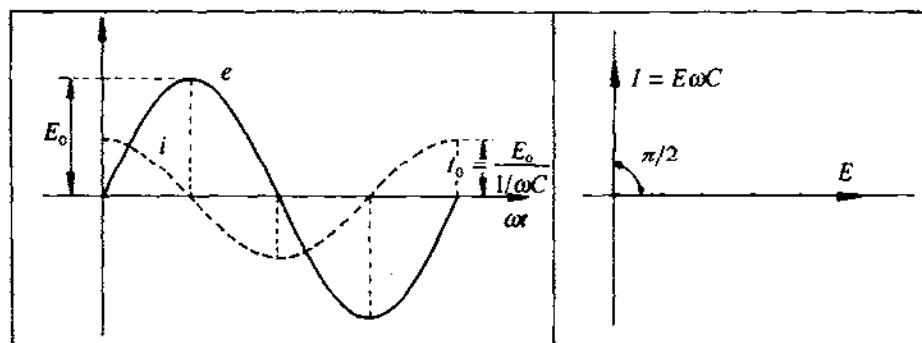
Demagun orain C kapazitateko kondentsadore baten borneyen artean $e = E_0 \sin \omega t$ tentsio alternoa ezarri dugula (23.9. irudia). Kondentsadoreak metatzen duen kargaren eta kapazitatearen arteko erlazioa hauex da:

$$dq = Cde. \quad (23-7)$$

Bestalde, $dq = idt$ denez,

$$i = C \frac{de}{dt} = CE_0 \omega \cos \omega t = \frac{E_0}{1/\omega C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (23-18)$$

Kasu honetan, intentsitatea $\pi/2$ (edo 90°) aurreratuta dago tentsioarekiko, edo gauza bera dena, tentsioa $\pi/2$ atzeratuta intentsitatearekiko (23.10. irudia).



23.10. irudia. a) Kapazitatedun zirkuituko indar elektroeragilearen eta intentsitatearen eboluzio denborala. b) Adierazpen fasoriala.

$1/\omega C$ delakoari *erreaktanzia kapazitiboa* deritzo, eta X_C ikurrak adierazten da. Beraz, balio eraginkorreki dagokienez,

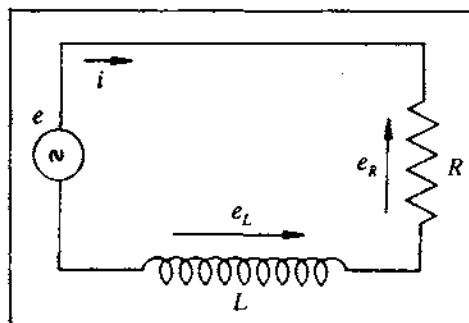
$$I = \frac{E}{X_C}. \quad (23-19)$$

C kapazitatea *farad* unitatetan (F) neurtzen da, eta X_C -erreaktanzia kapazitiboaren dimentsioak erresistentziarenak dira (Ω).

Bistakoa denez, erreaktantzia induktiboa bezala, erreaktantzia kapazitiboa ere maiztasunaren funtzioan lortzen da, horrekiko lehenengoak eta bigarrenak duten menpekotasuna desberdina bada ere.

23.5. KORRONTE ALTERNOKO ZIRKUITUAK

Aurreko atalean banan-banan aztertu ditugu korronte alternoko hargailuak. Berauek, ordea, era desberdinetan elkar daitezke zirkuituak osatzeko orduan. Ikus ditzagun, bada, ondoko zirkuitu hauek:



23.11. irudia. R-L serie-zirkuitua.

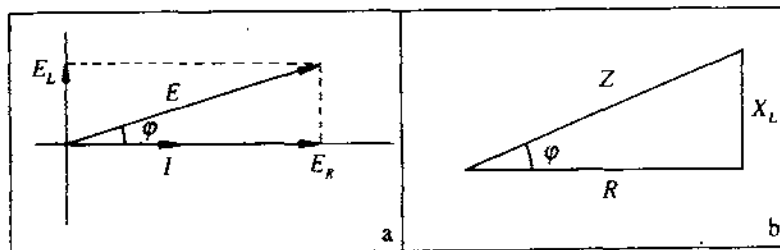
23.5.1. R-L serie-zirkuitua

Demagun 23.11. irudiko zirkuitua dugula, non R eta L elementuak seriean konektaturik dauden. Dakigunez, indar elektroeragilei dagokienez,

$$e = e_R + e_L. \quad (23 - 20)$$

Bestalde, zirkuitutik i intentsitatea pasatuko da.

Aurreko atala ikusi ondoren ezaguna denez, erresistentzian azaltzen den e_R tentsio-erorketa fasean egongo da intentsitatearekin. Aldiz, autoindukzioan azaltzen dena, e_L , $\pi/2$ balioa aurreratuta. Adierazpen fasoriala burutzen badugu, erreferentziatutako intentsitatearen posizioa hartuz, 23.12.a irudikoa daukagu. Bertan, magnitude bektorialak izanik, E bektorea E_R eta E_L bektoreen batura da.



23.12. irudia. a) R-L serie-zirkuituko indar elektroeragileen adierazpen fasoriala. b) Impedantzien triangulua.

Moduluari dagokionez,

$$E^2 = E_R^2 + E_L^2 = (RI)^2 + (\omega LI)^2. \quad (23-21)$$

Beraz,

$$E = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = I\sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (23-22)$$

Hemengo $\sqrt{R^2 + X_L^2}$ delakoari zirkuituaren *inpedantzia* deritzo, eta Z letraz adierazi ohi da:

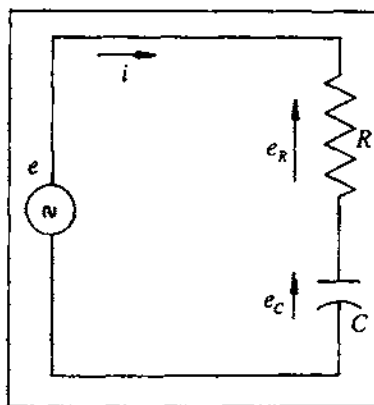
$$Z \equiv \sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (23-23)$$

Inpedantzia definituta dagoela, ikus dezagun *inpedantzien triangelua* deritzona (ikus 15.7. atala). Triangelu zuzena dugu, non katetoak erresistentzia eta erreaktantzia diren, hipotenusa inpedantzia izanik. Bestalde, φ angelua tentsioaren eta intentsitatearen arteko *desfasea* da, eta beraren balioa ondoko adierazpenak emana dator:

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} \rightarrow \varphi = \arctan \frac{L\omega}{R} = \arctan \frac{X_L}{R}, \quad (23-24)$$

alegia, inpedantzien triangeluak eta adierazpen fasorialekoak antzekotasun geometrikoa dute.

Hurrengo kasua aztertzeraz pasatu baino lehen, diogun ezen gorago aipatu dugun inpedantziaren definizioa, eta beraz azaldu dugun triangelua, R - L serie-zirkuituari dagozkionak direla; bataren zein bestearen definizio orokorrak geroxeagorako utziko ditugu.



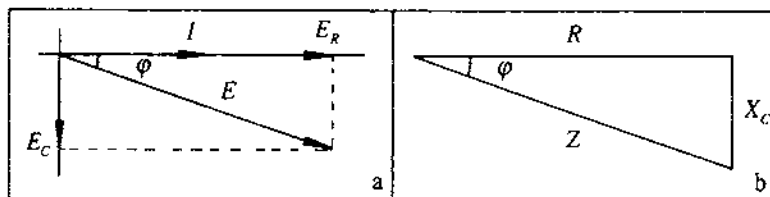
23.13. irudia. R - C serie-zirkuitua

23.5.2. R - C serie-zirkuitua

Aurreko zirkuituaren antzera, oraingoan ere (23.13, irudia) seriean konektaturik egonik,

$$e = e_R + e_C. \quad (23-25)$$

Erresistentzia azaltzen den tentsio-erorketa fasean dago intentsitatearekin; kondensadoreari dagokiona, berriz, $\pi/2$ atzeraturik.



23.14. irudia. a) R-C serie-zirkuituko indar elektroeragileen adierazpen fasoriala. b) Inpedantzien triangelua.

Lehen egin dugun bezala, intentsitatearen posizioa hartuko dugu erreferentzialat. Hortaz, 23.14.a irudikoa da fasoreen diagrama. Argi dagoenez,

$$E^2 = E_R^2 + E_C^2 = (RI)^2 + \left(\frac{I}{\omega C}\right)^2. \quad (23-26)$$

Beraz,

$$E = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = I \sqrt{R^2 + X_C^2}. \quad (23-27)$$

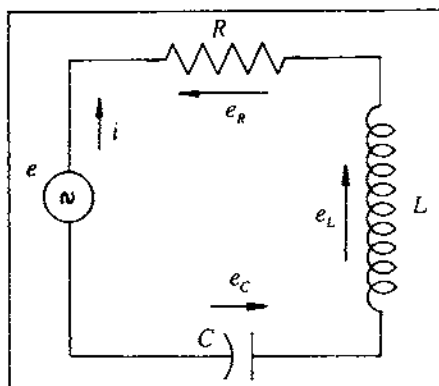
Eta zirkuitu honen inpedantzia, definizioz, ondokoa izango da:

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + X_C^2}. \quad (23-28)$$

Inpedantzien triangelua 23.14.b irudian ageri dena da, desfasea honako hau izanik:

$$\tan \varphi = \frac{-1/\omega C}{R} \rightarrow \varphi = \arctan \frac{-1}{\omega C R} = \arctan \frac{-X_C}{R}. \quad (23-29)$$

Aurreko kasuan esan bezalaxe, oraingo honetan azaldutako inpedantzien triangelua eta adierazpen fasorialekoa elkarren antzekoak dira.



23.15. irudia. R-L-C serie-zirkuitua.

23.5.3. *R-L-C serie-zirkuitua*

Kasu honetan, serian konektaturik egonik,

$$e = e_R + e_L + e_C \quad (23 - 30)$$

beteko da. Gainera, e_R fasean egongo da i -rekin, e_L , $\pi/2$ aurreratuta, eta e_C , $\pi/2$ atzeratuta.

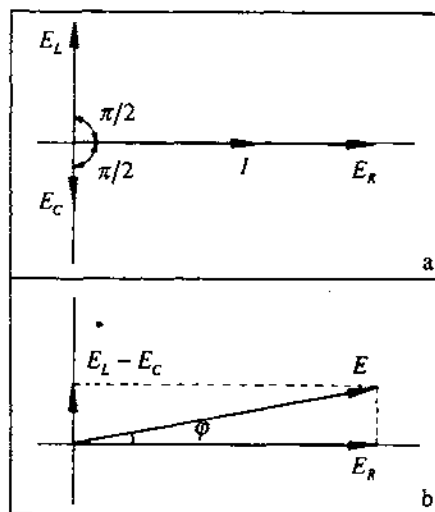
Egin dezagun magnitude horien adierazpen fasoriala, $X_L > X_C$ dela suposatuz (23.16. irudia). Orduan hiru tentsioen arteko batuketa bektoriala eginez, 23.16.b irudian ageri dena bezalakoa izango da adierazpen fasoriala. Honelatan, ba,

$$E^2 = E_R^2 + (E_L - E_C)^2 = (IR)^2 + \left(I\omega L - \frac{I}{\omega C} \right)^2, \quad (23 - 31)$$

$$E = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (23 - 32)$$

Eta zirkuituaren inpedantzia, definizioz, honako hau izango da kasu honetan:

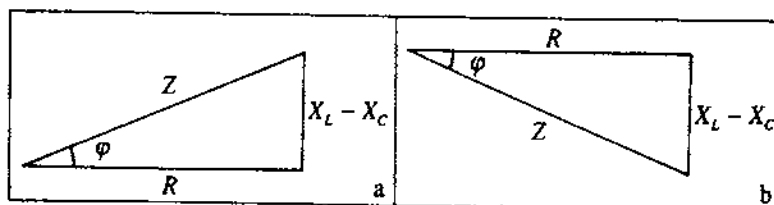
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (23 - 33)$$



23.16. irudia. a) *R-C* serie-zirkuituko indar elektroeragileen adierazpen fasoriala. b) Inpedantzien triangelua.

Desfaseari dagokionez,

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \rightarrow \varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (23 - 34)$$

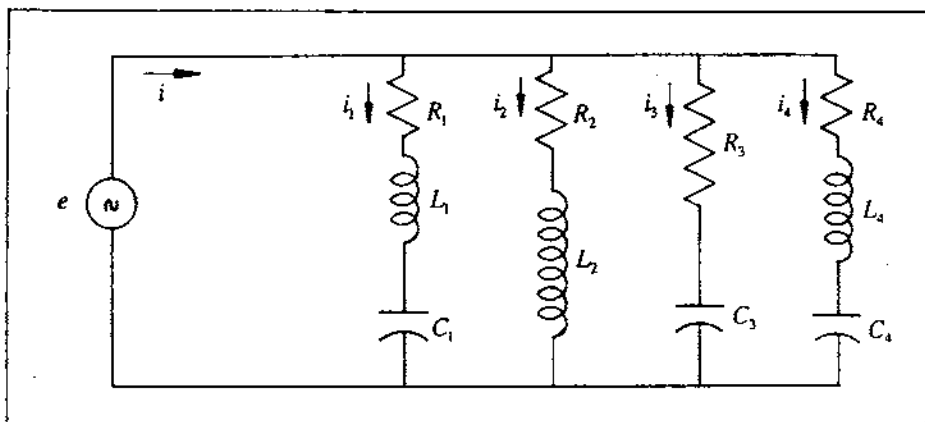


23.17. irudia. R - L - C zirkuituaren inpedantzien triangeluak. a) $X_L > X_C$ denean.
b) $X_L < X_C$ denean.

Kasu honetarako $X_L > X_C$ dela suposatu dugu, hori baita korronte alternoko zirkuituetan gehienetan gertatzen dena; orduan, inpedantzien triangelua 23.17.a irudikoa izango da. Hala ere, erreaktantzia kapazitiboa induktiboa baino handiagoa izan daiteke kasuren batean; orduan, inpedantzien triangelua 23.17.b irudiko eran agertuko da. Edozein modutan ere, $X_L - X_C$ delakoari zirkuituaren *erreaktantzia netoa* deritzo, eta X letraz adierazten da; bestalde, zirkuituaren *inpedantzia* hauex izango da:

$$X \equiv X_L - X_C, \quad Z \equiv \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (23-35)$$

Izatez, horixe da serie-zirkuituaren inpedantziaren definizio orokorra; aurreko kasuetan ikusi ditugunak azken honen kasu bereziak baino ez dira.



23.18. irudia. Paralelo-zirkuitua.

23.5.4. Paralelo-zirkuituak

Demagun 23.18. irudiko zirkuitua dugula. Zirkuituaren adar bakoitza, R , R - L , R - C , L - C zein R - L - C serie-zirkuitua izan daiteke, gure kasuan bakoitzaren inpedantziak Z_1 , Z_2 , Z_3 eta Z_4 izanik. Paralelo-konexioa denez, adar guztietan e tentsio alferbera dago ezarritik. Gauzak horrela, goazen adar bakoitzetik pasatuko den intentsitatea kalkulatzera. Balio eraginkorrak kontsideratuz,

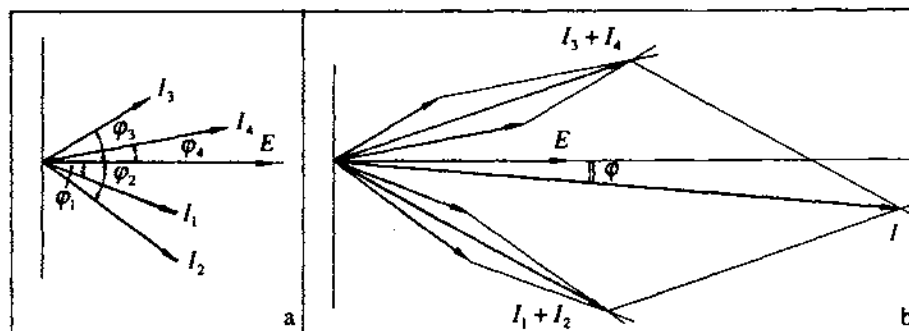
$$I_1 = \frac{E}{Z_1}, I_2 = \frac{E}{Z_2}, I_3 = \frac{E}{Z_3} \text{ eta } I_4 = \frac{E}{Z_4}. \quad (23-36)$$

Aurreko kasuetan ikusitakoaren arabera, intentsitate horietako bakoitzak desfaseren bat izango du ezarritako tentsioarekiko. Horrela, bide desberdinetako intentsitateek E tentsioarekiko dituzten desfaseak φ_1 , φ_2 , φ_3 eta φ_4 izanik, beraien balioak honako hauek izango dira:

$$\varphi_i = \arctan \frac{X_i}{R_i} = \arctan \frac{\omega L_i - 1/\omega C_i}{R_i}. \quad (23-37)$$

Desfaseak kalkulatu eta gero, tentsioaren eta intentsitateen adierazpide fasoriala erabiliko dugu alternadoretik pasatzen den intentsitatea kalkulatzeko. Intentsitate hori 23.19.a irudian ageri diren intentsitateen batura izango da.

Magnitude bektorialak izanik, bektorialki burutu beharko dugu beren arteko batuketa, 23.19.b irudian egin den bezala. Beraz, irudi horretako I delakoa izango da zirkuitu osoari dagokion intentsitatea, tentsioarekiko desfasea φ izanik.



23.19. irudia. a) Paralelo-zirkuituko bide desberdinetako intentsitateen adierazpen fasoriala. b) Intentsitate erresultantea.

Honaino helduz, azpimarratzekoa da adierazpen fasorialak aurkezten duen erosotasuna. Fasoreen bidez erraztasun handiz adieraz ditzakegu funtzio sinusoidalak, eta beren arteko eragiketa bektorialak inolako oztoporik gabe burutu ahal ditugu. Aitzitik, fasoreak erabili barik sinusoideak irudikatu beharko bagenitu, oso zaila gertatuko litzateke, irudikapenari dagokionez, bai funtzioak berak adieraztea eta bai beren arteko eragiketak egitea ere.

23.6. POTENTZIA

Tresna elektrikoetan, potentzia dugu parametro interesgarrienetakoa, garrantzitsua baita alternadore batek hornituriko potentzia zein den jakitea, edo motor batek xurgaturikoa edota irradi-emisora batek zein telebista-emisora batek igorritakoa, eta abar.

Dakigunez, zirkuitu elektriko batean ezarritako tentsio alternoa denboraren funtzioa da. Halaber, bertatik pasatzen den intentsitatea denboraren menpekoa da, eta beraren balioa, zirkuitua eratzen duten elementuen arabera.

23.6.1. Aldiuneko potentzia

Aldiune bakoitzeko tentsioaren eta intentsitatearen arteko biderkadurari *aldiuneko potentzia* deritzo, alegia:

$$p = ei. \quad (23 - 38)$$

Potentziak balio positibo zein negatiboak har ditzake, kontsideratzen den aldiune edo denbora-tartearen arabera. Nolabait esatearren, esan dezagun ezen potentzia positiboak iturritik —sorgailutik— sare elektrikorako energia-transferentzia adierazten digula; potentzia negatiboak, aldiz, saretik —zirkuitutik— sorgailurakoa.

Hasteko, demagun zirkuituak autoindukzio hutsa daukala, lehenagoko 23.4.3. atalean bezala. Zirkuitu horretan $e = E_0 \sin \omega t$ tentsio alternoa ezarri dugu, bertatik pasatzen den intentsitatea hauxe izanik:

$$i = I_0 \sin(\omega t - \pi/2). \quad (23 - 39)$$

Aldiuneko potentzia ondokoa dugu:

$$p = ei = E_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \pi/2). \quad (23 - 40)$$

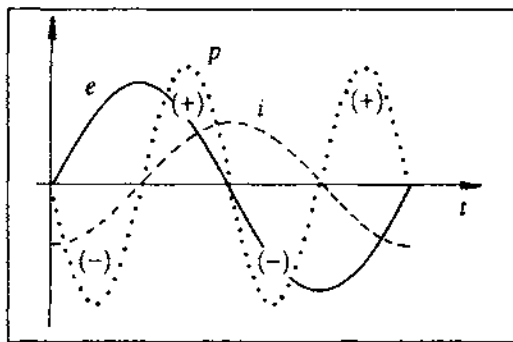
Bestalde,

$$\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t \quad \text{eta} \quad 2 \sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t \quad (23 - 41)$$

erlazio trigonometrikoak gogoratuz eta aurreko adierazpenean ordezkatuz:

$$p = -\frac{1}{2} E_0 I_0 \sin 2\omega t. \quad (23 - 42)$$

23.20. irudian ikus daitekeenez, e eta i zeinu berekoak direnean, potentzia positiboa da, eta energia-transferentzia iturritik harilerakoa da. Aitzitik, e eta i kontrako zeinukoak direnean, potentzia negatiboa da, eta harilak itzuli egiten dio iturriari lehen beronek eman-dako potentzia.



23.20. irudia. Autoindukzio hutseko zirkuituaren potentziaren eboluzio denborala.

Potentziaren maiztasuna tentsioaren zein intentsitatearen maiztasunaren bikoitza da, eta zer esanik ez, ziklo-kopuru oso bateko batez besteko balioa nulua da, erraz egiazta daitekeenez.

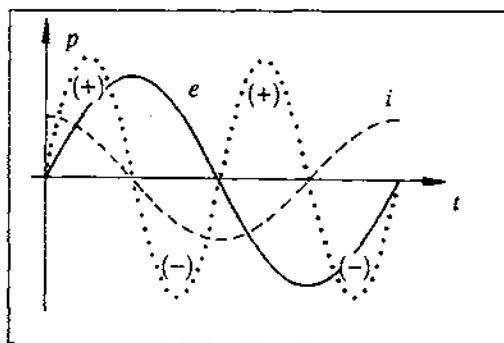
Modu berean, zirkuituak kondentsadore hutsa besterik ez baleuka (23.4.4. ataleko kasua), antzera gertatuko litzateke. Zirkuitu horren azterketa egin dezakegu, hain zuzen,

$$e = E_0 \sin \omega t \quad \text{eta} \quad i = I_0 \sin(\omega t + \pi/2) = I_0 \cos \omega t \quad (23-43)$$

izanik, eta aldiuneko potentzia honako hau:

$$p = E_0 I_0 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} E_0 I_0 \sin 2\omega t. \quad (23-44)$$

Kasu honetan ere, e eta i zeinu berekoak direnean, potentzia positiboa da, eta energia-transferentzia iturritik kondentsadorerakoa da; hots, kondentsadorea kargatu egiten da (23.21. irudia). Ostera, e eta i kontrako zeinukoak badira, potentzia negatiboa da. Horrek kondentsadorea deskargatu egiten dela adierazten digu, eta kargaldian hartutako energia iturrira itzultzen duela.



23.21. irudia. Kondentsadore hutseko zirkuituko potentziaren eboluzio denborala.

Aurreko kasuan agertu den legez, potentziaren maiztasuna tentsioaren eta intentsitatearen maiztasunaren bikoitza da; eta ziklo-kopuru oso baterako beraren batez besteko balioa nulua da.

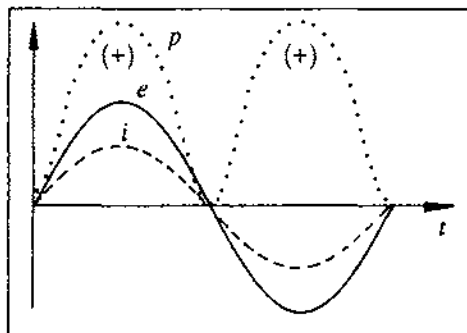
Denagun, orain, erresistentzia hutseko zirkuitua (23.4.1. ataleko kasua). Kasu honetan ez dago tentsioaren eta intentsitatearen arteko desfaserik, hau da,

$$e = E_0 \sin \omega t \quad \text{eta} \quad i = I_0 \sin \omega t, \quad (23-45)$$

eta potentzia honako hau izango da:

$$p = E_0 I_0 \sin^2 \omega t. \quad (23-46)$$

Erresistentzia baino ez daukan zirkuitu honi gagozkiola, potentziaren balioa beti da positiboa, eta aurreko kasuetan ez bezala, hemen badauka zentzua batez besteko balioaz berba egiteak (23.22. irudia).



23.22. irudia. Erresistentzia hutseko kasuan, potentzia beti da positiboa.

23.6.2. Potentzia eraginkorra eta potentzia-faktorea

Aipaturik dago jadanik, funtzio periodiko baten batez besteko balioa ematen digun adierazpena; hain zuzen, potentziaren kasurakoa hauxe da:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt. \quad (23-47)$$

Bestalde, erresistentzia hutseko zirkuituan $p = E_0 I_0 \sin^2 \omega t$ izanik, kasu horretan

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 I_0 \sin^2 \omega t = \frac{E_0 I_0}{2}. \quad (23-48)$$

Potentziaren atalari amaiera emateko, kontsidera dezagun zirkuitu orokorraren kasua (23.4.4. atalekoa, alegia). Bertan

$$e = E_0 \sin \omega t \quad \text{eta} \quad i = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (23-49)$$

ditugu. Bestalde, φ desfase-angelua positiboa zein negatiboa izan daiteke, zirkuituaren izaera induktibo ala kapazitiboaren arabera. Edozertara, ondokoa dugu potentzia:

$$p = E_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi). \quad (23-50)$$

Bestalde, erlazio trigonometriko hau erabiliz,

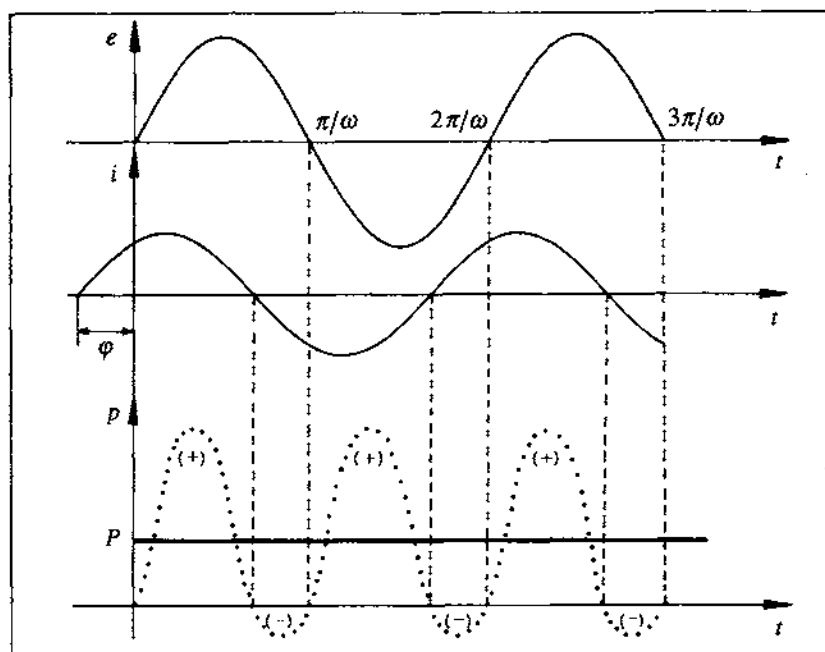
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad (23-51)$$

potentziaren adierazpena hauxe izango da:

$$p = \frac{1}{2} E_0 I_0 [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]. \quad (23-52)$$

Argi dagoenez, aldiuneko potentzia gai bik osaturik dago (ikus 23.23. irudia):

- bata kosinuidala, $-1/2 E_0 I_0 \cos(2\omega t + \varphi)$, zeinaren batez besteko balioa nulua den,
- eta bestea, $1/2 E_0 I_0 \cos \varphi$, konstantea dena.



23.23. irudia. Zirkuitu orokorrari dagozkion indar elektroeragilea, intentsitatea eta potentzia.

Baldintza horietan, potentziaren batez besteko balioa —*potentzia eraginkorra* ere deiturikoa— defini dezakegu:

$$P = \frac{1}{2} E_0 I_0 \cos \varphi. \quad (23-53)$$

Adierazpen hau erresistentzia hutseko kasuko (23-48) adierazpenarekin konparatuz, zirkuitu orokorreko potentzia eraginkorra txikiagoa dela ikus daiteke. Hemen ageri den $\cos \varphi$ delakoari *potentzia-faktorea* deritzo eta, potentziari dagokionez, zirkuituaren erabilera eraginkorraren neurria adierazten du nolabait. Horregatik etxeetako edota lantegietako instalazio elektrikoa egitean oso garrantzizkoa izaten da potentzia-faktorea kontrolatzea, eta oso desegokia den kasuetan, sistema konpentsatzeko autoindukzioak edo kondentsadoreak (kasu bakoitzean komeni direnak) ipini behar izaten dira.

Bukatzeko, zirkuitu orokorreko potentzia eraginkorra tentsioaren eta intentsitatearen balio eraginkorren bidez azal dezakegu. Hain zuzen,

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad \text{eta} \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (23-54)$$

direla kontuan hartuz, potentzia eraginkorraren adierazpena honako hau izango da:

$$P = EI \cos \varphi, \quad (23-55)$$

alegia, balio eraginkorren eta potentzia-faktorearen arteko biderkadura.

MKSA sisteman, *watt* unitatea (W) dugu potentzia eraginkorraren unitatea, eta sarritan beraren anizkoitza den *kilowatt* unitatea (kW) erabiltzen da: $1\text{ kW} = 1000\text{ W}$.

23.6.3. Itxurazko potentzia eta potentzia erreaktiboa

Dena dela, korrante alternoko zirkuituetan beste mota batzuetako potentziak ere aipatzen dira, hara nola itxurazko potentzia eta potentzia erreaktiboa, aurreko atalean definituriko potentzia eraginkorarekin, potentzia-faktorearekin eta beraien esangurarekin guztiz loturik daudenak.

Hain zuzen, (23-55) adierazpeneko *EI* biderkadurari *itxurazko potentzia* deritzo, eta *S* letraz adierazi ohi da:

$$S \equiv EI. \quad (23 - 56)$$

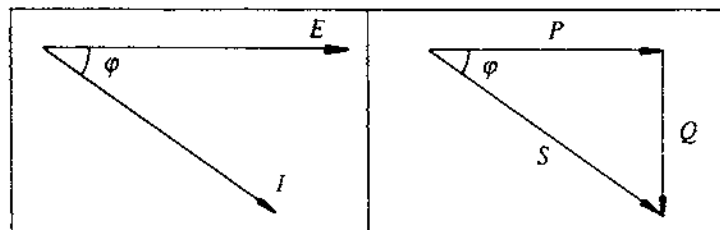
MKSA sisteman, *voltampere* deritzo (VA) beraren unitateari (dimentsionalki watt unitatearen baliokidea da, noski, baina bestelako izena erabili ohi da Elektroteknian), eta gehien erabilitako unitate anizkoitza *kilovoltampere*a (kVA) da. Zer esanik ez, $1\text{ kVA} = 1000\text{ VA}$; azken hau aipatzean 'kabea' izena ere erabiltzen da, hitz egitean.

Bestalde, *EI sin φ* delako biderkadurari *potentzia erreaktiboa* deritzo, eta *Q* letraz adierazten da, hots:

$$Q \equiv EI \sin \varphi. \quad (23 - 57)$$

Mota honetako potentziari dagokion unitateari *voltampere erreaktiboa* (VAR) deritzo, beraren anizkoitzik erabiliena *kilovoltampere erreaktiboa* (kVAR) izanik.

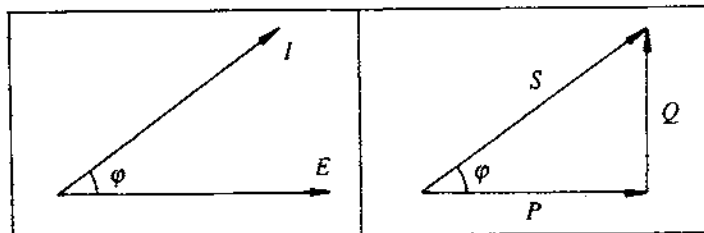
Eta, inpedantziak direla-eta egin dugun era berean, hiru potentzien arteko erlazioak geometrikoki adieraz daitezke potentzien triangeluaren bidez. Demagun zirkuitu induktiboa dugula, non korrante elektrikoaren intentsitatea tentsioarekiko φ angeluaz atzeraturik dagoen.



23.24. irudia. Potentzien triangelua zirkuitu induktiboaren kasuan.

Tentsioa erreferentziatzat harturik, 23.24. irudikoa izango da horien adierazpen faseriala. Intentsitatea osagai bitan dekonposatuko dugu: bata osagai eraginkorra, zeina fasean dagoen tentsioarekiko ($I \cos \varphi$), eta bestea osagai erreaktiboa, tentsioarekiko koadraturan dagoena ($I \sin \varphi$). Orain, triangeluaren hiru aldeak *E* tentsioaz biderkatzean, *potentzien triangelua* deiturikoa daukagu.

Bestalde, zirkuitua kapazitiboa izatekotan, non intentsitatea tentsioarekiko aurreraturik dagoen, 23.25. irudikoa bezalakoa da triangelua.



23.25, irudia, Potentzien triangelua zirkuitu kapazitiboaren kasuan.

Nolanahi ere, φ angeluaren zeinua edozein motatakoa izanik, hauxe da betetzen den erlazioa:

$$S^2 = P^2 + Q^2. \quad (23 - 58)$$

Azkenez, laburpen modura, honako kontzeptu hauek aipa ditzagun:

- Potentzia eraginkorra: $P = EI \cos \varphi = RI^2 \frac{E_R^2}{R}$.
- Potentzia erreaktiboa: $Q = EI \sin \varphi = XI^2 \frac{E_X^2}{R}$.
- Itxurazko potentzia: $S = EI = ZI^2 \frac{E^2}{Z}$.
- Potentzia-faktorea: $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$.

Halaber, ezin dezakegu aipatzeke utz ezen orain arte egindako magnitude sinusoidal hauen azterketak beste baliabide matematiko baliokide bat onartzen duela, zenbaki konplexuen bidezkoa alegia. Dena den, testu hau Fisika Orokorrekoa izanik, nahikoa deritzogu erabilitako erreminta matematikoari.

23.7. ERRESONANTZIA

Demagun 23.26. irudiko serie-zirkuitua dugula (23.5.3. ataleko zirkuitu berbera). Dakigunez, R - L - C zirkuitu horren inpedantzia pultsazioaren edo maiztasunaren menpekkoa da, hots:

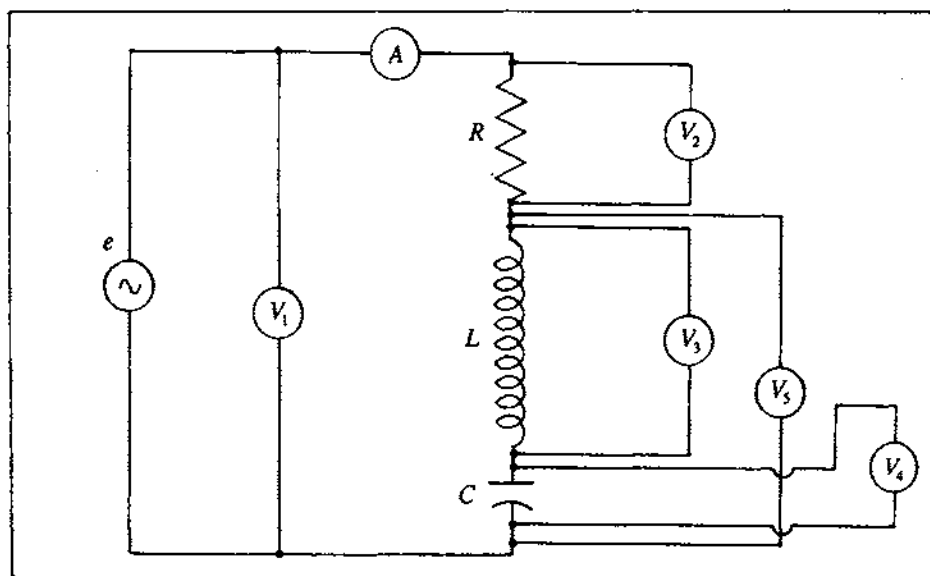
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}. \quad (23 - 59)$$

Maiztasun konkretu baterako, hauxe gerta daiteke:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (23 - 60)$$

Beraz, kasu horretan maiztasunak izango duen balioa hauxe da:

$$2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C} \rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \equiv \nu_0 \quad (23 - 61)$$



23.27. irudia. Amperemetroaren eta voltmetroen bidez R-L-C serie-zirkuituan eginiko neurketak.

Maiztasun horrekin X_L eta X_C balio berekoak direnez,

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R, \quad (23-65)$$

alegia, zirkuitua erresonantzian dago. Beraz, A amperemetroak hauxe adieraziko du:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{220 \text{ V}}{440 \Omega} = 0,5 \text{ A}. \quad (23-66)$$

Zer esanik ez, V_1 voltmetroak sorgailuaren borneen arteko tentsioa neurtuko du, edo gauza bera dena, zirkuituan ezarritako tentsioa, hau da, 220 volt.

Eta erresistentzian konektaturiko V_2 voltmetroak?

$$E_R = IR = 0,5 \cdot 440 = 220 \text{ V}. \quad (23-67)$$

Beste voltmetroen neurketak ondokoak izango dira:

$$V_3 \rightarrow E_L = IX_L = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ V}. \quad (23-68)$$

$$V_4 \rightarrow E_C = IX_C = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ V}. \quad (23-69)$$

$$V_5 \rightarrow E_{LC} = I(X_L - X_C) = 0. \quad (23-70)$$

Alegia, V_5 voltmetroak ez du ezer adieraziko. Horren azalpena ondokoa da: erreaktantzia induktiboa eta kapazitiboa berdinak izanik, autoindukzioan eta kondentsadorean gertatzen diren tentsio-erorketak, balio berekoak izateaz gain, 180° edo π radian desfasaturik daude beren artean, hots, bien erresultantea nulua da. Beraz, V_3 eta V_4 voltmetroek 500 V-eko tentsioa adierazten duten arren, V_5 voltmetroaren irakurketa nulua izango da.

Hori dela eta, nukleoan zehar finkatuko den fluxu alternoak e_p indar kontraelektroeragilea indusituko du primarioan, eta beraren balioa

$$e_p = -N_p \frac{d\Phi}{dt} \quad (23-71)$$

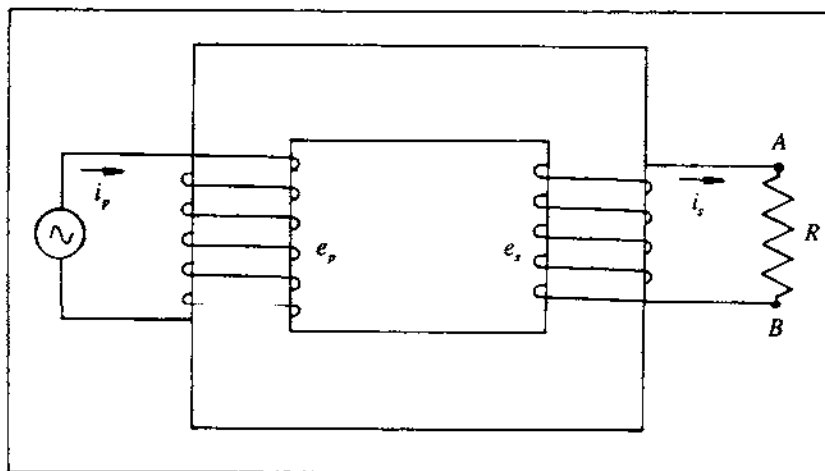
izango da, Faraday-Henry-ren legearen arabera. Era berean, burdinaren iragazkortasun handia dela medio, primarioan zehar iragaten den fluxu bera sekundarioan zehar ere iraganen da, bertan e_s indar elektroeragilea indusiturik. Sekundarioan ere, hauxe izango dugu:

$$e_s = -N_s \frac{d\Phi}{dt} \quad (23-72)$$

Beraz, aurreko bi adierazpenak elkarren artean zatituz,

$$\frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p}{N_s} \quad (23-73)$$

Horrek adierazten digu ezen, N_p/N_s erlazioa era egokian aukeratuz gero, sekundarioko tentsioa primariokoaren anizkoitza zein zatitzailea izan daitekeela. Erlazio horri *transformazio-erlazioa* deritzo. Hori dela eta, baldin $N_s > N_p$ bada, orduan $e_s > e_p$ da, eta mota horretako transformadoreari *jasotzailea* deritzo. Alderantziz, $N_p > N_s$ bada, orduan $e_p > e_s$ izango da, eta kasu horretan transformadore *eraistailea* izango da.



23.29. irudia. Transformadorearen sekundarioari erresistentzia konektatu diogu.

Demagun, orain, A eta B borneen artean R erresistentzia ipini dugula (ikus 23.29. irudia). Sekundarioko zirkuitua itxita egonik, i_s intentsitatea pasatuko da bertatik; primariokoa i_m izatetik i_p izatera helduko da. Hara zein den horren arrazoia: karga-egoeran, fluxua aurrakako noranzkoko fluxu biren erresultantea da, bata primarioari eta bestea sekundarioari dagozkionak izanik. Orain, sekundarioko korronea emendatzen badugu —eta hauxe da, hain zuzen, erresistentzia ipintzean egin duguna, korronea nulua izatetik i_s izatera iritsi baita—, dagokion fluxua ere emendatuko da.

Hortaz, fluxu erresultantea aldaezina izan dadin, beharrezkoa da primarioko korroneak sorrarazitako fluxua handiagoa izatea; ondorioz, korrontearen intentsitatea ere handiagoa izango da. Beraz, $i_p > i_m$ izango da.

Bestalde, transformadorea berez energia-iturria ez izanik, eta, lehen esan dugunez, inolako galerarik ez dagoela suposatuz, argi dago ezen primariotik sarturiko potentzia sekundarioan erabilitakoaren berdina dela. Honelatan, bada:

$$e_p i_p = e_s i_s. \quad (23 - 74)$$

Baldintza hori, edozein aldiunetan bete beharrezkoa denez, balio eraginkorretarako ere beteko da. Orduan,

$$E_p J_p \cos \varphi_1 = E_s J_s \cos \varphi_2. \quad (23 - 75)$$

Transformadore idealean $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx 0^\circ$ denez, honako hau idatz dezakegu:

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s}. \quad (23 - 76)$$

Adierazpen horrek erakusten digunez, tentsioen balioak espiren kopuruekiko erlazio zuzenean daude; intentsitateenak, aldiz, alderantzizkoan.

Azken ohar modura diogun ezen orain arte idatzitako guztia zirkuituen erregimen iraunkorrari buruzkoa izan dela. Dena den, horrez gain, erregimen iragankorra deiturikoa gertatzen da zirkuituetan, korrontea ezartzeko eta kentzeko aldiuneetan. Dena den, erregimen iragankorra aztertzeak garapen matematiko berezia eskatzen du, eta Elektrotekniaren arloari dagokio fenomeno iragankorren azterketa. Honexegatik, testu honetan ez dugu inolako aipamenik egin.

24. gaia

Uhin elektromagnetikoak

XIX. mendearen lehenengo erdian fisikariek magnitude elektriko eta magnetikoen azterketa egin ondoren, 1864. urtean Maxwell-ek, arrazonamendu teorikoen bidez, perturbazio elektrikoa argiaren abiaduraz hedatu behar zela frogatu zuen, eta, horrela, argi-uhinak uhin elektromagnetikoak zirela postulatu zuen.

Handik urte batzuetara, 1887. urtean hain zuzen, Hertz fisikari alemaniarrek sortu egin zituen uhin elektromagnetikoak zirkuitu oszilatzaileen bidez, eta, gainera, maiztasun berberera sintonizaturik zeuden beste zirkuitu batzuetan detektatu zituen. Uhin elektromagnetiko geldikorrak lortu zituen, eta elkarren ondoko nodoen arteko distantzia neurtuz, beraien uhin-luzera neurtu zuen; bestalde, erresonagailuen maiztasuna ezagutzen zuenez, uhinen hedapen-abiadura lortu ahal izan zuen, horrela Maxwell-ek teorikoki lorturiko emaitza egiaztatuz.

Ordutik aurrera uhin elektromagnetikoen azterketa biziki garatu zen, eta Marconi-ren lanaren ondoren komunikabideetarako oinarri bihurtu ziren.

Gai honetan uhin elektromagnetikoen sorkuntza eta esangura fisikoa aztertuko dugu, halaber maiztasun desberdinetako uhinen ezaugarriak aipaturik, baina beren erabilera praktikoan sartu gabe.

24.1. UHIN ELEKTROMAGNETIKO LAUAK

Uhin elektromagnetikoen hedapenaren azterketa egiteko, kasu konkretu bat hartuko dugu adibide gisa. Maxwell-en ekuazioek hutsean kontsideratuko ditugu, eta ez kargarik ez korronteirik ez dagoen espazioalde batean duten ebazpen berezi batez arituko gara. Ereinu elektromagnetiko aldakorrek aztertzean ikusi genuenez (22. gaia), baldintza horietan ondokoak dira Maxwell-en ekuazioak era integralean idatzita:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (24 - 1)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (24 - 2)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (24-3)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (24-4)$$

Ekuazio horiek era diferentzialean ere adieraz ditzakegu eta orduan honelaxe agertzen dira:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (24-5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (24-6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (24-7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (24-8)$$

Ekuazio horien ebazpen partikular bat aztertuko dugu, hain zuzen, eremu elektrikoa eta eremu magnetikoa elkarren perpendikularrak diren kasu batean. Jo dezagun, ba, eremu elektrikoa Oy ardatzaren norabidekoa dela, eta eremu magnetikoa Oz ardatzaren norabidekoa. Orduan:

$$E_x = 0, \quad E_y = E, \quad E_z = 0, \quad (24-9)$$

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B. \quad (24-10)$$

Kasu horretan honela azalduko zaizkigu Maxwell-en ekuazioak:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad (24-11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad (24-12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \end{cases} \quad (24-13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \\ -\frac{\partial E}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \end{cases} \quad (24-14)$$

Argi ikus daitekeenez, aurreko ekuazioen arabera, $\mathbf{E}$ eta $\mathbf{B}$ eremuek x eta t aldagaien menpekotasuna dute soilik eta aldiune bakoitzean balio berbera dute Ox ardatzaren perpendikularra den edozein planotako puntu guztietan; alegia, $\mathbf{E}(x, t)$ eta $\mathbf{B}(x, t)$ izango dira. Bestalde, ekuazio horien bidez $\mathbf{E}$ eta $\mathbf{B}$ eremuek x eta t aldagaien arabera duten aldakuntza ere azter dezakegu. Hain zuzen, (24-13) ekuazioa x aldagaiarekiko deribatuz,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}, \quad (24-15)$$

(24-14) ekuazioa denborarekiko deribatuz,

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (24-16)$$

eta azkenean, bi adierazpen horiek konbinatuz, ondoko emaitza lortuko dugu:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (24-17)$$

Hots, eremu elektrikoaren aldakuntza espazio-denborala, $E(x, t)$, uhinen ekuazio diferentzialari dagokion berbera da (ikus 16.1. atala). Horrek esan nahi du, eremu elektrikoa Ox ardatzaren norabidean uhin modura hedatzen ari dela, eta, gainera, ondoko abiaduraz:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (24-18)$$

Preseski, ϵ_0 -ren eta μ_0 -ren balioak ordezkatzuz,

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (24-19)$$

lortzen da, argiak hutsean duen abiadura, alegia.

Bestalde, antzeko bideari jarraituz, ondokoa ere lor dezakegu:

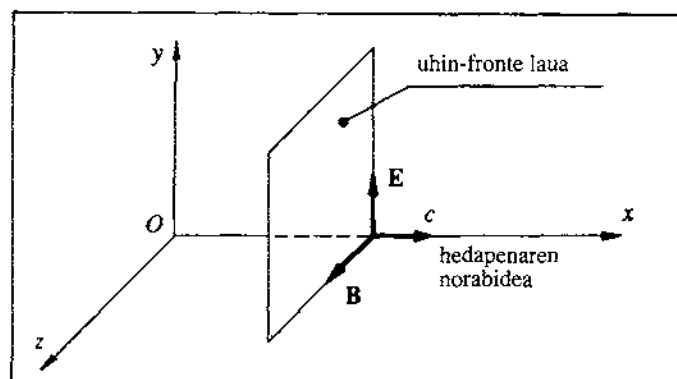
$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \quad (24-20)$$

hots, eremu magnetikoaren hedapena ere modu berean gertatzen da. Labur esanda, bai eremu elektrikoa eta bai eremu magnetikoa Ox ardatzaren norabidean argiaren abiaduraz hedatzen ari diren zeharkako uhinak dira, eta, beraz, 24.1. irudian datorren modura adieraz daitezke grafikoki.

16.1. gogoratzuz, uhinak $+Ox$ ardatzaren noranzkoaz c abiaduraz hedatzen ari direnez, ondoko era honetan azaldu ahal izango ditugu analitikoki eremu elektrikoa eta magnetikoa:

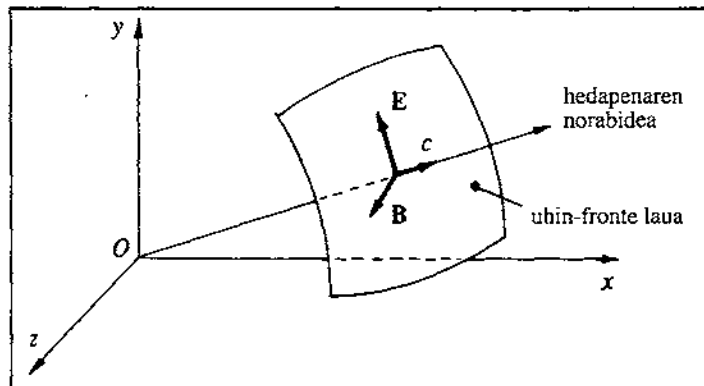
$$E = f_1(x - ct), \quad (24-21a)$$

$$B = f_2(x - ct). \quad (24-21b)$$



24.1. irudia. Uhin elektromagnetiko lauari dagokion uhin-frontea.

Dena den, aurreko lerroetan aztertutikoa ez da Maxwell-en ekuazioen ebazpen bakarra. Uhin lauez gainera, problemaren simetriaren arabera, uhin zilindrikoak esferikoak eta bestelakoak ere lor ditzakegu. Edozertara, uhin elektromagnetikoen iturritik urrun samar dauden puntuetan, uhin zilindrikoen edo esferikoaren parte txikia uhin lautzat har daiteke, 24.3. irudian ikus daitekeenez, eta orduan eremu elektriko eta eremu magnetikoa uhin lauen kasuan legez azter daitezke.



24.3. irudia. Iturritik urrun, uhin esferikoaren parte txikia uhin lautzat har daiteke, hurbilketa modura.

Labur esanda, froga daitekeenez, uhin elektromagnetikoak zeharkakoak dira; puntu bakoitzean E eta B eremuak elkarren perpendikularrak dira eta, halaber, hedapen-abiaduraren norabidearen perpendikularrak.

24.2. UHIN ELEKTROMAGNETIKOEN ENERGIA ETA MOMENTUA. POYNTING-EN BEKTOREA

Eremu elektromagnetiko aldakorak aztertzean ikusi genuenez (22.4. atala), honelaxe adieraz dezakegu energia elektromagnetikoaren dentsitatea:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (24 - 27)$$

Bestetik, aurreko atalean uhin elektromagnetiko lauak aztertzean $E = cB$ dela ikusi dugunez, eta $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ denez, kasu honetan hauxe lortuko dugu:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{\epsilon_0\mu_0}{2\mu_0} E^2 = \epsilon_0 E^2. \quad (24 - 28)$$

Uhinei buruzko gaian uhinen intentsitatea definitzean (16.5. atala) ondoko emaitza lortu genuen uhin mekanikoen kasuan, denbora-unitatean hedapenaren norabidearen perpendikularra den azalera-unitateko pasatzen den energiarako:

$$I = Uv. \quad (24 - 29)$$

Beraz, analogiaz, uhin elektromagnetikoen kasuan honela adieraz dezakegu intentsitatea:

$$I = Uc = c\epsilon_0 E^2. \quad (24 - 30)$$

Aurreko balioa aldiune bakoitzari dagokio eta, ondorioz, denborarekiko batez besteko balioa era honetara adieraz dezakegu:

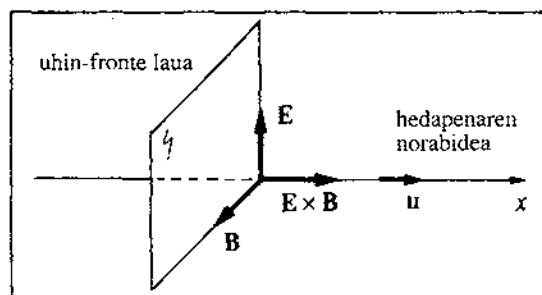
$$\bar{I} = c\epsilon_0 \overline{E^2}. \quad (24-31)$$

Emaitza hori uhin harmonikoen kasurako konkretatuko dugu, hots, $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$ denerako. Eta sinu karratu funtzioaren batez bestekoa $1/2$ dela kontuan hartuz:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2. \quad (24-32)$$

Uhin elektromagnetikoaren intentsitatearen adierazpenean finkatuz, esangura handiko bektore bat definituko dugu. Hasteko, ikus dezagun zer nolakoa den $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ biderkadura uhin elektromagnetiko lauen kasuan. Hain zuzen, 24.4. irudian ikus daitekeenez, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ bektorearen norabidea eta noranzkoa uhinaren hedapenari dagozkionak dira, eta beraren modulua:

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = EB = \frac{1}{c} E^2. \quad (24-33)$$



24.4. irudia. Poynting-en bektorearen norabidea eta uhin elektromagnetikoaren hedapen-norabidea.

Beraz, ondoko eran definituriko bektoreak,

$$\mathbb{S} \equiv c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (24-34)$$

intentsitatearen modulua du puntu eta aldiune bakoitzean, eta uhinaren hedapen-norabidea. Bektore hori *Poynting-en bektorea* deritzo eta energia-fluxuaren intentsitatea adierazten du. Guztira, S gainazal batean zehar denbora-unitatean pasatzen den energia (hemen $\mathbf{E}$ ikurrak adieraziko duguna, eremu elektrikoaz ez nahasteko) ondokoa da:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \iint_S \mathbb{S} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S c^2 \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (24-35)$$

Energiari buruzko aipamena egin ondoren, goazen orain momentu linealaren azterketa egitera. Uhin mekanikoen kasuan argi ikusi genuen higidurarekin batera momentua ere bazela. Oraingoan arazoa ez da berbera, materiaren higidurarik ez baitago, edo, bestela esanda, uhin hauetan duguna, eremu elektriko eta magnetikoaren aldakuntza besterik ez baita. Dena den, hemen azalduko ez dugun Erlatibitatearen Teoriaren arabera, badakigu energia eta momentua elkarrekin erlazionaturik daudela. Preseski, uhin elektromagnetikoa

c abiadurarekin hedatzen denez, beraren momentu lineala honelaxe adieraz daiteke energiaren bidez:

$$P = \frac{\mathbb{E}}{c}. \quad (24 - 36)$$

Horren arabera, uhin elektromagnetikoaren kasuan bolumen-unitateko energia zein den kontuan hartuz, ondokoa izango da bolumen-unitateko momentu lineala (modulua):

$$p = \frac{U}{c} = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} = \epsilon_0 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}|, \quad (24 - 37)$$

eta momentu linealak hedapen-abiaduraren norabidea duela kontsideratuz, bektorialki honela adieraziko dugu bolumen-unitateko momentu lineala Poynting-en bektorearen bidez:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbb{S}. \quad (24 - 38)$$

Bestalde, orain arte momentu lineala aztertu dugu soilik, baina, modu berean, puntu batekiko momentu angeluarra ere kalkula dezakegu:

$$\mathbf{I} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \mathbb{S}. \quad (24 - 39)$$

Hain zuzen, emandakoa *bolumen-unitateko momentu angeluar elektromagnetikoa* da, jatorriarekiko kalkulatutik.

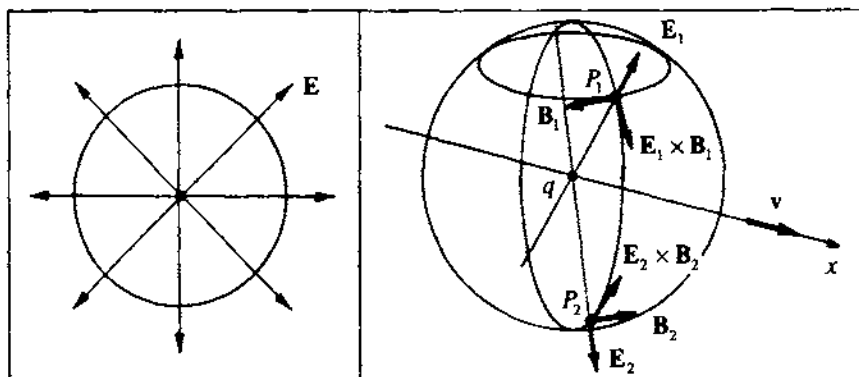
24.3. ERRADIAZIO ELEKTROMAGNETIKOAREN SORKUNTZA

Aurreko atal bietan uhin elektromagnetikoen izaera eta beraien ezaugarriak aztertu ditugu, nola sortzen diren azaldu gabe. Zer esanik ez, uhin elektromagnetikoen iturriak eremu elektromagnetikoa sortzen duten iturri berberak dira, higitzen ari diren karga elektrikoak alegia. Horrelako kargen multzo bat emanik, Maxwell-en ekuazioen bidez, sortzen duten eremu elektromagnetikoa kalkula daiteke, eta, halaber, uhin elektromagnetikoak.

Dena den, oraingoan erradiazio elektromagnetikoa azterkuko dugu, hots, zein baldintzatan energia elektromagnetikoa infiniturantz doan betiko, sortua izan deneko iturritik aldentuz. Erradiazioari dagokionez, hiru adibide aipatuko ditugu.

24.3.1. Karga azeleratuaren erradiazioa

Uhin elektromagnetikoen erradiaziorako sistemarik oinarritzkoena azeleraturik dagoen partikula kargatuaren kasua da. Hala ere, arazoa hobeki ulertzeko, lehenengo eta behin abiadura uniformearekin doan partikula aztertuko dugu, nahiz eta, ikusiko dugunez, kasu horretan erradiaziorik ez dagoen.

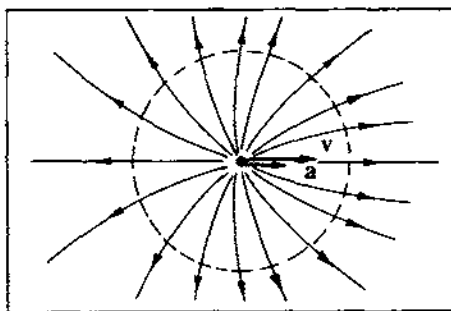


24.5. irudia. v abiadura konstantez higitzen ari den kargak sorturiko eremuak eta puntu desberdinetako Poynting-en bektoreen norabideak.

24.5. irudian v abiaduraz (abiadura txikia) higitzen den partikula kargatu batek sortzen dituen eremuak adierazi dira, bere zentroa partikulan duen esfera baten gainazaleko puntuetan, baita Poynting-en bektorearen norabidea ere. Ikus daitekeenez, Poynting-en bektorea esferaren ukitzalea da puntu guztietan eta, beraz, esferan zeharreko fluxua,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2 \epsilon_0 \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (24 - 40)$$

nulua da. Hots, ez dago energiaren fluxurik edo, beste hitz batzuen bidez esanda, abiadura uniformeaz higitzen ari den partikulak ez du energia elektromagnetikorik erradiatzen.



24.6. irudia. Partikula azeleratuaren inguruko eremu-lerroak.

Hala ere, partikula kargatua azeleraturik dagoenean, eremu elektrikoa jadanik ez da erradiala, eta, beraz, ez da simetrikoa kargarekiko. Eremu-lerroak deformaturik daude 24.6. irudian bezala, eta, ondorioz, erradio oso handiko esfera batean kalkuluak eginda, esferan zehar Poynting-en bektoreak fluxu ez-nulua daukala ikus dezakegu. Labur esanda, karga azeleratuak erradiatu egiten du eta, hain zuzen, denbora-unitatean erradiatzen den energia elektromagnetikoa *Larmor-en formula* deritzonaren bidez adieraz daiteke:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (24 - 41)$$

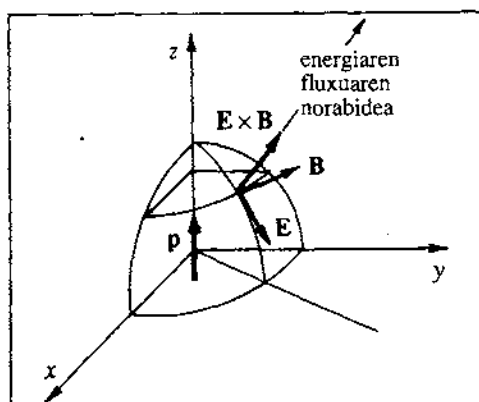
non a partikularen azelerazioa den. Alegia, erradiazioa egon dadin, partikulak azelerazioa izan behar du.

24.3.2. Dipolo elektriko oszilakorraren erradiazioa

Demagun higitzen ari diren partikulen higidura dipolo elektriko oszilakor baten bidez adieraz daitekeela, zeinaren momentu dipolar elektrikoa honelaxe adieraz dezakegun:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \sin \omega t. \quad (24 - 42)$$

Kasu hau oszilatzen dabilen elektroio batena edo korrante oszilakor batena izan daiteke. Dipolo elektrikoa konstantea denean, eremu elektrikoa ageri da soilik (ikus 18.6. atala). Baina dipoloa aldakorra izatean, eremu magnetikoa ere ageri da. Hain zuzen, 24.7. irudian Oz ardatzeko dipolo oszilakorrak sortzen dituen eremu elektrikoa eta magnetikoa adierazi dira.



24.7. irudia. Dipolo elektriko oszilakorraren erradiazioa.

Ikus daitekeenez, kanporanzko norabidea du Poynting-en bektoreak, hots, erradiaziozko fluxu netoa dago. Kalkuluak eginez, emaitza hau lor dezakegu:

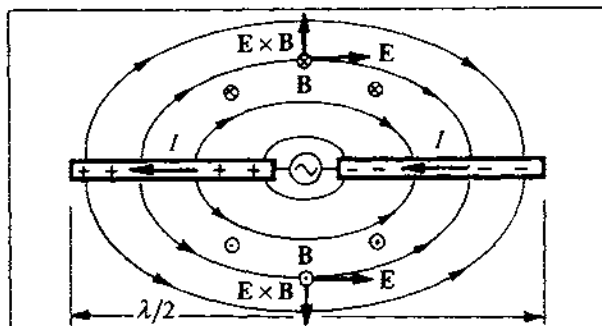
$$\frac{dE}{dt} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (24 - 43)$$

Energia-fluxu hau esfera osoan zeharreko integrazioari dagokio.

24.3.3. Antena baten bidezko erradiazio elektromagnetikoa

Dipolo oszilakorraren bidetik, zirkuitu oszilakor baten jokabidea ere azter dezakegu, eta ikus daitekeenez, holako sistema baten bidez uhin elektromagnetikoen erradiazioa lor daiteke. Hain zuzen, hauxe da antenaz baliatuz irrati-emisioetan erabiltzen den metodoa.

Eskematikoki, alboko 24.8. irudian ageri da holako antena bat eta beraren inguruan sortzen diren eremuak. Antenaren parte biek zeinu desberdina dute korrontearen eraginez. Guztira, Poynting-en bektoreak beti kanporanzko noranzkoa du; ondorioz, erradiazio netoa dago.

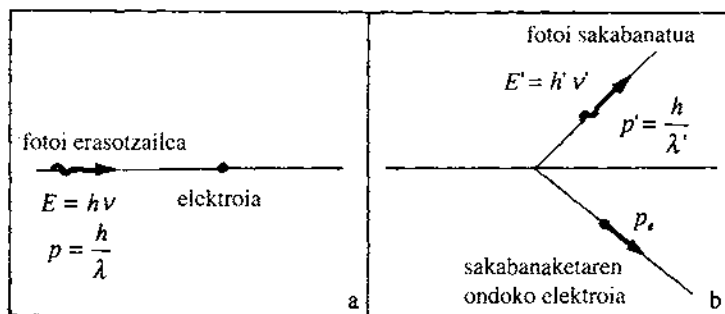


24.8. irudia. Antena baten bidezko erradiazio elektromagnetikoaren eschema.

24.4. COMPTON EFEKTUA. FOTOIAK

Erradiazio elektromagnetikoaren sorkuntza aipatu ondoren, materiak erradiazio hori nola xurgatzen duen ikustea ere interesgarria da. Baina, azterketa nolabait mugatzeko, kasu berezi bat aipatuko dugu soilik, alegia, uhin elektromagnetikoen eta elektroien arteko elkarrekintza.

Esperimentuetan behatzen den konportamoldea *Compton efektua* izenez ezaguna da, esperimentu horiek 1920. urtearen inguruan lehenengo aldiz egin zituen A. H. Compton (1892-1962) fisikariaren ohoretan jarria, hain zuzen. Labur esanda, λ uhin-luzerako uhin elektromagnetikoak elektroia erasotzean, elektroia beste norabide batez abiatzen da, eta, halaber, λ' uhin-luzerako uhin elektromagnetikoa agertzen da beste norabide batean. Fenomenoak bi partikulen arteko talkaren itxura dauka (24.9. ir.).



24.9. irudia. Compton efektua a) Talka aurretik. b) Talka ondoko egoera.

Prozesu horrek energiaren eta momentu linealaren aldaketak dauzka bere barnean, eta, izatez, uhin elektromagnetikoak pausaguneko masa nulua duen partikula modura jokatzen du. Azalpen teoriko berezirik emango ez dugun arren (hori Fisika Kuantikoaren arlokoa izanik), diogun ezen, neurketa esperimentalen emaitzekin ados egoteko, partikula horien energia erradiazioaren maiztasunarekin ondoko erlazioa behar dela:

$$E = h\nu, \quad (24 - 44)$$

non h delakoa konstante unibertsal bat den, *Planck-en konstantea* deritzona, honako balio hau duena:

$$h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J s.} \quad (24 - 45)$$

Honelatan, ba, ondorio hauek atera daitezke Compton efektuaren azterketatik:

- Uhin elektromagnetikoaren eta elektroi askearen arteko elkarrekintza, elektroiaren eta pausaguneko masa nulua duen partikula baten arteko talka modura azter daiteke.
- Pausaguneko masa nulua duen eta argiaren abiaduraz higitzen den partikula horri *fotoia* deritzo.
- Fotoiaren energia eta momentu lineala uhin elektromagnetikoaren maiztasunaren eta uhin-luzeraren bidez adieraz daitezke, honelaxe hain zuzen:

$$E = h\nu, \quad (24 - 46)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (24 - 47)$$

Dena dela, zer esan nahi du horrek guztiak? Uhin elektromagnetikoak fotoi-txorrotadak direla? Ez horixe, hitzez hitz behinik behin. Agian, egokiagoa da ondoko erako azalpena:

$$E = h\nu \text{ energia eta } p = \frac{h}{\lambda} \text{ momentu lineala} \quad (24 - 48)$$

dituen fotoia xurgatu egiten du elektroiak eta ondoren igorri egiten du beste fotoi bat,

$$E' = h\nu' \text{ eta } p' = \frac{h}{\lambda'} \quad (24 - 49)$$

energia-momentuduna. Elektroiak

$$E_e = E - E' = h(\nu - \nu') \text{ energia eta } \mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}' \text{ momentua} \quad (24 - 50)$$

bereganatzen ditu. Azken batez, fotoia deritzona partikula kargatuak egiten duen xurgapenean edo igorpenean jokoan dagoen energia eta momentu elektromagnetikoaren *kuantua* da, hots, uhin elektromagnetikoak elektroiarekin edo beste partikula kargatu batekin elkarrekintza duenean, elkarrekin truka daitezkeen energia eta momentua fotoiari dagozkionak dira.

Dena dela, orain arte ikasitako Fisikaz baliatuz, Fisika Klasikoaz alegia, ezin da horrelako fenomenoaren azalpen egokirik eman. Fenomeno horiek ulertzen saiatzeko, Fisika Kuantikoa eraiki zuten fisikariek. Horretarako hasierako oinarri esperimentalen artean, Compton-ek aztertu zuen efektua dugu, preseski.

24.5. ERRADIAZIO ELEKTROMAGNETIKOAREN ESPEKTROA

Uhin elektromagnetikoen uhin-luzera edo maiztasuna oso desberdinak izan daitezke uhin batzuetatik besteetara, iturriaren arabera. Gainera, oso helburu desberdinetarako erabil daitezke uhin-mota desberdinak. Horregatik, ohitura dago uhin elektromagnetikoak uhin-luzeraren arabera sailkatzeko, edo, gauza bera dena, maiztasunaren arabera, ongi baitakigu biak hedapen-abiadurarekin erlazionaturik daudela,

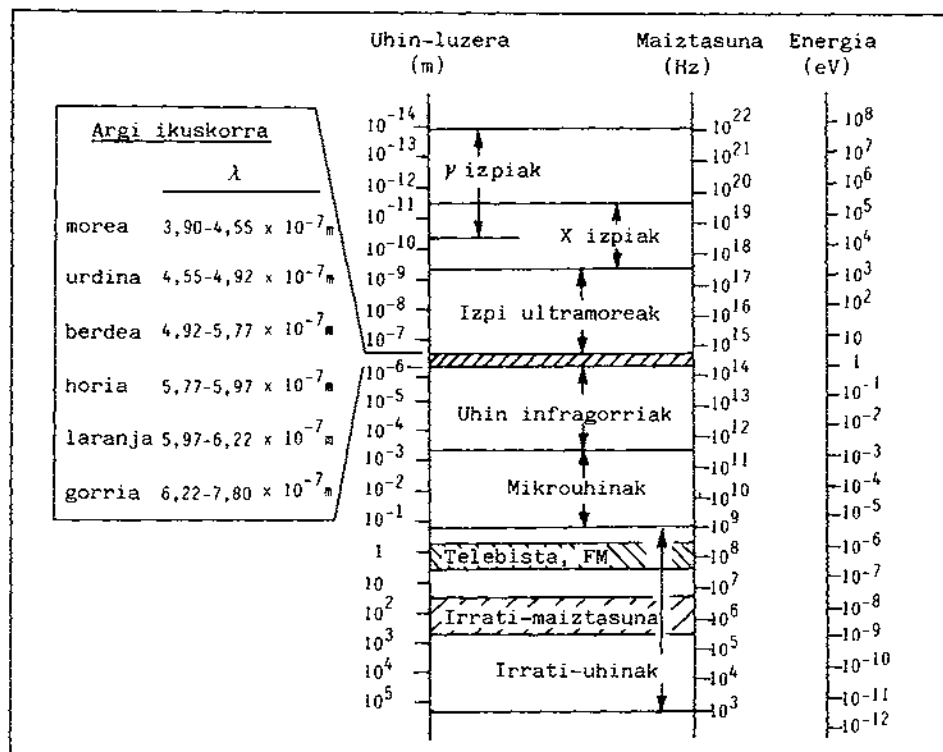
$$\lambda\nu = c \quad (24 - 51)$$

adierazpenaren bidez. Bestalde, fotoien energia uhinaren maiztasunarekin loturik da goenez, $E = h\nu$, uhin elektromagnetikoen espektroa energiaren arabera ere azal dezakegu, kasu honetan eV (elektronvolt) unitatea erabiliz. Bukatzeko, sailkapenean agertzen diren uhin-motek muga zehatzik ez dutela esan behar da, iturri desberdinek gainezarririk dauden maiztasun-tarteetako uhinak sor baititzakete. Ohar horiek egin ondoren, honelaxe sailkatu ohi dira uhin elektromagnetikoak (ikus 24.10. irudia):

- **Irrati-uhinak.** Zenbait zentimetrotatik kilometrotara bitarteko uhin-luzerak dituzte. Normalki irrati-telebistako sistemetan erabiltzen dira. Uhin hauek sortzeko, tresna elektronikoak erabili ohi dira, zirkuitu oszilakorrak gehienetan.

Irrati-uhinak era zabalagoan ere sailka daitezke, uhin luze, ertain eta laburretan preseski. Telebistan eta maiztasun modulatuako (FM) igorpenetan maiztasun handiagoak eta, beraz, uhin-luzera txikiagoak erabiltzen dira.

- **Mikrouhinak.** Uhin hauen maiztasuna aurrekoena baino askoz handiagoa da ($10^9 \text{ Hz} \div 3 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$) eta uhin-luzera txikiagoa ($0,3 \text{ m} \div 10^{-3} \text{ m}$), eta normalki radar sistemetan erabili ohi dira. Azken urteotan sukaldeetako labeetan ere hasi dira erabiltzen, janariak azkar berotzeko. Ikerkuntzan baliagarriak gertatzen dira egitura atomiko-molekularren azterketan. Hauek ere tresna elektronikoz sortzen dira. Mikrouhinaren alde honi UHF (Ultra High Frequency) izena eman ohi zaio.



24.10. irudia. Espektro elektromagnetikoa.

- **Uhin infragorriak.** Uhin-luzeren tarteak $10^3 \text{ m} + 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (edo $7.800 \text{ \AA}$) da eta maiztasunena $3 \cdot 10^{11} \text{ Hz} + 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Gorputz beroek eta molekulak sortzen dituzte uhin hauek eta erabilpen asko dauzkate industrian, medikuntzan, astronomian eta abarretan.
- **Argi ikuskorra.** Honela deritzo gure begiek ikus dezaketen uhin elektromagnetikoaren multzoari. Argiak begietan sortzen dituen sentsazioei kolore deritze eta maiztasun desberdinei kolore desberdina dagokie. Oso maiztasun-tarte estua dago gorritik morera, eta tarte horretan ostarkuaren koloreak daude (ikus argi ikuskorra-ren tarteak 24.10. irudian).
- **Izpi ultramoreak.** Uhin hauek atomo eta molekulen deskarga elektrikoetan sortzen dira eta beraien energia erreakzio kimiko askotan agertzen diren energien mailakoa da; hortik azaltzen dira sortzen dituzten efektu kimikoak. Uhin-maiztasunen tarteak $8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} + 3 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$ da edo, uhin-luzeratan emana, $3,8 \cdot 10^{-7} \text{ m} + 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Eguzkia izpi ultramoreen iturri handia da, eta, besteren artean, izpi hauek dira gure azalaren beltzarantzearen sortzaileak. Izatez, eguzkitik datozen izpi ultramore gehienak atmosferaren goialdean xurgatzen dira, 80 km-tik gora eta, ondorioz, atmosferaren alde hori oso ionizaturik dago eta *ionosfera* deritzo. Atmosferan dagoen ozonoak (O_3) ere babestu egiten gaitu izpi ultramoreen eraginetik, bestela kaltegarriak gertatuko bailitzaizkiguke.
- **X izpiak.** Are energia handiagoko izpi hauen uhin-luzerak $10^{-9} \text{ m} + 6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ tartean daude eta maiztasunak $3 \cdot 10^{17} \text{ Hz} + 5 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$ tartean. X izpiak 1895. urtean aurkitu zituen W. Röntgen-ek, izpi katodikoak aztertzen ari zelarik. Modu desberdinez sortzen dira X izpiak. Batetik elektroien atomiko ongi lotuen kausaz eta bestetik balaztaketa-erradiazioaren (*bremsstrahlung*) kausaz. Energia handiko izpi hauek ionizatu egiten dituzte molekulak, eta horregatik kalteak sortzen dituzte bizidunen ehunetan. Bestalde materia zeharkatzeko ahalmen handia dute, baita plaka fotografikoak inpresionatzekoa ere. Hori dela eta, diagnostiko medikoan erabiltzen dira, zeren eta gorputzaren barneko ehun batzuetan (hezurretan adibidez) besteetan baino gehiago xurgatzen baitira eta horrela barneko ehunen 'argazkiak' lortzeko balio baitzakete. Bestalde, oso erabilgarriak dira kristalografiaren arloan, kristalaren egitura aztertzeko. Edozertara, kontuz erabili behar dira eta dosi txikietan hartu, osasunerako oso kaltegarriak baitira.
- **γ izpiak.** Gamma izpiak nukleo atomikoetan sortzen dira eta X izpiek baino are energia handiagoa dute normalean. Uhin-luzerak $10^{-10} \text{ m} + 10^{-14} \text{ m}$ tartekoak dira eta maiztasunak $3 \cdot 10^{18} \text{ Hz} + 3 \cdot 10^{22} \text{ Hz}$ tartekoak. Sarri, beraien energiaren bidez adierazten dira, eta, horrela, fotoien energia $10^4 \text{ eV} + 10^7 \text{ eV}$ tartekoa izan daiteke. Izpi hauek substantzia erradiaktiboek sortuak dira. Material barrena pasatzeko X izpiak baino sarkorragoak dira, eta, halaber, arriskugarriagoak.
- **Izpi kosmikoak.** Izenak berak dioenez, izarretatik edo kosmotik datozkigu eta oraindik gamma izpiak baino energia handiagoko uhin elektromagnetikoak dira. Ez da oraindik ongi ulertu zein eratara sortzen diren.

25. gaia

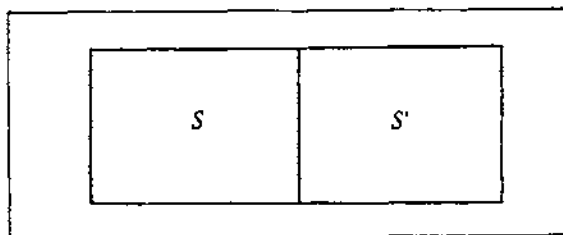
Termodinamikaren lehenengo printzipioa

Gai honetan eta hurrengo bietan, partikula askoz osaturiko sistemen deskribapen termodinamikoa egingo dugu. Partikula askoz osaturiko sistema baten deskribapena bi ikuspuntutatik egin dezakegu, bi ikuspuntu horiek desberdinak izanik, baina aldi berean elkarren osagarriak:

- a) *Ikuspuntu mikroskopikotik*. Mikroskopikoki sistemaren egoera deskribatzeko, sistema osatzen duten partikula guztien posizioa eta abiadura ezagutu behar ditugu, $6N$ magnitude alegia, sistema N partikulaz osaturik baldin badago; magnitude horiei *koordinatu mikroskopikoak* deritze. Sistemaren partikula guztiek aldiune bakoitzean dituzten posizioa eta abiadura ezagutzea ezinezkoa gertatzen zaigunez, horrelako sistemak mikroskopikoki deskribatzeko metodo bereziak erabiltzen dira, Mekanika Estatistikoa deritzon Fisikaren atalean biltzen direnak.
- b) *Ikuspuntu makroskopikotik*. Makroskopikoki aztertuta, berriz, sistemaren bi mota-tako deskribapenak egin daitezke:
 - Mekanika deritzon Fisikaren atalean, sistemaren higiduraren deskribapen makroskopikoa egiten da, beraren energia mekanikoa determinatuz. Horretarako, sistemaren masa-zentroa definitzen da eta sistemaren translazio-higiduraren deskribapena masa-zentroaren posizioaren eta abiaduraren bidez azaltzen da; magnitude horiei *koordinatu mekanikoak* deritze.
 - Termodinamika deritzon Fisikaren atalean, sistemaren barne-egoeraren deskribapen makroskopikoa egiten da, beraren barne-energia determinatuz. Horretarako, sistemaren barne-egoerarekin erlazioa duten *magnitude behagarriak* definitzen dira, hala nola presioa, bolumena, tenperatura eta abar; magnitude horiei *koordinatu termodinamikoak* edo *egoera-aldagai termodinamikoak* deritze.

Hortaz, Termodinamikaren helburu orokorra partikula askoz osaturiko sistemen barne-egoeraren deskribapen makroskopikoa izanik, koordinatu termodinamikoak eta sistemaren barne-energia definitu ohi dira, eta Termodinamikaren funtsezko printzipioetan oinarrituz, horien arteko erlazioak bilatzen dira.

oreka termikoa deritzo. Muga diatermanoz bananduriko sistemak 25.2. irudian bezala adieraziko ditugu.



25.2. irudia. S eta S' sistemen arteko muga diatermanoa adierazteko era.

Muga adiabatikoa delako kontzeptu teorikorako hurbilketa onak, zurezko, igeltsuzko eta feldrozko muga lodiak ditugu, material horiek isolatzaile onak baitira. Muga diatermanoa delako kontzeptu teorikorako hurbilketa ona, berriz, kobrezko muga mehea dugu, beroaren eroale ona baita.

Demagun, orain, A , B eta C sistemak ditugula. Batetik A eta C sistemak eta bestetik B eta C sistemak ere elkarrekin ukipen diatermanoan jartzean oreka termikoan baldin badaude, esperientzian oinarriturik, A eta B sistemak ere ukipen diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo direla baieztatu dezakegu. Emaizta esperimental horri *Termodinamikaren Zerogarren Printzipioa* deritzogu.

Termodinamikaren Zerogarren Printzipioan oinarriturik, hirugarren sistema bat aukeratzuz, edozein bi sistema ukipen diatermanoan jartzean, oreka termikoan egongo diren ala ez auresan dezakegu. Hirugarren sistema horri *termometroa* deritzo, eta normalean egoera-aldagai independente bakarreko sistema izan ohi da.

Termometroa A eta B sistemekiko oso txikia aukeratzuz, beraren egoera-aldagai independente bakarra X letraren bidez adierazten baldin badugu, Termodinamikaren Zerogarren Printzipioaren arabera, A sistema eta termometroa, baita B sistema eta termometroa ere, ukipen diatermanoan jartzean, oreka termikoa X aldagaiaren balio bererako lortzen den guztietan, A eta B sistemak ukipen diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo direla auresan dezakegu. Bestalde, X aldagaiaren funtzio arbitrario bat definitu ahal badugu,

$$\begin{aligned}\theta : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \theta = \theta(x),\end{aligned}\tag{25-1}$$

eta funtzio horri *temperatura* izena eman ahal badiogu, hauxe ondorioztatu dezakegu: «*A eta B sistema hauek temperatura berbera duten guztietan, ukipen diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo dira*».

Termometrotzat, beste batzuen artean, egoera-aldagai independente bakarreko honako sistema hauek hartu ohi dira:

- kapilar bateko likidoa,
- ontzi bateko gasa, bolumena konstante mantendurik,
- ontzi bateko gasa, presioa konstante mantendurik,

kasu bakoitzeko aldagai independentea likido-zutabearen luzera (L), gasaren presioa (p) eta gasaren bolumena (V) izanik, hurrenez hurren. Termometro horien tenperatura, normalean, honelaxe definitu ohi da:

$$\theta = ax + b, \quad (25-2)$$

non x delakoa L , p edo V izanen den, hurrenez hurren, eta a eta b bi konstante arbitrario. Modu horretan definituriko tenperatura-eskala *eskala lineala* dugu, harturiko (25-2) funtzioa lineala baita.

Tenperatura-eskala ongi definiturik gera dadin, a eta b konstanteen balioak finkatu beharko ditugu; a konstantearen balioa finkatzeko bi prozedura erabil daitezke:

- 1) Uraren fusio-puntua eta irakite-puntua direlako egoera estandarrek aukeratuz, eta egoera horiei dagozkien tenperaturen arteko kendurari 100 graduko balioa emanez (100°), ondokoa izango dugu:

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = 100^\circ, \quad (25-3)$$

$$ax_2 - ax_1 \rightarrow a = \frac{100^\circ}{x_2 - x_1}, \quad (25-4)$$

$$\theta(x) = \frac{100^\circ}{x_2 - x_1} x + b, \quad (25-5)$$

non x_1 , x_2 eta x direlakoak termometroaren aldagai independenteak uraren fusio-puntuan, uraren irakite-puntuan eta gure sistemarekin ukipenean jartzean hartzen dituen balioak diren, hurrenez hurren, gure sistemaren tenperatura $\theta(x)$ izanik. Honelatan, bada, tenperatura-eskala guztiz definiturik ez badago ere, tenperatura-unitatea, *gradua* alegia, definiturik dago.

Aipatutako era hori, tenperatura-eskala definitzeko 1954. urtera arte erabili izan zen metodoa da; baina uraren fusio-puntuaren lorpenaren zailtasunak eta neur-keta bikoitza egin behar izanak sortzen zituen errore esperimentalek 1954. urtean prozedura zehatzago bati jarraitzea bultzatu zituzten orduko fisikariak. Bigarren prozedura honetan datza:

- 2) Uraren puntu hirukoitza delako egoera estandar bakarra aukeratuz, eta egoera horri dagokion tenperaturari $273,16$ graduko balioa emanez ($273,16^\circ$) (aurreko prozedura dela medio definituriko tenperatura-eskala berbera aurkitzeko, nahiz eta gradu hau *kelvin* izena ematen zaien, K) haxe izango dugu:

$$\theta(x_3) = 273,16^\circ \rightarrow ax_3 + b = 273,16^\circ. \quad (25-6)$$

Bestalde, $b = 0$ balioa aukeratuz,

$$a = \frac{273,16^\circ}{x_3} \rightarrow \theta(x) = \frac{273,16^\circ}{x_3} x, \quad (25-7)$$

non x_3 eta x direlakoak termometroaren aldagai independenteak uraren puntu hirukoitzean eta gure sistemarekin ukipen diatermanoan jartzean hartzen dituen balioak diren, hurrenez hurren, gure sistemaren tenperatura $\theta(x)$ izanik. Honela, ba, tenperatura-eskala guztiz definiturik dago.

Beraz, tenperatura-eskala lineal bat definitu dugu. Baina termometro desberdinak hartuz gero, X delako aldagaiak, aldagai termometrikoa deritzonak, balio desberdinak hartuko dituenek, honela definituriko tenperatura-eskala aukeraturiko termometroaren menpekoa dela, hots, absolutua ez dela atera dezakegu ondorioz. Izan ere, termometrotzat bolumen konstanteko gas bat harturik, gas-mota desberdinak aukeratuz gero, tenperatura-eskala desberdinak definituko genituzke. Dena den, termometrotzat bolumen konstanteko eta presio txikiko gasak hartzen baldin baditugu, esperientzian oinarriturik, edozein gas-mota hartuta ere definitzen den tenperatura-eskala beti berbera dela aurki dezakegu. Hots, termometrotzat bolumen konstanteko eta presio txikiko gasak aukeraturik, lehen definituriko tenperatura-eskala absolutua dugu; tenperatura eskala horri *gas idealezko tenperatura-eskala absolutua* deritzo, eta eskala honetan gure sistemaren tenperatura ondokoa izango da:

$$\theta(p) = 273,16^\circ \lim_{p_3 \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_3} \right)_{V=\text{cte}}, \quad (25-8)$$

non p_3 eta p termometroaren presioak uraren puntu hirukoitzean eta gure sistemarekin ukipen diatermanoan jartzean hartzen dituen balioak diren, hurrenez hurren.

Gas idealezko tenperatura-eskala absolutuan neur daitekeen tenperaturarik txikiena, heliozko termometroa erabiliz lortzen den $0,5$ graduko tenperatura dugu, berau baita gas batek lortzen duen tenperaturarik txikiena. Horrela, bada, tenperatura-eskala horretan zero absolutua lortu ezinik gertatzen da.

Aurrerago, Termodinamikaren Bigarren Printzipioa azaldu ondoren, tenperatura-eskala absolutua edo *Kelvin eskala* definituko dugu, eta gas idealezko tenperatura-eskala absolutua defini daitekeen tarteetan modu desberdinetara definituriko tenperatura-eskala absolutu bi horiek baliokideak direla aurkituko dugu. Horrez gain, gas idealezko tenperatura-eskala absolutua ezin defini daitekeen arren, zero absolutua barne dela, Kelvin eskala ongi definiturik geratuko da.

Azkenik, bi tenperatura-eskala horiek aipatzean, ezin dezakegu aipatzeke utz sarritan erabili ohi den *Celsius eskala*. Eskala honetan, tenperatura-unitatea, gradua alegia, tenperatura-eskala absolutuan definituriko unitate berbera izanik ere, tenperatura-eskala absolutuan uraren puntu hirukoitzaren tenperaturari $273,16$ graduko balioa ematen zaion bitartean, Celsius eskalan $0,01$ graduko balioa ematen zaio. Beraz, tenperatura absolutuaren eta Celsius tenperaturaren arteko erlazioa ondokoa dugu,

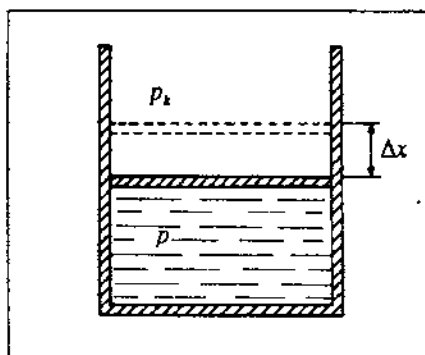
$$t = \theta - 273,15^\circ, \quad (25-9)$$

θ eta t direlakoak tenperatura absolutua eta Celsius tenperatura izanik, hurrenez hurren.

25.3. LAN TERMODINAMIkoa

Sistema termodinamiko baten egoera aldatzean, sistemak bere inguruaren gainean edo inguruak sistemaren gainean burutzen duen lanari *lan termodinamiko*a deritzo. Hitzarmen gisa, inguruak sistemaren gainean burutzen duen lana positibotzat hartuko dugu, eta sistemak bere inguruaren gainean burutzen duena negatibotzat. Sistema muga adiabatikoz isolaturik baldin badago, burutzen den lan termodinamikoari *lan adiabatiko*a deritzo.

Biz, adibide gisa, zilindro batean pistoi batez konprimaturik dagoen gasa (25.3. irudia). Pistoiaren bidez gasaren bolumena aldatuz, sistemak bere inguruaren gainean eta inguruak sistemaren gainean burutu ditzaketen lan termodinamikoak *espantsio-lana* eta *konpresio-lana* dira, hurrenez hurren. Saia gaitezen, bada, lan horiek kalkulatzeko.



25.3. Lan termodinamikoaren azterketa, sistemaren bolumena aldatzean.

Sistemak pistoiaren gainean eragiten duen indarraren modulua ondokoa da:

$$F = p_k A, \quad (25 - 10)$$

non p_k kanpo-presioa eta A pistoiaren azalera diren. Ondorioz, sistemaren bolumenak $\Delta V = A\Delta x$ delako gehikuntza jaso ondoren eta kanpo-presioa konstante mantenduz, sistemak honako espantsio-lan hau burutuko du:

$$W = -p_k A \Delta x, \quad (25 - 11)$$

(zeinuei dagokienez, kontuan har onartutako hitzarmena).

Demagun, orain, espantsio-prozesua oso-oso astiro gertatzen ari dela. Ohar modura, diogun ezen hau beste prozesu desberdin bat dela. Honela, sistema aldiune guztietan oreka termodinamikoan dagoela kontsidera daitekeelarik, sistemaren presioa defini dezakegu, zeinak aldiune guztietan kanpo-presioaren balioa hartuko duen. Beraz, espantsio-prozesua infinitu etapa infinitesimalez osaturik dagoela eta etapa infinitesimal bakoitzean sistema oreka termodinamikoan dagoela kontsideratuz, sistemak honako espantsio-lan hau burutuko du etapa bakoitzean:

$$\delta W = -p dV, \quad (25 - 12)$$

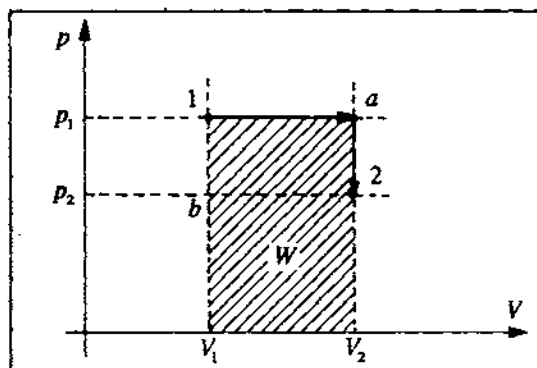
non p delakoa sistemak etapa bakoitzean duen presioa den. Halaber, sistemaren bolumenak $\Delta V = V_2 - V_1$ delako gehikuntza jaso ondoren, sistemak espantsio-lan hau burutu du:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p \, dV, \quad (25 - 13)$$

integralaren balioa integrazio-bidearen menpekoea izanik, hots, 1 egoetatik 2 egoetara pasatzeko erabili den bilakaera fisikoaren motaren menpekoea. Horrelako prozesu idealei, hau da, sistema infinitu oreka-egoetatik pasatzen deneko prozesuei, *prozesu kuasiestatikoak* deritze.

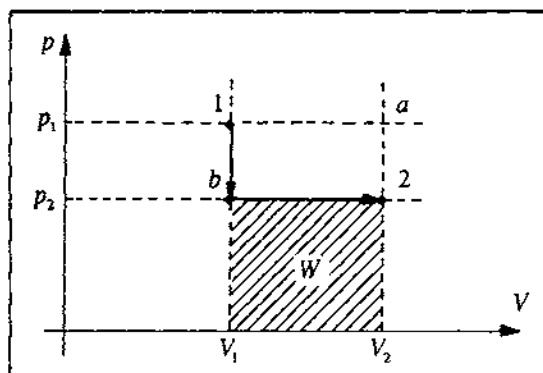
Espantsio-lana kalkulatzeko, kasu bi bereiziko ditugu:

- 1) Sistema *muga adiabatikoz* isolaturik baldin badago, sistemak burutzen duen lana adiabatikoa da, eta, esperientzian oinarrituz, hasierako egoetatik bukaerako egoetara pasatzeko segitu den bidearen edo, bestela esanda, bitarteko egoeren menpekotasunik ez duela baieztatu dezakegu. Bestalde, sistema muga adiabatikoz isolaturik dagoenean, hasierako egoetatik bukaerako egoetara ibilbide bakar bati jarraituz pasa daiteke kuasiestatikoki.
- 2) Sistema *muga diatermanoz* inguraturik baldin badago, sistemak burutzen duen espantsio-lana hasierako egoetatik bukaerako egoetara pasatzeko segitu den bidearen (hots, bitarteko egoeren) menpekoea da. Bestalde, sistema muga diatermanoz inguraturik dagoenean, hasierako egoetatik bukaerako egoetara kuasiestatikoki pasatzeko, beste batzuen artean, ondoko ibilbideak har daitezke:
 - Lehenik, prozesu isobariko batez (presioa konstante mantenduz, alegia) 1 egoetatik *a* bitarteko egoetara pasaturik, eta bigarrenik, prozesu isokoro batez (bolumena konstante mantenduz, alegia) bukaerako egoetara pasaturik (ikus 25.4. irudia):



25.4. irudia. 1 egoetatik 2 egoetara pasatzeko modu bat

- Lehenik, prozesu isokoro bat dela medio, 1 egoetatik *b* bitarteko egoetara pasaturik, eta ondoren prozesu isobariko bat dela medio bukaerako egoetara pasaturik (ikus 25.5. irudia).



25.5. irudia. 1 egoeratik 2 egoerara pasatzeko beste modu bat.

Grafikoki erraz egiaztatu daitezkeenez, hemen azalduko bi adibideetan sistemak buruturiko espantsio-lanak (hots, segituriko ibilbideari dagokion kurbak) $V = V_1$, $V = V_2$ eta $p = 0$ direlako zuzenekin osatzen dituen azalerak ez dira berdinak.

25.4. BEROA. BERO-AHALMENA

Dakigunez, *A* eta *B* sistema termodinamikoen tenperaturak desberdinak baldin badira, ukipen diatermanoan jarritz gero, elkarrekintza izango dute elkarrekin, oreka termikoa lortu arte, hau da, sistema bien tenperaturak berdindu arte.

Historia pixka bat eginez hasiko gara. Antzina, tenperatura desberdineko bi sistema ukipen diatermanoan jartzean, oreka termikoa lortzeko tenperatura altueneko sistematik tenperatura baxueneko sistemara *kaloriko* izenaz bataiatu zuten fluido ikusezina pasatzen zela azaltzen zuten orduko zientzialariek. Kalorikoaren unitateari *kaloria* izena eman zitzaion eta honako modu honetan definitu zen: «*Kaloria bat ur-gramo baten tenperatura gradu batez igozteko urari eman behar zaion kaloriko-kantitatea da*».

1843-1878 bitartean, aldiz, bi sistemaren oreka termikoa lortzeko, tenperatura altueneko sistematik tenperatura baxueneko sistemara energia pasatzen zelako interpretazioa egin zen nagusi zientzialarien artean, eta energia-mota horri *beroa* delako izena eman zitzaion. Hori behar den bezala ulertzeko, adibide bat jarriko dugu.

Biz zilindro batean pistoi batez konprimaturik dagoen gasa. Demagun espantsio baten bitartez sistema 1 egoeratik 2 egoerara pasatu dela. Esperimentua eginez, sistemaren hormak adiabatikoak direnean eta diatermanoak direnean, hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzeko burutzen diren espantsio-lanak desberdinak direla aurkitzen da, bigarren kasuan sistemaren eta beronen inguruaren artean bero-transferentzia egonik, eta lehenengo kasuan bero-transferentziarik gabe. Beraz, sistemak lana burutzean beraren barne-energia gutxitzen den bezala, sistemak beroa transferitzen duenean ere beraren barne-energia gutxitu egiten da. Hau da, lana eta beroa mota bereko magnitudeak dira; beraz, eta magnitude horiek neurtzeko, unitate berberak erabili ahal izango ditugu.

Horrela, ba, Joule, kaloriaren eta energia-unitatearen arteko erlazioa bilatzera saiatu zen, eta 1840. urtean ondoko erlazio hau aurkitu zuen:

$$1 \text{ cal} = \frac{1}{860} \text{ W} \cdot \text{h}, \quad (25 - 14)$$

edo, gauza bera dena:

$$1 \text{ cal} = 4,18605 \text{ joule}, \quad (25 - 15)$$

non $4,18605 \text{ J/cal}$ delako balioari *beroaren baliokide mekanikoa* deritzon.

Demagun, orain, sistema baten eta bere inguruaren artean transferitzen den beroa positibotzat eta negatibotzat noiz hartuko dugun finkatzeko asmoz, sistemaren eta beronen inguruaren tenperaturak T eta T_0 direla, hurrenez hurren. Sistemaren eta bere inguruaren arteko mugak diatermanoak baldin badira, T eta T_0 tenperaturak desberdinak diren bitartean, bero-transferentzia egongo da sistemaren eta inguruaren artean, zeina sistematik beraren ingururantz gertatuko den sistemaren tenperatura handiagoa denean, eta sistemaren ingurutik sistemarantz gertatuko den sistemaren tenperatura txikiagoa denean. Hitzarmen modura, lehenengo kasuan (sistematik ingururantz doanean) beroa negatibotzat hartuko dugu, eta bigarren kasuan, berriz, positibotzat.

Tenperatura gradu batez igotzeko, sistemari masa-unitateko eman behar zaion bero-kantitateari, *bero-ahalmen espezifikoa* deritzo:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}, \quad (25 - 16)$$

non m sistemaren masa osoa den, eta δQ delakoa tenperatura dT graduz aldatzean transferitutako bero-kantitatea. Kontuan har, 25.5. atalean azalduko ditugun arrazoiengatik, bero infinitesimala adierazteko δ ikurra erabili dugula eta ez d ikurra.

Ur-gramo baten tenperatura gradu batez igotzeko urari eman behar zaion bero-kantitatea kaloria bat denez, uraren bero-ahalmen espezifikoa ondokoa izango da:

$$c = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{gradu}} = 4,18605 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{gradu}}. \quad (25 - 17)$$

Sistemaren mol baten tenperatura gradu batez igotzeko sistemaren mol horri eman behar zaion bero-kantitateari *bero-ahalmen molarra* deritzo:

$$c_m = \frac{\delta Q}{n dT} \quad \text{edo} \quad c_m = \frac{\delta Q}{(m/M) dT} = Mc, \quad (25 - 18)$$

non n sistemaren mol-kopurua, M masa molekularra eta δQ delakoa tenperatura dT graduz aldatzean transferituriko bero-kantitatea diren.

Beraz, uraren bero-ahalmen molarra hauxe da:

$$c_m = Mc = 18 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{gradu}} = 75,3489 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{gradu}}. \quad (25 - 19)$$

Horrela, bada, m masadun sistema baten tenperatura T_1 baliotik T_2 baliora alda dadin sistemari eman behar zaion bero-kantitatea ondoko hau da:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc dT = m \int_{T_1}^{T_2} c dT, \quad (25 - 20)$$

eta $\Delta T = T_2 - T_1$ temperatura-tartean sistemaren bero-ahalmen espezifikoa konstante badirau, hauxe izango dugu:

$$Q = mc \Delta T. \quad (25 - 21)$$

Aldiz, $\Delta T = T_2 - T_1$ temperatura-tartean sistemaren bero-ahalmen espezifikoa konstante baldin ez badirau, ondokoa izanen dugu:

$$Q = m\bar{c} \Delta T, \quad (25 - 22)$$

non

$$\bar{c} \equiv \frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} c \, dT \quad (25 - 23)$$

delakoa *batez besteko bero-ahalmen espezifikoa* den.

Modu berean, honelaxe idatz dezakegu:

$$Q = n\bar{c}_m \Delta T, \quad (25 - 24)$$

non n sistemaren molen kopurua eta

$$\bar{c} \equiv \frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} c_m \, dT \quad (25 - 25)$$

delakoa *batez besteko bero-ahalmen molarra* diren.

25.5. TERMODINAMIKAREN LEHENENGO PRINTZPIOA. BARNE-ENERGIA

Sistema termodinamiko baten gainean egiten den lana eta sistemak xurgatzen duen beroa positibotzat hartuz, esperientzian oinarrituz, ondoko printzipioa betetzen dela baieztatu dezakegu: «Sistema termodinamiko bat hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzean egindako lanak eta transferituriko beroak, hasierako eta bukaerako egoeren menpekotasuna izateaz gain, bitarteko egoeren menpekotasuna ere izan ohi duten arren, bien arteko baturak hasierako eta bukaerako egoeren menpekotasuna baino ez du». Hau da, hasierako eta bukaerako egoerak lotzen dituzten ibilbide guztietarako egindako lanak eta transferituriko beroak hartzen dituzten balioen arteko baturak balio berbera hartzen du kasu guztietan. Beraz, batura hasierako eta bukaerako egoerei dagozkien aldagai termodinamikoen funtzioa izango da, eta sistemak prozesu osoan pairatzen duen energia-aldaketa adieraziko digu. Honen arabera, bada, ondokoa idatz dezakegu:

$$\Delta U = Q + W. \quad (25 - 26)$$

Adierazpen hori *Termodinamikaren Lehenengo Printzipioaren* adierazpen analitikoa da, non $\Delta U = U_2 - U_1$ den, U_1 eta U_2 hasierako eta bukaerako egoeretan sistema termodinamikoak dituen barne-energiak izanik, hurrenez hurren. Sistemaren barne-energia bere aldakuntzaren bidez definitu dugunez, konstante arbitrario batez indeterminaturik egongo da. Ohar modura diogun ezen beste liburu batzuetan zeinuetarako bestelako hitzarmenik ere erabiltzen dela ($-W$ idatzirik, kasurako), idazkera pixka bat aldaturik, ez esangura fisikoa, ordea.

Edozein ibilbideri jarraitu eta gero sistema hasierako egoerara itzultzen bada, sistemak prozesu zikliko bat jasan duela esango dugu. Kasu horretan, Termodinamikaren Lehenengo Printzipioan oinarriturik, hauxe onduz dezakegu, alegia: prozesu ziklikoetan ziklo osoa kontuan hartuz, sistema hasierako egoera berberera itzultzen denez.

$$\Delta U = Q + W = 0 \rightarrow Q = -W \text{ (ziklo osoan).} \quad (25 - 27)$$

Hau da, edozein prozesu ziklikotan zehar sistemak egiten duen lana eta xurgatzen duen beroa, edo sistemaren gainean egiten den lana eta beronek ematen duen beroa, berdinak dira. Lehenengo kasuko sistemari motorra deritzo, eta bigarren kasukoari, hozkailua edo frigorifikoa.

Demagun, orain, sistemak δQ bero-kantitate infinitesimala xurgatzen duelarik, beraren gainean δW lan-kantitate infinitesimala burutzen dela. Horrela, sistemaren egoera termodinamikoa aldatu egingo da, eta sistemaren barne-energiak dU aldaketa infinitesimala pairatuko du; azken batez, ondokoa idatzi ahal izango dugu:

$$dU = \delta Q + \delta W, \quad (25 - 28)$$

zeina Termodinamikaren Lehenengo Printzipioaren adierazpen diferentziala den. dU diferentzial zehatza dugula ere, δQ eta δW ez dira diferentzial 'zehatzak', hasierako eta bukarako egoeren menpekotasuna izateaz gain, bitarteko egoeren menpekotasuna ere baitute. Hain zuzen ere, arrazoi horregatik erabili ohi da δ sinboloa, hots, diferentzial horiek ibilbi-dearekiko duten menpekotasuna agerian jartzeko.

Prozesu osoan egiten den lana konpresio- edo espantsio-lana baldin bada, honako hau idatzi ahal da:

$$\delta W = -p dV, \quad (25 - 29)$$

eta, ondorioz, kasu horretan, Termodinamikaren Lehenengo Printzipioaren forma diferentziala honako modu honetan idatzi ahal izango da:

$$dU = \delta Q - p dV. \quad (25 - 30)$$

Azkenik, sistema erabat isolaturik baldin badago, hots, sistema inguratzen duten mugak adiabatikoak ez ezik zurrinak ere baldin badira (lanik ezin da egin, ezta berorik transferitu ere), orduan, Termodinamikaren Lehenengo Printzipioaren arabera, sistemaren barne-energiak konstante dirau:

$$\begin{cases} dU = \delta Q + \delta W \\ \delta Q = \delta W = 0 \end{cases} \Rightarrow dU = 0, \text{ alegia } U = \text{ktea.} \quad (25 - 31)$$

Azken hau *Energiaren Kontserbazioaren Printzipioa* da, baldintza berezietan idatzita, noski.

26. gaia

Gas idealak

Aurreko gaian, Termodinamikan erabiltzen diren kontzeptu nagusi gehienak definitu ditugu: tenperatura, egoera-ekuazioa, bero-ahalmena, barne-energia eta abar. Horiekin loturik doan formulazioa, edozein sistema termodinamikori aplikatu diezaiokegula esan genezake. Baina sistema termodinamiko baten egoera-baldintzak limite edo muga baterantz eramatean, sarritan, sistema horren portaera arautzen duten ekuazioak erraztu edo sinplifikatu egiten dira. Gainera, gabiltzan mailan, ager daitezkeen sistema sinpleenak aztertuko ditugunez, ez dugu formulazio konplexuegi baten beharrik izango.

Sistema bat sinpleegia egitean, haren azterketa egiteak garrantzi handirik ez duela pentsa dezakegu, zeren naturan agertzen diren sistemak ez baitira horrelakoak. Benetan, hori egia da, baina gaur egun laborategietan lor daitezkeen baldintzak kontuan hartuz, ez da alferreko lana sistema ideal horien azterketa egitea. Are gehiago esango genuke: Fisikan agertzen diren ekuazio edo lege guztiak egoera errealean muga modura kontsidera daitezke, edo beste era batean esateko, sistema erreal baten baldintzak muga ideal horretara eramatean, sistema erreal horrek sistema sinpleen ekuazioak beteko lituzke. (Gogora itzazue Mekanikan aztertutako marruskadurarik gabeko sistemak: benetan, ezin da pentsatu inolaz ere, naturan horrelako sistemarik dagoenik, baina laborategietan, edo kanpoko espazioko hutsean, ia-ia baldintza hori betetzen duten sistemak presta daitezke. Orduan, sistema horrek segituko lukeen higidura, sistema idealak duen higiduraren hurbilketa oso ona izango litzateke). Honelatan, ba, sistema termodinamiko baten azterketa egitean, gauza berbera egingo dugu, hots, ideala balitz sistema horrek segituko lukeen bilakaera termodinamikoa aztertzea.

Gai honen helburuak finkatzeko, esan dezagun zein izango diren gure aztergaiak: gas idealak, hain zuzen ere. Sistema horiek definitzeko, gasak direla esango genuke (hau da, hau, miragarria!), baina gas errealek dituzten ezaugarrien orde, beste hauek dituztela suposatuko dugu:

- gas hauek osatzen dituzten partikulek ez dute bolumenik (edo beste hitz batzuetan, puntualak dira),
- ez dute beste partikuletatik elkarrekintzarik jasaten,
- eta erabiliko ditugun presioak oso txikiak dira.

Azken ezaugarri hau besteen ondorioa dela kontsidera daiteke, zeren presioa oso txikia bada, partikulak oso urrun baitaude bata bestetik eta elkarrekintza elektrikoa arbuigarria dela onar baitaiteke.

Irakurleak ea naturan horrelako sistemarik aurki ote daitekeen galde dezake. Lehen esan dugunez, zehatz-zehazki ez; sistema horietatik oso hurbil daudenak, bai, hala nola Lurraz kanpo dagoen espazio "hutsako" gasa, izarren atmosferetako gasak (hidrogenoa, bereziki), eta gaur egun, fusio termonuklearra menperatzeko bidean, zenbait laborategitan izarretako baldintzak sorrarazteko erabiltzen diren plasmak (materiaren laugarren egoera).

Lehenengo azpiatal batean, gas ideal horien egoera-ekuazioa, barne-energia, bero espezifikoak eta jasan ditzaketen prozesu itzulgarriak aztertuko ditugu, eta bigarrenetan, Mekanikaren printzipioak erabiliz (talken prozesuak, hain zuzen), Termodinamikaren ekuazioetara nola hurbil gaitezkeen. Esan beharra dago, azken atal honetako talketan elkarrekintza bat agertuko zaigula, baina bakar-bakarrik Mekanikaren ikuspuntutik onartutakoa. Hau da, talka aurretik eta talka ondoren ez dago inolako elkarrekintzarik, eta ez dira kontsideratuko indar grabitatorioak. Gainera, gauzak gehiegi ez nahasteko, gasen partikulek ontzi baten hormen kontra dauzkaten talkak kontsideratuko ditugu soilik, eta ez beren artean dauzkatenak. Azken hau, hurrengo maila bateko gai batean aztertzen da, garraio-fenomenoetan hain zuzen. Besterik gabe, pasa gaitezen, orduan, gas idealen ezaugarriak eta bilakaera aztertzea.

26.1. EGOERA-EKUAZIOA

Aurreko gaian ikusi dugunez, sistema termodinamiko baten egoera-ekuazioa hiru parametro ez-independenteren funtzioan adieraz daiteke gehienetan, honela: $f(p, V, T) = 0$, non p delakoa presioa den, V delakoa sistemak betetzen duen bolumena eta T temperatura absolutua. Sarritan, V bolumen osoaren ordeaz, bolumen molarra erabiltzen da: $v = V/N$, non N delakoa sistema osatzen duten molen kopurua den. Parametro berri hau erabiliz, egoera-ekuazioa honelaxe idatziko dugu: $f(p, v, T) = 0$.

Neurketen ondorioz baieztatu dezakegun, gas errealeko egoera-ekuazioa, temperatura bakoitzarekiko, honelakoa da:

$$pv = A \left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots \right), \quad (26-1)$$

hau da, *birialaren garapena* deritzenaren bezalakoa, non $A, B, C, \dots$ direlakoak tenperaturaren funtzioak diren, *birialaren koefizienteak* deritzenak.

Gai honetan egin nahi duguna, jokabide errealeko horren sinplifikazio bat da, sarteran esan dugunez, gas horiek edukiko luketen portaera ideala kontsideratuz, $p \rightarrow 0$ egiten dugunean gas guztiek betetzen duten hurbilketa ona baita.

Nola lor dezakegu jokaera ideala? Ba, esan dugunez, presioa zerora ahal bezainbeste hurbilduz. Horrela, honako hau lor dezakegu:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pv) = A. \quad (26-2)$$

Esperientziak dioskunez, A horrek ez du gas-motaren gorabeherekiko zerikusirik, baina bai tenperaturarekikoa. Beraz, $A = A(T)$ da, eta aurreko gaian definituriko tenperatura-sistema eredutzat hartzen badugu, hauxe idatz dezakegu:

$$pv = RT, \quad (26-3)$$

hau da, A delakoa T tenperaturarekiko zuzenki proportzionala da, R delakoa proportzionaltasun-konstantea izanik (gasen konstantea ere baderitzo). Horren balioa hauxe da:

$$R = 1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}. \quad (26-4)$$

Beraz, $p \rightarrow 0$ egitean, edozein gasen egoera-ekuazioak ondoko adierazpena hartuko du:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pv) = RT. \quad (26-5)$$

Hemendik atera dezakegu gas ideal baten definizioa: «*Gas ideala edozein presiotarako aipaturiko egoera-ekuazioa betetzen duena da*». Ikusitakoaren arabera, eta birialaren lehenengo koefizientea kalkulatu ondoren, honelaxe idatz dezakegu gas erreal baten egoera-ekuazioa:

$$pv = RT \left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots \right). \quad (26-6)$$

Argi dagoenez, B/v , C/v^2 ... horiek erlazio adimentsionalak izan beharko dute, eta ondorioz, B , C ... ezin dira tenperaturaren funtzioak soilik izan.

Puntu honi bukaera emateko, idatz dezagun gas idealen egoera-ekuazioa erabilgarriagoa den beste forma batean, hain zuzen, bolumen molarra bolumen osoaren funtzioan jarritz, $v = V/N$ delako ordezkapena eginez. Hori eginez, ondokoa dugu:

$$pV = NRT, \quad (26-7)$$

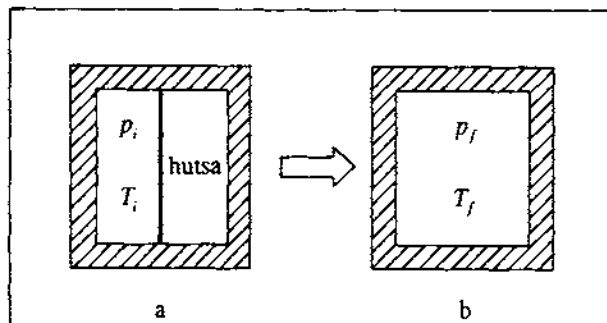
26.1.1. Parametro intentsiboak eta estentsiboak

Atal honi bukaera emateko, honako ohar hau egitea komeni da. Termodinamikan erabiltzen diren magnitudeen artean, bi eratakoak bereiz daitezke: *intentsiboak* eta *estentsiboak*. Bietariko adibide erraz bat jartzeko, esan dezagun presioa intentsiboa dela eta bolumena estentsiboa dela. Hobeto ulertzeko, orekan dagoen sistema baten presioa, edozein puntutan, berdina da, eta ez dira batzen sistema horretan puntutik puntura dauden presioak. Era berean gertatzen da tenperaturari dagokionez. Horiek parametro intentsiboak dira. Bolumenarekin, ordea, ez da gauza bera gertatzen: sistema baten bolumen txiki edo partzialak, partez parte, batu egiten dira sistema osoaren bolumena lortzeko. Parametro estentsibo bat intentsibo bihurtzeko, sisteman dagoen mol-kopuruaz zatitu ohi da, lehenago bolumen molarra kalkulatzeari egin dugun bezalaxe. Barne-energia, bolumena, entropia eta abar aipa ditzakegu parametro estentsibo modura. Notazioari buruz, parametro intentsiboak letra xehez izendatuko ditugu (p , v , u), tenperatura izan ezik (T), eta estentsiboak, letra larritz (V , S , U).

26.2. BARNE-ENERGIA. JOULE-REN ESPERIMENTUA

Aurreko gaian ikusi dugunez, sistema termodinamiko baten barne-energiaren aldaketa, modu honetan adieraz dezakegu:

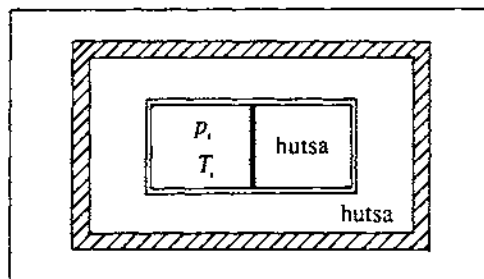
$$\Delta U = Q + W. \quad (26-8)$$



26.1. irudia. Gas idealarekin eginiko esperimentua. a) Hasierako baldintzak. b) Amaierako baldintzak.

Egin dezagun gas ideal batekin 26.1. irudiak adierazten duen esperimentua (zer esanik ez, esperimentu ideala izango da). Demagun horma zurrun adiabatikoz inguratutako ontzi bat dugula (hau da, ezin da pasatu barrutik kanpora edo kanpotik barrura ez materiari, ez berorik, ez lanik). Ontzi horren erdian, trenkada bat ipini dugu, eta alde batean gas ideala jarri dugu p_i presiopean eta T_i tenperaturapean, eta beste aldean hutsik utzi dugu. Hori horrela, erdiko trenkada kendu edo zabaldu egiten badugu, ezkerreko aldeko gasak ontzi osoa beteko du, prozesuan kanpoarekin inolako harremanik eduki gabe. Amaierako presioa eta tenperatura p_f eta T_f izango dira, hurrenez hurren. Prozesu horri *espantsio adiabatikoa* deritzen.

Esperientzia hori praktikara eramateko aurkituko dugun problemarik handiena, horma adiabatiko onak lortzean datza. Nola lor ditzakegu? Ba, hurbilketa ona litzateke, geure ontzia ontzi handiago batean sartuz eta bien artean hutsa eginez lortutakoa (ontzi handiaren hormek ere adiabatikoak izan beharko lukete neurri handiaren). (Ikus 26.2. irudia)



26.2. irudia. Horma adiabatiko egokiak lortzeko muntaia.

Kanpoko horma termostato batez eta bero-erregulagailu batez ontziaren hormen tenperatura berberetan mantentzen badugu, ez da bero-harremanik egongo, ez kondukzioz, ez konbekzioz.

Geure esperimentura itzulirik, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, sisteman bertan beroaren eta lanaren balantzea nulua denez, barne-energia ez da aldatuko:

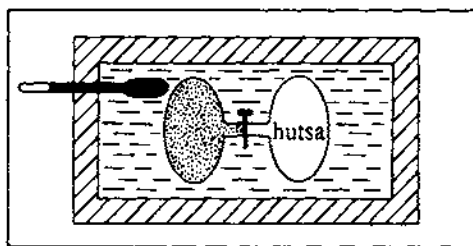
$$Q = 0, \quad W = 0 \Rightarrow \Delta U = 0. \quad (26-9)$$

Beraz, ondokoa idatz dezakegu:

$$U(T_i, V_i) = U(T_f, V_f). \quad (26-10)$$

Erlazio horrek ez digu ezer berririk argitu, berez. Baina, arazoa argitu nahian, joan den mendean Joule-k ondoko esperientzia egin zuen, barne-energiaren menpekotasunak ezagutu nahian, eta horrek emango digu zerbait berri.

Urez beteriko upel adiabatiko batean ontzi bi sartu zituen (ontzi zurrun deformatzailak), bata bestarekin hodi batez baturik, eta erdian giltza bat ipinirik. Batean gas bat ipini zuen eta bestean hutsa egin zuen (ikus 26.3. irudia). Gero, giltza zabaltu zuen, eta lehenengo ontziko gasak espantsioa jasan zuen.



26.3. irudia. Joule-ren esperimentuaren irudikapena.

Eduki dezagun kontuan ezen ontzi bien hormak ez zirela adiabatikoak; baina zurrunak zirenez, gasak, bere espantsioan, ez zuen kanpoaren aurka lanik egiten. Orduan, bero-transferentziarik balego, uretan sarturik zegoen termometro batez neur zezakeen, haren tenperaturaren aldaketa nabarituz.

Eta horrelaxe egin zuen Joule-k, eta urak inolako tenperatura-aldaketarik izan ez zuela ikusi zuen. Beraz, espantsioa isotermikoa izan zen, eta horren ondorioak berehalakoak dira, jarraian ikusiko dugunez.

Tenperatura-aldaketarik ez dagoenez,

$$T_i = T_f \quad (26-11)$$

eta, bestalde, $U(T_i, V_i) = U(T_f, V_f)$ gertatzen denez, ondorio hau ateratzeko,

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0, \quad (26-12)$$

hau da, barne-energiak ez duela V -rekiko menpekotasunik. Azkenik, honako emaitza hau idatz dezakegu:

$$U = U(T). \quad (26-13)$$

Alegia, barne-energia tenperaturaren funtzioa da.

Geroztik, askotan aztertu izan da gauza berbera, eta lortu ere egin da U delakoak p eta V -rekiko menpekotasunik baduela. Zergatik ez zuen, ba, Joule-k menpekotasun hori nabaritu? Erantzuna erraza da: urak eta ontziak zuten bero espezifikoak, gasarena baino askoz handiagoa zen —mila bat aldiz handiagoa— eta nahiz eta horrek (gasak) tenperatura-aldaketa nahiko nabaria izan, termometroak ez zuen inolakorik detektatu.

Hala ere, Termodinamikaren bigarren printzipioaren arabera (hurrengo gaian ikusiko dugunez), erraz ikus daiteke, gas idealen egoera-ekuaziotzat onartu dugun ekuazioa (hau da, $pV = NRT$ ekuazioa) betetzen duen gas baten barne-energiak tenperaturaren funtzioa izan behar duela soilik, hau da, $U = U(T)$. Beraz, hau da gas idealarako bigarren hurbilketa: $U = U(T)$ dela esatea, V edo p -rekiko menpekotasuna arbuiaurik. Hau ez dugu harritzekoa, p eta V -rekiko dependentzia T -rekikoa baino askoz ere txikiagoa baita. Beraz, gas idealak ondoko ekuazioak betetzen ditu,

$$pV = NRT \quad \text{eta} \quad U = U(T), \quad (26-14)$$

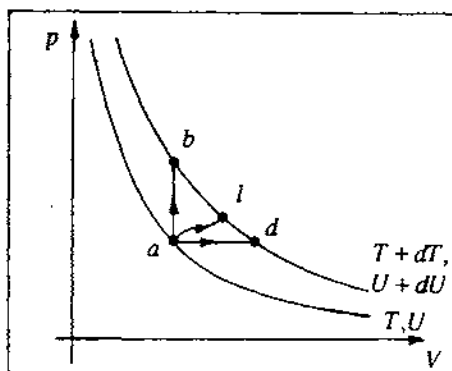
eta edozein gasek ere ekuazio horiek nahiko ondo betetzen ditu presio txikietan, esperientziak frogatu duenez.

26.3. BERO-AHALMEN ESPEZIFIKOAK. MAYER-EN ERLAZIOA

Egoera-ekuazioa eta barne-energia ezagutuz gero, erraz ikus ditzakegu aurreko gaian definituriko magnitudeen gorabeherak (kasu horretarako). Konkretuki, bero-ahalmen espezifikoaren arteko erlazioa. Gogora gaitezen bero-ahalmen espezifikoaren esanguraz (ikus 25.4. atala): tenperatura-aldaketarekiko bero-aldaketak azaltzen dizkigute. Baina aldaketa horiek hainbat prozesu desberdinen bidez egin ditzakegu; horien artean, lortu nahi dugun erlazioarekiko interes handia dutenak bolumen eta presio konstantekoak dira, c_v eta c_p adierazten dizkigutenak, alegia.

Horretarako, dakusagun 26.4. irudia. Hain zuzen, p - V diagrama bat da, eta bertan bi lerro isoterma ($T = \text{kte}$) ageri zaizkigu. Baina, ikusi dugunez, $U = U(T)$ da gas idealen kasuan (eta presio oso txikian gas errealeen kasuan ere). Beraz, lerro isotermaok isoenergetikoak ere izango dira, hots,

$$T = \text{kte} \rightarrow U = \text{kte}. \quad (26-15)$$



26.4. irudia. Bi lerro isotermaen arteko prozesuen adierazpena p - V diagraman.

Honela, ba, eta bi lerro isoterma ditugula, T eta $T + dt$ isotermaok, batetik bestera edozein bidetatik joanez gero, energia-aldaketa berdina izango da. Horrela, irudiko hiru prozesuen kasuan,

$$\Delta U_{ab} = \Delta U_{ad} = \Delta U_{at}. \quad (26 - 16)$$

(Kasu honetan, aldaketak infinitesimalak dira).

Demagun orain, $V =$ ktea dueneko prozesua eragin diogula gas ideaiaren mol bati (26.4. irudiko ab prozesua, 26.5.a ontzian egina). Definizioz, honako hau idatz dezakegu, aurreko gaian ikusitakoaren arabera:

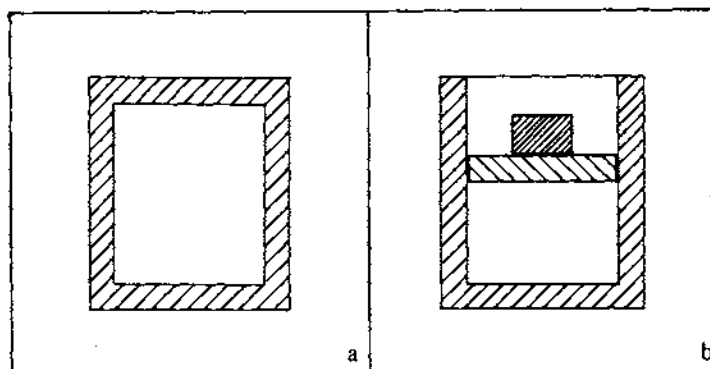
$$\delta Q = c_v dT, \quad (26 - 17)$$

zeren

$$c_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (26 - 18)$$

baita. Bestalde, $V =$ ktea denez, eta espantsiorik ez dagoenez, lanik ez da egiten, eta lehenengo printzipioaren adierazpenean $\delta W = 0$ da; ondorioz hauxe dugu:

$$dU = c_v dT. \quad (26 - 19)$$



26.5. irudia. a) V konstantea duen prozesua. b) Presio konstantea duen prozesua.

Baina lehen esan dugunez, segi dezagun orain ad prozesu isobaroa ($p =$ ktea). Lerro horrek isoterma berberak lotzen dituenek, barne-energiaren aldaketa aurreko kasukoaren berdina izango da. Prozesu hau, presio konstanteko pistoi bat duen ontzi baten bidez egin daiteke (26.5.b ontzia).

Kasu honetan, eta modu berean, definizioz, hauxe idatz dezakegu:

$$\delta Q = c_p dT, \quad (26 - 20)$$

$$\delta W = -p dV. \quad (26 - 21)$$

Baina gas idealen egoera-ekuazioa gogoratuz, eta mol bakar bat dugunez ($N = 1$),

$$pV = RT \rightarrow p dV = R dT, \quad p = \text{kte baita}, \quad (26 - 22)$$

$$\delta W = -p dV = -R dT. \quad (26-23)$$

Azkenean, lehenengo printzipioaren arabera, hauxe idatz dezakegu:

$$dU = \delta Q + \delta W = c_p dT - R dT = (c_p - R) dT. \quad (26-24)$$

Baina, lehen esan dugunez, prozesu isokoroan ($V = \text{ktea}$) eta isobaroan ($p = \text{ktea}$) barne-energiaren aldaketak berdinak dira. Beraz, (26-19) eta (26-24) konparatuz,

$$dU = c_v dT = (c_p - R) dT \rightarrow c_v = c_p - R, \quad (26-25)$$

eta hemendik:

$$c_p - c_v = R. \quad (26-26)$$

Kasu orokorrean, gas idealaren mol bakarra izan ordez, N mol baditugu:

$$C_p - C_v = NR. \quad (26-27)$$

Eta hauxe da *Mayer-en erlazioa*. Esperientziak frogatzen duenez, gas errealek nahiko ondo betetzen dute Mayer-en erlazio hau, presio ez handiegien kasuan behintzat.

Ohan modura diogun, garapen honetan jarritako letrak ez direla nahastu behar. Gogora dezagun bakoitza zer den:

c_p, c_v : bero-ahalmen espezifiko molarrek.

C_p, C_v : bero-ahalmenak. Hain zuzen, $C_p = Nc_p$ eta $C_v = Nc_v$ dira.

Mol bakar baten kasuan, $C = c$ da, noski.

Orokorrean, intuitiboki ere uler daiteke erlazio horien zergatikoa, zeren, prozesu batean bolumena konstante mantentzen bada, sistemari emandako bero-kantitatea oso-osorik erabiltzen baita beraren barne-energia gehitzeko (azken batez, sistemaren tenperatura gehitzeko), zeren, bolumenak konstante dirauenez, ez baitu lanik egiten. Aldiz, presioa konstante mantentzeak sistemaren bolumenaren aldaketa batera eramango gaitu (espansio batera, hain zuzen). Beraz, sistemari emandako bero-kantitatea ez da bakarrik erabiliko beraren tenperatura igotzeko, baizik eta parte bat kanpoko indarren kontrako lan bat egiten ere gatatuko da, bolumena handiagotzeko. Beraz, azken kasu honetan, bero-kantitate handiagoa beharko genuke tenperatura-aldaketa berbera lortzeko. Ondorioz, $c_p > c_v$ izango da.

Halaber, presio txikiatarako, gas monoatomikoetan c_v eta c_p direlakoan balioak honako hauek direla diosku esperientziak:

$$c_v = \frac{3}{2} R, \quad c_p = \frac{5}{2} R. \quad (26-28)$$

Emaitza horiek gasen teoria zinetikoan oinarrituz ere lor daitezke, beraien barne-energia osoa translazio-energia zinetikotzat soilik kontsideratuz. Horrela, goiko balioak gas nobleen eta bapore metalikoen kasuan erabili ohi dira.

Modu berean, gas biatomikoen kasuan ($N_2, O_2, \dots$),

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad \text{eta} \quad c_p = \frac{7}{2} R \quad (26-29)$$

direla ikusi da, zeren, kasu honetan, translazio-energia zinetikoaz gainera, biraketa-energia zinetikoa ere kontuan hartu behar baita, hots,

$$c_v = c_v^0 + c'_v(T), \quad (26 - 30)$$

c_v delakoak T -ren menpekotasuna baitu $c'_v(T)$ modura, hots, bibrazioei loturiko funtzio horren modura. Gauza berbera dugu c_p delakoaren kasuan, Mayer-en erlazioak zuzenki adierazten digunez:

$$c_p = R + c_v = (R + c_v^0) + c'_v(T) = c_p^0 + c'_v(T). \quad (26 - 31)$$

Baina esperimentalki frogatua izan denez, $c'_v(T) = c'_p(T)$ da, eta ondorioz, hauxe idatz dezakegu:

$$c_p = c_v^0 + c'_p(T). \quad (26 - 32)$$

26.4. GAS IDEAL BATEN GAINEKO PROZESU ADIABATIKO ITZULGARRIAK

Demagun gas ideal baten N mol ditugula, eta horietan prozesu bat eragin dugula. Demagun, era berean, prozesu horretan sistemaren eta kanpoaldearen arteko bero-harremanik ez dagoela (hau da, prozesua adiabatikoa dela).

Prozesua adiabatikoki iragan dadin, hurbilketa ona lor dezakegu prozesu arina behar-tuz, holakoetan sistemaren eta inguruko unibertsoaren arteko bero-harremanak oso geldoak baitira; baina hori ez litzateke prozesu itzulgarria izango. Edozein modutan, guk prozesu hori posiblea dela kontsideratuko dugu, nahiz eta praktikan baldintza guztiak ezin bete. Prozesu adiabatiko horietan, sistemak berak kanpoko indarren aurkako lana egin dezake, edota kanpokoek lana egin sistemaren gainean, eta beraren tenperatura aldatu egin daiteke, kasurik orokorrean. Egin dezagun, baldintza horien pean, Termodinamikako lehenengo printzipioaren arabeko balantzea.

Horretarako, har dezagun prozesu osoaren zati infinitesimal bat. Prozesua adiabatikoa denez, $\delta Q = 0$ izango da, eta, sistemari dagokionez, $dU = Nc_v dT$ eta $\delta W = -p dV$ dira. Beraz,

$$dU = \delta Q + \delta W = -p dV = Nc_v dT. \quad (26 - 33)$$

Bestalde, eta gas idealen egoera-ekuazioa ezaguna dugunez, honako hau idatz dezakegu:

$$p dV + V dp = NR dT, \quad (26 - 34)$$

eta azken bi adierazpen hauen artean dT ezabatuz,

$$p dV + V dp = -\frac{R}{c_v} p dV, \quad (26 - 35)$$

eta hemen Mayer-en erlazioa kontuan hartuz,

$$p dV + V dp = -\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) p dV \quad (26 - 36)$$

$$V dp = -\gamma p dV, \quad (26 - 37)$$

non

$$\frac{c_p}{c_v} \equiv \gamma \quad (26 - 38)$$

egin dugun. Balio honi “*indize adiabatikoa*” deritzo, eta beraren funtzioan ekuazio diferentzial hau dugu:

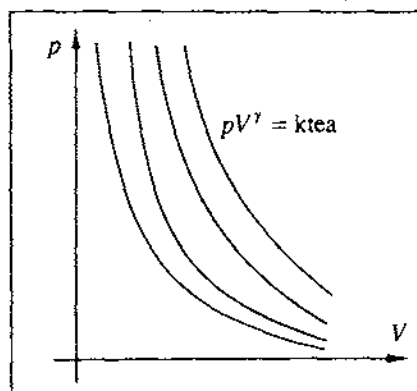
$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \quad (26 - 39)$$

26.4.1. Lerro adiabatikoak

Kasu adiabatikoan $\gamma = k$ tea kontsidera dezakegunez, azken ekuazio hori integratuz, ondokoa lor dezakegu:

$$\ln p + \gamma \ln V = k\text{tea}, \quad (26 - 40)$$

$$pV^\gamma = k\text{tea}. \quad (26 - 41)$$



26.6. irudia. Lerro adiabatikoak p - V diagraman.

Horixe da lerro adiabatikoen ekuazioa. Ekuazio hori beste aldagaien funtzioan ere adieraz daiteke, egocra-ekuazioaz baliatuz. Honela, kalkulu erraz batzuk eginez, hauexek lor daitezke:

$$TV^{\gamma-1} = k\text{tea} \quad \text{eta} \quad Tp^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = k\text{tea}. \quad (26 - 42)$$

26.4.2. Lerro isoterموak

Bestalde, ikus dezagun prozesu isoterموetan zer gertatzen den, hau da, temperatura konstatepean eginkoetan. Horretarako, sar ditzagun gas ideal baten N mol ontzi batean horma diatermanoz inguraturik. Gauzak horrela, espantsio bat eragin diezaiokegu gas idealari. Kasu honetan, prozesuen gorabeherak ekuazio honen azalduko dizkigu,

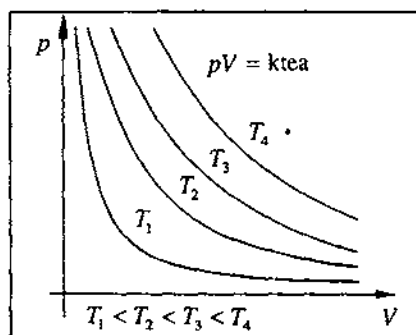
$$pV = NRT = k\text{tea}, \quad (26 - 43)$$

zeren $T = k\text{tea}$ baita eta N -k konstante baitirau prozesuan zehar.

Beraz,

$$pV = k\text{tea} \quad (26 - 44)$$

da gas idealen lerro isotermoen ekuazioa.



26.7. irudia. Lerro isotermoak p - V diagraman.

Bukatzeko, ikus dezagun lerro adiabatiko eta lerro isotermoen arteko erlazioa. Horretarako, p - V planoko edozein puntutan bertatik pasatzen diren mota bietako lerroen maldak kalkulatuko ditugu. Lerro adiabatikoaren kasuan, $pV^\gamma = k\text{tea}$ denez, berau beste era honetan idatziz, $p = k/V^\gamma$, maldaren balioa ondoko deribatuak emango digu:

$$\left. \frac{dp}{p} \right|_{\text{adiab}} = -\gamma \frac{k}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p}{V}. \quad (26 - 45)$$

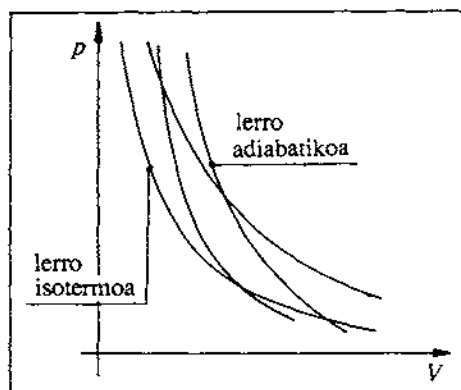
Hau da lerroen malda, negatiboa, espero izatekoa zenez.

Lerro isotermoaren kasuan, gauza berbera egingo dugu:

$$pV = k' \rightarrow p = k'/V, \quad (26 - 46)$$

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_{\text{isot}} = -\frac{k'}{V^2} = -\frac{p}{V}. \quad (26 - 47)$$

Ikus dezakegunez, forma aldetik guztiz antzekoak dira bata eta besteak, γ faktorea positiboa baita; maldaren balioa aldatzen da soilik. Bestalde, $\gamma > 1$ da beti, $c_p > c_v$ baita; horregatik, lerro adiabatikoek lerro isotermoek baino malda handiagoa dute (handiagoa balio absolutuan). Puntu beretik pasatzen diren lerro adiabatikoaren eta isotermoaren arteko desberdintasuna 26.8. irudian adierazi da grafikoki. Analitikoki eginez,



26.8. Irudia. Puntu batetik pasatzen den lerro adiabatikoaren malda, bertako lerro isotermoarena baino handiagoa da.

$$\frac{dp/dV|_{\text{adiab}}}{dp/dV|_{\text{isot}}} = \gamma > 1. \quad (26-48)$$

26.4.3. Espantsio adiabatikoan eginiko lana

Ariketa modura, kalkula dezagun gas ideal batek espantsio adiabatikoan eginiko lana. Aurreko gaiaren lanaren adierazpenetik,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = -k \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -k \frac{1}{1-\gamma} [V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}]. \quad (26-49)$$

Baina

$$kV^{1-\gamma} = \frac{k}{V^\gamma} V = pV \quad (26-50)$$

denez, balio hori ordezkatuz, ondokoa dugu azkenean:

$$W = -\frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} \quad (26-51)$$

Hau da, hasierako eta bukaerako presio eta bolumenak ezagutuz, ez da gauza zaila eginiko lanaren balioa kalkulatzeko.

Aipaturiko balioak ezagunak ez badira ere, baina prozesuaren hasierako eta bukarako tenperaturak ezagunak badira, beste bide hau segi dezakegu. Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, prozesu adiabatikoetan haxe idatz dezakegu:

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta W, \quad (26-52)$$

zeren $\delta Q = 0$ baita. Baina $dU = Nc_V dT$ denez,

$$\delta W = Nc_V dT. \quad (26-53)$$

Azken hau integratuz, c_v -k temperaturarekin konstante dirauela suposatuz, erraza da lanaren adierazpena lortzea:

$$W = \int_{T_1}^{T_2} dW = -Nc_v(T_1 - T_2) \quad (26 - 54)$$

Aipaturiko prozesu isotermo eta adiabatikoez gain, idazle batzuek bien artean daudenak ere definitzen dituzte, *prozesu politropikoak* deiturikoak hain zuzen ere. Azken hauek betetzen dituzten ekuazioak, $pV^k = \text{ktea eratakoak dira}$, non $1 < k < \gamma$ den. Edozein modutan, gu ez gara hemen prozesu horietaz arduratuko.

26.5. GASEN TEORIA ZINETIKOA

Edozein behatzailek, besterik gabe, munduaren irudi jarraitua du. Eta geuk ere horrela tratatu izan ditugu liburu honetan materia eta beraren propietateak. Baina hainbat gertaerak fisikariak materia gauza desjarraitua edo etena dela sinestera eraman zituzten. Aipa ditzagun, adibidez, gorputzen konprimagarritasuna, gasen portaera berezia, eta abar. Gaur egun, denek onartua den zerbait da, gorputzak mikroskopikoki partikulaz osaturik daudela, nahiz eta hauen izaera oso eztabaidatua izan den gaur egun arte.

26.5.1. Gasen teoria zinetikorako sarrera

Ikuspuntu honen arabera ere egin dezakegu fenomeno fisikoen azterketa, beste bideetatik heldu garen ondorio berberetara heldurik. Hauxe da, zuzenki, teoria zinetikoa-ren oinarria. Azterketa hau nahi bezain zabal egin dezakegu (gasei ez ezik, likidoei ere aplika geniezaieke aipaturiko teoria), baina hemen ez dugu hiruzpatalu puntu besterik tratatuko, azaletik ikusirik gainera.

Horretarako, lehenengo eta behin, sinplifikazio bat egingo dugu. Horren arabera, atomoak eta molekulak (partikulak, hitz batean) esfera zurruntzat hartuko ditugu, beraien konposizioa kontuan hartu gabe. Esan dugunez, sinplifikazio bat besterik ez da, eta hori egitean, zenbait fenomeno teoretik kanpo utziko ditugu, hala nola fenomeno optikoak, elektromagnetikoak, nuklearrak eta abar.

Bigarren pauso modura, partikulen arteko indarrei buruzko kontsiderazio batzuk egingo ditugu. Espero izatekoa da, partikulen arteko nolabaiteko indarren bat egotea, besterik ez bada ere, indar grabitatorioa behintzat. Bestetik, gorputzak osatzen dituzten partikulen arteko loturak ikusiz, arbuigarriak direla ikus dezakegu, partikulen artean beste indar zeharo biziagoak baitaude, indar nahiko korapilatsuak bestalde, ez baitira lotzen lege sinple batera. Edozein modutan, indar hauetariko batzuk elektrikoak dira, eta ez dute distantziaren karratuaren alderantzizko proportzionaltasunaren lege sinplea segitzen.

Partikulen arteko distantzia handia denean, indarra erakarlea eta oso txikia da, baina elkarren hurbilean aurkitzen direnean, beraien nukleoen diametroaren arabera distantziatan, indarrak bizi aldaratzaileak dira.

Ikus ditzagun aurreko irudietan horrelako elkarrekintza-motari dagozkion eremu eta indarraren grafikoak. Kasu honetan, partikula bik osaturiko sistema baten Lennard-Jones-en potentziala marraztu dugu, bi gaiez osaturikoa: bata, erakarlea, r^{-6} -ren proportziozkoa, eta bestea, aldaratzailea, r^{-12} -ren proportziozkoa. Potentzial bien batuketaz lortzen da

potentzial erresultantea, lerro jarraituaz marraztutakoa. Potentzial horrek, ikus dezakezue, minimo bat du, r_0 distantziara. Ondorioz, distantzia horretara, indar erresultantea nulua izango da, eta hasierako higidurarik ez balego, mekanikak dioskunez, oreka egonkorrean segituko lukete. Baina hori ez da gure kasua izaten, partikulak higidura erradial erlatiboan ari baitira eta oreka egonkorra lortuko balute, materia guztiak egoera kondentsatutara joko bailuke (solido edo likidura, alegia). Are gehiago, ez guke atmosferarik edukiko, partikula guztiak lurrazalera amilduko bailirateke grabitatearen eraginez. Garbi dago horiek guztiak ez direla gertatzen, eta horren zergatikoa partikulen energia zinetikoan datza.

Esandako horrek partikulak higidura batez ari direla esan nahi du, eta beraren eraginpean, molekulek, atomoek (partikulek, hitz batean), elkarrekiko higidura dute, eta grabitate-indarrak ez balego, partikulak unibertsoan sakabanatuko lirateke, higidura kaotiko horren eraginpean sakabanatzera jotzen baitute. Horrekin ere segi genezake, baina testu honetako helburuetatik kanpo geratzen da. Laburbilduz, hauxe esan dezakegu: partikulen higidura higidura termikoaren, grabitatearen eta indar elektromagnetikoen artean lortutako oreka da.

Aurrerago ikusiko dugunez, higidura horren abiadura handituz doa T tenperaturarekin, beraren funtzioa baita. Horrela, T handituz doanean, gorputza egoera solidotik likidura doa, eta honetatik egoera gaseosora, beren mugimenduetan partikulek geroz eta askatasun handiagoa lorturik.

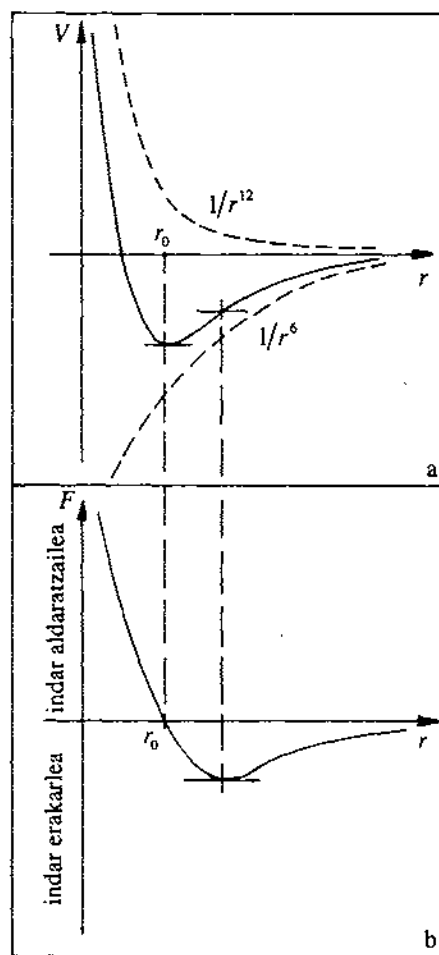
Horiek guztiok kontuan harturik, besterik gabe, has gaitezen teoria zinetikoaren gainetiko azterketaz.

26.5.2. Materia nolakoa den

Esan dugunez, materia partikula mikroskopikoz osaturik dago. Gorputz puruen kasuan, partikula guztiak berdinak dira. Partikula horiek, bai atomoak zein molekula izan, oso txikiak direnez, molekula gramo bat (mol bat) partikula-kopuru oso handiak osatzen du. Gainera, edozein gorputz kimikoren molekula gramo bat osatzen duten partikulen kopurua, teoriaren konstante tipiko bat da, *Avogadro-ren zenbakia* deritzona, materia-mota guztietan berbera dena. Orain arte, zenbaki horren baliorik zehatzena kristal baten geruza molekularren arteko distantziak neurtuz lortu izan da, X-izpiez baliatuz. Hauxe da:

$$N_A = 6,02216 \cdot 10^{23} \text{ molekula/mol.}$$

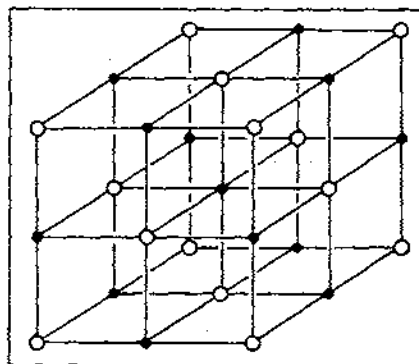
(26 - 55)



26.9. irudia. a) Lennard-Jones-en potentziala. b) Potentzial horri dagokion indarra.

Zenbaki hori ezagutuz, edozein atomo edo molekularen masa lor dezakegu.

Nola agertzen zaigu partikula-multzo izugarri hori materiaren barnean? Ba, hiru mota desberdinetan: egoera solido, likido eta gaseosotan. Egia esan, laugarren egoera bat ere aipatzen da, *plasma* deritzona. Egoera horretan, atomoek elektroiz guztiak galdu dituzte; izatez, baldintza oso gogorretan lor daiteke soilik plasma, hala nola izarretan edo laborategietan, eremu magnetiko oso handi baten menpean. Gu ez gara hemen azken egoera horretaz arduratuko. Lehenengo bi egoeretan, hau da, egoera kondentsatuetan, ondoz ondoko bi partikula arteko distantzia konstantetzat har dezakegu. Partikulen arteko loturak (kohesio-indarrak) gogorrak dira, eta partikulak horretara behartzen dituzte, alegia, orekan beren arteko batez besteko distantziak denboran zehar konstante mantentzera. Horrek ez du esan nahi partikulak geldirik daudenik; bai batean zein bestean, partikulek bibratu egiten dute, baina bibrazio-zentroek lehen esandakoari jarraitzen diote (horregatik jarri dugu 'batez besteko distantziak' izena).



26.10. irudia. Sistema kubikoan kristalizaturako gorputz biatomiko baten kristala. Atomoen arteko lotura, zurruntzat baino elastikotzat hartu behar dugu.

Bestetik, egoera likidoan loturek ez dute egitura finkorik mantentzeko adinako indarririk. Eta horretan bereizten dira solidoak eta likidoak: azken hauek soilik lokalki gordetzen dute finkapen hori; solidoek, oster, beren osotasunean (ikus 26.10. irudia).

Egoera gaseosoan, lotura-indarrak hain dira motelak, nuluak direla kontsidera dezakegula. Eta noski, partikulen arteko kokapena guztiz aleatorioa da. Plasmei ere, gasen eredua aplikatu geniezaieke.

Beraz, materia berbera egoera solidotik likidora eta likidotik gaseosora igarotzean, desordena handituz doa; partikulek gero eta askatasun handiagoa dute, hau da, energia zinetikoa irabazten dute, eta tenperatura igoz doa, aurreko gaietan eta gai honetan bertan ikusi dugunaren arabera.

v_m txikia	v_m ertaina	v_m handia
E_k txikia	E_k ertaina	E_k handia
Solidoa	Likidoa	Gasa
$\rightarrow E_k$		

Hori da, nolabait, alboko eskeman adierazi dena, non E_k energia zinetikoa eta v_m^2 batez besteko abiadura koadratikoa diren.

Geure azterketan, egoera gascosoa aztertuko dugu, eta lotura-indarrak nulutzat onartuko ditugu, talka-uneetan izan ezik.

26.5.3. Higidura browndarra eta batez besteko abiadura koadratikoa

Gure sinplifikazioan, gauzak honelaxe doaz gasaren barnean: Partikulek, higidura uniforme dutela, ibilbide zuzenak betetzen dituzte. Noizean behin, horietako bik talka egingo dute elkarrekin, eta bien abiadura, bai moduluz eta bai norabidez, aldatu egingo denez, beste ibilbide berriak (lehen bezala uniforme eta zuzenak) hasiko dituzte.

Honela, ba, mikroskopikoki gas bat behatuko bagenu, honako hau ikusiko genuke: partikula-multzo handi bat, eta bertan partikula bakoitzak nolanahiko norabideko ibilbidea betetzen, noizean behin beste partikulen aurkako talkak dituela.

Hori ederto nabari daiteke edozein likidotan, masa handiko molekulak sartzen baldin baditugu (hau da, mikroskopioaz ikus ahal daitezkeenak). Orduan, molekula horien gora-beherak segitzen baditugu, beraien ibilbideak hautsiak direla ikusiko dugu. Higidura horri *higidura browndarra* deritzo. Einstein izan zen higidura browndarraren azalpen teorikoa egokiro eman zuen lehena, 1905. urtean.

Geure eredu sinplifikatuari jarraiturik, partikulen egoera zinematikoa adierazteko, ezin dugu partikula bakoitzaren abiadura eman. Guztien abiadurak berdinak direla onartuz (moduluz, noski), modulu horren karratua honelaxe adieraz daiteke:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad (26-56)$$

non v_x , v_y , v_z edozein partikularen abiaduraren osagaiak diren. Dena den, orokorki hori ez da gertatzen (are gehiago, inoiz ere ez), eta partikulek edozein abiadura eduki dezakete. Demagun, dauzkagun partikulak N direla, eta horien abiadurak v_i (v_{xi} , v_{yi} , v_{zi}) direla. Partikula guztiek x norabidean dauzkaten osagaien karratuen batez besteko balioa hauxe da, definizioz:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_i v_{xi}^2. \quad (26-57)$$

Beste osagaiekin, gauza bera gertatzen da. Orduan, partikulatarako ezaugarritzat har daitekeen balioa, abiadura osoaren karratuen batezbestekoa da: *batez besteko abiadura koadratikoa*, hain zuzen ere. Hauxe da:

$$\overline{v_m^2} = \frac{1}{N} \sum_i (v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2) = [\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}]. \quad (26-58)$$

Bestalde, partikulek espazioan norabide berezirik segitzen ez dutenez (hau da, higidurak guztiz kaotikoak eta arbitrarioak direnez), ondokoa idatz dezakegu:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}. \quad (26-59)$$

Ondorioz:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v_m^2}}{3}. \quad (26-60)$$

Estatistikoki, partikulen kopurua hain handia denez, banaketa-funtzio bat defini dezakegu, $N(v)$, eta v edozein partikularen abiadura bada, $N(v)dv$ gaiak v eta $v + dv$ abiaduren tartean zenbat partikula dauden adieraziko digu.

Horrela, batez besteko abiadura koadratikoaren adierazpena hauxe izango da:

$$\overline{v_m^2} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 N(v) dv. \quad (26-61)$$

Integralen mugak 0-tik ∞ -ra doaz, abiadura posible guztiak sartzekotan. Aipaturiko $N(v)$ horrek v eta $v + dv$ tartean abiadura-unitateko dauden partikulen kopurua adierazten digu. Hortik, partikula guztien kopurua honelaxe lor daiteke:

$$N = \int_0^\infty N(v) dv. \quad (26-62)$$

Ondorioz, gaseko partikula guztien batez besteko energia zinetikoa, modu honetan idatz dezakegu,

$$\overline{E_k} = \frac{N}{2} m \overline{v_m^2} = \frac{N}{2} m \left[\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \right], \quad (26-63)$$

edota, aurreko banaketa-funtzioaren arabera,

$$\overline{E_k} = \frac{1}{2} m \int_0^\infty v^2 N(v) dv, \quad (26-64)$$

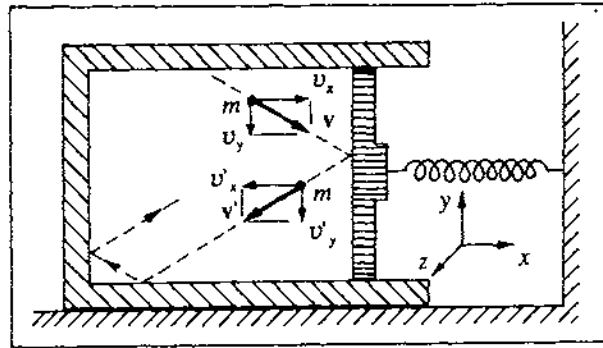
partikula bakoitzaren masa den m delakoa konstantetzat hartu baitugu.

26.5.4. Presioaren lorbide berria

Demagun 26.11. irudian ageri den partikula. Gasa daukan ontziak partikularen ibilbidea oztopatuko du. Ikus dezagun zein den partikula horrek enboloari emango dion bulkada. Kasurik idealenean, talka guztiz elastikoa dela kontsideratuko dugu. Horrela, partikulak hormaren aurka talka egin ondoren, hormaren perpendikularra den osagaia aldatuko da soilik, eta besteak konstante iraungo dute, hots:

$$v'_x = -v_x \quad v'_y = v_y \quad v'_z = v_z. \quad (26-65)$$

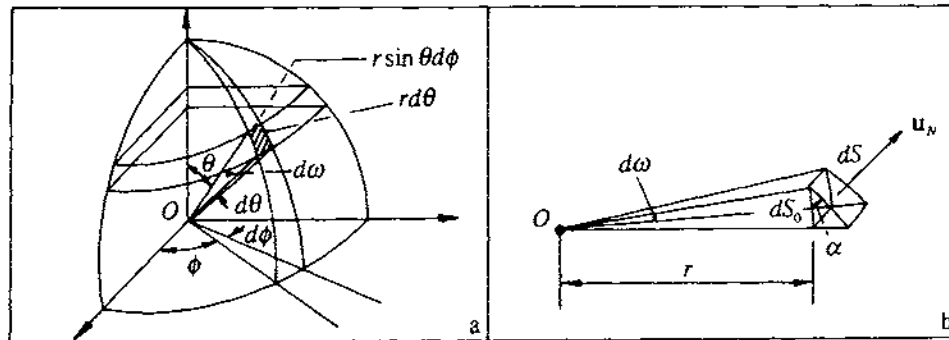
Lehen definituriko $N(v)$ banaketa-funtzioak V bolumenean zeuden partikula guztietatik v abiadura zeukatenak zenbat ziren adierazi digu. Baina partikulen abiadurak ez dira soilik banatzen abiaduren moduluak hartuz, beraien norabidez ere baizik. Beraz, abiaduren banaketa-funtzioak espazioko norabideak ere kontsideratu beharko ditu. Orduan, zenbat izango dira gure bolumenean ez soilik v abiadura (moduluz) daukatenak, baina $\mathbf{v}$ bektorearen norabidean ere dauden partikulak? Azken hau, $N^*(\mathbf{v})$ banaketa-funtzioaz adieraziko dugu.



26.11. irudia. Partikula baten ibilbidearen adierazpena, enboloarekin talka egitean.

Norabide baten tarte infinitesimala (edo ingurua) espazioan, angelu solido infinitesimalaz adierazteko ohitura dago. Koordinatu esferikoetan, 26.12. irudiko gainazal infinitesimalari dagokion angelu solido infinitesimala $d\omega$ da. Zirkunferentzia batean erradianak definitzean egiten den bezalaxe, esfera oso bati dagokion angelu solido osoak 4π este-reorradian balio du; hots, haren azalera osoaren, $4\pi r^2$, eta erradioaren karratuaren bidezko zatidura da. Beraz, 26.12.a irukiko azalera infinitesimalari dagokiona honelaxe adieraz daiteke:

$$d\omega = \frac{r^2 \sin\theta d\phi d\theta}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi. \quad (26 - 66)$$



26.12. irudia. a) Edozein norabideren inguruko angelu solidoa. b) dS azalerari dagokion angelu solido infinitesimalaren definizioarako elementuak.

O puntutik ikusitako azalera infinitesimala norabide erradialaren perpendikularra ez balitz, irudian dS -ekin gertatzen denez, orduan dS azalerari eta berari dagokion proiektzio esferikoari (dS_0 azalerari) dagozkion angelu solidoak berdinak lirateke (26.12.b irudia). Kasu honetan,

$$d\omega = \frac{dS_0}{r^2} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2}. \quad (26 - 67)$$

Eranskin honetan finkatuz, ikus dezagun definituriko banaketa-funtzio bien artean betetzen den erlazioa, $N(v)$ -ren eta $N^*(v)$ -ren artekoa, hain zuzen ere. Ez da zailegia ondoko erlazio hau betetzen dela ikustea:

$$N(v) = \int_0^{4\pi} N^*(v) d\omega, \quad (26-68)$$

zeren, $N^*(v)$ banaketa-funtzioak v abiadura eta gainera v bektorearen norabidean dauden partikulak adierazten baldin baditu, espazioko norabide eta noranzko guztiak hartzean (horregatik integralaren mugak, esteorradianetan adierazirik), hortik lortuko dugun emaitzak v abiadura duten ontziko partikula guztien kopurua emango baitigu.

Geure buruari egin diezaiokegun hurrengo galdera hau: Zein izango da, dauzlagun partikulen artean, v eta $v + dv$ abiaduren tartean eta gainera $d\omega$ -k seinalatzen duen norabidean aurki daitezkeen partikulen kopurua? Probabilitateaz baliatuz, alde batetik, esan dugunez, v abiadura daukatenen kopurua $N(v)$ bada, v eta $v + dv$ abiaduren tartean izango ditugunak $N(v)dv$ izango dira, eta gainera hauek v konkretu baten inguru infinitesimalean egon behar badute ($d\omega$ -k seinalatutakoan), azken probabilitate hau $d\omega/4\pi$ denez (espazioko norabide guztiek probabilitate berdina dutelako), baldintza biak betetzen dituzten partikulen kopurua bien biderketaz lor daiteke, honelaxe zehazki:

$$[N(v)dv] \cdot \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) = [N^*(v)d\omega]dv, \quad (26-69)$$

non $N(v)dv$, v eta $v + dv$ tartean dauden partikulak diren, $d\omega/4\pi$ delakoa espazioko konoan egoteko probabilitatea, eta $N^*(v)d\omega$ delakoa aipaturiko konoan v -ren norabidearen inguruan eta v balioko abiadura daukaten partikulak.

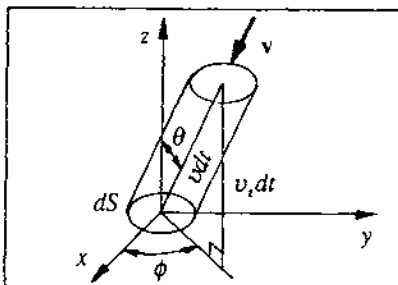
Azkenez, banaketa-funtzioei buruz hauxe idatz dezakegu:

$$\int_0^\infty N(v)dv = N, \quad (26-70)$$

hori (26-61) adierazpenean frogatu baikenuen, edota:

$$\int_0^\infty dv \int_0^{4\pi} N^*(v) d\omega = N. \quad (26-71)$$

Aplika dezagun ikusitakoa presioaren lorbide berrirako. Hain zuzen, 26.13. irudian, dS balioa hormaren edo enboloaren azalera infinitesimala da. Hormarekin partikulek dauzkaten talkak guztiz elastikoak direla onartuko dugu. Kalkula dezagun dS -rekin v abiaduraren inguruan (bai moduluz eta bai norabidez) talka egiten duten partikulen kopurua dt denbora-tarte infinitesimalean. Begi bistan dagoenez, aurrerago marraztutako zilindroan dauden partikulak izango dira esandako baldintzak betetzen dituztenak, noski. Talka horietan, lehenago esan dugunez, partikulen abiadurak z -ren norabidean aldatuko dira soilik (v_z baliotik $-v_z$ baliora pasatuko dira), eta partikula bakoitzak talkaren ondorioz jasango duen momentu linealaren aldaketa, $-2mv_z$, izango da. Alderantziz, hormak jasango duen bulkada, $2mv_z$, izango da.



26.13. irudia. Presioaren lorbidetako elementuak.

Ontzi osoan dauden partikulen kopurua N bada, marraztutako zilindro infinitesimalan daudenena

$$(N/V) dS v_z dt \quad (26-72)$$

izango da, eta hauen artean, esandako baldintzak betetzen dituztenen kopurua honako hau:

$$n[f^*(\mathbf{v})dv d\omega] dS v_z dt, \quad (26-73)$$

non $n = N/V$ eta $f^*(\mathbf{v}) = N^*(\mathbf{v})/N$ diren. Azken honek partikula bakoitzeko $\mathbf{v}$ abiaduraz eta gainera $\mathbf{u}$, bertsoreak seinatutako norabide eta noranzkoan zenbat dauden adierazten digu. Hitz batean, $f^*(\mathbf{v})$ delakoa, $N^*(\mathbf{v})$ banaketa-funtzioari dagokion funtzio birmormalizatua da. Ondorioz, aurrerago idatzitako integralak era honetan berridatziko ditugu:

$$\int_0^\infty dv = \int_0^{4\pi} f^*(\mathbf{v}) d\omega = 1 \quad \text{eta} \quad \int_0^\infty f(v) dv = 1, \quad (26-74)$$

zeren $f^*(v) = N(v)/N$ izango baita.

Idatzitakoarekin, dS azalera infinitesimalak jasango duen bulkada hauxe izango da:

$$(nf^*(\mathbf{v})d\omega dv dS v_z dt) 2m v_z = \left(nf(v) dv \frac{d\omega}{4\pi} v_z dt dS \right) 2m v_z, \quad (26-75)$$

lehen ikusi dugun berdintza bat kontuan hartuta. Aurrekoa dt delakoaz zatitzean, dS -k jasandako indarra lortuko dugu, eta ondoren dS delakoaz zatitzen badugu, hormak jasandako presioa, alegia:

$$d^3p = nf(v) \cdot 2m v_z^2 \cdot \frac{d\omega}{4\pi} dv, \quad (26-76)$$

non d^3p jarri dugun, zerren presio hori hirugarren ordenako diferentziala baita.

Bestalde,

$$v_z = v \cos \theta \quad \text{eta} \quad d\omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (26-77)$$

dira, azken hau atal honetan bertan ikusi izan dugunez. Aurreko ekuazioan balio horiek ordezkatu ondoren, egin dezagun $\mathbf{v}$ bektoreari dagokion norabide posible guztietarako integrala. Horrela, v eta $v + dv$ abiaduraren tartean dauden partikula guztiek hormak jasaten duen presio osoan daukaten ekarpena lortuko dugu. Hori eginez,

$$dp = \frac{1}{2\pi} n f(v) dv \cdot m v^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} n m v^2 f(v) dv. \quad (26-78)$$

Azken integralean θ angeluarekiko mugak 0 eta $\pi/2$ dira, eta ez 0 eta π , zeren dS gainazalera alde bakar batetik heltzen diren partikulak kontsideratu behar baititugu, eta ez alde bietatik hel daitezkeenak.

Azken pauso batean, kalkula dezagun abiadura guztietako partikulek hormaren gainean eginiko presioa. Horretarako, beste integrazio bat besterik ez dugu egin behar, kasu honetan abiadurarekikoa. Abiadura guztietako partikulak sartzeko asmoz, integralaren mugek 0tik infinitura joan beharko dute. Horrela eginez,

$$p = \frac{1}{3} n m \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{1}{3} n m \overline{v_m^2}, \quad (26-79)$$

zeren, lehentxoago ikusi dugunez,

$$\overline{v_m^2} \equiv \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^2 N(v) dv = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv. \quad (26-80)$$

Honen arabera, beraz, presioak badu zerikusirik gasa osatzen duten partikula mikroskopi-koekin. Ikus dezakegunez, haien talka diskretuz sortzen da presioa. Ez da, ba, kontzeptu jarraitua.

Biderka dezagun orain presioaren adierazpen berria ontziaren V bolumenarekin, eta berrordena dezagun, emaitza honetara iritsi arte:

$$pV = \frac{1}{3} n V m \overline{v_m^2} = \frac{2}{3} N \cdot \frac{1}{2} m \overline{v_m^2} = \frac{2}{3} \frac{N}{N_A} \cdot \left(N_A \cdot \frac{1}{2} m \overline{v_m^2} \right). \quad (26-81)$$

non N_A delakoa Avogadro-ren zenbakia den. Beraz, ontziko partikulen kopuru osoa N bada, $N/N_A = \nu$ izango da bertan dauden molen kopurua; eta parentesi artean dagoen gaia mol baten translazio-energia zinetikoa denez, K delako ikurraz adieraziko duguna, beste era honetan azalduko dugu goiko ekuazioa:

$$pV = \frac{2}{3} \nu K. \quad (26-82)$$

Zenbait ohar egingo ditugu jarraian. Izatez, esandakoa gas monoatomikoetara aplika daiteke soilik; besteetan, molekulak, translazio-energia zinetikoaz gain, badute biraketazkoa eta bibraziozkoa ere. Bestetik, mol-kopurua adierazteko ν letra erabili dugu atal honetan ohizko n erabili ordez, atal honetan bertan lehenago erabilitako n letrarekin ez nahasteko; baina hemendik aurrera berriro erabiliko dugu n letra.

26.5.5. Tenperaturaren definizioa teoria zinetikoaren ikuspuntutik

Konpara dezagun erdietsi dugun azken formula, gas idealetarako gai honetan bertan eta ikuspuntu makroskopikotik idatzi dugunarekin:

$$pV = \frac{2}{3} nK \quad \text{eta} \quad pV = nRT. \quad (26-83)$$

Biak berdinak badira, ondokoa bete beharko da:

$$\frac{2}{3}K = RT \quad \rightarrow \quad T = \frac{2K}{3R}. \quad (26-84)$$

Hau da, $T \propto K$, edo beste hitzetan esanda, *gas baten temperatura gas hori osatzen duten partikulen energia zinetikoaren proportzionala da*. Hauxe da, hain zuzen, temperaturaren definizioa teoria zinetikoaren ikuspuntutik.

26.5.6. Boltzmann-en konstantea

Bukatzeko, defini dezagun beste konstante unibertsal bat: Boltzmann-en konstantea. Definizioz, konstante honen balioa hauxe da:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (26-85)$$

Konstante honen funtzioan eta $K = N_A \left(\frac{1}{2} m \overline{v_m^2} \right)$ ekuazioan oinarrituz, honako hau idatz dezakegu:

$$K = N_A \cdot \frac{1}{2} m \overline{v_m^2} = \frac{3}{2} RT. \quad (26-86)$$

Hemendik:

$$\frac{1}{2} m \overline{v_m^2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT. \quad (26-87)$$

Baina

$$\overline{v_m^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad \text{eta} \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v_m^2}}{3}. \quad (26-88)$$

Beraz,

$$\frac{1}{2} m \overline{v_i^2} = \frac{1}{2} kT. \quad (26-89)$$

Hau da, gas horren partikula bakoitzari eta askatasun-gradu bakoitzari dagokion energia zinetikoak $\frac{1}{2} kT$ balio du. Printzipio horri *energiaren ekipartizioaren printzipioa* deritzo. Honek garrantzi handia du gasen bero-ahalmen espezifikoak kalkulatzeko, ez baita soilik betetzen translaziozko askatasun-graduekin, baizik eta edozein motatako askatasun-graduekin ere, hala nola bibraziozko eta biraketazko askatasun-graduekin ere.

Zer da guk idatzi dugun translaziozko energia zinetiko molarra, K delakoa alegia? Gas monoatomikoetan gerta daitekeen higidura bakarra translaziozkoa denez, eta beste elkarrekintzarik ez dagoenez, huts-hutsik, barne-energia da, U . Orduan, bero-ahalmen espezifiko molarrek kalkulatzeko, hauxe egin genuen:

$$c_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V. \quad (26-90)$$

Baina esandakoarekin, $U = \frac{3}{2} RT$ da. Beraz, honako hau idatz dezakegu:

$$c_v = \left(\frac{dU}{dT} \right)_v = \frac{3}{2} R. \quad (26-91)$$

Presioa konstante mantendurik gasa berotzen badugu, gasak espantsio-lana egingo du, eta prozesu infinitesimal batean eginiko lana hauxe izango da, mol bakoitzeko:

$$p dV = R dT, \quad (26-92)$$

eta Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera,

$$\delta Q = dU - \delta W = dU + p dV = \frac{3}{2} R dT + R dT = \frac{5}{2} R dT. \quad (26-93)$$

Bestalde, presio konstantepeko bero-ahalmen espezifikoko molarren adierazpenetik,

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{5}{2} R \quad (26-94)$$

da, hots:

$$c_p - c_v = R \quad \text{eta} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} = 1,667, \quad (26-95)$$

esperientzarekin guztiz ados doana berau.

Gas poliatomikoetan balioak desberdinak dira. Biraketarekin eta bibrazioarekin loturik doazen energiak arbuia garriak ez direla esan nahi du horrek.

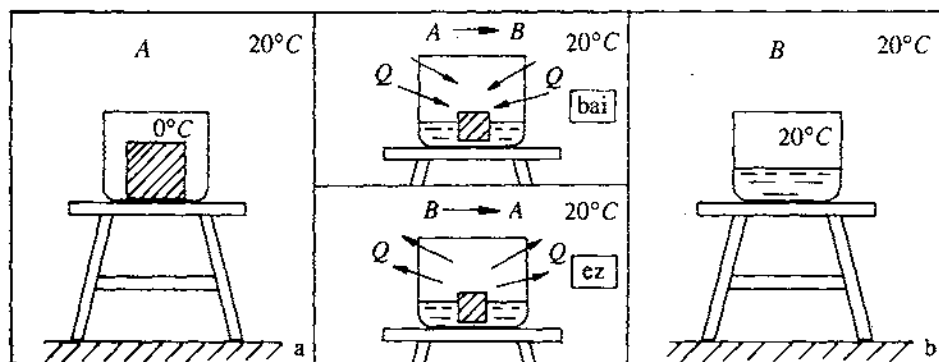
27. gaia

Termodinamikaren bigarren printzipioa

Demagun urez beteriko ontzi diatermanoa dugula 20°C -ko tenperatura duen gela batean. Gelaren dimentsioak ontziaren dimentsioekiko oso handiak baldin badira, kontaktu diatermanoan jartzean, ontziaren eta gelaren arteko bero-transferentzia gertatuko da gelaren tenperatura praktikoki aldatzeke. Gelari *bero-iturria* deritzo. Gela isolaturik baldin badago, kanpo eraginik ez badago alegia, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera honako hau beteko da:

$$U_B - U_A = Q, \quad (27 - 1)$$

Q delakoa ontziak daukan urak A egoeratik B egoerara pasatzean bero-iturritik xurgatzen duen bero-kantitatea izanik, eta U_A eta U_B direlakoak urak A egoeran eta B egoeran dituen barne-energiak, hurrenez hurren. Horrela, ba, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, kanpo-eraginik gabe, bero-iturritik Q bero-kantitatea xurgatuz, ontziko ura A egoeratik B egoerara pasa daitekeen bezalaxe, bero-iturriari Q bero-kantitatea emanaz, B egoeratik A egoerara pasa daiteke.



27.1. irudia. a) A egoeran izotza dugu gelan. b) B egoeran izotza urtirik dago. $A \rightarrow B$ prozesua naturalki gertatzen da, baina $A \rightarrow B$ prozesua ez.

27.1. irudian ageri den prozesuak, ordea, noranzko bakarra dauka. Hain zuzen, A delakoa ura izotzirik dagoeneko egoera, eta B delakoa uraren tenperatura 20°C -takoa denekoa baldin badira, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, ura A egoeratik B

egoerara pasa daitekeen era berean B egoeratik A egoerara ere pasa daitekeela pentsa daitekeen arren, esperientzian oinarriturik, behin B oreka-egoera lortuz gero, ura berez berriro A egoerara itzuliko ez dela ondoriozta dezakegu.

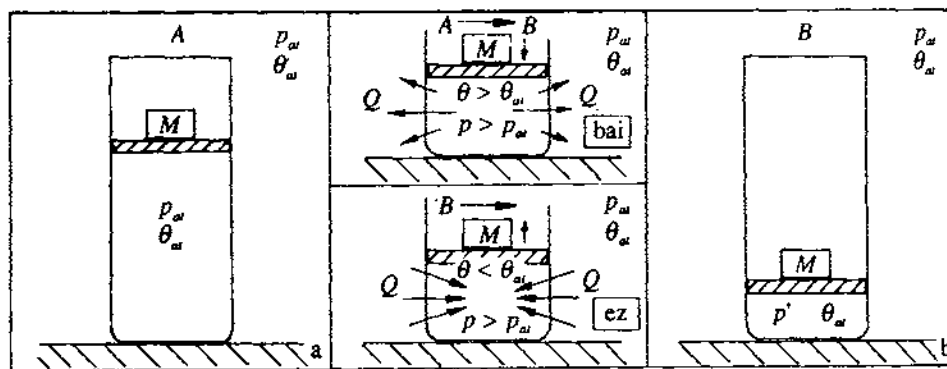
Demagun, orain, gela isolatu batean gazez beteriko zilindro diatermanoa dugula, eta gasa enbolo batez eta M masako gorputz batez zapaldurik dagoela (ikus 27.2. irudia). Gelaren dimentsioak zilindroaren dimentsioekiko oso handiak baldin badira, gela sistemaren bero-iturria dugu, eta berau isolaturik dagoen bitartean, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, hauxe beteko da:

$$U_B - U_A = W + Q, \quad (27-2)$$

non W eta Q direlakoak gasa A egoeratik B egoerara pasatzean burutzen den lana eta transferitzen den bero-kantitatea diren, hurrenez hurren. Horrela, bada, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, gasaren gainean W lana burutuz eta gasak bero-iturriari Q bero-kantitatea emanez A egoeratik B egoerara pasa daitekeen era berean, sistemak W lana burutuz eta bero-iturritik Q bero-kantitatea xurgatuz B egoeratik A egoerara ere pasa daitekeela uste daiteke. Horretan ez dago lehenengo printzipioarekiko kontraesanik. Aldiz, A delako egoera, sistemaren tenperatura eta presioa gelarenak direnekoa, eta B egoera, tenperatura gelarena eta presioa

$$p' = p_{at} + \frac{Mg}{A} \quad (27-3)$$

direnekoa baldin badira, p_{at} gelaren presioa eta A enboloaren azalera izanik, esperientzian oinarriturik, sistema A egoeratik B egoerara berez pasa daitekeen arren, behin B oreka-egoera lortuz gero, berez A egoerara sekula ere itzuliko ez dela atera dezakegu ondorioz.



27.2. irudia. A delakoa hasierako egoera da eta B , amaierakoa. $A \rightarrow B$ prozesua berez gertatzen den arren, $A \rightarrow B$ prozesua ez da berez gertatzen.

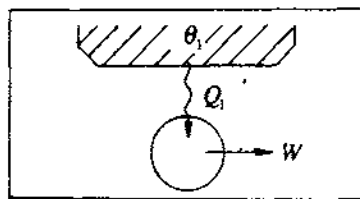
Halaber, dakigunez, gatza uretan disolbatu egiten da berez, eta burdina, herdoildu; aldiz, gatzak eta burdinak ez dute, kanpoko manipulaziorik gabe, hasierako egoera sekula ere berriro lortuko. Hau da, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera berezko prozesuen itzulgarritasuna zilegia bada ere, esperientzian oinarriturik, *Naturan gertatzen diren berezko prozesu guztiak itzulezinak direla*, hots, beti noranzko berean gertatzen direla ondoriozta dezakegu, eta esperientzian oinarrituriko ondorio horrek *Termodinamikaren bigarren printzipioa* enuntziatzera bultzatzen gaitu.

Lehenengo printzipioak hasierako eta bukaerako egoeren arteko prozesuen energiaren kontserbazioa adierazten digu, baina ez diosku ezer prozesuen noranzkoaz. Natura, ordea, oso zehatza da horretaz, eta noranzko bateko prozesuak soilik aukeratzen ditu. Noranzko hori zein den azaltzea izango da gai honetako helburua.

27.1. TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZPIOAREN ENUNTZIATUAK

Demagun, adibide gisa, batetik, plano aldapatsu eta infinitu batean barrena higikari bat labaintzen ari dela, eta, bestetik, ontzi diatermano bateko gas ideala espantsionatu egin dela. Lehenengo adibidean, martuskadura-indarrak burutzen duen lan osoa bero bilakatzen da etengabe; bigarren adibidean, aldiz, espantsio-prozesuan zehar sistemak atmosferatik hartzen duen bero guztia lan bilakatzen da, baina ez etengabe, gasak presio atmosferikoa lortzen duen arte baizik. Hau da, berezko prozesuetan lan guztia bero bilaka daitekeen bezalaxe, beroa ere lan bilaka daiteke; baina posiblea al da etengabe bero guztia lan bilakatzeara? Horrela balitz, itsasotik edo atmosferatik beroa xurgatuz, untiak higiaraztea eta zentral termikoak funtzionaraztea posiblea izango litzateke.

Sistemak bero-iturritik xurgatzen duen beroa etengabe lan bihurtu dadin, sistemak hasierako egoerara itzuli beharko du, era ziklikoan funtzionaturik. Sistema ziklikoki funtzionarazten duen dispositiboari *motor termikoa* deritzo, eta prozesu ziklikoa, eskematikoki, 27.3. irudian ageri den eran adierazi ohi da.



27.3. irudia. Bero-iturri bakarreko motor termiko hipotetikoaren prozesu ziklikoaren adierazpen eskematikoa.

Demagun prozesu hori posiblea dela, hau da, sistemak prozesu ziklikoa burutuz, θ_1 tenperaturako bero-iturritik xurgatzen duen beroa lan bilakatzen ari dela. Ziklo bakoitzaren hasieran eta bukaeran sistemaren egoera eta, ondorioz, barne-energia berberak direnez gero, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera,

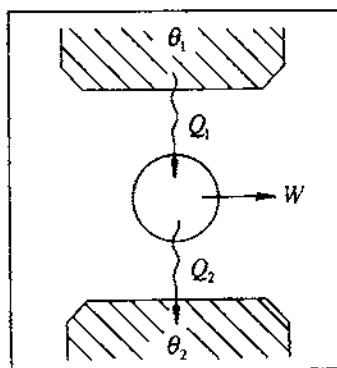
$$Q_1 = -W \quad (27-4)$$

izango da; hots, sistemak xurgatzen duen bero guztia lan bilakatuko litzatekeela ondoriozta dezakegu.

Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera, beraz, prozesu zikliko bati jarraituz sistemak xurgatzen duen bero guztia etengabe bilaka daiteke lan; nolana den, ez da orain arte sistemari honelako prozesu ziklikorik jarraiarazten dion dispositiborik aurkitu. Are gehiago, badirudi naturak berak horrelako dispositiboak eraikitzeke ahalbidea ukatzen duela, eta, ondorioz, lan guztia bero etengabe bilakatzeara delako prozesua itzulezina dela, alegia, noranzko batean soilik gertatzen dela. Prozesu ziklikoa burutuz sistemak xurgatzen duen bero guztia lan bilakatzen duen dispositiboari '*bigarren motako higikari iraunkorra*' deritzo; baina hainbeste saio egin ondoren eta guztien porrota ikusi ondoren, bigarren mo-

tako higikari iraunkorra eraikitzea ezinezkotzat jotzen da. Eta emaitza esperimental horretan oinarriturik, Kelvin-ek eta Planck-ek honela enuntziatu zuten Termodinamikaren Bigarren Printzipioa: «Sistemak era ziklikoan xurgatzen duen bero guztia lan bilakatzea ezinezkoa da, hots, bigarren motako higikari iraunkorra eraikitzea ezinezkoa da».

Hain zuzen, eraiki daitezkeen motor termiko guztiek bero-iturri bi behar dituzte era zi-klikoan funtzionatu ahal izateko; iturri horiei iturri beroa (*IB*) eta iturri hotza (*IH*) deitu ohi zaie. Hortaz, ziklo bakoitzean motorrak lehenengo iturritik, *IB* delarik alegia, xurgatzen duen bero-kantitatearen zati bat, bigarren iturrira, *IH* delakora alegia, bidaltzen du (nahitacetz), bien bitartean lana burutuz. Prozesu zikliko horiek (errealak), beraz, eskematikoki 27.4. irudian ageri den moduan adierazten ditugu, non θ_1 eta θ_2 direlakoak iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak diren, eta Q_1 , Q_2 , eta W ziklo bakoitzean iturri berotik xurgaturiko bero-kantitatea, iturri hotzari emaniko bero-kantitatea eta sistemak buruturiko lana diren, hurrenez hurren.



27.4. irudia. Iturri berotik Q_1 beroa hartuz eta iturri hotzera Q_2 beroa emanez, W lana burutzen duen motorraren prozesu ziklikoaren eskema.

Zer esanik ez, ziklo bakoitzaren hasieran eta bukaeran prozesu ziklikoa burutzen duen sistemaren barne-energia berbera denez, Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera hauxe beteko da:

$$0 = Q_1 - Q_2 - W, \quad (27-5)$$

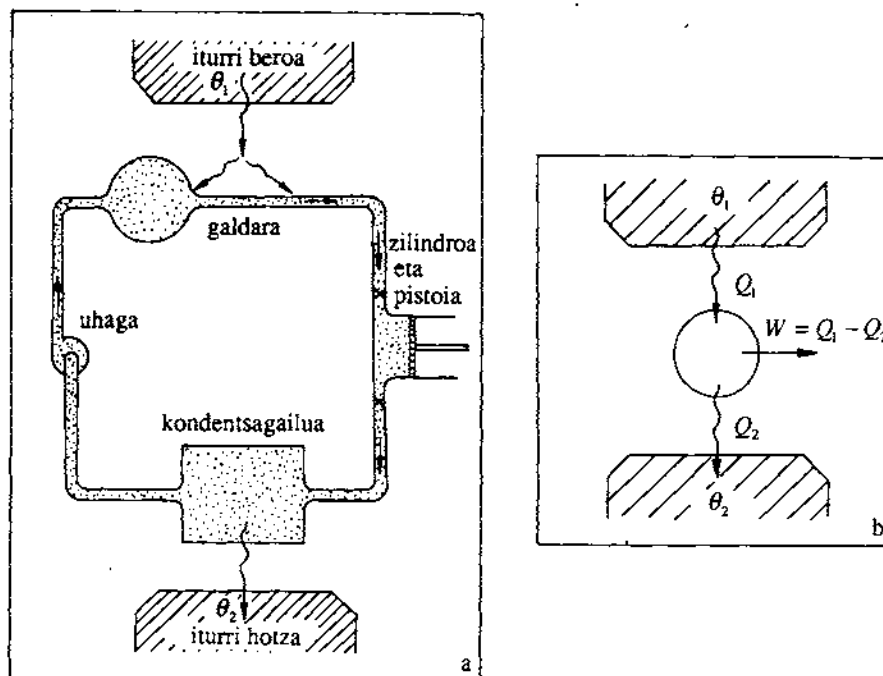
hots,

$$W = Q_1 - Q_2. \quad (27-6)$$

Alegia, ezin da iturri berotik emaniko bero guztia lan bihurtu. Asmo horren baliagarritasuna adierazteko, *motor termikoaren etekina* honako modu honetan definitu ohi da:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (27-7)$$

Beraz, Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuari jarraituz, eraiki daitezkeen motor termiko guztien etekina unitatea baino txikiagoa izanen dela atera dezakegu ondorioz, motorrak idealak izanik ere.



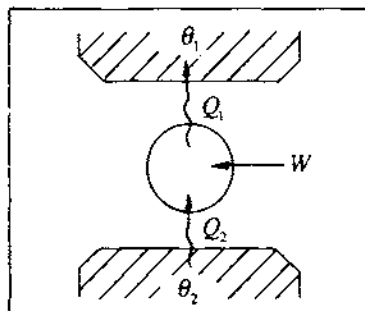
27.5. irudia. a) Zentral termikoaren eskema. b) Zikloaren erabilitako beroa eta lana.

Motor termikoa bi motatakoa izan daiteke, '*kanpo-errekuntzako motorra*' eta '*barne-errekuntzako motorra*'. Lehenengo motako motorrak zentral termiko gehienek erabiltzen dituzten lurrin-makinak dira, eta bigarren motakoak, gasolinakoak zein Diesel deiturikoak. Azal dezagun, adibide gisa, 27.5. irudian adierazi den zentral termikoaren funtzionamendua.

27.5.a. irudiko uhagak kondentsadorean dagoen ura galdarara pasarazten du, eta adiabatikoki konprimatzen du, galdararen presioa lortuz. Ondoren, presio berbera mantenduz, isobarikoki alegia, urak beroa xurgatzen du irakite-puntua lortuz eta lurrunduz. Berriro ere presio berbera mantenduz, lurrinak beroa xurgatzen du θ_1 temperatura lortu arte, eta zilindroa pasarazten da, bertan adiabatikoki espantsionatuz, eta, horrela, lana burutuz. Ondoren, lurrinak kondentsadorean θ_2 temperaturako iturri hotzari beroa ematen diolarik, isotermikoki eta isobarikoki kondentsatzen da, θ_2 temperaturako ur bihurturik eta, azkenik, hasierako egoerara itzulirik.

Lurrin-makina errealetan etekina unitatea baino txikiagoa izatea, turbulentziaren, marruskaduraren eta, oro har, funtzionamendu idealari oztupo egiten dioten beste fenomeno batzuen ondorioa dela pentsa liteke lehenengo unean, baina gauzak ez dira horrela. Aldiz, esperientzia oinarrituriko Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuaren arabera, Rankine zikloan, hots, etekina txikiagotzen duten fenomeno guztiak arbuia daitezkeeneko ziklo idealean ere, $Q_2 \neq 0$ izango da, eta ondorioz, etekina, unitatea baino txikiagoa.

Demagun, orain, tenperatura baxuko iturritik tenperatura altuko iturrira beroa ziklikoki pasarazi nahi dugula. Dakigunez, beroa berez pasa daiteke ziklikoki iturri berotik iturri hotzera, baina posible al da kanpoko eraginik gabe iturri hotzetik xurgaturiko beroa iturri berora pasaraztea? Beroa, berez, beti iturri berotik iturri hotzera pasaten denez, esperientziak erakusten digunez, kanpo-eraginik gabe beroa iturri hotzetik iturri berora pasatzea ez da posiblea gertatzen; hau da, beroa berez transferitzea delako berezko prozesua itzulezina da, naturan gertatzen diren berezko prozesu guztien antzera. Horrela, bada, emaitza esperimental honetan oinarriturik, Clausius-ek honelaxe enuntziatu zuen Termodinamikaren bigarren printzipioa: «Prozesu zikliko bati jarraituz eta lanik burutzeke beroa iturri hotzetik iturri berora pasarazten duen dispositiborik eraikitzea ezinezkoa da».



27.6. irudia. Hotsailuaren zikloaren adierazpen eskematikoa.

Hau da, iturri hotzetik iturri berora beroa etengabe pasa dadin, lana egin beharra dago. Sistemaren gainean lana burutuz prozesu zikliko hau gertarazten duen dispositiboari *hotsailua* deritzo, eta gertatzen den prozesua eskematikoki 27.6. irudian bezala adierazi ohi da, non θ_1 eta θ_2 , iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak diren, eta Q_1 , Q_2 eta W ziklo bakoitzean iturri beroari emaniko bero-kantitatea, iturri hotzetik xurgaturiko bero-kantitatea eta sistemaren gainean buruturiko lana, hurrenez hurren. Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arabera,

$$0 = Q_2 - Q_1 + W, \quad (27-8)$$

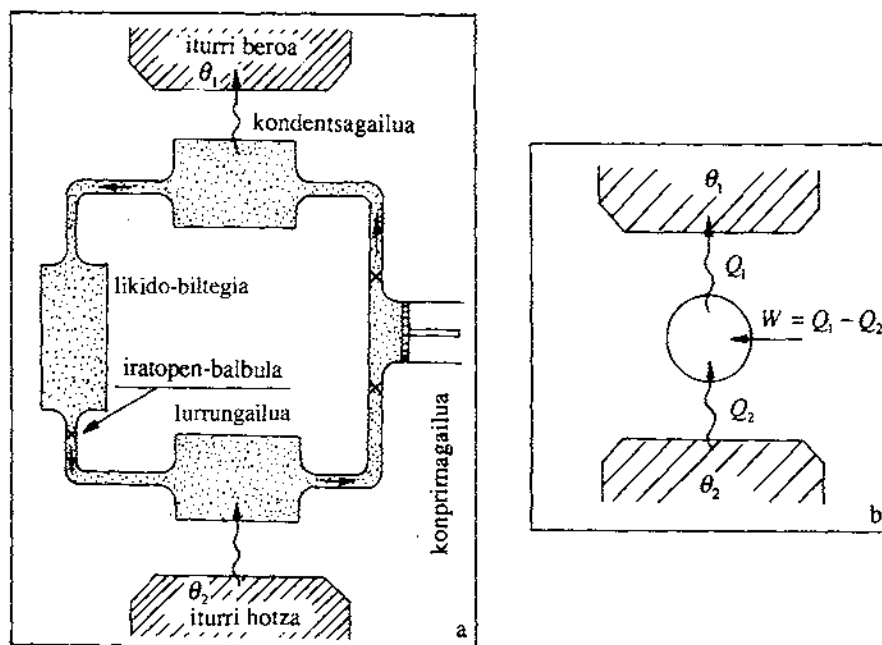
$$W = Q_1 - Q_2, \quad (27-9)$$

zeren ziklo bakoitzaren hasieran eta bukaeran sistemak barne-energia berbera baitu. Bestalde, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Clausius-en enuntziatuaren arabera, hauxe dugu halaberrez:

$$W \neq 0, \quad (27-10)$$

hots,

$$Q_1 \neq Q_2. \quad (27-11)$$



27.7. irudia. a) Hozkailu arruntaren eskema. b) Zikloan erabilitako beroa eta lana.

Azal dezagun, adibide gisa, 27.7. irudian adierazi den hozkailu arruntaren funtzionamendua. Irudiko likido-biltegian dagoen likidoa iratopen-balbula zehar pasatzen da, presioa eta tenperatura txikiagoturik; likido horri hozkarria deritzo. Hozkarria lurrungailuan dagoenean, iturri hotzetik Q_2 bero-kantitatea xurgatuz lurrundu egiten da, isobariko eta isotermikoki, eta horrela iturri hotzeko gaiak hoztu egiten dira. Ondoren, lurruna konprimagailura pasatzen da, bertan adiabatikoaki konprimatuz, θ_1 baino tenperatura handiagoa lortu arte. Azkenik, lurrunak kondentsadorean Q_1 bero-kantitatea ematen dio iturri-beroari, eta kondentsatu egiten da, presio handiko eta θ_1 tenperaturako likido bihurtuz, eta horrela, hasierako egoerara itzulirik. Etxeko hozkailuen kasuan, iturri hotza jakiek eta izotzak osatu ohi dute, eta iturri beroa, sukaldeko aireak.

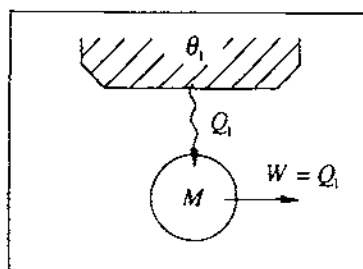
Bestalde, edozein hozkailuren *efizientzia-koefizientea* ondoko erlazio honi deitu ohi zaio:

$$\eta = \frac{Q_2}{W}, \quad (27-12)$$

hots,

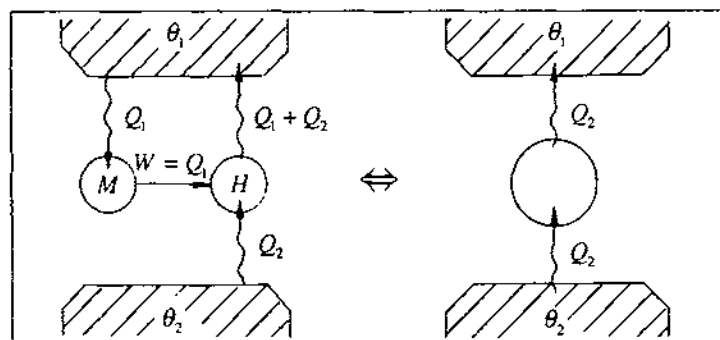
$$\eta = \frac{Q_1}{W} - 1. \quad (27-13)$$

Froga dezagun, azkenik, ezen Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en eta Clausius-en enuntziatuak baliokideak direla. Horretarako, demagun Kelvin-Planck-en enuntziatua ez dela betetzen, hau da, kontsidera dezagun enuntziatu hori betetzen ez duen 27.8. irudiko motor termikoa eraiki dezakegula.



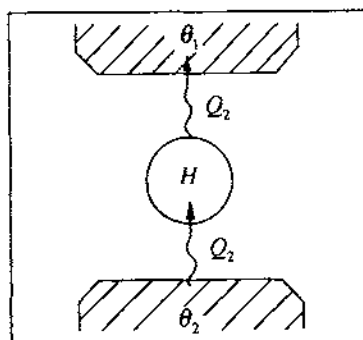
27.8. irudia. Motor termiko hipotetiko baten eskema.

Motor termiko horrek burutzen duen lana hozkailu bat funtzionarazteko erabiliko bagenu, 27.9. irudiko muntaia edukiko genuke eta ondorioz, guztira, motorrak eta hozkailuak osatutako sistemaren gainean lanik burutzeke Q_2 bero-kantitatea iturri hotzetik iturri berora pasarakiko lukeen dispositiboa eraikiko genuke, hau da, Clausius-en enuntziatua ere betetzen ez dela ondorioztatuko genuke. Beraz, Clausius-en enuntziatua betetzen baldin bada, Kelvin-Planck-ena ere beteko da.

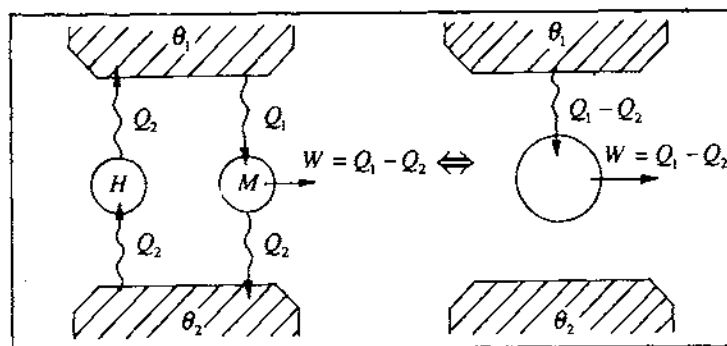


27.9. irudia. Aurreko irudiko motor termiko hipotetikoaren eta hozkailuaren arteko konexioaren eskema.

Suposa dezagun, orain, ez dela Clausius-en enuntziatua betetzen, hau da, enuntziatu hau betetzen ez duen 27.10. irudiko hozkailua eraiki dezakegula:



27.10. irudia. Clausius-en enuntziatua beteko ez lukeen hozkailu hipotetikoaren eskema.



27.11. irudia. Aurreko hozkailu hipotetikoaren eta motor termikoaren arteko konexioaren eskema.

Hozkailu hau iturri hotzari Q_2 bero-kantitatea ematen dion motor termiko batekin elkartuko bagenu, 27.11. irudiko muntaia edukiko genuke eta ondorioz, guztira, iturri berotik xurgaturiko bero guztia lan bilakatzen duen dispositiboa eraiki ahal izango genuke; hau da, Kelvin-Planck-en enuntziatua betetzen ez dela aterako genuke ondorioz. Beraz, Kelvin-Planck-en enuntziatua betetzen baldin bada, Clausius-ena ere beteko da.

Horrelatan, bada, Termodinamikaren bigarren printzipioaren bi enuntziatuok balioki-deak dira, frogatu nahi genuenez.

27.2. PROZESU ITZULGARRIAK ETA PROZESU ITZULEZINAK

Demagun sistema bat A hasierako egoeratik B bukaerako egoerara pasatzen dela. Sistema A egoeratik B egoerara pasatzen den era berean, kanpo-eraginik gabe B egoeratik A egoerara itzul baldin badaiteke, sistemak izan duen prozesua *itzulgarria* dela esan ohi da. Ostera, sistema kanpoko manipulaziorik gabe B egoeratik A egoerara ezin itzul baldin badaiteke, prozesua *itzulezina* dela esan ohi da.

Suposa dezagun, adibide gisa, hasierako aldiunean ontzi batean presio handiko gasa dugula, masa gabeko pistoi batez zapalduz. Berehalaxe, gasaren eta eguratsaren arteko presio-diferentziaren ondorioz, gasaren espantsio askea gertatuko da, oreka mekanikoa lortu arte, eta prozesuan zehar sistemak burutzen duen lan guztia bero bihurtuko da. Aldiz, Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuaren arabera, sistema ezin itzul daiteke berez hasierako egoerara xurgatzen duen bero guztia berrito lan bilakatuz. Beraz, azaldutako prozesu hau itzulezina da.

Bestalde, tenperatura desberdineko bi sistema kontaktuan jartzen baldin baditugu, sistema osoa isolatu bezain laster, beroa pasatuko da tenperatura altueneko sistematik tenperatura baxueneko sistemara, oreka termikoa lortu arte. Ostera, Termodinamikaren bigarren printzipioaren Clausius-en enuntziatuaren arabera, sistema osoa ezin itzul daiteke hasierako egoerara lanik burutzeke, beroa tenperatura baxueneko azpisistematik tenperatura altuenekora transferituz. Beraz, prozesu hau ere itzulezina da.

Era berean, urez beteriko ontzira gatza botatzen baldin badugu, berehala disolbatuko da, kontzentrazio-oreka lortu arte; baina, dakigunez, sistema ez da sekula berez hasierako egoerara itzuliko. Hau da, prozesu hori ere itzulezina da, itzulezintasun hori Termodinamikaren bigarren printzipioan oinarriturik frogatzea batere erraza izan ez arren.

Demagun, azkenik, korrante elektrikoa pasatzen ari deneko erresistentzia dugula. Dakigunez, prozesuan zehar beroa iraungitzen da; Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuaren arabera, berriz, sistema ezin itzul daiteke berez hasierako baldintzetara. Hau da, prozesu iraungikorrek ere itzulezinak dira.

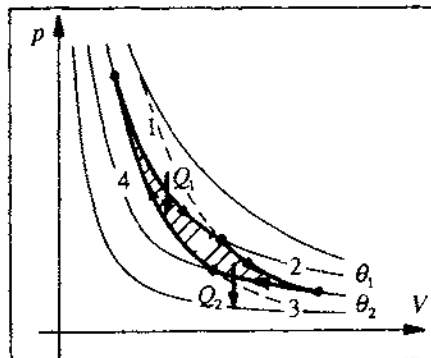
Horrela, bada, desoreka termodinamikoaren kausaz gertatzen diren prozesu guztiak eta prozesu iraungikorrek itzulezinak direla ondoriozta dezakegu. Beraz, prozesu itzulgarriak efektu iraungikorrek gertatzen ez direneko prozesu kuasiestatikoak dira, berauetan sistema oreka termodinamikodun infinitu egoeretatik pasatzen baita. Dena den, naturan gertatzen diren berezko prozesu errealek itzulezinak dira, eta prozesu itzulgarriak horien idealizazioak baino ez dira, masa puntuala, soka luzaezinak eta masa gabeko txirrikak, masa, soka eta txirrika errealean idealizazioak diren bezalaxe.

27.3. CARNOT-EN ZIKLOA

Biz θ_1 eta θ_2 temperaturako bero-iturrien artean ondoko lau prozesuez osaturiko zikloa:

1. Sistemak iturri berotik Q_1 bero-kantitatea hartu du isotermikoki. θ_1 temperatura konstante mantendurik.
2. Sistemaren temperatura adiabatikoki beheratu da, θ_2 balioa lortu arte.
3. Sistemak iturri hotzari Q_2 bero-kantitatea eman dio isotermikoki, θ_2 temperatura konstante mantendurik.
4. Sistemaren temperatura adiabatikoki igo da. θ_1 delako balioa lortu arte.

Prozesu adiabatikoak kuasiestatikoki gertatzen baldin badira, ziklo osoa itzulgarria izango da. Izan ere, hauxe da, froga daitekeenez, bi iturriren artean gerta daitekeen ziklo itzulgarri bakarra, eta *Carnot-en zikloa* deritzo (ikus 27.12. irudia). Halaber, ziklo itzulgarri honi jarraituz funtzionatzen duen motor termikoari *Carnot-en motorra* deritzo. Sistema gas ideala deneko kasu berezian, honelaxe adieraz daiteke grafikoki ziklo itzulgarri hori:

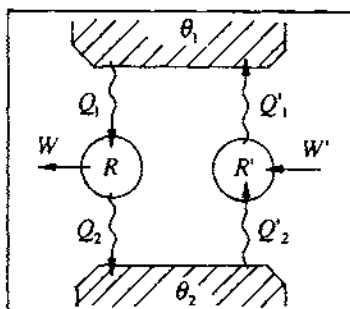


27.12. irudia. Carnot-en zikloaren adierazpena p - V diagraman.

Aipaturiko motor idealizatua Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832) ingeniari frantsiarrak proposatu zuen 1824. urtean, beraren izenaz ezaguna den ondoko teorema enuntziatuz: « θ_1 eta θ_2 tenperaturetako bero-iturrien artean ziklo itzulgarri bati jarraituz funtzionatzen duten motor guztiek etekin berbera dute, eta etekin hori bi bero-iturri horien artean lor daitekeen etekinik handiena da».

Teorema hau frogatzeko, demagun θ_1 eta θ_2 tenperaturako bero-iturrien artean funtzionatzen duten Carnot-en R eta R' motorrak ditugula. Dakigunez, Carnot-en motorrek ziklo itzulgarria burutuz funtzionatzen dute; beraz, motor termikoaren funtzioa zein hozkailuarena bete dezakete, prozesuaren noranzkoaren arabera.

Demagun, bada, lehenengoz, R dispositiboak motor termikoaren funtzioa eta R' dispositiboak hozkailuarena betetzen dutela (27.13. ird.).



27.13. irudia. Carnot-en zikloari jarraituz ari dira R motorra eta R' hozkailua.

R delakoak iturri berotik m ziklo burutu ondoren hartuko duen bero-kantitatea, R' delakoak n ziklo burutu ondoren itzuliko dio, hots:

$$mQ_1 = nQ'_1, \quad (27 - 14)$$

non Q_1 eta Q'_1 balioak R -k eta R' -k ziklo bakoitzean iturri beroarekin trukaturiko bero-kantitateak diren, hurrenez hurren. Horrela, R eta R' dispositiboak elkarturik, R -k m ziklo eta R' -k n ziklo burutu ondoren, guztira, bero-iturri berotik hartzen den bero-kantitatea nulua izango da, eta iturri hotzari ematen zaiona, $mQ_2 - nQ'_2$, hemen Q_2 balioa R -k iturri hotzari ematen dion bero-kantitatea, eta Q'_2 delakoa R -k iturri hotzetik hartzen duena izanik. Beraz,

$$mQ_2 - nQ'_2 > 0 \quad (27 - 15)$$

baldin bada, R -k m ziklo eta R' -k n ziklo burutu ondoren, guztira, sistemaren gainean burutuko den lan guztia bero bihurtuko da, eta berau iturri hotzera pasatuko da. Alderantziz,

$$mQ_2 - nQ'_2 < 0 \quad (27 - 16)$$

baldin balitz, guztira, sistemak iturri hotzetik hartuko lukeen bero-kantitate osoa lan bilakatuko litzateke, eta hori, dakigunez, ezinezkoa da. Ondorioz, Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuan oinarrituz,

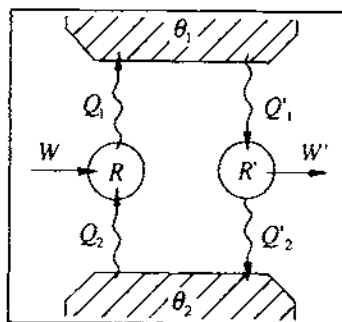
$$mQ_2 \geq nQ'_2 \quad (27 - 17)$$

izango dela baieztatu dezakegu.

Era berean, R dispositiboak hozkailuaren funtzioa eta R' delakoak motor termikoarena betetzen dutela emanik (ikus 27.14. irudia), Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatua oinarrituz,

$$mQ_2 \leq nQ'_2 \quad (27-18)$$

izango dela ondoriozta dezakegu.



27.14.irudia. Kasu honetan 27.13. irudikoaren alderantziz, R delakoa hozkailu modura eta R' motor modura ari dira.

Beraz,

$$mQ_1 = nQ'_1 \quad (27-19)$$

izanik, (27-17) eta (27-18) bete behar direnez,

$$mQ_2 = nQ'_2 \quad (27-20)$$

izango dugu. Hau da, Q_1 , Q_2 , Q'_1 eta Q'_2 direlako bero-kantitateek ondoko erlazioa beteko dute:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2} \quad (27-21)$$

Ondorioz, iturri berotik Q_1 bero-kantitatea xurgatzen duen eta iturri hotzari Q_2 bero-kantitatea ematen dion edozein motor termikoren etekina

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (27-22)$$

dela kontuan izanik, Carnot-en motor guztiak etekin berekoak direla, eta, horrela,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta_1, \theta_2) \quad (27-23)$$

dela ondoriozta dezakegu, frogatu nahi genuenez.

Demagun orain, berriro, R dispositiboa motor termikoaren funtzioa betetzen ari delarik, R' delakoa hozkailuaren funtzioa betetzen ari dela, eta ziklo bakoitzean R' -k iturri

beroari R -k iturri horretatik xurgatzen duen bero-kantitate berbera ematen diola. Orduan, Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatua oinarriturik,

$$Q_2 \geq Q'_2 \quad (27 - 24)$$

izango dela atara daiteke ondorioz.

Era berean, R dispositiboak hozkailuaren funtzioa betetzen duelarik R' delakoak motor termikoaren funtzioa betetzen duela emanik,

$$Q_1 = Q'_1 \quad (27 - 25)$$

denez,

$$Q_2 \leq Q'_2 \quad (27 - 26)$$

izango dela aurki daiteke.

Beraz, R eta R' Carnot-en motorrak baldin badira,

$$Q_1 = Q'_1 \quad (27 - 27)$$

izatekotan,

$$Q_2 = Q'_2 \quad (27 - 28)$$

izango da. Aldiz, R edozein motor eta R' Carnot-en motorra baldin badira,

$$Q_2 \geq Q'_2 \quad (27 - 29)$$

izango da, eta R Carnot-en motorra eta R' edozein motor izanez gero,

$$Q_2 \leq Q'_2 \quad (27 - 30)$$

Hau da, edozein motorren etekina

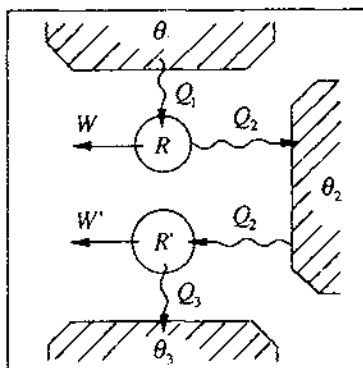
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (27 - 31)$$

denez gero, *Carnot-en motorra etekin handieneko motor termikoa* da, frogatu nahi genuenez. Horrela, bada, Carnot-en teorema frogaturik geratu da.

27.4. TENPERATURA-ESKALA TERMODINAMIKOA

Demagun θ_1 , θ_2 eta θ_3 tenperaturetako iturriak direla, eta Carnot-en R eta R' motorrek θ_1 eta θ_2 tenperaturako iturrien, eta θ_2 eta θ_3 tenperaturetako iturrien artean funtzionatzen dutela, hurrenez hurren (ikus 27.15. irudia). R' motorrak R delakoak θ_2 tenperaturako iturriari ematen dion bero-kantitate berbera xurgatzen baldin badu, θ_1 eta θ_3 tenperaturetako iturrien artean funtzionatzen duen Carnot-en ziklo bakoitzean iturri berotik xurgaturiko bero-kantitatearen eta iturri hotzari emanikoaren arteko erlazioak bero-iturrien tenperaturen menpekotasuna baino ez duela gogoan izanik, honako hau idatz dezakegu:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta_1, \theta_2), \quad \frac{Q_2}{Q_3} = f(\theta_2, \theta_3) \quad \text{eta} \quad \frac{Q_1}{Q_3} = f(\theta_1, \theta_3), \quad (27 - 32)$$



27.15. irudia. R motorra θ_1 eta θ_2 iturrien artean funtzionatzen ari da eta R' motorra θ_2 eta θ_3 iturrien artean.

non Q_1 , Q_2 eta Q_3 bero-kantitateek ohiturazko esangura duten (ikus 27.15. irudia). Hortaz, erlazio hau aurki dezakegu:

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{f(\theta_1, \theta_3)}{f(\theta_2, \theta_3)}, \quad (27 - 33)$$

zeina θ_3 tenperaturaren edozein baliotarako beteko den; ondorioz, honako hau bete beharko da,

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{\psi(\theta_1)}{\psi(\theta_2)}, \quad (27 - 34)$$

zeren orduan aurreko erlazioa modu honetan beteko baita:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\psi(\theta_1)}{\psi(\theta_2)}. \quad (27 - 35)$$

Honelatan, bada, aukeraturiko sistema-motaren menpekotasunik ez duen ondoko tenperatura-escala absolutua defini dezakegu:

$$T = C\psi(\theta). \quad (27 - 36)$$

Horrela definituriko tenperatura-escalari *tenperatura-escala termodinamikoa*, *Kelvin-en tenperatura-escala* edo *tenperatura-escala absolutua* deitu ohi zaio.

Ondorioz, bero-iturrien tenperatura absolutuen funtzioan, honako hau idatz dezakegu:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (27 - 37)$$

Bestalde, gas ideal bati Carnot-en zikloa jarraiarazten baldin badiogu, ondoko erlazioa betetzen dela aurkituko da:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad (27 - 38)$$

erraz frogar daitekeenez, θ_1 eta θ_2 direlakoak gas idealezko tenperatura-escala absolutuan iturri beroari eta iturri hotzari egokitzen zaizkien tenperaturak izanik.

Beraz, termodinamikaren tenperatura-escala absolutuan ere uraren puntu hirukoitzari 273,16 graduko balioa ematen baldin badiogu, gas idealen tenperatura-escala eta atal honetan definituriko tenperatura-escala termodinamikoa baliokideak direla aurkituko dugu. Aldiz, gas idealezko tenperatura-escalan P presiozko sistema baten tenperatura honela lor dezakegun bitartean,

$$\theta = 273,16 \lim_{P_1 \rightarrow 0} \left(\frac{P}{P_3} \right)_{V=\text{konst}}, \quad (27-39)$$

tenperatura-escala termodinamikoan edozein sistemaren tenperatura absolutua honelaxe aurki dezakegu:

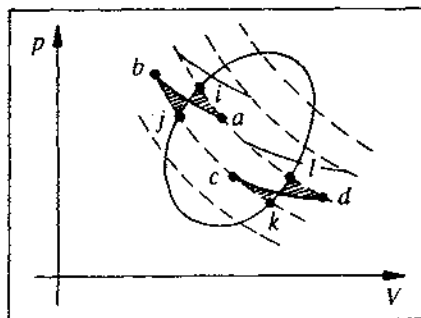
$$T = 273,16 \frac{Q}{Q_3}, \quad (27-40)$$

bertan Q eta Q_3 direlakoak T tenperaturako eta 273,16 graduko tenperaturako iturrien artean Carnot-en ziklo bati jarraituz trukutzen diren bero-kantitateak izanik.

Bestalde, motor termiko baten etekina modu honetan idatz dezakegu iturri beroaren eta iturri hotzaren Kelvin tenperaturen funtzioan:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (27-41)$$

eta, ondorioz, iturri hotzaren Kelvin tenperatura zero izango balitz, motor termikoaren etekina unitatea izango litzateke, iturri beroaren tenperaturaren edozein baliotarako. Beraz, Kelvin-Planck-en enuntziatua oinarriturik, tenperaturaren zero absolutua lorrezina dela ondoriozta dezakegu.



27.16. irudia. Prozesu zikliko itzulgarri baten azterketa. Lerro etenaz prozesu adiabatikoak adierazi dira.

27.5. CLAUSIUS-EN TEOREMA

Biz 27.16. irudian adierazi den prozesu zikliko eta itzulgarria. Erraz frogar daitekeenez, edozein bi lerro adiabatikok ezin dezakete inoiz ere elkar ebaki; beraz, irudian marra etenaz adierazi den lerro adiabatikoen sarea kontsidera dezakegu.

Bestalde, $i-j$ eta $i-a-b-j$ lerroek nahiz $k-l$ eta $k-c-d-l$ lerroek V ardatzarekin osatzen dituzten azalerak berdinak baldin badira, $i-j$ prozesu itzulgarrian eta $a-b$ prozesu isotermikoan zehar transferituriko bero-kantitateak berdinak izango dira. Beraz, T_1 eta T_2 direlakoak $a-b$ eta $c-d$ prozesu isotermikoak gertatzen direneko tenperaturak eta Q_1 eta Q_2 direlakoak $i-j$ eta $k-l$ prozesuetan zehar transferituriko bero-kantitateak izanik, $a-b-c-d$ delako zikloa Carnot-en zikloa dela kontuan hartuz, hauxe idatz dezakegu:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (27-42)$$

non Q_1 eta Q_2 transferituriko bero-kantitateen balioak diren (bero guztiak positibotzat harturik). Xurgaturiko beroa positibotzat eta askaturikoa negatibotzat hartuz gero, hauxe dugu:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (27-43)$$

Beraz, lerro adiabatiko guztien artean lerro isotermikoz osaturiko bikote egokiak aukeraturik, guztira ondokoa idatz dezakegu,

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{T_i} \right)_{IG} = 0, \quad (27-44)$$

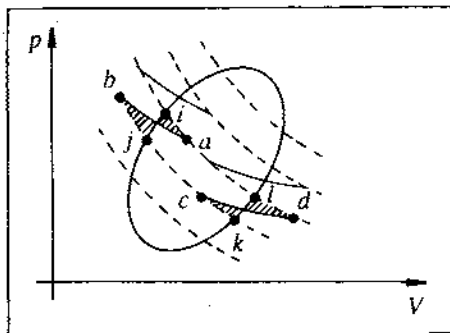
non N delakoak kontsideraturiko prozesu isotermikoen kopurua adierazten duen.

Hortaz, infinitu prozesu adiabatikoz eta infinitu prozesu isotermikoz osaturiko zikloa kontsideratuz, honako hauxe dugu:

$$\oint_{IG} \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (27-45)$$

non δQ delakoa prozesu isotermiko infinitesimal bakoitzean transferituriko bero-kantitatea den (positiboa beroa xurgatzen denean, eta negatiboa beroa askatzen denean), eta T delakoa sistemak duen tenperatura.

Adierazpen horri *Clausius-en teorema* deritzo. Hala ere, teorema hori jarraituriko prozesua ziklikoa izateaz gain itzulgarria ere badenean betetzen da soilik; hori adierazteko, bada, integral-ikurraren ondoan IG delako azpindizea ('itzulgarria') jarri ohi dugu.



27.17. irudia. Prozesu ziklikoa. Oraingoan $i-j$ eta $k-l$ prozesuak itzulezinak dira.

27.6. TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIPIOAREN FORMULAZIO MATEMATIKOA

Biz 27.17. irudian adierazitako prozesu ziklikoa. Prozesu hori itzulgarria baldin bada, aurreko atalean frogatu dugunez, hauxe dugu:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (27-46)$$

non Q_1 eta Q_2 , $i-j$ eta $k-l$ direlako prozesuetan transferituriko bero-kantitateak diren. Ordea, $i-j$ edo eta $k-l$ direlako prozesuak itzulezinak baldin badira, Termodinamikaren bigarren printzipioan oinarrituz,

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0 \quad (27-47)$$

izango da.

Horrela, bada, prozesu ziklikoa itzulgarria denean,

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{T_i} \right)_{IG} = 0 \quad (27-48)$$

delako berdintza betetzen den bitartean, prozesu ziklikoa itzulezina denean (hortik IE azpindizea),

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{T_i} \right)_{IE} < 0 \quad (27-49)$$

desberdintza betetzen da. Era berean, prozesu osoa infinitu prozesu infinitesimalez osaturik dagoela kontsideraturik, honako berdintza eta ezberdintza hauek betetzen dira:

$$\oint_{IG} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \text{eta} \quad \oint_{IE} \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (27-50)$$

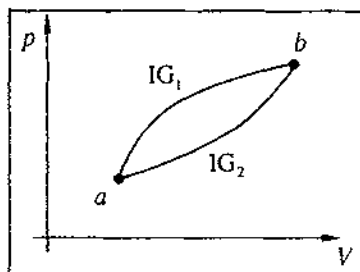
Beraz, edozein prozesu zikliko kontsideraturik, Termodinamikaren bigarren printzipioan oinarrituz hauxe idatz daiteke,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (27-51)$$

non δQ prozesu infinitesimal bakoitzean transferituriko bero-kantitatea den, eta T sistema-ren tenperatura absolutua. Azken adierazpen honi, *Termodinamikaren bigarren printzipioaren formulazio matematikoa* deitu ohi zaio.

27.7. ENTROPIA ETA ITZULEZINTASUNA

Kontsidera ditzagun 27.18. irudian adierazi diren sistema baten a eta b egoerak, eta a -tik b -ra pasatzeko IG_1 eta IG_2 prozesu itzulgarriak.



27.18. irudia. IG_1 eta IG_2 direlakoak, a eta b puntuen arteko bi prozesu itzulgarri desberdin dira.

$a - IG - b - IG_2 - a$ delako prozesua zikliko eta itzulgarria denez gero, Clausius-en teoremaren arabera honako hau dugu:

$$\int_{a(IG_1)}^b \frac{\delta Q}{T} + \int_{b(IG_2)}^a \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (27-52)$$

edo, integrazio-mugak aldatuz, bestela idatzita:

$$\int_{a(IG_1)}^b \frac{\delta Q}{T} = \int_{a(IG_2)}^b \frac{\delta Q}{T}. \quad (27-53)$$

Ondorioz, $\int_{a(IG)}^b \delta Q/T$ delako integralak ez du a -tik b -ra pasatzeko jarraituriko

prozesu itzulgarriaren menpekotasunik; horrelatan, bada, $\int_{a(IG)}^b \delta Q/T$ delako integralak integrazio-idearen menpekotasunik ez denez, hasierako eta bukaerako egoeren arabera izango da, hau da,

$$\int_{a(IG)}^b \frac{\delta Q}{T} = S_b - S_a, \quad (27-54)$$

non S_b eta S_a , aldagai termodinamikoen S funtzioak bukaerako eta hasierako egoeran hartzen-dituen balioak diren, hurrenez hurren. Honela definituriko S funtzioari *entropia* deritzen.

Beraz, sistemaren edozein bi egoeraren arteko *entropia-aldaketa*, hasierako egoeratik bukaerako egoerara edozein prozesu itzulgarri jarraituz pasatzean $\int_{a(IG)}^b \delta Q/T$ delako integralak hartzen duen balioa dugu. Bestalde, sistemaren egoera bati entropiaren balio arbitrario bat egokiaraziz, sistemaren edozein egoeraren entropia guztiz definiturik geratuko zaigu.

Aldiz, hasierako egoeratik bukaerako egoerara prozesu itzulezin bati jarraituz pasatzean $\int_{a(IE)}^b \delta Q/T$ delako integralak hartzen duen balioa ez da, oro har, hasierako eta bukaerako egoeren arteko entropia-aldaketa izango.

Bestalde, edozein prozesu infinitesimal itzulgarri jarraitu ondoren sistemak jasaten duen entropia-aldaketa infinitesimala ondokoa dugu:

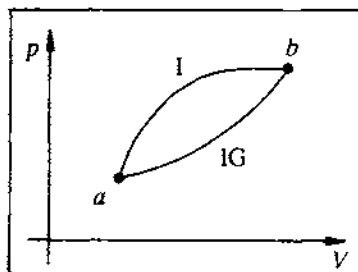
$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (27-55)$$

bertan δQ delakoa prozesu infinitesimal honetan zehar transferituriko bero-kantitatea, eta T delakoa sistemaren Kelvin temperatura, temperatura absolutua alegia, izanik. Horrelatan, bada, edozein prozesu infinitesimal itzulgarritan zehar transferituriko bero-kantitatea ondokoa dugu:

$$\delta Q = TdS. \quad (27-56)$$

27.8. ENTROPIAREN GEHIKUNTZAREN PRINTZPIOA

Kontsidera ditzagun 27.19. irudian adierazi diren a eta b egoerak, eta a egoeratik b egoerara pasatzeko bi prozesu desberdin: I prozesua, itzulgarria nahiz itzulezina, eta IG prozesu itzulgarria.



27.19. irudia. IG prozesua itzulgarria da. I prozesua itzulgarria zein itzulezina izan daiteke.

IG delako prozesua itzulgarria denez, prozesu honi jarraituz, sistema a egoeratik b egoerara pasatzen den era berean b egoeratik a egoerara ere pasa daiteke. Horrela, bada, sistemak $a-I-b-IG-a$ prozesu ziklikoa egin dezake.

Bestalde, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren formulazio matematikoa ondokoa dugu:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (27-57)$$

Beraz, hauex idatz daiteke:

$$\int_{a(I)}^b \frac{\delta Q}{T} + \int_{b(IG)}^a \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (27-58)$$

Gainera, IG delako prozesua itzulgarria denez, hauex dugu,

$$\int_{b(IG)}^a \frac{\delta Q}{T} = S_a - S_b, \quad (27-59)$$

eta ondorioz,

$$\int_{a(1)}^b \frac{\delta Q}{T} + S_a - S_b \leq 0. \quad (27-60)$$

hau da,

$$\int_{a(1)}^b \frac{\delta Q}{T} \leq S_b - S_a. \quad (27-61)$$

Horrela, bada, Clausius-en teorema gogoan izanik, I prozesua itzulgarria (IG) bada,

$$\int_{a(IG)}^b \frac{\delta Q}{T} = S_b - S_a \quad (27-62)$$

dela aurkituko dugu, espero izatekoa zenez. I prozesua itzulezina (IE) baldin bada, aldiz, beste hau izango dugu:

$$\int_{a(IE)}^b \frac{\delta Q}{T} < S_b - S_a. \quad (27-63)$$

Alegia, $\int_a^b \delta Q/T$ delako integralak balio txikiagoa hartzen du integrala kalkulatzen duguneko prozesua itzulezina denean, itzulgarria denean baino.

Kontuan har dezagun, orain, lehen kontsideraturiko sistemaz eta beronekin interakzionatzen duen sistema osagarriaz osaturiko sistema berria. Sistema berri hau isolatua denez, sistema osoak ez du berorik trukatzeko, eta, ondorioz, a egoeratik b egoerara pasatzeko haxe dugu.

$$0 \leq S_b - S_a. \quad (27-64)$$

non S_a eta S_b sistema berriaren hasierako egoeraren eta bukaerako egoeraren entropiak diren, hurrenez hurren.

Hau da, prozesu itzulgarri bati jarraitzean, edozein sistema isolaturen entropia ez da aldatzen; aldiz, prozesu itzulezin bati jarraitzean, edozein sistema isolaturen entropia hazi edo handitu egingo da. Ondorioz, *entropiaren gehikuntzaren printzipioa* enuntzia dezakegu, edozein sistema isolaturen entropia ez dela inoiz gutxituko, hots, sistema isolatua denean ondoko ezberdintza hau betetzen dela baieztaturik:

$$\Delta S \geq 0. \quad (27-65)$$

Azkenik, diogun, unibertso osoa sistema isolatutzat hartzen dela eta bertan gertatzen diren berezko prozesu guztiak itzulezinak direla; beraz, *unibertsoaren entropia gehituz doa etengabe*. Horrelatan, bada, entropiak har ditzakeen balioek goi-mugarik baldin balute, behin balio hori lortuz gero, ezin litzateke berezko prozesurik gerta eta, ondorioz, unibertsoaren heriotza entropikoa gertatuko litzateke.

28. gaia

Optika geometrikoa

28.1. ARGIA ETA OPTIKA

Gorputzen atomoak egoera kitzikatuan edo kitzikatugabeen egon daitezke. Lehenengotik bigarrenera pasatzean, erradiazio elektromagnetikoa igortzen dute, horren energia kitzikagabetzea energia-mailen arteko diferentzia izanik. Baina atomo eta molekuletan dauzkagun energia-mailak oso ugariak dira. Beraz, kitzikagabetzeaz lor dezakegun (energiari dagokionez) erradiazio elektromagnetiko desberdinen kopurua kontaezina da. Aurreko gai batean ikusitako uhin elektromagnetikoen espektroan ageri ziren uhinen sailkapena kontuan hartuz, gai honetan begiak ikus dezakeen zatiaz arduratuko gara, hau da, guk *argia* izenaz ezagutzen dugunaz. Are gehiago, uhin elektromagnetikoen uhin-propietateak ez ditugu kontuan edukiko gai honetan, zeren argia izpi modura, eta ez uhin modura, hedatzen dela suposatuko baitugu.

Defini dezagun, ba, Optika zer den: Optika izeneko argia eta berarekin loturik doazen fenomeno guztiak aztertzen dituen Fisikaren arloa da. Oro har, hiru ataletan sailka daiteke:

- a) *Optika geometrikoa*: argiak sorraraz ditzakeen eta ikus daitezkeen fenomeno optikoak aztertu ohi dira atal honetan. Izenak adierazten duenez, 'geometrikoki' aztertzen dira fenomeno horiek, argia izpi modura hedatzen dela suposatuz.
- b) *Optika fisikoa*: argiaren uhin-propietateak kontuan hartzen ditu, beraiekin loturik doazen fenomenoak aztertuz: interferentziak, difrakzioa eta polarizazioa, hain zuzen ere. Horrez gain, islapena eta errefrakzioa ere azter daitezke azpiatal honetan. Propietate horietaz, uhinen propietate orokorreari buruz 17. gaian esandakoa gogora dezakegu.
- c) *Optika kuantikoa*: Argiak materiarekin sorrarazitako fenomenoez arduratzen da.

Gai honetan Optika geometrikoaz arduratuko gara. Optika geometrikoaren arloan, ispiluak, lenteak eta beste tresna optiko ugari erabiliko ditugu, eta tresna horien bidez lor daitezkeen irudien azterketa izango dugu helburu nagusia. Besterik esan gabe, pasa gaiten lehendabizi argiaren ereduak aztertzea.

28.2. ARGIAREN EREDUAK

Betidanik, argiaren izaerak eztabaida biziak sortu ditu zientzialarien artean, Fisikaren historia irakurtzean argi ikus daitekeen bezala. Bi izan dira erabili diren argiaren ereduak:

- a) *Eredu gorpuzkularra*: Eredu honetan, argia partikulak edo zatika hedatzen dela kontsideratzen da, izugarrizko abiaduraz. Orduan, argi-iturria partikula piloa jaurtitzen egongo litzateke etengabe. Horregatik, eredu hau 'eredu balistiko' izenez ere ezagutzen da. Eredu honen bitartez, argiak sorrarazten duen zenbait fenomeno azal daitezke, efektu fotoelektrikoa, adibidez, baina ez beste batzuk, hala nola interferentziak, difrakzioa eta abar. Eredu honetan, argiari Newton-en legeak aplikatzen zaizkio. Argi-partikula horiei *fotoiak* deritzegu.
- b) *Eredu ondulatorioa*: Eredu honetan, argia uhin bat besterik ez da, uhin elektromagnetikoa, hain zuzen ere. Antzinatek ezagunak ziren argiak sortutako islapen eta errefrakzio fenomenoak, eta uhin-teoriaz baliatuz, adierazpen oso erraza zuten fenomeno horiek. Beraz, ez da ulergaitza hainbat eta hainbat zientzialari eredu honen defenditzaile izatea. Baina baziren beste fenomeno batzuk, eredu honek esplikatzen ez zituenak, eta eredu gorpuzkularrean azalpen erraza zutenak. Eredu ondulatorioan finkatuz, argi-iturri batek sorraraziko dituen uhinak gainazal esferiko zentrokide modura urrunduko dira erdigunetik, ingurune homogeen eta isotropoetan behintzat.

Esan dugunez, eredu bietan zituzten beren defenditzaileak. Newton-en teoria gorpuzkularrak, Mekanikaren taldeko legeak eta erakurpen-indarrak erabiliz, ederto argitzen zituen islapen eta errefrakzio-fenomenoak, baina azken honen kasuan, argi-partikulak beiran edo uretan abiadura handiagoz higitu beharko luke airean baino, fenomeno guztiz azaltzeko. Ordea, 1850. urtean, Foucault-ek argiak uretan duen abiadura neurtu zuen, airean baino txikiagoa zela ikusiz. Beraz, kasu horretan teoria gorpuzkularrak ez zuen izaera errealik. Horrekin batera, teoria ondulatorioa indar handiagoz suspertu zen. Konkretuki, 1860. urtetik aurrera Young-ek eta Fresnel-ek argiarekin egin zituzten esperimendu ondulatorioen laguntzan Maxwell-en teoriak eta Hertz-en saiakuntzak loturiko emaitzak etorri ziren, argia uhin elektromagnetikoa zela identifikatu ondoren. Baina, bestalde, uhin elektromagnetiko horien ekoizpena lortzeaz gain, Hertz-ek uhin-teoriaz esplika ezina zen beste fenomeno bat ere nabaritu zuen, efektu fotoelektrikoa hain zuzen. 1905. urtean Einstein-ek frogatu zuenez, fenomeno hori argia partikula modura onartuz azal zitekeen soilik (lan honegatik jaso zuen Nobel saria 1921. urtean). Gainera, partikula bakoitzaren energia, uhin-propietate batekin loturik joango litzateke, maiztasunarekin, era honetan hain zuzen:

$$E = h\nu, \quad (28 - 1)$$

non $E = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J/s delakoa *Planck-en konstantea* eta ν delakoa partikula horri legokiokeen uhin baten maiztasuna diren.

Baina, nola lot zitezkeen eredu biak batera, garai horretan ezaguna zen Fisika klasikoaren arloan? Egia esateko, beste hamabost urte itxaron behar izan zuten zientzialariek (1920. urtera arte hain zuzen) nahaste horri irtenbidea eman arte. Urte horretan, Davisson-ek eta Germer-ek elektroien difrakzioa aurkitu zuten. Aurkikuntza hori izan zen benetako giltza ez soilik eredu biak batean ados ipintzeko, baizik eta teoria kuantikoaren lehenengo urratsak finkatzeko ere, de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Dirac eta beste zientzialari

batzuen eskuetatik. Elektroiak, denek zekiten hori, partikulak ziren. Beraz, nola sorraz zitzaketen uhinei soilik zegozkien difrakzio-fenomenoak? L. V. de Broglie izan zen arazo horri irteera eman ziona. Beraren iritziz, higitzen ari den edozein partikula batekin loturik,

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (28 - 2)$$

uhin-luzerako uhin bat higitzen ari da, p hori partikulak duen momentu lineala izanik. Orduan, partikula horrek materiarekin elkarrekintza bat duenean, partikula gisako portaera izango luke, eta berari Mekanikaren legeak aplikatu geniezazkioke. Aldiz, hedatzen ari den bitartean, partikulek berekin daramatzaten uhinek difrakzio-fenomenoak sortuko lituzkete, teoria ondulatorioan adierazten denez.

Galdera honi amaiera ematekotan, argiari buruz hauxe esango genuke: hedatzen diharduen bitartean, uhin modura kontsideratuko dugu (islapien eta errefrakzio-prozesuetan Huygens-en printzipioa aplikatuz, eta interferentzia eta difrakzio-prozesuetan, uhinen baturaren legeak), eta materiarekin elkarrekintzak dituenan, partikula modura, Mekanika Erlatibistaren ekuazioak eta legeak aplikatuz.

28.3. ARGIZPIAK. OPTIKA GEOMETRIKOA.

ARGIAREN ABIADURA ETA ERREFRAKZIO-INDIZEA

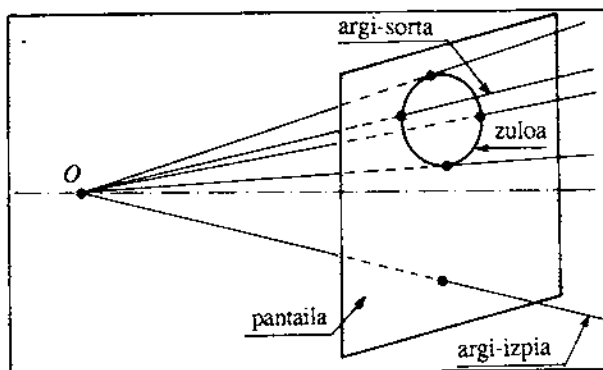
Lehenago aipatu dugunez, urte askotan argiaren eredu gorpuzkularra onartu zen, batez ere garai hartako tresneria optikoarekin fenomeno ondulatorioak nabaritzen ez zirelako. Gainera, geroago ikusi zenez, nahiz eta eredu ondulatorioa bete ere, uhinen uhin-luzera soinu-uhinena baino askoz txikiagoa zen (edota maiztasuna askoz handiagoa), eta horregatik ez ziren aipaturiko fenomeno ondulatorioak bereizten eta hautematen.

Eredu gorpuzkularrean finkatuz, Newton-en talken legeak eta inguruneek partikulen ganean ziztuzten erakarpen-indarrak kontuan harturik, aski ongi esplika zitezkeen argiaren islapena eta errefrakzioa. Beraz, gai honetan islapen- eta errefrakzio-fenomenoak baino ikusiko ez ditugunez, gure helbururako nahikoa izango da eredu gorpuzkularra erabiltzea (hobe esango genuke, eredu sasigorpuzkularra, zeren argiak segituko lukeen bidez arturatuko baikara, eta ez argiak, partikula modura kontsideratuz, materiarekin izango duen harremanaz).

Defini ditzagun, orduan, gai honetan erabiliko ditugun zenbait kontzeptu:

Argi-izpia. Aipaturiko argi-partikulek beren hedapenean daramatzaten ibilbideei *argi-izpiak* deritzegu. Definizio honetatik ez da atera behar argi-izpiak zuzena izan beharko duenik. Ingurune homogeneo eta isotropo batean izan ezik, oro har, ibilbidea lerro norabidez hautsia edo kurbatua izango da.

Hurbilketa geometriko bat egiteko asmotan, suposa dezagun ingurunea homogeneoa eta isotropoa dela. Beraz, bertan argi-izpiek ibilbide zuzenak beteko dituzte. Demagun O puntuan argi-puntu igorle bat dugula, eta beraren aurrean pantaila opako bat zulo zirkular batekin. Baldintza horietan, 28.1. irudian ikus daitekeenez, O puntuak eta zuloak argi-kono bat eratzen dute, zeini *argi-sorta* deritzogun. Zuloaren erradioak zerorantz doanean, argi-sorta hori *argi-izpi* bihurtzen da.



28.1. irudia. O argi-iturritik sorturiko argi-sortak eta argi-izpiak.

Argiaren propietate ondulatorioak kontuan eduki izan bagenitu, zirkuluaren ertzetan difrakzio-fenomenoak aztertu beharko genituzkeen (eta hori da benetan gertatzen dena), baina gai honetan ez gara horretaz arduratuko.

Argiaren abiadura eta errefrakzio-indizea. Dakigunez, argiak edozein ingurunean duen abiadura izugarria da. Gainera, hedatu ahal izateko ez du behar inolako ingurune materialik. Gaur egun, espazio hutsean argiak duen abiadura nahiko ongi neurtuta dago. Hain zuzen, c ikurraz adierazi ohi da, eta beraren balioa aldaezin fisiko oso garrantzitsua da:

$$c = (2,997930 \pm 0,000003) \cdot 10^8 \text{ m/s.} \quad (28 - 3)$$

Kalkulu gehienetarako, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ balioa erabiltzen da. Abiadura hori, naturan gertatzen diren partikulen eta seinaleen abiaduren goi-muga da. Beste ingurune asko erabiliko ditugunez, interesgarria gertatuko zaigu, argiak ingurune desberdinetan dituen abiaduraren (v) eta hutsean duen abiaduraren (c) arteko erlazio bat definitzea, *errefrakzio-indizea* hain zuzen. Honelaxe kalkulatzen da:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (28 - 4)$$

Beraz, $c \geq v$ denez, $n \geq 1$ izango da.

Ingurune material batean argiaren abiadura puntu eta norabide guztietan berdina bada, ingurunea *homogeneoa* eta *isotropoa* dela esan ohi da. Norabidearekin aldatuz badoa, *anisotropoa*, eta puntuz puntu aldatuz badoa, *heterogeneoa*. Horrez gain, errefrakzio-indizeak argiaren uhin-luzeraren menpekotasuna du, hots:

$$n = n(\lambda). \quad (28 - 5)$$

Beraz, ez dira era berean errefraktatuko, adibidez, argi-izpi gorria eta urdina. Fenomeno horri *sakabanaketa kromatikoa* deritzo. Gai honetan sakabanaketa hori aztertuko ez dugunez, hemendik aurrera ingurune baten errefrakzio-indizeari buruz hitz egiterakoan, uhin-luzera konkretu baterako definituko dugu, edota argi monokromatiko baterako.

28.4. BIDE OPTIKOA ETA FERMAT-EN PRINTZIPIOA

Ikusi berri dugunez, argiak ez du abiadura berbera ingurune guztietan. Hurrengorako me-rezi du, beraz, *bide optiko* izenaz ezaguna den magnitudea definitzea: preseski, n errefrakzio-indizea duen ingurune batean, argi-izpi batek s luzera duen ibilbide bat egiten badu, luzera geometriko horri dagokion bide optikoa, hauxe da:

$$[d] = ns. \quad (28 - 6)$$

Argi-izpiak zeharkatzen dituen inguruneak desberdinak badira (i -garren inguruneak n_i errefrakzio-indizea badu eta bertan s_i luzerako ibilbidea egiten badu), egindako bide osoari, ondoko bide optikoa dagokio:

$$[d] = \sum_i n_i s_i. \quad (28 - 7)$$

Azkenez, ingurunea heterogeneo eta jarraitua bada, puntuz puntuko errefrakzio-indizearen aldaketarekin, batukaria integral bihurtuko da, eta bide optikoa honelaxe adieraziko dugu:

$$[d] = \int_A^B n ds = c \int_A^B \frac{ds}{v} = c \int_{t_A}^{t_B} dt = c(t_B - t_A) = c\Delta t. \quad (28 - 8)$$

Adierazpen honetatik datorkigu bide optikoaren esangura fisikoa: «*bide optikoa deritzona, argiak errealtatean A puntutik B puntura pasatzean hartuko lukeen denbora-tartean hutsean egingo lukeen ibilbidearen luzera da*». Bestalde, zeinuen hitzarmen hau hartu ohi da: ibilbidea argiaren hedapenaren noranzkoan neurtzen bada, bide optikoa positibotzat jotzen da; bestela, negatibotzat.

Bide optikoaren definizioan oinarrituz, oso lagungarri izango zaigun printzipio bat ikusiko dugu, Fermat-en printzipioa hain zuzen. Printzipio hau extremalen printzipio bat da. Extremalen printzipioak oso onuragarriak izan dira Fisikaren historian zehar, naturan gertatzen diren jazoera batzuei adierazpen bat emateko (Maupertuis-en ekintza minimoa, oreka-energia minimoa, etab.). Batzuetan, erabiltzen den funtzioaren extremala minimoa dela ikus daiteke, eta besteetan, maximoa.

Optikan ere, antzeko gauza bat ikusiko dugu: *Fermat-en printzipioa*. Beronek hauxe dio: «*Argiak bi punturen artean segitzen duen ibilbide errealean neurturiko bide optikoa minimoa da, beraren inguruan nahi dugun bezain hurbil dagoen beste edozein ibilbide geometriko batean neurturiko bide optikoarekin konparatuz*». Beste era batean adieraziz, «*bi puntu horien artean, bide errealetik argiak hartzen duen denbora-tartea minimoa da*».

Matematikoki, era honetan adieraz daiteke Fermat-en printzipioa,

$$\delta[d] = \delta \int_A^B n ds = 0, \quad (28 - 9)$$

non δ horrek, bide optikoaren aldaketa infinitesimala adierazten duen.

Ibilbide erreala kalkulatzeko, kontsidera ditzagun 28.2. irudian adierazitako ibilbide hipotetiko biak. Hain zuzen, l ibilbidetik $l + \delta l$ ibilbidera pasatzeko, parametroen lehenengo ordenako aldaketa infinitesimalak onartuko ditugu. Beraz, Fermat-en printzipioaren arabera, l delakoa ibilbide optiko erreala bada, ibilbide bietan zehar, bide optikoak geldikor iraungo

Suposa dezagun orain, argiak A eta B puntuen artean duen ibilbidea, AIB , erreala dela, eta APB bidea AIB ibilbidearen inguruan nahin dugun bezain hurbil dagoen beste ibilbide hipotetiko bat dela (hau da, AIB ibilbideari lehenengo ordenako bariazio infinitesimal bat aplikatzen diogu). Fermat-en printzipioaren arabera, lehenengo ibilbidetik bigarrenera pasatzean, bide optikoaren bariazioa nulua izango da.

Ikus daitekeenez, bide optiko osoa honelaxe idatziko dugu:

$$[d] = n\overline{AI} + n'\overline{IB}. \quad (28-10)$$

Edo bektorialki idatzirik,

$$[d] = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{AI} + n'\mathbf{u}' \cdot \mathbf{IB}. \quad (28-11)$$

Ibilbide bariatutik:

$$\begin{aligned} [d] + \delta[d] &= n\overline{AP} + n'\overline{PB} = n(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{AI} + \mathbf{IP}) + n'(\mathbf{u}' + \delta\mathbf{u}') \cdot (-\mathbf{IP} + \mathbf{IB}) = \\ &= n\mathbf{u} \cdot \mathbf{AI} + n'\mathbf{u}' \cdot \mathbf{IB} + n\mathbf{u} \cdot \mathbf{IP} - n'\mathbf{u}' \cdot \mathbf{IP} = [d] + (n\mathbf{u} - n'\mathbf{u}') \cdot \mathbf{IP}. \end{aligned} \quad (28-12)$$

zeren $\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{AI} = \delta\mathbf{u}' \cdot \mathbf{IB} = 0$ baitira, bektore horiek elkarren perpendikularrak baitira; eta bestetik $\delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{IP}$ eta $\delta\mathbf{u}' \cdot \mathbf{IP}$ lehenengo ordenako diferentzialen biderkaketak direnez, nulutzat hartzen dira. Beraz, bide optikoak jasaten duen bariazioa, hauxe da:

$$\delta[d] = (n\mathbf{u} - n'\mathbf{u}') \cdot \mathbf{IP}, \quad (28-13)$$

eta Fermat-en printzipioaren arabera, bariazio horrek nulua izan behar du:

$$\delta[d] = (n\mathbf{u} - n'\mathbf{u}') \cdot \mathbf{IP} = 0. \quad (28-14)$$

Goian esan dugunez, $\mathbf{IP}$ lehenengo ordenako bektore diferentziala da, baina ez nulua. (28-12) ekuazioan, faktore bietatik ez bata ez bestea ez dira nuluak. Beraz, biderkadura nulua izan dadin, biek elkarren perpendikularrak izan beharko dute. Baina $\mathbf{IP}$ bektorea, bigarren ordenako diferentzialak izan ezik, I puntuan S gainazalaren tangentea den planoan dagoela onar daiteke. Ondorioz, $(n\mathbf{u} - n'\mathbf{u}')$ bektorea, bektore horren perpendikularra dena, I puntuan gainazalaren perpendikularra den norabidean egongo da, $\mathbf{u}_N$ bertsorearenean hain zuzen:

$$n\mathbf{u} - n'\mathbf{u}' = k\mathbf{u}_N, \quad (28-15)$$

non k delakoa konstante bat den. Ekuazio horren esangura ondoko legea da:

II) Izpi erasotzailea, errefraktatua eta eraso-puntuko normala plano berean daude, eraso-planoa deritzon planoan hain zuzen.

Biderka dezagun bektorialki (28-15) ekuazioa $\mathbf{u}_N$ bertsoreaz:

$$(n\mathbf{u} - n'\mathbf{u}') \times \mathbf{u}_N = k\mathbf{u}_N \times \mathbf{u}_N = 0, \quad (28-16)$$

edota

$$n\mathbf{u} \times \mathbf{u}_N = n'\mathbf{u}' \times \mathbf{u}_N = 0. \quad (28-17)$$

Horien moduluak hartuz,

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon', \quad (28-18)$$

eta hauxe da, hain zuzen ere, *Snell-en errefrakzioaren legea*:

III) *Inguruneen errefrakzio-indizeen eta islapen- eta errefrakzio-angeluen arteko erlazioa (28-18) adierazpenekoa da.*

(27-18) ekuazioaren kasu berezi bat, islapen hutsa izango litzateke. Islapenean, n eta n' berdinak dira. Ondorioz, hauxe lortuko dugu:

IV) *Islapenaren legea: Islapenean islapen- eta errefrakzio-angeluak elkarren berdinak dira, hots,*

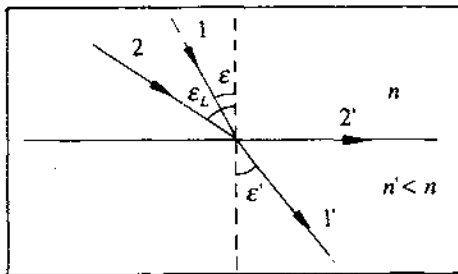
$$\varepsilon = \varepsilon'. \quad (28-19)$$

Atal honi dagokion azalpenarekin nolabait bukatzeko, esan dezagun, $\overline{AIB}$ ibilbidea erreala bada. $\overline{AIB}$ ibilbidea ere erreala dela frogatu daitekeela erraz. Horrek ondokoa esan nahi du:

V) *Argi-izpien ibilbideak ingurune desberdinetan zehar itzulgarriak dira.*

28.6. ISLAPEN OSOA

Ikusitako adierazpenak kontuan hartuz, Snell-en legearen arabera, $n' < n$ denean $\varepsilon' > \varepsilon$ izango da. Beraz, errefraktatzen den argi-izpia, craso-puntuko normalerantz hurbilduko da. Aldiz, $n' < n$ denean, $\varepsilon' > \varepsilon$ izango da eta argi-izpia normal horretatik aldenduko da. Argi dagoenez, errefrakzio-angelua, ε' delakoa, angelu zuzenaren baliora heltzen denean, ez da bigarren ingurunera argi-izpirik pasatuko, zeren izpi guztiak gainazalaren ukitzailaren norabideaz irtengo baitira.



28.4. irudia. Muga-angelua lortzeko (2 izpia), $\varepsilon' = 90^\circ$ egin behar dugu (2' izpia).

Kalkula dezagun horrelako errefrakzio-angelua sorrarazten duen craso-angelua, ε_L deituko duguna. Horretarako, (28-18) ekuazioan $\varepsilon' = 90^\circ$ egin beharko dugu. Ondorioz,

$$n \sin \varepsilon_L = n' \sin 90^\circ = n', \quad (28-20)$$

alegia,

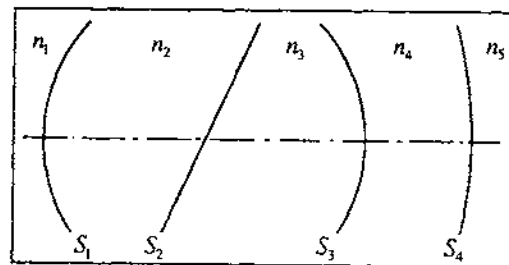
$$\sin \varepsilon_L = \frac{n'}{n}. \quad (28-21)$$

Eraso-angelu horri *muga-angelua* deritzogu. Ikus daitekeenez, horrelakoa gerta dadin, $n' < n$ izan behar da.

$\varepsilon > \varepsilon_i$ angeluetarako, argi-izpiek ez dute errefrakziorik pairatuko, eta guztiak islatu egingo dira. Fenomeno honi *guztizko islapena* deritzo, eta bertan, argi-izpiek islapenaren legea segituko dute. Horixe da, hain zuzen, fibra optiko famatuaren barnean gertatzen dena.

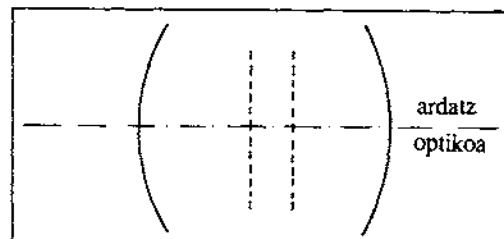
28.7. SISTEMA OPTIKOAK, DIOPTRIOAK ETA KATOPTRIOAK

Normalean, Optikan aztertzen diren sistemek ez dituzte soilik kontsideratzen gainazal bakar batez banandurik dauden bi ingurunez osaturiko sistemak. Azken hauek kasu berezi sinpleenak dira. Edozein tresna optiko hartuz, han agertzen diren ingurune eta gainazalak ugariak dira. Orokorki, ingurune ugari eta desberdinez osaturiko sistemak, bata bestetarik gainazalez banandurik daudelarik, *sistema optikoak* deritze. Aipaturiko gainazalak errefraktanteak badira, *dioptrioak* izena ematen zaie, eta islatzaileak badira, *katoptrioak*. Beraz, sistema batean agertzen diren gainazal guztiak errefraktanteak balira, *sistema dioptrikoa* izango genuke, eta guztiak islatzaileak balira, *sistema katoptrikoa*. Mota bietako gainazalak dituzten sistema optikoei *sistema katadioptrikoak* deritze.



28.5. irudia. Biraketa-gainazal desberdinak, errefrakzio-indize desberdineko inguruneak bananduz.

Optikan erabiltzen diren sistema ugariak biraketa-gainazalez osaturikoak dira, eta horrez gain, gainazal horien zentroak lerro zuzen berean egon ohi dira. Sistema horiei *sistema zentratuak* deritze. Besterik ez badiogu, hemendik aurrera sistema zentratuak aztertuko ditugu. Hauexek, sinbolikoki, 28.6. irudian ikus daitekeen modura adierazten dira, lerro etenen artean nahi dugun bezainbeste biraketa-gainazal banantzaile daudela suposatuz. Gainazal guztien zentroen leku geometrikoari, hau da, lehen aipaturiko lerro zuzenari, *ardatz optikoa* deritzo.

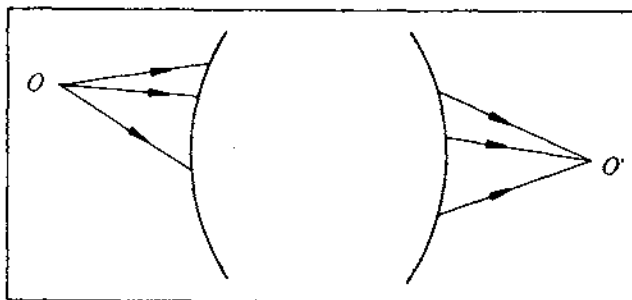


28.6. irudia. Sistema zentratuaren ardatz optikoa.

28.8. OBJEKTUAK ETA IRUDIAK. SISTEMA ESTIGMATIKOAK

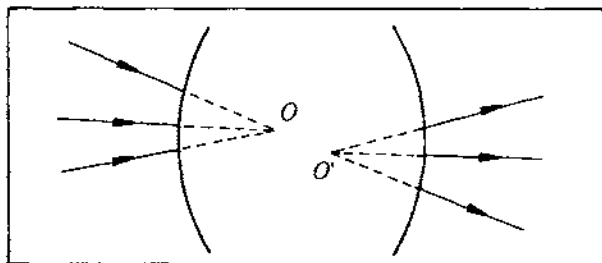
Demagun edozein sistema optiko dugula, eta bertan bi puntu: O eta O' (ikus 28.7. irudia). O puntutik pasatzen diren argi-izpi guztiak, sistema zeharkatu ondoren, O' puntutik pasatzen badira (argi-izpi berak edo beraien luzapenak), O eta O' puntuen bikotearekiko sistema optikoa *estigmatikoa* dela esango dugu, eta O eta O' puntuak *konjokatuak* direla.

Irudian, O puntuari *objektu erreala* deritzogu, eta O' delakoari, *irudi erreala*, zeren izpi erasotzaileak benetan pasatzen baitira O puntutik, eta sistematik irteten direnak, benetan pasatzen baitira O' puntutik.



28.7. irudia. O eta O' puntuak konjokatuak izanik, O -tik pasatzen diren argi-izpiak, sistema estigmatikoa zeharkatu ondoren, O' -tik puntutik pasatuko dira.

Baina 28.8. irudian ikus dezakeguna gerta daiteke: izpi erasotzaileak ez dira errealki biltzen puntu konkretu batean (bai, ordea, beraien luzapenak). Kasu horretan objektu eta irudi direlako horiek ez lirateke errealak izango, *birtualak* edo *alegiazkoak* baizik. Argi dagoenez, beste bi kasu aipa daitezke: objektu erreala baten irudia alegiazkoa denean, eta alderantzizkoa dena, alegiazko objektu baten irudia erreala denean.



28.8. irudia. Argi-izpien luzapenak O eta O' puntuetan biltzen dira. Alegiazko irudiak ditugu.

Sarrerako gainazaletik ezkerrean dagoen espazioaldeari, *objektu-espazio erreala* deritzo, eta irteerako gainazaletik eskuinerantz dagoenari *irudi-espazio erreala*.

Aipaturiko kasu guztietan, sistema optikoa estigmatikoa dela suposatu dugu, hau da, objektu-espazioko puntu bakoitzari, irudi-espazioko puntu bakar bat dagokiola. Baina sistema errealetan ez da hori gertatzen, eta puntu bati dagokion irudia ez da izaten puntu bakar bat, eta ondorioz, irudia ez da zehatza izango, nahasia baizik.

Sistema errealak aztertzea ez da erraza izaten. Horregatik, gu sistema idealak aztertzen saiatuko gara hurrengoan, edota, sistema errealak ukitzen baldin baditugu, baldintza gogor batzuk ezarriko dizkiegu. Gainera, azterketa errazagoa izan dadin, biraketa-sistema optiko zentratuak aztertzea izango da gure helburua. Beraz, gai honetan erabiliko dugun hurbilketan, gure sistemak, ideala izango denez, estigmatikoa izan beharko du, eta, horrez gain, ardatz optikoaren perpendikularra den objektu bati ardatz optikoaren perpendikularra den irudi bat legokioke; gainera, objektuek eta irudiek antzekoak izan behar dute, edozein irudi konjokaturako antzekotasun-koefizientea gorderik.

Ikus daitekeenez, sistema optikoa perfektua izan dadin, aipatu den baldintzarik garrantzitsuena estigmatikoa izatea da; eta lehen aipaturiko puntuak, O eta O' direlakoak, konjokatuak izan daitezen, OO' bide optikoak berdina izan behar du O puntutik O' puntura doan edozein argi-izpitarako, Fermat-en printzipioa aplikatuz erraz lor daitekeenez. Horixe da estigmatismorako baldintzarik orokorrena.

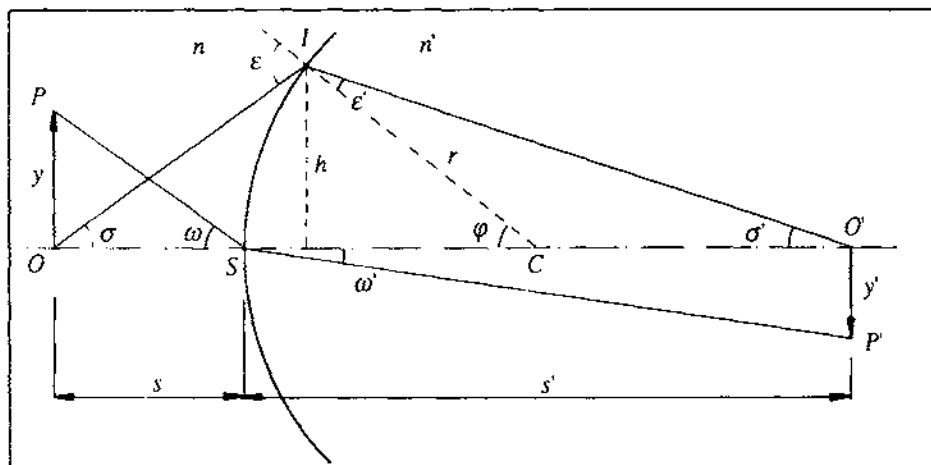
Esandakoa alderantziz aurkeztuz, diogun ezen sarritan, Optikarekiko problema bat haxe izaten dela, alegia: ingurune desberdinetan dauden edozein bi puntu emanez, ingurune biak banantzen dituen gainazalaren ekuazioa lortzea, aipaturiko puntuak konjokatuak izan daitezen.

28.9. NOTAZIOA ETA HITZARMENAK OPTIKA GEOMETRIKOAN

Optikan erabiltzen den tresneriaren artean, esfera edo gainazal esferikoak dira ugarienetakoa. Gainera, esferaren simetria, oso erraza gertatzen da argi-izpiek segitzen dituzten ibilbideak aztertzea. Beraz, Optika Geometrikoan erabiliko ditugun hainbat eta hainbat neurri eta angeluen zeinuak finkatzeko, normala da horrelako sistema optiko batek sortuko lituzkeen aldagaiekin batera definitzea.

Demagun n eta n' errefrakzio-indizeak dituzten bi ingurune C puntuan zentratuak dagoen gainazal esferiko batez banandurik daudela (ikus 28.9. irudia). Ardatz optikoaren O puntuan, y altuera duen OP objektua jarri dugu. Sistema guztiz ideala dela suposatuko bagenu, OP objektuaren irudia lortzeko, nahikoa izango litzateke sistemak emango lituzkeen muturren irudiak ezagutzea, hots, O' eta P' direlakoak. Horretarako, puntu bakoitzari dagokion irudia lortzeko, gutxienez mutur bakoitzetik bidaltzen diren bi izpiren ibilbideak segitu beharko ditugu.

Objektuaren O puntuari dagokion irudia lortzeko, har ditzagun $\overline{OS}$ eta $\overline{OI}$ argi-izpiak. Errefraktatu ondoren, argi-izpiak O' puntuan bilduko dira. Sistema optikoa guztiz perfektua denez, ardatz optikoaren perpendikularra den objektu baten irudiak ardatz horren perpendikularra izan beharko du. Beraz, P muturraren irudia O' puntutik pasatuz ardatz optikoaren perpendikularra den norabide batean egongo da. Hau da, P muturraren irudia lortzeko, nahikoa izango da P puntutik irten den argi-izpi baten ibilbidea segitzea, $\overline{PS}$ izpiarena, adibidez. O' puntutik pasatu eta ardatz optikoaren perpendikularra den norabidearekin azken izpi horrek duen ebaki-puntua P' da, eta, ondorioz, $\overline{OP}$ objektuaren irudia $\overline{O'P'}$ izango da.

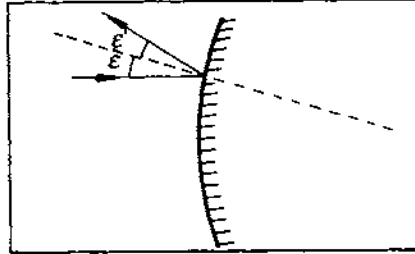


28.9, irudia. OP objektuaren irudia lortzeko modua.

Beharrezkoa izango zaigu, hemendik aurrera neurriei eta angeluei buruzko hitzarmen eta notazio batzuk erabiltzea. DIN izeneko arauak, hain zuzen ere. Aurreko 28.9. irudian finkatuz, hauek dira:

- a) Objektuei dagozkien neurriak eta angeluak letra primaturik gabe idatziko ditugu, eta irudiei dagozkienak, hizki primaturik.
- b) Ebaki-puntuak letra larritz idatziko ditugu.
- c) Ardatz optikoaren norabidean neurtutako luzerak, ardatz optiko horrek dioptroarekin duen ebaki-puntutik neurtuko dira, argi-izpiak duen noranzko normala positibotzat kontsideratuz. Gure kasuan, S da jatorri-puntua. Beraz, s' positiboa da eta s negatiboa.
- d) Kurbadura-erradioa positibotzat hartuko da, kurbaduraren noranzkoa S puntutik eskuinerantz badago. Beraz, r positiboa da gure kasuan.
- e) Ardatz optikoaren perpendikularraren norabidean neurtuko diren luzeren kasuan, gorantz daudenak positiboak izango dira (y, h), eta beherantz daudenak, negatiboak (y').
- f) Angeluak neurtzeko, beste hitzarmen hauek erabiliko ditugu:
 - f.1 Ardatz optikoa ebakitzen duten izpien angeluak positiboak dira, bide laburrenetik ardatz horren bila joatean erlojuaren orratzen noranzko arruntaren aurka badoaz; eta negatiboak, orratzen noranzkoan badoaz. Beraz, ω, ω' eta σ' positiboak dira, eta σ negatiboa.
 - f.2 Dioptroan islatzen eta errefraktatzen diren beste argi-izpiei dagokionez ($\epsilon > \epsilon'$ dirako angeluak, adibidez), positiboak izango dira, puntu horretan dagoen normalerantz bide laburrenetik eramaterakoan erlojuaren orratzen jokabidea segitzen baldin badute, eta negatiboak aurkako noranzkoan badoaz. Beraz, gure kasuan ϵ eta ϵ' positiboak izango dira.

Azken hitzarmen bien artean arazo bat sortu zaigu: ω eta ω' angeluak eraso-eta errefrakzio-angelu modura kontsideratzen baldin baditugu, oraintxe bertan aipaturiko arauaz negatiboak lirateke, baina ardatz optikoarekin elkar ebakitzen duten izpiak kontsideratuz, aldiz, positiboak. Beraz, kasu bakoitzean zer diren zehaztu beharko litzateke.



28.10. irudia. Hitzarmenaren arabera, islapenari dagozkion angeluak balio berekoak baina aurkako zeinukoak dira.

Hitzarmen horien arabera, 28.10. irudian ikus daitekeen islapencan, ε eta ε' angeluak balio berekoak baina kontrako zeinukoak dira, hau da:

$$\varepsilon = -\varepsilon' \quad (28 - 22)$$

edota, antzeko baldintzetako errefrakzio bat kontsideratuz:

$$n = -n'. \quad (28 - 23)$$

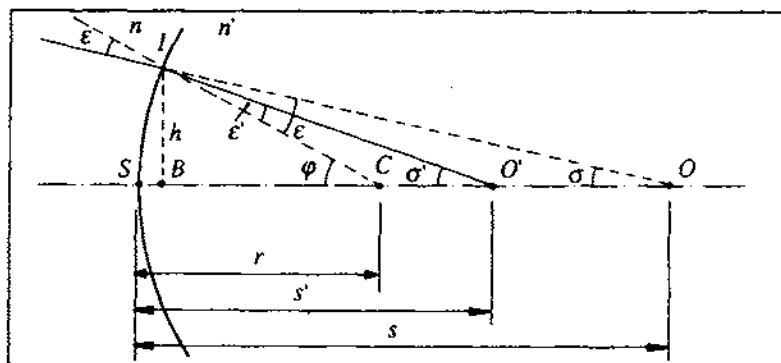
28.10. OPTIKA PARAXIALA: GAUSS-EN HURBILKETA

Sistema optiko zentratuak aztertzean, hurbilketa batzuk egiten dira. Esan dugunez, orokorki, sistemak ez dira perfektuak izaten, eta argi-izpien ibilbideak segitzea ez da sarritan erraza izaten. Baina argi-izpiek ardatz optikoarekin angelu oso txikiak eratzen dituztenean, kalkuluak neurri handi batean sinplifika daitezke. Hurbilketa honetan, angeluak eta beraien sinuak eta tangenteak ia-berdinak direla onar daiteke: $\varepsilon \cong \sin \varepsilon \cong \tan \varepsilon$.

Ikusiko ditugun tresna optikoen jokaera zonalde horretan aztertuko dugunez, nahikoa izango zaigu hurbilketa hori erabiltzea, *Optika paraxiala* edo *Gauss-en hurbilketa* deritzona, hain zuzen. Beraz, hurrengo galdera hauetan, Optika paraxialean mugituko gara; areago, dioptrio esferikoak Optika paraxialean aztertuko ditugu.

28.11. DIOPTRIO ESFERIKOA. ABBE-REN ALDAEZINA

Segi dezagun 28.11. irudian, argi-izpi batek dioptrio esferiko batean errefraktatu ondoren duen ibilbidea. Egingo ditugun kalkuluak, zonalde paraxialean bakarrik izango dira balia-garriak. Gure helburua hauxe izango da: ezkerretik eta n errefrakzio-indizea duen ingurune batean hedatzen ari den argi-izpi bat, r erradioa duen dioptrio esferiko batean errefraktatu ondoren, n' errefrakzio-indizea duen ingurune batera pasatzean, ardatz optikoaren zein puntutatik pasatuko den aurkitzea.



28.11. irudia. Argi-izpiak dioptrio esferikoan errefraktatzean duen ibilbidearen azterketa.

Aipaturiko hurbilketan, Snell-en legea honelaxe idatz daiteke:

$$n\varepsilon = n'\varepsilon'. \quad (28-24)$$

Bestalde, geometrikoki ikus daitekeenez,

$$\varphi = \varepsilon' + \sigma' = \varepsilon + \sigma, \quad (28-25)$$

eta hemendik,

$$\varepsilon = \varphi - \sigma \quad \text{eta} \quad \varepsilon' = \varphi - \sigma'. \quad (28-26)$$

Baina

$$\varphi \cong \tan \varphi = \frac{h}{r}, \quad \sigma \cong \tan \sigma = \frac{h}{s} \quad \text{eta} \quad \sigma' \cong \tan \sigma' = \frac{h}{s'} \quad (28-27)$$

direnez, ondorioz:

$$\varepsilon = \frac{h}{r} - \frac{h}{s} \quad \text{eta} \quad \varepsilon' = \frac{h}{r} - \frac{h}{s'}, \quad (28-28)$$

eta (28-24) ekuaziora eramanez:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right). \quad (28-29)$$

Hau da: $n(1/r - 1/s)$ -ren balioa ez da aldatzen objektu-espaziotik irudi-espaziora pasatzean. Beste era batera esanez, idatziriko adierazpena aldaezina da, *Abbe-ren aldaezina* hain zuzen.

Formula hori bezain baliagarria den beste bat atera dezakegu bertatik:

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \left(\frac{n - n'}{r}\right), \quad (28-30)$$

edota

$$\frac{1}{s'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{s} + \frac{n' - n}{n'r}. \quad (28-31)$$

Azken honetan, beste ezaugarri guztiak esagutuz, erraz lortuko dugu O' puntuaren posizioa.

Esan beharra dago, ezen formula horietan aldagai bakoitzak inplizituki bere zeinua daramala. Hortaz, lehen aipaturiko arauak segituz, r , s , s' , n eta n' positiboak izango dira.

Adibide modura, ikus ditzagun zenbait kasu berezi:

Dioptrio lau errefraktantea. Kasu honetan, $r = \infty$ egin beharko dugu (28-29) ekuazioan. Beraz, honako hauek beteko dira:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \quad \text{eta} \quad s' = \frac{n'}{n} s. \quad (28-32)$$

Ispilu esferikoa. Lehen ikusi dugunez, kasu honetan $n' = -n$ egin behar dugu. Beraz, ondoko erlazioa lortuko dugu:

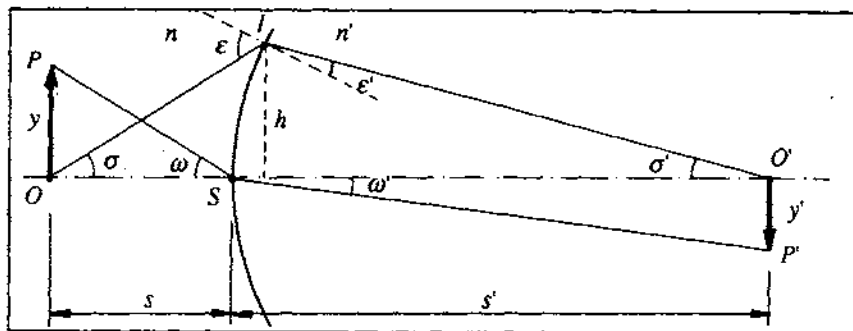
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \quad (28-33)$$

Ispilu laua. Aurreko kasuaren ondorio bat besterik ez da, r infinitua egiten denekoa, hain zuzen, eta honako erlazioa lortuko dugu:

$$s' = -s. \quad (28-34)$$

28.12. LAGRANGE-HELMHOLTZ-EN ALDAEZINA

Dioptrio esferikoekin segituz, aurki dezagun objektu- eta irudi-espazioko n , y eta σ magnitude homologoen artean zein erlazio betetzen den, y delakoa objektuen tamaina bertikala eta σ delakoa beraren ardatz optikoaren puntutik neurturiko angelua izanik, 28.12. irudian adierazi den bezala.



28.12. irudia. Dioptrio esferikoaren kasuko magnitude homologoen arteko erlazioaren azterketa.

Kalkuluak errazteko, bi ingurune banatzen dituen dioptrio bakar bat kontsideratuko dugu. Kasu honetan, ikus dezagun zein den objektuaren P muturretik irtenik dioptrioaren S erpinean errefraktatzen den argi-izpiaren ibilbidea. Hain justu, ω eta ω' angeluak eraso-eta errefrakzio-angeluak direla suposatuz (beraz, negatiboak), Snell-en legearen arabera hauxe beteko da Optika paraxialean:

$$n\omega = n'\omega'. \quad (28-35)$$

Baina hurbilketa horretan, irudiaren geometriari begiratuz, ondokoak idatz ditzakegu:

$$\omega \equiv \tan \omega = \frac{y}{s} \quad \text{eta} \quad \omega' \equiv \tan \omega' = \frac{y'}{s'}. \quad (28-36)$$

Gainera,

$$s = \frac{h}{\tan \sigma} \equiv \frac{h}{\sigma} \quad \text{eta} \quad s' = \frac{h}{\tan \sigma'} \equiv \frac{h}{\sigma'}. \quad (28-37)$$

(28-35) ekuazioan balio hauek ordezkatzuz, hauxe lortuko dugu:

$$n y \sigma = n' y' \sigma'. \quad (28-38)$$

Ikus daitekeenez, aipaturiko hiru magnitudeen arteko biderkadura ez da aldatzen objektu-espaziotik irudi-espaziora pasatzean. Hots, biderkadura hori aldaezina da, *Lagrange-Helmholtz-en aldaezina* deritzona hain zuzen.

Baina Optikan erabiltzen diren sistemak ez dira hain sinpleak izaten gehienetan. Kasurako, sistema zentratu bat kontsideraturik, suposa dezagun i dioptrio esferikoz osaturik dagoela, eta hasierako eta bukaerako errefrakzio-indizeak n_1 eta n'_i direla. Sistema honen kasuan kontuan eduki behar da ezen lehenengo dioptrioak sorrarazten duen irudiak bigarren dioptriorako objektu modura jokatu duela; eta horrela, ondoz ondo. Beraz, Lagrange-Helmholtz-en ekuazioa aplikatzean, notazio hauek erabiliko ditugu:

$$n'_j = n_{j+1}, \quad y'_j = y_{j+1}, \quad \sigma'_j = \sigma_{j+1}. \quad (28-39)$$

Honetan, ba, dioptrio guztiei Langrange-Helmholtz-en ekuazioa aplikatuz, hurrengoak lor dezakegu:

$$\left. \begin{aligned} n_1 y_1, \sigma_1 &= n'_1 y'_1, \sigma'_1 \\ n_2 y_2, \sigma_2 &= n'_2 y'_2, \sigma'_2 \\ &\dots \dots \dots \\ n_i y_i, \sigma_i &= n'_i y'_i, \sigma'_i \end{aligned} \right\} \quad (28-40)$$

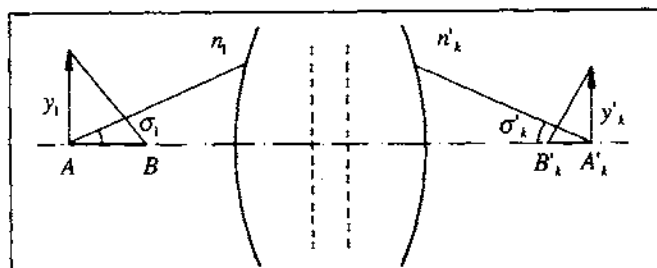
Baina erabiltzen ari garen notazioaren arabera, ekuazio bakoitzaren bigarren atala hurrengo ekuazioaren lehenengo atalaren berdina da. Azkenez, hauxe lor daiteke:

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_i y'_i \sigma'_i. \quad (28-41)$$

Hau da, Langrange-Helmholtz-en ekuazioa baliagarria da sistema osorako. Aipagarria da azken formula honetan ikus daitekeena: lehenengo eta azken inguruneak izan ezik, beste guztiak ez dira ezertarako agertzen.

28.13. HANDIPENAK

Atal honetan, sistema zentratu batek sortzen duen irudiaren zenbait magnitudek objektuaren magnitude homologoeekin dituzten erlazioak aztertuko ditugu, hala nola, neurri bertikalen arteko erlazioa, ardatz optikoa ebakitzen duten argi-izpiek egiten dituzten angeluen arteko erlazioa, eta ardatz optikoaren paraleloak diren neurri homologoen arteko erlazioa. Horretarako 28.13. irudiaz baliatuko gara.



28.13. irudia, Sistema zentratuaren handipenak definitzeko magnitudeak.

28.13.1. Albo-handipena

Definizioz, albo-handipena irudiaren eta objektuaren altuera homologoen arteko zatidura da, hau da,

$$\beta' = \frac{y'_k}{y_l} \quad (28 - 42)$$

Formula honetan zeinuak inplizituki doazela kontuan hartuz, objektua eta irudia noranzko berekoak badira, β' positiboa izango da, eta aurkako noranzkoan badaude, negatiboa.

Langrange-Helmholtz-en ekuazioa kontuan hartuz, honelaxe idatziko dugu albo-handipenaren adierazpena:

$$\beta' = \frac{y'_k}{y_l} = \frac{n_l \sigma_l}{n'_k \sigma'_k} \quad (28 - 43)$$

Bestalde, hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak badira (airea, adibidez), hauxe izango dugu,

$$\beta' = \frac{\sigma_l}{\sigma'_k} \quad (28 - 44)$$

hau da, objektuaren oinarritik irteten den argi-izpi batek eta argi-izpi homologoak azken ingurunean ardatz optikoarekin osatzen dituzten angeluen arteko erlazioa, huts-hutsik.

28.13.2. Handipen angeluarra

Magnitude honek ardatz optikoa ebakitzen duten argi-izpiek osatzen dituzten angeluen arteko erlazioa definitzen du (egia esateko, beraien tangente trigonometrikoena, baina optika paraxialean dihardugunez, angeluen arteko erlazioa besterik ez da). Beraz, definizioz, hauxe ipiniko dugu:

$$\gamma' = \frac{\sigma'_k}{\sigma_l} \quad (28 - 45)$$

Lehengo 28.13. irudian ikus daitekeenez, kasu honetan γ' negatiboa izango da. Hemen ere, Langrange-Helmholtz-en ekuazioa erabiliz, γ' beste era honetan idatz dezakegu:

$$\gamma' = \frac{n_l y_l}{n_k' y_k'} = \frac{n_l}{n_k'} \cdot \frac{1}{\beta}, \quad (28-46)$$

hots, handipen angeluarra eta albo-handipena alderantziz proportzionalak dira. Bestalde, lehen bezala, hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak balira ($n_l = n_k'$), $\gamma' = 1/\beta'$ izango litzateke.

28.13.3. Handipen axiala

Magnitude honek ardatz optikoaren paraleloak diren neurri homologoen arteko erlazioa adierazten du. Lehenengo 28.13. irudiari begiratu, honelaxe idatz daiteke handipen axiala:

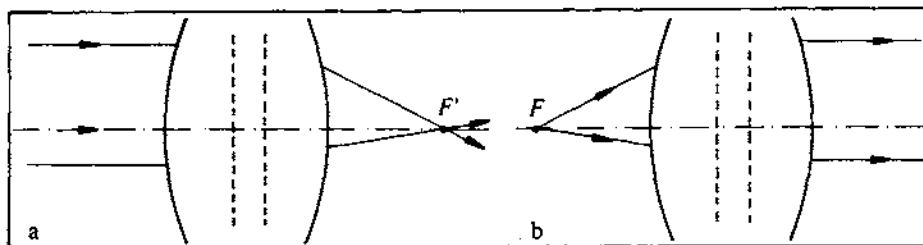
$$\alpha' = \frac{\overline{A_k' B_k'}}{\overline{A_l B_l}}. \quad (28-47)$$

Plano konjokatu biren arteko albo-handipena eta handipen angeluarra, konstanteak dira. Sistema optiko perfektu batean, ardatz optikoaren perpendikularra den plano baten irudia beste horrelako plano bat izango da. Plano horiei *konjokatuak* deritze, eta horixe da lehen esandakoaren esangura.

Sistema optiko bereko plano konjokatu desberdinak hartuz, orokorki, handipen angeluarra eta albo-handipena aldatu egingo dira, baina bikote bakoitzaren artekoak konstanteak izanik.

28.14. FOKUAK. DISTANTZIA FOKALAK. SISTEMA BATEN AHALMEN OPTIKOA

Demagun ardatz optikoan dugun objektu bat ezker alderantz eta infiniturantz daramagula. Handik datozen argi-izpiak, sistema optikoa zeharkatu eta gero, ardatz optikoaren puntu batean bilduko dira (28.14.a irudia). Puntu horri *irudi fokua* deritzo. Era berean, demagun ardatz optikoan beste puntu bat dugula; bertatik igortzen diren argi-izpiak, sistema zeharkatu eta gero, ardatz optikoaren paraleloak irteten baldin badira (edota irudia infinituan badago), puntu horri *objektu fokua* deritzo (ikus 28.14.b irudia).



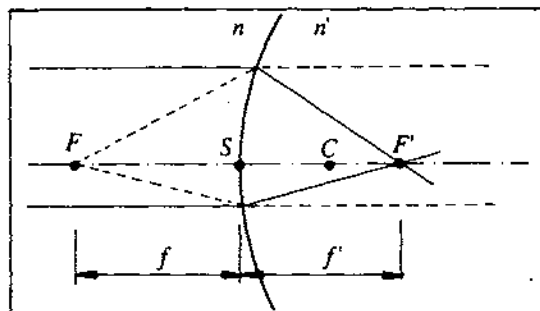
28.14. irudia. a) Irudi fokua. b) Objektu fokua.

Puntu horiei loturik, bi magnitude definitu ohi dira, *distantzia fokalak* deritzenak hain zuzen ere. Objektu fokuari dagokionari *objektu distantzia fokala*, f , deritzogu, eta beraren balioa, $s' = \infty$ distantziari dagokion s delakoaren balioa da. Era berean, $s = \infty$ distantziari dagokion s' *irudi distantzia fokala*, f' , izango da. Beste era batean esanez, fokuak ardatz optikoaren infinituko puntuen puntu konjokatuak dira.

Dioptrio bakar bat dugunean, ez dago inolako problemarik f eta f' direlakoan balioak lortzeko. Kalkula ditzagun, adibidez, kasu berezi batzuei dagozkien distantzia fokalak.

28.14.1. Dioptrio esferikoa

Azter ditzagun sistema honi dagozkion ezaugarriak.



28.15. irudia, Dioptrio esferikoaren ezaugarriak.

a) *Objektu distantzia fokala*: Gogora dezagun Abbe-ren aldaezina:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right). \quad (28-48)$$

Hemen, $s' = \infty$ eginez, $s = f$ izango da, eta ondorioz:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{f}\right) = \frac{n'}{r}. \quad (28-49)$$

Beraz, dioptrio esferikoari dagokion objektu distantzia fokala hauexa izango da:

$$f = \overline{SF} = \frac{n}{n - n'} r. \quad (28-50)$$

b) *Irudi distantzia fokala*: Kasu honetan, $s = \infty$ eginez, $s' = f'$ lortuko dugu, hots,

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n} r. \quad (28-51)$$

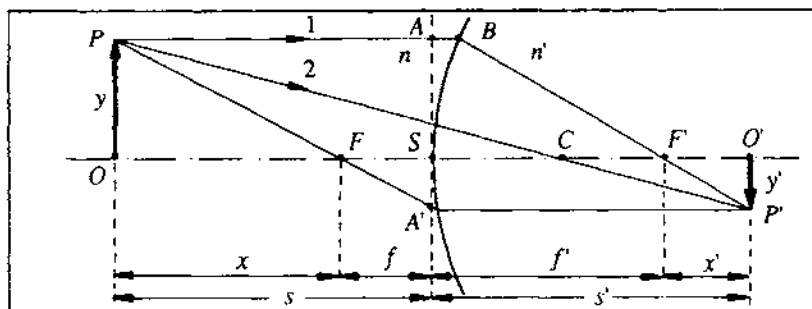
c) *Gauss-en formula*: Biderka dezagun Abbe-ren aldaezina $r/(n - n')$ faktoreaz, (28-30) ekuazioa erabiliz:

$$\frac{n}{s} \cdot \frac{r}{n - n'} - \frac{n'}{s'} \cdot \frac{r}{n - n'} = \frac{n - n'}{r} \cdot \frac{r}{n - n'} = 1. \quad (28-52)$$

Lehenengo atala ordenatuz, hauexa dugu:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1. \quad (28-53)$$

Formula hau oso baliagarria gertatzen zaigu dioptrio esferiko batean objektu distantziaren eta irudi distantziaren arteko erlazioak kalkulatzeko. Horixe da, hain zuzen, *Gauss-en formula*.



28.16. irudia. Newton-en formula lortzeko eraikuntza grafikoa.

d) *Newton-en formula*. Ikus dezagun 28.16. irudiko eraiketa grafikoa. Ardatz optikoaren O puntuan oinarriturik dagoen y altuerako objektu bertikal baten irudi optikoaren eraikuntza ageri da. Adierazitako sistema perfektua denez, OP objektuaren irudia aurkitzeko aski da P puntuaren irudia non dagoen ikustea, zeren irudiak ere bertikala izan beharko baitu, eta O puntuaren irudiak, O' delakoak, ardatz optikoan egon beharko baitu. Segi ditzagun 1 eta 2 izpien ibilbideak, dioptrioaren errefraktatu ondoren. Batetik, 1 izpia ardatz optikoaren paraleloa denez, $1'$ izpia irudi fokutik pasatuko da. Bestetik, 2 izpiak dioptrioaren zentroaren (C puntuaren) norabidea darama; beraz, dioptrioaren perpendikularra da eta ez du beraren norabidea aldatuko. Orduan, C puntutik pasatuko da. Izpi bien ebaki-puntua P puntuaren irudia izango da, P' delakoa hain zuzen ere. Irudi honetan, objektuak eta irudiak fokuekiko dituzten posizio erlatiboak definitzen dira: $x = FO$ eta $x' = F'O'$ (kasu honetan, $x < 0$ eta $x' > 0$ izango dira).

Gogora bedi Optika paraxialean gabiltzala, eta angelu oso txikiak darabiltzagula. Orduan, A eta B puntuak ia-ia kointzidenteak izango dira. Ikus dezagun esandakoa kontuan hartuz nola adieraz daitekeen albo-handipena:

$$\frac{y'}{y} = \frac{y'}{SA} = \frac{SA'}{y} < 0. \quad (28-54)$$

Bestalde, ASF' eta $P'O'F'$ triangeluen antzekotasunez:

$$\frac{y'}{SA} = -\frac{x'}{f'}. \quad (28-55)$$

zeren x' eta f' positiboak baitira; eta POF eta $A'SF'$ triangeluen antzekotasunez:

$$\frac{SA'}{y} = -\frac{f}{x}, \quad (28-56)$$

zeren x eta f negatiboak baitira.

Azken adierazpen biak (28-54) adierazpenean ordezkatzuz, ondokoa dugu:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} \Rightarrow xx' = ff'. \quad (28-57)$$

Horixe da, hain zuzen, dioptrio esferiko baterako *Newton-en formula* Optika paraxialean. Beraren arabera, lau aldagaietatik hiru ezagutuz, laugarren aldagaiaren balioa kalkulatu ahal izango dugu.

28.14.2. Ispilu esferikoa

Inguruneak banantzen dituen gainazala islatzailea bada, lehen ikusi dugunez, $n = -n'$ hartzen da. Kasu horretan, sistemaren ezaugarriak hauek dira:

a) *Objektu distantzia fokala*: (28-50) ekuazioan $n' = -n$ eginez, hauxe lortuko da:

$$f = \frac{r}{2}. \quad (28-58)$$

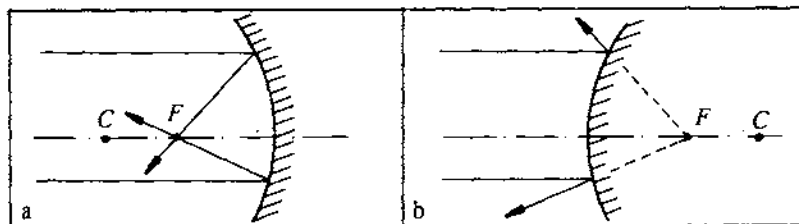
b) *Irudi distantzia fokala*: (28-51) ekuazioan $n' = -n$ eginez, hauxe lortuko da:

$$f' = \frac{r}{2}. \quad (28-59)$$

Ondorioz, ispilu esferikoetan, emaitza hau erdietsiko da:

$$f = f' = \frac{r}{2}, \quad (28-60)$$

hots, foku biak puntu berean daude. Gainera $r > 0$ bada, distantzia fokala positiboa izango da (ispilu konbexua edo ganbila), eta $r < 0$ bada, distantzia fokala negatiboa izango da (ispilu konkaboa edo ahurra).



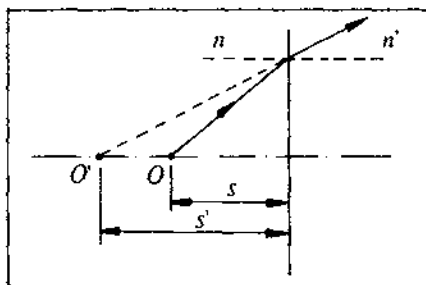
28.17. irudia. a) Ispilu ahurra ($r < 0, f < 0$). b) Ispilu konbexua ($r > 0, f > 0$).

c) *Gauss-en formula*: (28-53) ekuazioa erabiliz eta $f = f' = r/2$ dela kontuan hartuz, hauxe izango da Gauss-en formula ispilu esferikoen kasuan:

$$\frac{f}{s} = \frac{f}{s'} = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}. \quad (28-61)$$

28.14.3. Dioptrio laua

Dioptrio esferikoaren kasu berezia da, $r = \infty$ egiten denean. Orduan: $f = -f' = \infty$ (edo $f' = -f = \infty$).



28.18. irudia. Dioptrio laua: s eta s' zeinu berekoak dira.

Abbe-ren aldaezina erabiliz, honako hau lortuko dugu:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'}. \quad (28-62)$$

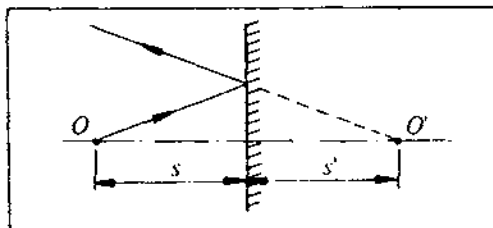
Hau da, s eta s' zeinu berekoak izango dira, 28.18. irudian ikus daitekeen bezala.

28.14.4. Ispilu laua

Ispilu esferikoaren kasu berezi bat da, $r = \infty$ egiten denean. Hemen $f = f' = \infty$ izango da. (28-61) ekuazioan $r = \infty$ eginik:

$$\frac{1}{s} = -\frac{1}{s'} \Rightarrow s' = -s. \quad (28-63)$$

hau da, s -k eta s' -k zeinu desberdinak dituzte, 28.19. irudian ikus dezakegun bezala.



28.19. irudia. Ispilu laua. s -k eta s' -k zeinu desberdinak dituzte.

Aipagarria da ispilu lauaren eta dioptrio lauaren arteko desberdintasuna, nahiz eta azken kasu honetan dioptrioak banatzen dituen inguruneak berdinak izan ($n = n'$). Hori kontsideratuz, (28-62) ekuaziotik honakoa hau lortuko dugu: $s' = s$, eta ez $s' = -s$; alegia, ispilu lauaren kasuan lortzen den bezala.

Atal honetako kontzeptuak osatzeko, distantzia fokalari loturik askotan erabiltzen den magnitude bat definitu ohi da Optikan: *sistema optikoaren ahalmen optikoa*. Honelaxe definitzen da:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} \quad (28 - 64)$$

Hau da, definizioz, sistemaren ahalmen optikoa irudi distantzia fokalaren alderantzizko balioa da. Atal honetan aztertutako kasuetan, balio hauek hartzen ditu:

$$a) \text{ Dioptrio esferikoa: } \varphi' = \frac{n' - n}{n' r}$$

$$b) \text{ Ispilu esferikoa: } \varphi' = \frac{2}{r}$$

$$c) \text{ Dioptrio laua: } \varphi' = 0.$$

$$d) \text{ Ispilu laua: } \varphi' = 0.$$

f' delakoa metrotan neurtzen bada, φ' delakoa *dioptria* (m^{-1}) izeneko unitatetan adierazten da.

28.15. ISPILU ESFERIKOAK. ERAIKUNTZA GRAFIKOAK

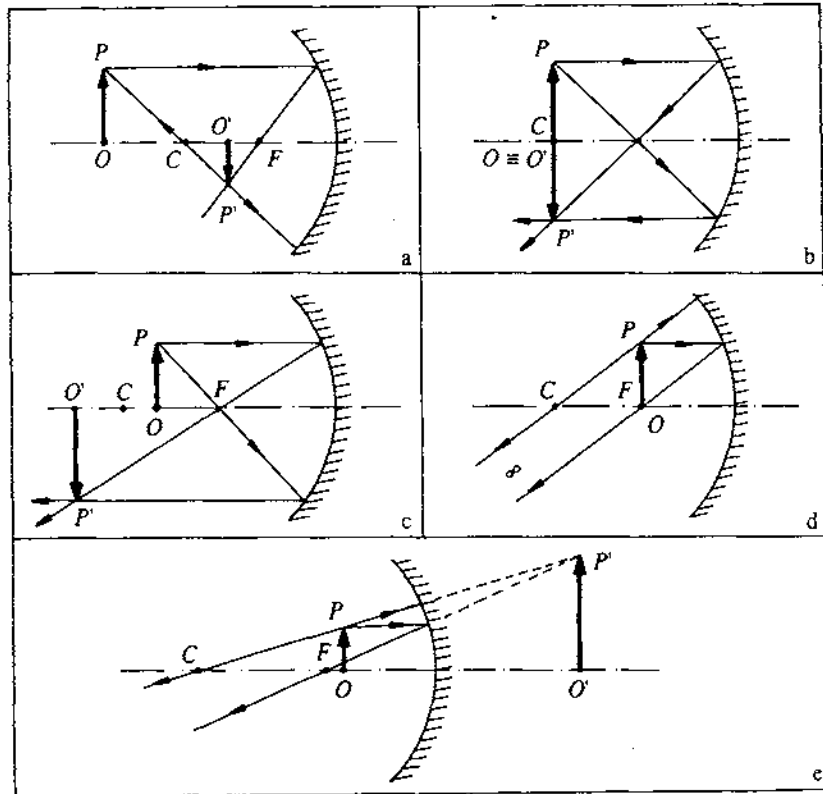
Demagun ispilu esferiko baten aurrean objektu bat dugula. Ispiluak sorraraziko duen irudiaren tamaina eta posizioa lortzeko, metodo grafiko erraz bat erabil daiteke. Horretarako, kasurik sinpleena ikusteko, ardatz optikoaren perpendikularrak diren objektuak kontsideratuko ditugu, beraien oinarriak ardatz optikoan bertan daudelarik. Horrela, irudiaren ezaugarriak ezagutzeko, aski da beste muturretik igarotzen diren bi izpiren ibilbideak segitzea:

- Ardatz optikoaren paraleloa den izpia. Islatu ondoren, ispiluaren fokutik pasatuko da.
- Kurbadura-zentrotik pasatzen den izpia. Norabide berean baina aurkako noranzkoan joango da islatu eta gero. Objektuaren oinarria ardatz optikoan bertan dagoenez, beraren irudiarena ere ardatz optikoan egongo da, eta horrexegatik esan dugu aski dela beste muturraren posizioa ezagutzea irudi osoa eraikitzeko.
- Aipaturiko izpietarik bat erabiltzea ezinezkoa bada, kasu batzuetan gertatzen den bezala, beste izpi hau ere lagungarria izango zaigu: fokutik pasatzen den izpia. Islatu ondoren, ardatz optikoaren norabide paraleloaz irtengo da.

Aipaturiko izpien ebaki-puntua izpi errealea bada, lorturiko irudia erreala izango da, eta bietariko bat (edo biak) izpi erreale baten luzapena bada, irudia alegiazkoa izango da.

Pasa gaitezen, ba, besterik gabe, gerta daitezkeen kasuak aztertzeraz, 28.20. irudiez baliatuz. Bertan ispilu ahurra adierazi da, gerta daitezkeen kasu desberdinak adierazirik, ondokoak alegia:

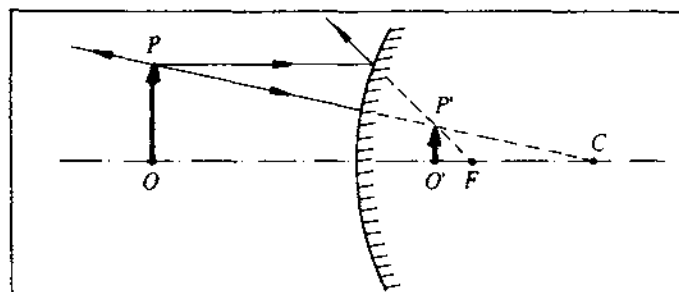
- a) O puntua C puntuaren eskerraldean dagoenean, irudia alderantzikatua, txikiagoa eta erreala izango da, eta F eta C puntuen artean kokaturik egongo da.
- b) O puntua kurbadura-zentroan: irudi alderantzikatua, erreala eta objektuaren tamaina berekoa, C puntuan bertan oinarriturik.



28.20. irudia. Ispilu ahurraren kasuan objektuaren posizioaren arabera gerta daitezkeen kasu desberdinak.

- c) O puntua kurbadura-zentroaren eta fokuen artean: irudi alderantzikatua, erreala, handiagoa eta C puntuaren ezkerraldean.
- d) O puntua F fokuan bertan: irudia infinituan.
- e) O puntua fokuen eta ispiluen artean: alegiazko irudia, zuzena eta handiagoa.

Ispilua ganbila denean, irudi guztiak alegiazkoak dira, zuzenak eta objektuak baino txikiagoak (ikus 28.21. irudia).



28.21. irudia. Ispilu ganbilaren kasuan sortzen diren irudiak alegiazkoak dira.

28.16. DIOPTRIO ESFERIKOAK. ERAIKUNTZA GRAFIKOAK

Dioptrio esferikoen kasu honetan ere, aurreko atalean ikusitako eraikuntzaren antzeko bat egin dezakegu, baina fokuak desberdinak izango direla kontuan hartuz. Gerta daitezkeen posibilitateak ugariak dira, baina guk bizpahiru baino ez ditugu ikusiko.

Objektuaren irudia lortzeko, lehen bezala egingo dugu; hau da, objektuaren muturraren irudia besterik ez dugu erdietsi behar, mutur horretatik irteten diren edozein bi izpiren ibilbideak segituz. Guk horietariko bi izpi berezi aukeratu ditugu: ardatz optikoaren paraleloa den izpia (beraz, irudi fokutik pasatuko da errefraktatu eta gero), eta dioptrioaren zentrorra zuzendurik doana (honek, aldiz, ez du bere norabidea aldatuko, eta zentro horretatik pasatuko da).

28.14. atalean, distantzia fokalen adierazpenak ikusi ditugu, hots:

$$f = \frac{n}{n-n'} r \quad \text{eta} \quad f' = \frac{n'}{n'-n} r. \quad (28-65)$$

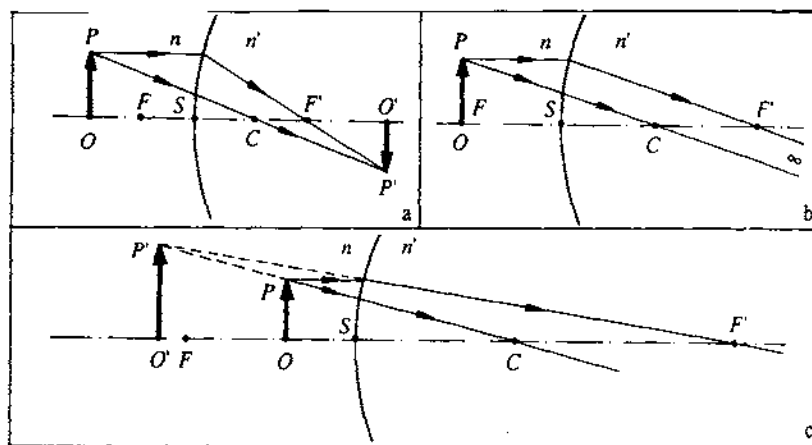
Guk, $n' > n$ eta $r > 0$ baldintzak betetzen dituzten kasuak aztertuko ditugu soilik, besteak irakurleari utzirik.

(28-63) ekuazioetatik, $f < 0$ eta $f' > r > 0$ ateratzen da. Horrez gain, $|f| < |f'|$ da.

Aurreko atalean bezala, oraingoan ere dioptrio esferikoaren kasuan gerta daitezkeen kasuak aipatuko ditugu (ikus 28.22. irudia).

- a) O puntua objektu fokuari ezkerraldean dagoenean, irudia erreala, alderantzikatua eta txikiagoa da eta F' fokuari eskuinaldean dago.
- b) O puntua F objektu fokuan bertan: irudia infinituan.
- c) O puntua objektu fokuari eta dioptrioaren artean: alegiazko irudia, handiagoa, zuzena eta F fokuari ezkerraldean.

Dena den, bai hemen eta bai aurreko atalean, eraiketa grafikoak egiteko, zehazki neurtu beharko dira erabilitako distantzia guztiak (f , f' eta r direlakoak), bestela ez bailukete ezertarako balioko.



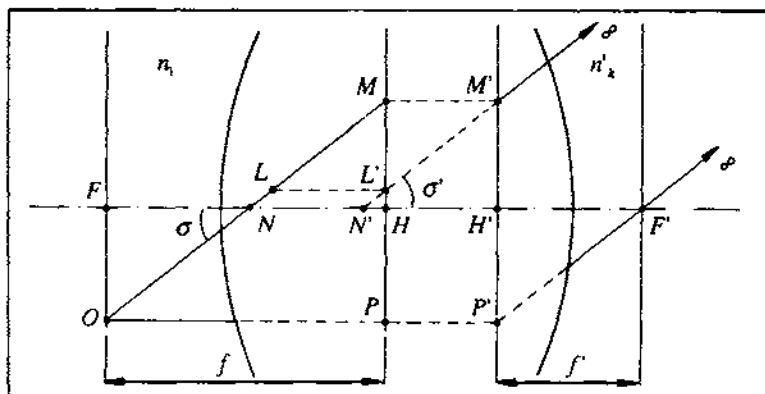
28.22. irudia. Dioptrio esferikoaren kasuan objektuaren posizioaren arabera gerta daitezkeen zenbait kasu berezi.

Definiziotik, objektu plano nagusiko edozein P puntutara zuzendurik dagoen argi-sorta bat sistematik irtetean, P puntuaren konjokatutik irtengo da, P' delakotik alegia, ardatz optikoarekiko P eta P' puntuek dituzten distantziak berdinak eta zeinu berekoak izanik.

Plano nagusien lorbide grafikoa ez da zaila. Demagun lehengo 28.13. irudiko 1 eta 2 izpiak ditugula. Dakigunez, ardatz optikoaren paraleloak direnez, sistematik irteendakoan irudi fokutik eta objektu fokutik pasatuko dira. Izpi irtenkor horiek izpi erasotzaileen luzapenekin dituzten ebaki-puntuak plano nagusietako bi puntu izango dira, P eta P' direlakoak hain zuzen ere. P puntutik pasatu eta ardatz optikoaren perpendikularra den plano *objektu plano nagusia* da, eta ardatz optikoarekin duen ebaki-puntua, H delakoa, *objektu puntu nagusia*. Era berean definitzen dira *irudi plano nagusia* eta *irudi puntu nagusia*, H' delakoa. Dena den, ohar modura esan beharra dago, plano eta puntu nagusiek zentzurik ez dutela Optika paraxialean izan ezik.

28.17.3. Puntu nodalak

Ardatz optikoaren puntu bi hauek, N eta N' direlakoek, baldintza hau betetzen dute: beraietatik pasatzen diren argi-izpi konjokatuak elkarren paraleloak dira. Definiziotik, baldintza hori bete dadin, puntu hauetarako handipen angeluarrek $\gamma = +1$ izan beharko du (ikus 28.24. irudia). N eta N' puntu konjokatuak dira.



28.24. irudia. Puntu nodalen lorbide grafikoa.

Puntu horien lorbide grafikorako ondokoa egin dugu. Demagun objektu plano fokalean O puntu bat dugula. Lehendik dakigunez, O puntutik irteten diren argi-izpi guztiak, sistema zeharkatu eta gero, elkarren paraleloki hedatuko dira. Suposa dezagun O puntutik irteten den $\overline{OP}$ argi-izpia. Ardatz optikoaren paraleloa denez, izpi honen konjokatua F' fokutik pasatuko da. Marraz dezagun orain O puntutik pasatuz, $\overline{P'F'}$ izpiaren paraleloa den beste izpi bat, $\overline{OM}$ delakoa, hain zuzen. Orain bertan esandakoaren arabera, izpi horren konjokatua $\overline{P'F'}$ izpiaren paraleloa izango da. M puntua objektu plano nagusiko puntua da. Beraz, horren konjokatua M' izango da, eta aipaturiko $\overline{OM}$ izpiaren konjokatua M' puntutik pasatuz $\overline{P'F'}$ izpiaren paraleloa den izpia izango da. Eraikuntza grafiko honetan, σ eta σ' angeluak berdinak direla ikus daiteke. Hau da, N eta N' puntuek

puntu nodalei eskatutako baldintza betetzen dute. Beraz, N eta N' dira bilatzen ari ginen puntu nodalak.

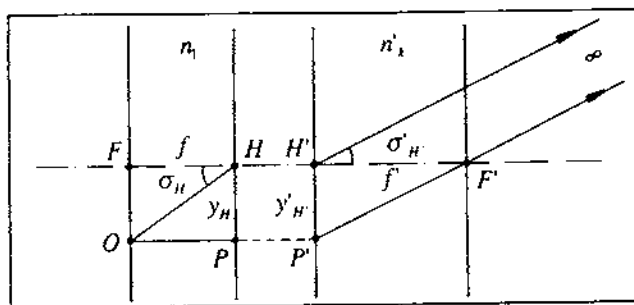
Gainera, paralelotasunaren propietateak erabiliz ikus daitekeenez, $\overline{MM'} = \overline{HH'} = \overline{NN'}$ da, hots, *puntu nagusien arteko distantzia puntu nodalen arteko distantziaren berdina da.*

28.18. SISTEMA BATEN DISTANTZIA FOKALAK ETA BERAIEEN ARTEKO ERLAZIOAK

Definizioz, sistema optikoaren distantzia fokalak hauek dira:

- a) Sistemaren objektu distantzia nagusia: $f = \overline{HF}$.
- b) Sistemaren irudi distantzia nagusia: $f' = \overline{H'F'}$.

Distantzia fokal biak puntu nagusietan hasita neurtuko dira.



28.25. irudia. Sistema optikoaren distantzia fokal nagusien adierazpena eta beraietan oinarritutako eraiketa grafikoa.

Ikus dezagun 28.25. irudian eginiko eraiketa grafikoa: O puntua objektu plano fokalcan dago, eta beraren irudia, dakigunez, infinituan egongo da. Marraz ditzagun O puntutik irriten diren bi izpi konkreturen ibilbideak: ardatz optikoaren paraleloa den izpi batena, $\overline{OP}$ delakoarena, eta objektu puntu nagusira zuzendurik dagoen beste batena, $\overline{OH}$ delakoarena. Orain arte ikusitako plano nagusietako propietateen arabera, izpi irtenkorren ibilbideak argi daude.

Aplika diezaiegun H eta H' puntuetan kokaturik dauden objektuari eta irudiari (hots, $y_H = \overline{HP}$ eta $y'_{H'} = \overline{H'P'}$ eta direlakoei) Lagrange-Helmholtz-en aldaezina:

$$n_1 y_H \sigma_H = n'_2 y'_{H'} \sigma'_{H'}. \quad (28-66)$$

Adibide honetan, $\sigma_H < 0$, $\sigma'_{H'} < 0$ eta $y_H < 0$, $y'_{H'} < 0$ dira. eta erlazio hauek betetzen dira:

$$y_H = y'_{H'}, \quad \sigma_H = -\frac{y_H}{f} \quad \text{eta} \quad \sigma'_{H'} = \frac{y'_{H'}}{f'}. \quad (28-67)$$

zeren $f < 0$ eta $f' > 0$ baitira. Balio horiek (28-66) ekuazioan sartzean, honako hau lortuko dugu:

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n'_k} \quad (28-68)$$

Hau da, hain zuzen, distantzia fokalen eta hasierako eta bukaerako errefrakzio-indizeen arteko erlazioa. Eta azken horiek berdinak badira, hau da, $n_1 = n'_k$ bada, orduan aurreko adierazpena guztiz sinplifikaturik geratuko da:

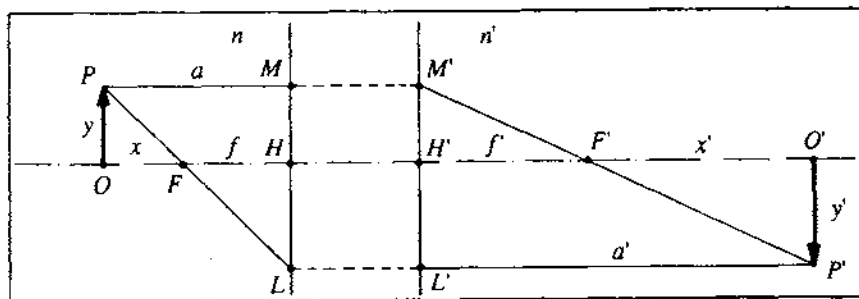
$$f = -f' \quad (28-69)$$

Azken formula hau oso lagungarria izango zaigu hurrengo ataletan ikusiko ditugun lenteen problemak aztertzeko. Gainera, kasu honetan, aurreko irudian erraz ikus daitekeenez, $\overline{OH}$ eta $\overline{P'F'}$ izpiak elkarren paraleloak izango lirake, edo eta $\sigma_H = \sigma'_H$. Hau da, H eta H' puntuak lehen definituriko puntu nodalen baldintza beteko lukete. Beraz, $H \equiv N$ eta $H' \equiv N'$.

28.19. EKUAZIO OROKORRAK SISTEMA LABURTUETAN

Kontsidera dezagun sistema optiko zentratu bati dagokion sistema laburtua. Hau da, sistema osoa beraren elementu kardinalen adieraziko dugu: fokuak eta plano fokalak, puntu eta plano nagusiak, puntu nodalak eta hasierako eta bukaerako errefrakzio-indizeak, zeintzuei $n = n_1$ eta $n = n'_k$ deituko diegun.

Demagun, ardatz optikoaren O puntuan oinarriturik dagoen objektu bertikal bat, eta aurki ditzagun objektu horri dagokion irudiaren ezaugarrien artean dauden erlazio matematikoak. Horretarako, egin dezagun lehendabizi betiko eraiketa grafikoa, 28.26. irudian adierazi den bezala:



28.26. irudia. OP objektuaren irudia lortzeko eraiketa grafikoa.

Onartutako hitzarmenaren arabera, irudi honetan ageri diren neurriek, zeinu hauek dituzte:

$$\overline{HF} = f < 0; \overline{FO} = x < 0; \overline{HO} = a < 0; \overline{OP} = \overline{HM} = \overline{H'M'} = y > 0. \quad (28-70)$$

$$\overline{H'F'} = f' > 0; \overline{F'O'} = x' > 0; \overline{H'O'} = a' > 0; \overline{O'P'} = \overline{H'L'} = \overline{HL} = y' < 0. \quad (28-71)$$

Gainera, marrazturiko triangeluen artean, antzekotasun hauek daude:

$$POF \sim LHF \quad \text{eta} \quad P'O'F' \sim L'H'F'. \quad (28-72)$$

Antzekotasun geometrikoa kontsideratuz, erlazio hauek lor ditzakegu:

$$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{H'M'}} = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = \frac{\overline{HL}}{\overline{OP}} = -\frac{f}{x} = -\frac{a' - f'}{f'} = -\frac{f}{a - f} = \beta', \quad (28-73)$$

eta berrordenatu ondoren, honako berdintzen segida hau idatz dezakegu:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{y'}{y} & = & -\frac{f}{x} & = & -\frac{f}{a-f} & = & -\frac{x'}{f'} = -\frac{a'-f'}{f'} = \beta'. \end{array} \quad (28-74)$$

I II III IV V VI

Erlazio horiek erabiliz, objektu baten eta berari dagokion irudiaren ezaugarri guztiak aurki ditzakegu.

i) II = IV ekuaziotik,

$$xx' = ff', \quad (28-75)$$

eta hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak baldin badira ($n = n'$), lehen ikusi dugunez, $f = -f'$ da, eta ondorioz, (28-75) ekuazioa haxe izango da:

$$xx' = -f'^2, \quad (28-76)$$

ii) Bestetik, III = V ekuaziotik,

$$ff' = aa' + ff' - a'f \Rightarrow af' + ff' + a'f = aa', \quad (28-77)$$

eta aa' -ren bidez zatituz,

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1, \quad (28-78)$$

edota $f = -\frac{n}{n'} f'$ dela kontuan hartuz (ikus (28-68)),

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}. \quad (28-79)$$

Lehen bezala, $n = n'$ deneko kasu berezian haxe dugu:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}. \quad (28-80)$$

Ikus daitekeenez, azken formula hauetan (alegia, (28-76), (28-79), (28-80) direlakoetan), erlazioak irudi distantzia fokalaren funtzioz adierazi dira. Horrek badu arrazoi bat: sistema zentratuen optikan sistemaren *ahulmen optikoa* irudi distantzia fokalaren alderantzizko balio modura definitzen da:

$$\varphi' = \frac{1}{f'}, \quad (28-81)$$

eta f' delakoa metroan neurturik badago, ahalmen optikoa *dioptriatan* ematen da, lehenago 28.14. atalean esan dugun bezala.

- iii) Azkenik, ikus dezagun albo-handipenaren beste adierazpen bat. (28-74) erlazioetatik hauxe atera dezakegu:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{f' - a'}{f'} = 1 - \frac{a'}{f'}. \quad (28-82)$$

Baina (28-77) ekuaziotik

$$\frac{1}{f'} = -\frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \quad (28-83)$$

denez, honako hau dugu:

$$\beta' = 1 - a' \cdot \left(-\frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right) = -\frac{n}{n'} \cdot \frac{a'}{a}, \quad (28-84)$$

hau da,

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{a'}{a}. \quad (28-85)$$

Hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak badira ($n = n'$), ondoko emaitza dugu:

$$\beta' = \frac{a'}{a}. \quad (28-86)$$

- iv) Bestalde, handipenen arteko erlazioak aztertzean 28.13. atalean ikusi genuenez, handipen axiala honelaxe definitu ohi da:

$$\alpha' = \frac{\overline{A'_k B'_k}}{A_1 B_1}. \quad (28-87)$$

Gure sisteman, beste era honetan ere idatz dezakegu:

$$\alpha' = \frac{\Delta x'}{\Delta x}. \quad (28-88)$$

Baina (28-34) ekuaziotik gehikuntzak hartuz, hauxe dugu:

$$x \cdot \Delta x' + x' \cdot \Delta x = 0 \quad (28-89)$$

zeren f' konstantea baita. Hemendik,

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x}{x'} = \alpha'. \quad (28-90)$$

(28-74) erlazioetan, biderka ditzagun II eta IV zatikiak:

$$\left(-\frac{f}{x}\right)\left(-\frac{x'}{f'}\right) = \frac{x'}{x} \cdot \frac{f}{f'} = -\alpha' \frac{f}{f'} = \beta'^2 = -\alpha' \left(-\frac{n}{n'}\right) \quad (28-91)$$

(ikus (28-68)), Beraz,

$$\alpha' = \beta'^2 \cdot \frac{n'}{n}. \quad (28-92)$$

Lagrange-Helmholtz-en aldaezinak dioenez, $n\sigma y = n'\sigma'y'$ da, eta hori kontuan hartuz, zuzenean atera daiteke ondokoa:

$$\frac{y'}{y} = \beta' = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\gamma'} \rightarrow \frac{n'}{n} = \frac{1}{\beta'\gamma'}, \quad (28-93)$$

non γ' delakoa handipen angeluarra den.

Azken hau (28-90) ekuazioan ordezkatzuz, definituriko hiru handipenen arteko erlazioa lortuko dugu:

$$\alpha'\gamma' = \beta'. \quad (28-94)$$

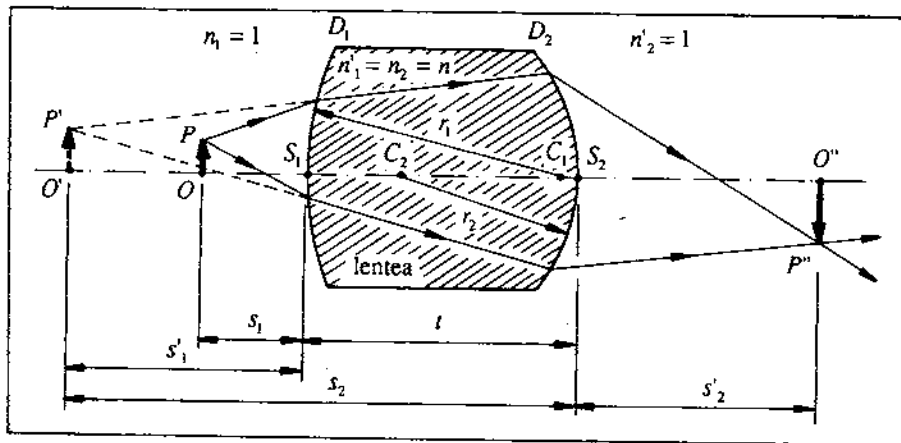
Erlazio hori baliagarria da Optika paraxialean aztertzen den edozein sistema zentratutarako.

28.20. LENTEAK

Lenteak tresna optiko erabilienetakoak dira. Izatez, bi dioptrioz (bata esferikoa eta bestea es-ferikoa edo laua) osaturiko sistema zentratu bat osatzen dute. Gainera, kalkuluak erraztekoan, lentetik alde bietara dauden inguruneak berdinak direla onartuko dugu. Areago, kanpoko ingurunea airea dela suposatuko dugu, $n_1 = n'_1 = 1$, lenteak berak duen materialaren errefrakzio-indizea n izanik.

Nahiz eta lentearen kasuan aurreko galderan lorturiko erlazio guztiak baliagarriak izan, lehenik beste bide bat segituko dugu sistema sinple honetan, bertan agertuko zaizkigun objektu eta irudien ezaugarrien arteko erlazioak kalkulatzeko.

Horrelako sistema batean, objektu bati dagokion irudia lortzeko, ondoko prozesua egiten da. Lehendabizi, lehenengo dioptrioak sorrarazten duen irudia eraikiko dugu, eta irudi hori bigarren dioptriorako objektu modura hartuz, azken honek emango duen irudia kalkulatu dugu.



28.27. irudia. Lente lodia elementuak.

Demagun, adibidez, 28.27 irudian adierazitako kasua. Irudi honetan ageri zaizkigun ikurren esangurak hauek dira:

D_1, D_2 : Dioptrio biak

S_1, S_2 : Dioptrioen erpinak

$\overline{OP}$ $\equiv$ Objektua

$\overline{O'P'}$ $\equiv$ Lehenengo dioptrioak ematen duen irudia $\equiv$ bigarren dioptriorako objektua

$\overline{O''P''}$ $\equiv$ bigarren dioptrioak ematen duen irudia

$\overline{S_1O} = s_1 < 0$: lehenengo dioptriorako objektu distantzia

$\overline{S_1O'} = s_1' < 0$: lehenengo dioptriorako irudi distantzia

$\overline{S_2O'} = s_2 < 0$: bigarren dioptriorako objektu distantzia

$\overline{S_2O''} = s_2' < 0$: bigarren dioptriorako irudi distantzia

$\overline{S_1S_2} = t > 0$: lentearen lodiera

Begi bistan dagoenez, zeinuak kontuan hartu ondoren, erlazio hau dugu:

$$s_2 = \overline{S_2O'} = s_1' - t. \quad (28 - 95)$$

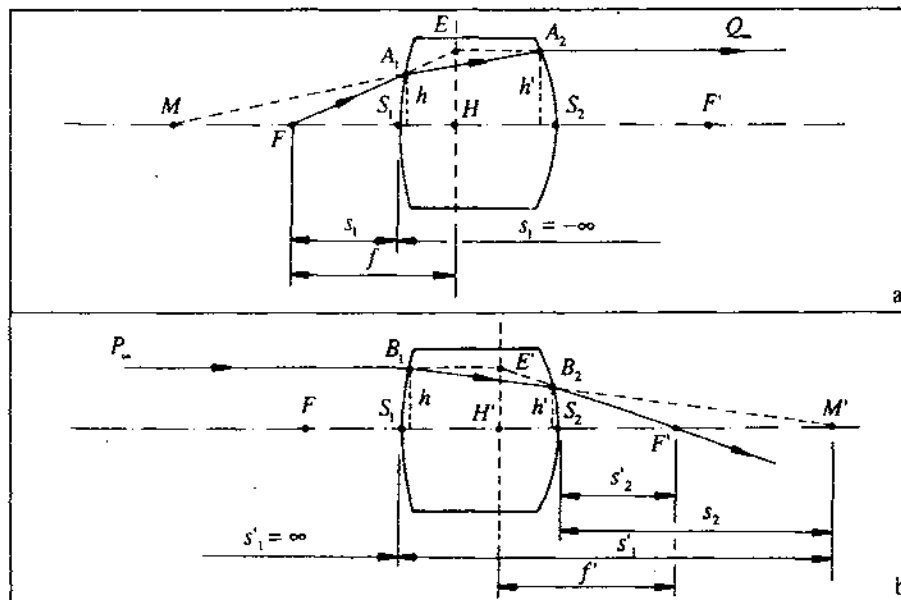
Bestalde, s_2' kalkulatzekotan, aplika diezaiogun dioptrio bakoitzari Abbe-ren formula ((28-29) edo (28-30)), honelaxe preseski:

$$1. \text{ dioptrioa : } \frac{1}{s_1} - \frac{n}{s_1'} = \frac{1-n}{r_1}, \quad (28 - 96a)$$

$$2. \text{ dioptrioa : } \frac{n}{s_2} - \frac{1}{s_2'} = \frac{n-1}{r_2}. \quad (28 - 96b)$$

Horietako lehenengotik, s_1 eta r_1 ezagutuz, s'_1 lortuko dugu, eta (28-95) erlaziotik, s_2 . Azken balio hori bigarren ekuazioan sartu ondoren, s'_2 lortuko da, r_2 ezaguna bada, noski; eta honela problema ebatzirik geratuko da.

Marrazu dugun lentea, lenterik orokorrena da: *lente lodia* deritzo. Hurrengo pausoa, lente horren elementu kardinalak bilatzea izango da: foku eta plano fokalak, eta puntu eta plano nagusiak, hain zuzen ere.



28.28. irudia. a) Objektu plano nagusiaren definizio grafikoa. b) Irudi plano nagusiaren definizioa.

Aurreko atalean, fokuen lorbide grafikoa aztertu dugu. Beraz, ez gara horretaz arduratuko. Ikus dezagun hemen, lente lodi baten puntu eta plano nagusiak nola lor daitezkeen. Horretarako, lentearen fokuak ezagunak ditugula kontsideratuko dugu. Ikus ditzagun 28.28. irudiak.

Lehenengo irudian, F objektu fokutik irteten den izpi bat, A_1 eta A_2 puntuetan errefraktatu eta gero, ardatz optikoaren paraleloa irtengo da. $\overline{FA_1}$ eta $\overline{A_2Q_\infty}$ eta izpien luzapenen ebaki-puntua, E delakoa, plano nagusiaren definizioaren arabera, objektu plano nagusiaren puntu bat izango da, eta plano horrek ardatz optikoarekin duen ebaki-puntua, H delakoa, objektu puntu nagusia izango da.

Bigarren irudian, alderantzizko jokabidea eramango dugu: ardatz optikoaren paralelo datorren izpi bat, B_1 eta B_2 puntuetan errefraktatu ondoren, F' irudi fokutik pasatuko da. Argi daude E' eta H' puntuen esangurak, lehen ikusi dugunaren arabera. Teoria orokorra segituz, $\overline{HF}$ eta $\overline{H'F'}$ distantziak, f eta f' distantzia fokalak dira, hurrenez hurren.

Baliaturiko hurbilketan, irudi bietan marrazu ditugun h eta h' altueren oinarriak, S_1 eta S_2 dioptrioen erpinekin kointzidenteak direla onar dezakegu. Horren arabera, ikus ditzagun bigarren irudian dauden erlazio geometrikoak.

Batetik, B_1S_1M' eta B_2S_2M' triangeluen antzekotasunaren arabera,

$$\frac{h}{s'_1} = \frac{h'}{s'_2} \quad (28-97)$$

dugu. Bestetik, $E'H'F'$ eta B_2S_2F' triangeluen antzekotasunaren arabera,

$$\frac{h}{f'} = \frac{h'}{s'_2}. \quad (28-98)$$

Beraz, (28-97) eta (28-98) ekuazioak atalez atal zatitu ondoren, honako hau lor daiteke:

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{s_2}{s'_2} \right) \frac{1}{s'_1}. \quad (28-99)$$

s_2 , s'_1 eta s'_2 ezagutuz, irudi distantzia fokalaren alderantzizko balioa lortuko genuke, hau da, lente lodia ahalmen optikoa, zeren $\phi' \equiv 1/f'$ eran definitu baitugu. Orduan, ahalmen optikoa lortzeko, s_2 , s'_1 eta s'_2 aldagaiak beharko ditugunez, beraien balioak kalkulatzeko beharrezkoa izango zaigu (28-95) eta (28-96) ekuazioen erabilpena.

Gainera, lentearen alde bietara dauden inguruneak berdinak direla suposatu dugunez, $f = -f'$ da (ikus (28-69)).

Lente lodia sistema zentratua dela kontsideratuz, (28-80) ekuazioa ere beteko da,

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}, \quad (28-100)$$

non a eta a' puntu nagusietatik neurturiko distantziak diren.

28.21. LENTE MEHEAK

Lente lodia kasu berezi bat *lente mehea* da. Kasu honetan, lentearen lodiera, t delakoa, zerorantz doa, eta orduan, optika paraxialean, plano nagusiak, puntu nagusiak eta dioptrio bien erpinak kointzidenteak dira.

Beraz, gure kasu berri honetarako (28-95), (28-96) eta (28-99) ekuazioak berridatiziz, hauxe izango dugu:

$$\overline{S_1S_2} = t \rightarrow 0, \quad s_2 \approx s'_1, \quad (28-101)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s_1} - \frac{n}{s'_1} &= \frac{1-n}{r_1} \\ \frac{n}{s'_1} - \frac{1}{s'_2} &= \frac{n-1}{r_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{s_1} - \frac{n}{s'_2} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (28-102)$$

Baina dioptrioen erpinak kointzidenteak direnez ($S_1 \equiv S_2$), ondokoa beteko da:

$$s_1 \approx a \equiv \text{objektu distantzia}, \quad s'_2 \approx a \equiv \text{irudi distantzia}.$$

Ondorioz, erlazio hau beteko da:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (28-103)$$

Hemendik, lente mehearen irudi distantzia fokala kalkulatzeko, $a = \infty$ egin beharko dugu. Honela, $a' = f'$ izango da, eta hauxe lortuko dugu:

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} = \varphi = (n-1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (28-104)$$

(28-103) eta (28-104) ekuazioetatik, ondokoa atera daiteke zuzenean:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}. \quad (28-105)$$

29.19. atalean ikusi dugunez, airean dagoen lente mehe baten *albo-handipena*, β' , hauxe izango da (ikus (28-86) adierazpena):

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}. \quad (28-106)$$

(28-103)-(28-106) ekuazio-taldeak lente mehe batean gerta daitezkeen ia-ia problema guztiak ebazteko bidea ematen digu.

28.22. LENTE MEHEEN SAILKAPENA

Lente meheak bi taldetan sailka daitezke irudi distantzia fokalari begiraturaz (beti bezala, airean daudela kontsideratuko dugu):

28.22.1. Konbergenteak edo hurbiltzaileak

Hauen irudi distantzia fokala honelakoa da:

$$f' > 0, \quad (\text{eta } f < 0, \text{ ezinbestez}). \quad (28-107)$$

(28-104) ekuazioa kontuan hartuz, ikus dezagun zein erlazio bete behar dituzten dioptrioen kurbadura-erradioek, hori gerta dadin:

- a) $r_1 < 0, r_2 > 0$: Lente bikonkaboia
- b) $r_1 = \infty, r_2 > 0$: Lente lau-konkaboia
- c) $r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 > r_2$: menisko dibergentea (ertz lodiak).

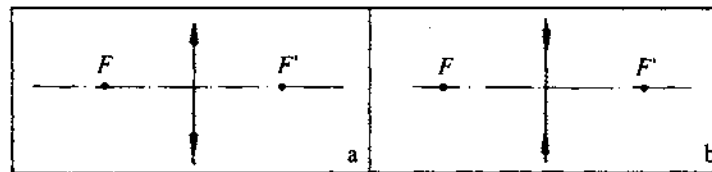
28.22.2. Dibergenteak eta urruntzaileak

Irudi distantzia fokala

$$f' < 0 \quad (28-108)$$

da. Irakurleak posibilitate desberdinak azter ditzake.

Sinbolikoki, bi mota nagusiko lente meheak 28.29 irudian ageri den moduan adierazi ohi dira.



28.29. irudia. Lente meheen adierazpen sinbolikoa. a) Lente konbergentea. b) Lente dibergentea.

28.23. ERAIKETA GRAFIKOAK LENTE MEHEETAN

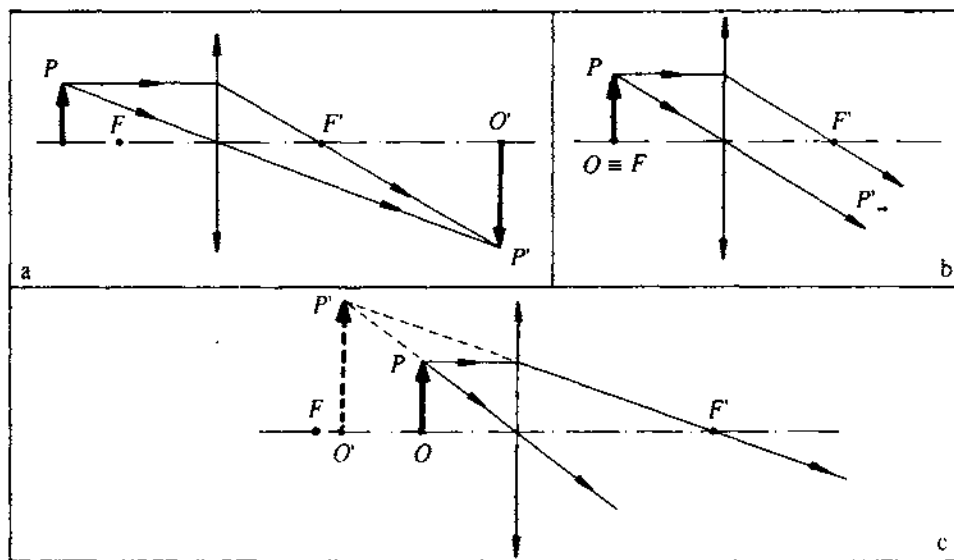
Ispilu esferikoetan egin dugunaren antzera, lente mehe batek sorrarazten duen objektu baten irudia grafikoki lortzeko, arau batzuk segitu beharko ditugu. Hemen ere, ardatz optikoaren perpendikularra den objektu bat kontsideratuko dugu. Bestalde, sistema perfektua dela onartuz, aski zaigu objektuaren muturraren irudia kalkulatzeko irudi osoa lortzeko.

Gainera, lenteetan distantzia fokalak berdinak dira (baina aurkako zeinukoak) lentearen alde bietara dauden inguruneek errefrakzio-indize berdina badute, eta puntu nagusiak, puntu nodalak eta dioptrio bien erpinak kointzidenteak dira, aurreko galderetan ikusi dugunaren arabera.

Objektuaren muturraren irudia lortzeko, bi izpi baino ez ditugu erabiliko:

- Ardatz optikoaren paraleloa den izpia. Lentean errefraktatu eta gero, irudi fokutik pasatuko da.
- Lentearen zentrotik pasatzen den izpia. Zentro horretan, lehen ikusi dugunez, puntu nagusiak eta puntu nodalak biltzen dira. Puntu nodalek duten propietatearen arabera, izpi erasotzaileak eta izpi errefraktatuak angelu berdina osatuko dute ardatz optikoarekin. Beraz, zentrotik pasatzen den izpia ez da desbideratuko.

Ikus ditzagun, ba, gerta daitezkeen kasuak lente konbergente eta dibergenteetan, aldeztu aurretik jakinarazirik objektu errealak kontsideratzera mugatuko garelako beti ere.

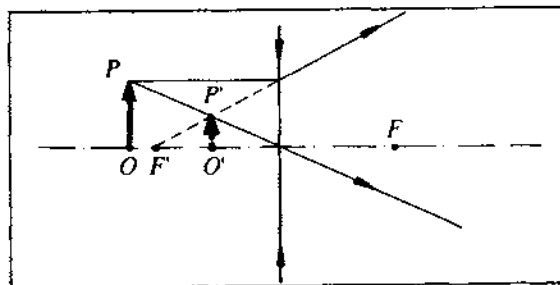


28.30. irudia. Lente konbergenteari dagozkion hiru kasu desberdinak. a) Objektua F objektu fokuari ezkerraldean dago. b) Objektua fokuan. c) Objektua fokuari eta zentroaren bitartean dago.

28.23.1. Lente konbergenteak

Objektuaren eta irudiaren arteko erlazioak ondokoak izan daitezke (ikus 28.30. irudia):

- a) Objektua F objektu fokuari ezkerraldean dago: irudia erreala, alderantzua eta objektua baino handiagoa da eta F' irudi fokuari eskuinaldean dago.
- b) Objektua F fokuan bertan: irudia infinituan dago.
- c) Objektua F objektu fokuari eta lentearen zentroaren bitartean: irudia alegiazkoa, zuzena eta objektua baino handiagoa da, eta F objektu fokuari ezkerraldean dago.



28.31. irudia. Lente dibergentearen kasuko objektua eta irudia.

28.23.2. Lente dibergenteak

Hemen, kasu bat besterik ez dugu ikusiko, zeren eta gerta daitezkeen beste biak antzekoak baitira (28.31. irudia). Lortzen den irudia alegiazkoa da, zuzena eta objektua baino txikiagoa, eta F' irudi fokuaren eta lentearen zentroaren bitartean dago kokatuta. (Beste kasu bien azterketa irakurleari utziko diogu).

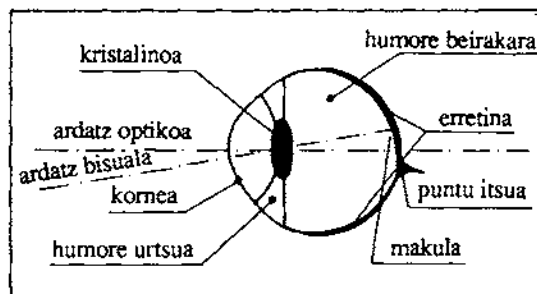
28.24. TRESNA OPTIKOAK

Atal honetan, tresna optikoetatik erabilitakoenak eta sinpleenak ikusiko ditugu: begia, lupa, okularea, mikroskopioa, Galileo-ren betaurrekoa eta teleskopioa, hain zuzen ere. Tresna horien guztien helburua ikusmena hobetzea da. Beraz, normala da begiaren azterketarekin hastea.

28.24.1. Begia

Optika geometrikoaren ikuspuntutik, begia sistema optiko zentratua eta konbergentea da. Beraren osagai fisiologikoak eta geometrikoak 28.32. irudian adierazi dira.

Gutxi gorabehera, begia 25 mm-ko diametroa duen esfera da. Barneko inguruneek (*humore beirakara* eta *humore urtsua*) ia-ia uraren errefrakzio-indizea dute, 1,34 balioa preseski, *kristalino*a deritzon atalarena 1,44 baliokoa izanik. Gainera, kristalinoak propietate berezia du: moldakortasuna. Hots, irudiak begiaren leku konkretu batean eratu behar direnez, kristalinoaren kurbadura-erradioa objektu distantziara moldatzen da: objektua urrun baldin badago, kristalinoaren kurbadura-erradioa handitu egiten da (ondorioz, ahalmen optikoa txikitu egiten da), eta objektua hurbil badago, kurbadura-erradioa txikitu egiten da, ahalmen optikoa handituz.



28.32. irudia. Begiaren egitura.

Guztira, begiaren ahalmen optikoa 60 dioptriakoa da, edo horren ingurukoa. Ahalmen optiko handiena *korneak* ematen du (45 dioptria), beste hamabost bat kristalinoarenak izanik.

Irudiak *erretinan* eratzen dira, eta horrek argazki-plaka baten jokabidea du. Baina plaka hau ez da uniformea: irudien eraketarako lekurik onenari, *makula* deritzo. Puntu horretan ikusmenarako zelula optiko egokienak biltzen dira (*konoak* deritzenak, hain zuzen ere). Horrek ez du esan nahi beste erretina osoan konorik ez dagoenik; egon badaude, baina proportzio txikiagotan. Aldiz, irudia *puntu itsuan* eratuko balitz (hau da, nerbio optikoaren irteera-puntuan), ez litzateke ezer ikusiko.

Gizakiak zehazki ikus dezakeen punturik gertukoenari *puntu hurbila* deritzo, eta adinarekin urrunduz doa. Gutxi gorabehera, estatistikoki, puntu hurbilaren eta adinaren arteko erlazioa 28.1. taulan ageri da. Puntu hurbilaren urruntze horrek adinarekin kristalinoaren moldapen-ahalmena galdu egiten dela esan nahi du.

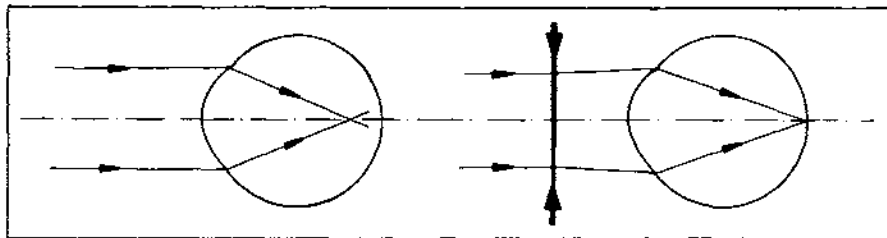
28.1. Taula.

Adinaren eta puntu hurbilaren arteko erlazioa, pertsona arruntaren kasuan.

<u>Adina (urteak)</u>	<u>Puntu hurbila (cm)</u>
10	7
20	10
30	14
40	22
50	40
60	200

Gizakiak, bi begi dituenaz, badu beste ahalmen bat ere: *ikusmen estereoskopikoa*. Hau da, nahiz eta begi bietara objektu berdinarekin informazioa iritsi, begiak bananduta daudenez, informazio hori era desberdinean heltzen zaie, eta informazio desberdin horiek burmuinera heltzean sakontasun-sentsazioa sorrarazten dute. Hori da, hain zuzen, aipaturiko ikusmen estereoskopikoa.

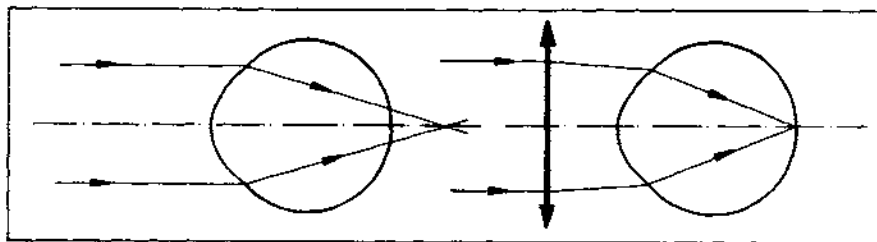
Dena den, ez dago begi perfekturik. Hurrengo lerroetan, begiek izan ditzaketen akatsak ikusiko ditugu: miopia, hipermetropia eta astigmatismoa, hain zuzen ere.



28.33. irudia. Miopia eta beraren zuzenketa.

Miopia. Begi perfektu batek erretinan bertan eratuko luke infinituko puntu baten irudia. Begia luzeegia bada, infinitutik datozen izpiak ez dira erretinan bertan bilduko, beraren aurrean baizik. Begi hori *miopia* dela esaten da, eta dagokion akatsari *miopia* deritzogu.

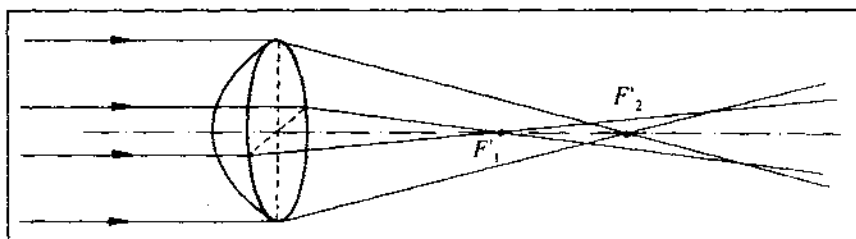
Miopia-akatsa zuzentzeko, infinitutik datozen izpiak zabaldu egin beharko ditugu. Beraz, begi aurrean lente dibergente egoki bat ipini beharko dugu, 28.33. irudian ikus daitekeen bezala.



28.34. irudia. Hipermetropia eta beraren zuzenketa.

Hipermetropia. Kasu honetan, begia laburregia da edo kristalinoak ez du behar duen ahalmenik infinitutik datozen izpiak erretinan bertan biltzeko; ondorioz, izpi hauen luzapenak erretinaren atzealdetik elkartzeko dira. Horrelako begia, *hipermetropea* dela esan ohi da, eta dagokion akatsa, *hipermetropia*.

Erraz ikus daitekeenez, hipermetropia zuzentzeko, infinitutik datozen izpiak, ardatzerantz bildu beharko ditugu, begira heldu baino lehenago. Beraz, begi aurrean lente konbergente egoki bat ipini beharko dugu (ikus 28.34. irudia).



28.35. irudia. Astigmatismoa.

Astigmatismoa. Kornea eta kristalinoak ez dira zehazki esferikoak. Beraz, beraien sekzio desberdinetan irudi distantzia fokal desberdinak edukiko dituzte, eta ez dute irudi argirik aterako. Horrelako begi bati *astigmatikoa* deritzo, eta dagokion akatsari, *astigmatismoa*.

Akats hau zuzentzeko, lente zilindrikoak erabiltzen dira, izpi guztiak (infinitutik datozenak, noski) puntu berera hel daitezten.

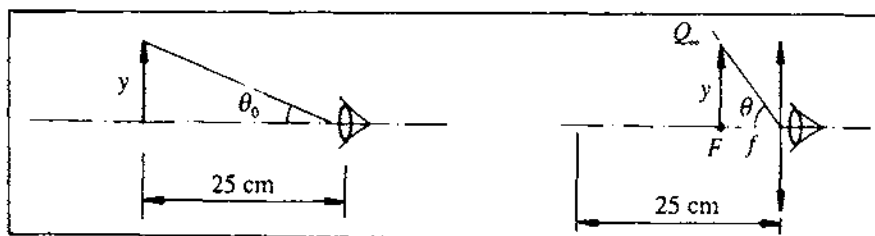
28.24.2. Lupa

Objektu baten ageriko tamainak zerikusia du begiak erretinan eratzen duen irudiaren tamainarekin. Objektua infinitutik puntu hurbilerantz doanean, erretinako irudiaren tamaina handituz doa, edota irudiaren tamaina angeluarra handitu egiten da. Baina puntu hurbilera helduz, ezin dugu objektua gehiagorik hurbildu, irudia argi eta garbi ikustea nahi baldin badugu behintzat.

Objektuaren ageriko tamaina (beraz, haren irudi erretiniarra) handitzeko, lente konbergente bat erabiltzen da: *lupa*. Jarraian tresna horren azterketa egingo dugu.

Hemendik aurrera, kalkuluak egiteko, begiaren puntu hurbila begitik 25 cm-ra dagoela suposatuko dugu. Luparen distantzia fokalak puntu hurbilaren distantzia baino txikiagoa izan beharko du, nahi dugun handipena lortzeko.

Objektua lupa horren objektu fokuan jarritz, irudia infinituan eratuko litzateke, eta irudi hori, kristalinorako objektu modura hartuz, moldapenik barik, irudia erretinan eratuko litzateke, lehen osatzen zuen baino angelu handiagoa eginik, θ angelua hain zuzen (ikus 28.36. irudia).



28.36. irudia. Luparen oinarria.

Luparen handipena edo ahalmena honelaxe definitu ohi da (angeluak txikiak direla kontuan harturik):

$$M = \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \cong \frac{\theta}{\theta_0}. \quad (28-109)$$

28.36. irudietan ikus daitekeenez,

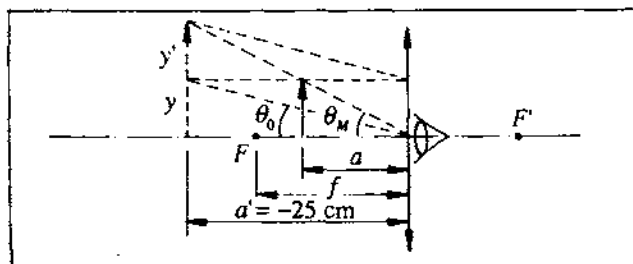
$$\tan \theta_0 = \frac{y}{25} \text{ eta } \tan \theta = \frac{y}{|f|}, \quad (y \text{ eta } |f| \text{ zentimetrotan}). \quad (28-110)$$

(28-109) formularen balio hauek ordezkatuz,

$$M = \frac{25}{|f|}. \quad (28-111)$$

$|f| < 25$ denez, $M > 1$ izango da.

Erretinan eratzen den irudiaren tamaina angeluarra handitu egin daiteke, objektua F fokua eta lupa bitartean jarritz. Dakizuenek, kasu honetan, lente konbergente horrek sorturiko algiatzko irudia begirantz hurbilduko da, eta beraz, erretinan sortuko den irudiaren tamaina angeluarra handitu egingo da, kristalinoaren moldapen-ahalmenez baliatuz.



28.37. irudia. Luparen handipen maximorako baldintzak.

Lupak sorrarazitako alegiazko irudia begiaren puntu hurbilean balego, ikusmenerako handipen maximoa lortuko genuke (28.37. irudia). Ikus dezagun kasu honetan zein izango litzatekeen handipen horren balioa. Lente meheen formulatik, honako hau dugu:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{-25} = \frac{1}{f'} \rightarrow a = -\frac{25f'}{25 + f'}. \quad (28-112)$$

Baliaturiko hurbilketan, ondokoa betetzen da,

$$\tan \theta_M = \frac{y}{|a|} \approx \theta_M, \quad (28-113)$$

edota,

$$\theta_M \approx + \frac{(25 + f')}{25f'}. \quad (28-114)$$

Beraz, lorturiko M -ren balioa ondokoa izango da:

$$M = \frac{\theta_M}{\theta_0} = \frac{(25 + f')y}{25f'} \cdot \frac{25}{y} = \frac{25 + f'}{f'}. \quad (28-115)$$

Azkenez, lupak ematen duen alegiazko irudia begiaren puntu hurbilean balego, luparen ahalmen optikoa haxe izango litzateke:

$$M = 1 + \frac{25}{|f'|}. \quad (28-116)$$

Kasu honetan, irudiari begiratzuz, beste hau ere lor dezakegu:

$$M = \frac{\theta_M}{\theta_0} = \frac{y' / (-25)}{y / (-25)} = \frac{y'}{y} = \beta'. \quad (28-117)$$

Hau da, begirako handipen angeluarra eta albo-handipena berdinak dira.

28.24.3. Okularea

Okularea sistema konbergente bat besterik ez da, beraren aurrean dagoen sistemak eratzen duen irudia handitzeko erabiltzen dena. Esandakoaren ondorioz, lupa baten jokabidea izaten du. Erabiltzekoak, bi lente konbergentez osaturik daude. Nagusiki, hauek erabiltzen dira:

- Ramsden-en okularea.

Distantzia fokal berdina duten bi lente lau-ganbilez osaturiko sistema da, beraien arteko distantzia aipaturiko distantzia fokal horren bi herenak izanik (gutxi gora-behera). Aurreko sistemak sorrarazitako irudia erreala da eta lehenengo lentearen objektu distantzia fokalaren barnean eratzen da, eta okularetik irteterakoan infinituan dago (begiak moldapenik gabe ikus dezan). Lehen bezala, okulareak sorturiko irudia begiaren puntu hurbilean eratuko balitz, anplifikazio handiena lortuko genuke (hemen, begiaren moldapen-propietatea erabili beharko genuke).

– *Huygens-en okulara.*

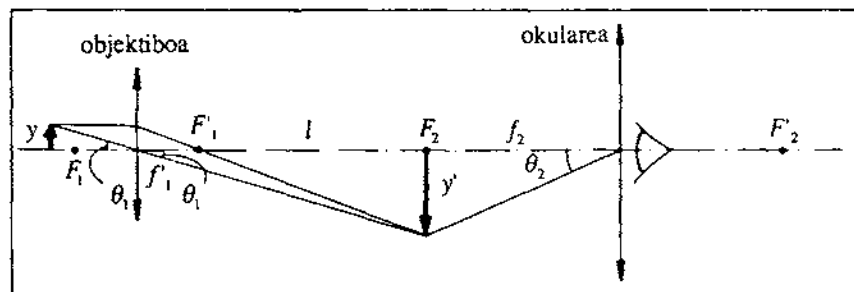
Kasu honetan, okulara osatzen duten lenteek ez dute distantzia fokal berbera; oster, heraien arteko distantzia distantzia fokal bien baturaren erdia da. Okularea-ren lehenengo lentea, aurreko sistemak emango lukkeen irudi errearen aurretik jartzen da (beraz, aurreko sistemak emango lukkeen irudia ez da errealki eratuko). Lehen bezala, okulareak sorraraziko duen irudia infinituan egongo da. (Hemen ere, okulareak eratzen duen alegiazko irudia begiaren puntu hurbileraino eramango bagenu, ageriko tamaina handiena lortuko genuke).

Ohar gisa diogun ezen, okulara sinbolikoki adierazteko, lente konbergente baten ikurra erabiliko dugula hemendik aurrera.

28.24.4. Mikroskopia

Nahiz eta mikroskopia sistema nahiko konplexua izan, guk bi lentes osaturiko sistema dela suposatuko dugu: aurrean dagoena, objektiboa, eta atzekoa, okulara.

Objektiboaren eta okularearen arteko aklopamendua 28.38. irudian ikus daitekeen modura egiten da; hau da, objektiboaren irudi fokua, F'_1 delakoa, eta okularearen objektu fokua, F_2 delakoa, l tarte espazial batez banandurik daude.



28.38. irudia. Mikroskopiaren lente-egitura.

Mikroskopia objektu oso txikiak behatzeko erabiltzen den tresna optikorik ezagune-na da, eta bertan objektiboaren distantzia fokala okularearena baino askoz txikiagoa izaten da.

Objektua objektiboaren objektu distantzia fokaletik kanpo jartzen da, baina foku horretatik nahi dugun bezain hurbil, dagokion irudia erreala eta tamainarik handienekoa izan dadin. Gainera, objektiboak emandako irudi horren posizioa okularearen objektu fokuan eratzera behartzen dugu, bertatik irten ondoren infinituan era dadin eta begiak moldapen barik ikus dezan. (Begiaren moldapen-ahalmena kontuan hartuz, okulareak aztertzean esandakoa erants genezake, baina mikroskopiaren handipena edo ahalmena kalkulatzekotan, errazagoa izan dadin, begiaren moldapen gabeko kasua onartuko dugu).

Kalkula dezagun aipaturiko sistemaren handipen angeluar osoa. Irudiaren arabera,

$$M = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_0} \cong \frac{\theta_2}{\theta_0}, \quad (28-118)$$

non θ_0 angelua mikroskopio barik eta objektua begiaren puntu hurbilean kontsideratuz objektuak begian osatuko lukeen angelua den, eta θ_2 angelua, mikroskopioa erabiliz gero dagoen infinituko irudiak begian sortuko lukeen irudiaren anplitude angeluarra. Beraz,

$$\theta_0 \cong \tan \theta_0 \frac{y}{25}, \quad (28-119)$$

$$\theta_2 \cong \tan \theta_2 \frac{y'}{f_2'}, \quad (28-120)$$

eta hemendik,

$$M = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_0} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{25}{f_2'} = \beta'_{ob} M_{ok}. \quad (28-121)$$

Honelatan, ba, hauxe esan dezakegu: mikroskopio baten handipen angeluarra objektiboak ematen duen albo-handipenaren eta okulareak ematen duen handipen angeluarraren arteko biderketaz lortzen da. Bestalde, (28-121) adierazpenean ageri diren magnitude guztiak, positiboak direla kontsideratuko dugu, nahiz eta moduluaren ikurrik erabili ez izan.

Irudiari begiratuz, β'_{ob} beste era honetan adieraz dezakegu, l eta f_1' direlakoan funtzioz,

$$\beta'_{ob} = \frac{y'}{y} = \frac{l}{f_1'}, \quad (28-122)$$

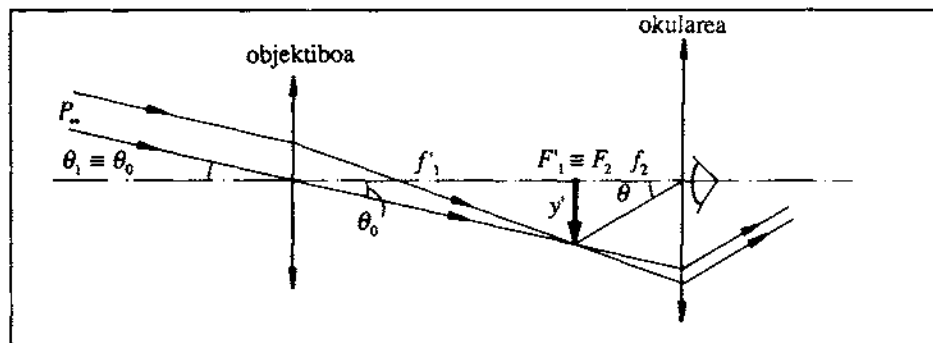
eta (28-121) formula ondokoa izango da:

$$M = \frac{25 l}{f_1' f_2'}, \quad (28-123)$$

non distantzia guztiak zentimetrotan neurtu behar diren. Beraz, objektiboaren eta okularearen distantzia fokalak eta akoplamendu-distantzia baino ez dira ezagutu behar, mikroskopioaren handipen angeluarra ezagutzeko.

28.24.5. Galileo-ren betaurreko astronomikoa

Izatez, mikroskopioa eta Galileo-ren betaurreko astronomikoa antzekoak dira. Biak, objektiboz eta okularez osaturik daude, baina helburuak desberdinak dira. Mikroskopioa oso txikiak diren objektuak behatzeko erabiltzen da, eta betaurreko astronomikoa, normal-ki, oso urrun eta handiak diren objektuak behatzeko. Kasu honetan, objektua infinituan dagoenez, objektiboak sorrarazten duen irudi erreala beraren plano fokalean eratuko da. Lehen bezala, plano fokal hori okularearen objektu plano fokalarekin kointzidentea eginik, irteeran irudia infinituan egongo litzateke. Beraz, lehen aipaturiko l distantzia nulua izango litzateke (ikus 28.39. irudia).



28.39. irudia. Galileo-ren betaurreko astronomikoaren egitura.

Hemen ere, betaurrekoaren handipen angeluarra betiko moduan definitzen da:

$$M = \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \equiv \frac{\theta}{\theta_0}. \quad (28 - 124)$$

Baina objektua puntu hurbilean jarri ezin denez, objektiboarekin osatzen duen angelua eta begiarekin eratuko duena berdinak izango dira: $\theta_0 = \theta_1$. Hortaz, 28.39. irudiari begiratu,

$$\tan \theta_0 = -\frac{y'}{f_1'} \quad \text{eta} \quad \tan \theta = \frac{y'}{f_2}. \quad (28 - 125)$$

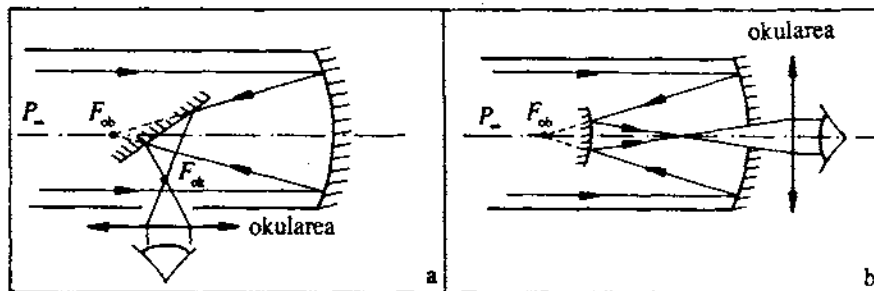
Ondorioz:

$$M = \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} = -\frac{f_1'}{f_2} = \frac{f_1'}{f_2}. \quad (28 - 126)$$

(28-126) ekuaziotik atera daitekeenez, betaurrekoa baliagarria izan dadin, $f_1' \gg f_2'$ izan beharko da.

28.24.6. Teleskopioa

Gaur egun, izarrak eta planetak behatzeko, lenteen ordez ispilu esferikoak erabiltzen dira zeren askoz errazagoak baitira eraikitzeke. Izatez, betaurreko astronomiko baten jokabidea dute, objektiboaren ordez ispilu esferiko bat jarri. Ispilu honek eratzen duen irudia okulare batez behatzen da, 28.40. irudietan ikus daitekeen bezala. Bertan ageri denez, mota desberdinetako muntaiak erabil daitezke.



28.40. irudia. a) Newton-en akoplamendua. b) Cassegran-en akoplamendua.

Dena den, kasu bakoitzean, beste ispilu batez baliatuz ateratzen dira argi-izpiak teleskopioaren hodiaren barnean, okularera hel daitezela.

A. eranskina

Analisi bektoriala

Liburu honetan zehar erabili diren eremu eskalar eta bektorialeiei buruzko definizio eta propietate nagusiak bildu nahi izan ditugu eranskin honetan, horrela egitea kapitulu askotan agertzen diren funtsezko egituren arteko erlazioak era nabarian ezartzeko baliagarri gerta daitekeelakoan.

Berez eranskin matematikoa izan arren, hemengo zorrotasun matematikoaren maila lan osoarenaren antzekoa izango da, xumea. Horrela, ideiak azpimarratzen saiatu gara, batzuetan frogapenen kalterako izan bada ere. Gainera, lerro- eta gainazal-integralak definitu dira, baina ez dugu kalkulu-metodori eman, kontzeptua baino ez baitugu beharko.

A.1. EREMU ESKALARRAK ETA EREMU BEKTORIALAK

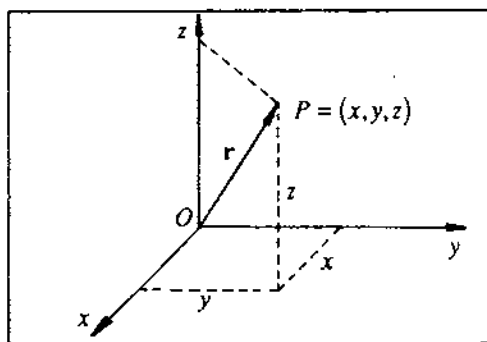
Aldagai bektoriala duten funtzioak izendatzeko, *eremu* hitza erabili ohi da Fisikan. Guk hemen bi eratako eremuak hartuko ditugu kontuan, balio eskalarrak eta bektorialak hartzen dituztenak hain zuzen. Horretarako, ondoko bi definizioak emango ditugu:

- *Eremu eskalarra* aldagai bektoriala eta balio eskalarra dituen funtzioa da. Adibidez, $V(\mathbf{r}) = r$ eremu eskalarraren bidez, bektore bakoitzari bere modulua dagokio. Potentzial elektrikoa eremu eskalarra da.
- *Eremu bektoriala* aldagai eta balio bektorialak dituen edozein funtzio da. Aipa dezagun kasurik sinpleena, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ identitate eremua alegia. Eremu elektrikoa eremu bektoriala da.

Aurrerantzean, bektoreak eta espazioko puntuak adierazteko triedro kartesiar bat aukeratuko dugu behin betiko. Horrela, erreferentzia-sistemaren jatorrian ipinitako $\mathbf{r}$ bektorea, P puntua eta (x, y, z) zenbaki-hirukotea elkarrekin identifikatuko ditugu,

$$\mathbf{OP} \equiv \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (\text{A} - 1)$$

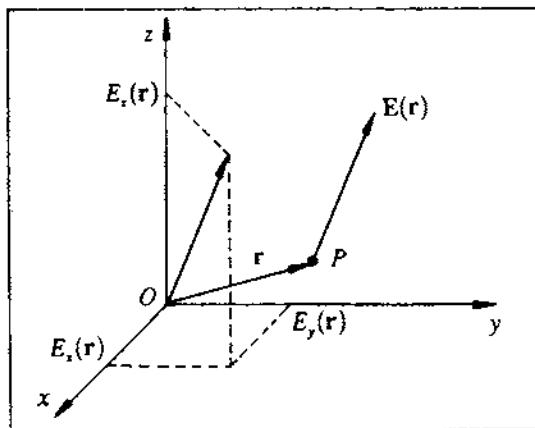
A.1. irudian ikus daitekeen bezala. Beraz, $V(P) = V(\mathbf{r})$ eta $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ identitateak direla kausa, eremuak '*puntu-funtzioak*' direla esan ohi da, espazioko puntu bakoitzari balio (eskalar edota bektorial) bat egokiarazten baitiote. Gainera, $V(x,y,z) = V(\mathbf{r})$ eta $\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ idazkerek dioskutenez, eremuak hiru eskalaren funtziotzat ere kontsidera ditzakegu.



A.1. irudia. P puntuaren definizioa koordenatu kartesianen bidez.

Zer esanik ez, $\mathbf{r}$ puntuari dagokion $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bektorea bere osagaietan deskonposaturik kontsidera dezakegu, A.2. irudian ikus dezakegun bezala:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + E_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + E_z(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad (\text{A} - 2)$$



A.2. irudia. P puntuko $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ eremuaren osagai kartesianak, jatorriarekiko translazio paraleloz adierazirik.

edo gauza bera dena,

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\mathbf{i} + E_y(x, y, z)\mathbf{j} + E_z(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (\text{A} - 3)$$

Ageri denez, gure erreferentzia-sistemako puntu bakoitzean $E_x(\mathbf{r})$ balio eskalar bat dugu; hau da, $\mathbf{r}$ aldagaiaren balio bakoitzari $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bektorearen x osagaia egokiarazten dion arauak eremu eskalar bat definitzen digu. Beste bi osagaiei buruz antzeko gauza esan daitekeenez, $\mathbf{E}$ eremu bektoriala hiru eremu eskalarrek osaturiko (E_x, E_y, E_z) multzoaren baliokidea da.

A.1.1. Sestra-gainazalak

Eremu eskalar batek K balio konstante jakina dueneko puntuen multzoari (leku geometrikoari, alegia) S sestra-gainazala deritzo. Beraz, ondoko ekuazioak adierazitako baldintzak azaltzen digu S sestra-gainazala osatzen duten puntuen multzoa:

$$V(\mathbf{r}) = K. \quad (\text{A} - 4)$$

Argi dago, definizioz, puntu bakoitza sestra-gainazal batean —eta bakar batean— dagoela eta, ondorioz, sestra-gainazalek ez dutela elkar ebakitzen.

Adibidez, eremu eskalarra $V = \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = z$ baldin bada, dagokion S sestra-gainazala $z = K$ ekuazioak emandakoa izango da, hau da, Oz ardatza K altueran ebakitzen duen plano horizontala. Baina $V = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ eremuaren kasuan, ordea, sestra-gainazala K erradioa eta O zentroa dituen gainazal esferikoa izango da, K positiboa bada, jakina.

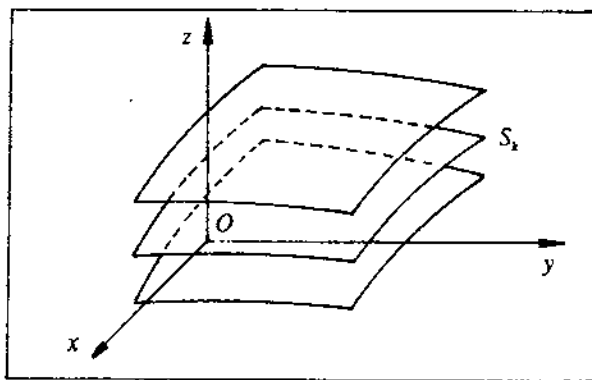
Eremu eskalar bat 'esferikoa' dela esaten da, baldin beraren sestra-gainazal bakoitza gainazal esferiko batek edota gainazal esferiko batzuek osaturik badago. Simetria esferikoa dela eta, erraz ikus daiteke eremu eskalar bat esferikoa dela, baldin eta soilik baldin honako hau betetzeko moduko $f(r)$ funtzio bat existitzen bada:

$$V(\mathbf{r}) = f(r) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right). \quad (\text{A} - 5)$$

Liburu honetan $V(r)$ idazkera laburbildua erabiliko dugu eremua esferikoa dela adierazteko. Kasurako, azken adibidea eta, esate baterako, $V(r) = \sin r$ delakoa eremu esferikoak dira.

Esandakoaren ondorioz, eremu eskalar bakoitzari ondoko bi baldintzak betetzen dituen gainazal-multzo bakar bat dagokio:

- Espazioko puntu bakoitzetik multzoko gainazal bat, eta soilik bat, pasatzen da.
- Multzoa parametrizaturik dago; hau da, gainazal bakoitzari berari esleitutako balio eskalar bat dagokio.



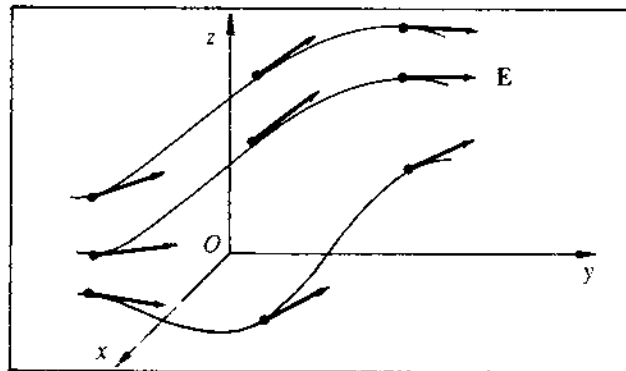
A.3. irudia. Sestra-gainazalek ez dute elkar ebakitzen. Bakoitza parametroaren balio bati dagokio (S_k).

Eta, alderantziz, aurreko bi baldintzak betetzen dituen gainazal-multzo bakoitzak eremu eskalar bakar bat definitzen du. Espazioko puntu batean eremu horrek duen balioa ezagutzeko, aski da puntu horretatik pasatzen den multzoko gainazalari dagokion parametroaren balioa ezagutzea (A.3. irudia).

A.1.2. Eremu-lerroak

Antzeko gauza egin daiteke kurben bidez. Hurrengo bi baldintzak betetzen dituzten lerroen multzoari 'kurba-kongruentzia' deritzo:

- Puntu bakoitza kongruentziaren kurba bakar batean dago.
- Kurba bakoitza t parametro baten bidez parametrizaturik dago.



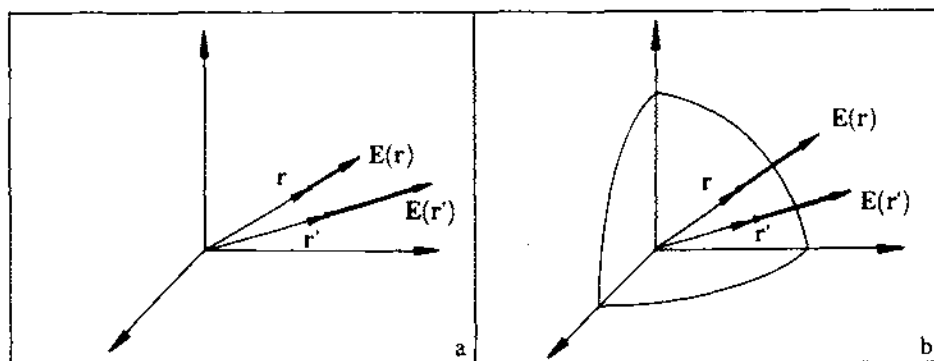
A.4. irudia. Puntu bakoitzean eremu bektoriala eremu-lerroen tangentea da.

Horrelako kongruentzia bati eremu bektorial bakar bat esleia diezaiokegu: puntu bakoitzean, bertatik pasatzen den kurbak bertan duen bektore tangentea izango da aipaturiko eremuaren balioa (ikus A.4 irudia). Eta, alderantziz, edozein eremu bektoriali azken baldintza hori betetzen duen kurba-kongruentzia bakar bat dagokio. Azken emaitza hau ekuazio diferentzialen existentziaren eta bakartasunaren teorema ospetsuaren ondorio zuzena da, baina hemen ez dugu frogatuko. Diogun soilik, kurba-kongruentzien eta eremu bektorialen arteko korrespondentzia biunibokoa dela. Eremu bektorial bati dagokion kongruentziaren kurba bakoitzari *korrante-lerroa* edota *eremu-lerroa* deritzo. Lehenengo izenaren jatorri historikoa Fluidoaren Meknikan dago, noski, baina kontzeptua beste testuinguru askotan ere agertzen da, hala nola Dinamika orokorrean (kasu berezi honetan, 'indar-lerroez' mintzatzen da).

Eremu bektorial baten korrante-lerro guztiak puntu berberetik pasatzen diren lerrozuzenak badira, hau da, eremu bektorialaren egitura honelako bada,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\mathbf{u}, \quad (\text{A} - 6)$$

eremu zentrala dela esango dugu. Azken adierazpen honetan triedroaren jatorritzat, aipaturiko puntua, eremuaren *poloa* deritzona, aukeratu dugu (ikus A.5.a irudia).



A.5. irudia. a) Eremu zentrala. b) Eremu esferikoa.

Azken baldintza hori betetzeaz gain, $E(\mathbf{r})$ modulua eremu eskalar esferikoa baldin bada, eremu bektorialari *esferikoa* deritzo eta ondoko eran ipin daiteke (A.5.b irudia):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{u}_r. \quad (\text{A} - 7)$$

A.1.3. Eremu eskalarraren gradientea

Gogora dezagun 6.7. atalean eremu eskalar baten gradienteari buruz esandakoa. Eragiketa honen bidez, V eremu eskalar bakoitzari ondoko eremu bektoriala dagokio:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right). \quad (\text{A} - 8)$$

Gradientearen propietateetatik hemen ez dugu han esandakoa errepikatuko, eta adibide pare bat aipatzera mugatuko gara.

Lehenengo adibide modura, $V = r$ eremu eskalarraren kasuan, esaterako, hauxe dugu:

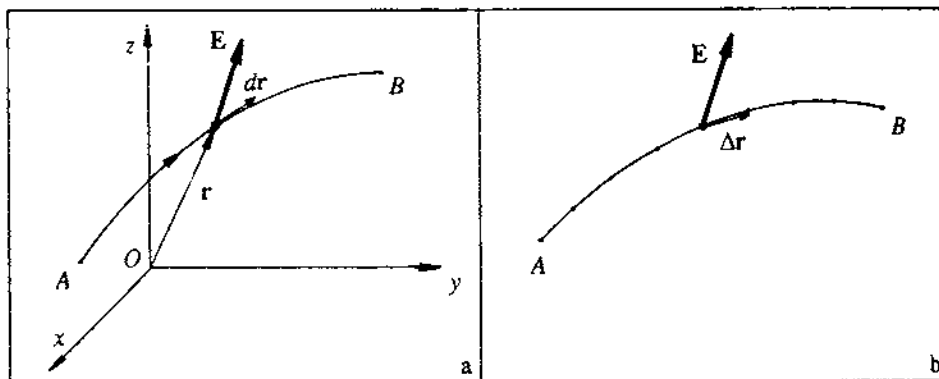
$$-\text{grad } r = -\mathbf{u}_r, \quad (\text{A} - 9)$$

jakina dugunez. Emaizta horren eta Kalkulu Diferentzialaren ondorio zuzen modura honako hau lor dezakegu:

$$-\text{grad } V(r) = -\frac{dV}{dr}\mathbf{u}_r, \quad (\text{A} - 10)$$

edozein eremu esferikoren kasuan. Eta, bereziki, bigarren adibide modura eremu coulombiarra badugu,

$$-\text{grad } \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r. \quad (\text{A} - 11)$$



A.6. irudia. a) C lerro kurbatua zeharreko lerro-integralerako elementuak.
b) C lerroaren zatiketa.

A.2. LERRO-INTEGRALA ETA ZIRKULAZIOA

Kontsidera dezagun espazioko bi puntu (A eta B) lotzen dituen C lerro orientatua (A.6. ir.). Espazioan E eremu bektoriala definiturik dagoela suposatuko dugu. Kurba eta eremuak osaturiko bikoteari zenbaki bat esleituiko diogu ondoko metodoaren bidez:

- Hasteko, kurba A.6.b irudian ikus daitekeen modura zatituko dugu.
- Bigarrenik, kurbaren orientazioak definituriko zati bakoitzaren hasierak eta amaierak Δr bektore bat ematen digute. Aipaturiko zatiko hasieran eremu bektorialak duen E balioa eta Δr delakoa biderkatuko ditugu, zenbakia lortzeko. Zati guztietan horrela lorturiko zenbakiak elkarrekin batuko ditugu.
- Azkenik, zati bakoitzaren luzera zerorarantz joanez limitean lorturiko zenbakiari, honelaxe idatzitakoari,

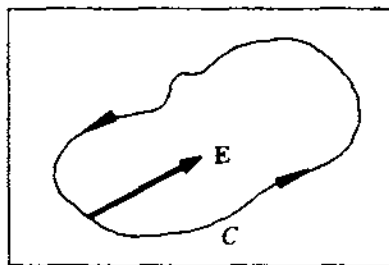
$$I \equiv \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A} - 12)$$

lerro-integral izena emango diogu.

Mota honetako integralak Fisikaren arlo askotan ageri dira, eta batzuetan izen bereziak ematen zaizkie. Esaterako, 6. gaian oso adibide garrantzitsua ikusi dugu, 'lana' deritzon indarraren lerro-integrala hain zuzen.

Kurba (integrazio-bidea) itxia bada, lerro-integrala E eremuaren *zirkulazioa* dela esaten da, eta modu honetan idatziko dugu (A.7. irudia):

$$I_C \equiv \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A} - 13)$$



A.7. irudia. Lerro itxian zeharreko lerro-integralari zirkulazioa deritzo.

Kurbaren orientazioa aldatzen badugu, $\Delta \mathbf{r}$ bektorearen noranzkoa (beraz, lerro-integralaren zeinua ere) aldatu egingo da. Honela adieraziko dugu propietate hori:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{A} - 14)$$

Bi integralok C lerroan barrena baina alderantzizko noranzkoan kalkulaturik daudela suposatuz dugu hemen. Hurrengo hiru propietateok ere erraz frogatu daitezke:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_D^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A} - 15)$$

non D delakoa C lerroko edozein puntu den. Bestetik,

$$\int_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A} - 16)$$

$$\int_C (a\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} = a \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A} - 17)$$

a eskalar konstantea izanik.

Aurreko atalean ikusi dugunez, eremu eskalar bakoitzetik eremu bektorial bat lor dezakegu gradientearen bidez. Baina, alderantziz, egia ote da edozein eremu bektorial eremu eskalar baten gradiente denik? Erantzuna 'batzuetan soilik' esatea da, eta horrek hurrengo definizioa ematera bultzatuko gaitu.

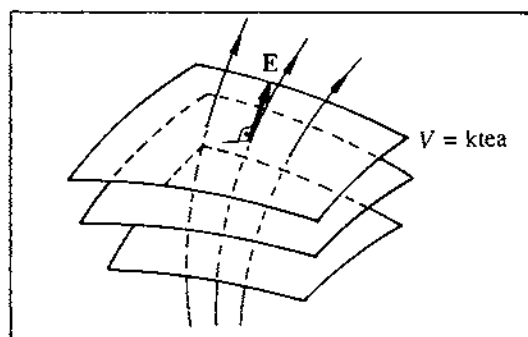
E eremu bektoriala *kontserbakorra* dela esango dugu, baldin eta hurrengo baldintza betetzen duen V eremu eskalar bat existitzen bada:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V, \quad (\text{A} - 18)$$

Kasu horretan, V delakoari E eremuaren *potentziala* deritzo. Zeinuaren hautapena energiaren hitzarmenak gordetzeko asmo hutsaz egin da, noski; eta, bestalde, erraz ikus daitekeen, V potentziala ez da bakarra, zeren konstante bat gehitzen bazaio eremu bektoriala ez baita aldatzen,

$$-\text{grad } (V + K) = -\text{grad } V - \text{grad } K = -\text{grad } V. \quad (\text{A} - 19)$$

Eta alderantziz, eremu kontserbakorraren potentzial bat ezagutuz gero, beste guztiak aurrekoari konstanteak gehituz lor daitezke.

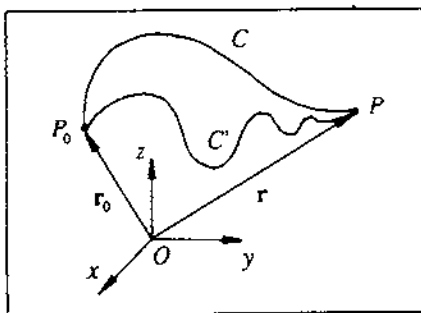


A.8. irudia. Puntu guztietan bertako gainazal ekipotentzialak eta eremu-lerroak elkarren perpendikularak dira.

6.7. atalcan ikusi genuen gradientearen esanahi geometrikoa gogoratu, espazioko puntu bakoitzetik pasatzen diren V potentzialaren sestra-gainazala (gai hartan '*gainazal ekipotentziala*' izena eman genion) eta $\mathbf{E}$ eremu kontserbakorraren eremu-lerroak elkarren perpendikularak dira (ikus A.8. irudia).

Aipaturiko 6.7. puntuan esandakoaren arabera, $\mathbf{E}$ eremua kontserbakorra izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa beraren lerro-integralak integrazio-bidearen menpekotasunik ez izatea da; kasu horretan ondoko erlazioa beteko da:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A} - 20)$$



A.9. irudia. Eremu kontserbakorren kasuan P_0 -tik P -rako integrazioa edozein kurbatan barrena egin daiteke.

non integrazio-bidea P_0 eta P puntuak lotzen dituen edozein kurba den (A.9. irudia). Azken adierazpen horren bidez, aldeztu aurretik eremua kontserbakorra dela baldin badakigu, beraren potentziala kalkula dezakegu. Horretarako, $\mathbf{r}_0$ puntu bakar batean $\mathbf{E}$ eremuak duen balioa ezagutu edota aukeratu behar dugu. Balio bakar bat aukeratzeko askatasuna, potentziala konstante batukor batcan izan ezik definiturik egotetik datorkigu. Eta alderantziz, potentzialaz balia gaitzke eremu kontserbakor baten lerro-integrala kalkulatzeko, azken emaitza honelaxe ere idatz daitezake:

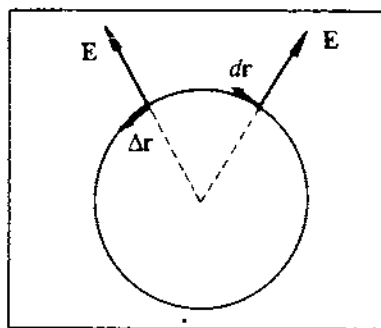
$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V(A) - V(B). \quad (\text{A} - 21)$$

Bi puntu ezagun lotzen dituzten C eta C' kurbak hartzen baditugu eta haietariko baten orientazioa aldatzen badugu, lerro itxi bat lortuko dugu. Eta alderantziz, kurba itxi batean bi puntu aukeratuz gero, aipaturiko puntuak lotzen dituzten bi lerro lortuko dira. Hori dela eta, $\mathbf{E}$ eremu bektoriala kontserbakorra da, baldin eta soilik baldin edozein C kurba itxitan barrena beraren zirkulazioa nulua bada, hots:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (\text{A} - 22)$$

Adibide moduan, kontsidera dezagun $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^3$ eremu bektoriala. Ba dakigu $V = 1/r$ potentzialetikoa dela (ikus aurreko atalean esandakoa), baina hemen jatorrian zentraturiko zirkunferentziara hedatutako lerro-integrala nulua dela ikusiko dugu era zuzenean. Horretarako, aski da limitean $\Delta\mathbf{r}$ bektorea zirkunferentziaren tangentea eta, beraz, erradioaren eta $\mathbf{E}$ eremu zentralaren perpendikularra dela ikustea (A.10. irudia):

$$\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{A} - 23)$$



A.10. irudia. Eremu erradialaren kasuan $\Delta\mathbf{r}$ eta $\mathbf{E}$ bektoreak elkarren perpendikularak dira.

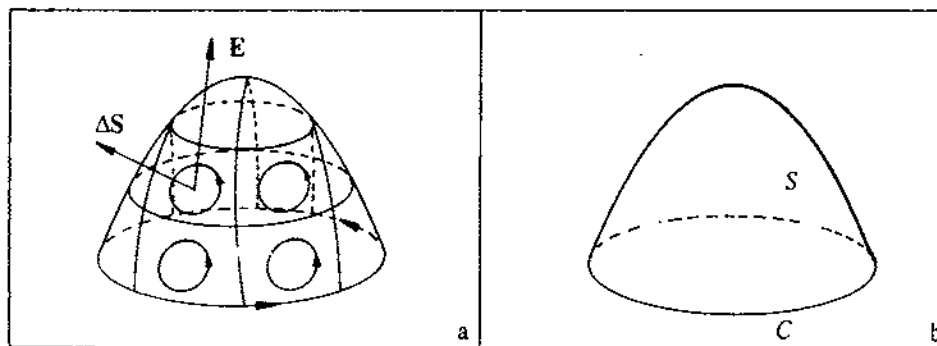
Kasurik orokorrean ere, potentzial elektrikoa aztertzean, emaitza berbera lortzen dela ikusi dugu. Areago, edozein eremu esferiko, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$, kontserbakorra da, ondoko potentziala aukeratzea aski baita:

$$V(r) = - \int E(r) dr + \text{ktea}. \quad (\text{A} - 24)$$

Agerikoa denez, emaitza hau aurreko atalean ikusikoaren ondorio zuzena da.

A.3. GAINAZAL-INTEGRALA ETA FLUXUA

Atal honetan alde biko gainazal bat kontsideratuko dugu eta A.11.a irudian ikus daitezkeen moduko partiketak hartuko ditugu kontuan. Paralelogramo lerroakur guztiak elkarrekiko (eta bai C muga-lerroarekiko ere) orientatuak dira. Horrelako bi orientazio daude eta hemendik aurrera horietariko bat aukeraturik dagoela suposatuko dugu.



A.11. irudia. Gainazal-integrala egiteko partiketak, zeinu-hitzaermenaz.

Lerro-integralaren kasuan erabilitakoaren antzeko metodo bati jarraituz, S gainazalari eta $\mathbf{E}$ eremu bektorialari ondoko zenbakia esleia dakieke,

$$\Phi \equiv \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A} - 25)$$

zeinari *gainazal-integrala* edota *fluxua* deritzen. Horretarako hurrengo hiru pausoak emango ditugu:

- Paralelogramo lerromakur bakoitzari, 2.3. puntuan definituriko $\Delta\mathbf{S}$ bektorea esleituko zaio.
- Aipaturiko paralelogramoaren zentroan $\mathbf{E}$ eremuak duen balioa eta $\Delta\mathbf{S}$ bektorea elkarrekin biderkatuko dira eta zati guztietan horrela lortutako $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}$ zenbakiak batu egingo dira.
- Paralelogramo bakoitzaren azalera zerorantz joango da.

Gainazal-integralaren aplikazio garrantzitsuenetarikoa eta, agian, intuitiboena gertatzen dena, fluidoaren arlokoa dugu. Izan ere, fluidoaren abiaduraren fluxuak, denbora-unitatean gainazalean zehar pasatzen den fluidoaren bolumena adierazten digu. Beste adibide interesgarri bat korrontearen intentsitateak emandakoa da.

Lerro-integralen kasuan bezalaxe, gainazalaren orientazioa aldatzen bada, integralaren zeinua ere aldatuko da. Bestalde, S delakoa S_1 eta S_2 gainazalen bildura bada,

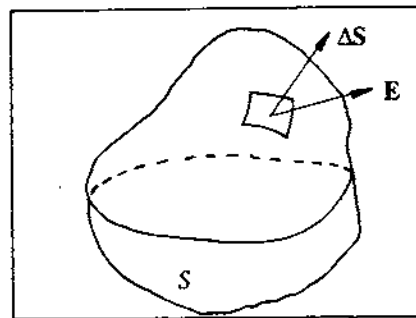
$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A} - 26)$$

Gainera, eragiketa hori lineala denez, ondoko propietateak betetzen ditu. Batetik,

$$\iint_S (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A} - 27)$$

eta bestetik, a eskalarra eta konstantea izanik,

$$\iint_S (a\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = a \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A} - 28)$$



A.12. irudia. Gainazal itxia.

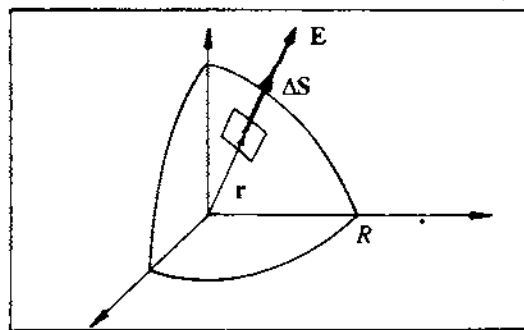
Integrazio-gainazala itxia baldin bada, beraren muga-lerroa hutsa da eta gainazalaren orientazioa kanporanzkoa (A.12. irudian ikus daitekeen bezala) edota barruranzkoa (kontrakoa) izan daiteke; kasuaren arabera, gainazal-integral 'kanporanzko fluxua' edota 'barruranzko fluxua' dela esan ohi dugu, eta $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ idazkera erabili ohi dugu.

Berriro ere, adibide modura, $\mathbf{E} = \mathbf{u}/r^2$ eremua hartuko dugu kontuan. Aipaturiko eremua R erradioa eta O zentroa dituen gainazal esferikoan zehar integra dezakegu. Puntu bakoitzean $\mathbf{E}$ eta $d\mathbf{S}$ elkarren paraleloak dira; ondorioz:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| \cdot |d\mathbf{S}| = \frac{1}{R^2} |d\mathbf{S}|. \quad (\text{A} - 29)$$

Bestalde, R erradiodun esferaren gainazal osoaren azalera $S = 4\pi R^2$ da, eta, ikusi dugu-naren arabera,

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{S}{R^2} = 4\pi. \quad (\text{A} - 30)$$

A.13. irudia. $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^3$ eremuaren fluxuaren azterketa.

Ikus daitekeenez, emaitza horrek ez du erradioaren menpekotasunik. Izan ere, eremu bektorial esferiko horren kanporanzko fluxuak balio bi baino ez ditu hartzen: 4π balioa eremuaren poloa ($\mathbf{r} = 0$) gainazal barruan baldin badago, eta 0, poloa esferatik kanpo badago.

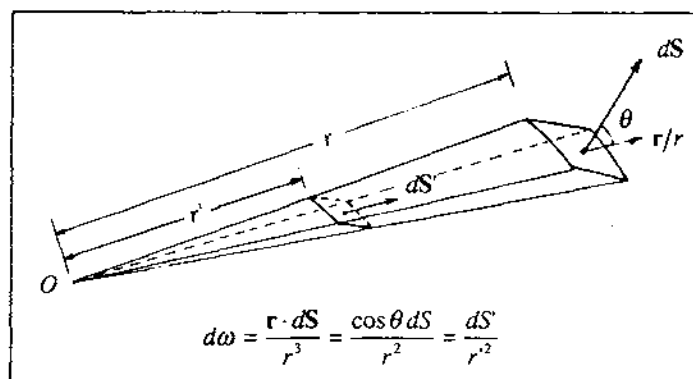
Emaitza horren esangura argiago ikusteko, kontsidera dezagun ondoko ekarpen infinitesimala (ikus A.14. irudia):

$$d\omega = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{dS \cos \theta}{r^2}. \quad (\text{A} - 31)$$

O jatorririk ikusita dS gainazalaren zatiak $d\omega$ estereorradianeko angelu solidoa definitzen du. Hortaz, aipaturiko ekarpen infinitesimalen batura den

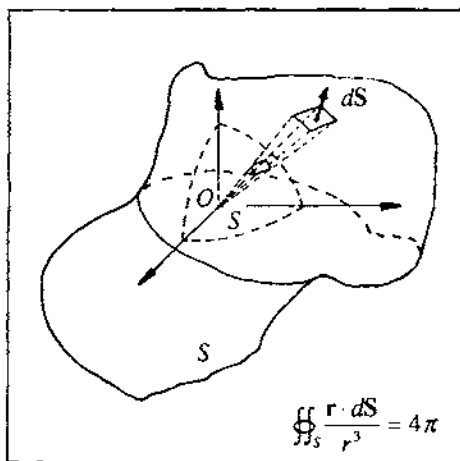
$$\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} \quad (\text{A} - 32)$$

fluxua, jatorririk ikusita S gainazalak determinatzen duen angelu solido osoa da.



A.14. irudia. Angelu solido infinitesimala.

Jatorria barruan badago, aipaturiko angelua jatorrian zentratutako gainazal esferiko bati dagokionaren berdina izango da, hau da, 4π baliokoa.

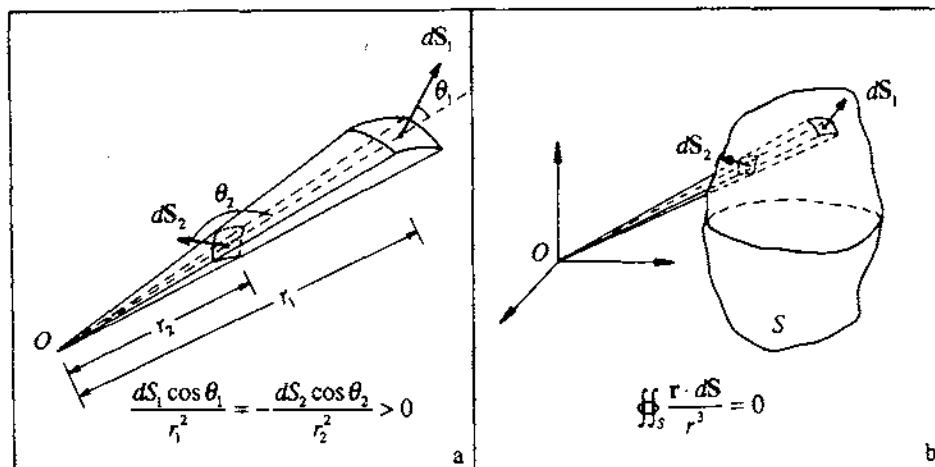


A.15. irudia. Jatorria gainazal itxiaren barnean badago, gainazalak estaltzen duen angelu solidoak 4π balio du.

Jatorria gainazalek kanpo baldin badago, oster, angelu solidaren elementu bakoitzak bi ebakidura definituko ditu, dS_1 eta dS_2 , eta dagozkien ekarpenek balio absolutu berbera dute,

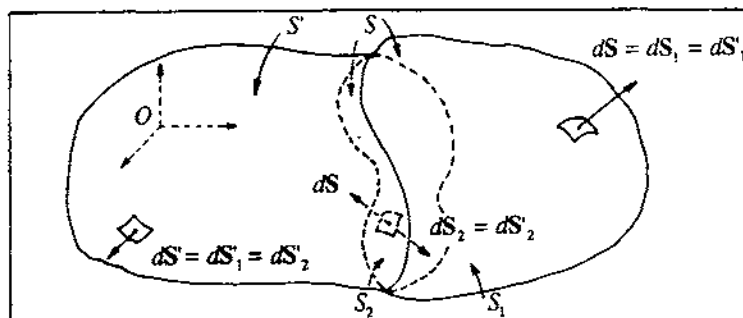
$$|d\omega| = \frac{dS_1 |\cos \theta_1|}{r_1^2} = \frac{dS_2 |\cos \theta_2|}{r_2^2}, \quad (\text{A} - 33)$$

baina zeinu desberdinak, $\cos \theta_1$ eta $\cos \theta_2$ balioen zeinuak ere elkarren aurkakoak baitira. Azkenean, beraz, ez da ezer geratuko, elkarren artean anulatzen dira eta (ikus A. 16. irudiak).



A.16. irudia. Jatorria gainazal itxitik kanpo badago, gainazal-bikoteen ekarpenak elkarren aurkakoak dira, eta, guztira, jatorriaren inguruan estaltzen den angelu solidoa nulua da.

Egia esan, kasurik orokorrean elementu bakoitzari dagokion ebakiduren kopurua ez da halaberharrez bikoa izango, baina bai bikoitia (eta lehenago aztertutako kasuan, hots, O puntua gainazalaren barruan zegoenean, bakoitia) eta arrazonamendua bikote bakoitzaren kasuan errepika daiteke.



A.17. irudia. Gainazal itxiari dagokion (A-34) emaitza frogatzeko bigarren metodoa.

Bigarren emaitza lehenbizikoaz baliatuz ere lor daiteke. Horretarako, aski da S gainazala bi zatitan banatuz gero A.18. irudian ageri denaren moduko S' gainazala aukeratzea eta gainazal-integralen propietateak erabiltzea, ondoko era honetan preseski.

$$\begin{aligned}\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} &= \iint_{S_1} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}_1}{r^3} - \iint_{S_2} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}_2}{r^3} = \\ &= \iint_{S_1} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}_1}{r^3} + \iint_{S'} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'}{r^3} - \iint_{S_2} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}_2}{r^3} - \iint_{S'} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'}{r^3}\end{aligned}$$

eta azkenean,

$$\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \oiint_{S_1} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}_1'}{r^3} - \oiint_{S_2} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}_2'}{r^3} = 4\pi - 4\pi = 0 \quad (\text{A} - 34)$$

Hemen S'_k gainazal bakoitza S' eta S_k gainazalen bildura da, eta bere barruan O jatorria dauka.

Bibliografia

- Alonso, M. eta Finn, E. J. (1970): *Física*, Vol I. *Mecánica*, Vol II, *Campos y Ondas*, Vol III, *Fundamentos Cuánticos y Estadísticos*, Ed. Fondo Educativo Interamericano.
- Bandres, L. M. (1979): *Elektromagnetika*, UEU, Iruñea.
- Bandres, L. M.; Goirizelaia, I. eta Ensunza, M. (1982): *Teknologia Elektrikoa. Eranskinak*, UEU, Iruñea.
- Bandres, L. M. eta Sagarra, A. (1981): *Teknologia Elektrikoa*, UEU, Iruñea.
- Bricard, J. eta Benoit, H. (1966): *Physique*, Editions Medicales Flammarion, Paris.
- Buckingham, A. D. (1966): *Los principios de la Termodinámica y sus aplicaciones*, Ed. Alhambra S.A., Madrid.
- Callen, H. B. (1960): *Thermodynamics*, J. Wiley and Sons, New York.
- Casas, J. (1978): *Optica*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
- Catalá, J. (1972): *Física General*, Ed. Saber, Valentzia.
- Crawford, F. S. (1969): *Berkeley Physics Course*, Vol 3, *Ondas y Oscilaciones*, Ed. Reverté, Barcelona.
- Edminister, J. A. (1969): *Circuitos Eléctricos*, McGraw-Hill, México.
- Eisberg, R. M. eta Lerner, L. S. (1984): *Física, Fundamentos y aplicaciones*, McGraw-Hill.
- Elortza, J. M. (1991): *Termodinamika Makroskopikoa*, UEU, Bilbo.
- Elhuyar Taldea (1984): *Elektrika-Elektronika Hiztegia*, Elhuyar, Donostia.
- Elhuyar Kimika-Taldea (1982): *Termodinamika klasikoaren oinarriak*, UEU, Iruñea.
- Ensunza, M. (1983): "Potentzi faktorearen garrantzia", *Elhuyar* 9, 4.
- Etxebarria, J. R. (1984): *Física Orokorra (I)*, *Mekanika*, 3. argitarapena, UEU, Iruñea.
- Etxebarria, J. R. eta Plazaola, F. (1992): *Mekanika eta Uhinak*, UEU, Bilbo.
- Feynman, R. P.; Leighton, R. B. eta Sands, M. (1971): *Física*. Vol I. *Mecánica, radiación y calor*, Fondo Educativo Interamericano SA, Bogotá.
- , (1989): *The Feynmann Lectures on Physics*, Addison-Wesley, California.
- Françon, M. (1969): *Physique*, Masson et Cie, Paris.
- Gettys, W. E.; Keller, F. J. eta Skove, M. J. (1991): *Física Clásica y Moderna*, Mc Graw Hill, Madrid.
- Gonzalez Vian, J. (1990): *Física Fundamental. Mecánica y Ondas. Tomo I*, UPV/EHU, Bilbao.
- Jenkins, F. A.: *Fundamentos de Optica*, Ed. Aguilar.
- Kip, A. F. (1969): *Fundamentals of Electricity and Magnetism*, second edition, McGraw-Hill, New York.

- Kittel, C.; Knight, W. D. eta Ruderman, M. A. (1968): *Berkeley Physics Course*, Vol I, *Mecánica*, Ed. Reverté, Bartzelona.
- Mañas, J. eta Martínez Aguirre, R. (1967): *Física General*.
- Ohanian, H. C. (1989): *Physics*, second edition expanded, W. W. Norton, New York.
- Panofsky, W. K. H. eta Phillips, M. (1972): *Classical Electricity and Magnetism*, second edition, Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Present, R. D. (1958): *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, New York.
- Purcell: *Berkeley Physics Course*, Vol 2, *Electricidad y Magnetismo*.
- Reitz, J. R. eta Milford F. J. (1969): *Fundamentos de la teoría elektromagnética*, Uteha, México.
- Rossel, J. (1974): *Física General*, Editorial AC, Madril.
- Sears, F. W. (1963): *Fundamentos de Física*, Vol II, *Electricidad y Magnetismo*, Vol III, *Optica*, Ed. Aguilar, Madril.
- Sears, F. W. eta Zemansky, M. W. (1969): *Física*, Ed. Aguilar, Madril.
- Simons, S. (1968): *Análisis vectorial*, Alhambra, Madril.
- Streeter, V. L. (1967): *Mecánica de los Flúidos*, Ed. del Castillo, Madril.
- Tilley, Thumm (1976): *Física*, Fondo Educativo Interamericano.
- Timoshenko, S. (1967): *Resistencia de Materiales*, Espasa-Calpe, Madril.
- Tipler, P. A. (1985): *Física*, Tomos I y II, Ed. Reverté, Bartzelona.
- UEUko Fisika Taldea (1986): *Fisika Orokorra (II)*, UEU, Iruñea.
- , (1989): *Fisika Orokorra. Ariketak*, UEU, Iruñea.
- UZEI Taldea (1979): *Fisika Hiztegia*, Ediciones Vascas-Elkar-Hordago, Donostia.
- , (1982): *Matematika Hiztegia*, Elkar, Donostia.
- , (1985): *Teknologia Mekanikoa Hiztegia*, Elkar, Donostia.
- Weber, R. L.; Manning, K. V. eta White, M.W. (1970): *Física*, Reverté, Bartzelona.
- White, H. E. (1965): *Física Moderna*, Uteha, México.
- Yavorski, B. M. eta Detlaf, A. A. (1977): *Manual de Física*, Ed. MIR, Mosku.
- Young, H. D. (1966): *Fundamentos de Mecánica y Calor*, Ed. del Castillo SA, Madril.
- Zemansky, M. W. (1970): *Calor y Termodinámica*, Ed. Aguilar, Madril.

Kontzeptuen eta izenen aurkibide alfabetikoa

- (Cleveland) Abbe, 573
 Abbe-ren aldaezina, 573, 582
 abiadura, 57, 59, 83, 86, 89
 (aldiuneko) abiadura, 61
 (azalera-)abiadura, 118
 (batez besteko) abiadura, 60
 (fase-)abiadura, 330, 339, 341
 (ihes-)abiadura, 248
 (labainketa-)abiadura, 176
 (muga-)abiadura, 112
 (higidura oszilakorreko) abiadura, 307
 (uhinaren hedapenaren) abiadura, 330
 (zeharkako) abiadura, 143
 abiaduraren izaera erlatiboa, 83
 abiaduraren modulua, 62
 abiaduraren osagaiak, 61
 abiaduraren osagai erradiala, 113
 abiaduraren zeharkako osagaia, 113
 abiaduren banaketa-funtzioa, 533
 (solido zurrunaren) abiaduren eremuua, 173
 abiadura angeluarra, 31, 73, 175
 (solido zurrunaren) abiadura angeluarra, 175
 abiadura angeluar konstantea, 466
 abiadura areolarra, 118, 227, 241
 abiadura erradiala, 143
 abiadura lineala, 175
 abiadura-unitateko partikula-kopurua, 533
 absolutua (denbora), 25
 absolutua (espazioa), 25
 adierazpen faseriala, 471-474, 479
 ahalmen optikoa, 582, 590
 ahurdura, 67
 airearen marruskadura, 68
 akzio-erreakzioaren legea/printzipioa, 104, 157, 159, 213, 217
 albo-handipena, 577
 aldaezina, 49, 86
 (Abbe-ren) aldaezina, 573
 (Lagrange-Helmholtz-en) aldaezina, 575
 aldaezintasun galilearra, 86
 aldaezin bektoriala, 49, 175, 176, 192
 aldaezin eskalarra, 49, 176
 aldaratze-indarra, 370
 alderantzizko triedroa, 34
 aldiberekotasuna, 26
 aldiuneko abiadura, 61
 aldiuneko azelerazioa, 62
 aldiuneko balioa, 468, 469
 aldiuneko fasea, 306
 aldiuneko potentzia, 130, 480
 (solido zurrunaren) aldiuneko zentroa, 177
 alegiazko irudia, 570
 alegiazko objektua, 570
 (bektore askeen) aljebra, 36
 alternadorea, 419, 466
 alternantzia, 467
 (André Marie) Ampère, 395
 amperea (unitatea, A), 29, 394, 428
 Ampère-ren legea, 440, 444, 458
 Ampère-Maxwell-en formulazioa, 462
 Ampère-Maxwell-en legea, 458, 460
 amperemetroa, 486
 analisi bektoriala, 609
 angelua, 31
 angelu solidoa, 31, 620
 angelu solido infinitesimala, 534, 620
 angelu solido osoa, 534
 (errefrakzioarako) angelu kritikoa, 354
 anplitudea, 305
 anplitude modulatuua, 317
 antenaren bidezko erradiazio elektromagnetikoa, 499
 antineutrinoa, 102
 (propietate) antitrukakorra, 44

- antizikloia, 126
- antzekotasuna, 287
- antzekotasun geometrikoa, 590
- (bektoreen) aplikazio-puntua, 36
- (biraketa-)ardatza, 176
- ardatzarekiko inertzia-momentua, 178
- ardatz finkoaren inguruko higidura, 199
- (inertzia-)ardatz nagusia, 179
- ardatz optikoa, 569, 572
- ardatz zentrala, 50, 51, 176, 192
- ardatz-bektorea, 36
- ardatz-indarra, 119
- argia, 561
- argiaren abiadura, 26, 86, 563
- argiaren ereduak, 563
- argiaren errefrakzio-indizea, 563
- argi ikuskorra, 503
- argi monokromatikoa, 564
- argi-izpia, 563
- argi-izpi konjokatuak, 587
- argi-konoa, 563
- argi-partikula, 562
- argi-sorta, 563
- argi-intentsitatea, 28
- Aristarko Samoskoa, 226
- Arkimedes-en bultzada, 112, 297
- Arkimedes-en indarra, 111
- Arkimedes-en printzipioa, 275
- (korrontearen) artezgailua, 394
- askatasun-graduak, 169, 538
- (bibrazioaren) askatasun-graduak, 538
- (biraketaren) askatasun-graduak, 538
- (translazioaren) askatasun-graduak, 538
- astigmatismoa, 601
- Astronomia, 225
- atomoa, 561
- autoindukzioa, 453, 470, 471
- autoindukzio-koefizientea, 453, 471, 472
- (Amadeo) Avogadro, 530
- Avogadro-ren zenbakia, 530
- azalera (bektoriala), 45
- azalera-abiadura, 118
- azeleragailua, 418
- azelerazioa, 57, 62, 83, 86, 92
- (aldiuneko) azelerazioa, 62
- (batez besteko) azelerazioa, 62
- (Coriolis-en) azelerazioa, 93
- (higidura oszilakorreko) azelerazioa, 307
- azelerazioaren izaera erlatiboa, 84
- azelerazio konstanteko higidura, 63
- azelerazioaren osagaia erradiala, 78
- azelerazioaren osagai normala, 69, 77
- azelerazioaren osagai tangentiala, 69, 77
- azelerazioaren osagai zentripetua, 77
- azelerazioaren zeharkako osagaia, 78
- azelerazio 'absolutua', 93
- azelerazio angeluarra, 73, 75
- azelerazio 'erlatiboa', 93
- azelerazio lineala, 76
- azelerazio zentripetua, 71, 77, 93, 122
- balaztaketa-erradiazioa, 503
- balio eraginkorra, 468, 469
- balio maximoa, 469
- baliokidetza-printzipioa, 229
- banaketa-funtzioa, 533
- (propietate) banakorra, 41, 44
- banantze-gainazala, 352
- barne-energia, 134, 514, 520, 524
- (sistema termodinamikoren) barne-energia, 505, 544
- barne-errekuntzako motorra, 545
- barne-indarren lana, 165
- barne-indar kontserbakorrak, 165, 168
- barrak, 215
- barruranzko fluxua, 619
- batez besteko abiadura, 60
- batez besteko abiadura koadratikoa, 532
- batez besteko azelerazioa, 62
- batez besteko bero-ahalmen espezifiko, 514
- batez besteko bero-ahalmen molarra, 514
- batez besteko balioa, 468
- batez besteko distantzia, 531
- batez besteko energia-fluxua, 343
- batez besteko energia zinetikoa, 533
- batez besteko potentzia, 131, 342, 343
- begia, 599
- begi astigmatikoa, 601
- begi hipermetropea, 601
- begi miopea, 600
- bchatzailea, 58, 81, 360
- behe-lentsioa, 466
- bektoreak, 26, 35
- (ardatz-)bektorea, 36
- bektorearen osagaiak, 38
- bektoreen batuketak, 36
- bektoreen batura, 37
- bektore askeak, 36
- bektore askeen aljebra, 36
- bektore axialak, 36
- bektore biratzailea, 306, 471
- bektore labainkorrek, 36

- bektore lotuak, 36
- bektore polarrak, 36
- bektore unitarioak, 35
- bektore unitario binormala, 72
- bektore unitario normala, 71
- bektore unitario tangentea, 70
- belozimetroa, 61
- 'benetako' indarra, 121
- (Daniel) Bernouilli, 281
- Bernouilli-ren ekuazioa, 281, 283
- beroa, 469, 512, 549
- beroaren balioak mekanikoa, 513
- bero-ahalmenak, 512, 524
- bero-ahalmen espezifikoa, 513, 522
- (batez besteko) bero-ahalmen espezifikoa, 514
- bero-ahalmen espezifiko molarrek, 524
- bero-ahalmen molarra, 514
- (batez besteko) bero-ahalmen molarra, 514
- bero-erregulagailua, 520
- bero-iturria, 541, 550
- bero-kantitatea, 541, 550
- bero-transferentzia, 541
- (tokiko) bertikala, 124
- bertsoreak, 566
- β (beta) izpia, 102
- betaurrekoaren handipen angeluarra, 606
- betaurreko astronomikoa, 605
- bibrazioaren askatasun-graduak, 538
- bibrazio-energia, 313
- bide optikoa, 565
- (hiru bektoreen) biderkadura mistoa, 46
- (inertzia-)biderkadura, 178
- biderketa, 37
- biderketa bektoriala, 43
- biderketa bektorial bikoitza, 178
- biderketa eskalarra, 40
- bigarren motako higikari iraunkorra, 543
- bilakabide iraungikorrek, 320
- (bektore unitario) binormala, 72
- (Jean Baptiste) Biot, 423
- Biot-Savart-en legea, 423
- Biot-Savart-Laplace-ren legea, 442, 451
- biraketak, 34, 93, 173
- (solido zurrunaren) biraketaren poloa, 177
- biraketa askea, 198
- biraketa propioaren angelua, 173
- biraketa uniforme, 94
- biraketa uniformedun higidura erlatiboa, 88
- biraketa eta labaintetaren aldiuneko ardatza, 176
- biraketaren askatasun-graduak, 538
- biraketarik gabeko higidura, 176
- biraketa-ardatza, 176
- biraketa-ardatz finkoa, 199
- biraketa-energia zinetikoa, 525
- biraketa-erradioa, 185
- biraketa-hiperboloidea, 347
- birialaren garapena, 518
- birialaren koefizienteak, 518
- biskositatea, 266
- biskositate absolutua, 268
- biskositate dinamikoa, 268
- biskositate zinetikoa, 268
- (Newton-en) biskositatearen legea, 264
- biskositatearen unitateak, 267
- biskositate-koefizienteak, 110, 264, 266, 268
- (Ludwig Edward) Boltzmann, 447
- Boltzmann-en konstantea, 538
- bolumen-indarra, 249, 260
- bolumen-unitateko deformazioa, 254
- (uhin elektromagnetikoen) bolumen-unitateko energia, 497
- bolumen-unitateko momentu angeluar elektromagnetikoa, 497
- (uhin elektromagnetikoen) bolumen-unitateko momentu lineala, 497
- bornea, 469
- bosoiak, 379
- (Tycho) Brahe, 226
- bremsstrahlung*, 503
- bulkada, 128, 533
- bultzada aerodinamikoa, 288
- bultzadaren zentroa, 275
- (goranzko) bultzada, 274
- burbuila esferikoa, 295
- (Nicolas Léonard Sadi) Carnot, 550
- Carnot-en motorra, 550
- Carnot-en teorema, 551
- Carnot-en zikloa, 550, 555
- Cassegran-en akoplamendua, 607
- (Henry) Cavendish, 229
- Cavendish-en tortzio-balantza, 229
- (Anders) Celsius, 509
- Celsius eskala, 509
- Celsius tenperatura, 509
- Charles-en teorema, 176
- (Rudolf Julius Emmanuel) Clausius, 546
- (Termodinamikaren bigarren printzipioaren) Clausius-en enunziatua, 546
- Clausius-en teorema, 555, 560
- (Arthur Holly) Compton, 500
- Compton efektua, 500

- Coriolis-en azelerazioa, 93, 95
 Coriolis-en indarra, 68, 121, 126
 (Charles Augustin) Coulomb, 368
 coulomba (karga-unitatea, C), 29, 370
 Coulomb-en legea, 368, 424
- (Clinton Joseph) Davisson, 562
 (Louis Victor) De Broglie, 563
 deflexioa, 381
 deformazio angeluarra, 253
 deformazio iraunkorra, 255
 deformazio unitarioak, 253
 deformazioaren abiadura angeluarra, 264
 (bolumen-unitateko) deformazioa, 254
 (luzetarako) deformazioa, 253
 De Magnete, 365
 denbora, 25, 28
 denbora absolutua, 25
 denborarekiko batez besteko potentzia, 342
 denboraren absolututasuna, 85
 dentsitate, 30
 dentsitate erlatiboa, 31
 (energia-)dentsitatea, 343
 (karga-)dentsitatea, 373
 depresioa, 126
 deribatu direkzionala, 137
 (norabide-)deribatua, 137
 desfasea, 475-477, 479
 desintegrazioa, 102
 desoreka termodinamiko, 550
 desplazamendu bektoriala, 60
 desplazamendu birtual infinitesimala, 217
 desplazamendu-korrontea, 458, 461
 desplazamendu-korrontearen dentsitatea, 461
 desplazamendu-korrontearen intentsitatea, 461
 detergenteak, 301
 dielektrikoa, 365, 398
 Diesel motorra, 545
 difrakzioa, 345, 357, 561
 (elektroien) difrakzioa, 562
 (Fraunhofer-en) difrakzioa, 358
 dimentsio-ekuazioa, 29, 131
 dinamika, 57, 97
 (partikula-sistemen) dinamika, 151
 dinamo, 404
 diodo erdieroaleak, 394
 dioptria, 583, 591
 dioptrioak, 569, 592
 dioptrio esferikoa, 573, 575, 579, 583, 585
 dioptrio lau, 582, 583
 dioptrio lau errefraktantea, 575
- dipolo elektrikoa, 388
 dipolo elektrikoaren eremu elektrikoa, 389
 dipolo elektriko oszilakorraren erradiazioa, 499
 dipoloaren potentzial elektrikoa, 389
 dipolo magnetikoa, 423
 (Paul Adrien Maurice) Dirac, 563
 distantzia fokalak, 579, 588
 Doppler efektua, 359
 (Charles François) Du Fay, 366
- ebakidura-indarra, 263
 ebaki-puntua, 572
 ebakidura-tentsioa, 251, 263
 efektu iraungikorak, 550
 (korronte elektrikoaren) efektu kimikoak, 395
 efektu magnetikoak, 395
 efektu termikoak, 395
 efizientzia-koefizientea, 547
 egoera gaseosoa, 531
 egocra iragankorra, 324
 egoera iraunkorra, 324
 egoera kitzikagabea, 561
 egocra kitzikatua, 561
 egoera likido, 531
 egoera-aldagai termodinamikoak, 505
 egocra-aldagai termodinamiko independenteak, 506
 egoera-ekuazioa, 518
 Eguzkiko sistema, 99
 (Albert) Einstein, 447, 532, 562
 (marruskadurari dagokion) eite-koefizientea, 110
 eite-koefizientea, 286
 ekipolentea, 36
 ekuazio diferentzial lineala, 27
 ekuazio kobariantea, 26
 elastikotasuna, 249, 338
 elastikotasun-modulua, 263
 elastikotasun-muga, 254
 elektroiak, 563
 elektroien difrakzioa, 562
 e (elektroien karga), 378
 elektrizazioa, 366
 elektrizazio positiboa, 366
 elektrizazio negatiboa, 366
 elektrizazio-motak, 366
 Elektrodinamika, 463
 elektrodoak, 469
 elektroi askeen hodeia, 398
 elektrolisia, 469
 elektronvolta (eV), 388, 502
 Elektromagnetika ez-estatikoa, 431

- Elektrostatika, 366
- Elektrostatika eta Magnetostatikaren funtsezko legeak, 445
- Elektroteknia, 490
- elementu kardinalak, 586
- elipsea, 244
- (propietate) elkarrekintza, 37
- elkarrekintza, 97
- elkarrekintza ahula, 225
- elkarrekintza bortitza, 225
- elkarrekintza elektromagnetikoa, 225
- elkarrekintza elektrostatikoa, 365
- elkarrekintza grabitatorioa, 225
- elkarrekintza magnetikoa, 413
- elongazioa, 305
- enboloa, 533, 542
- energia, 127, 147
- (barne-)energia, 134
- (bibrazio-)energia, 313
- (oszilazio harmonikoetako) energia, 312
- (uhin elektromagnetikoen bolumen-unitateko) energia, 497
- energiaren kontserbazioaren printzipioa (Termodinamikan), 515
- energia elektroeragilearen iturria, 437
- energia elektrostatikoa, 436
- energia elektrostatikoaren dentsitatea, 457
- energia magnetikoaren dentsitatea, 457
- energia mekanikoa, 134
- energia mekaniko osoa, 166
- energia mekanikoaren kontserbazioa, 133, 196
- energia potentziala, 30, 127, 132, 293, 313
- (kanpo-indarrei dagokien) energia potentziala, 196
- (partikula-sistemaren) energia potentziala, 162
- energia potentzial eraginkorra, 144, 146, 244
- energia potentzial grabitatorioa, 238
- energia potentzial zentrifugoa, 144
- energia propioa, 165
- energia zinetikoa, 30, 127, 131, 312
- (solido zurrunaren) energia zinetikoa, 194
- (masa-zentroaren inguruko) energia zinetikoa, 163
- (partikula-sistemaren) energia zinetikoa, 162
- energiaren ekuazioa, 281, 283
- energiaren hedapena, 341
- energia-dentsitatea, 343
- energia-erresonantzia, 325
- energia-fluxua, 342, 343
- energia-fluxuaren intentsitatea, 496
- energia-galerak, 465
- energia-galera erresistentzia elektrikoetan, 401
- energia-transferentzia maximoa, 486
- energia-uhina, 342
- energia-unitatea, 512
- entropia, 557
- entropiaren gehikuntzaren printzipioa, 559
- entropia-aldaketa, 558
- ∇ (nabla) eragilea, 135
- eraikuntza grafikoak, 583, 585
- eraikuntza grafikoak lente meheetan, 597
- erakarpen-indarrak, 563
- eraso-angelua, 352
- eraso-planoa, 567
- eraso-puntua, 567
- eraztun biltzailea, 466
- erdieroalea, 399
- eredu gorpuzkularra, 562
- eredu ondulatorioa, 562
- eremu bektorialak, 609, 612
- eremu bektorialaren fluxua, 234
- eremu bektorial esferikoa, 613
- eremu bektorial kontserbakorra, 615
- eremu bektorial kontserbakorraren potentziala, 615
- eremu coulombiarra, 435
- eremu elektrikoa, 372
- eremu elektriko aldakorra, 460
- eremu elektriko uniforme, 379
- (dipoloaren) eremu elektrikoa, 389
- eremu elektromagnetiko aldakorrak, 447
- eremu elektromagnetikoaren zirkulazioa, 431
- eremu elektromagnetiko estatikoak, 431
- eremu elektrostatikoa, 372, 431
- eremu elektrostatikoaren fluxua, 433
- eremu eskalarrak, 134, 609
- eremu eskalarraren gradiente, 134, 613
- eremu eskalar esferikoa, 611
- eremu grabitatorioa, 231
- eremu grabitatorioaren intentsitatea, 232
- eremu kontserbakorra, 431
- eremu magnetikoa, 414
- eremu magnetikoaren energia, 456
- eremu magnetikoaren fluxua, 438
- eremu magnetikoaren intentsitate-bektorea, 414
- eremu magnetiko aldakorra, 452
- eremu magnetiko uniforme, 418
- eremu magnetikoaren zirkulazioa, 442
- (korronte elektrikoak sortutako) eremu magnetikoa, 423
- (korronte elektriko zirkularrak sortutako) eremu magnetikoa, 426

- eremu potentziala, 613
- eremu zentrala, 612
- eremu-lerroak, 374, 612
- (partikula azeleratuaren inguruko) eremu-lerroak, 498
- Erlatibitatearen Teoria, 25, 58, 447, 496
- Erlatibitate Berezia, 25
- Erlatibitate Orokorra, 25, 231
- erlatibitate-printzipioa, 447
- erlazio adimentsionala, 519
- eroalea, 365, 398
- (orekan dagoen) eroalea, 434
- eroale anisotropoa, 400
- eroale arrunta, 399
- eroale isotropoa, 400
- eroankortasun elektrikoa, 399
- erradiozio elektromagnetikoa, 497, 561
- erradiozio elektromagnetikoaren espektroa, 501
- erreaktantzia, 327
- erreaktantzia kapazitiboa, 473
- erreaktantzia induktiboa, 472
- erreaktantzia netoa, 478
- erreaktantzia nulua, 486
- erreferentzial propioa, 154
- erreferentzia-sistema, 33, 58, 81, 174
- (masa-zentroaren) erreferentzia-sistema, 154
- (laborategiko) erreferentzia-sistema, 154
- erreferentzia-sistema inertziala, 97, 98, 205
- erreferentzia-sistema ez-inertziala, 81, 120, 206
- errefrakzioa, 345, 352, 561
- errefrakzio-angelua, 352, 568
- errefrakzio-indizea, 352, 563, 564, 571
- (kristalinoaren) errefrakzio-indizea, 599
- errefrakzio-indize absolutua, 353
- errefrakziorako angelu kritikoa, 354
- erregimen iraunkorra, 490
- erresistentzia, 327, 470
- erresistentzia baliokidea, 407
- (hari eroalearen) erresistentzia elektrikoa, 400
- erresistentzia elektrikoa, 401
- erresistibitate elektrikoa, 399
- erresonantzia, 323
- erresonantzia (elektrikoa), 485
- erresonantzia-maiztasuna, 486
- erresultantea, 175
- erretina, 599
- errore esperimentalak, 28
- esfortzua, 249
- esfortzu normala, 259
- esfortzu tangentiala, 259
- esfortzuaren tentsioa, 258, 259
- (tenperatura)-eskala lineala, 508
- eskalarrak, 26, 35
- espazioa, 25
- espazio absolutua, 25
- espazio isotropoa, 25
- espazio infinitua, 25
- espazioaren kurbadura, 25
- espektrio elektromagnetikoa, 502
- (masen) espektrometroa, 418
- espira, 466
- estatika, 205
- estereorradiana, 31, 620
- (transformadorearen) etekina, 488
- (ziklo itzulgarriaren) etekina, 551
- eterra, 334
- (Leonhard) Euler, 172
- Euler-en angeluak, 172
- espantsio adiabatikoa, 520
- espantsio adiabatikoan eginiko lana, 528
- espantsio askea, 549
- espantsio-lana, 510, 539
- extremala, 565
- extremalen printzipioa, 565
- exzentrikotasuna, 244
- (Michael) Faraday, 413, 447
- farada (unitatea, F), 436, 473
- Faraday-Henry-ren legea, 450, 459, 460, 489
- fasea, 306
- fase-abiadura, 330, 339, 341
- fase-diferentzia, 470
- fasorea, 306, 471
- (Pierre) Fermat, 565
- Fermat-en printzipioa, 565
- Fisika Erlatibista, 25
- Fisika ez-erlatibista, 58
- Fisika Kuantikoa, 500-501
- flotazioa, 274
- fluentzia, 255
- fluentzia-nekea, 255
- fluidoaren barne-marruskadura, 264,
- fluidoaren masa desplazatua, 112
- fluidoaren definizioa, 263
- fluidoaren dinamika, 276
- fluidoaren estatika, 269
- fluidoaren mekanika, 110, 263, 612
- fluidoaren propietateak, 263
- fluidoaren sailkapena, 263
- fluido ez-newtondarrak, 265
- fluido idealak, 265

- fluido konprimaezina, 272, 282
- fluido konprimagarria, 282
- fluido newtondarrak, 265
- fluxua, 276
- fluxua (orokorrean), 617
- (barruranzko) fluxua, 619
- (kanporanzko) fluxua, 619
- fluxu adiabatikoa, 277
- fluxu erreala, 277
- fluxu ez-iraunkorra, 277
- fluxu ez-uniformea, 277
- fluxu ideala, 277
- fluxu iraunkorra, 277, 280, 284
- fluxu isotermoa, 277
- fluxu konprimaezina, 284
- fluxu laminarra, 276, 280, 284
- fluxu magnetikoa, 438, 449
- fluxu magnetikoaren deribatua, 449
- fluxu turbulentua, 276, 284
- fluxu uniformea, 277
- fluxu-motak, 276
- (energia-)fluxua, 343
- FM igorpena, 502
- fokuak, 578, 586
- fotoiak, 500, 562
- (Jean Bernard Léon) Foucault, 562
- Foucault-en korranteak, 488
- (Jean Baptiste Joseph) Fourier, 331
- Fourier-en analisisa, 331
- (Joseph von) Fraunhofer, 358
- Fraunhofer-en difrakzioa, 358
- (Augustin Jean) Fresnel, 562
- funtzio birmormalizatua, 536
- gainazal bentralak, 346
- gainazal ekipotentzialak, 135, 239, 375
- gainazal inguratzaileak, 348
- gainazal itxia, 235, 619
- gainazal lau infinitesimala, 234
- gainazal nodalak, 346
- (sestra-)gainazalak, 135
- gainazal-dentsitatea, 436
- gainazal-elementua, 397
- gainazal-indarra, 249, 260, 290
- gainazal-integrala, 433, 617
- gainazal-tentsioa, 290
- gainazal-unitateko energia, 293
- gainazal-unitateko indarra, 250
- gainezarmenaren printzipioa, 27, 105, 130, 153, 232, 235, 239, 314, 316, 370
- gainpresioa, 272
- Galileo, 447
- Galileo-ren betaurreko astronomikoa, 605
- Galileo-ren transformazioa, 86, 94, 100
- γ (gamma) izpiak, 503
- gasak, 265, 506, 531
- gasen teoria zinetikoa, 529
- gas idealak, 517
- gas idealezko tenperatura-escala absolutua, 509
- gas monoatomikoak, 524, 537
- gas poliatomikoak, 539
- (Johann Karl Friedrich) Gauss, 579
- Gauss-en formula, 579, 581
- Gauss-en hurbilketa, 573
- Gauss-en legea, 432, 433, 436, 458
- Gauss-en teorema, 234, 379, 453
- Geometria euklidearra, 25
- Germer, 562
- Gerris lacustris*, 289
- (Josiah Willard) Gibbs, 447
- (William) Gilbert, 365
- Giorgi (unitate-sistema), 29
- goi-tentsioa, 466
- goranzko bultzada, 275
- gorputz bakarraren problema baliokidea, 240
- gorputz biatomikoaren kristala, 531
- grabitatearen azelerazioa, 152
- grabitatearen indarra, 125
- grabitate eraginkorra, 125, 273
- grabitate-zentroa, 151, 152, 275
- grabitazioaren konstante unibertsala, 228
- grabitazioaren lege unibertsala, 228
- (eremu eskalarraren) gradientea, 134, 384, 613
- gradiantearen modulua, 137
- gradiantearen norabidea, 135
- gradua (tenperatura-unitatea), 509
- gramoa, 29
- handipenak, 576
- handipen angeluarra, 577
- (betaurrekoaren) handipen angeluarra, 606
- (mikroskopioaren) handipen angeluarra, 605
- handipen axiala, 578
- hargailuaren indar kontraelektroeragilea, 404
- hargailu elektrikoa, 402, 404
- hari eroalearen erresistentzia elektrikoa, 400
- harikortasuna, 255
- harila, 471
- hari primarioa, 488
- hari sekundarioa, 488
- harmonikoak, 357
- hasierako fasea, 306

- hauskortasuna, 255
- hedatze-abiadura, 330
- (uhin elektromagnetikoen) hedapen-abiadura, 494
- (uhin elektromagnetikoen) hedapen-norabidea, 496
- hego poloa, 413
- hego polo magnetikoa, 413
- hego polo geografikoa, 413
- (Werner Karl) Heisenberg, 562
- helizea, 417
- (Hermann Ludwig Ferdinand von) Helmholtz, 575
- (Ipar/Hego) hemisferioa, 68, 126
- (Joseph) Henry, 413
- henrya (unitatea, H) 453, 472
- (Heinrich Rudolf) Hertz, 491, 562
- hertz (unitatea, Hz), 57, 467
- hidrostatikaren funtsezko ekuazioa, 269, 272
- higidurak sorturiko indukzio elektromagnetikoa, 447
- higiduraren ekuazioa korrante-lerro batean, 281
- higidura abaildu orokorra, 72
- higidura browndarra, 532
- higidura erlatiboaren zinetika, 81
- higidura erlatibo orokorra, 93
- higidura kaotikoa, 532
- higidura laua, 113
- (solido zurrunaren) higidura laua, 177
- higidura oszilakorra, 305
- higidura kurbatua planoan, 77
- higidura unidimentsional kontserbakorra, 139
- higidura zirkularra, 60, 73, 115
- higidura zirkular uniforme, 74, 129
- higidura zuzena, 72
- higidura zuzen eta uniforme, 72, 116
- hiperbola, 244
- hipermetropia, 601
- histeresi elastikoa, 263
- histeresi-zikloa, 263
- (Optika geometrikoaren arloko) hitzarmenak, 571
- hodi kapilarra, 289, 301
- hondar-nukleoa, 102
- (Robert) Hooke, 263
- Hooke-ren legea, 263, 337, 338
- horma zurrun adiabatikoa, 520
- hozkailua, 546, 551
- humore beirakara, 599
- humore urtsua, 599
- hurbilketa, 518
- hutsaren iragazkortasun magnetikoa, 428, 461
- hutsaren permitibitatea, 370
- (Christiaan) Huygens, 347
- Huygens-en okularea, 604
- Huygens-en printzipioa, 347, 358, 562
- ibilbidea, 59
- ibilbidearen ekuazioa, 146
- ibilbide helikoidala, 418
- ihes-abiadura, 248
- ikusmen estereoskopikoa, 600
- ikuspuntu makroskopikoa, 505
- ikuspuntu mikroskopikoa, 505
- indarra, 103
- (ardatz-)indarrak, 119
- ('benetako') indarra, 121, 206
- (bolumen-)indarra, 249, 260
- (Coriolis-en) indarra, 121
- (erakarpen-)indarra, 225
- (gainazal-)indarra, 249, 260
- (gainazal-unitateko) indarra, 250
- (lotura-)indarra, 213
- (marruskadura-)indarra, 105, 147, 286, 321
- (masa-unitateko) indarra, 249
- (ukipen-)indarra, 105, 225
- (karga-unitateko) indarra, 447
- (korrante elektrikoaren arteko) indarrak, 427
- indarraren bulkada, 127
- indarraren lana, 128
- indar axialak, 119
- indar elastikoa, 321
- indar elektroeragilea, 402, 468
- indar elektroeragile autoinduzitua, 453
- indar elektroeragile eraginkorra, 468
- indar elektroeragile induzitua, 448, 448, 467
- indar elektroeragile induzituaren potentzia, 456
- indar eragilea, 323
- indar erresultantea, 105, 130, 192
- indar ez-kontserbakorrak, 147
- indar ez-kontserbakorren lana, 147
- indar grabitatorioa, 146
- indar iraungikorra, 321, 323
- indar 'irudikaria', 121, 206
- indar kontraelektroeragilea, 404, 489
- indar kontserbakorrak, 132, 139, 323
- indar magnetikoa, 413
- (korrante elektrikoaren gaineko) indar magnetikoa, 420
- indar magnetoeragilea, 460
- indar magnetoeragile induzitua, 460
- indar normala, 105
- indar zentralak, 116, 142, 240

- indar zentral kontserbakorrak, 139, 240
- indar zentrifugoa, 121, 145, 245
- indarren momentua, 192
- indarren sistemaren torsorea, 191
- indar-eremu kontserbakorra, 137, 142
- indar-lerroak, 233, 239, 375, 612
- indar-momentua, 240
- indar-momentu elektrikoa, 392
- (korrante elektrikoaren gaineko) indar-momentu magnetikoa, 421
- indar-zentroa, 117, 140, 142, 240
- indargetzaileak, 321
- indargetze handia, 323
- indargetze kritikoa, 323
- indargetze txikia, 322
- indize adiabatikoa, 526
- indukzioa, 448
- (higidurak sorturiko) indukzio elektromagnetikoa, 447
- indukzio magnetikoa, 439
- indukzio-lerroak, 439, 443
- inertziaren printzipioa, 97, 98, 100
- inertzia-ardatz nagusia, 179
- (planoarekiko) inertzia-biderkadura, 178
- inertzia-elipsoidea, 181
- inertzia-indarrak, 97, 120, 121, 145, 206
- (ardatzarekiko) inertzia-momentua, 178, 182
- inertzia-momentu nagusia, 179, 181
- inertzia-momentu polarra, 188
- inertzia-tentsorea, 177, 179, 180
- infinitu (espazioa), 25
- ingurune anisotropoa, 564
- ingurune heterogeneoa, 564
- ingurune homogeneoa, 564, 566
- ingurune isotropoa, 564, 566
- ingurune isotropo eta homogeneoa, 349, 350, 566
- inpedantzia, 327, 474-477
- inpedantzien triangelua, 327, 474-476
- integral kurbilineoa, 129
- integraziorako ibilbidea, 133
- integrazio-bidea, 614
- (uhinaren) intentsitate, 343
- (uhin elektromagnetikoen) intentsitate, 495
- intentsitate elektrikoa, 453
- intentsitate elektrikoaren balio eraginkorra, 469
- intentsitate erresultantea, 479
- interferentziak, 345, 561
- (osagai) intrintsekoak, 72
- (triedro) intrintsekoak, 72
- ioi-kainoia, 419
- ionosfera, 503
- ipar poloa, 413
- ipar polo magnetikoa, 413
- ipar polo geografikoa, 413
- iragazgaizleak, 301
- iragazkortasuna, 489
- (hutsaren) iragazkortasun magnetikoa, 428
- irakite-puntua, 545
- iratopen-balbula, 547
- irispina, 66
- irispin horizontala, 66
- irudia, 570
- (alegiak) irudia, 570, 584
- irudi alderantzikatua, 583, 584
- irudi birtuala, 570
- irudi erreala, 570
- irudi distantzia fokala, 579, 581
- irudi distantzia nagusia, 588
- irudi fokua, 578
- irudi plano nagusia, 586
- irudi puntu nagusia, 586
- irudi-espazio erreala, 570
- irradi-uhinak, 502
- islapena, 345, 561
- (soken muturretako) islapenak, 356
- islapenaren eta errefrakzioaren legeak, 566, 567
- islapen hutsa, 568
- islapen osoa, 354, 568
- islapen-angelua, 352, 568
- isoenergetikoa, 522
- isotopoak, 418
- isotropoa (espazioa), 25
- ispilu ahurra (konkaboak), 581, 583
- ispilu esferikoa, 575, 583
- ispilu ganbila (konbexua), 581, 584
- ispilu laua, 575, 582, 583
- iturazko potentzia, 484, 485
- itzulezintasuna, 550, 557
- (prozesu termodinamikoen) itzulgarritasuna, 542
- izar finkoak, 98
- izpi erasotzaileak, 352, 567
- izpi errefraktatua, 352, 567
- izpi islatua, 352
- izpi kosmikoak, 503
- izpi ultramoreak, 503
- jarraitutasunaren ekuazioa, 280, 397
- jatorriarekiko indar-momentua, 240
- jatorriarekiko momentu angeluarra, 240
- (James Prescott) Joule, 131
- joulea (unitatea, J), 131, 383, 402, 512

- Joule efektua, 465, 488
 Joule-ren esperimentua, 520
 Joule-ren legea, 401
 Jurin-en legea, 301
- kabea (kVA), 484
 kalkulatu bektoriala, 33
 kalkulatu diferentziala, 613
 kalaria, 402, 512
 kalorikoa, 512
 kandela, 29
 kanporanzko fluxua, 619
 kanpo-errekuntzako motorra, 545
 kanpo-indarrak, 155
 kanpo-indarren lana, 165
 kanpo-indarren momentua, 160
 kanpo-indar erresultantea, 156
 kanpo-indar osoa, 155
 kapazitatea, 437, 473
 kapazitate elektriko, 436
 kapilaritasuna, 301
 (*R-L* zirkuituaren) karga eta deskarga, 454
 kargaren kontserbazioaren printzipioa, 457
 karga elektriko, 28, 366
 karga elektriko azeleratuaren erradiazio
 elektromagnetikoa, 497
 karga elektrikoaren definizio operazionala, 367
 karga elektrikoaren kontserbazioaren printzipioa,
 368, 398
 kargaren kuantizazioa, 376
 karga-banaketa esferikoa, 435
 karga-banaketa jarraitua, 433
 karga-dentsitatea, 373
 karga-eramailea, 458
 karga-fluxua, 457
 karga-galera, 284
 karga-multzo higikorra, 421
 karga-unitateko indarra, 448
 katoptrioak, 569
 kaudal bolumetrikoa, 281
 kaudal masikoa, 281
 kautxua, 254
 (William Thomson) Kelvin, 544
 Kelvin-en tenperatura, 555, 559
 Kelvin-en tenperatura-eskala, 508, 554
 Kelvin gradua, 29
 (Johann) Kepler, 226
 Kepler-en bigarren legea, 118
 Kepler-en legeak, 226
 Kepler-en problema, 68, 240, 242
 kiloelektronvolta (keV), 388
- kilogramoa, 29
 kiloohma ($k\Omega$), 401
 kilovoltampere (kVA), 484
 kilovoltampere erreaktiboa (kVAR), 484
 kilowatta (kW), 131, 484
 kilowatt-ordua (kWh), 131
 (Gustav Robert) Kirchhoff, 349, 409
 Kirchhoff-en legeak, 409
 (ekuazio) kobariantea, 26
 (lege fisikoen) kobariantzia, 36
 (Poisson-en) koefiziente, 257
 kohesio-indarrak, 266, 290, 531
 kondentsadoreak (elektrikoak), 436, 469, 470
 kondentsadorea (urarena), 545
 kondentsadorearen karga-prozesua, 437, 461
 kondentsadore laua, 436, 461
 (erretinako) konoak, 599
 konpresioa, 250
 konpresio-egoera, 250
 konpresio-lana, 510
 konprimagarritasun-koefiziente, 257
 konprimagarritasun-moduhua, 257
 konstante berreskuratzaila, 259
 (zurruntasun-)konstantea, 259
 (karga elektrikoaren) kontserbazioaren
 printzipioa, 368
 koordenatu esferikoak, 77
 koordenatu polarrak, 143, 227, 390
 koordenatu termodinamikoak, 505
 koordenatu zilindrikoak, 77
 (sare elektrikoaren) korapiloa, 409
 korapiloen legea, 409
 kornea, 599
 korrespondentzia biunibokoa, 612
 korrontearen dentsitatea, 395
 korronte alternoa, 393, 465
 korronte alternoaren adierazpen fasoriala, 471
 korronte alternoaren efektuak eta ezaugarriak,
 469
 korronte alternoaren intentsitatearen balio
 craginkorra, 468
 korronte alternoaren propietateak, 469
 korronte alternoaren maiztasuna, 467
 korronte alternoaren sorkuntza, 466
 korronte alternoko hargailuak, 470
 korronte alternoko zirkuituak, 474
 korronte arteztua, 394
 korronte elektriko, 393
 korronte elektrikoaren arteko indarrak, 427
 korronte elektrikoaren intentsitatea, 28, 395
 korronte elektriko jarraitua, 393

- korronte elektriko zuzena, 393, 465
- korronte iragazia, 394
- korronte zuzeneko zirkuitu anizkoitzak, 406
- korronte zuzen ez-konstantea, 394
- korronte zuzen konstantea, 394
- korronte lineala, 420
- korronte mikroskopiko netoa, 398
- korronte zilindrikoak sorturiko indukzioa, 442
- korronte zuzena, 442
- korronte-dentsitatea, 458
- korronte-hodia, 278
- korronte-hodi infinitesimala, 280, 285
- korrontearen intentsitatea, 461, 467
- korronte-lerroa, 233, 278, 612
- kosinu zuzentzaileak, 39
- (Nicolas) Koppemigk, 226
- kristalinoa, 599
- kristal-sare metalikoa, 398
- kuantua, 501
- kurba abaildua, 72
- kurba-kongruentzia, 612
- kurbadura-erradioa, 70, 72, 572
- (kristalinoaren) kurbadura-erradioa, 599
- kurtsoreak, 36
- kurtsorearen laburbilketa, 48
- kurtsorearen momentua, 47
- kurtsore paraleloen sistema, 55
- kurtsore-sistemak, 47, 51, 175
- kurtsore-sistemen laburbilpena, 51
- labainketarik gabeko higadura, 176
- labainketa-abiadura, 176
- labaintze-zuzena, 52
- laborategiko erreferentzia-sistema, 154
- (Joseph Louis) Lagrange, 575
- Lagrange-Helmholtz-en aldaezina, 575, 588, 592
- lana, 30, 127, 128, 196, 614
- (barne-indarren) lana, 165
- (indar ez-kontserbakorren) lana, 147
- (kanpo-indarren) lana, 165
- (sistema termodinamikoko buruturiko) lana, 543
- lan adiabatikoa, 510
- lan birtualen printzipioa, 217
- (kanpo-indarren) lan birtuala, 218
- lan infinitesimala, 128
- lan termodinamikoa, 510
- laplacearra, 336
- (Pierre Simon) Laplace, 294
- Laplace-ren legea, 294, 296
- Larmor-en formula, 498
- lasaikuntza-denbora, 454
- lehen ordenako tentsorea, 26
- leku geometrikoa, 50, 192
- Lennard-Jones-en potentziala, 529
- lenteak, 592
- lente bikonkaboak, 596
- lente dibergenteak, 596, 599
- lente hurbiltzaileak, 596
- lente konbergenteak, 596, 598
- lente lau-konbexoa/ganbila, 603
- lente lau-konkaboak/ahurra, 596
- lente lodia, 593
- lente mehea, 595
- lente meheen sailkapena, 596
- lente meheen adierazpen sinbolikoa, 597
- lente urruntzaileak, 596
- lente zilindrikoak, 601
- lente-egitura, 604
- (Heinrich Friedrich Emil) Lenz, 451
- Lenz-en legea, 451
- leptoak, 378
- lerro adiabatikoak, 526, 555
- lerro bentralak, 346
- lerro isotermikoak, 556
- lerro isotermoak, 522, 526
- lerro kurbatua, 614
- lerro nodalak, 346
- lerro-integrala, 614
- lerro-integralerako elementuak, 614
- likidoak, 265, 506, 531
- Lissajous-en kurbak, 320
- (Hendrik Antoon) Lorentz, 463
- Lorentz-en indarra, 463
- Lorentz-en transformazioa, 86
- lotura, 169, 213
- (marruskadurarik gabeko) lotura, 213
- lotura holonomoa, 170
- lotura-baldintzak, 169
- lotura-indarra, 170, 213
- lotura-moten sailkapena, 213
- lupa, 601
- luparen ahalmen optikoa, 603
- Lurraren gainazaleko potentzial grabitatorioa, 247
- Lurraren kurbadura, 68
- Lurreko erreferentzia-sistema, 97, 123
- Lurreko sistema paraleloa, 99
- lurrun-makina, 545
- luzera, 28
- luzetarako deformazioa, 253
- luzetarako uhina, 333
- luzetarako uhin elastikoak, 337

- (Ernst) Mach, 362
- Mach-en uhinak, 362
- magnetitazko orratzak, 413
- magnetostatikaren funtsezko legeak, 445
- (oinarrizko) magnitudea, 27
- magnitude adimentsionalak, 31
- magnitude aldaezinak, 49
- magnitude behagarriak, 505
- magnitude eratorriak, 27, 29
- magnitude fisikoak, 26
- magnitude intentsiboa, 249
- Magnus efektua, 68, 287
- (sare elektrikoaren) maila, 409
- mailen legea, 409
- maiztasuna, 74, 306, 332
- (korronte alfernoaren) maiztasuna, 467
- maiztasun angeluarra, 306, 333
- (oinarrizko) maiztasuna, 357
- (oinarrizko) maiztasun angeluarra, 322
- makula, 599
- malgukiak, 258, 309
- (Etienne Louis) Malus, 349
- Malus-en teorema, 349
- (Guglielmo) Marconi, 491
- Marconi, 491
- (airaren) marruskadura, 68
- marruskadurari dagokion eite-koefiziente, 110
- marruskadura-indarrak, 105, 147, 286, 543
- marruskadura-indarrak fluidotan, 109, 286
- marruskadura-koefiziente, 106
- marruskadura-koefiziente estatikoa, 107
- marruskadura-koefiziente zinetikoa, 107
- masa, 28
- masaren birdefinizio operazionala, 103
- masaren kontserbazioaren printzipioa, 280
- masen espektrometroa, 418
- masa espezifikoa, 30
- masa grabitazionala, 229
- masa inertziala, 229
- masa laburbildua, 157, 158, 240
- masa-unitateko indarra, 249
- masa-zentroa, 151
- masa-zentroarekiko ekuazioak, 192
- masa-zentroaren abiadura, 153
- masa-zentroaren azelerazioa, 154
- masa-zentroaren sistema, 154, 193
- masa-zentroko inertzia-elipsoidea, 181
- material elastikoa, 254
- material-motak, 399
- (Pierre Louis Moreau) Maupertuis, 565
- Maupertuis-en ekintza minimoa, 565
- (James Clerk) Maxwell, 447, 491, 562
- Maxwell-en ekuazioak, 447, 462
- Maxwell-en ekuazioak era integralean, 491, 492
- Maxwell-en ekuazioak hutsean, 491
- Maxwell-en legeak, 445
- (Julius Robert) Mayer, 524
- Mayer-en erlazioa, 524, 525
- megaelektronvolta (MeV), 388
- megaohma (M Ω), 401
- mekanikaren printzipioak, 97
- mekanika erlatibista, 563
- mekanika ez-erlatibista, 86
- mekanika kuantikoa, 25, 141
- mekanika klasikoa, 141
- mekanika newtondarra, 86
- meniskoa, 301
- menisko dibergentea, 596
- metagailua, 404
- metal ez-harikorra, 254
- metal harikorra, 254
- metazentroa, 276
- metroa, 29
- mikroskopioa, 604
- mikroskopioaren handipen angeluarra, 605
- mikrouhinak, 502
- (Robert Andrews) Millikan, 376
- mikroamperea (μ A), 395
- miliamperea (mA), 395
- mintz elastikoa, 293
- miopia, 600
- MKSACC, 29
- MKSA sistema, 484
- MKSC sistema, 383
- MKS sistema, 131
- modeloak, 287
- (abiaduraren) modulua, 62
- (elastikotasun-)modulua, 263
- (gradientearen) modulua, 137
- (konprimagarritasun-)modulua, 257
- (tortsio-)modulua, 263
- (Young-en) modulua, 263
- (zurruntasun-)modulua, 263
- mola, 524
- moldakortasuna, 599
- moldapen-ahalmena, 599
- molekula, 561
- molekula biatomikoa, 120
- molekula polarak, 390
- (inertzia-)momentua, 178
- (kurtsorearen) momentua, 47, 175
- momentu angeluarra, 113, 192

- (solido zurruren) momentu angeluarra, 177, 192
- momentu angeluarraren adierazpena
 - masa-zentroaren koordenatuen bidez, 161
- momentu angeluarraren aldakuntza, 160
- momentu angeluarraren kontserbazioaren printzipioa, 116, 143
- momentu angeluarraren teorema, 115, 159
- (partikula-sistemaren) momentu angeluarra, 159
- (bolumen-unitateko) momentu angeluar
 - elektromagnetikoa, 497
- momentu dipolarra, 389
- momentu dipolar magnetikoa, 422
- (indar-)momentu erresultantea, 192
- momentu lineala, 100, 563
- (partikula-sistemaren) momentu lineala, 153
- (uhin elektromagnetikoen) momentu lineala, 497
- (uhin elektromagnetikoen bolumen-unitateko) momentu lineala, 497
- momentu linealaren aldakuntza, 127
- momentu linealaren ekuazioa, 284
- momentu linealaren hedapena, 341
- momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa, 101, 154, 168
- momentu linealaren transferentzia, 267
- momentu minimoa, 50
- monopolo magnetikoa, 439, 442
- (barne-errekuntzako) motorra, 545
- (Diesel) motorra, 545
- (kanpo-errekuntzako) motorra, 545
- motor termikoa, 544, 551
- motor termikoaren etekina, 544
- muga adiabatikoa, 506, 511
- muga diatermanoa, 506, 511
- muga-abiadura, 112, 377
- muga-angelua, 568
- muga-lerroa, 617
- muga-tentsioa, 265
- mutur askea, 356
- mutur lotua, 356
- (soken) muturretako islapenak, 356

- nabla (∇) eragilea, 135
- Navier-Stokes-en ekuazioak, 278
- nekea, 250
- neke normala, 251
- neke tangenziala, 251
- neke-tentsorea, 258
- (fluentzia-)nekea, 255
- neurketa, 27
- neurketako perturbazioa, 27
- neurketaren definizio operazionala, 27
- neurketa zinematikoa, 81, 94
- neurri 'absolutuak', 84
- neurri 'erlatiboak', 85
- (gorputz) neutroa, 367
- (Isaac) Newton, 103, 131
- Newton-en akoplamendua, 607
- Newton-en bigarren legea, 103, 131, 281, 338, 340, 380
- Newton-en biskositatearen legea, 264
- Newton-en formula, 287
- Newton-en formula (optika), 580
- Newton-en formulazioa, 97
- Newton-en hirugarren legea, 103
- Newton-en lehen legea, 97
- Newton-en legeak, 97, 225, 447, 463
- Newton-en teoria gorpuzkularra, 562
- nodoak, 355
- norabidea, 33
- (gradientearen) norabidea, 135
- norabide nagusiak, 262
- norabide-deribatua, 137
- norabide-deribatu maximoa, 137
- noranzkoa, 33
- (bektore unitario) normala, 71
- (Optikako) notazioa, 571
- noten afinazioa, 357
- nutazio-angelua, 173

- objektua, 570
- (alegiako) objektua, 570
- objektu birtuala, 570
- objektu erreala, 570
- objektu distantzia fokala, 579, 581
- objektu distantzia nagusia, 588
- objektu fokua, 578
- objektu plano nagusia, 587
- objektu puntu nagusia, 587
- objektu-espazio erreala, 570
- (Hans Christian) Oersted, 413
- (Georg Simon) Ohm, 401
- ohma (unitatea, Ω), 401, 472
- Ohm-en legea, 398, 401, 454
- Ohm-en legearen orokorpena, 405
- oinarrizko magnitudeak, 27, 28
- oinarrizko maiztasuna, 357
- oinarrizko maiztasun angeluarra, 322
- okularea, 603
- (Huygens-en) okularea, 604
- ontzi diatermanoa, 543

- Optika, 561
- Optikako notazioa, 571
- Optika fisikoa, 561
- Optika geometrikoa, 561
- Optika geometrikoaren arloko hitzarmenak, 571
- Optika geometrikoaren legeak, 566
- Optika kuantikoa, 561
- Optika paraxiala, 573
- orbita, 227
- orbita eliptikoak, 244
- orbita hiperbolikoak, 246
- orbita parabolikoak, 246
- orbita zirkularra, 244
- orbitaren ekuazioa, 242
- orbitaren periodoa, 227
- oreka, 147
- orekan dagoen eroalea, 434
- (kontzentrazio-)oreka, 550
- oreka egonkorra, 148
- oreka ezegonkorra, 148
- oreka indiferentea, 149
- oreka mekanikoa, 549
- oreka termikoa, 506, 549
- oreka termodinamikoa, 506
- (puntu materialaren) oreka-baldintzak, 205
- (solido zurrunaren) oreka-baldintzak, 210
- oreka-egoera, 542
- oreka-energia minimoa, 565
- oreka-posizioa, 148
- orekapen dinamikoa, 201
- orekapen estatikoa, 200
- (abiaduraren) osagaiak, 61
- (bektorearen) osagaiak, 38
- (bektorearen baturaren) osagaiak, 40
- (zeharkako) osagaia, 78
- osagai cartesianak, 39
- osagai eraginkorra, 484
- (abiaduraren) osagai erradiala, 113
- (azelerazioaren) osagai erradiala, 78
- osagai erreaktiboa, 484
- osagai intrintsekoak, 72
- osagai normala, 130
- (azelerazioaren) osagai normala, 69, 77
- (ukipen-indarraren) osagai normala, 106
- (azelerazioaren) osagai tangentiala, 69, 77
- (ukipen-indarraren) osagai tangentiala, 106
- (azelerazioaren) osagai zentripetua, 77
- (potentzial-)osina, 141
- (potentzial-)putzua, 141
- oszilagailuaren inpedantzia, 326
- oszilagailuaren oinarritzko maiztasun angeluarra, 322
- oszilagailu indargetua, 320
- oszilazio bortxatuak, 323
- oszilazio bortxatuen ekuazio diferentziala, 324
- oszilazio harmonikoak, 305
- oszilazio harmonikoen konposizioa, 314
- oszilazio harmonikoetako energia, 312
- oszilazio indargetuen ekuazio diferentziala, 321
- oszilazio txikiak, 311
- parabola, 244
- paralelo-konexioa, 407
- paralelo-konexioaren erresistentzia batiokidea, 409
- paralelo-zirkuitua, 478
- parametroak, 518
- parametro estentsiboak, 519
- parametro intentsiboak, 519
- partikula, 329
- partikularen dinamika, 97
- (eremu magnetikoa zeharkatzen duen) .
partikularen higidura, 415
- partikula askea, 97, 101
- partikula azeleratuaren inguruko eremu-lerroak, 498
- partikula kargatu higikorra, 413
- partikula kargatu higikorrek sortutako eremu magnetikoa, 429
- partikula-sistemen dinamika, 151
- partikula-sistemaren energia potentziala, 162
- partikula-sistemaren energia zinetikoa, 162
- (Blaise) Pascal, 273
- Pascal-en printzipioa, 273
- patroia, 27
- (helizearen) pausoa, 417
- pendulu fisikoa, 311
- pendulu sinplea, 310
- periodikotasun denborala, 332
- periodikotasun espaziala, 332
- periodoa, 74, 306, 332, 467
- (hutsaren) permitibitatea, 370
- permutazioa, 46
- perturbazioa, 148
- pisua, 29, 124
- pisu espeziifikoa, 30
- pisu-unitateko energia potentzial grabitatorioa, 282
- pisu-unitateko energia zinetikoa, 283
- pisu-unitateko presio-energia, 283
- (Max Karl Ernst Ludwig) Planck, 544

- Planck-en konstantea, 501, 562
- planetak, 226
- planoarekiko inertzia-biderkadura, 178
- plano fokalak, 586
- plano konjokatuak, 578
- plano muntzailea (oskultatzailea), 69, 72
- plano nagusiak, 586
- plasma, 531
- plastikoak, 265
- plomua, 124
- Poinsot-en formula, 185
- poisea (unitatea, P), 110, 268
- poiseuillea (unitatea, Pl), 268
- J. L. M. Poiseuille, 268
- Poisson-en koefizientea, 257
- polaritatea, 469
- polarizazioa, 334, 561
- (atomoen) polarizazioa, 390
- poloa, 612
- posizio bektorea, 40, 82, 85, 89
- (oreka-)posizioa, 148
- potentzia, 127, 130, 428, 479
- (aldiuneko) potentzia, 130
- (batez besteko) potentzia, 131
- (denborarekiko batez besteko) potentzia, 342
- (indar elektroeragile induzituaren) potentzia, 456
- potentziaren eboluzio denborala, 481
- potentziaren maiztasuna, 480
- potentzien triangelua, 484
- (itxurazko) potentzia, 484, 485
- potentzia eragilea, 482, 485
- potentzia erreaktiboa, 484, 485
- potentzia-faktorea, 482, 485
- potentzial elektrikoa, 381, 383
- potentzial elektrikoaren unitateak, 388
- (dipoloaren) potentzial elektrikoa, 389
- potentzial elektrostatikoa, 436
- potentzial grabitatorioa, 238, 239
- (Lurraren gainazaleko) potentzial grabitatorioa, 247
- (bi punturen arteko) potentzial-diferentzia, 383
- potentzial-diferentziaren balio eraginkorra, 470
- potentzial-kurba, 146
- potentzial-osina, 141, 148
- Poynting-en bektorea, 496-498
- presioa, 533
- presio hidrostatikoa, 252, 269
- presio-diferentzia, 549
- prezio-angelua, 173
- (haril) primarioa, 488
- probabilitatea, 535
- proiektzioa, 42
- proiektzio esferikoa, 534
- propietate antitrukakorra, 44
- propietate banakorra, 41
- propietate elkarkorra, 37
- propietate trukakorra, 37, 41
- proportzionaltasun-faktorea, 433
- proportzionaltasun-konstantea, 291, 519
- proportzionaltasun-muga, 254
- prozesu adiabatikoak, 556
- prozesu adiabatiko itzulgarriak, 525
- prozesu errealak, 550
- prozesu iraungikorak, 550
- prozesu isobarikoa, 511
- prozesu isobaroa, 523
- prozesu isokoroa, 511
- prozesu isotermikoak, 556
- prozesu itzulgarriak, 549
- prozesu itzulezinak, 542, 549
- prozesu kuasiestatikoak, 511, 550
- prozesu politropikoak, 529
- prozesu ziklikoa, 514, 544
- prozesu zikliko itzulezina, 556
- prozesu zikliko itzulgarria, 555, 556
- Ptolomeo, 225
- pultsazioa, 306
- puntuaren zinematika, 57
- puntuarekiko inertzia-momentu polarra, 188
- puntu finkoa duen solidoa, 214
- puntu hurbila, 600
- puntu itsua, 599
- puntu izpikideak, 349
- puntu korrespondenteak, 349
- puntu materialaren oreka-baldintzak, 205
- puntu nagusiak, 586
- puntu nodalak, 587
- puntu-funtzioa, 609
- quarkak, 378
- radiana, 31
- Ramsden-en okularea, 603
- (William John Macquorn) Rankine, 545
- Rankine zikloa, 545
- Reynolds-en zenbakia, 278
- (Wilhelm Konrad) Röntgen, 503
- sabelak, 355
- sakabanaketa, 167
- sakabanaketa kromatikoa, 564
- sare elektrikoa, 406, 409

- sasibektoreak, 36, 74
- sasianplitudea, 318, 322
- (Erwin) Schrödinger, 562
- segundoa, 29, 75
- (haril) sekundarioa, 488
- serie-konexioa, 406
- serie-konexioaren erresistentzia baliokidea, 408
- R-C* serie-zirkuitua, 475
- R-L* serie-zirkuitua, 474
- R-L-C* serie-zirkuitua, 477, 485
- sestra-gainazalak, 135, 611
- (bi partikulaz osaturiko) sistema, 156
- (kurtsore paraleloen) sistema, 55
- sistemaren askatasun-graduak, 169
- sistemaren barne-egoera, 505
- sistema kartesiarra, 33
- sistema dioptrikoa, 569
- sistema estigmatikoak, 570
- sistema ez-inertziala, 81, 120, 206, 231
- sistema ez-isolatua, 154
- sistema inertziala, 97, 98, 205
- sistema intrintsekoa, 72
- sistema isolatua, 168
- sistema katadioptrikoa, 569
- sistema katoptrikoa, 569
- sistema konkurrentea, 52
- sistema optikoak, 569
- sistema optiko zentratuak, 569, 573
- sistema optiko zentratuaren elementu kardinalak, 586
- sistema optiko zentratuari dagokion sistema laburtua, 589
- sistema planokidea, 53
- sistema teknikoa (unitateak), 29
- sistema termodinamikoa, 506, 514
- sistema termodinamikoaren egoera-ekuazioa, 518
- (Willebrord) Snell, 352
- Snell-en legea, 352, 353
- Snell-en errefrakzioaren legea, 568
- soinuaren horma, 362
- sokak, 215
- soldadura hotzak, 106
- solenoiden infinitua, 452
- solenoiden toroidalaren autoindukzioa, 456
- solenoiden zuzena, 444
- solidoak, 531
- solidoen higadura fluidoaren barnean, 286
- solido deformatagarriak, 249, 506
- solido zurruna, 169, 249
- solido zurrunaren abiaduren eremua, 173
- solido zurrunaren abiadura angeluarra, 175, 179
- solido zurrunaren aldiuneko zentroa, 177
- solido zurrunaren biraketaren poloa, 177
- solido zurrunaren dinamika, 191
- solido zurrunaren energia zinetikoa, 194
- solido zurrunaren masa-zentroarekiko energia zinetikoa, 195
- solido zurrunaren higadura laua, 177
- solido zurrunaren lotura, 170
- solido zurrunaren momentu angeluarra, 177, 179
- solido zurrunaren momentu angeluarraren osagaiak, 179
- solido zurrunaren oreka-baldintzak, 210
- solido zurrunaren sistema, 172
- solido zurrun askea, 171
- sorgailuaren indar elektroeragilea, 402
- sorgailu elektrikoa, 402
- Steiner-en formula, 186
- (George Gabriel) Stokes, 268
- stokesa (unitatea, St), 268
- Stokes-en formula, 286, 377
- Stokes-en legea, 110
- substantzia tixotropikoak, 265
- superceroalea, 399
- talkak, 166, 500
- talka elastikoa, 168
- talka endoergikoa, 168
- talka exoergikoa, 168
- talka inelastikoa, 168
- talka-uhinak, 362
- (bektore unitario) tangentea, 70
- tanta likidoa, 296
- tanzen sorkuntza, 298
- (gainazal likidoen gaineko) tanta, 299
- tanta-kontagailua, 298
- telebista, 502
- teleskopioa, 606
- tenperatura, 506, 519
- tenperaturaren definizioa teoria zinetikoaren ikuspuntutik, 537
- tenperatura absolutua, 509
- tenperatura termodinamikoa, 28
- tenperatura-escala, 508
- tenperatura-escala absolutua, 554
- (gas idealezko) tenperatura-escala absolutua, 509
- tenperatura-escala termodinamikoa, 553, 554
- tenperatura-unitatea, 508
- (ebakidura-)tentsioa, 251
- tentsio-egocra, 250
- tentsimetroa, 292
- tentsorea, 26

- (esfortzuen) tentsorea, 251, 259
- (inertzia-)tentsorea, 177, 179
- (Ichen ordenako) tentsorea, 26
- (ncke-)tentsorea, 251
- (zerogarren ordenako) tentsorea, 26
- teoria heliozentrikoa, 226
- Termodinamikaren bigarren printzipioa, 522, 541
- Termodinamikaren bigarren printzipioaren enuntziatuak, 543
- Termodinamikaren bigarren printzipioaren Clausius-en enuntziatua, 546, 549
- Termodinamikaren bigarren printzipioaren formulazio matematikoa, 557, 559
- Termodinamikaren bigarren printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatua, 544, 549, 551, 555
- Termodinamikaren lehenengo printzipioa, 505, 514, 521, 541
- Termodinamikaren lehenengo printzipioaren forma diferentziala, 515
- Termodinamikaren zerogarren printzipioa, 507
- termometroak, 506
- termostatoa, 520
- (Nikola) Tesla, 414
- tesla (unitatea, T), 414, 439
- tokiko bertikala, 124
- (Cavendish-en) tortsio-balantza, 229
- tortsio-modulua, 256
- tortsorea, 51, 192
- toru-itxurako solenoidea, 443
- transformadorea, 465, 488
- transformadore eraistaila, 489
- transformadore jasotzailea, 489
- transformazio galilearra, 85
- transformazio-erlazioa, 489
- translazioa, 173
- translaziozko askatasun-graduak, 538
- translazio hutseko higidura, 176
- translazio paraleloa, 93, 610
- translazio uniforme, 94, 100
- translazio-energia zinetikoa, 525, 537
- translazio-higidura erlatiboa, 84
- translaziozko energia zinetiko molarra, 538
- trenkada, 520
- tresna optikoak, 592, 599
- triedroak, 34, 58
- (alderantzizko) triedroa, 34
- triedro kartesiarra, 609
- triedro intrintsekoa, 72
- triedro zuzena, 34
- (propietate) trinkakona, 37
- tunel efektua, 141
- txantiloia, 27
- (John) Tyndall, 351
- Tyndall-en esperientzia, 351
- UHF
- uhina, 329
- uhinaren intentsitatea, 343
- uhinen difrakzioa, 357
- uhinen errefrakzioa, 350
- uhinen interferentzia, 345, 354
- uhinen islapena, 350
- uhinen polarizazioa, 334
- uhinen propietateak, 345
- (hiru dimentsioko)uhinen ekuazioa, 336
- (energia-)uhina, 342
- uhin bektoriala, 333
- uhin elektromagnetikoak, 334, 491
- uhin elektromagnetiko geldikorrak, 491
- uhin elektromagnetiko lauak, 491
- uhin errefraktatua, 350
- uhin esferikoak, 336, 495
- uhin eskalarra, 333
- uhin geldikorrak, 354
- uhin infragorriak, 503
- uhin islatua, 350
- uhin harmonikoa, 494
- uhin lauak, 336
- uhin linealki polarizatua, 334
- uhin mekanikoa, 334
- uhin sekundarioak, 348
- uhin sekundarioen interferentzia, 359
- uhin unidimentsionalaren ekuazio diferentziala, 331
- uhin unidimentsional harmonikoa, 331
- uhin zilindrikoak, 336, 495
- uhin zirkularki polarizatua, 334
- (luzetarako) uhina, 333, 337
- (Mach-en) uhinak, 362
- (talka-)uhinak, 362
- (zeharkako) uhina, 333, 339
- uhin-frontea, 335, 348
- uhin-fronte erasotzailea, 351
- uhin-fronte islatua, 351
- uhin-fronte laua, 336, 493
- uhin-iturria, 360
- uhin-iturri puntual sinkronikoak, 345
- uhin-luzera, 332, 563
- uhin-motak, 333
- uhin-tren esferikoak, 354
- uhin-tren harmonikoak, 354

- uhin-tren jarraitua, 342
- uhin-zenbakia, 331
- ukipena, 105, 214
- (marruskaduradun) ukipena, 214
- (marruskadurarik gabeko) ukipena, 214
- ukipen diatermanoa, 507
- ukipen hutseko lotura, 214
- ukipen-angelua, 299, 301
- ukipen-gainazala, 299
- ukipen-indarra, 105, 225
- unitate bektoreak, 35
- unitate-sistemak, 29
- unitate-sistema internazionala, 29
- uraren fusio-puntua, 508
- uraren puntu hirukoitza, 508

- (Johannes Diderik) Van der Waals, 106
- Van der Waals-en indarrak, 106, 290

- (Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio) Volta, 388
- volta (unitatea, V), 388
- voltamperea (VA), 484
- voltampere erreaktiboa (VAR), 484

- watta (unitatea, W), 131, 484
- (Wilhelm Eduard) Weber, 438
- weberra (unitatea, Wb), 438
- (Charles Thomson Rees) Wilson, 102
- Wilson-en ganbera, 102

- X izpiak, 503
- xaboi-burbuila, 289
- xafla likido diferentziala, 295
- (likidoa-baporea) xafla, 299
- (solidoa-baporea) xafla, 299
- (solidoa-likidoa) xafla, 299

- (Thomas) Young, 562
- Young-en modulua, 256, 337

- zaldipotentzia, 131
- zeharkako abiadura, 143
- zeharkako osagaia, 78
- (abiaduraren) zeharkako osagaia, 113
- zeharkako uhina, 333, 339
- zenbaki-hirukotea, 609
- zentimetroa, 29
- zentipoisea, 268
- zentral termikoa, 545
- (bultzada-)zentroa, 275
- zerogarren ordenako tentsorea, 26
- ziba asimetrikoa, 181
- ziba esferikoa, 181
- ziba simetrikoa, 181
- ziklo itzulgarria, 550
- ziklo itzulgarriaren etekina, 551
- ziklo termodinamikoa, 514
- zikloia, 126
- ziklotroia, 418
- zinematika, 57
- (kapazitatedun) zirkuitua, 473
- (korronte alternoko) zirkuituak, 474
- R-L zirkuitua, 454
- zirkuitu erresonatzaila, 487
- zirkulazioa, 431, 440, 442, 448, 614
- ziurgabetasunaren printzipioa, 28
- zurruntasun-konstantea, 259
- zurruntasun-modulua, 256
- zuzenketa-faktorea, 284