



Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak Datu-analisirako lanabesak

XABIER ISASI BALANZATEGI



ERREGRESIO LINEALA, BARIANTZA- ANALISIAK ETA HIPOTESI-TESTAK DATU-ANALISIRAKO LANABESAK

Xabier Isasi Balanzategi

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2010



HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

«Liburu hau Hezkuntza, Unibertsitate eta
Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da»

© Udako Euskal Unibertsitatea

© Xabier Isasi Balanzategi

ISBN: 978-84-8438-290-4

Lege-gordailua: BI-1748-2010

Inprimategia: CUATROAS, Bilbo

Azalaren diseinua: Igor Markaida

Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzailleak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxe. 944793039

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.org

www.ueu.org

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Aurkibidea

ATARIKOA	11
1. KORRELAZIO-KOEFIZIENTEAK	13
1.1. Pearsonen korrelazio-koefizientearen ezaugarriak	15
1.2. Korrelazioan eragiten duten faktoreak, interpretazioa eta kausalitatea	19
1.3. Spearmanen korrelazio-koefizientea (r_s)	20
1.4. Kendallaren korrelazio-koefizientea (τ)	21
1.5. Yuleren Q koefizientea	23
1.6. χ^2 koefizientea	24
1.7. C kontingentzia-koefizientea	25
1.8. Aldagai dikotomikoen arteko korrelazio-koefizienteak	25
1.8.1. Korrelazio-koefiziente biserial puntuala (r_{pb})	25
1.8.2. ϕ korrelazio-koefizientea	27
2. EREDU LINEAL OROKORRA	29
2.1. Eredutik linealaren aurretikoak	32
2.2. Erregresio lineal bakuna	35
2.3. Erregresio-zuzenaren parametroen kalkulua	41
2.4. Determinazio-koefizientea, estimazioaren errore tipikoa eta konfiantza-tarteak	41
2.5. Erregresio linealaren grafikoak	45
2.6. Erregresio lineal anizkoitza	49
2.7. Eredutik lineal anizkoitza	50
2.8. Bi kanpo-aldaia	51
2.9. Hiru kanpo-aldaia edo gehiago	56
2.9.1. ANOVA, korrelazio-koefiziente partzialak eta anizkoitza, determinazio-koefizientea	61
2.9.2. Erregresio lineala SPSS erabiliz	63
2.9.2.1. Estatistikoak	64
2.9.2.2. Durbin-Watsonen testa	65
2.9.2.3. Grafikoak	66
2.9.2.4. Aldagaiak erregresio-analisan sartzeko prozedurak	66
2.9.2.5. Kanpo-aldaia ekuazioan sartzeko hautapenak	67
2.9.3. Erregresio lineala R-n	68
2.10. Ekuazio linealen sistemen ebazpena: Cramerren araua	69

3. BARIANTZA-ANALISIA.	71
3.1. ANOVA, faktore bakarra, eragin finkoak	72
3.2. Egiturako ekuazioa	74
3.3. Parametroen estimazioa	75
3.4. Aldakortasunaren deskonposaketa	76
3.5. Berbiduren baturetatik bariantzen kalkulura	79
3.6. Hipotesiak, F testa eta erabaki estatistikoa	80
3.7. Batez besteko arimetikoen arteko erkatze anizkoitza.	82
3.7.1. Tukeyren HSD testa	82
3.7.2. Schefféren testa	83
3.7.3. Dunnetten testa.	83
4. DISEINUAK.	85
4.1. Faktore bakarreko talde arteko diseinua.	85
4.1.1. Zorizko talde anitzeko diseinua	85
4.1.2. Bariantza-analisia, ereduaren egitura.	86
4.1.2.1. Adibide praktikoa. Ohiko prozedura	89
4.1.2.2. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena .	92
4.2. Talde arteko AXB diseinu faktoriala.	97
4.2.1. Talde arteko AXB diseinu faktoriala, adibide praktikoa.	98
4.2.2. Talde arteko AXB diseinua, berbiduren baturen kalkulua ...	100
4.2.3. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena	102
4.3. Talde arteko $AXBXC$ diseinu faktoriala	108
4.3.1. Talde arteko $AXBXC$ diseinu faktoriala, adibide praktikoa ..	109
4.3.2. Talde arteko $AXBXC$ diseinua, berbiduren baturen kalkulua.	111
4.3.3. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena	117
4.3.4. Bektoreen kalkulua eta eraketa	120
4.4. Talde barneko edo neurketa errepikatuen diseinu esperimental bakuna (tratamenduak X subjektuak)	128
4.4.1. Tratamenduak X subjektuak, adibide praktikoa.	129
4.4.2. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena.	133
4.5. Bi faktorez osatutako talde barneko diseinu faktoriala	137
4.5.1. Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak. Adibide praktikoa.	138
4.5.2. Talde arteko $AXBXS$ diseinua, berbiduren baturen kalkulua .	139
4.5.3. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena	142
4.6. Diseinu faktorial mistoa	149
4.6.1. Diseinu faktorial mistoa, adibide praktikoa.	150
4.6.2. Diseinu faktorial mistoa, berbiduren baturen kalkulua	151
4.6.3. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena	154
4.7. Aldagai kobariantedun diseinua: kobariantza-analisia.	159
4.7.1. Aldagai kobariantedun diseinua, adibide praktikoa.	160

4.7.2. Aldagai kobariantedun diseinua. Kalkulua, lehenengo prozedura	161
5. <i>R Commander</i>	167
5.1. Datuak eskuratzen	171
5.2. Datu-editorea	172
5.3. Datuak inportatzen	173
5.4. Datuak gordetzen	174
5.5. Aldagaiak lantzen	175
5.6. Estatistikoak	175
5.7. Laburpenak	176
5.8. Kontingentzia	176
5.9. T hipotesi-testak	176
5.10. Bariantzen inguruko hipotesi-testak	177
5.11. Fidagarritasun-analisia eta erregresio lineala	177
5.12. <i>R Commander</i> -en grafikoak	178
5.12.1. Kutxa-diagrama	179
5.12.2. Sakabanaketa-diagrama	180
5.12.3. Batez bestekoen diagrama	181
6. ARIKETAK	183
6.1. Lagin-teoria eta estimazio-teoria	185
6.1.1. Laginketa-banaketa: batez besteko aritmetikoa	186
6.1.2. Laginketa-banaketa: bariantza	187
6.1.3. Laginketa-banaketa: proportzioa	187
6.1.4. Konfiantza-maila, testaren indarra eta I. eta II. motako erroreak	188
6.2. Hipotesi-test parametrikoak	192
6.2.1. Hipotesi-test parametrikoak: batez besteko aritmetiko bakarra	194
6.2.2. Hipotesi-test parametrikoak: proportzio bakarra	196
6.2.3. Hipotesi-test parametrikoak: bariantza bakarra	197
6.2.4. Hipotesi-test parametrikoak: batez besteko aritmetiko bi, lagin independenteak	198
6.2.5. Hipotesi-test parametrikoak: proportzio bi, lagin independenteak	201
6.2.6. Hipotesi-test parametrikoak: bariantza bi, lagin independenteak	203
6.2.7. Hipotesi-test parametrikoak: erlazionaturiko lagin bi	204
6.2.8. Hipotesi-test parametrikoak: korrelazio-koefizientea	206
6.3. Test ez-parametrikoak	208
6.4. Erregresio lineala	213
6.5. Baraintza-analisiak (ANOVA)	215

7. FORMULAK	221
7.1. Estatistikaz	223
7.1.1. Estatistika deskribatzailea	227
7.1.1.1. Posizio-adierazleak	228
7.1.1.2. Zentrorako joerako adierazleak	228
7.1.1.3. Sakabanatze-adierazleak	229
7.1.1.4. Banaketa-adierazleak	230
7.1.1.5. Aldagaien arteko erlazio-adierazleak	231
7.1.2. Erregresio linealaren estatistikoak	233
7.2. Analisisien estatistikoak	234
7.2.1. Hipotesi estatistikoak	234
7.2.2. Hipotesi nulua eta ordezeko hipotesia.	235
7.3. Hipotesi-test parametrikoen estatistikoak.	236
7.3.1. Lagin bakarra	236
7.3.1.1. Batez besteko aritmetiko bakarra, populazioaren bariantza ezaguna.	237
7.3.1.2. Batez besteko aritmetiko bakarra, pupulazioaren bariantza ezezaguna.	238
7.3.1.3. Proportzio bakarra	238
7.3.1.4. Bariantza bakarra	239
7.3.2. Bi lagin independente (zorizkoak)	240
7.3.2.1. Batez besteko aritmetiko bi, populazioaren bariantza ezagunak.	240
7.3.2.2. Batez besteko aritmetiko bi, populazioaren bariantza ezezagunak	241
7.3.2.3. Proportzio bi.	242
7.3.2.4. Bariantza bi. Homozedastizitate-testa	243
7.3.3. Erlazionaturiko bi lagin (edo aldagai)	244
7.3.3.1. Batez besteko aritmetiko bi, erlazionaturiko laginak	244
7.3.3.2. Batez besteko aritmetiko bi, binakaturiko puntuazioak	244
7.3.3.3. Korrelazio-koefiziente bat (Pearson)	245
7.3.3.4. Korrelazio-koefiziente bi (Pearson I).	246
7.3.3.5. Korrelazio-koefiziente bi (Pearson II)	247
7.3.4. Erregresio linealaren estatistikoaren gaineko testak	247
7.3.4.1. Konstantearen inguruko hipotesi-testa.	247
7.3.4.2. Zuzenaren malda edo pendizearen inguruko hipotesi-testa	249
7.4. Hipotesi-test ez-parametrikokoak.	250
7.4.1. Lagin bakarra	251
7.4.1.1. Doikuntza-testak	251
7.4.1.1.1. Pearsonen χ^2 testa	252
7.4.1.1.2. Kolmogorov-Smirnov	252

7.4.1.1.3. Lilliefors	253
7.4.1.2. Posizio-adierazleen gaineko testak	253
7.4.1.2.1. Zeinuen testa	253
7.4.1.2.2. Medianaren testa	254
7.4.1.2.3. Koantilen testa	255
7.4.1.2.4. Wilcoxonon testa (I)	256
7.4.1.3. Ausazkotasun-testak	257
7.4.1.3.1. Bolada-testa	257
7.4.2. Erlazionaturiko bi lagin, binakaturiko puntuazioak	258
7.4.2.1. Wilcoxonon testa (II)	258
7.4.2.2. Zeinuen testa	259
7.4.2.3. McNemarren testa	260
7.4.3. Bi lagin independente	261
7.4.3.1. Mann-Whitneyren testa	261
7.4.3.2. Pearsonen χ^2 testa	262
7.4.4. k lagin independente	263
7.4.4.1. Kruskal-Wallisen testa	263
7.5. Bariantza-analisiak (ANOVA)	264
7.5.1. ANOVA faktore bakarra, eragin finkoak. Eredu orekatuko bariantza-analisia	265
7.5.1.1. Tukeyren HSD testa (Honestly Significantly Different)	265
7.5.2. ANOVA Bi faktore $A \times B$ diseinua. Eredu orekatuko bariantza-analisia	266
7.5.3. ANOVA $A \times B \times C$ diseinua. Eredu orekatuko bariantza-analisia	267
7.5.4. ANOVA Tratamenduak X Subjektuak. $A \times S$ diseinua. Eredu orekatuko bariantza-analisia	269
8. ESTATISTIKA-TAULAK	271
8.1. Zorizko zenbakiak	273
8.2. Banaketa binomiala	275
8.2.1. Banaketa binomiala; banakako probabilitateak	277
8.2.2. Banaketa binomiala; probabilitate metatuak	283
8.3. Poissonen banaketa	289
8.3.1. Poissonen banaketa; banakako probabilitateak	290
8.4. Banaketa normal estandarizatua	294
8.4.1. $N(0,1)$ taulen erabilera	295
8.5. Studenten t banaketa	299
8.6. χ^2 banaketa	301
8.6.1. χ^2 taulen erabilera	302
8.7. F banaketak	305
8.7.1. Bariantza biren inguruko testak	306
8.7.2. Eskuinaldeko testa $S_1^2 > S_2^2$	306
8.7.3. Ezkerraldeko testa $S_1^2 < S_2^2$	306

8.7.4. Aldebiko testa	307
8.7.5. Leveneren testa	307
8.8. Pearsonen korrelazio-koefizientea	312
8.9. Spearmanen korrelazio-koefizientea	313
8.10. Fisherren z eraldaketa	314
8.11. Durbin-Watson estatistikoaren balio kritikoak	315
8.12. Ibiltarte estudentizatuak	316
8.13. Kolmogorov-Smirnov	317
8.14. Zeinuen testa. Wilcoxonen bolada-testa	318
8.15. Zeinuen testa	319
8.16. Kruskal-Wallisen testa	320
8.17. Kruskal-Wallisen testa; tamaina berdineko taldeak	321
9. ARIKETEN EBAZPENAK	323
9.1. LAGIN-TEORIA ETA ESTIMAZIO-TEORIA	323
9.1.1. Laginketa-banaketa: batez besteko aritmetikoa	323
9.1.2. Laginketa-banaketa: bariantza	324
9.1.3. Laginketa-banaketa: proportzioa	324
9.1.4. Konfiantza-maila, testaren indarra eta I. eta II. motako erroreak	326
9.2. Hipotesi-test parametrikoak	333
9.2.1. Hipotesi-test parametrikoak: batez besteko aritmetiko bakarra	335
9.2.2. Hipotesi-test parametrikoak: proportzio bakarra	337
9.2.3. Hipotesi-test parametrikoak: bariantza bakarra	338
9.2.4. Hipotesi-test parametrikoak: batez besteko aritmetiko bi, lagin independenteak	339
9.2.5. Hipotesi-test parametrikoak: proportzio bi, lagin independenteak	343
9.2.6. Hipotesi-test parametrikoak: bariantza bi, lagin independenteak	344
9.2.7. Hipotesi-test parametrikoak: erlazonaturiko lagin bi	345
9.2.8. Hipotesi-test parametrikoak: korrelazio-koefizientea	347
9.3. Test ez-parametrikoak	350
9.4. Erregresio lineala	357
9.5. Bariantza-analisiak	362
ERREFERENTZIAK	369
TAULEN AURKIBIDEA	371
IRUDI ETA GRAFIKOEN AURKIBIDEA	375

Atarikoa

Errealitatea nolakoa den antzemateko, oro har, lau metodo erabili ohi dira: *autoritatea*, *arrazoia*, *intuizioa* eta *zientzia*. Aurrenekoari buruz, *autoritateaz*, ez dugu ezer esango liburu honetan. Horrek ez du esan nahi, ordea, autoritatea gutxiesten dugunik. Badaezpada ere. Autoritateak berebiziko garrantzia izan du, eta dauka oraindino, munduaren ikuskera ezartzeko, harik eta ikuskera hori *erreal*a bihurtzeraino. Arrazoia, intuizioa eta zientzia, berriz, jakituriaren garapenerako sorburuak dira. Arrazoia eta intuizioa erabiliz errealitatearen edozein alderdiri buruz iritzi edo hipotesi bat eraiki dezakegu. Iritzitik harago joan nahi badugu, oster, zientzia erabili behar dugu. Garaiotan ez dugu beste metodorik ezagutzen gure hipotesiak berresteko edo ezesteko. Zientziaren barrenean, azkenik, Estatistika da, Gizarte Zientzietan, teknikarik emankorrena errealitatearen gaineko ezagumendua eraikitzeko.

Behatu eta esperimentuak egin. Behatzea eta esperimentuak egitea, errealitatea ezagutzeko bi eginkizun nagusi dira, elkarren osagarriak dira baina oinarri eta prozedura desberdinekoak. Behaketa, obserbazioa, datuen bilketarako abiapuntutzat har dezakegu. Datuak bildu, antolatu eta ustiatu, parametroen estimazioak, korrelazio-ikerketak, deskripzioak eta aldagaien arteko erlazioak ezagutzea. Horiek dira, besteak beste, Estatistikaren eginkizunak. Estatistika Deskribatzailea eta Estatistika Inferentziala, hain zuzen ere. Esperimentuen bitartez, ordea, errealitatean jazo ohi diren aldaketak zerk eta nola sortzen diren jakin nahi dugu. Egoera kontrolatuetan frogatu nahi dugu gure hipotesia betetzen den ala ez. Alor honetan Estatistika Inferentzialak laguntzen digu aldaketen eragileak hobeto ezagutzen.

Esan dugunez, zientzia da gure errealitatearen ezaupide nagusia. Zientzia ikasi behar dugu, beraz. Ikasi. Norbanakoaren ahaleginez ikasten da, edo ez da ikasten. Ikastea, neurri handian, bakarkako lana da. Irakasleok lagun dezakegu prozesuan, noizbait erraztu, noizbait zaildu, bakoitzaren arabera. Baina, ikastekotan, ikaslearena da meritua, meritua eta, batez ere, onura. Estatistika eta antzeko jakintza-alorretan ikasteko, ikasleen ahaleginak berariazko garrantzia dauka. Matematikaren didaktikaren arazo berdintsuak dauzka Estatistikak. Ikasleak oinarrizko trebetasunak ikasiko baditu, bere bakardadean praktikak egitea oso baita beharrezkoa. Bizikletaz ikastearen antzekoa da: bizikletaren mekanika, ezaugarriak eta alderdi fisikoa eta teorikoa ezagutzeak laguntzen du, bai, baina guztiz alferrikakoa da hori guztia ikastea norbera bizikleta ganean ipintzen ez bada eta ibiltzen saiatzen ez

bada. *Ibiltzen* ikasi behar baita. Bizikletan ibiltzen irakasteko pazientzia handia behar da, batez ere, pazientzia. Bizikleta gainean jardun barik azalpen eta aholku guztiak antzuak dira-eta.

Estatistikan, oro har, norbanakoaren esfortzua ikasteko giltzarria da, beraz. Halere, esfortzua probetxugarria izateko, zer erabil dezakegun, zer-nolako tresnak dauzkagun, ondo begiratu behar dugu. Ikasteko bitarteko egokiak eta onak izateak asko lagun dezake, eta ikaslearen esfortzua, neurri batean, arindu daiteke. Irakasleon nahia, eta betebeharra, ikasleei ikasten laguntzea da. Nolabait, irakastea hori da: ikasten laguntzea. Asmo horrekin egin dugu liburu hau: ikasleei ikasten laguntzeko. Argitalpen honen xedea izan da, bereziki, psikologiako ikasleentzako, eta, oro har, Gizarte Zientzietako ikasle-irakasleentzako material didaktikoa sortzea. Orriotan Datu Analisia ikasteko eta irakasteko lanabesak bildu ditugu. Batik bat, datu-analisiaren alderdi praktikoa jorratu dugu. Praktika, jakina, irakaskuntzaren ikuspegitik ulertu behar dugu. Hau da, bertan bildu ditugu irakasgai honen irakaskuntzan erabili beharreko lanabesak.

Liburua zortzi atal nagusitan banatu dugu: *Korrelazio-koefizienteak*, *Eredu lineal orokorra*, *Bariantza-analisiak*, *Diseinuak*, *R Commander*, *Ariketak*, *Formulak* eta *Estatistika-taulak*. Zortzi atal horiei erantsita, *Ariketen ebazpenak* eta *Erreferentziak* ipini ditugu. Tarteka-marteka iruzkinak eta azalpen laburrak txertatu ditugu, baina ikasleak ez du bertan aurkituko Estatistikaren corpus teoriko handirik. Hori bai, beharrezkoa iruditu zaigunean azalpen xume bat edo beste tartekatu dugu.

Unibertsitarioen lanerako liburua, ikasteko eta irakasteko materiala sortu nahi izan dugu. Horregatik, argitalpenaren egitura eta formatuari arreta berezia jarri diogu, soiltasuna eta argitasuna irizpide nagusiak izan ditugu liburua taxutze-rakoan. Oso material antolatua eta egituratua egin gura izan dugu. Formulak, taulak eta ariketak erraz eta bizkor bilatzeko.

1. Korrelazio-koefizienteak

Aldagaien arteko baterako aldakortasuna adierazten duen indizeari, oro har, korrelazio-koefizientea esaten zaio. Horrela, aldagai baten puntuazio jakin batzuk beste aldagai baten puntuazioei lotzen zaizkienean korrelazio-maila jakin bat dagoela esaten dugu. Adibidez, ikasleen zenbakizko gaitasun (X) maila jakinak ikasleen nota (Y) jakinei lotzen bazaizkie, zenbakizko gaitasunen eta noten artean korrelazio-neurriren bat agertzen da. Zenbakizko gaitasun-maila altuei nota handiak badagozkie, korrelazioa positiboa izango da. Aitzitik, zenbakizko gaitasun-maila txikiei nota altuak balegozkie, korrelazioa negatiboa izango litzateke.

Aldagaien izaeraren arabera korrelazio-koefiziente desberdinak kalkulatzen dira. Edozein kasutan, aldagaien arteko aldakortasun komuna aztertzea da korrelazioaren kalkulurako abiapuntua. *Baterako aldakortasuna* esaten diogu aldagaien arteko aldakortasun komun horri. Pearsonen korrelazio-indizea, oro har, aldagai jarraikien arteko erlazio-adierazlea da. Bi aldagai jarraikien arteko, X eta Y , korrelazioa haien puntuazioen arteko kobariazio gisa uler daiteke. Kobariantza, beste aldetik, X eta Y aldagaietako *distantzien* arteko biderkaduren funtzioa da. Honela kalkulatzen da:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n} \quad \text{VII.4.7}$$

Korrelazioa positiboa denean, $(X_i - \bar{X})$ eta $(Y_i - \bar{Y})$ *distantziak*, biak, kasurik gehienetan positiboak izango dira eta, beraz, elkarren arteko biderkadura ere bai. Kasu horretan, esango genuke X eta Y -ren puntuazioen kobariazioa norabide berekoa dela. Hau da, X -ren puntuazioak batez bestekotik gorakoak direnean, Y -ren puntuazioak ere batez bestekotik gorakoak dira, eta, X -ren puntuazioak batez bestekotik beherakoak direnean, Y -ren puntuazioak ere batez bestekotik beherakoak dira. Hori gertatzen da aldagaien arteko kobariazioa, eta korrelazioa, positiboa denean. Kontrako kasuan, X -ren batez bestekotik gorako balioei Y -ren batez bestekotik beherako balioak dagozkienean, kobariantza negatiboa izango da. Kobariantza zero izango da, azkenik, *distantzien* arteko biderkadura zero denean. Edo, beste era batera esanda, X eta Y -ren balioak arau jakinik gabe mugitzen direnean.

Kobariantza aldagaien arteko erlazio-adierazle gisa erabil daiteke, jakina, baina lagingaren tamainak eta, batez ere, aldagaien neurketa-eskalak haren balioetan nabarmen eragiten dute. Aldakortasun komunaren adierazle gordina da, alegia.

I.1. taula. *Distantziak eta kobariantzak.*

X	Y	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$		X	Y	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
1	6	-2,75	-0,5	1,375		10	60	-27,5	-5	137,5
1	4	-2,75	-2,5	6,875		10	40	-27,5	-25	687,5
1	5	-2,75	-1,5	4,125		10	50	-27,5	-15	412,5
1	4	-2,75	-2,5	6,875		10	40	-27,5	-25	687,5
1	5	-2,75	-1,5	4,125		10	50	-27,5	-15	412,5
3	5	-0,75	-1,5	1,125		30	50	-7,5	-15	112,5
3	6	-0,75	-0,5	0,375		30	60	-7,5	-5	37,5
3	4	-0,75	-2,5	1,875		30	40	-7,5	-25	187,5
3	5	-0,75	-1,5	1,125		30	50	-7,5	-15	112,5
3	5	-0,75	-1,5	1,125		30	50	-7,5	-15	112,5
5	9	1,25	2,5	3,125		50	90	12,5	25	312,5
5	8	1,25	1,5	1,875		50	80	12,5	15	187,5
5	7	1,25	0,5	0,625		50	70	12,5	5	62,5
5	7	1,25	0,5	0,625		50	70	12,5	5	62,5
5	9	1,25	2,5	3,125		50	90	12,5	25	312,5
6	8	2,25	1,5	3,375		60	80	22,5	15	337,5
6	9	2,25	2,5	5,625		60	90	22,5	25	562,5
6	7	2,25	0,5	1,125		60	70	22,5	5	112,5
6	9	2,25	2,5	5,625		60	90	22,5	25	562,5
6	8	2,25	1,5	3,375		60	80	22,5	15	337,5
75	130			57,5		750	1300			5750

$$s_{xy} = 2,875$$

$$s_{xy} = 287,5$$

Goiko bi taula horietan aldagaien eskala desberdinek kobariantzetan duten eragina antzeman daiteke. Ezkerreko taulan, X eta Y aldagaien balioak 0 – 10 bitartekoak diren bitartean, eskuineko taulan 0 – 100 bitartekoak dira. Horiek horrela, eskuma aldeko datuen kasuan kobariantza ehun aldiz handiagoa da. Begien bistakoa da aldagaien eskalak kobariantzan duen eragina. Horrek zailtzen du aldakortasun komunaren adierazle honen interpretazioa.

Arazo hori saihesteko, distantzia soilak erabili beharrean *puntuazio estandar* erabiltzen ditugu. Ikus dezagun.

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{s_x} \right) \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{s_y} \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad \text{VII.6.2}$$

Hori da, hain zuzen ere, Pearsonen korrelazio-koefizientea. Formula horrez gainera, erro beretik, beste formula batzuk erabili ohi dira.

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{s_x} \right) \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{s_y} \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_x z_y}{n} & \text{VII.6.3} \\
 r_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n xy}{ns_x s_y} \\
 r_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^n xy}{ns_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n xy}{n \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x^2}{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y^2}{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^n xy}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y^2}} \\
 r_{xy} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{s_x s_y} = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{n \sqrt{\frac{n \sum X^2 - (\sum X)^2}{n^2}} \sqrt{\frac{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2}{n^2}}} = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \sqrt{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2}}
 \end{aligned}$$

1.1. PEARSONEN KORRELAZIO-KOEFIZIENTEAREN EZAUGARRIAK

Korrelazio-koefizientearen heina honako hau da: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Demagun: } u &= z_x + z_y & \text{non, } \bar{u} &= 0 \\
 v &= z_x - z_y & \bar{v} &= 0
 \end{aligned}$$

Orduan,

$$\begin{aligned}
 s_u^2 &= \frac{\sum (z_x + z_y)^2}{n} = \frac{\sum z_x^2}{n} + 2 \frac{\sum z_x z_y}{n} + \frac{\sum z_y^2}{n} = 1 + 2r_{xy} + 1 = 2(1 + r_{xy}) \\
 s_v^2 &= \frac{\sum (z_x - z_y)^2}{n} = \frac{\sum z_x^2}{n} - 2 \frac{\sum z_x z_y}{n} + \frac{\sum z_y^2}{n} = 1 - 2r_{xy} + 1 = 2(1 - r_{xy})
 \end{aligned}$$

Bariantza horiek, S_u^2 eta S_v^2 , halaberharrez, positiboak dira. Horrela, ezinbestean, bete behar dira:

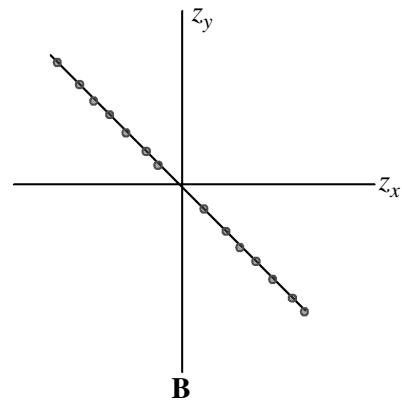
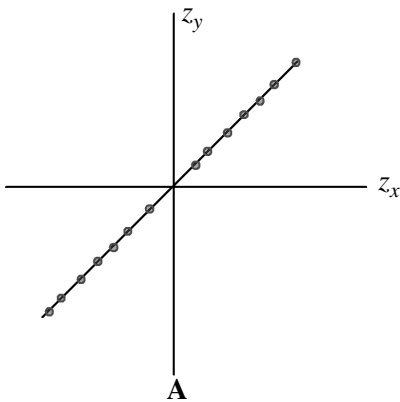
$$\begin{aligned} (1 + r_{xy}) &\geq 0 \\ (1 - r_{xy}) &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{eta hortik,} \quad \begin{aligned} r_{xy} &\geq -1 \\ r_{xy} &\leq 1 \end{aligned} \quad \text{azkenik,} \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

Pertsona guztiek X eta Y aldagaietan puntuazio estandar bera lortzen dutenean, $z_x = z_y$ betetzen da eta korrelazio-koefizienteak bere baliorik handiena ($r_{xy} = 1$) hartzen du. Hori horrela,

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n z_x z_y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_x^2}{n} = 1$$

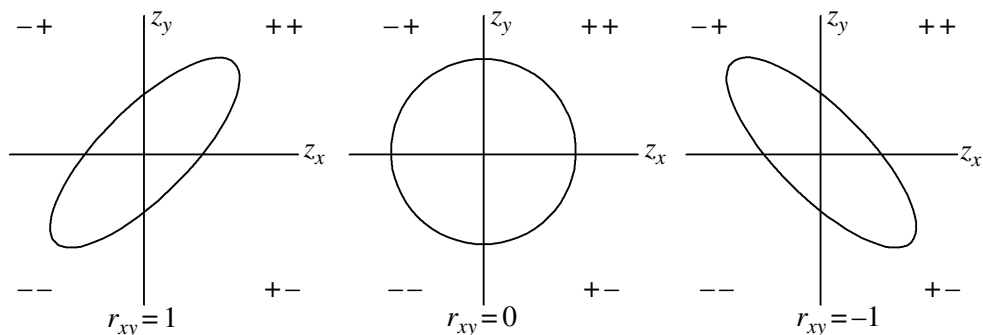
Aitzitik, pertsona guztiek X eta Y aldagaietan puntuazio estandar bera, baina zeinu desberdinetakoak, lortzen dutenean, $z_x = -z_y$ betetzen da. Hortik, beraz,

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n z_x z_y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_x (-z_x)}{n} = -\frac{\sum_{i=1}^n z_x^2}{n} = -1$$



I.1. grafikoa. Erabateko korrelazioak.

Aldagaien arteko korrelazioa erabatekoa denean, 1 (**A**) edo -1 (**B**), puntuak zuzenaren gainean lerrotatzen dira. Lehenengo kasuan (**A**), zuzenak lehenengo eta hirugarren koadranteak erdibitzen ditu; bigarren kasuan (**B**), berriz, zuzenak bigarren eta laugarren koadranteak erdibitzen ditu. Korrelazioak, positiboak, korrelazio-rik eza edo negatiboak direnean, puntuek itxura desberdinak hartuko dituzte ardatz cartesianen eremuan. Ikus dezagun:



I.2. grafikoa. Korrelazio-puntuen diagramak.

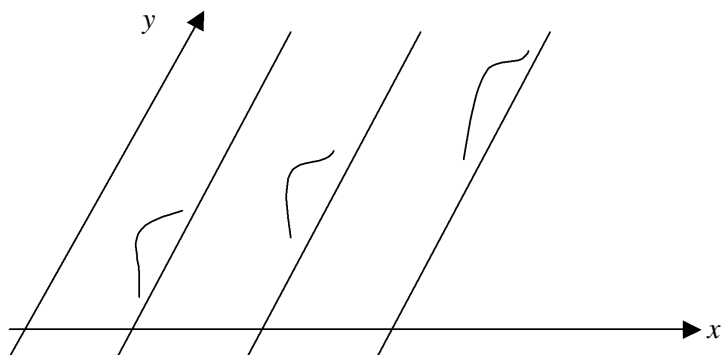
Bi aldagaien arteko korrelazio-koefizientea aldagaitza da aldagai horien eraldaketa linealen aurrean. Hau da, korrelazio-koefizientea ez da aldatzen kalkulurako puntuazio zuzenak, distantziak edo puntuazio estandarrek erabiltzen baditugu.

Pearsonen korrelazio-koefizientea erabiltzeko oinarriak hauek dira:

1. X eta Y , kanpo- eta barne-aldagaiak, hurrenez hurren, baterako banaketa normalari doitzen zaizkio. Hau da:
 - a. X aldagaiaren balio bakoitzeko bada, izan, Y aldagaiaren balio multzo bat banaketa normalari doitzen zaiona.
 - b. Y aldagaiaren balio bakoitzeko bada, izan, X aldagaiaren balio multzo bat banaketa normalari doitzen zaiona.

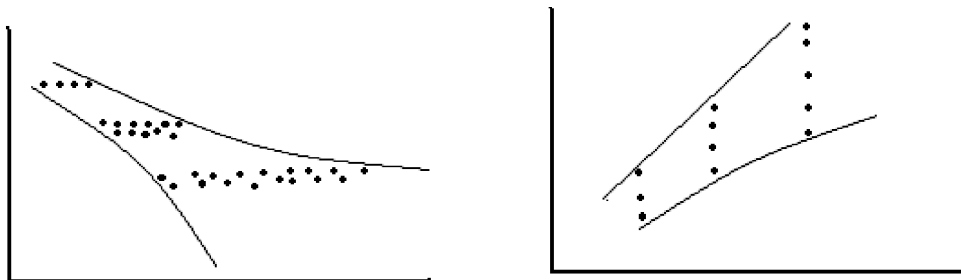
Banaketaren grafikoak hiru dimentsio dauzka eta kanpai-itxura hartzen du (azaleraren irudia). Banaketaren parametroak $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ eta ρ dira. Azken parametro hori, ρ , korrelazio linealeko koefizientea da, eta, hain zuzen ere, X eta Y aldagaien arteko erlazio mota hori adierazten du.

2. X eta Y aldagaien balio multzoen bariantzak homogeneoak dira.



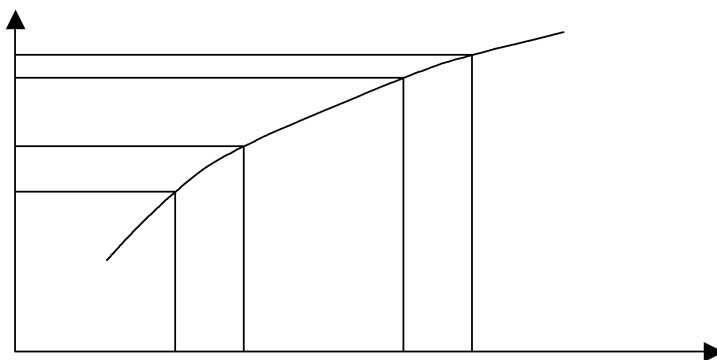
I.3. grafikoa. Homozedastizitatea.

Irudi hauetan, 3. eta 4. grafikoetan, datuak nola banatzen diren ikus dezakegu, homozedastizitatea (3. grafikoa) edo heterozedastizitatea (4. grafikoa) azaltzen denean.

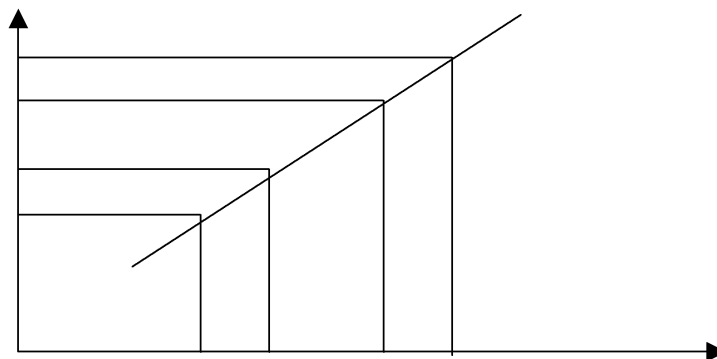


I.4. grafikoa. Heterozedastizitatea.

3. Aldagaien arteko erlazioa lineala da. Hau da, ekuazio linealari jarraitzen dio: X aldagaiaren aldaketek aldaketa proportzionalak ekartzen ditu Y aldagaian.



I.5. grafikoa. Aldaketa ez-proportzionalen funtzioa.



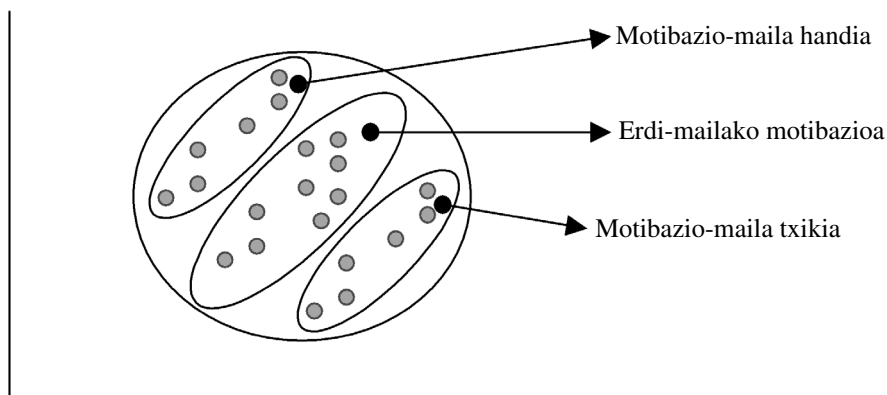
I.6. grafikoa. Aldaketa proportzionalen funtzioa

4. Datuak binakaturik agertzen dira eta zorizkoak dira. Hau da, X eta Y -ren puntuazioak binaka antolatuz daude.

1.2. KORRELAZIOAN ERAGITEN DUTEN FAKTOREAK, INTERPRETAZIOA ETA KAUSALITATEA

Aldagaien arteko korrelazioetan, batik bat, taldearen aldakortasunak eta aldagai *arrotzek* eragiten dute. Aldakortasunaren gorabeherak eragin handia daukate korrelazio-koefizienteetan. Azken buruan, korrelazio-koefizienteak aldagaien aldakortasunen funtzioak baitira.

Aldagai *arrotzen* eragina antzematea, berriz, zailagoa da. Aldagai *arrotzak* dira gure analisisetan aintzat hartzen ez ditugunak baina, zeharbidez, eragiten dutenak. Adibidez, ikasleriaren errendimendu akademikoa (Y) eta ikasten egindako esfortzua (X) aldagaien arteko korrelazioan hirugarren aldagai batek, ikasleen motibazioak (Z), eragin dezake. Kasu honetan pentsa dezakegu esfortzu-maila handiak nota altuei lotuko zaizkiela eta, aitzitik, esfortzu-maila baxuak nota txikiei lotuko zaizkiela. Alabaina, motibazioaren eragina aintzat hartzen badugu korrelazio-koefizientearen balioa alda daiteke.



I.7. grafikoa. Aldagai arrotzaren eragina korrelazioan.

Grafikoan ikusten denez (ikus I.7. grafikoa), ikasleen esfortzua (X) eta errendimendu akademikoa (Y) aldagaien artean puntuak zirkuluaren itxuran antolatzen dira, grafikoko kanpoaldeko zirkulua. Horren arabera, korrelazioa oso txikia izango litzateke. Alabaina, ikasleen motibazioa (Z) aldagaiaren eragina aintzat hartuko bagenu, motibazio-mailaren arabera esfortzuaren eta errendimendu akademikoaren arteko korrelazio-koefiziente handiak daudela ikus genezake, grafikoko barruko elipseetan.

Badakigu jakin korrelazio-koefizienteak -1 eta 1 arteko balioak har ditzakeela. Esan genezake, beraz, $0,30$ korrelazio-koefiziente txikia dela eta $0,80$, berriz, handia. Halere, ez dago irizpide finkorik esan ahal izateko korrelazio-koefizienteak noiz diren handiak eta noiz diren txikiak. Hainbat adierazle estatistikorekin gertatzen den antzera, ingurumariak eta neurgaiak ondo ezagutzea ezinbestekoa da korrelazio-koefizientea zuzen interpretatu ahal izateko.

Demagun, adibidez, emakumeen aurkako biolentzia aztertzerakoan emakumearen autoestimua (X) eta bere burua defendatzeko gaitasuna (Y) aldagaien artean $0,60$ ko korrelazio-koefizientea aurkitu dugula. Handia ala txikia al da? Gure ustez, eta irakurlea bat etorriko dela pentsatzen dugu, korrelazio-koefiziente hori *nahiko handia* da. Demagun, beste adibide bat, lanean ematen ditugun orduak (X) eta kobratzen dugun soldata (Y) aztertzerakoan korrelazio-koefiziente bera aurkitu dugula, $0,60$. Handia ala txikia al da? Kasu honetan, jakina, ezin esan dezakegu koefiziente hori handia denik, gehien jota *esanguratsua* dela esan genezake, baina inondik ere handia.

Psikometrian, kasurako, testen fidagarritasuna, muinean korrelazioaren antzekoa, $0,80$ izatea ez da nahikoa, hori fidagarritasun txikia da. Testaren baliotasunak $0,80$ balioko balu, berriz, oso baliotasun onekoa dela esan genezake. Korrelazio-koefizienteen balioen interpretazioan berdin gertatzen da, berez, ez dago esaterik zein den txikia eta zein handia jakin gabe zer aztertzen ari garen.

Korrelazioak handiak ala txikiak izan daitezke, edo korrelaziorik ez izatea gerta daiteke. Halere, korrelazio handia izateak, positiboa zein negatiboa, ez du adierazten aldagaien arteko kausazko loturarik dagoenik. Badakigu jakin besoetako haurren kasuan, bizitzaren aurreneko hilabeteetan, pisua (Y) eta igarotako denbora (X) aldagaien artean korrelazio-maila handia dagoela, asteak igaro ahala haurrak pisua irabazten duela, alegia. Baina ezin esan dezakegu igarotako *denborak haurrak gizentzen dituenik*, aldagai horien artean korrelazio-koefiziente handia egon arren. Korrelazio handia, edo txikia, izateak ez du kausazko erlaziorik adierazten inondik inora ere. Korrelazioa aldagaien arteko aldakortasun komunaren adierazle estandarizatu da, ez besterik. Handia denean, pentsa dezakegu aldagaien artean loturaren bat egon daitekeela, bai, baina aldakortasun komun horren erantzulea beste faktore edo aldagairen bat izan daiteke.

1.3. SPEARMANEN KORRELAZIO-KOEFIZIENTEA (r_s)

Ordenazko neurketa-eskala erabiltzen dugunean, pertsonak sailka ditzakegu, lehena, bigarrena eta abar. Baina ez daukagu jakiterik elkarren artean zein diferentzia zehatzik dagoen, bakoitzak zein neurri zehatza duen. Aldagaia ordenazkoak direnean, kasu horietan, bistan da, ez daukagu Pearsonen korrelazio-koefizientea kalkulatzetik.

Demagun, adibidez, zortzi (n) neska-mutiko ordenatu ditugula lagin batean haien arreta-gaitasuna (Y) eta zintzotasuna (X) aldagaien arabera.

I.2. taula. *Neska-mutikoen hurrenkerak.*

	X	Y	d_i	d_i^2
Amaia	3.	1.	2	4
Jurgi	2.	2.	0	0
Peru	1.	4.	-3	9
Ireide	5.	3.	2	4
Jone	4.	5.	-1	1
Alaitz	7.	6.	1	1
Argi	6.	8.	-2	4
Mikel	8.	7.	1	1
			0	24

Ordenazko balio horiek, bat eta zortzi bitartekoak, arreta-gaitasuna (Y) eta zintzotasuna (X) aldagaien hurrenkeren arteko diferentziak (d_i) kalkulatzeko erabiltzen ditugu. Hortik, Spearmanen korrelazio-koefizientea kalkula dezakegu:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{(6)(24)}{(8)(64 - 1)} = 0,7413 \quad \text{VII.6.4}$$

Pearsonen korrelazio-koefizientearen (r_{xy}) antzera, Spearmanen korrelazio-koefizienteak (r_s) -1 eta 1 arteko balioak har ditzake. Hau da, $-1 \leq r_s \leq 1$ betetzen da.

1.4. KENDALLEN KORRELAZIO-KOEFIZIENTEA (τ)

Kendallen korrelazio-koefizientea (τ), Spearmanen korrelazio-koefizientea (r_s) ez bezala, ez dator Pearsonen korrelazio-koefizientetik (r_{xy}). Kendallen *tau* koefizienteak ordenazko aldagaien arteko korrespondentzia neurtzen baitu. Azken buruan, koefiziente honek aztertzen ditu *hurrenkeran* izan daitezkeen aldaketak. Hau da, aldagai bateko hurrenkeratik (X) beste aldagaiko hurrenkerara (Y), binan-binan, aldaketarik gertatzen ote den.

Adibidez, Euskal Herriko Bertsolari Txapelketako finalean zortzi (n) bertso-larik txapela bururatzeko lehiatzen dute. Amaieran, epaileek emandako puntuazioen arabera zortzien arteko hurrenkera (X) ezagutzen dugu, zein den lehena, bigarrena... Demagun, bertsozale talde batek bere ebaluazio partikularra egiten duela, horren arabera beste hurrenkera (Y) bat izango dugu. Taulan ikus dezakegu.

I.3. taula. *Bertsolarien sailkapenak.*

	<i>X</i>	<i>Y</i>
Egaña	1.	2.
Iturriaga	2.	1.
Arzallus	3.	3.
Lujanbio	4.	4.
Elorza	5.	7.
Colina	6.	8.
Mendiluze	7.	6.
Maia	8.	5.

Ikusten denez, epaileek egindako sailkapena (*X*) ez dator bat bertsozaleen sailkapenarekin (*Y*). Kendallren *tau* (τ) korrelazio-koefizientearen bitartez bi sailkapenen artean dagoen erlazioa azter dezakegu. Korrelazio-koefiziente hori kalkulatzeko, aurrenik eta behin epaileen sailkapenetik abiatuta bertsolari bakoitzak bertsozaleen sailkapenean galtzen duen (*G*) ala ez (*EG*) aztertu behar dugu. Bertsolariak binan-binan konparatu behar ditugu, beraz. Zortzi (*n*) bertsolari direnez, 28 *bikote* desberdin aztertu behar ditugu. Bikote kopurua, oro har, honela kalkulatu da:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{8(8-1)}{2} = 28$$

Binakako konparaketak, ahalik bizkorren egiteko, ordenaturiko hurrenkeretatik (*X*) abiatzea komeni da. Orain begiratu behar dugu *Egaña* eta *Iturriaga*ren artean, aurrenak *galtzen* ote duen *X*-tik *Y*-ra, gero, *Egaña* eta *Arzallus* eta horrela bertsolari-bikote posible guztiak aztertu arte. *Egaña*, aurrena (*X*) denez, gainerako zazpiekin konparatu behar dugu, *Iturriaga* bere azpiko seiekin, horrela, *Mendiluze* eta *Maiaren* arteko konparaketaraino. Guztira, esan moduan, 28 bikote; hurrengo taulan agertzen dira.

Taulan ikus dezakegu zenbatek *galtzen* duen (*G*) eta zenbatek ez duen *galtzen* (*EG*). Binakako konparaketetan, *X* eta *Y* hurrenkeretan aldaketarik ez dagoenean kopuruari *P* esango diogu, *galtzen ez dutenak* (*EG*). Hurrenkeretan aldaketak direnean, *Q* esango diogu, *galtzen dutenak* (*G*). *P* —hurrenkeretan aldaketarik ez— eta *Q* —hurrenkeretan aldaketak— dira, hain zuzen ere, Kendallren *tau* (τ) korrelazio-koefizientearen kalkulurako erabiliko ditugun zenbakiak.

$$\tau = \frac{P-Q}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{6-22}{\frac{8(8-1)}{2}} = -\frac{16}{28} = -0,5714$$

I.4. taula. Bertsolarien binakako konparaketak.

Egaña	1	G	Arzallus	14	EG	
	2	EG		15	EG	
	3	EG		16	EG	
	4	EG		17	EG	
	5	EG		18	EG	
	6	EG		Lujanbio	19	EG
	7	EG			20	EG
Iturriaga	8	EG	21		EG	
	9	EG	22	EG		
	10	EG	Elorza	23	EG	
	11	EG		24	G	
	12	EG		25	G	
	13	EG	Colina	26	G	
		27		G		
			Mendiluze	28	G	

Emaizta ikusita ($\tau = -0,5714$), ez dirudi bertsozaleen eta epaileen artean adostasun handirik dagoenik.

Azkenik, Kendallen *tauk* (τ), beste korrelazio-koefizienteen antzera, -1 eta 1 arteko balioak har ditzake. Hau da, $-1 \leq \tau \leq 1$ betetzen da.

1.5. YULEREN Q KOEFIZIENTEA

Koefiziente hau *George Udny Yule* (1871-1951) estatistikari eskoziarraren ekarpe-na da. Funtsean, izenezko aldagaien arteko korrelazioa da. Aldagai horiek bi kategoriatan banatzen dira, 2x2ko kontingentzia-taulan adieraz dezakegu, beraz.

I.5. taula. 2X2ko kontingentzia-taula.

		A aldagaia		
		a_1	a_2	
B aldagaia	b_1	a	b	$a+b$
	b_2	c	d	$c+d$
		$a+c$	$b+d$	n

Taulako a , b , c eta d maiztasun-balioak erabiliz kalkulatzen da Yuleren Q koefizientea.

$$Q = \frac{a.d - b.c}{a.d + b.c}$$

Q koefizienteak -1 eta 1 arteko balioak har ditzake, haren heina, $-1 \leq Q \leq 1$ da, beraz. Q zero denean, *aldagaien arteko independentzia* dagoela esaten dugu; $Q > 0$ balioko balu, a_1 eta b_1 kategoriek elkar erakartzen dutela esango genuke —*erlazio positiboa*—, eta, azkenik, $Q < 0$ balioko balu. a_1 eta b_1 kategoriak elkarrengandik urruntzen direla esango genuke —*erlazio negatiboa*—.

Demagun *hizkuntza* (X) eta *jarrera politikoa* (Y) aldagaien arteko erlazioa aztertut nahi dugula. Alde batetik, *euskaldunak/erdaldunak* dikotomia eta, bestetik, *abertzaleak/espainolistak* dikotomia dauzkagula. Gure laginean 190 erdaldun eta 180 euskaldun dauzkagu, guztira 370 pertsona (n). Datuak ondorengo taulan dauzkagu.

1.6. taula. *Hizkuntzaren eta jarrera politikoaren arteko erlazioa.*

	Abertzaleak	Espainolistak	
Euskaldunak	110	70	180
Erdaldunak	40	150	190
	150	220	370

Q koefizientea kalkulatzeko dugu:

$$Q = \frac{a.d - b.c}{a.d + b.c} = \frac{(110)(150) - (70)(40)}{(110)(150) + (70)(40)} = \frac{13700}{19300} = 0,7098$$

Koefiziente horren arabera esan dezakegu hizkuntzaren eta jarrera politikoaren artean *erlazio positibo nahiko handia* dagoela.

1.6. χ^2 KOEFIZIENTEA

Koefiziente hau izenezko aldagaien arteko erlazioa aztertzeke erabili ohi da aldagaien kategoria kopurua bitik gorakoa denean, $k > 2$.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j} \quad \text{VII.23.1}$$

Non:

k kategoria kopurua

B_j j kategorian *behaturiko* maiztasuna

E_j j kategorian *itxarondako* maiztasuna

χ^2 estatistikoaren ezaugarriaz eta banaketaz azalpenak aurki daitezke *estatistika-etaulak* kapitulan.

1.7. C KONTINGENTZIA-KOEFIZIENTEA

Koefiziente hau χ^2 erlazio-adierazletik eratorria da. Haren balioak 0 eta 1 artekoak dira. Haren interpretazioa argia eta erraza da: zenbat eta handiagoa izan aldagaien arteko erlazioa, orduan eta estuagoa da.

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

n laginaren tamaina da.

1.8. ALDAGAI DIKOTOMIKOEN ARTEKO KORRELAZIO-KOEFIZIENTEAK

Aldagai *dikotomikoak*, berezkoak edo *dikotomizaturikoak*, aldagai bereziak dira Gizarte Zientzietan eta, bereziki, Psikologian. Batzuek, berezkoek, bi kategoria edo bi balio besterik ez daukate, *emakumezko/gizonezko*, *bai/ez*, *zuzen/oker*, *bizi/hil* eta abar. Beste batzuk, oster, berez zabalagoak badira ere, kategoria askokoak edo jarraikiak, *dikotomizaturik* ager dakizkiguke, *gazte/heldu*, *gutxi/asko*, *altu/baxu* eta antzeko formetan.

Mota batekoak zein bestekoak izan, aldagai dikotomikoak sarri askotan erabiltzen dira. Beraien arteko korrelazioa aztertzea modu berezian egiten da, beren beregiko korrelazio-koefizienteak erabiltzen dira, alegia.

1.8.1. Korrelazio-koefiziente biserial puntuala (r_{pb})

Korrelazio-koefiziente biserial puntuala (r_{pb}) —*point biserial correlation coefficient*—, aldagai jarraikiaren (X) eta berezko aldagai dikotomikoaren (Y) arteko korrelazio-koefizientea da. Horrela, aldagai dikotomikoaren (Y) kategoria bakoitzeko n_p eta n_q pertsona kopuruak izango ditugu, talde bakoitzak bere batez besteko aritmetikoa duela X aldagaian. Laginaren tamaina, jakina, n da eta p eta q , berriz, Y aldagaiaren arabera pertsonen proportzioak.

$$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_q}{s_x} \sqrt{p \cdot q} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}}{s_x} \sqrt{\frac{p}{q}} \quad \text{VII.6.5}$$

Horrela,

Xaldagai jarraikia.
 Yaldagai dikotomikoa
 paldagai dikotomikoaren lehenengo kategoria-riko pertsonen proportzioa.

q	aldagai dikotomikoaren bigarren kategoria-ko pertsonen proportzioa
$\bar{X}_p$	p taldearen batez besteko aritmetikoa aldagai jarraikian
$\bar{X}_q$	q taldearen batez besteko aritmetikoa aldagai jarraikian
$\bar{X}$	lagin osoaren batez besteko aritmetikoa aldagai jarraikian
s_x	lagin osoaren desbiderapen estandarra aldagai jarraikian

Adibidez, jo dagigun *adimen emozionala* (X) Psikologia Fakultateko 40 neska-mutilei neurtu diegula, 22 neska eta 18 mutil. Jakin nahi dugu ea adimen emozionalaren, aldagai jarraikia, eta sexuaren artean, (Y) aldagai dikotomikoa, korrelaziorik ote dagoen. Datuekin ondoko taula hau eratu dugu:

1.7. taula. *Adimen emozionala, neskak eta mutilak.*

Adimen emozionala	Neskak	Mutilak	Guztira	Nesken batez bestekoa	Mutilen batez bestekoa	Desbiderapen tipikoa
Tarteak	X_j	n_p	n_q	$X_p p_j$	$X_q p_{qj}$	$(X_j - \bar{X})^2 \cdot p_j$
0-20	10	1	7	2,0	0,5	3,9
21-40	30	4	4	6,0	5,5	6,7
41-60	50	5	4	11,3	11,4	11,1
61-80	70	6	2	14,0	19,1	7,8
81-100	90	6	1	15,8	24,5	5,0
Σ	50	22	18	49,0	60,9	34,4
						35,7

Nesken eta mutilen proportzioak, hurrenez hurren, $p = 0,55$ eta $q = 0,45$. Datu horiekin korrelazio-koefiziente biserial puntuala kalkula dezakegu:

$$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_q}{s_x} \sqrt{p \cdot q} = \frac{60,9 - 34,4}{35,7} \sqrt{0,55 \cdot 0,45} = \frac{26,5}{35,7} 0,4975 = 0,3687$$

Edo,

$$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}}{s_x} \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{60,9 - 49,0}{35,7} \sqrt{\frac{0,55}{0,45}} = \frac{11,9}{35,7} 1,1055 = 0,3687$$

Badirudi irudi, sexuaren eta adimen emozionalaren artean badagoela hola-halako korrelaziorik, eta neskek maila hobea ematen dutela. Halere, korrelazio-koefiziente hori (0,3687) ez da handia, nolabaiteko joera adierazten du soilik.

1.8.1. ϕ korrelazio-koefizientea

Yularen Q koefizientearen antzera, ϕ korrelazio-koefizientea kategoriazko aldagai dikotomikoen arteko korrelazio-adierazlea da. Aldagai dikotomikoen arteko 2x2ko kontingentzia-taula hartzen dugu abiapuntu:

1.8. taula. 2X2ko kontingentzia-taula.

		X aldagaia		
		0	1	
Y aldagaia	0	a	b	a+b
	1	c	d	c+d
		a+c	b+d	n

Taulako a eta b X aldagaian eta Y aldagaian balio bera, 0 eta 1, lortu dutenen maiztasun-adierazleak dira; b eta c , berriz, aldagaietan balio desberdinetako, 1 - 0 eta 0 - 1, maiztasun-neurriak dira. Kotsidera dezakegu ϕ korrelazio-koefizientea Pearsonen korrelazio-koefizientearen antzekoa dela izaera dikotomikoko aldagaien kasuan aplikaturik. Ikus dezagun:

- X bat denean, proportzioa p_x : $p_x = \frac{b+d}{n}$
- X zero denean, proportzioa q_x : $q_x = \frac{a+c}{n}$
- Y bat denean, proportzioa p_y : $p_y = \frac{c+d}{n}$
- Y zero denean, proportzioa q_y : $q_y = \frac{a+d}{n}$
- X eta Y bat direnean, proportzioa p_{xy} : $p_{xy} = \frac{d}{n}$

Beste aldetik, aldagai dikotomikoen batez besteko aritmetikoak eta desbiderapen estandarrak ezagutzen ditugu:

$$\bar{X} = p_x \quad \bar{Y} = p_y$$

$$s_x = \sqrt{p_x q_x} \quad s_y = \sqrt{p_y q_y}$$

$$\text{Horiek horrela, } \sum XY = np_{xy}$$

Pearsonen korrelazio-koefizientearen formula erabiliz:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n xy}{ns_x s_y} = \frac{\sum X.Y - n.\bar{X}.\bar{Y}}{ns_x s_y} = \frac{np_{xy} - np_x p_y}{n\sqrt{p_x q_x} \sqrt{p_y q_y}} = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}}$$

p eta q horiek ordezkatzuz,

$$r_{xy} = \frac{\left(\frac{d}{n}\right) - \left(\frac{b+d}{n}\right)\left(\frac{c+d}{n}\right)}{\sqrt{\left(\frac{b+d}{n}\right)\left(\frac{a+c}{n}\right)\left(\frac{c+d}{n}\right)\left(\frac{a+b}{n}\right)}} = \frac{\frac{1}{n^2}[(nd) - (b+d)(c+d)]}{\frac{1}{n^2}\sqrt{(b+d)(a+c)(c+d)(a+b)}} = \frac{(nd) - (b+d)(c+d)}{\sqrt{(b+d)(a+c)(c+d)(a+b)}}$$

$$r_{xy} = \frac{[(a+b+c+d)d] - bc - dc - bd - d^2}{\sqrt{(b+d)(a+c)(c+d)(a+b)}} = \frac{ad + bd + cd + d^2 - bc - dc - bd - d^2}{\sqrt{(b+d)(a+c)(c+d)(a+b)}}$$

$$r_{xy} = \frac{ad - bc}{\sqrt{(b+d)(a+c)(c+d)(a+b)}} = \varphi$$

Hori da, hain zuzen ere, φ korrelazio-koefizientearen formula.

$$\varphi = \frac{a.d - b.c}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad \text{VII.6.6}$$

Adibide bat ipiniko dugu. Demagun, Euskal Herriko unibertsitateetan 2007/08 ikasturtean matrikulaturiko ikasleria aztertu nahi dugula. Zehatz-mehatz, *neska* (Y) izatea eta *teknologiazko ikasketak* (X) hautatzea elkarren artean erlazionaturik dauden ala ez jakin nahi dugu. Bildutako datuak, ondorengo hauek dira:

I.9. taula. *Neska eta teknologiazko ikasketak.*

		Teknologiazko ikasketak		
		Ez (0)	Bai (1)	
Neska	Ez (0)	124	469	593
	Bai (1)	576	110	686
		700	579	1279

Datu horiekin φ korrelazio-koefizientea honela kalkulatzen dugu:

$$\varphi = \frac{(124)(110) - (469)(576)}{\sqrt{(124+469)(576+110)(124+576)(469+110)}} = \frac{13640 - 270144}{\sqrt{164875229400}} = -\frac{256504}{406048,31} = -0,6317$$

Datuak datu, *neska* izatea eta *teknologiazko ikasketak* hautatzea esanguratsu, eta negatiboki, erlazionaturik daudela esan dezakegu.

Esanak esan, oro har, Pearsonen korrelazio-koefizientea erabiltzeko aurrekari parametrikokoak bete behar dira.

2. Eredu lineal orokorra

Bariantza-analisisia dudarik gabe Giza eta Gizarte Zientzietako ikerkuntzan erabilitako analisi-teknika erabiliena dugu (Gadner eta Aronson, 1985), % 80 baino gehiago, hain zuzen ere. Geroxeago aztertu behar ditugun bariantza-analisi mota horiek eta atal honetan ikusiko dugunak, biek daukate *funzio linealean* oinarri eta sorburu. Esan dezagun, bide batez, *Psikologia esperimentalean* bariantza-analisiak ia ezinbestekoak badira ere, ikerketa-diseinu argirik ez daukagunean *erregresio lineala* zuzenago eta emankorragoa dela.

Korrelazioa, erregresio lineal bakuna, anizkoitza eta faktore-analisiak besteak beste, *eredu linealari* dagozkion analisi-teknikarik ezagunenetakoak ditugu. Kasu baterako, erregresio-analisisia bariantza-analisisia baino orokorragoa da (Kerlinger, 1975), biek aurrebaldintza bertsuak behar dituzte baina bariantza-analisiaren erabilera, berez, erregresioarena baino erabilera murriztagoa da.

Diseinu esperimentaletan ikertzaileak badu eduki aldeztetik aurretiko ikuspegi bat, diseinu bat alegia. Nolabait, aztertzen dituen aldagaien arteko erlazioak zer-nolakoak diren badaki jakin eta hori horrela dela berresteari ekiten dio bariantza-analisiaren bitartez. Horrexegatik darabilen terminologia oso ausarta izan ohi da, ikertzaileak aldagai bat(zuk) (*aldagai askeak*) manipulatzeko dituen, beste bat(zuk) (*mendeko aldagaia(k)*) azaltzen dituelakoan.

Erregresio-analisiak testuinguru zehaztugabekoagoetan erabili ohi dira, erregresio-analisen aztergaiak zuzenago dagozkie *behaketa-arazoei* arazo *esperimentalei* baino. Erregresioak aldagaien arteko erlazioen berri ematen digu, eta erlazioek, neurri batean behintzat, gertaeraren nondik norakoak zein diren. Horrela, erregresioa gertaerak *aurresateko* erabili ohi da; hots, antzeko egoerak direnean, erregresioaren ekuazioak ekarritako balioak gertatzea itxaron daitekeela esaten dugu.

Azken buruan, *aldagaien arteko aldakortasun komuna* denboraren jarioan eta egoera desberdinetan egonkorra denean, lotura (ez)ezagun baten adierazlea da eta. *Aldagaien arteko aldakortasun komuna* neurri estandarizatueta gertatzen denean *korrelazio* deritzogu. Korrelazioa erregresio-analisiaren oinarria da beraz. Funtsen, erregresio linealaren analisiak, korrelazio eta erregresio erlazio motetan oinarritutako azterketa-prozedurak besterik ez dira. Horrela, eraikitako eredueta *kanpo-aldagaiak* nola eta zein neurritan azaltzen duten *barne-aldagaien aldakortasuna* jakitea dugu helburu. *Korrelazio* izaerako analisisetan deitutako *kanpo-*

aldagaiak diseinu esperimentaletako *aldagai askeen* baliokideak lirатеke; kasu honetan, osterа, ikertzaileak kontrolpean izan behar ditu eta hori ez da *korrelazio eredu*etan horrelа izaten. Hau da, erregresioaren kasuan aldagai guztiak, *kanpozein barne-aldagaiak* zoriz banatzen badira ere, diseinu esperimentaletan bakarrik *mendeko aldagai*ei egotzi diezaiekegu zorizko banaketa, *aldagai askeen* neurriak aldeз aurretik finkatuak edo ikertzaileak kontrolatuak izan ohi dira eta.

Oro har, Giza eta Gizarte Zientzietan, are zehatzago Psikologian, ezein gertaera edo portaera azaltzeko gero eta eredu zail eta korapilatsuagoak erabiltzeko joera izan ohi dugu. Itxuraz, gertaera sinpleak iruditzen zaizkigunak ia azalezinak bihurtzen zaizkigu behin analisiak egiten hasi bezain laster. Euskararen erabilera, esaterako, ezagutzaren funtzio zuzena dela pentsa bagenezake ere, berehala konturatzten gara hizkuntzaren erabilera hiztunarengandik harago, lekuaren (instituzioa, kalea, etxea, denda, etab.), eginkizunaren (kirolа, lana, ikasketak, etab.) eta beste zenbait aldagairen mende dagoela. Areago, bestetik, hiztunari berari dagozkion euskararen ezagutza (euskara-maila, kalitatea...), elebitasun mota (erdaraz nagusi ote den, orekatua...), euskara eta erdararekiko jarrera eta motibazio, egoeraren hautemate eta beste zenbait aldagairen mende ere badago. Horiek guztiek, aipatuek eta aipa litezkeenek, euskararen erabilera, neurri batean, azal dezakete. Nolanahi ere, ezin esan daiteke inoiz, ustezko eredurik osatuenean ere, erabat azalduta geratzen denik. Horregatik diogu, hain zuzen ere, *neurri batean* azal dezakegula.

Gure helburua, edozein analisisan, eredurik osatuena eta fidagarriena eraikitzea da. Erlaziorik esanguratsuenak bilatu behar ditugu pronostikoak ahalik *indartsuenak* egiteko. Gerta daitekeenaren gainean pronostikoak egitea da gure xedea. Erregresio-analisiaren bitartez, *kanpo-* eta *barne-aldagaien* arteko funtzio bat proposatzea eta haren bidez auresan ahal izatea. Hau da, aldagaien arteko lotura estatistikoa zehaztea. Funtzioa *nolakoa* den zehaztu behar dugu, gure kasuan, funtzio lineala besterik ez dugu erabiliko. Funtzio horretan adierazitako *parametroek* eta *kanpo-aldagaien* balioek *barne-aldagaien* balizko balioak zehazten dituzte. Beste era baterа esanda, *kanpo-aldagaien* balio jakinei *barne-aldagaien* balio batzuk lotzen zaizkiela suposatzen dugu.

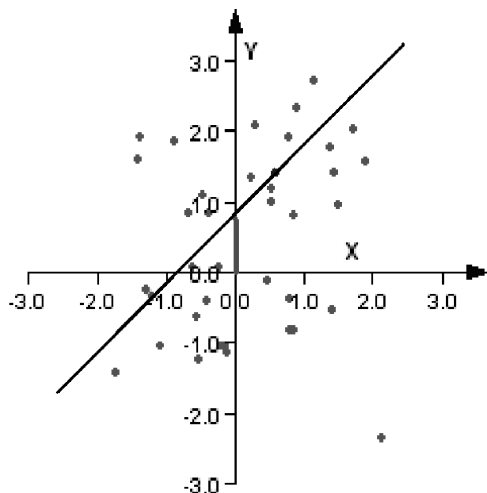
Esan moduan, liburu honetan erregresio moten artean bakarra aztertzen dugu: erregresio lineala. Definizioz, erregresio lineala *funtzio linealari* dagokiona da. Tankera honetako erregresio-analirik sinpleenari erregresio bakun edo sinple deritzo, *kanpo-* eta *barne-aldagai* bana dugunean, alegia. Honetan ekuazioa honelakoa da:

$$Y = \alpha + \beta X$$

Hizki grekoek, hurrenez hurren, *ordenatuaren ebaki puntua* edo *konstantea* (α) eta *zuzenaren malda* edo *erregresio-koefizienteа* (β) adierazten dute. Funtzio horren aplikazio grafikoa lerro zuzena da. Horrexegatik, hain zuzen ere, esaten zaio *funtzio lineala*. Erregresio-analisiaren xede behinena, bada, ekuazio linealaren parame-

troak $-\alpha$ eta β aurkitzea da. Laginetako datuetatik, *enpirikoki*, a eta b estatistikoak kalkula ditzakegu, eta, horiek *estimagailu* gisa erabiliz, parametroak estimatu.

Linealtasuna, esaten genuenez, erlazio mota bat da, aldagaien arteko erlazioz sinpleena. Ardatz cartesianen eremuan hobeto ikus dezakegu:



II.1. grafikoa. Erregresioaren zuzena ardatz cartesianen eremuan.

Zuzena, ardatzen sorburutik pasatuko balitz, $\alpha = 0$ izango litzateke. Nolanahi ere, *puntu-hodei* bakoitzari lerrozuzen bakarra dagokio —puntu guztiei egokien doitzen zaiena—, eta hori da kasu bakoitzean bilatu behar duguna. Puntu guztieki-ko distantziarik txikienak agertzen dituen zuzena aurkitu behar dugu, hain zuzen ere. Arestian aipatutako funtzioaren bitartez *estimaturiko puntuazioak* lerro zuzenari dagozkiozlarik *errore*-neurri jakin batzuk izaten dira. Nolanahi ere, zuzen horren ezaugarrietariko bat *estimazio-errore* txikienekoa izatea da. Oro har, honela adieraz dezakegu:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \text{baliorik txikiena}$$

Non: Y_i i -garren pertsonaren puntuazioa da.

$\hat{Y}_i$ i -garren puntuazioaren estimazioa da.

Bestetik, ondorengo hau ere betetzen da:

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

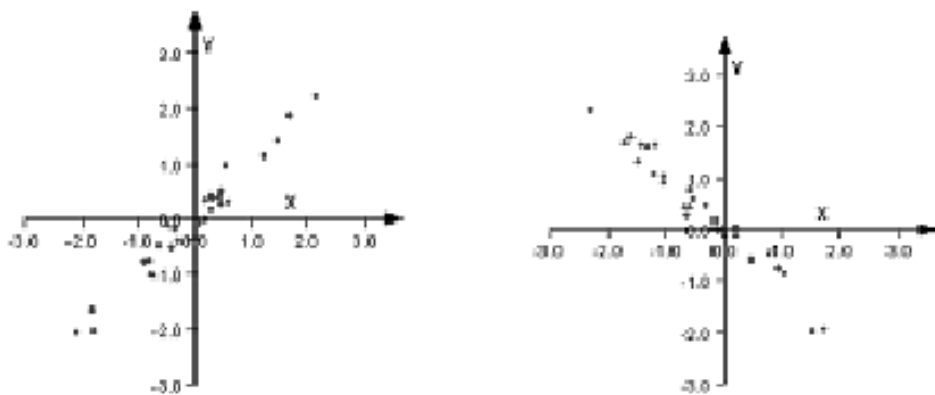
Aurreneko ekuazioan, behatutako Y -ren edozein puntuaziok batez bestekoa-
rekiko duen distantzia, bi osagaitan bereiz daiteke: batetik, *estimaturiko Y' punta-
zioa*¹ batez bestekoarekiko duen distantzia, eta bestetik, *estimaturiko Y' punta-
zioaren* eta behatutako Y puntuazioaren arteko aldea. Azken horri *errorea* edo *hondakina*
esaten diogu. Berbiduren batukariak, berriz, goiko bi osagai horietan ere bereiz
daitezke, kontutan hartuz $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$ betetzen dela. Hortaz, errore-maila zen-
batekoa den kalkulatzeko hondakinen *berbiduren batukaririk txikiena* erabiliko dugu.

Hori da, hain zuzen ere, erregresio linealaren muina. Dena den, honelako ana-
lisietan erabil daitezkeen aldagaiak *zenbakizkoak* izatea beharrezkoa da, zenba-
kizkoak edo zenbakietara ekarritakoak, baina ohikoa da kategorietan banatzen
diren aldagaiak erabiltzea ere.

2.1. EREDU LINEALAREN AURRETIKOAK

Estatistika *parametrikoaren* eremuan gaudela gogoraraziz, analisi mota hauek
ezartzeko baldintza edo *murritzapen* batzuk kontuan hartu behar ditugu, hurrenez
hurren:

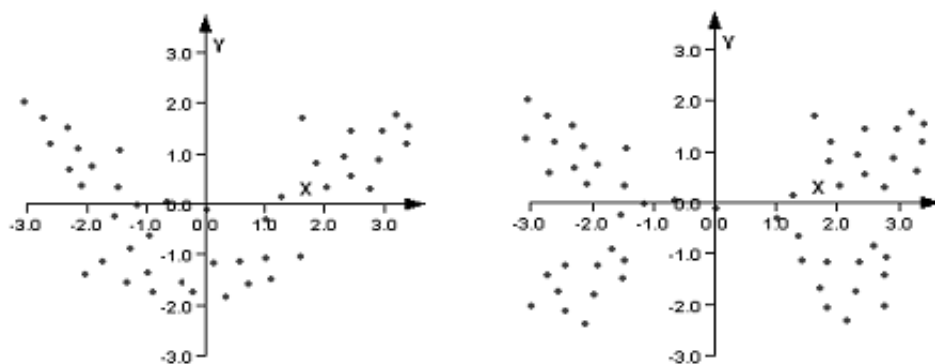
1. *Linealtasuna*: kanpo- eta barne-aldagaien arteko erlazioak funtzio linealari
jarraitzea. Kanpo-aldagaien *eragina* gehigarria izatea.



II.2. grafikoa. Sakabanaketa-diagramak. Linealtasuna erraz antzeman
daiteke ezkerreko grafikoa, positiboa, eta eskuinekoan, negatiboa.

1. Dagoeneko irakurleak ikusi du *estimazioa* adierazteko, dagokion Y ikurraren ondoan *kakotx* bat
ipini edo, formuletan ikus daitekeen eran, bere gainean azentu *zirkunflexua* jartzen dugula. Kasu
horretan ikur biek adiera bera daukate. Alabaina, edozein estimagailu adierazteko $\hat{\theta}$ delako ikurra
erabiliko dugu; erregresioari dagokionez, oster, ekuazio linealaren bitartez estimatutako puntuazioak
adierazteko $\hat{Y}$ zein Y' ikurrak erabiltzen ditugu.

2. *Osotasuna*: proposatutako ereduari dagozkion aldagai adierazgarri eta esanguratsu *guztiak* bertan izatea. *Osatu* gabeko eredua berez alboratua dela jotzen dugu.
3. *Hondakin edo errorearen arteko independentzia eta alboragabetasuna*: edozein neurketa-prozesutan, bereziki Giza eta Gizarte Zientzietan, errore-neurriak izaten direla badakigu jakin, baina errore horiek *zoriz* banatzen dira; hau da, errorearen banaketak ez du inolako joerarik adierazi behar. Izan ere, errorearen norabaiteko joera izateak neurketa horren honako edo harako alborapena baitakar. Nolanahi ere, errorearen *itxaropen matematikoak* zero $-E(\varepsilon_i) = 0$ behar du. Hori horrela, aldagai eta erregresio-ereduaren atal desberdinetako erroreak *elkarrekiko askeak* izatea egiaztatu behar dugu. Hots, ezin onar daiteke errorearen arteko inolako korrelazio esanguratsurik izaterik. Korrelazio esanguratsua balego, ereduaren akatsa egon daitekeen seinalea da, are zehatzago, aldagai ezkutu bat dagoela pentsa dezakegu eta gure eredua osatu gabe dagoela.
4. *Homozedastizitatea*: *Kanpo-* eta *barne-*aldagaien bariantzak baliokideak izateari esaten zaio homozedastizitatea. Hortaz, erregresio-analisia egin ahal izateko, bariantzen artean ez da diferentzia handirik izan behar. *Heterozedastizitatearen* arazoa zertan den hobeto antzeman dezakegu ondorengo *sakabanatze diagrametan*:



II.3. grafikoa. Korrelazio lerromakurra, ezkerrean, eta heterozedastizitatea, eskuinean.

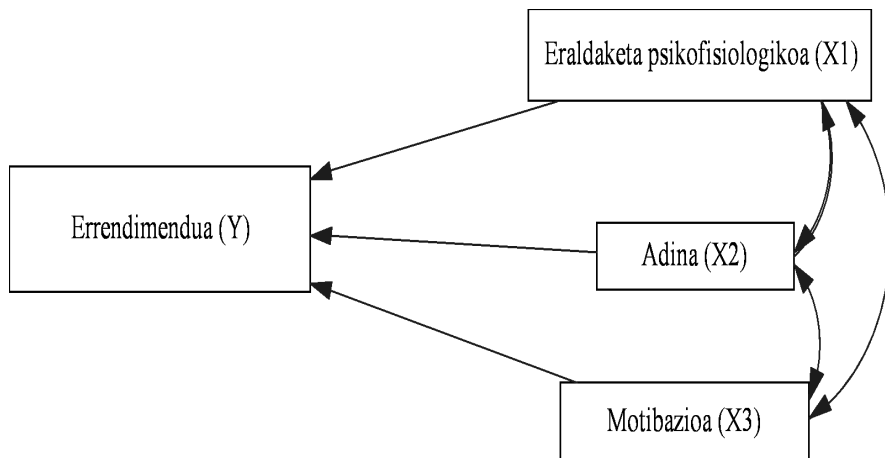
Korrelazio lerromakurraren egitura (II.3. grafikoan, ezker aldean) kurba baten tankerakoa da, adibidean, V ala U itxurakoa. Goiko irudiko eskui-nekoan, berriz, *homozedastizitate faltsua* antzeman daiteke, lagin bakarra baino bi multzo independenteak direlako. Aurreko irudian (II.2. grafikoa), adibidez, linealtasuna zertan den argi antzeman daiteke. *Homozedastizitatea* dagoen ala ez zalantzaren bat izatekotan bariantzaren inguruko hipotesi-testa egin dezakegu.

5. *Lerro-anizkoiztasuna*: *kanpo*-aldagaien elkarren arteko erlazio estua dagoenean, gertatzen da. Bi edo aldagai gehiagoren arteko *lerro-anizkoiztasunak* adierazten du aldagai horiek izaera berekoak direla. Azken buruan, korrelazioa oso handia denean, aldagai horiek ia gauza bera direla esan dezakegu. Horrelako kasuetan darabiltzagun *kanpo*-aldagaien izaera sakon berraztertu beharko genuke. Edonola ere, *kanpo*-aldagaien arteko korrelazio-neurri handi eta esanguratsuak izateak eredia berraztertzeraz eraman behar gaitu eta, agian *kanpo*-aldagai bat edo batzuk baztertzeraz.
6. *Normaltasuna*: teknika parametrikotik bezala banaketak eredu normalari atxikirik izatea bilatu behar dugu. Banaketen *normaltasuna* egiaztatzeke test ez-parametrikotik bat baino gehiago dago, hala nola χ^2 edo Kolmogorov-Smirnov testak. Banaketaren adierazpide grafikoak (histogramak, maiztasun-poligonoak) normaltasuna edo normaltasunik eza azaleraz dezake.

Adibide gisa, demagun Psikologia Fakultateko *Datu Analisia* irakasgaian ikasle talde baten ($n=20$) errendimendu akademikoa aztertu nahi dugula. Azterketako notaren bitartez ikasgai horretako *errendimendua* (Y) neurtzen diegu. Gure ustez, *erlaldaketa psikofisiologikoa* (X_1), ikasleen *adina* (X_2) eta ikasgaiarekiko *motibazioa* (X_3) noten gorabeheretan aldagai esanguratsuak izan daitezke. Horiek horrela, aurreneko aldagaia (Y) *barne-aldagaia* da, eta besteak (X_1 , X_2 eta X_3), *kanpo-aldagai* gisa hartzen ditugu. Gure helburua, *kanpo-aldagaien* puntuazioak ezagutuz, ikasleen notak *estimatzeko* da, *erregresio linealaren ekuazioa* ezagutzea alegia. Aldagaiak *zoriz* banatzen dira eta ez dugu inolako eragin arrotzik antzematen, banaketa normalari darraizkio, elkarrekiko askeak dira eta haien artean *erlazio lineal gehigarria* sortzen dela suposatzen dugu. Laburbilduz, arestian aipaturiko aurretikoak betetzen direla pentsa dezakegu².

Jario-diagraman, eskuinaldean, *kanpo*-aldagaiak ditugu (X_1 , X_2 eta X_3) eta, ezkerrean, *barne*-aldagai bakarra (Y). Erregresio linealaren analisiak *norabidea* du. Horregatik, hain zuzen ere, *azaldu* nahi dugun aldagaia edo aldagai-xedea *barne-aldagaia* dela esaten dugu. Gainerakoak, *azaltzeko* erabiltzen ditugunak, osteraz, *kanpo-aldagaiak* dira. *Kanpo*-aldagai guztiek, elkarren artean, denak batera, *barne-aldagaiarekin* korrelazio-maila izaten dute. Koefiziente horrek, korrelazio anizkoitzaren koefizienteak (R) *kanpo*-aldagaien multzoaren eta *barne*-aldagaiaren arteko korrelazio-maila adierazten du. Grafikoan (ikus II.4. grafiko), *kanpo*-aldagaien koadroetan sorburua duten gezi zuzen banakoek *barne*-aldagaiaren aldakortasunaren ekarpena —*azalpena* zehatzago— adierazten dute. Gezi-tako puntuazioak (β_k) erregresio linealaren bitartez kalkulaturiko *pisu estandarizatuak* dira. Azkenik, *kanpo*-aldagaien arteko gezi lerromakurrak euren arteko korrelazioaren adierazleak dira (*egiturako ekuazioen* ereduaren ϕ_{jk} koefizienteak).

2. Horrelako lagin txikiak erabiltzen ditugunean zaila izaten da aurretiko guztiak betetzea. Hala ere, analisisen aurretikoei baino gehiago kalkuluen erraztasunari eta ikuspegi didaktikoari lehentasuna eman nahi izan diegu.



II.4. grafikoa. Erregresioren eredua, *jario-* edo *fluxu-diagrama*.

2.2. ERREGRESIO LINEAL BAKUNA

Eredua azaldu eta gero, gure adibideko datuak aurkez ditzagun:

II.1. taula. *Eraldaketa psikofisiologikoa* (X_1), *adina* (X_2), *motibazioa* (X_3) eta *errendimendua* (Y).

X_1	X_2	X_3	Y
1	25	18,0	6
1	25	0,0	4
1	26	3,0	5
1	20	7,0	4
1	26	1,0	5
3	20	6,0	5
3	25	7,0	6
3	13	3,0	4
3	21	5,0	5
3	22	0,0	5
5	28	11,0	9
5	27	9,5	8
5	22	7,5	7
5	22	7,5	7
5	28	11,0	9
6	24	10,0	8
6	27	11,5	9
6	15	9,0	7
6	27	11,5	9
6	23	10,5	8

Datuak datu, jakin nahi dugu hiru kanpo-aldagai horiek zein neurritan azaltzen duten barne-aldagaiaren aldakortasuna. Erregresio lineala zertan den hobeto ikusiko dugu urratsez urrats egiten badugu. Taulako datuekin batera oinarritzko estatistikoak aurkeztuko ditugu eta, jarraian, erregresio lineal bakunaren analisiari lotuko gatzaizkio.

II.2. taula. Oinarritzko estatistikoak.

	N	Txikiena	Handiena	Batez besteko aritmetikoa	Desbiderapen tipikoa
Eraldatze psikofisiologikoa	20	1	6	3,75	1,970
Adina	20	13	28	23,30	4,079
Motibazioa	20	0,0	18,0	7,450	4,5448
Errendimendua	20	4	9	6,50	1,821
N baliagarria (zerrendakoak)	20				

Esan moduan, nahiz gure adibide honetan hiru kanpo-aldagai izan, erregresio bakunaren kasuari helduko diogu aurrena. Barne- eta kanpo-aldagai bana besterik ez dugunean analisiari *bakuna* esaten diogu. Demagun *eraldaketa psikofisiologikoa* (X_1) eta *errendimendua* (Y) direla gure aldagaiak.

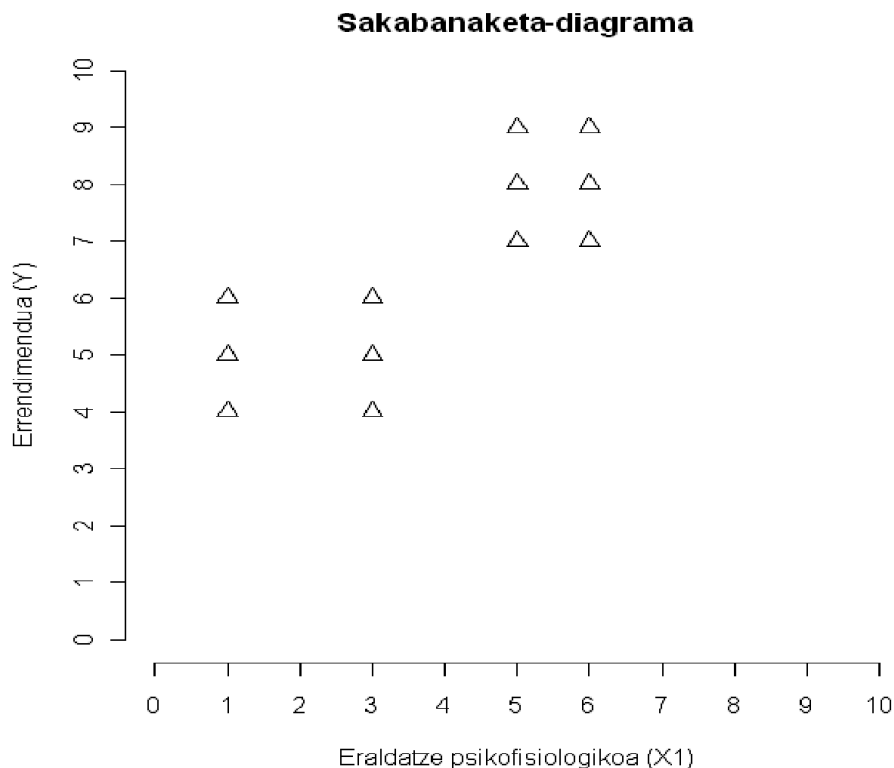
Suposatzen dugu bi aldagai horiek normaltasunez banatzen direla eta analisi honek eskatzen dituen gainerako aurrekari parametrikokoak betetzen dituztela. Hobeto ikusteko, kalkulu-orrien aplikazioren bitartez hurrengo sakabanaketa-diagrama eraiki dugu.

Diagramak (II.5. grafikoa) iradokitzen digu bi aldagaien baterako aldakortasuna zelakoa den. Puntuek ardatz cartesianaren espazioan eratzen duten egiturak iradokitzen digu aldagaien arteko erlazioa nolakoa izan daitekeen. Datuetatik abiatuta korrelazioa kalkula dezakegu. Zehazki, baterako aldakortasunaren adierazlea edo Pearsonen korrelazio-koefizientea. Pearsonen r_{xy} korrelazio-koefizientearen formula, hain zuzen ere, hau da:

$$r_{xy} = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$r_{xy} = \frac{20,545 - 75,130}{\sqrt{(20,355 - 75^2) \cdot (20,908 - 130^2)}} \quad \text{VII.6.1}$$

$$r_{xy} = 0,845356$$



II.5. grafikoa. Erregresio lineal bakuna: sakabanaketa-diagrama.

Korrelazio-koefizienteak (0,85) aldagaien arteko aldakortasun komun maila handia dagoela adierazten digu. Analisisan, urrats bat harago, ekuazio linealaren parametroak kalkulatu behar ditugu. Erregresio linealean ebatzi behar dugun ekuazioa, ekuazio lineala da. Lehen aurkeztu dizuegun ekuazioa:

$$Y = \alpha + \beta X$$

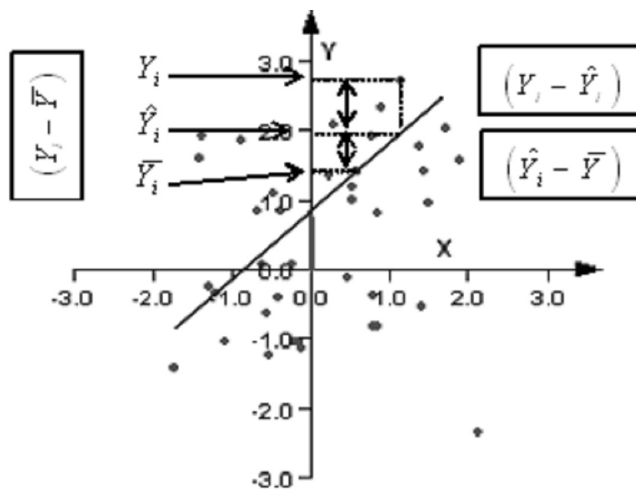
Ekuazio horren parametroak, α eta β , datuetatik eratortzen diren a eta b estatistikoetatik estima ditzakegu. Estimagailu horiek alboratu gabekoak, nahikoak eta tinkoak dira.

Ekuazio linealaren bitartez, kanpo-aldagaien balioetatik abiatuta barne-aldagaiaren balioak estima ditzakegu. Eredu linealean, oro har, estimazioetan batez bestekoranzko joerak eragiten du. Hau da, erregresio-zuzena batez bestekoen puntutik igarotzen da, beti. Puntu horretan, beraz, ez dago estimazio-errorerik. Gainerako estimazioetan, berriz, errore-maila jakin bat gertatzen da. Errore horiek, hain zuzen ere, eragiten dute estimatutako balioetan batez bestekora gerturaraziz eta benetako puntuazioetatik aldentuz. Gertaera horri *batez bestekoranzko joera* esaten zaio. Diferentzia hori, adiera hertsian, estimazioaren errorea da.

Puntuazio diferentzialak erabiltzen baditugu, puntuazio horiek bi osagai gehigarrietan deskonposa daitezke. Ikus dezagun:

$$\begin{aligned}(Y_i - \bar{Y}) &= (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i) \\ d_i &= (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)\end{aligned}$$

Puntuazio diferentziala deskonposatzean, lehenengo batugaia erregresioak azaltzen duen zatia dagokio; bigarrena, berriz, erregresioaren erroreari dagokio. Ondorengo grafikoan hobeto ikus dezakegu:



II.6. grafikoa. Erregresio linealaren zuzena.

Aldakortasunen analisietarako ekuazio hau erabiltzen dugu:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\ SCT &= SCR + SCE\end{aligned}$$

Lehen esan moduan, batuketa horretan lehenbiziko osagaia **erregresioak azaldutako aldakortasunari (SCR)** dagokio³. Bigarren osagaia, berriz, hondakinei dagokiena da. Hain zuzen ere, **erregresioak azaltzen ez duen aldakorta-**

3. Laburduretan, *SCE*, *SCR* eta *SCT*, erdarazkoak, bere horretan ematea hobetsi dugu, *Suma de Cuadrados del Error*, *Suma de Cuadrados de la Regresión* eta *Suma de Cuadrados Total* adierazteko.

sun (*SCE*) da. Bi horien batura azkenik, aldakortasun orokorra (*SCT*) da. Aldakortasunaren deskonposaketa horretatik erregresio linealari atxikitako bariantza-analisia (*ANOVA*) egin dezakegu.

II.3. taula. Erregresio linealari atxikitako bariantza-analisia.

Erregresioari atxikitako bariantza-analisia (ANOVA)				
Aldakortasun-sorburuak	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F
Erregresioarena	<i>SCR</i>	<i>p</i>	$MCR=SCR/p$	$F=MCR/MCE$
Hondakinena	<i>SCE</i>	$n-p-1$	$MCE=SCE/(n-p-1)$	
Orokorra	<i>SCT</i>	$n-1$		

Kalkuluak honela egiten dira:

$$\begin{aligned}
 SCT &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 & MCR &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{p} \\
 SCE &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 & MCE &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \\
 SCR &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2
 \end{aligned}$$

Non:

SCT Aldakortasun orokorra
SCE Hondakinen aldakortasuna
SCR Erregresioak azaldutako aldakortasuna
MCR Erregresioak azaldutako bariantza
MCE Azaldu gabeko bariantza
n Laginaren tamaina
 Y_i Puntuazio zuzena
 $\hat{Y}_i$ Estimatuak puntuazio Y_i rentzat
 $\bar{Y}$ Batez besteko aritmetikoa
p Kanpo-aldagaiak (askatasun-graduak)

Ikusten denez, erregresioak azaldutako bariantza (*MCR*) hondakinena edo azaldu gabekoa (*MCE*) baino askoz handiagoa da. Datu hauen argitan erregresio-analisia *oso esanguratsua* ($p < 0,001$) dela esan dezakegu.

II.4. taula. Erregresio linealari atxikitako bariantza-analisia.**ANOVA(b)**

Eredua	Berbiduren baturak	Ag	Batez besteko koadratikoak	F	Sig.
1 Erregresioa	44,831	1	44,831	44,412	0,000(a)
Hondakinak	18,169	18	1,009		
Orokorra	63,000	19			

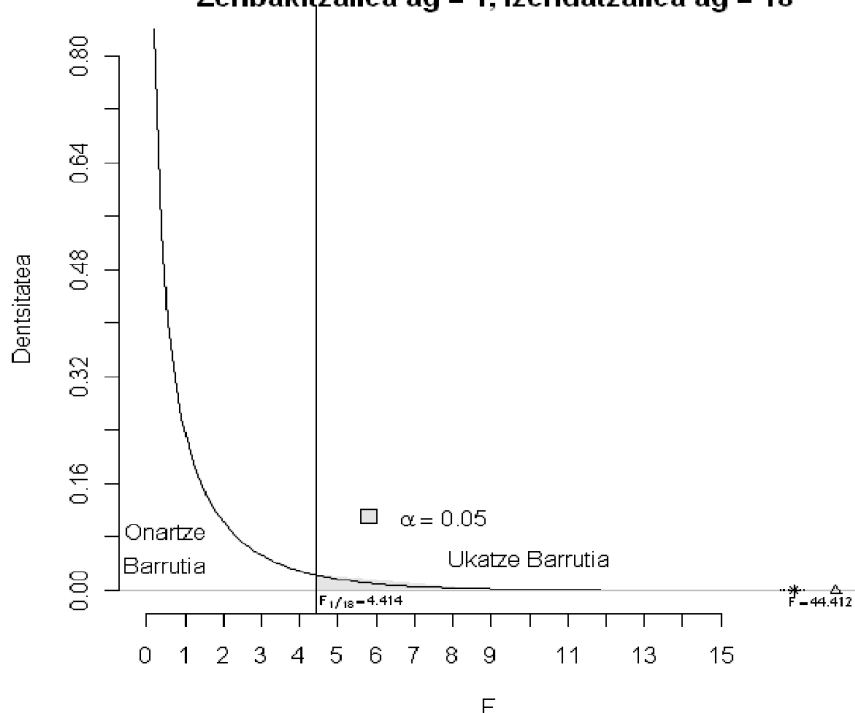
a Kanpo-aldagaiak: (Konstantea), Eraldatze psikofisiologikoa

b Barne-aldagaia: Errendimendua

Esangura-maila enpirikoa (p) Fisherren *F*-ak eskuinaldean uzten duen probabilitate-maila da. Batzuetan oso zenbaki txikia denez, SPSSk notazio zientifikoan ematen digu. Adibidez, gure ariketan, goiko taulan, 0,000 agertu arren, benetako balioa 2,976772346891e-006 da. Zenbaki hori ohiko idazkeran idatziko bagenu, 0,000002976772346891 geratuko litzateke. Ikus dezagun:

$$2,976772346891e-006 = 2,976772346891 * 10^{-6} =$$

$$= \frac{2,976772346891}{10^6} = 0,000002976772346891$$

F Banaketa:**Zenbakitzaila ag = 1, Izendatzaila ag = 18****II.7. grafikoa. F banaketa, onartze- eta ukatze-barrutiak.**

Grafikoan, bat eta hamazortzi askatasun-graduko probabilitate banaketa, $F_{(1,18)}$, ikus daiteke. Bertan, koloreztatutako eremua esangura-maila nominalari dagokio ($\alpha=0,05$) eta, banaketa horretan, muga kritikoa (*Right Critical Value*) 4,414 da. Gure datuetan kalkulaturako F -ak, bestetik, 44,412 balio du. Puntu horretatik eskuinerantz, hain zuzen, lehen aipaturako esangura-maila enpirikoa geratzen da.

2.3. ERREGRESIO-ZUZENAREN PARAMETROEN KALKULUA

Arestian aipatu dugunez, erregresio linealaren funtsa ekuazio linealaren parametroak ebaztea da. Erregresioaren lerro zuzena bi parametroen arabera zehazten da: *ebaki-puntua ordenatuan* (a) eta *zuzenaren malda* (b). Gure puntuazio enpirikoetatik abiatuz zuzenaren malda edo erregresio-koefizientea honela kalkula dezakegu:

$$B = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad B = \frac{20 * 545 - (75) * (130)}{20 * 355 - (75)^2} = 0,77966 \quad \text{VII.7.3}$$

Behin ekuazioko B zein den jakinik, A erraz kalkula dezakegu, $A = \bar{Y} - B \cdot \bar{X}$ darabilgun adibidean $A = 6,5 - (0,77966) \cdot (3,75) = 3,57628$

Puntuazioak estandarizatzen baditugu erregresio-koefiziente estandarizatua β_i , kalkula dezakegu. Estatistiko horrek adierazten du, neurri batean, kanpoaldagaiaren *haztapen-neurria* barne-aldagaiaren aldakortasuna azaltzerakoan.

$$\beta = B \frac{S_x}{S_y} \quad \beta = 0,78 \frac{1,97}{1,821} = 0,84356 \quad \text{VII.7.4}$$

2.4. DETERMINAZIO-KOEFIZIENTEA, ESTIMAZIOAREN ERRORE TIPIKOA ETA KONFIANTZA-TARTEAK

Determinazio-koefizientea hondakinen aldakortasunaren eta aldakortasun orokorraren arteko zatidura da. Beste era batera esanda, determinazio-koefizienteak barne-aldagaiaren azaldutako proportzioa adierazten digu. Ikus dezagun:

$$r_{xy}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{1,817}{63} = 0,71160 \quad \text{VII.7.6}$$

Determinazio-koefiziente zuzendua, berriz, honako hau da:

$$r_a^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\frac{1,817}{63}}{\frac{20-1-1}{20-1}} = 0,69557 \quad \text{VII.7.7}$$

Estimazioaren errore tipikoa ekuazio linealaren bitartez estima dezakegun barne-aldagaiaren errore-mailari dagokio. Ondoren, berorri dagokion formula agertzen dugu eta kalkulatzeari lotzen gataizkio,

$$S_{ee} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n-2}} \quad \text{VII.7.5}$$

$$S_{ee} = \sqrt{\frac{1,817}{18}} = 1,0047$$

Ildo beretik, errore tipikoaren berbiduraren eta Y -ren bariantzaren arteko zatidura honakoa da:

$$\frac{S_{ee}^2}{S_y^2} = 1 - r_{xy}^2 \quad \text{VII.7.8}$$

Zuzenaren ekuazioa abiaburu dugula, behin kanpo-aldagaiaren edozein balio emanda barne-aldagaiari dagokion balizko balioa estima dezakegu. Aipatu dugun *estimazioaren errore tipikoa* (S_{ee}) erabiliz, eta jakinik estimatutako puntuazioak banaketa normalari dagozkiola, estimatutako puntuazioaren inguruan konfiantza-tartea era dezakegu. Zein balioren artean ote dagoen estimatu behar dugun benetakoa balioa errore tipiko eta lagingaren tamainaz gain, finkatzen dugun esangura-mailaren (α) mende ere badago. Behin esangura-maila finkaturik —ohiko balioak $\alpha = 0,01$ eta $\alpha = 0,05$ dira—, honi dagokion banaketa normala Studenten $t_{(n-2)}$ askatasun-gradukoa da. Horretan $|t_{\alpha/2}|$ behatuz honako konfiantza-tartea era dezakegu:

$$\hat{Y}_i \pm \left| T \frac{\alpha}{2} \right| \sqrt{S_{ee}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)S_x^2} \right]}$$

Ekuazio horretan agertzen den errodua hori estimazioaren errore tipikoari besterik ez dagokio. Hots, estimatutako puntuazioen desbiderapen estandarra honako hau baita:

$$S_{\hat{y}} = S_{ee} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)S_x^2}}$$

Horrela, konfiantza-tartea darabilgun adibiderako kalkulatzen dugu:

$$\alpha = 0,05$$

$$\hat{y}_i \pm |1,7341| \sqrt{(1,0047)^2 \left[1 + \frac{1}{20} + \frac{(X_i - 3,75)^2}{(20-1)3,88} \right]}$$

Erregresio-analisiaren bitartez lagin jakin batean behatutako zuzenaren ekuazioa populazio-mailara orokortu nahi dugunean a eta b estimagailuen hipotesi-testak egin ditzakegu. Estimagailu horiek alboratu gabekoak eta tinkoak dira eta banaketa normalari jarraitzen diote. Zehatz-mehatz t_a eta t_b estatistikoak (euren laginketa banaketa) Studenten t ($n - p - 1$) askatasun-graduako banaketari darraizkio. Gure erregresio-analisan darabilgun kanpo-aldagaien kopuruari p esaten diogu. Dena den, aldeztu aurretik estimagailu horien desbiderapen estandarra kalkulatu beharra dagoelarik, horren azalpenari lotuko gatzazkio.

A eta B estimagailuen desbiderapen tipikoak⁴:

VII.21.2 eta VII.22.1

$$S_a = S_{ee} \sqrt{\frac{1}{n} + \left[\frac{\bar{X}^2}{(n-1)S_x^2} \right]} \quad S_a = 1,0047 \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \left[\frac{3,75^2}{(20-1) \cdot 3,88} \right]} = 0,4929$$

$$S_b = \sqrt{\frac{S_{ee}^2}{(n-1)S_x^2}} \quad S_b = \sqrt{\frac{1,00942}{(20-1) \cdot 3,88}} = 0,11700$$

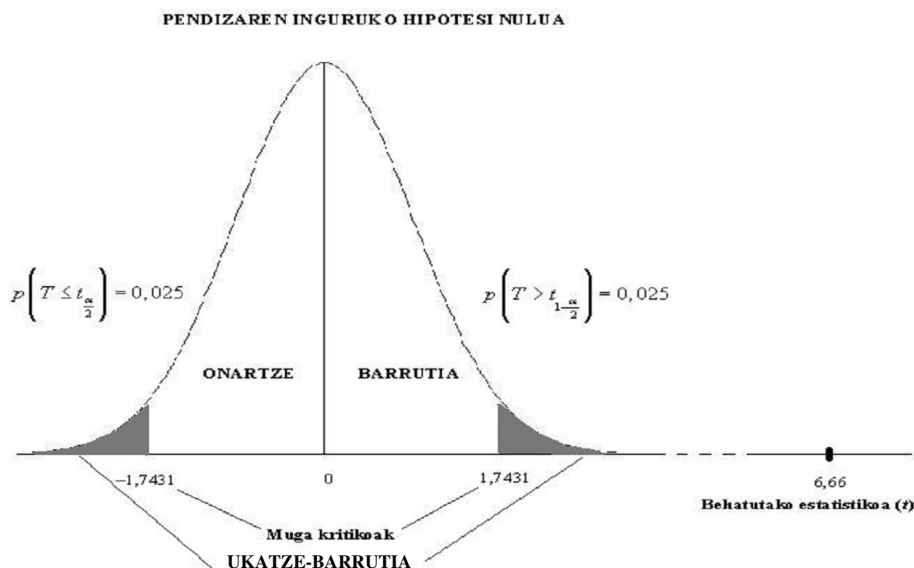
A eta B estimagailuetarako testaren estatistikoak:

$$T_b = \frac{b}{S_b} \quad T_b = \frac{0,77966}{0,11700} = 6,66$$

$$T_a = \frac{a}{S_a} \quad T_a = \frac{3,57627}{0,4929} = 7,26$$

4. Zenbait kasutan ordenagailuko eta eskuzko kalkuluen artean diferentziaren bat antzeman daiteke. Diferentzia horiek batean eta bestean erabiltzen diren kalkulu-prozeduren ondorioak dira.

Demagun zuzenaren malda, b estatistikoaren inguruan alde-biko hipotesi-testa eratu nahi dugula, hipotesi nulua eta ordezkioa hurrenez hurren: $H_0: \beta_0 = 0$ eta $H_1: \beta_1 \neq 0$. Orduan ondorengo irudian jar genezake kalkulatuak T_b :



II.8. grafikoa. Zuzenaren maldaren inguruko testa.

Erregresio linealaren analisi bakuna, jorratu duguna, anizkoitzaren kasurik sinpleena moduan uler daiteke. Errealitatean, eta ez da eufemismoa, kanpo-aldagai bakar batek nekez azal dezake osorik barne-aldagai baten aldakortasun guztia. Arrazoi batzuk badira izan hori azaltzeko. Aurrena, Gizarte Zientzietan neurtzeko ditugun zailtasunak, zientzia horietako aldagaien izaera lausotua dela-eta. Jarraian, eredu teoriko azaltzaileetan diren ahuldadeak, Gizarte Zientzietan, Psikologian barne, ohikoa da auzi bera azaltzeko eredu teoriko desberdinak izatea eta, batzuetan, elkarren kontrajarriak. Amaitzeko, eredu linealaren beraren sinpletasuna. Sinplea izateak baditu bere abantailak kalkulu prozesuetarako eta interpretatzeko garaian, baina ez dirudi linealtasuna denik Gizarte Zientzietako aldagaien arteko erlazioak ondoen islatzen dituen. Edozein kasutan, aitor dezagun, eredu linealean oinarritutako ekarpen teorikoak oso indartsuak, erakargarriak eta erabilgarriak dira. Horregatik, hain zuzen ere, erabiltzen dira horrenbeste.

Beste aldetik, baliabide informatiko estatistikoek, software estatistikoa batik bat, tamaina handiko laginekin eta milioika datuekin bizkor lan egiteko aukera ematen digute. Minutu bakan batzuetan analisirik konplexuenak egin ditzakegu. Hori, dudarik ez dago, abantaila izugarria da. Halere, datuen ustiapen eta kalkulurako erraztasunak izateak arreta handiagoa ipintzea eskatzen du eredu teorioetan, diseinu estatistikoetan eta analisien interpretazioetan.

Testu honetan, I.1. taulan, erabiltzen ari garen adibidea biribiltzeko SPSSren bitartez egindako erregresio-analisi bakunen taula batzuk aurkezten dizkizuegu.

II.5. taula. Erregresio lineal anizkoitza SPSSn.

Eredua		Estandarizatu gabeko koefizienteak		Estandarizatutako koefizienteak	t	Esang.
		B	Errore tip.	Beta		
1	(Konstante)	3,576	0,493		7,256	0,000
	Eraldatze psikofisiologikoa	0,780	,117	0,844	6,664	0,000

a Barne-aldagaia: Errendimendua

Eredua		Estandarizatu gabeko koefizienteak		Estandarizatutako koefizienteak	t	Esang.
		B	Errore tip.	Beta		
1	(Konstante)	1,121	2,128		0,527	0,605
	Adina	0,231	0,090	0,517	2,564	0,020

a Barne-aldagaia: Errendimendua

Eredua		Estandarizatu gabeko koefizienteak		Estandarizatutako koefizienteak	t	Esang.
		B	Errore tip.	Beta		
1	(Konstante)	4,421	0,587		7,527	0,000
	Motibazioa	0,279	0,068	0,696	4,117	0,001

a Barne-aldagaia: Errendimendua

2.5. ERREGRESIO LINEALAREN GRAFIKOAK

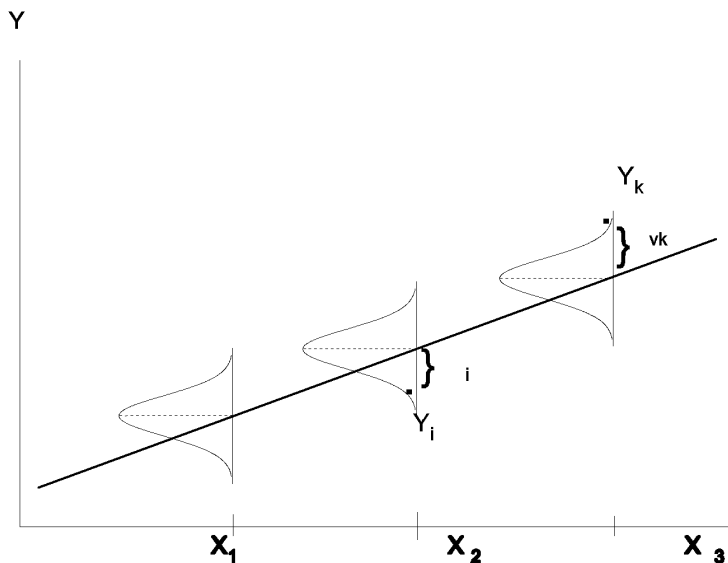
Erregresio linealaren adierazpide grafikoa analisiaren egokitasuna aztertzeke alderdi garrantzitsuena da. Grafikoetan, besteak beste, linealtasuna, normaltasuna eta homozedastizitate-aurrekariak betetzen diren ala ez ikus dezakegu. Horrekin batera, hondakinen analisia, erregresio-analisen barruan, oso garrantzitsua da alborapenen bat ote dagoen ikusteko.

Hondakina, erregresio-analisan, estimazio linealaren erroretzat har daiteke. Funtsean, *benetako* eta *estimatutako* puntuazioen arteko distantzia da.

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Erregresioaren hondakinak batez besteko zero duen banaketa normalari egokitzen zaizkio. Hori da, bederen, alborapenik ez dagoenean espero daitekeena. Hondakinen analisia egiteko puntuazioak estandarizatu egiten dira, bi prozedura desberdin erabil daitezke horretarako. Estandarizatzea (*tipifikatzea*) eta

estudentizatzea. Estandarizatutako hondakina, jatorrizko hondakinaren eta bere desbiderapenaren arteko zatidura da. Estudentizatutako hondakinek, beste aldetik, errore tipikoen arteko diferentziak zorrotzago aztertzen dituzte.



II.9. grafikoa. *Estimazioen banaketa normalak.*

Estandarizatutako hondakinak:

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{s}_R \sqrt{1 - v_{ii}}}$$

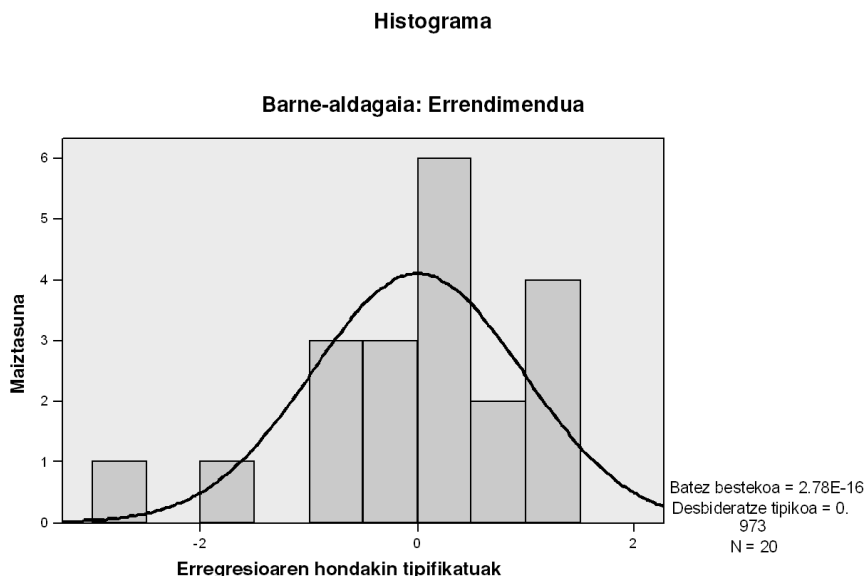
Estudentizaturiko hondakinak:

$$t_i = \frac{e_i}{\hat{s}_{R(i)} \sqrt{1 - v_{ii}}}$$

Hondakinen analisia egiteko honako hiru grafiko klase dira erabilienak:

1. Histograma: normaltasuna aztertzeko eta balio atipikoak (*outliers*) ote dauden ikusteko.
2. Normaltasunaren probabilitate-grafikoa (*p-p* grafikoa) eta simetria-grafikoa: hondakinen banaketaren normaltasuna eta simetria egiaztatzeko.
3. Hondakinen eta estimazioen grafikoa: heterozedastizitatea eta analisi-erroreak antzemateko.

SPSSk honakoak ematen dizkigu: barne-aldagaiaren balioak (DEPENDNT), estimatutako balio estandarizatuak (*ZPRED), hondakin estandarizatuak (*ZReSID), baztertutako hondakinak (*DRESID), estimatutako balio zuzenduak (*ADJPRED), hondakin estudentizatuak (*SRESID) eta baztertutako hondakin estudentizatuak (*SDRESID). Horiekin eraiki ditugu ondorengo grafikoak.



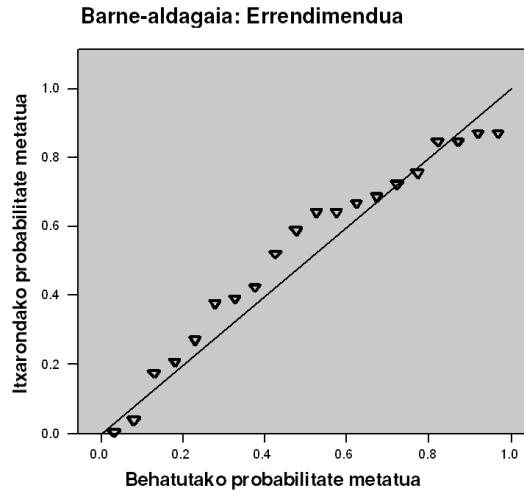
II.10. grafikoa. *Hondakin tipifikatuen banaketa (SPSS v14.0).*

Hondakin estandarizatuaren banaketa ez bada banaketa normala, erregresioaren ereduan alborapenen bat badela pentsatu behar dugu. Irudi horretan (II.9. grafikoa), banaketa horrek normaltasunari jarraitzen diola har dezakegu. Halere, banaketaren ezkerraldeko muturrari begiratzen badiogu, alborapenen bat egon daitekeela pentsa dezakegu.

Normaltasunaren banaketa-funtzioak S tankerako itxura hartzen du. Hondakin estandarizatuak normaltasunari lotzen zaizkionean irudiko diagonalaren inguruan txirikordatzen dira puntuak. Grafikoa ikusita (II.11. grafikoa), kasu honetan, hondakin estandarizatuak ez direla banaketa normaletik nabarmenegi aldentzen pentsa dezakegu.

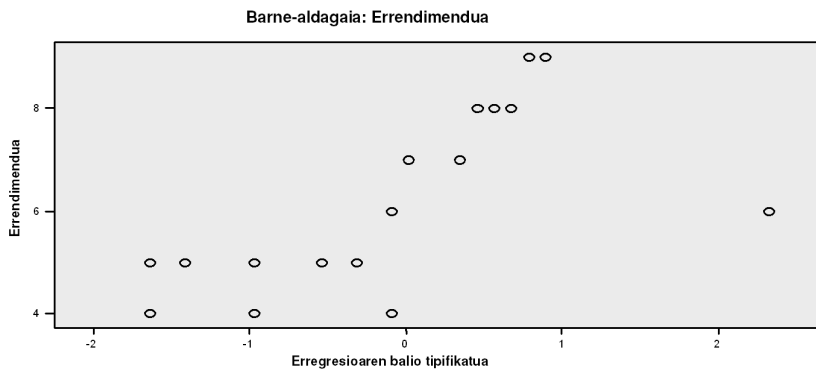
Hondakinak, lehen esan dugunez, erregresioaren estimazioetako erroretzat har ditzakegu. Zorizko datuak erabiliz gero, erroreak normaltasunez banatzen dira eta haien itxaropen matematikoa, edo batez bestekoa, zero da. Hondakinen banaketa-funtzioa normala izatea itxaroten dugu, beraz. Hondakinen banaketa normalari egokitzen ez bazaio, zalantzan ipintzen da jatorrizko datuak zorizkoak direnik. Hau da, alborapena dago, ezagutzen ez dugun zerbaitek eragiten du, alegia.

Erregresioaren grafiko normala (P-P) hondakin tipifikatuak

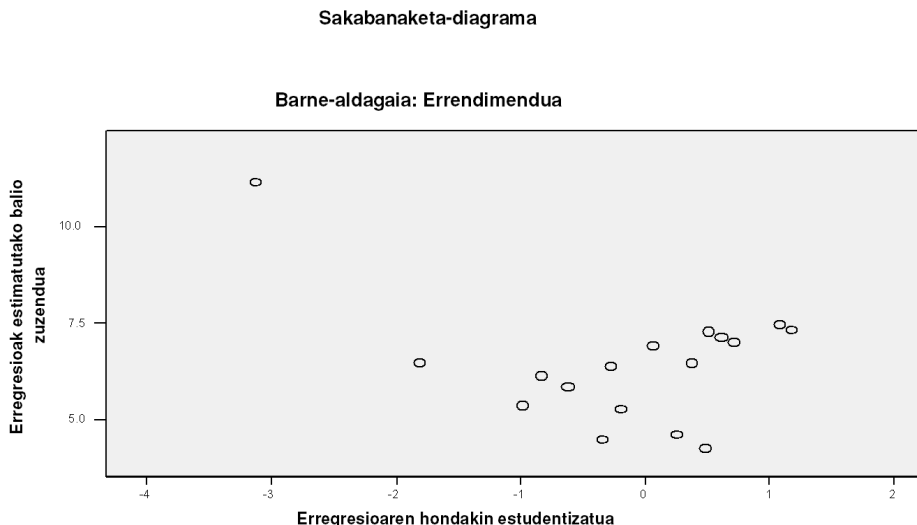


II.11. grafikoa. P-P grafikoa, hondakinen banaketa-funtzioa.

Sakabanaketa-diagrama



II.12. grafikoa. Erregresioaren balio estandarizatuak eta barne-aldagaia.



II.13. grafikoa. *Erregresioaren balio estudentizatuak eta estimazio estandarrek.*

Aurreko bi grafiko horietan puntuen antolaketa desberdinak ikus daitezke estandarizazio-prozedura desberdinak erabiltzen ditugunean.

2.6. ERREGRESIO LINEAL ANIZKOITZA

Erregresio lineala zertan den azaldu dugu, orain anizkoitza eranstean bakunaren orokorpena dela besterik ez dugu adierazten. Analisi anizkoitzaren oinarriak eta aurretikoak, funtsean, bakunaren bertsuak dira.

Kanpo-aldagai kopuruak erregresioaren dimentsioa zehazten du. Hau da, kanpo-aldagai bakarraren funtzio linealak adierazpide grafikoan zuzena dakar, bi kanpo-aldagai erregresio-planoa zehazten du eta, kanpo-aldagaiak hiru edo gehiago direnean erregresioaren ekuazioa p dimentsioko hiperplanoari dagokio, p kanpo-aldagai kopurua delarik. Horrela, aldagai anizkoitzaren analisiaren bitartez, gure barne-aldagaiaren estimazioak zorrotzen ditugu. Oso lanabes emankorrak dira Psikologian, eta gainerako zientzietan ere, errealitate konplexua murrizteko eta azalpen ulergarriak eman ahal izateko. Haatik, analisi-teknikak indartsuak izanagatik, horrek ez du adierazten estimazio-errorea desagertzen denik. Izan ere, maiz esan dugunez, behatutako Y_i eta estimatutako Y'_i puntuazioen artean aldea baitago.

Arestian esan legez, erregresioak berez batez bestekoranzko joera dakar; kanpo- zein barne-aldagaien grabitate-erdiguneekiko joerek zehazten dute, bai erregresio bakunaren lerro zuzena, bai erregresio anizkoitzaren erregresio-planoa bai erregresio-hiperplanoa (3 edo kanpo-aldagai gehiago direnean). Gizarte Zientziako ikerkuntzan eredu linealean oinarritutako analisi-teknikak dira erabilienak. Beraien sinpletasun matematikoa eta interpretatzeko erraztasunak dira,

besteak beste, analisi-teknika horien abantailak. Errealitatea, berez, konplexua eta dimentsio anitzekoa da eta, teknika hauen bitartez, konplexutasun eta anizkoiztasun hori murriztu egiten dugu.

2.7. EREDU LINEAL ANIZKOITZA

Erregresio lineal anizkoitzaren ekuazio orokorra:

$$\hat{Y} = a + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \dots + b_j X_{ij} + \dots + b_{p-1} X_{i(p-1)} + b_p X_{ip}$$

Era berean, hurrengoa betetzen da:

$$\sum_{i=1}^n [\hat{Y}_i - (a + b_1 X_{i1} + \dots + b_j X_{ij} + \dots + b_p X_{ip})]^2 = \text{baliorik txikiena}$$

Demagun orain Y barne-aldagaien matrizea eta X kanpo-aldagaien matrizea ditugula,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1(p-1)} & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & & & & x_{2(p-1)} & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & x_{ij} & \dots & \dots & \dots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & & & & x_{(n-1)(p-1)} & x_{(n-1)p} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{n(p-1)} & x_{np} \end{pmatrix}$$

Matrize horietatik erregresioaren koefizienteak honela kalkula ditzakegu:

$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

eta a :
$$a = \bar{Y} - \bar{X}_i b_i$$

Jatorrizko datuak, puntuazio tipikoak direnean, kalkulatu koefizienteak pisu estandarizatuak dira, beta (β) puntuazioak alegia. Puntuazio tipikoen kasuan go-goan izan $\bar{Y} = 0$ eta $\bar{X}_i = 0$ eta, ondorioz, erregresio anizkoitzaren ekuazioko termino askea $\alpha = 0$ ere badela. Beste alderditik B (*beta*) matrizea honelakoa da:

$$B_i = b_i \frac{S_{x_i}}{S_y} \quad \text{VII.7.4}$$

Erregresio lineal bakunaren eta anizkoitzaren ezaugarri nagusiak laburbildu ditugu ondorengo taulan.

II.6. taula. *Erregresio lineal anizkoitza, bi kanpo-aldagai eta erregresio-planoa.*

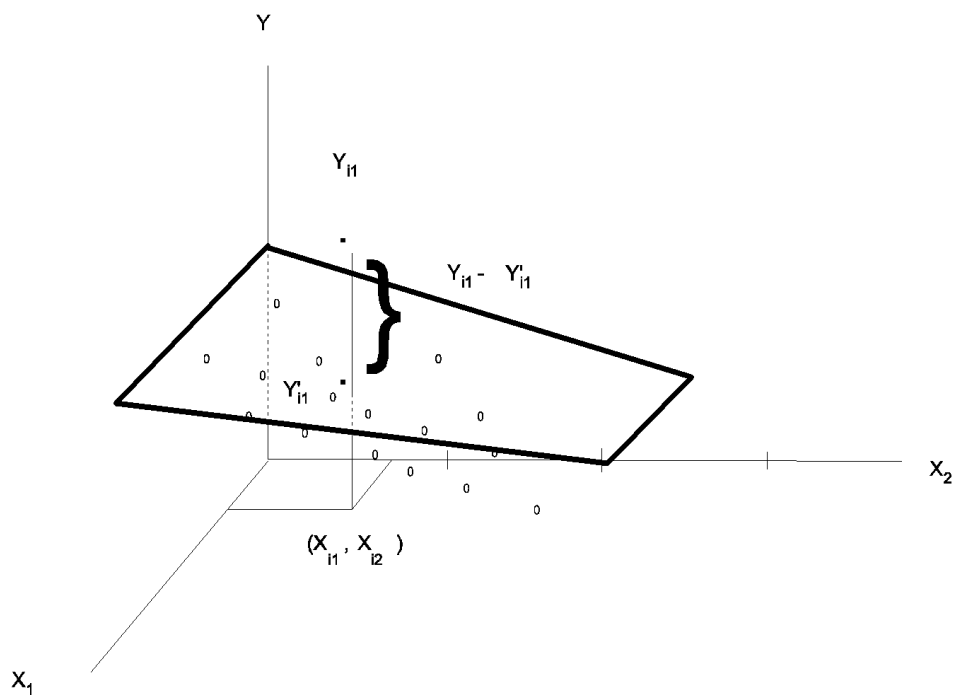
	ERREGRESIO LINEALA	
	Bakuna	Anizkoitza
Egiturako eredua	$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$	$y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_j x_{ij} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$
Parametroak	$\beta = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ $\alpha = \beta \bar{x} + \bar{y}$	$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$
Banaketa	$N\left(\beta_1, \frac{\sigma}{S_x \sqrt{n}}\right)$ $N\left(\alpha, \sigma \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2}\right)}\right)$	
Estimazioak	$\hat{y}_i = \alpha + \beta x_i$ $\hat{Y} = \hat{\alpha} \bar{1} + \hat{\beta} \bar{X}$	$\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_j x_{ij} + \dots + \beta_p x_{ip}$
Hondakinak	$e_i = y_i - \hat{y}$ $\vec{e} = \vec{Y} - \hat{Y}$	
Bariantza	$s_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}$	$\hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-(p+1)}$
Bariantzen banaketak	χ^2_{n-2}	$\chi^2_{n-(p+1)}$

2.8. BI KANPO-ALDAGAI

Barne-aldagai bakarra eta kanpo-aldagai biren eredu lineala lantzerakoan, honako egiturako ekuazio hau izaten dugu abiapuntua.

$$\hat{Y} = a + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \dots + b_j X_{ij} + \dots + b_{p-1} X_{i(p-1)} + b_p X_{ip}$$

Ekuazio horretan, konstantea (α), erregresio-koefizienteak (β_j) eta estimazioaren erroreak (ε_{ij}) agertzen dira. Eredu linealean bi kanpo-aldagaien funtzioak planoaren adierazpide grafikoa dakar.



II.14. grafikoa. Erregresio lineal anizkoitza, bi kanpo-aldagai, erregresio-planoa.

Har ditzagun gure adibidetik hiru aldagai, bat barne-aldagaia, *errendimendua* (Y), eta *eraldatze psikofisiologikoa* (X_1) eta *adina* (X_2) kanpo-aldagai bi. Planoaren ekuazioko hiru koefiziente a , b_1 eta b_2 kalkulatu behar ditugu beraz. Matrize-algebran honela idatziko genuke egiturako ekuazioa:

$$Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \alpha + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 26 \\ 20 \\ 26 \\ 20 \\ 25 \\ 13 \\ 21 \\ 22 \\ 28 \\ 27 \\ 22 \\ 22 \\ 28 \\ 24 \\ 27 \\ 15 \\ 27 \\ 23 \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}$$

Goiko ekuazio hori, ekuazio-sistema gisa idatzenezake. Batera zein bestera, kalkulu-prozedura bera da. Halere, matrize-algebra oso lagungarri gerta dakiguke lantegi honetan.

Kalkuluetarako puntuazio zuzenak baino gehiago puntuazio diferentzialak eta beraiekin eraikitzen den ekuazio normalen sistema erabiltzen dira. Puntuazio diferentzialak, oro har, batez besteko aritmetikoarekiko distantziak besterik ez dira. Gogora dezagun:

$$d_i = y_i - \bar{Y}$$

Puntuazio diferentzialek ezaugarri bereizgarri batzuk dituzte, besteak beste, haien batez bestekoa zero dela. Lehen aipatu ditugun ekuazio normalak honako hauek dira:

$$(\sum x_1^2) \cdot b_1 + (\sum x_1 x_2) \cdot b_2 = (\sum x_1 y)$$

$$(\sum x_1 x_2) \cdot b_1 + (\sum x_2^2) \cdot b_2 = (\sum x_2 y)$$

Ekuazio-sistema hori berezia da. Gure kasuan, bi kanpo-aldagai dauzkagu, X_1 eta X_2 , bi erregresio-koefiziente estimatu behar ditugu, beraz. Ekuazio-sistema linealetan jakingaiak ekuazio beste dira⁵. Matrize moduan idatz dezakegu:

$$\begin{pmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{pmatrix}$$

Erregresio-koefizienteen bektorea ebatzi behar dugu. Horretarako biderkaduren matrizea erabil dezakegu, S matrizea, aurreko ekuazioko lehenengoa, alegia.

Biderkaduren matrizea kalkulatzeko honela egin dezakegu:

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - n \cdot (\bar{X}_1)^2$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - n \cdot (\bar{X}_1) \cdot (\bar{X}_2)$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - n \cdot (\bar{X}_2)^2$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - n \cdot (\bar{X}_1) \cdot (\bar{Y})$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - n \cdot (\bar{X}_2) \cdot (\bar{Y})$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - n \cdot (\bar{Y})^2$$

Horrela, batukarien ebazpena:

$$\sum x_1^2 = 7,375 ; \sum x_1 x_2 = 8,5 ; \sum x_2^2 = 3,162$$

$$\sum x_1 y = 57,5 ; \sum x_2 y = 73 ; \sum y^2 = 63$$

5. Notazioari dagokionez, letra xehean puntuazio diferentzialak (d_i) adierazten dira, eta letra larrian, berriz, puntuazio zuzenak.

Gure jakingaiak, esan moduan, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bektorearen erregresio-koefizienteak dira. Hurrengo ekuazio-sistema hau ebatzi behar dugu:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{pmatrix}$$

Ikus daitekeenez, *Cramerren araua*⁶ erabili ahal izateko ezinbesteko baldintza betetzen da, sistemak jakingai adina ekuazio izatea alegia. Bigarren baldintza koefiziente-matrizearen determinantari (|S|) dagokio; hots, |S| ≠ 0 desberdintza bete behar baita. Gure adibideko datuetan ea betetzen den ikus dezagun:

$$|S| = (73,75 * 316,2) - (8,5 * 8,5) = 23247,50$$

Cramerren araua erabili ahal izateko baldintza biak betetzen dira, beraz. Hori horrela, ekuazio-sistema adibideko datuetara ekar dezagun:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73,75 & 8,5 \\ 8,5 & 316,2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 57,5 \\ 73 \end{pmatrix}$$

Hona hemen b_1 eta b_2 erregresio-koefizienteen ebazpidea Cramerren arauari jarraituz:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 57,5 & 8,5 \\ 73 & 316,2 \end{vmatrix}}{23247,50} = \frac{(57,5 * 316,2) - (8,5 * 73)}{23247,50} = 0,7554$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 73,75 & 57,5 \\ 8,5 & 73 \end{vmatrix}}{23247,50} = \frac{(73,75 * 73) - (57,5 * 8,5)}{23247,50} = 0,2106$$

Beste era batera kalkula ditzakegu erregresio-koefizienteak, honela, hain zuzen ere:

6. *Cramer arauari* buruzko azalpenak ondorengo orrialdeetan aurki ditzakezu.

7. Ikusi |S| determinantearen kalkulua eta formuletak *zatitzaileak* bat datozela.

$$b_1 = \frac{(\sum x_2^2) \cdot (\sum x_1 y) - (\sum x_1 x_2) \cdot (\sum x_2 y)}{(\sum x_1^2) \cdot (\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} \quad b_1 = \frac{316,6.57,5 - 8,5.73}{73,5.316,2 - 8,5^2} = 0,755393$$

$$b_2 = \frac{(\sum x_1^2) \cdot (\sum x_2 y) - (\sum x_1 x_2) \cdot (\sum x_1 y)}{(\sum x_1^2) \cdot (\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2} \quad b_2 = \frac{73,75.73 - 8,5.57,5}{73,75.316,2 - 8,5^2} = 0,21056$$

Horrenbestez, b_1 eta b_2 erregresio-koefizienteak kalkula ditzakegu. Konstantea (α) eta erregresio-koefiziente estandarizatuak (β_j) lehen adierazitako formulen bitartez kalkula ditzakegu.

$$\bar{Y} = \alpha + \beta_1 \bar{X}_1 + \beta_2 \bar{X}_2$$

$$\alpha = 6,5 - (0,75539 * 3,75 + 0,21056 * 23,3) = -1,23878$$

$$B_j = b_j \cdot \frac{S_{x_j}}{S_y} \quad \beta_1 = 0,75539 \cdot \frac{1,97}{1,82} = 0,81765 \quad \beta_2 = 0,21056 \cdot \frac{4,08}{1,82} = 0,472$$

2.9. HIRU KANPO-ALDAGAI EDO GEHIAGO

Erregresio lineal anizkoitzean, kanpo-aldagaiak hiru edo gehiago direnean baliabide informatiko estatistikoak erabiltzea izugarri errazten du kalkulu-prozesua. Halere, ordenagailuak zer egiten duen ulertu ahal izateko eredu matematikoaren garapena azaltzea komenigarria dela iruditzen zaigu. Har dezagun, bada, hiru kanpo-aldagaien kasua. Abiapuntu gisa, II.4. grafikoan aurkeztu dugun jario-diagrama harturik, hor agertzen diren erregresio-koefiziente estandarizatuak (β_j) eta gainerako korrelazioak kalkulatzeko helburu daukagu.

Gure adibideko hiru kanpo-aldagaiak erabiliko ditugu, *eraldatze psikofisiologikoa* (X_1), *adina* (X_2) eta *motibazioa* (X_3), eta, jakina, *errendimendua* (Y) barne-aldagaia. Bi kanpo-aldagaien kasuan egin dugun moduan, honetan ere, puntuazio diferentzialak ezagutu behar ditugu:

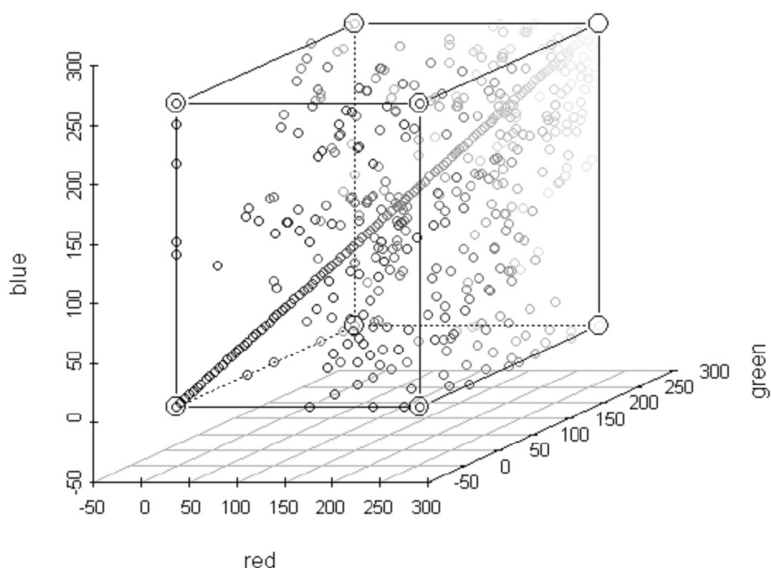
$$\sum x_1^2 = 73,75; \sum x_1 x_2 = 8,5; \sum x_2^2 = 316,2$$

$$\sum x_1 y = 57,5; \sum x_2 y = 73; \sum y^2 = 63$$

$$\sum x_3^2 = 392,95; \sum x_1 x_3 = 80,75; \sum x_2 x_3 = 101,3$$

$$\sum x_3 y = 109,5$$

Askotariko aldagaien sakabanaketa-diagrama



II.15. grafikoa. Dimentsio anitzeko sakabanaketa-grafikoa
(Martin Maechler —R, <http://addictedtor.free.fr/graphiques/>—).

Puntuazio diferentzialak ezaguturik, dagozkien ekuazio normalen sistema aurkezten dizuegu:

$$\sum x_1 y = b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + b_3 \sum x_1 x_3$$

$$\sum x_2 y = b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 + b_3 \sum x_2 x_3$$

$$\sum x_3 y = b_1 \sum x_1 x_3 + b_2 \sum x_2 x_3 + b_3 \sum x_3^2$$

Ekuazio horretan letra xehean idatzitako x eta y horiek puntuazio diferentzialak direla gogoan izan. Beste alderditik, honako hauek betetzen dira:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y}{N S_x S_y} \quad \sum x_i y = r_{xy} N S_x S_y$$

$$\sum x_i x_j = r_{x_i x_j} N S_{x_i} S_{x_j}$$

$$\sum x_i^2 = N S_x^2$$

Hortik,

$$r_{x_1y}S_y = b_1S_{x_1} + b_2r_{x_1x_2}S_{x_2} + b_3r_{x_1x_3}S_{x_3}$$

$$r_{x_2y}S_y = b_1r_{x_1x_2}S_{x_1} + b_2S_{x_2} + b_3r_{x_2x_3}S_{x_3}$$

$$r_{x_3y}S_y = b_1r_{x_1x_3}S_{x_1} + b_2r_{x_2x_3}S_{x_2} + b_3S_{x_3}$$

Ekuazio normalen sistema, matrize moduan honela idatz dezakegu:

$$\begin{pmatrix} \sum x_1y \\ \sum x_2y \\ \sum x_3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 & \sum x_1x_3 \\ \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 & \sum x_2x_3 \\ \sum x_1x_3 & \sum x_2x_3 & \sum x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ekuazioko matrize nagusiari S esan diezaiozun; matrize hori hiru kanpo-aldaigaien puntuazio diferentzialen arteko biderkaduren baturaz osaturik dago hain zuzen ere.

Gure adibideko datuak erabiliz honela geratzen da gure sistema:

$$\begin{pmatrix} 57,5 \\ 73 \\ 109,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 737,5 & 8,5 & 80,75 \\ 8,5 & 3,162 & 101,3 \\ 80,75 & 101,3 & 392,45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ekuazio linealen sistema horri, hain zuzen, Cramerren araua ezar dakioke. Ekuazio linealen sistema ebazteko honako baldintza hauek bete behar dira:

1. Sistemak ekuazio adina jakingai izan behar du. Koefizienteen matrizeak (A) lauki-matrizea izan behar du beraz.
2. Koefizienteen matrizearen determinanteak zero ez den beste edozein balio hartu behar du.

Baldintza horiek zehatz-mehatz betetzen dira gure kasu honetan, Cramerren araua inolako arazorik gabe ezar dezakegu beraz. Gatozen, bada, $|S|$ determinantea kalkulatzera:

$$|S| = \begin{vmatrix} 73,75 & 8,5 & 80,75 \\ 8,5 & 3,162 & 101,3 \\ 80,75 & 101,3 & 392,45 \end{vmatrix}$$

$$|S| = [(73,75 * 316,2 * 392,45) + (8,5 * 101,3 * 80,75) + (80,75 * 101,3 * 8,5)] - [(80,75 * 316,2 * 80,75) + (101,3 * 101,3 * 73,75) + (392,45 * 8,5 * 8,5)]$$

$$|S| = 9290895,463 - 2846956,013 = 6443939,45$$

Orain b_1 , b_2 eta b_3 balioak hurrenez hurren kalkulatu ditugu.

$$b_1 = \frac{|S_1|}{|S|} = \frac{\begin{vmatrix} 57,5 & 8,5 & 80,75 \\ 73 & 316,2 & 101,3 \\ 109,5 & 101,3 & 392,45 \end{vmatrix}}{6443939,45}$$

$$|S_1| = [(57,5 * 316,2 * 392,45) + (73 * 101,3 * 80,75) + (109,5 * 101,3 * 8,5)] - [(80,75 * 316,2 * 109,5) + (101,3 * 101,3 * 57,5) + (392,75 * 73 * 8,5)]$$

$$|S_1| = 7826752,825 - 3629442,325 = 4197310,5$$

$$b_1 = \frac{4197310,5}{6443939,45} = 0,651357843$$

Hurrengo erregresio-koefizientea, b_2 :

$$b_2 = \frac{|S_2|}{|S|} = \frac{\begin{vmatrix} 73,75 & 57,5 & 80,75 \\ 8,5 & 73 & 101,3 \\ 80,75 & 109,5 & 392,45 \end{vmatrix}}{6443939,45}$$

$$|S_2| = [(73,75 * 73 * 392,45) + (57,5 * 101,3 * 80,75) + (80,75 * 109,5 * 8,5)] - [(80,75 * 73 * 80,75) + (101,3 * 109,5 * 73,75) + (392,45 * 8,5 * 57,5)]$$

$$|S_2| = (2658359,313) - (1485871,813) = 1172487,5$$

$$b_2 = \frac{1172487,5}{6443939,45} = 0,181951973$$

Azkenik, b_3 :

$$b_3 = \frac{|S_3|}{|S|} = \frac{\begin{vmatrix} 73,75 & 8,5 & 57,5 \\ 8,5 & 316,2 & 73 \\ 80,75 & 101,3 & 109,5 \end{vmatrix}}{6443939,45}$$

$$|S_3| = [(73,75 * 316,2 * 109,5) + (73 * 8,5 * 80,75) + (57,5 * 101,3 * 8,5)] - [(80,75 * 316,2 * 57,5) + (101,3 * 73 * 73,75) + (109,5 * 8,5 * 8,5)]$$

$$|S_3| = 2653128,375 - 2021441,375 = 631687$$

$$b_3 = \frac{631687}{6443939,45} = 0,098028078$$

Gogoratu erregresio lineal anizkoitzeko ekuazio hau:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$$

Horrela b_1 , b_2 eta b_3 eta kanpo-aldagaien batez bestekoak ezagutzen ditugula a osagaia ere jakin dezakegu.

$$a = \bar{Y} - [b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2 + b_3 \bar{X}_3]$$

$$a = 6,5 - [(0,65135784) \cdot (3,75) + (0,18195197) \cdot (23,3) + (0,09802808) \cdot (7,45)]$$

$$a = -0,91238208$$

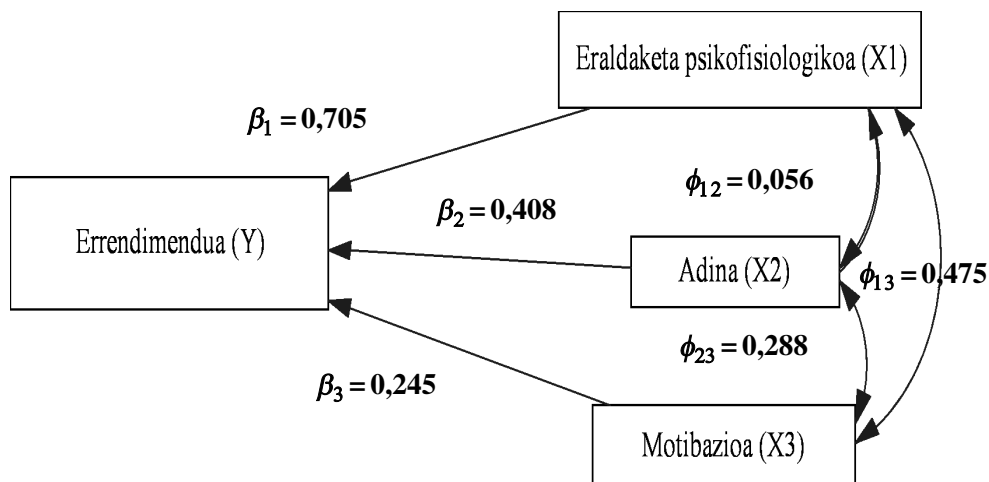
Guk, ostera, honela kalkulatzen ditugu:

$$\beta_1 = b_1 \frac{S_{x_1}}{S_y} = 0,651 \frac{1,97}{1,82} = 0,705$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{S_{x_2}}{S_y} = 0,182 \frac{4,079}{1,82} = 0,408$$

$$\beta_3 = b_3 \frac{S_{x_3}}{S_y} = 0,098 \frac{4,545}{1,82} = 0,245$$

Honaino, arestian azaldutako eredua (ikus II.4. grafikoa) ebatzi dugu, jarraian, irudi bera ikus daiteke erregresio-koefiziente estandarizatuaren balioekin. Koefiziente horiek haztaperen-neurri gisa uler daitezke. Hau da, kanpo-aldagaien ekarpena barne-aldagaiaren aldakortasuna azaltzerakoan.



II.16. grafikoa. Erregresio-koefiziente estandarizatuak *jario-diagraman*.

Eredu horren arabera, hiru kanpo-aldagaien artean eraldaketa psikofisiologiko aldagaia (X_1) errendimenduaren aldakortasunetik gehien azaltzen duena da. Egiturako ekuazioa, azkenik, honela geratzen da:

$$Y_1 = -0,91238 + 0,705 X_1 + 0,408 X_2 + 0,245 X_3$$

2.9.1. ANOVA, korrelazio-koefiziente partzialak eta anizkoitza, determinazio-koefizientea

Jakina denez, erregresio-analisia, edo eredua, esanguratsua den ala ez jakiteko azaldutako bariantzaren proportzioa nahikoa ote den argitu behar dugu. Hori, bariantza-analisiaren bitartez argi dezakegu.

Erregresioari atxikitako bariantza-analisia (ANOVA)				
Aldakortasun-sorburuak	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F
Erregresioarena	$SCR=61,47$	$p=3$	$MCR=SCR/p=20,49$	$F=MCR/MCE=214,224$
Hondakinena	$SCE=1,53$	$n-p-1=16$	$MCE=SCE/(n-p-1)=0,096$	
Orokorra	$SCT=63$	$n-1=19$		

Gure adibidean, Fisherren F nahikoa eta sobera handia da esan ahal izateko, ia dudarik gabe, azaldutako aldakortasuna oso esanguratsua dela. Analisia osatzeko determinazio-koefizientea dugu (r_{xy}^2 edo R^2) azaldutako bariantzaren proportzioa adierazten diguna.

$$r_{xy}^2 = 1 - \frac{\sum_i^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_i^N (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{1,53}{63} = 0,976$$

Zenbaki horrek (0,976) adierazten digu eredu honen bitartez azaldutako errendimenduaren aldakortasuna % 97,6koa dela. Oso handia, beraz. Koefiziente hori zuzendu daiteke, zuzenketa, funtsean, errorik gabeko bariantzak erabiliaz lor daiteke. Ikus dezagun:

$$r_a^2 = 1 - \frac{\frac{\sum_i^N (Y - \hat{Y})^2}{N - p - 1}}{\frac{\sum_i^N (Y - \bar{Y})^2}{N - 1}} = 1 - \frac{\frac{1,53}{20 - 3 - 1}}{\frac{63}{20 - 1}} = 0,971$$

Determinazio-koefizientearen erroadura (R) korrelazio-koefiziente anizkoitza da. Korrelazio-koefiziente hori barne- eta kanpo-aldagaien artean aldakortasun komunaren adierazle estandarizatua da. Gure adibidean, $R = 0,988$.

Eredu lineal anizkoitzetan koefiziente partzialak, beste alderditik, bi aldagaien artean zenbateko korrelazioa dagoen adierazten digu, betiere, gainerako aldagaiek izan dezaketen eragina kenduta. Hau da, hiru aldagai edo gehiago dauzlagunean, aldagaien arteko binakako korrelazioetako zati bat besteen aldagaien ekarpenari dagokio. Zati hori bereizita kalkulatzen da (binakako) korrelazio-koefiziente partziala.

Eredu linealean erabiltzen ditugun aldagai kopuruaren arabera lehen mailako, bigarren mailako edo maila handiagoko korrelazio-koefiziente partzialak izango ditugu. Lehen mailako korrelazio-koefiziente partzialak kalkulatzeko formula:

$$r_{y(x_j, x_{k \neq j})} = \frac{r_{yx_j} - r_{yx_{k \neq j}} r_{x_j x_{k \neq j}}}{\sqrt{1 - r_{x_j x_{k \neq j}}^2}}$$

Gure adibideetako datuen arabera, korrelazio-koefizienteen matrizea honako hau da:

	Y	X_1	X_2	X_3
Y	--			
X_1	0,8436	--		
X_2	0,5172	0,0577	--	
X_3	0,6964	0,4746	0,2876	--

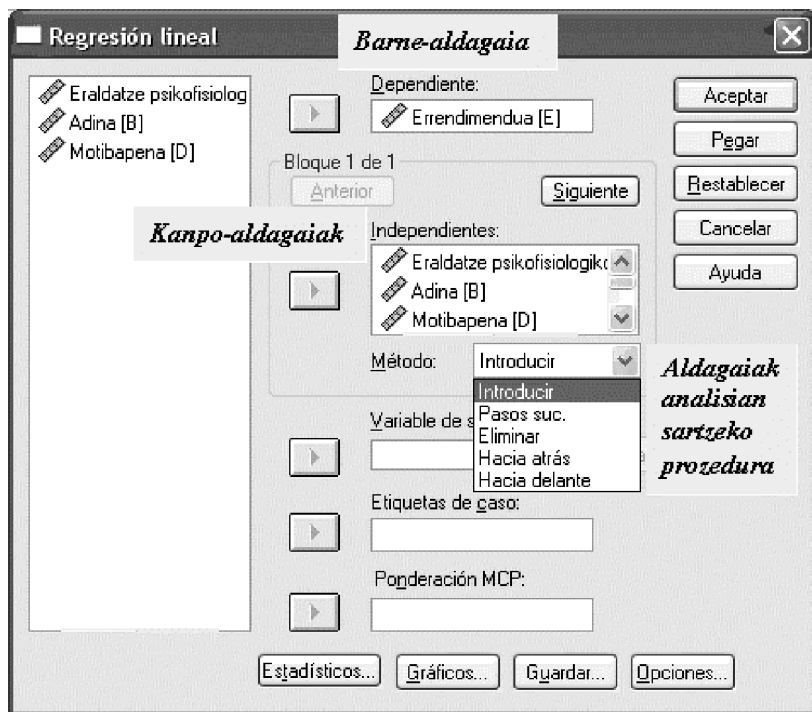
Korrelazio-koefiziente horietatik abiatuta, honako korrelazio-koefiziente partzial hauek kalkula ditzakegu:

$r_{y(x_1, x_2)}$	0,81511557	$r_{y(x_2, x_1)}$	0,46930616
$r_{y(x_1, x_3)}$	0,58292165	$r_{y(x_3, x_1)}$	0,33590799
$r_{y(x_2, x_3)}$	0,33089549	$r_{y(x_2, x_3)}$	0,57181198

2.9.2. Erregresio lineala SPSS erabiliz

Aurreko ataletan ikusi ahal izan denez, erregresio-analisiaren kalkulu guztiak egitea lan nekoso eta astuna da. Gaur egun, aplikazio informatiko estatistikoak erabiltzen dira horretarako. Kalkulu-lanak ikaragarri errazteaz gainera, datu-matrize handiekin lan egiteko aukera handiak eskaintzen dituzte lanabes horiek. Guk Gizarte Zientzietan, eta ez soilik Gizarte Zientzietan, gehien erabiltzen diren analisi estatistikoetarako programa-bildumaren bitartez egingo dugu.

Ariketa honetarako aurretik erabili ditugun datu bertsuak erabiliko ditugu (ikus II.1. taula). Datu horiekin SPSSren datu-editorearen menutik erregresio linealaren aukera hautatu eta leiho hau zabaltzen zaigu:



II.1. irudia. Erregresio lineala SPSS (v14.0) hasierako leihoa.

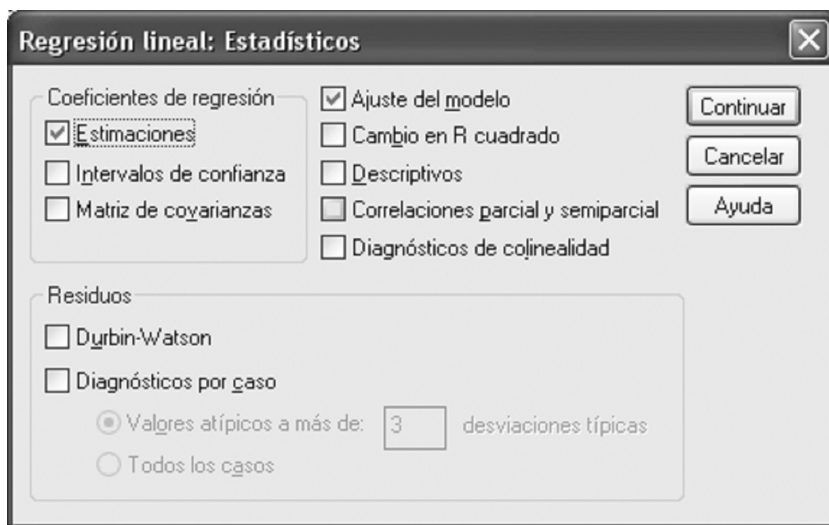
Koadro horietan guk erabiltzen ditugun izendapenak ipini ditugu. SPSSk eskaintzen dituen aukerak banan-banan azalduko ditugu.

2.9.2.1. Estatistikoak

SPSSk erregresio linealeko ateraldian, berez, oinarrizko estatistikoak erakusten ditu. Oro har, honako estatistiko hauek kalkulatzen ditu:

1. **Erregresio-koefizienteak.** *Estimaciones* hautapenean estatistiko hauek zerrendatzen dira, bestak beste: erregresio-koefizientea (B), haren errore estandarra, dagokion t balioa eta esangura-maila enpirikoa eta erregresio-koefiziente estandarra (β). Hautatuko bagenu, honakoak ere erakutsiko lizkiguke: % 95eko konfiantza-mailako konfiantza-tarteak, erregresio-koefizienteen bariantza-kobariantza matrizea eta korrelazioen matrizea.
2. **Eredu linealaren egokitzapen estatistikoak.** Korrelazio-koefiziente anizkoitza (R), determinazio-koefizientea (R^2), determinazio-koefiziente zuzendua (R_a^2), estimazioaren errore tipikoa eta erregresio linealari atxikitako ANOVA.

Aipatutako horiek dira SPSSk berez erakusten dizkigunak, harago, guk hautatu beharko genituzke *Estadísticos* hautapenean.



II.2. irudia. Erregresio lineala SPSSn, estatistikoek aukera.

3. **Determinazio-koefizientearen aldaketa** (*Cambio en R cuadrado*). Kanpo-aldagai bat ekuazioan jartzean, edo kentzean, gertatzen den determinazio-koefizientearen aldaketa. Kanpo-aldagai berri bat ekuazioan sartzean determinazio-koefizientearen aldaketa-maila handia bada, kanpo-aldagai hori barne-aldagaiaren azalgarri ona dela diogu.

4. **Estatistiko deskribatzaileak** (*Descriptivos*). Ekuazioan sartzen diren kasu kopurua, aldagaien batez besteko aritmetikoa eta desbiderapen estandarra, horrez gainera, korrelazio-matrizea esangura-maila enpiriko eta kasu kopuruekin.
5. **Korrelazio partziala** (*Correlaciones parcial y semiparcial*). Aukera honek beste aldagaien eraginik gabeko bi aldagaien arteko korrelazioa erakusten digu. Eredu anizkoitzean barne-aldagaiaren eta kanpo-aldagai baten arteko korrelazioari, besteen eragina ezabatu denean, korrelazio semipartziala esaten zaio. Bistan denez, hau determinazio-koefizientearen aldaketarekin erlazionaturik dago kanpo-aldagai berri bat ekuazioari eransten zaionean.
6. **Kolinealtasuna** (*Diagnóstico de colinealidad*). Kanpo-aldagai bat (edo batzuk) bestetuzen funtzio lineala denean, kolinealtasuna dagoela diogu. Kolinealtasuna dagoenean, bada, kanpo-aldagaien benetako ekarpena zein den zalantzakoa da.
7. **Hondakinak** (*Residuos*). Kasurik kasuko diagnostikoa eta Durbin-Watsonen testa.

2.9.2.2. Durbin-Watsonen testa

Linealtasunaren analisietan oso interesgarriak dira hondakinen gaineko estatistikoak, ikusi ahal izateko alborapenik dagoen ala ez. Durbin-Watsonen testa, funtsean, korrelazioaren inguruko hipotesi-test parametrikoa da. Hau da, hondakinen arteko korrelazioa esanguratsua den ala ez erabakitzeke erabiltzen da. Hipotesi-test parametrikoetan ohi moduan, hipotesiak eta testerako estatistikoa aurkezten dizuegu.

Hipotesi nulua, $H_0 \quad \rho = 0$

Ordezko hipotesi, $H_1 \quad \rho > 0$

Durbin-Watsonen estatistikoa:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

Durbin-Watsonen d estatistikoa muga jakinetik beherakoa bada, hipotesi nulua baztertzen dugu; beste muga jakinetik gorakoa bada, hipotesi nulua onartzen dugu eta, azkenik, aipatutako muga horien artekoa bada, zalantzan geratzen gara. Hondakinen arteko korrelazioa esanguratsua izateak adierazten du erregresioaren ereduan alborapenen bat badagoela. Hau da, erregresioaren eredua onargarria izateko ez da hondakinen artean korrelazio esanguratsurik izan behar. Durbin-Watsonen testean, beraz, hipotesi nulua onartzea bilatu behar dugu.

2.9.2.3. Grafikoak

Hondakinen estatistikoekin egin moduan, grafikoekin azter dezakegu eredu linealen egokitasuna.



II.3. irudia. Erregresio lineala SPSSn, grafikoen aukera.

Aukera honi buruz «erregresio linealaren adierazpide grafikoak» atalean hitz egin dugu, irakurleak han aurki ditzake honi dagozkion azalpenak (ikus 45. orrialdea)

2.9.2.4. Aldagaiak erregresio-analisan sartzeko prozedurak

Honako aukera hau metodo deritzan leihatilan agertzen zaigu. Kanpo-aldagai bi edo gehiago ditugunean erregresio-analisan berauek zein hurrenkeratan eta nola sartu, SPSSk lau aukera eskaintzen dizkigu:

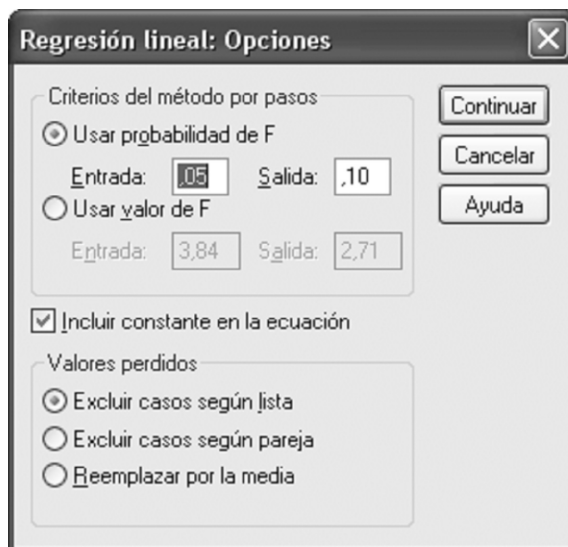
1. **ENTER (Introducir).** Aukera honetan erabiltzaileak ezarritako hurrenkeran aldagai guztiak sartzten dira.
2. **STEPWISE (pasos suc.).** Kanpo-aldagaiak urratsez urrats sartzten dira analisisan euren esanguraren arabera. Gero aztertuko dugu prozedura hau.
3. **REMOVE (Eliminar).** Esanguratsuak ez diren aldagaiak analisitik baztertzen dira.
4. **BACKWARD (Hacia atrás).** Hasieran aldagai guztiak sartzten dira ekuazioan eta gero bat bestearen segidan baztertzen dira. Barne-aldagaiarekin korrelazio partzial handieneko hori, hain zuzen, baztertzeko aurrena izaten da, baldin eta esanguratsua ez bada. Aldagai bat behin baztertuta, bigarrena ekuazioan geratzen den korrelazio partzial txikieneko hautatzen da aztertzeko ea esanguratsua den. Ez bada, baztertzen da. Aztertzeko aldagai gehiagorik geratzen ez denean, prozesua eten egiten da.

5. *FORDWARD (Hacia adelante)*. Aurrenik barne-aldagaiarekin korrelaziorik handiena, positiboa zein negatiboa, sartzen da ekuazioan, baldin eta jarritako irizpidea betetzen badu. Aurrenekoa sartuta, ekuazioan sartzeko hurrengo aldagaia, ez dauden artean, jakina, barne-aldagaiarekiko korrelazio partzial handienekoa izango da. Horrela jarraitzen du prozesuak harik eta irizpideak betetzen dituzten aldagai guztiak aztertu arte. Orduan eten egiten da.

Erabiltzaileak hautatu behar du prozeduratik egokiena bere ikerketaren helburuen arabera. Urratsez urratseko prozedura (*Stepwise*) hautatuz gero, kanpo-aldagaiak ekuazioan sartzeko eta ateratzeko irizpideak (probabilitateak) finkatu behar dira.

2.9.2.5. Kanpo-aldagaiak ekuazioan sartzeko hautapenak

SPSSren erregresio linealaren leihoan hautapenak (*Opciones...*) klikatzen badugu, kanpo-aldagaiak sartzeko eta ateratzeko probabilitate-mailak finka ditzakegu.



II.4. irudia. Urratsez urratseko prozedura, aldagaien sarrera eta irteerako probabilitateak.

Ekuazioan sartzeko kanpo-aldagai guztiek gaingitu behar dute gutxieneko tolerantzia-maila ($p > 0,0001$). Gerta daiteke kanpo-aldagai berri bat ekuazioan sartzean lehendik zegoen haietariko batek ez gaingitzea aipatu tolerantzia-maila. Kasu horretan aldagai hori ekuaziotik ateratzen da.

Erabiltzaileak erregresio-analisan prozedura bat baino gehiago erabil dezake.

2.9.3. Erregresio lineala R-n

Oso labur azalduko dugu nola egiten den erregresio linealaren analisia R erabiliz (*R Commander*).

Agindua:

```
RegModel.1 <- lm(E~B+D+var5, data=Errendimendu)
summary(RegModel.1)
```

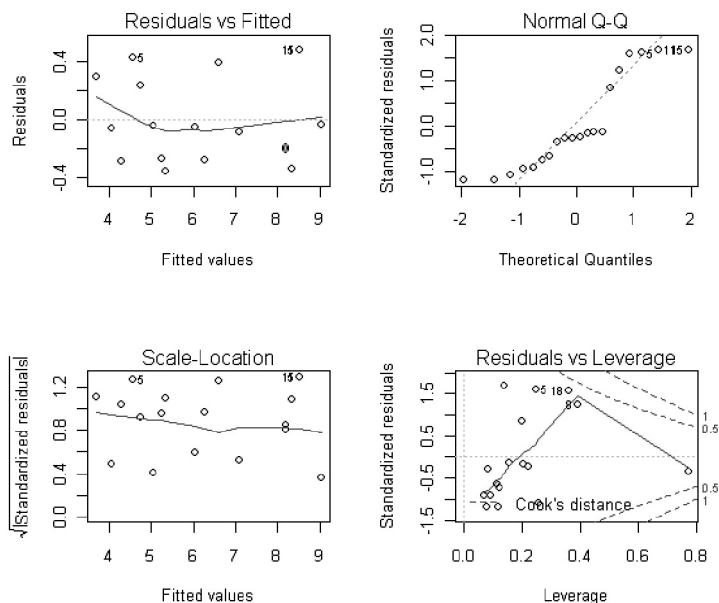
Ateraldia:

```
lm(formula = Errendimendua ~ Adina + Motibazioa + Eraldatze, data = Errendimendu)
Residuals:      Min       1Q   Median       3Q      Max
               -0.35282 -0.22469 -0.05825  0.25185  0.48263

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -0.91238    0.43072  -2.118   0.0502 .
            Adina     0.18195    0.01824   9.974 2.85e-08 ***
            Motibazioa 0.09803    0.01858   5.277 7.52e-05 ***
            Eraldatze  0.65136    0.04110  15.846 3.35e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.3093 on 16 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9757,    Adjusted R-squared:  0.9712
F-statistic: 214.2 on 3 and 16 DF, p-value: 4.003e-13
```

$\text{lm}(E \sim B + D + \text{var5})$



II.17. grafikoa. Erregresio linealaren grafikoak R-n.

2.10. EKUAZIO LINEALEN SISTEMEN EBAZPENA: CRAMERREN ARAUA

Demagun honelako ekuazio lineal multzoa:

$$\begin{aligned} b_1 x_{11} + b_2 x_{12} + \dots + b_j x_{1j} + \dots + b_p x_{1p} &= y_1 \\ b_1 x_{21} + b_2 x_{22} + \dots + b_j x_{2j} + \dots + b_p x_{2p} &= y_2 \\ &\dots // \dots \\ b_1 x_{n1} + b_2 x_{n2} + \dots + b_j x_{nj} + \dots + b_p x_{np} &= y_n \end{aligned}$$

Matrize moduan idatzita:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1(p-1)} & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & & & & x_{21} & x_{2p} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & & \dots & & x_{(n-1)(p-1)} & x_{(n-1)p} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{n(n-1)} & x_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ikusten denez, hiru matrize dauzkagu, hobe esanda, matrize-lauki bat eta bektore bi; X matrizea, B bektorea edo jakingaien bektorea, eta Y bektorea edo osagai askeen bektorea. Demagun sistema horrek honako ezaugarri hauek dituela:

1. Ekuazio guztiak linealak dira.
2. Aurreneko matrizea, X matrizea esango diogu, matrize-laukia da.
3. Jakingaiak, B bektorekoak, dauzkagun ekuazio adina dira.
4. X matrizearen determinanteak, $|X|$, zero ez den beste edozein balio hartzen du.

Ezaugarri horiek ematen badira, orduan, sistema ebatzi daiteke.

$$B = X^{-1} \cdot Y$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1(p-1)} & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & & & & x_{21} & x_{2p} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ x_{(n-1)1} & x_{(n-1)2} & & \dots & & x_{(n-1)(p-1)} & x_{(n-1)p} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{n(n-1)} & x_{np} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Eta hortik koefizienteak kalkulatzeko:

$$b_j = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & y_1 & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & \dots & y_2 & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{(n-1)1} & \dots & y_{(n-1)} & \dots & x_{(n-1)p} \\ x_{n1} & \dots & y_n & \dots & x_{np} \end{vmatrix}}{|X|}$$

Kalkuluetarako, beraz, X matrizean, b_j koefizienteen arabera, dagokion zutabea osagai askeko bektoreaz ordezkatu behar dugu eta matrize berri horren determinantea kalkulatu. Determinante horien eta X -ren determinantearen $|X|$ arteko zatidurak dira, hain zuzen ere, bilatzen ditugun koefizienteak.

3. Bariantza-analisisa

Bariantza-analisisa, singularrean, baino egokiagoa da bariantza-analisiak, pluralean, esatea, ez baita analisi mota bakarra analisi multzoa baizik. Edozein kasutan, analisi mota hauen guztien funtsa berbera da: aldakortasunaren deskonposaketa. Aldakortasun hitzak adierazten duen moduan, aldagaien aldaketaren berri ematen digunari dagokio. Horrexegatik, hain zuzen ere, analisi mota hauek diseinu esperimentaletan erabilienak dira, tratamenduak ekar ditzakeen aldaketen berri eman diezaguketelako. Bariantza-analisiaren bitartez, kasu askotan, diseinu esperimentala egokia denean, aldaketaren zioa edo sorburua antzeman dezakegu. Testu honetan bariantza-analisisen oinarri estatistikoak landuko ditugu eta, bide batez, diseinu esperimental batzuk ere.

Bariantza-analisisa, ikuspegi estatistikotik, hipotesi-testaren orokorpenzat har dezakegu. Dena den, hipotesi-testetan, estimagailuak eta laginak dira analisiaren oinarriak. Erregresio linealean, berriz, kanpo- eta barne-aldagaiak; eta bariantza-analisietan, oster, taldeaz, mendeko aldagaiak eta aldagai askeaz mintzatuko gara. Edozelan ere, oinarri-oinarrian aipatu analisi guztiek antzeko sorburua daukate. Nabarduraren bat aipatzekotan, bariantza-analisiari dagokionez, kausa-efektu ereduari gehien hurbiltzen zaiona dela esango genuke.

Esperimentuetan, oro har, denboraren jarioan gertatzen diren aldaketak izan ohi dira ikertzailearen aztergaiak. Ikertzaileak esperimentua diseinatzen du, eta plan jakinaren arabera, une jakin batean biltzen ditu datuak, une horretan esperimentuetan parte hartzen duten subjektuak eta taldeak baliokidetzat jotzen ditu. Hori horrela, bildutako datuetan espero ez zitekeen diferentziarik agertuko balitz, esperimentuaren tratamenduak ekarritakoak direla ondorioztatuko genuke, halabeharrez. *Aurrekoak ondorengo* dakarrela, esan ohi da; aurreko hori zertan den jakinez gero, aurrekaria kontrolatzen badugu, ondorioa nolakoa izan daitekeen antzeman dezakegu. Erraza dirudi baina, errealitatean, guk nahi izanda ere, analisi estatistikoak ezin ekar diezaguke horrenbesteko zehaztasunik. Estatistikaren ahulezia da. Bariantza-analisiak ere ez dio zehaztasun ezari ihes egiten. Tresna eraginkorra eta emankorra da, dudarik ez, baina test parametrikoez dituzten muga bertsuak ditu analisi mota honek. Ikertzaileak esperimentuetan jardun izanagatik, errore-iturriak aurkitzen ditu-eta. Oro har, bariantza-analisiak erabiltzen ditugunean, aldagaiak eta gertaerak zoriaren arabekoak ote diren jakin nahi dugu, datuak aztertutik zoriaren arabera azaltzerik ez badago, orduan, esan ohi dugu, aldagai askeak

azaltzen duela. Oro har, bariantza-analisietan, besteak beste, hiru aldagai mota bereizten ditugu:

- *Aldagai askea*: ikertzaileak kontrolatzen duen aldagaia da. Haren banaketa ezaguna da, ez da zoriz banatzen, beraz. Aldagai askea, oro har, kategoriazko aldagaia da. Haren neurriak eta ezaugarriak ikertzaileak lantzen ditu alde aurretik egindako diseinuaren arabera. Oinarritzko bariantza-analisietan mailatan (kategoriatan) emana dago, are zehatzago, ikertzaileak zehaztutako maila finkoetan. Aldagai askeak edo faktoreak, jakina, bat edo gehiago izan daitezke diseinu esperimentalaren arabera, eta X (edo $X_1, X_2, \dots$) hizkiaren bitartez izendatu ohi dira. Gehienetan, orde, faktoreaz hitz egiten dugunean, $A, B, \dots$, letrak, alfabetoaren hurrenkeran, erabili ohi dira beraiek izendatzeko.
- *Mendeko aldagaia*: ikertzaileak aztertu nahi duen aldagaia. Ikertzaileak ez du kontrolatzen eta zoriz banatzen da. Bariantza-analisietan, mendeko aldagaietan behatutako aldakortasuna ea zein neurritan dagokion zoriari eta zein neurritan aldagai askearen eraginari aztertzen dugu. Aldagai askeen moduan, mendeko aldagai bat, bi edo gehiago izan daitezke diseinuaren arabera; notazioari dagokionez, Y (edo $Y_1, Y_2, \dots$) hizkiak adierazten dira.
- *Aldagai arrotza*: izenak adierazten duen moduan, ikerketan ez da zuzeneko aztergaia baina, neurri batean edo bestean, artez edo moldez, mendeko aldagaian eragin dezake. Ikertzaileak aldagai arrotza kontrolpean izan behar du eta, ahal den neurrian, haren eragina ezabatu.

Horiek dira, oro har, bariantza-analisietan ager daitezkeen aldagai motak. Ezin ahanzi dezakegu mendeko aldagaia dela gure analisiaren xedea. Hobeto esanda, mendeko aldagaiaren aldakortasuna da bariantza-analisiaren ernamuina. Oinarriak oinarri, ANOVA, ingelesezko *ANalysis Of VAriance* izenaren laburdura, edo bariantza-analisiaren teknika eta kalkulu-prozedurak azalduko ditugu.

3.1. ANOVA, FAKTORE BAKARRA, ERAGIN FINKOAK

Oro har, bariantza-analisiak erabili ahal izateko, lau baldintza bete behar dira:

1. Erabiltzen dugun lagina, edo puntuazioak, zorizkoak izan behar dira.
2. Datuen jatorrizko populazioak estatistikoki normalak izan behar dira.
3. Talde guztien bariantzak (σ^2) baliokideak izan behar dira (*homozedastizitatea*).
4. Taldeak, edo laginak, elkarren artean independenteak izan behar dira.

Bariantza-analirik sinpleenean aldagai aske bakarra (X) daukagu. Aldagai hori, esan moduan, kategoriazko aldagaia da. Hau da, alde aurretik zehaztutako k

maila desberdinetan emana dagoela. Esandako k hori, aldagai askearen kategoria kopurua, bat dator talde esperimental kopuruarekin. Horrela, aldagai askeko j . maila bakoitzera n subjektu biltzen da eta talde bakoitzak dagokion tratamendua hartzen du. Orduan, Y_{ij} aldagaiaren balio sorta izango dugu non, hurrenez hurren, $i = 1, 2, \dots, n$. pertsonak diren eta $j = 1, 2, \dots, k$ aldagai askeko maila desberdinak diren. Azpindize horiek, ij , taldea (j) eta pertsona edo kasua (i) zehazten dute, beraz. Oro har, hurrengo egiturako taulan adierazten ditugu:

III.1. taula. *Bariantza-analisirako taula (ANOVA).*

ALDAGAI ASKEA, KATEGORIAK	MENDEKO ALDAGAIAREN PUNTUAZIOAK	GUZTIRA (T_j)
a_1	$Y_{11} \quad Y_{21} \quad \dots \quad Y_{i1} \quad \dots \quad Y_{n1,1}$	$T_{.1}$
a_2	$Y_{12} \quad Y_{22} \quad \dots \quad Y_{i2} \quad \dots \quad Y_{n2,2}$	$T_{.2}$
$\dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots \quad \dots$
a_j	$Y_{1j} \quad Y_{2j} \quad \dots \quad Y_{ij} \quad \dots \quad Y_{nj,j}$	$T_{.j}$
$\dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots \quad \dots$
a_k	$Y_{1k} \quad Y_{2k} \quad \dots \quad Y_{ik} \quad \dots \quad Y_{nk,k}$	$T_{.k}$
GUZTIRA (T_i)	$T_{.1} \quad T_{.2} \quad \dots \quad T_{.i} \quad \dots \quad T_{.n}$	$T_{..}$

Taula horretan, errenkadak aldagai askeko mailai dagozkie ($a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_{k-1}, a_k$), datuen bigarren azpiindizeak (j) zehazten ditu, beraz, aldagaiaren kategoria. Taulako zutabeak, berriz, esperimentuko subjektuei dagozkie, aurreneko azpiindizeak (i) talde bakoitzean zenbatgarren pertsona edo kasua den zehazten du, beraz. Horrela, azpiindizean « j » agertzen denean, errenkadak bakarrik aipatzen dira; « i » agertzen bada, ostera, aipatuak zutabeak dira, eta, azkenik, « $..$ » azpiindizeak puntuazio orokorra dela adierazi nahi du. Horrela, kasu baterako, Y_{21} puntuazioa aldagai askeko lehenengo maila ($j = 1$), kategoria edo tratamenduari dagokio — bigarren azpiindizea —, eta taldeko bigarren ($i = 2$) pertsonari —lehenengo azpiindizea— dagokio. Hau da, aldagai askearen lehenengo kategoriako bigarren pertsonari mendeko aldagaiaren, Y_{21} puntuazioa dagokio.

Dena den, datuen aurkezpeneko modua alda daiteke. Batzuetan, aldagai askearen mailak errenkadetan agertu beharrean, zutabeetan agertzen dira, eta, aitzitik, pertsonak zutabeetan barik errenkadetan. Jarraian, aurreko taula bera agertzen dizuegu, biratua.

III.2. taula. Saio esperimentalerako egitura-aula.

MENDEKO ALDAGAIAREN PUNTUAZIOAK	ALDAGAI ASKEA, MAILAK	GUZTIRA (T_i)
	$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_j \quad \dots \quad a_k$	
1	$Y_{11} \quad Y_{12} \quad \dots \quad Y_{1j} \quad \dots \quad Y_{n1,1}$	$T_{.1}$
2	$Y_{21} \quad Y_{22} \quad \dots \quad Y_{2j} \quad \dots \quad Y_{2k}$	$T_{.2}$
...	...	...
i	$Y_{i1} \quad Y_{i2} \quad \dots \quad Y_{ij} \quad \dots \quad Y_{ik}$	$T_{.i}$
...	...	...
n	$Y_{n1,1} \quad Y_{n2,2} \quad \dots \quad Y_{nj,j} \quad \dots \quad Y_{nk,k}$	$T_{.n}$
GUZTIRA (T_j):	$T_{.1} \quad T_{.2} \quad \dots \quad T_{.j} \quad \dots \quad T_{.k}$	$T_{..}$

Datuak modu batera zein bestera agerturik, gauza bera da. Taula horietan, T balioak, beste aldetik, guztirako baturak dira, T_j aldagai askeko kategoriei dagozkienak, T_i pertsona multzoei dagozkienak, eta $T_{..}$ puntuazio guztien baturari dagozkiona. Horrela, aldagai askeko kategoria bakoitzari, edo maila bakoitzari, berdindio, batez besteko bana dagokio: $\bar{Y}_{.j}$. Eta talde osoari, datu guztiei, batez besteko aritmetiko orokorra: $\bar{Y}_{..}$.

Diseinu esperimentaletan, esan moduan, aldagai askearen mailak tratamendu mota desberdinei dagozkie. Maila horien arabera, hain zuzen ere, zedarritzen dira talde esperimentalak. Talde esperimentalak, bada, tratamendu desberdinak hartzen dituzten pertsona multzoak dira.

3.2. EGITURAKO EKUAZIOA

Bariantza-analisien oinarri-oinarrian, pertsona baten puntuazioa (Y_{ij}) hiru osagaien arabera azaltzen dugu: batez besteko aritmetikoa (μ), faktorearen ekarpena (α_j) eta errore-maila (ε_{ij}). Beste era batera idatzita:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

Egiturako ekuazio horretan:

1. (Y_{ij}) puntuazioak elkarrekiko independenteak dira eta banaketa normalaren arabera banatzen dira $\text{---}N(\mu, \sigma^2)\text{---}$.
2. (ε_{ij}) erroreak, era berean, elkarrekiko independenteak dira eta banaketa normalaren arabera banatzen dira $\text{---}N(0, \sigma^2)\text{---}$.

Eta ondorengo hau betetzen da:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n n_j \alpha_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n n_j (\mu_j - \mu) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n n_j \mu_j - \mu \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n n_j = n\mu - n\mu = 0$$

Erroreak, esan moduan, normaltasunez banatzen dira eta haien itxaropen matematikoak zero balio du, bai puntuazio guztien kasuan bai talde bakoitzean. Ikus dezagun:

$$E(\bar{\varepsilon}_{ij}) = E\left[\frac{\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}}{kn_j}\right] = \frac{\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n E(\varepsilon_{ij})}{kn_j} = 0 \quad \text{Izan ere:} \quad E(\varepsilon_{ij}) = 0$$

Talde esperimentalen kasuan:

$$E(\bar{\varepsilon}_j) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}}{n_j}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n E(\varepsilon_{ij})}{n_j} = 0 \quad \text{Izan ere:} \quad E(\varepsilon_j) = 0$$

Hondakinen bariantzak puntuazio guztietan eta taldeetan, hurrenez hurren:

$$E(\bar{\varepsilon}_{ij}^2) = \text{var}(\bar{\varepsilon}_{ij}) + [E(\varepsilon_{ij})]^2 = \text{var}(\bar{\varepsilon}_{ij}) = \frac{\sigma^2}{kn_j}$$

$$E(\bar{\varepsilon}_j^2) = \text{var}(\bar{\varepsilon}_j) + [E(\varepsilon_j)]^2 = \text{var}(\bar{\varepsilon}_j) = \frac{\sigma^2}{n_j}$$

3.3. PARAMETROEN ESTIMAZIOA

Batez besteko aritmetiko orokorra (μ), k populazio desberdinetan zatitutako puntuazio guztien batez besteko haztatu gisa uler dezakegu, haztaper-neurriak $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ direla. Hau da:

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^k n_j \mu_j}{N}$$

Hori horrela, batez besteko aritmetiko orokorra, taldeetako batez bestekoak eta faktorearen ekarpena, parametroen estimagailuak — μ , μ_j eta α_j —, honako hauek dira:

Puntuazio guztietan: $\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Y_{ij}}{kn} = \bar{Y}_{..}$

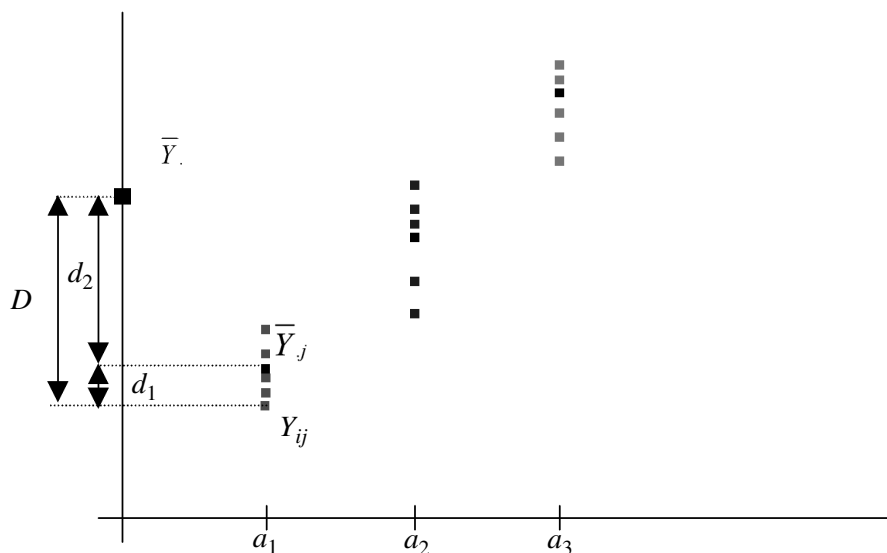
Taldeetan: $\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{ij}}{n_j} = \bar{Y}_{.j}$

Faktorearen ekarpena: $\hat{\alpha}_j = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{ij}}{n_j} - \bar{Y}_{..} = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$

Azkenik, errorea edo hondakina (ε_{ij}), norbanakoaren ekarpena da, ikertzailearentzat, zorizkoa edo sorburu jakinik gabeko ekarpena. Erroreak (ε_{ij}), berez, elkarren artean independenteak dira, banaketa normalaren arabera banatzen dira $-N(0, \sigma^2)$ —.

3.4. ALDAKORTASUNAREN DESKONPOSAKETA

Faktore bakarreko bariantza-analisan, aldagai aske bakarra denean, bi aldakortasun-sorburu dauzkagu: taldeen artekoa eta talde esperimental bakoitzarena edo talde barnekoa. Biak batuta aldakortasun orokorra osatzen dute. Demagun, hamabost pertsona ($N = 15$) dauzkagula tamaina berdineko ($n_1 = n_2 = n_3 = 5$) hiru ($k = 3$) taldetan banaturik, eta talde bakoitzak (a_1 , a_2 eta a_3) berariazko tratamendua hartu duela. Grafikoki honela adieraz dezakegu:



III.1. grafikoa. Faktore bakarreko ANOVA, aldakortasunaren deskonposaketa.

Abzisan, aldagai askeko kategoriak edo faktoreko mailak (a_1 , a_2 eta a_3) dau-
de, taldeak direla esan dezakegu. Hartzen badugu lehenengo taldeko kasu bat (Y_{ij}),
hori bere taldeko batez besteko aritmetikotik ($\bar{Y}_j$) distantzia jakin batera dago (d_1),
eta taldearen batez besteko hori, bere aldetik, batez besteko orokorretik ($\bar{Y}_{..}$) beste
distantzia jakin batera dago (d_2). Bi distantzia horien batura da, hain zuzen ere,
kasu horren (Y_{ij}) eta puntuazio guztien batez besteko orokorraren ($Y_{..}$) artean
dagoen distantzia (D). Oro har, honela idatz dezakegu:

$$D = d_1 + d_2$$

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}) = (Y_{ij} - \bar{Y}_j) + (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})$$

Lehenengo distantzia (d_1) taldeari dagokio, talde barneko aldakortasunaren
sorburua dela esaten diogu. Bigarren distantzia (d_2), berriz, taldeen artekoari
dagokio, horregatik, hain zuzen ere, talde arteko aldakortasunaren sorburua dela
esaten diogu. Aldakortasun orokorra (SCT), orduan, bi aldakortasun-sorburu
horien arabera:

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [(Y_{ij} - \bar{Y}_j) + (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})]^2$$

Batuketaren berbiduraren ekuazioa garatzen badugu:

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..}) \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_j) + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})^2$$

Edozein datu multzoen distantzien batura zero delarik: $\sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_j) = 0$
($j = 1, 2, \dots, k$)

Hori horrela, ekuazioa honela geratzen zaigu:

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})^2$$

Arestian esan dugunez, gogoan izan, mendeko aldagaiaren (Y) aldakortasuna
aztergai dugula. Aldakortasun hori, bada, bi osagaitan bereiz daiteke: maila edo
taldeen arteko aldakortasuna (SCA) eta talde barneko aldakortasuna (SCE).
Aurrenak, A faktoreak ekarritako aldakortasuna edo taldeen arteko aldakortasunak,
aldagai askeko mailen arteko aldakortasuna adierazten du. Bigarrena, azaldu
gabeko aldakortasuna edo errorea da eta subjektuen arteko aldakortasuna adieraz-
ten du. Ikus dezagun:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$$

$\downarrow$ TALDE BARNEKO ALDAKORTASUNA $\downarrow$ TALDEEN ARTEKO ALDAKORTASUNA
ALDAKORTASUN OROKORRA

Ekuazio horretan laburbiltzen da, hain justu, bariantza-analisiaren ernamuina. Aldakortasun orokorrak (*SCT*), distantzien berbiduren baturak, puntuazio guztien aldakortasuna adierazten du. Aipatu berbiduren baturak, ikus daitekeenez, hurrenez hurren, talde barneko aldakortasuna (*SCE*) eta taldeen arteko aldakortasuna (*SCA*) dira. Notazioari dagokionez, erdarazko laburdurak erabiltzea hobetsi dugu: *Suma de Cuadrados Total* (*SCT*), *Suma de Cuadrados del Error* (*SCE*) eta *Suma de Cuadrados del factor A* (*SCA*). Zoriz taldeetara egotziak izan diren subjektuak —*estadistikoki*— baliokideak dira-eta. Talde bakoitzean —talde barnean— beha daitekeen aldakortasuna norbanakoaren ezaugarriak ekarria edo, horretaz ezer gutxi dakigulakoan, zoriak eragindakoa dela hartzen dugu. Taldeen artean behatutakoa, ostera, tratamenduak eragindakoa izan daitekeela hartzen dugu, aldagai askearen mailak —neurriak edo kategoriak— gure kontrolpean daudelako.

Horrela, errorea ahalik eta txikiena izatea bilatzen dugularik, aldakortasun orokorra eta berorren osagaiak dagokion populazioarekiko adierazgarriak izan daitezen bilatu behar dugu. Abiaturua behin jarrita, aldakortasun desberdinen kalkuluetarako prozedura zehaztea baino ez dugu egin behar. Hurrenez hurren horrela kalkulatzen ditugu:

ALDAKORTASUN OROKORRA, *SCT*:

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2}{N} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - \frac{1}{kn} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2 \quad \text{VII.37.2}$$

TALDEEN ARTEKO ALDAKORTASUNA, *SCA*:

$$SCA = \left[\sum_{j=1}^k \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2}{n_j} \right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2}{N} = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right] - \left[\frac{1}{kn} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2 \right] \quad \text{VII.37.3}$$

TALDE BARNEKO ALDAKORTASUNA (HONDAKINAK), *SCE*:

$$SCE = \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 \right) - \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right] \quad \text{VII.37.4}$$

Aldakortasun-adierazleak edo berbiduren baturak, beraz, aldakortasun orokorra (*SCT*), tratamenduak azaldutako aldakortasuna (*SCA*) eta azaldu gabeko aldakortasuna (*SCE*) dira. Aldakortasun-adierazle horietatik abiatuta bariantzak kalkulatu ditugu.

3.5. BERBIDUREN BATURETATIK BARIANTZEN KALKULURA

Edozein ikerketaren xedea, ahal dela, errealitatea bere horretan ezagutzea da. Hau da, ikertzaileak populazio osoa, populazioaren parametroak, ezagutu nahi dituela esan genezake. Halere, kasurik gehienetan hori ezinezkoa da populazioa handiegia delako, haren mugak zehatz-mehatz ezagutzen ez ditugulako edo, besterik gabe, nahiko baliabiderik ez daukagulako populazioa bere osotasunean aztertzeke. Gauzak horrela, errealitatea laginen bitartez ikertu behar dugu. Eta laginetatik populazioetara dagoen aldea ez da, bakarrik, tamainaren diferentzia. Horrek bere garrantzia badu, jakina, populazioa laginekin alderatuz gero, populazioa beti heterogeneoagoa baita. Populazioaren bariantzak laginekoak baino handiagoak dira, beti. Konstatazio horretatik abiatuta argi dago, populazioaren bariantza benetan ezagutu nahi badugu, zuzenketaren bat egin behar dugula. Arazo horri konponbidea emateko, Fisikatik askatasun-graduak kontzeptua hartu da; objektu bat lerrozuzenean mugi badaiteke, askatasun-gradu bat dauka, planoan mugi badaiteke bi askatasun-gradu, eta horrela. Hau da, ANOVA analisi-tekniken interpretazioa, interpretazio geometrikoa da.

Bariantza, oro har, aldakortasunaren batez besteko adierazle gisa har daiteke, kasu honetan, zehatz-mehatz, askatasun-gradu bakoitzeko izaten den aldakortasun kopurua da. Batez besteko aritmetikoa estimagailu albora gabekoa bada ere, populazio-mailako bariantza estimatzean unitate bat kendu behar diogu laginaren tamainari ($N-I$). Horiek ($N-I$) dira, hain zuzen ere, aldakortasun orokorraren kasuan dauzkagun askatasun-graduak. Taldeen arteko aldakortasunari, talde kopurua (k) ken unitate bat askatasun-gradu ezartzen diogu eta, azkenik, talde barneko aldakortasunaren kasuan subjektu kopuru osoa (N) ken maila kopurua (k). Azken buruan, talde bakoitzean behatzen dugunak estimazio bana lekarkiguke eta horrek bere aldetik askatasun-gradu bana galtzea dakar. Horrela, honako hau betetzen da:

$$LG_{\text{OROKORRA}} = LG_{\text{TALDEARTEKOAK}} + LG_{\text{TALDEBARNEKOAK}} \quad kn-I = (k-I) + k(n-I)$$

Bariantza-analisia taula batera (ANOVA) laburbiltzen da:

III.3. taula. *Bariantza-analisirako ebazpen-aula.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
Talde edo mailen artekoa	SCA	$k - 1$	$MCA = SCA / (k - 1)$	$F = \frac{MCA}{MCE}$
Talde barnekoa edo hondakinak	SCE	$N - k$	$MCE = SCE / (N - k)$	
GUZTIRA	SCT	$N - 1$		

Ikusten denez, MCA eta MCE berbiduren batez bestekoak edo batez besteko koadratikoak dira. Bariantza horietan, bistan da, faktoreko maila kopuruak (k) eta laginaren tamainak (N) eragiten dute. Taldeen arteko aldakortasuna (tratamenduaren eragina adierazten duena, MCA) talde barneko aldakortasuna (errorea adierazten duena, MCE) baino handiagoa bada tratamenduaren eragina dela pentsa dezakegu. Dena den, MCA eta MCE direlakoen arteko diferentzia esanguratsua denetz ebazteko taularen azken zutabeko F estatistikoa erabiltzen dugu.

3.6. HIPOTESIAK, F TESTA ETA ERABAKI ESTATISTIKOA

Bariantza-analisan, oro har, taldeen batez bestekoak baliokideak diren ala ez jakin nahi dugu. Horrela, abiaburuko hipotesi nulua hau da: $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_j = \dots = \mu_{k-1} = \mu_k$. Adiera berean, talde guztietan faktorearen eragina berdina dela esan dezakegu: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_j = \dots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = 0$. Hipotesi honen arabera, k populazioak batez besteko baliokideak izango dituela itxaron daiteke, nahiz eta tratamendu desberdinak izan.

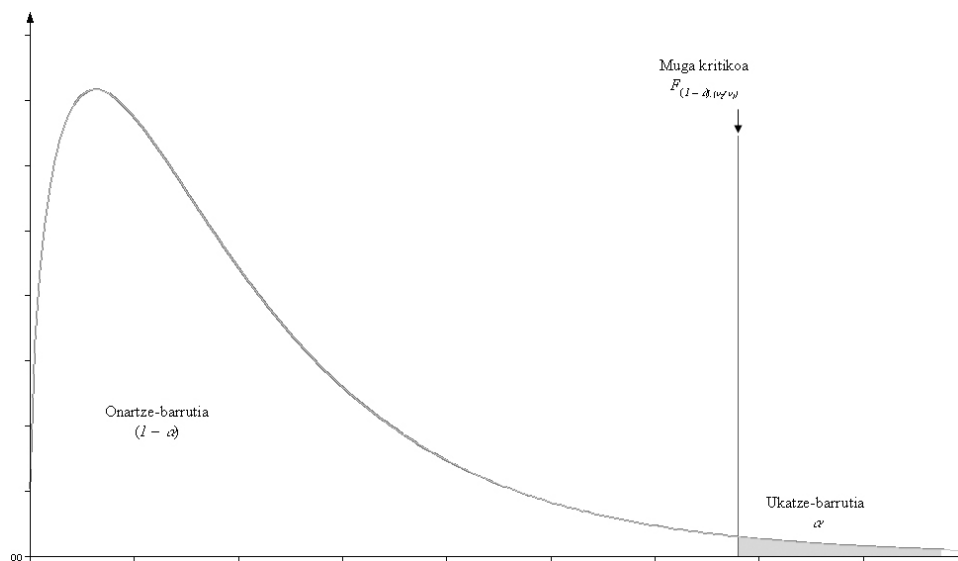
ANOVAren testa Fisherren F da eta, kasu honetan, beti eskuinaldeko testa da. Erabaki estatistikoa, funtsean, probabilitate-maila jakinaren arabera, hipotesi nulua onartzea ala ukatzea besterik ez da. Hipotesi nulua, berez, benetakoa ala faltsua izan daiteke. Benetakoa denean eta onartzen badugu —erabaki zuzena—, k populazioak baliokideak direla eta tratamenduek eraginik ez daukatela, ondorioztatzen dugu. Gerta daiteke hipotesi nulua faltsua izatea eta, hala ere, onartzea —erabaki okerra, II. motako errorea—. Kasu horretan, ondorio berdinerira iristen gara. Hipotesi nulua, berez, ukatzen badugu faltsua denean —erabaki zuzena—, k populazio guztiak ez direla baliokideak eta tratamenduek eraginaren bat izan dutela ondorioztatzen dugu. Azkenik, hipotesi nulua ukatzen badugu benetakoa denean —erabaki okerra, I. motako errorea—, tratamenduek eraginaren bat izan dutela onartuko dugu. Ondorengo taulan azaltzen ditugu aipatu lau aukerak, erroreak eta dagozkion probabilitate-mailak.

		Berezko egoera	
		H_0 <u>benetakoa</u> da	H_0 <u>faltsua</u> da
Erabaki estatistikoa	H_0 <u>ukatu</u>	Erabaki okerra . I. motako errorea. (α)	Erabaki zuzena Testaren indarra ($1 - \beta$)
	H_0 <u>onartu</u>	Erabaki zuzena Konfiantza-maila ($1 - \alpha$)	Erabaki okerra II. motako errorea. (β)

Gogoan izan behar dugu erabaki estatistikoa probabilitatezko erabakia dela. Hau da, beti egongo da probabilitate-maila jakin bat, oso txikia bada ere, guk hartutako erabakiaren aurkakoari dagokiona. I. motako erroreak α probabilitate-maila dagokio; probabilitate-maila hori, hain zuzen ere, ikertzaileak ezartzen du, izan daiteke oso handia, 0,25 – 0,30 bitartekoa, edo oso txikia, 0,01 edo txikiagoa. Ikertzaileak irizpide desberdinak erabil ditzake α -ren balioa finkatzeko, gehienetan ikuspegi teorikoak edo egoerari dagozkionak. Adibidez, ez da gauza bera ikasleen-tzako programaren egokitasunaren gainean erabakitzea edo buru-osasunaren gainean erabakitzea. Lehenengo kasuan malgutasun handiagoz erabaki dezakegu. Bigarren kasu horretan, berriz, zorrotzago, kontserbadoreago jokatu dugu eta, beraz, α balio txikiagoak erabiliko ditugu. Beste alderditik, laginaren tamainak, edo pertsona kopuruak, eragin handia dauka, lagin txikiekin α handiagoak (0,10 ingurukoak) erabiltzea justifikagarria izan daiteke. Erabaki estatistikoa, azken finean, ikertzailearen ardurapean dago.

Test estatistikoa erabakiak hartzeko lanabes gisa uler dezakegu. Egoera jakinean, lagin tamaina jakin batekin eta probabilitate-eredu ezagunaren arabera, hipotesi nulua onartzeko edo ukatzeko erabakitzen laguntzen digun tresna gisa, alegia. ANOVAREN testerako estatistikoa, esan dugunez, F estatistikoa da, bariantzen arteko ratioa, hain zuzen. F -ren balioen artean muga jakin batetik haragokoa ote den jakin nahi dugu. Muga kritikoa, F -ren probabilitate-banaketan, erabiltzen ditugun α eta askatasun-graduen arabera izango da. F banaketaren izaera eta taulen erabilera xeheago eta zabalago azalduta dago probabilitate-taulen kapituluan.

Grafikoan ikus daiteke erabaki estatistikoa hartzeko erabili ohi den probabilitate-eredua. Kalkulatzen dugun F muga kritikotik ezkerrean suertatzen bada, onartze-barrutian, hipotesi nulua onartzen dugu eta muga kritikotik eskuinaldean suertatzen bada, ukatze-barrutian, hipotesi nulua baztertzen dugu.



III.2. grafikoa. F banaketa, onartze- eta ukatze-barrutiak.

3.7. BATEZ BESTEKO ARITMETIKOEN ARTEKO ERKATZE ANIZKOITZA

ANOVAren testak (F) taldeen artean diferentzia esanguratsuren bat ote dagoen adierazten digu, baina ez digu zehazten diferentzia hori zein den. Hau da, k taldeen artean, nahikoa da bi taldeko batez bestekoen arteko diferentzia esanguratsua izatea hipotesi nulua baztertzeko, nahiz gainerako taldeen batez bestekoak baliokideak izan.

Hori horrela, ANOVA analisisian hipotesi nulua baztertzen dugunean, taldeen arteko diferentzia esanguratsuak zein diren jakiteko analisiaren osteko testak egin behar ditugu, *post hoc* testak alegia. Test hauek, oro har, batez bestekoak binan binan erkatzen digu.

Liburu honetan *post hoc* test horietako hiru aztertuko ditugu: Tukeyren *HSD*, Schefféren testa eta Dunnetten testa.

3.7.1. Tukeyren *HSD* testa

Tukeyren testa, *Honestly Significantly Different (HSD)*, taldeen batez bestekoak elkarren artean erkatzeko erabiltzen da. Kontsideratzen da $\sqrt{MCE}$ zorizko

aldagaia dela eta k , talde kopurua, aldagaiak elkarren independenteak eta normaltasunez banatzen direla.

$$\sqrt{MCE} \text{ aldagaiaren banaketa: } \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n-k}} \right) \chi_{n-k}^2$$

Horren arabera, batez bestekoen arteko diferentziak aztertu daitezke estatistiko honekin:

$$ts = \frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{\frac{MCE}{n_h}}}$$

Ezagutzen dugu estatistiko horren banaketa, kasuan kasuko askatasun-graduak eta finkatutako α -ren arabera, batez besteko guztien arteko erkaketak, binan-binan, egin ditzakegu taldeen arteko diferentziak non dauden jakiteko.

3.7.2. Schefféren testa

Henry Scheffé (1953) beste prozedura bat proposatu zuen taldeen arteko diferentziak aztertzeko. Funtsean, zorizko aldagai independente eta normalen arteko konbinazioa, berez, beste zorizko aldagai normala da. Horrela, batez bestekoen erkaketa-multzoaren populazioa halako konbinazio-lineal gisa defini daiteke non talde bakoitzari haztapen-neurri jakina dagokion. Horren arabera, emandako α -ren balioetarako diferentzia minimo esanguratsua kalkula dezakegu.

$$\frac{|\bar{Y}_j - \bar{Y}_i|}{\sqrt{MCE \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i} \right)}} \geq \sqrt{(k-1) F_{(1-\alpha), (k-1), (n-k)}}$$

3.7.3. Dunnetten testa

ANOVAren F testa esanguratsua denean, taldeak kontrol-taldearekin erkatzeko testa da. Kasu honetan, erkaketak ez dira independenteak guztiak kontrol-taldearekiko egiten direlako. Horrela, erkaketa kopuru posiblea $k-1$ izango da. Honela kalkulatzen da:

$$T_j' = \frac{|\bar{Y}_j - \bar{Y}_c|}{\sqrt{\frac{2MCE}{n}}}$$

4. Diseinuak

4.1. FAKTORE BAKARREKO TALDE ARTEKO DISEINUA

Labur bada ere, bariantza-analisiaren oinarriak zertan diren azaldu dugu. Aurrerantzean bariantza-analisi batzuk azalduko ditugu. Analisi horien kasurik sinpleena, faktore bakarra eta eragin finkoak deitzen dena da. Kasu horretan, talde esperimentalak tamaina berekoak dira ($n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_j = \dots = n_k$). Horregatik, hain zuzen ere, diseinu orekatua dela esaten da. Analisi horri ere, norabide bakarreko bariantza-analisia (*ONEWAY*) esaten zaio.

4.1.1. Zorizko talde anitzeko diseinua

Diseinu esperimental honetan kontrolatzen den aldagaia (aldagai askea) aldagai bakarra da. Aldagai hori, bi baino maila gehiagotan banaturik dago eta maila, edo tratamendu, bakoitzari talde bana datzekio. Dagokion analisi estatistikoa norabide bakarreko bariantza-analisia da (*AVAR*, *ONEWAY*). Teknika parametrikoko horri dagokionez, ohiko aurretikoak betetzen direla suposatzen dugu:

1. Pertsonak edo subjektuak zoriz hautatu izan direla.
2. Talde esperimentalei, pertsonak edo subjektuak zoriz esleitu zaizkiela.
3. Eta, azkenik, talde esperimental bakoitzari dagokion tratamendua, edo aldagai askearen maila, zoriz egotzi direla.

Horrela egiten badugu, talde esperimentalak berez baliokideak direla jotzen dugu eta, haien artean diferentziaren bat balego, tratamenduak ekarritakoa litzatekeela ondorioztatzen dugu. Analisi hauetan abiapuntuko hipotesi nuluak adierazten du taldeen batez bestekoak populazio berekoak edo antzeko populazioetatik eratorritakoak direla. Horrela, k talde izango balira, hipotesi nulua honela idatziko genuke:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_j = \dots = \mu_{k-1} = \mu_k$$

Norabide bakarreko bariantza-analisia, funtsean, populazio bereko bi estimazio independenteren elkarren arteko azterketa da; hipotesi nulupean (H_0), hori bai, bariantza baliokidekoak izan beharko lirateke. Populazioaren bariantza estimatzeko abiaburua, beraz, tratamendu —maila— taldeen batez bestekoak ditugu. Horrela, **TALDE ARTEKO BARIANTZA** kalkulatzeko:

$$MCA = S_t^2 = \frac{\sum_{j=1}^k (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2}{k-1} \rightarrow \sigma_t^2$$

k tratamendu edo maila kopurua

$\bar{Y}_j$ j . mailaren batez besteko aritmetikoa

$\bar{Y}$ batez besteko aritmetiko orokorra

Bestalde, tratamenduen ekarpenetik harago, zoriaren eraginak dakarren bariantza zenbatekoa den jakin behar dugu. Horretarako, talde bakoitzaren barnean dagoen aldakortasuna aztertu behar dugu, hots, **TALDE BARNEKO BARIANTZA** kalkulatu behar dugu.

$$MCE = S_e^2 = \frac{\sum_i (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2}{k(n-1)} \rightarrow \sigma_e^2$$

Y_{ij} i . subjektuaren puntuazioa j tratamenduan

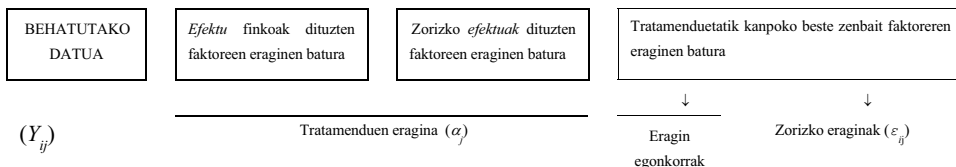
n talde bakoitzaren subjektu kopurua

Horiek horrela, talde arteko bariantza (MCA) A faktoreak ekarritakoa da, bariantza azaldua da, beraz. Talde barneko bariantza (MCE), berriz, errorea edo hondakinei dagokiena da, azaldu gabeko bariantza. Bien arteko ratioak (F) adierazten digu faktoreak azalduetakoa esanguratsua den ala ez.

$$F = \frac{S_t^2}{S_e^2} = \frac{MCA}{MCE}$$

4.1.2. Bariantza-analisia, ereduaren egitura

Aldagai askearen eta mendeko aldagaiaren arteko erlazio posiblearen ekuazio matematikoa, egiturako ekuazio bitartez adieraz daiteke. AVARen egitura-eredu matematikoa eratzen duten ekuazio hauek ondorengoa dakarte gogora: edozein datu edo behaketa kausazko zenbait faktorek eragindako efektuen batura gisa ager daitekeela. Edozein AVARen oinarritzko egitura honela adieraz daiteke beraz,



Beste era batera idatzita, honela jar dezakegu: $Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$

Ezarritako diseinuaren arabera, eta datu-matrizea abiaburua delarik, eredu matematikoari dagozkion parametroak kalkula ditzakegu. Horretarako berbidurarik txikienerako doikuntza-prozedura matematikoari jarraitzen diogu. Azken buruan, jakina denez, hondakinen berbiduren baturarik txikiena:

$$\mu = \bar{Y}_{..} \quad \alpha_j = \mu_j - \mu = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..} \quad \varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{.j}$$

Hortik:
$$Y_{ij} = \bar{Y}_{..} + (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})$$

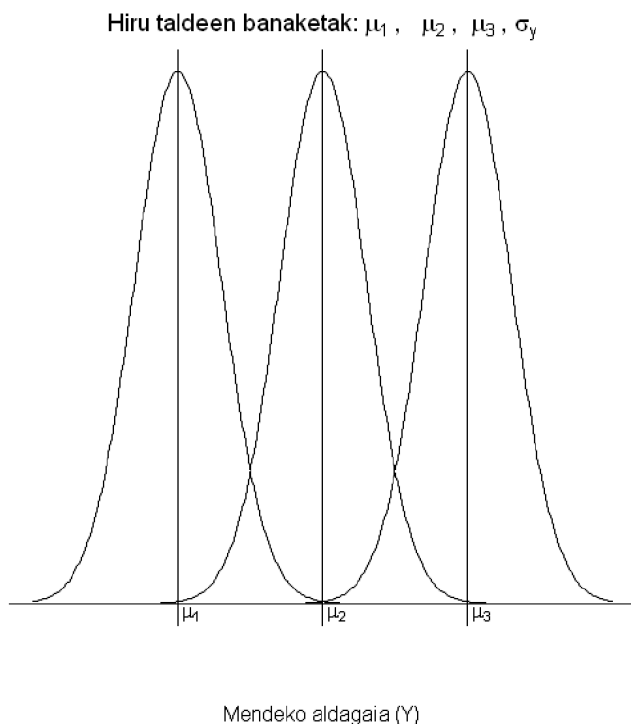
$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}) = (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})$$

Ekuazio horrek, ezaguna denez, bariantza-analisiaren oinarria zehazten du. Horren arabera, behatutako balio zehatz baten (Y_{ij}) distantzia batez bestekoarekiko ($Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$), bi osagaitan bereiz daiteke, hurrenez hurren, honela:

- a. $(Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})$, puntuazio bakoitza (Y_{ij}) j . taldearen batez bestekoarekiko ($\bar{Y}_{.j}$) aldea da. Distantzia hau kontrolatu gabeko faktoreen eraginari dagokiolarik, AZALDU GABEKO ALDAKORTASUN gisa ezagutzen da.
- b. $(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})$, j . mailako batez besteko aritmetikoa batez besteko orokorrarekiko ($\bar{Y}_{..}$) aldea da. Beste era batera, ikertzaileak kontrolatzen duen tratamenduak eragindako distantziari dagokio, hots, TRATAMENDUAK AZALDUTAKO ALDAKORTASUNA da.

Esan dugunez, bariantza-analisisen funtsa hori da. Analisisaren emaitzak interpretatzeko gakoa, berriz, aldakortasun azaldua tratamenduari egozte da, eta azaldu gabeko aldakortasuna, oster, zoriari edo, nahi bada, banakakoen berezitasunei. Horrela, aldakortasun azaldua esanguratsua bada, tratamendua eraginkorra dela pentsa dezakegu.

Diferentziak esanguratsuak direnean, talde esperimental bakoitzak berariazko banaketa dauka. Ondorengo grafikoan ikus daiteke.



IV.1. grafikoa. *Bariantza-analisisa, batez bestekoen arteko distantziak.*

Grafikoko abzisan, ikertzaileak zehaztutako hiru taldeen batez besteko aritmetikoak ikus ditzakegu. Faktoreko maila bakoitzean, lagin osoan gertatzen den moduan, banaketa normala dago. Izan ere, arestian esan dugunez, aurrekari parametroak bete beharreko baldintzak baitira. Taldeen batez bestekoak elkarrengandik zenbat eta urrunago egon, diferentziak orduan eta esanguratsuagoak dira.

Psikologia alorreko ikerkuntzan, oro har, bariantza-analisiak analisi-teknikarik erabilienak dira. Horren arrazoiak bariantza-analisen indarra da. Ikertzaileak gertaerak kontrolatu nahi ditu, zerk zer sortzen duen, edo zer zeini dagokion, jakin nahi baitu. Ikertzaileak, aldagai askea, zehaztasun osoz, maila jakin batzuetan kontrolatzen du eta, zoriz antolatutako talde horien artean izan daitezkeen diferentziak, orduan, aldagai askeak berak sortu izanak direla besterik ezin erator dezake. Nolabait, aldagai askea diferentzien erantzulea dela esan dezakegu, tratamendua diferentzien sorburua delakoan edo. Dena den, eredu estatistikoa izanik, diferentzia horiek esanguratsuak direnez Estatistikak finkatutako irizpideei atxikiz ebatzi beharra dago.

Kalkuluei dagokienez, berbiduren baturetatik bariantzen kalkulurako urratsak lehen azaldu ditugu. Bariantza-analisiaren taula, kasu honetan, honela eraikiko genuke:

IV.1. taula. Bariantza-analisia, zorizko talde anitzeko diseinua.

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
Talde edo mailen artekoa	SCA	$k - 1$	$MCA = SCA / (k - 1)$	$F = \frac{MCA}{MCE}$
Taldeen baitakoa edo hondakinak	SCE	$k(n - 1)$	$MCE = SCE / k(n - 1)$	
GUZTIRA	SCT	$N - 1$		

Orotara, talde arteko eta talde barneko aldakortasunei dagozkien askatasun-graduen kasuan honako hau betetzen da: $N - 1 = (k - 1) + k(n - 1)$. Betiere, $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_j = \dots = n_k$ betetzen dela diseinua orekatua denean.

4.1.2.1. Adibide praktikoa. Ohiko prozedura

Demagun, hezkuntza-psikologiaren eremuan, aztertu nahi dugula ikaskuntza-estrategia desberdinek izan dezaketen eragina testu baten gogoratzean. Testuen ikasbide-prozedurak zein diren aztertu eta gero, ondorengo hiru estrategia hauek hautatu ditugu:

- a_1 testua azpimarratzea,
- a_2 edukiari lotutako eskemak egitea eta
- a_3 testuan agertzen diren ideia nagusien zerrenda egitea.

Hiru maila horien arabera, ikaskuntza-saioak egin ondoren, subjektu guztiei oroimen-proba (irizpide-aldaia) betearazten zaie. Jarraian dagoen taulan ikus daitezke subjektuek gogoratutako ideia kopuruak zehaztutako kategoria desberdinetan — a_1 , a_2 eta a_3 —.

MAILAK (Tratamenduen arabera)				
	a_1	a_2	a_3	
	15	30	32	
	10	32	34	
	4	25	40	
	8	27	37	
	12	35	28	GUZTIRA
Baturak	49	149	171	369
Batez bestekoak	9,8	29,8	34,2	24,6
Behaketa kopurua	5	5	5	15

Taulako aldagaien antolakuntza nolakoa den begiratu behar dugu, kategoriak zutabeetan edo errenkadetan agertzen ote diren. Gure kasuan, aldagai askea, Mailak (Tratamenduaren arabera), zutabeetan agertzen zaigu. Errenkadak, berriz, pertsona edo kasuei dagozkie. Taularen behealdean, azkenik, datuetatik eratorritako zenbait estatistiko agertzen zaizkigu.

BERBIDUREN BATURAK, ALDAKORTASUNAREN KALKULUA

Bariantza-analisan, eragiketa estatistiko guztien antzera, kalkuluak sinpleenetatik konplexueneratarako hurrenkeran egin behar dira, urratsez urrats, alegia. Hau da, aurrenik oinarritzko estatistikoak —baturak, batez bestekoak, desbiderapenak eta abar— kalkulatu behar ditugu. Ondoren, distantziak, aldakortasunak eta berbiduren kalkuluak erraz egin daitezke. Berbiduren kalkulurako lehen adierazitako formula hauek erabiliko ditugu:

$$SCA = \left[\sum_{j=1}^K \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2}{n_j} \right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2}{N} = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right] - \left[\frac{1}{kn} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2 \right]$$

$$SCE = \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 \right) - \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right]$$

$$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2}{N} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - \frac{1}{kn} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2$$

Ariketako datuak erabiliz, urratsez urrats:

1. Berbiduren batura orokorra (SCT).

$$SCT = [(15)^2 + (10)^2 + \dots + (37)^2 + (28)^2] - [(369)^2/15] = 10985 - 9077,4 = 1907,6$$

2. Talde arteko berbiduren batura (SCA).

$$SCA = [(49)^2/5 + (149)^2/5 + (171)^2/5] - [(369)^2/15] = 10768,6 - 9077,4 = 1691,1$$

3. Talde barneko berbiduren batura (SCE).

$$SCE = [(15)^2 + (10)^2 + \dots + (37)^2 + (28)^2] - [(49)^2/5 + (149)^2/5 + (171)^2/5] = 216,4$$

Edozein kasutan, $SCT = SCA + SCE$ bete behar dela gogoan izan behar dugu.

BARIANTZEN EDO BERBIDUREN BATUREN BATEZ BESTEKOEN KALKULUA

Bariantzak kalkulatzea oso erraza da berbidurak ezagutuz gero:

$$MCA = \frac{1691,2}{2} = 845,6$$

$$MCE = \frac{216,4}{12} = 18,03$$

Talde arteko (*MCA*) eta talde barneko (*MCE*) bariantzak ezagututa, batetik, eta, bestetik, maila kopurua (*k*) hiru dela jakinik, ANOVArein taula eraiki dezakegu:

IV.2. taula. Bariantza-analisia, adibide praktikoa.

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	<i>F</i>
Talde edo mailen artekoa	SCA = 1.691,2	k-1=2	MCA=SCA/(k-1)= 845,6	$F = \frac{MCA}{MCE}$ $F = \frac{845,6}{18,03} = 46,89$
Taldeen baitakoa edo hondakinak	SCE = 216,4	k(n-1)=12	MCE=SCE/k(n-1)= 18,03	
GUZTIRA	SCT = 1.907,6	N-1=14		

Demagun, erabaki estatistikorako % 99ko konfiantza-maila ezarri dugula, orduan, behatutako *F*-a esanguratsua ote den jakiteko *F* banaketaren tauletara jotzen dugu ($\alpha = 0,01$), $\nu_1 = 2$ eta $\nu_2 = 12$ askatasun-graduekin —hurrenez hurren, zenbatzaileari eta izendatzaileari dagozkie—. Taulek honako balio hau ematen digute: $F_{0,99;(2/12)} = 6,93$.

Bi *F* horien arteko diferentzia ikusi eta, $F_{0,99;(2/12)} < F_{\text{behatu}}$ ($6,93 < 46,89$) betetzen delarik, hipotesi nulua (H_0) bazter dezakegu. Hori horrela, gure konfiantza-mailaren arabera, ($\alpha = 0,01$), onartzen dugun errore-maila $p \leq 0,01$ da. Azken buruan, a_1 , a_2 eta a_3 mailen artean diferentzia esanguratsuak badirela izan erabakitzen dugu.

Kalkulu-prozesuak ahalik argien ikusteko, jatorrizko datuetatik eratutako kalkulu-urratsak xehe-xehe agertzen ditugu ondorengo taulan.

IV.3. taula. Zuzeneko puntuazioak eta aldakortasunak.

a_1	$(Y_{i1} - \bar{Y}_{.1})$	$(Y_{i1} - \bar{Y}_{.1})^2$	a_2	$(Y_{i2} - \bar{Y}_{.2})$	$(Y_{i2} - \bar{Y}_{.2})^2$	A_3	$(Y_{i3} - \bar{Y}_{.3})$	$(Y_{i3} - \bar{Y}_{.3})^2$
15	5,2	27,04	30	0,2	0,04	32	-2,2	4,84
10	0,2	0,04	32	2,2	4,84	34	-0,2	0,04
4	-5,8	33,64	25	-4,8	23,04	40	5,8	33,64
8	-1,8	3,24	27	-2,8	7,84	37	2,8	7,84
12	2,2	4,84	35	5,2	27,04	28	-6,2	38,44
BATUKARIAK Σ		68,8			62,8			84,8

Goiko taulako azken errenkadan jarritako baturen batukaria, taldez taldeko hondakinen berbiduren batura edo erroreen aldakortasuna (*SCE*) da. Guztira:

$$SCE = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 = 216,4$$

Ekarpen finkoa ($\alpha_j = \mu_j - \mu$) eta talde arteko aldakortasunari (*SCA*) dagokio-nez, hona kalkuluak:

	α_j	α_j^2		$n \cdot \alpha_j^2$
$\mu_1 - \mu = 9,8 - 24,6$	-14,8	219,04		1.095,2
$\mu_2 - \mu = 29,8 - 24,6$	5,2	27,04		135,2
$\mu_3 - \mu = 34,2 - 24,6$	9,6	92,16		460,8
		$\Sigma n \cdot \alpha_j^2$		1.691,2

Taulako azkeneko zutabean, $\Sigma n \cdot \alpha_j^2$ kalkulua —1.691,2—, talde arteko aldakortasuna (*SCA*) da. Behin talde arteko eta talde barneko aldakortasun-neurriak (*SCA* eta *SCE*) ezagututa, bariantzak eta bariantzen arteko zatidura (*F*) aurreko prozeduran bezala kalkulatzen ditugu. Hortik aurrera, erabaki estatistikoa arestian adierazitako moduan hartzen dugu.

4.1.2.2. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena

Kalkulu-prozedura honen abiapuntua, jakina denez, egiturako ekuazioa da:
 $Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$

Hortik hasita, bektoreen bitarteko ebazpenerako ondorengo lau bektore hauek osatu behar ditugu:

Y	Y_{ij} puntuazio zuzeneko bektorea
M	μ batez bestekoaren bektorea
A	α_j tratamenduaren eragin nagusia
E	ε_{ij} hondakinen bektorea.

Oro har, arestian esan moduan, aldakortasun orokorra (*SCT*) bi osagai gehigarrietan bereiz dezakegu, talde arteko aldakortasuna edo tratamenduak (mailak) ekarritako aldakortasuna, eta talde barneko aldakortasuna, hondakinak edo tratamenduak azaltzen ez duen aldakortasuna. Bi osagai horiek honela defini ditzakegu:

1. TALDE ARTEKO ALDAKORTASUNA (*SCA*) EDO TRATAMENDUAK (MAILAK) EKARRITAKO ALDAKORTASUNA:

$\alpha_j = \mu_j + \mu$ *A faktorearen ekarpena.*

$\mu = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Y_{ij}$ *Batez besteko aritmetiko orokorra.*

$\mu_j = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)$ *Talde esperimentalen batez bestekoak.*

$SCA = n \sum_{j=1}^k \alpha_j^2$ *Talde arteko aldakortasuna.*

2. TALDE BARNEKO ALDAKORTASUNA (*SCE*), ERROREA, HONDAKINAK EDO TRATAMENDUAK AZALDU GABEKO ALDAKORTASUNA:

$\alpha_j = \mu_j + \mu$ *Hondakina edo azaldu gabeko ekarpena.*

$\mu = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Y_{ij}$ *Azaldu gabeko aldakortasuna, errorea.*

Horiek horrela, egiturako ekuazioari jarraituz, bektorez bektoreko aurkezpena egingo dugu.

Puntuazioen bektorea (*Y*) eta batez besteko aritmetikoaren bektorea (μ). Bektore hau zuzeneko puntuazio guztien zerrenda besterik ez da, zutabearen zerrendatutako zenbakiak, alegia. Balio horiekin, guztiekin, batez besteko aritmetikoa kalkulatu dugu dagokion bektorea eratzeke.

$$Y = \{Y\} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ 30 \\ 32 \\ 25 \\ 27 \\ 35 \\ 32 \\ 34 \\ 40 \\ 37 \\ 28 \end{pmatrix} \quad \{\mu\} = \begin{pmatrix} 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \end{pmatrix}$$

Faktorearen ekarpena, A bektorea.

Bektore hau eratzeke, aurrenik, batez bestekoak, orokorra eta taldeetakoak, kalkulatu behar ditugu.

$$\mu = \frac{1}{k \cdot n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Y_{ij} = \frac{1}{3 \cdot 5} (15 + 10 + 4 + 8 + 12 + 30 + 32 + 25 + 27 + 35 + 32 + 34 + 40 + 37 + 28) = \frac{369}{15} = 24,6$$

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{i1} \right) = \frac{1}{5} (15 + 10 + 4 + 8 + 12) = 9,8$$

$$\mu_2 = \frac{1}{5} (30 + 32 + 25 + 27 + 35) = 29,8$$

$$\mu_3 = \frac{1}{5} (32 + 34 + 40 + 37 + 28) = 34,2$$

Ondoren, faktorearen ekarpenak (α_j) kalkulatu eta A bektorea eratzen dugu:

$$\alpha_1 = \mu_1 - \mu = 9,8 - 24,6 = -14,8$$

$$\alpha_2 = \mu_2 - \mu = 29,8 - 24,6 = 5,2$$

$$\alpha_3 = \mu_3 - \mu = 34,2 - 24,6 = 9,6$$

$$A = \{\alpha\} = \begin{pmatrix} -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \end{pmatrix}$$

Azaldu gabeko ekarpena, hondakina, E bektorea.

Errorea edo hondakina, berez, pertsona edo subjektu bakoitzari dagokiona da, norbanakoaren berariazko ekarpena dela esan dezakegu, azaltzen ez dakiguna. Hori horrela, banan-banan kalkulatu behar da. Ikus dezagun:

Lehenengo taldeko erroreak, Y_{i1} balioen arabera:

$$\varepsilon_{i1} = Y_{i1} - \mu - \alpha_1 = Y_{i1} - 24,6 - (-14,8) = Y_{i1} - 9,8$$

$$\varepsilon_{11} = 15 - 9,8 = 5,2$$

$$\varepsilon_{21} = 10 - 9,8 = 0,2$$

$$\varepsilon_{31} = 4 - 9,8 = -5,8$$

$$\varepsilon_{41} = 8 - 9,8 = -1,8$$

$$\varepsilon_{51} = 12 - 9,8 = 2,2$$

Bigarren taldeko erroreak, Y_{i2} balioen arabera:

$$\varepsilon_{i2} = Y_{i2} - \mu - \alpha_2 = Y_{i2} - 24,6 - 5,2 = Y_{i2} - 29,8$$

$$\varepsilon_{12} = 30 - 29,8 = 0,2$$

$$\varepsilon_{22} = 32 - 29,8 = 2,2$$

$$\varepsilon_{32} = 25 - 29,8 = -4,8$$

$$\varepsilon_{42} = 27 - 29,8 = -2,8$$

$$\varepsilon_{52} = 35 - 29,8 = 5,2$$

Azkenik, hirugarren taldeko erroreak, Y_{i3} balioen arabera:

$$\varepsilon_{i3} = Y_{i3} - \mu - \alpha_3 = Y_{i3} - 24,6 - 9,6 = Y_{i3} - 34,2$$

$$\varepsilon_{13} = 32 - 34,2 = -2,2$$

$$\varepsilon_{23} = 34 - 34,2 = -0,2$$

$$\varepsilon_{33} = 40 - 34,2 = 5,8$$

$$\varepsilon_{43} = 37 - 34,2 = 2,8$$

$$\varepsilon_{53} = 28 - 34,2 = -6,2$$

Egiturako ekuazioa eta berbiduren kalkulua bektoreen bitartez.

$$\{Y\} = \{\mu\} + \{\alpha\} + \{\varepsilon\}$$

Eratutako bektoreekin gure ariketaren egiturako ekuazioa idatz dezakegu. Ekuazio hori agertzen dizuegu eta, jarraian, berbiduren kalkulua (SCA eta SCE) bektoreen bitartez.

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ 30 \\ 32 \\ 25 \\ 27 \\ 35 \\ 32 \\ 34 \\ 40 \\ 37 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \\ 24,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 9,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,2 \\ 0,2 \\ -5,8 \\ -1,8 \\ 2,2 \\ 0,2 \\ 2,2 \\ -4,8 \\ -2,8 \\ 5,2 \\ -2,2 \\ -0,2 \\ 5,8 \\ 2,8 \\ -6,2 \end{pmatrix}$$

Talde arteko aldakortasuna (SCA), beraz, honela kalkulatzen dugu:

$$SCA = \{\alpha\}^T \cdot \{\alpha\} = 1691,2$$

Hau da, bektorearen $\{\alpha\}$ eta haren *irauliaren* $\{\alpha\}^T$ arteko biderketa egin behar dugu. Honela,

$$SCA = \begin{pmatrix} -14,8 & -14,8 & -14,8 & -14,8 & -14,8 & 5,2 & 5,2 & 5,2 & 5,2 & 5,2 & 9,6 & 9,6 & 9,6 & 9,6 & 9,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ -14,8 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 5,2 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 9,6 \end{pmatrix} = 1619,2$$

Talde barneko aldakortasuna (SCE) kalkulatzeko eragiketa bera egin behar dugu hondakinekin.

$$SCA = \{\varepsilon\}^T \cdot \{\varepsilon\} = 216,4$$

$$SCE = \begin{pmatrix} 5,2 & 0,2 & -5,8 & -1,8 & 2,2 & 0,2 & 2,2 & -4,8 & -2,8 & 5,2 & -2,2 & -0,2 & 5,8 & 2,8 & -6,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,2 \\ 0,2 \\ -5,8 \\ -1,8 \\ 2,2 \\ 0,2 \\ 2,2 \\ -4,8 \\ -2,8 \\ 5,2 \\ -2,2 \\ -0,2 \\ 5,8 \\ 2,8 \\ -6,2 \end{pmatrix} = 216,4$$

SCA eta SCE berbiduren baturak behin kalkulaturik, ANOVaren taula osa dezakegu lehen azaldu dugun moduan. Hortik aurrerako kalkuluak eta erabaki estatistikoa lehengo prozeduraren arabera dira, berdin-berdinak.

4.2. TALDE ARTEKO AXB DISEINU FAKTORIALA

Diseinu experimental honetan bi aldagai aske, edo faktore, eta mendeko aldagai bakarra erabiltzen ditugu. Ohi denez, mendeko aldagaia zorizko aldagaia den bitartean, aldagai askeak maila edo kategoria kopuru jakin batzuetan banatzen dira, ikertzaileak erabakitzen dituen tratamenduen arabera, hain zuzen ere. Horrexegatik, aldagai askeak ez dira zorizko aldagaiak, ikertzaileak kontrolatzen dituelako. Aldagai aske horien maila desberdinen arteko aldaera posibleak talde experimentalen kopurua zehazten du. Zehatzagoa izango litzateke esatea, mailen arteko konbinatoriak tratamendu kopurua zehazten duela. Tratamendua esatean, faktoreetako mailen arteko konbinatorietatik eratortzen den egoera experimental jakinari esaten diogu. Oro har, bi faktorez eratutako diseinu experimental honako egiturako ekuazioari dagokio:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

Notazioari gagozkiolarik, $A \times B$ —a bider b irakurria— esatean, aldagai askeko mailen arteko eraketa anizkoitza aipatu nahi da. Horrek, analisi-ereduaren itxura-aldaketa badakar ere, funtsean, bariantza-analisiaren eredu bera da. Aldagai askeak edo faktoreak gure alfabetoko hizkien bitartez, hurrenez hurren, izendatu ohi dira. Hona hemen, beste aldetik, i , j eta k azpiindizeek zehatz-mehatz adierazten dutena: i -k zenbatgarren subjektua edo kasua, taldeko $i=1$ -etik n -rainoko subjektuak hain zuzen, non maila guztietan subjektu kopuru bera dagoen; j -k A faktoreko maila zehazten du eta, azkenik, k azpiindizea B faktoreko maila zehazten duena da. Aurreko ereduari aldagai askeko k mailak talde experimental kopurua zehazten bazuen ere, honetan, eta hurrengoetan berdin, diseinuaren izendapenean bertan adierazten da talde experimentalen kopurua. Izan ere, aldagai askeen kopuruak diseinuaren dimentsioa zehazten baitu.

Horiek horrela, aurreko kapituluan erabilitako garapen ildoari eutsiko diogu honetan ere. Abiaturua egiturako ekuazioan jarrita, haren osagaiak, hurrenez hurren:

- Y_{ijk} Bi faktoreetako j eta k mailen dagokien i . subjektuaren behaketa edo puntuazioa.
- μ Behaketa guztien batez besteko aritmetiko orokorra.
- α_j A faktorearen eragin nagusia j . mailan.
- β_k B faktorearen eragin nagusia k . mailan.
- $(\alpha\beta)_{jk}$ A eta B faktoreek elkarri eragindakoa A -ren j . eta B -ren k . talde experimentalean.
- ε_{ijk} Hondakinak edo errore experimentalak talde guztietan.

Eredu honetan eraginak edo efektuak hiru sorburukoak dira, beraz. Faktore bakoitzak zeinek bere aldetik dakarrena, alde batetik, eta, bestetik, faktore biek elkarri eragindakoa edo interakzioa. Faktoreak zer-nolakoak diren, interakzioa

dagoen ala ez erabaki beharko genuke. Dena den, aurrerago eta sako-nago helduko diogu arazo horri.

Jakina denez, aldagai askeak edo faktoreak ikertzailearen kontrolpekoak izaki, aldagai horiek ez dira zoriz banatzen. Mendeko aldagaia (Y), oster, beti zorizko aldagaia izango dugu. Are zehatzago, banaketa normalari darraion populazioko aldagaia da, hain zuzen ere. Horrela, homozedastizitatea eta behaketen arteko independentzia betetzen direla emanez, hondakinak normaltasunez ere banatzen direla behatu behar dugu. Honela hain zuzen:

$$\varepsilon_{ijk} \approx NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Hau da, errorearen batez bestekoak zerora jo behar du ezinbestean. Aurreko hori, erroreak zorizkoak direlako bermea dugu. Horrela izan ezean, halabeharrez, eredu alboratua dela ondorioztatu behar dugu.

Aurretikoz aurretiko, goiko pasarte horietan, berriro ere, analisi hauetarako bete beharreko baldintzak zehaztu ditugu. Beste alderditik, gogoan izan, eredu parametrikolari dagozkion gainerako baldintzak, honetan ere bete beharrekoak badirela.

4.2.1. Talde arteko AXB diseinu faktoriala, adibide praktikoa

Demagun ikerketa egin dugula *elebiduntasuna* deituriko eite psikologikoa mugatzen duten aldagai soziolinguistikoen inguruan. Zehazki, *gurasoen euskara maila* (A) eta *haurraren hizkuntz garapenaldia edo hiztun-tipologia*⁸ (B) direlako faktoreek *euskarazko gaitasun mailan* (Y) izan dezaketen eragina aztertu nahi dugula. Horrela, A aldagai askearen honako hiru maila hauek zehaztu ditugu:

- a_1 guraso euskaldun bakarra ama denean,
- a_2 guraso euskaldun bakarra aita denean,
- a_3 guraso biak, aita eta ama, euskaldunak direnean.

B faktoreari dagozkion mailak:

- b_1 euskaldun goiztiarrak, euskaraz hitz egiten hiru urte baino lehenago ikasten duten haurrak.
- b_2 euskaldun berantiarrak, euskaraz hitz egiten bost urte bete eta gero ikasten duten haurrak.

8. *Garapenaldia* esatean haurrak euskara noiz ikasi duen besterik ez dugu adierazi nahi. Bertan ematen den sailkapena hizkuntzak ikasteko adinarean arabera ohiko sailkapena da. Dena den, honetan, didaktikoki bideragarriagoa izan daitekeelakoan sailkapen hori *egokitu* egin dugu.

Irizpide horiei jarraituz, 9-14 urte bitarteko haurren artean launako sei haur talde hautatu izan dira ($n_{11} = n_{12} = n_{13} = n_{21} = n_{22} = n_{23} = 4$). Hau da, diseinuaren arabera, 3×2 adina talde dago. Behin taldeak eraturik, neska-mutikoei euskarazko gaitasun maila neurtu zaie (Y). Ondoko taulan ikus daitezke jasotako emaitzak:

IV.4. taula. AXB diseinurako datuen taula, ariketaren datuak.

		GURASOEN EUSKARA MAILA (A)		
		a_1	a_2	a_3
HIZTUN-TIPOLOGIA (B)	b_1	7	8	13
		9	11	15
		10	10	11
		8	6	10
	b_2	6	4	10
		5	6	9
		4	8	6
		7	5	8

Taulan antzeman daiteke ereduaren egitura; errenkadetan, B faktoreko bi mailak (b_1 eta b_2) eta zutabeetan, A faktoreko hiru mailak (a_1 , a_2 eta a_3); horiek horrela, $k=1, 2$ eta $j=1, 2, 3$ dira.

Ariketari heldu aurretik, taularen egitura sakonago azter dezagun. Oro har, izaera honetako diseinuen taulak honelakoak dira:

IV.5. taula. AXB diseinurako datuen taula, eredu orokorra.

ALDAGAI ASKEAK B	A	a_1	...	a_j	...	a_a	$T_{..k}^2$	Batez bestekoak
b_1		Y_{111}	..	Y_{1j1}	..	Y_{1a1}	$T_{..1}^2$	$\bar{Y}_{..1}$
		Y_{i11}	..	Y_{ij1}	..	Y_{ia1}		
		Y_{n11}		Y_{nj1}		Y_{na1}		
	...		..		..			
b_k		Y_{11k}	..	Y_{1jk}	..	Y_{1ak}	$T_{..k}^2$	$\bar{Y}_{..k}$
		Y_{i1k}	..	Y_{ijk}	..	Y_{iak}		
		Y_{n1k}		Y_{nj1}		Y_{nak}		
	...		..		..			
b_b		Y_{11b}	..	Y_{1jb}	..	Y_{1ab}	$T_{..b}^2$	$\bar{Y}_{..b}$
		Y_{i1b}	..	Y_{ijb}	..	Y_{iab}		
		Y_{n1b}		Y_{njb}		Y_{nab}		
	...		..		..			
$T_{.j}^2$		$T_{.1}^2$		$T_{.j}^2$		$T_{.a}^2$	$T_{...}^2$	
Batez bestekoak		$\bar{Y}_{.1}$		$\bar{Y}_{.j}$		$\bar{Y}_{.a}$		$\bar{Y}_{...}$

Taula barruko gelaxka bakoitza talde jakin bati dagokio. Bazterkietan, eskuinean, errenkadako ($k=1, 2, \dots, b$) baturen berbidurak ($T_{..k}^2$ zutabeetan) idatziko genituzke eta behean zutabeko ($j=1, 2, \dots, a$) baturen berbidurak ($T_{.j}^2$ errenkadan).

Ikusten denez, bata, B faktoreak dituen maileri dagokiena da, eta bestea, A faktoreak dituen maileri dagokie. Notazioari begira, T hizkiak puntuazio batzuen batura adierazten du, kasurik kasu, ikurak daramatzen azpiindizeek adierazten dutenena, alegia. Esaterako $T_{...}^2$ delakoak puntuazio guztien baturaren berbidura adierazten du. Azkenik, bazterkietan errenkada edota zutabe bakoitzari dagozkion batez besteko aritmetikoak idatzi ditugu. Oharrak ohar, kalkuluen garapena ulertzeko, emandako azalpenak eta lehengo taula argigarri suerta daitezke, gogoan izan ditzagun, beraz.

4.2.2. Talde arteko AXB diseinua, berbiduren baturen kalkulua

Aurrekoetan egin dugun moduan, ereduaren egiturako ekuazioan oinarritutako bi prozedura desberdin azaltzen ditugu.

OHIKO PROZEDURA

Eragin edo efektuen kalkuluetarako formulak:

- A faktorearen eragina: $SCA = \left(\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b T_{.j}^2 \right) - C = \left(\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b \left(\sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right) - C$
- B faktorearen eragina: $SCB = \left(\frac{1}{an} \sum_{k=1}^a T_{.k}^2 \right) - C = \left(\frac{1}{an} \sum_{k=1}^a \left(\sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right) - C$
- A eta B faktoreen arteko elkarreragina edo interakzioa:

$$SCAB = \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right) - C \right] - (SCA + SCB)$$

- Hondakinak edo errorearen aldakortasuna:

$$SCE = SCT - (SCA + SCB + SCAB)$$

- Aldakortasun orokorra kalkulatzeko formula:

$$SCT = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk}^2 - C$$

- Aurreko formuletan agerturiko C osagaia honako hau da:

$$C = \frac{1}{N} T_{...}^2 = \frac{1}{abn} \left(\sum_j \sum_k \sum_i Y_{ijk} \right)^2$$

Formulak formula, C osagai orokor horretatik abiatuta kalkuluak aurkezten ditugu.

$$C = \frac{1}{3.2.4} (7+9+10+8+6+5+4+7+8+\dots \\ \dots + 11+10+6+4+6+8+5+13+15+11+10+10+9+6+8)^2 = \frac{(196)^2}{24} = 1600,67$$

C balioa behin ezagututa, SCA, SCB, SCAB, SCE eta SCT, hurrenez hurren:

$$SCA = \frac{1}{2.4} [(56)^2 + (58)^2 + (82)^2] - 1600,67 = 52,33$$

$$SCB = \frac{1}{3.4} [(118)^2 + (78)^2] - 1600,67 = 66,66$$

$$SCAB = \left[\frac{1}{4} [(34)^2 + (22)^2 + (35)^2 + (23)^2 + (49)^2 + (33)^2] - 1600,67 \right] - (5'233 + 6'666) = 1,34$$

Aurreko formuletan, parentesi arteko berbidurak $T_{.j}$, $T_{.k}$, eta T_{jk} batukariei dagozkie, IV.5. taulan azaltzen den moduan, errenkada, zutabe eta gelaxka bakoitzeko osagaien baturei, alegia. Ikus daitekeenez, batugaien kopurua diseinuaren (AXB) dimentsioarekin bat dator.

$$SCE = 177,33 - (52,33 + 66,66 + 1,34) = 57$$

$$SCT = [(7)^2 + (9)^2 + (10)^2 + (8)^2 + (6)^2 + (5)^2 + (4)^2 + (7)^2 + (8)^2 + (11)^2 + (10)^2 + (6)^2 + \dots$$

$$\dots + (4)^2 + (6)^2 + (8)^2 + (5)^2 + (13)^2 + (15)^2 + (11)^2 + (10)^2 + (10)^2 + (9)^2 + (6)^2 + (8)^2] - 1600,67 = 1778 - 1600,67 = 177,33$$

Horrela, berbiduren batez bestekoak, bariantzak eta haien arteko zatidurak (F -ak) kalkula ditzakegu eta ondorengo taula osatu:

IV.6. taula. AXB diseinurako bariantza-analisiaren taula, eredu orokorra.

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	SCA	$a-1$	$MCA = SCA/(a-1)$	$F_A = \frac{MCA}{MCE}$
B faktoreko mailen artekoa	SCB	$b-1$	$MCB = SCB/(b-1)$	$F_B = \frac{MCB}{MCE}$
A B faktoreen arteko interakzioa	SCAB	$(a-1)(b-1)$	$MCAB = SCAB/[(a-1)(b-1)]$	$F_{AB} = \frac{MCAB}{MCE}$
Taldeen barnekoa edo hondakinak edo erroreak	SCE	$ab(n-1)$	$MCE = SCE/ab(n-1)$	
GUZTIRA	SCT	$abn-1$		

Aldakortasun-sorburuak, kasu honetan, lau dira eta ezinbestean ondorengo hau betetzen da:

$$SCT = SCA + SCB + SCAB + SCE$$

Askatasun-graduak, beste alderditik, maila (a eta b) eta subjektu kopuruaren (n) arabera dira, non abn biderkadura orotariko subjektu kopurua (N) den. Taulan bertan ikus daiteke zein diren aldakortasun-neurri bakoitzari dagozkion askatasun-graduak. Nolanahi ere, bigarren prozedura azaldu eta gero helduko diogu ariketaren behin betiko garapenari.

4.2.3. Bigarren prozedura, faktoreen bitarteko ebazpena

Aurreko diseinuaren ildoari jarraituz, honetan, berriz ere, formulak agertzen ditugu aurrenen:

1. A FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCA):

$\alpha_j = \mu_{j.} - \mu$ A faktorearen ekarpena.

$\mu = \frac{1}{abn} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk}$ Batez besteko aritmetiko orokorra.

$\mu_{j.} = \frac{1}{bn} \left(\sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)$ A faktorearen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCA = bn \sum_{j=1}^a \alpha_j^2$ A faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.

2. B FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCB):

$\beta_k = \mu_{.k} - \mu$ B faktorearen ekarpena.

$\mu_{.k} = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)$ B faktorearen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCB = an \sum_{k=1}^b \beta_k^2$ B faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.

3. AB FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (SCAB):

$(\alpha\beta)_{jk} = \mu_{jk} - (\mu + \alpha_j + \beta_k)$...AB faktoreen arteko interakzioaren ekarpena.

$\mu_{jk} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)$ A eta B faktoreen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCAB = n \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{jk}^2$ AB interakzioak ekarritako talde arteko aldakortasuna.

A BEKTOREA

A faktoreak ekarritako aldagortasunari dagokion formulari jarraituz, batez besteko aritmetiko orokorra (μ) honela kalkulatzen dugu:

$$\mu = (1/3.2.4) [7+9+10+8+6+5+4+7+8+11+10+6+4+6+8+5+13+15+11+10+10+9+6+8]$$

$$\mu = (196/24) = 8,17$$

A faktoreko taldeen batez bestekoak,

$$\mu_{1.} = (1/2 \times 4) [7+9+10+8+6+5+4+7] = 7$$

$$\mu_{2.} = (1/2 \times 4) [8+11+10+6+4+6+8+5] = 7,25$$

$$\mu_{3.} = (1/2 \times 4) [13+15+11+10+10+9+6+8] = 10,25$$

Ondorioz,

$$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu = 7 - 8,17 = -1,17$$

$$\alpha_2 = \mu_{2.} - \mu = 7,25 - 8,17 = -0,92$$

$$\alpha_3 = \mu_{3.} - \mu = 10,25 - 8,17 = 2,08$$

$$A = \{\alpha\} = \begin{pmatrix} -1,17 \\ -1,17 \\ -1,17 \\ -1,17 \\ -1,17 \\ -1,17 \\ -1,17 \\ -1,17 \\ -0,92 \\ -0,92 \\ -0,92 \\ -0,92 \\ -0,92 \\ -0,92 \\ -0,92 \\ 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \\ 2,08 \end{pmatrix}$$

B BEKTOREA

B faktoreak ekarritako aldakortasunari dagokionez, B faktoreko mailen batez bestekoak kalkulatzeari lotuko gatzaizkio. Hurrenez hurren:

$$\mu_{1.} = (1/3 \times 4) [7+9+10+8+8+11+10+6+13+15+11+10] = 9,83$$

$$\mu_{2.} = (1/3 \times 4) [6+5+4+7+4+6+8+5+10+9+6+8] = 6,5$$

Ondorioz,

$$\beta_1 = \mu_{1.} - \mu = 9,83 - 8,17 = 1,66$$

$$\beta_2 = \mu_{2.} - \mu = 6,5 - 8,17 = -1,67$$

$$B = \{\beta\} =$$

(1,66)
1,66
1,66
1,66
-1,67
-1,67
-1,67
-1,67
-1,67
1,66
1,66
1,66
1,66
-1,67
-1,67
-1,67
-1,67
1,66
1,66
1,66
1,66
-1,67
-1,67
-1,67
-1,67

{ $\alpha\beta$ } BEKTOREA

Jakina denez, $\{\alpha\beta\}$ bektoreak adierazitako aldakortasunari interakzioarena esaten diogu. Hau da, A eta B faktoreen artean azaldutako aldakortasuna. Aurrenik eta behin, talde guztien batez bestekoak kalkulatu behar ditugu:

$$\mu_{11} = (1/4) [7+9+10+8] = 8,5$$

$$\mu_{12} = (1/4) [6+5+4+7] = 5,5$$

$$\mu_{21} = (1/4) [8+11+10+6] = 8,75$$

$$\mu_{22} = (1/4) [4+6+8+5] = 5,75$$

$$\mu_{31} = (1/4) [13+15+11+10] = 12,25$$

$$\mu_{33} = (1/4) [10+9+6+8] = 8,25$$

$$\{\alpha\beta\} =$$

(-0,16)
-0,16
-0,16
-0,16
0,17
0,17
0,17
0,17
0,17
-0,16
-0,16
-0,16
-0,16
0,17
0,17
0,17
0,17
0,34
0,34
0,34
0,34
-0,33
-0,33
-0,33
-0,33

Ondorioz,

$$(\alpha\beta)_{11} = \mu_{11} - \mu - \alpha_1 - \beta_1 = 8,5 - 8,17 - (-1,17) - 1,66 = -0,16$$

$$(\alpha\beta)_{12} = \mu_{12} - \mu - \alpha_1 - \beta_2 = 5,5 - 8,17 - (-1,17) - (-1,67) = 0,17$$

$$(\alpha\beta)_{21} = \mu_{21} - \mu - \alpha_2 - \beta_1 = 8,75 - 8,17 - (-0,92) - 1,66 = -0,16$$

$$(\alpha\beta)_{22} = \mu_{22} - \mu - \alpha_2 - \beta_2 = 5,75 - 8,17 - (-0,92) - (-1,67) = 0,17$$

$$(\alpha\beta)_{31} = \mu_{31} - \mu - \alpha_3 - \beta_1 = 12,25 - 8,17 - 2,08 - 1,66 = 0,34$$

$$(\alpha\beta)_{32} = \mu_{32} - \mu - \alpha_3 - \beta_2 = 8,25 - 8,17 - 2,08 - (-1,67) = -0,33$$

E BEKTOREA, HONDAKIN EDO ERROREEN KALKULUA

Hondakina edo errorea, esan dugunez, norbanakoari dagokiona da. Banan-banan kalkulatu,

$$\varepsilon_{i11} = Y_{i11} - \mu - \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11} = Y_{i11} - 8,17 - (-1,17) - 1,66 - (-0,16) = Y_{i11} - 8,5$$

• Y_{i11} puntuazioen arabera: $\varepsilon_{111} = 7 - 8,5 = -1,5$

$$\varepsilon_{211} = 9 - 8,5 = 0,5$$

$$\varepsilon_{311} = 10 - 8,5 = 1,5$$

$$\varepsilon_{411} = 8 - 8,5 = -0,5$$

$$\varepsilon_{i12} = Y_{i12} - \mu - \alpha_1 - \beta_2 - (\alpha\beta)_{12} = Y_{i12} - 8,17 - (-1,17) - (-1,67) - 0,17 = Y_{i12} -$$

• Y_{i12} puntuazioen arabera: $\varepsilon_{112} = 6 - 5,5 = 0,5$

$$\varepsilon_{212} = 5 - 5,5 = -0,5$$

$$\varepsilon_{312} = 4 - 5,5 = -1,5$$

$$\varepsilon_{412} = 7 - 5,5 = ,5$$

$$\varepsilon_{i21} = Y_{i21} - \mu - \alpha_2 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{21} = Y_{i21} - 8,17 - (-0,92) - 1,66 - (-0,16) = Y_{i21} -$$

• Y_{i21} puntuazioen arabera: $\varepsilon_{121} = 8 - 8,75 = -0,75$

$$\varepsilon_{221} = 11 - 8,75 = 2,25$$

$$\varepsilon_{321} = 10 - 8,75 = 1,25$$

$$\varepsilon_{421} = 6 - 8,75 = -2,75$$

$$\varepsilon_{i22} = Y_{i22} - \mu - \alpha_2 - \beta_2 - (\alpha\beta)_{22} = Y_{i22} - 8,17 - (-0,92) - 1,66 - (-0,16) = Y_{i22} -$$

• Y_{i22} puntuazioen arabera: $\varepsilon_{122} = 4 - 5,75 = -1,75$

$$\varepsilon_{222} = 6 - 5,75 = 0,25$$

$$\varepsilon_{322} = 8 - 5,75 = 2,25$$

$$\varepsilon_{422} = 5 - 5,75 = -0,75$$

$$E = \{\varepsilon\} =$$

$$\begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -1,5 \\ 1,5 \\ -0,75 \\ 2,25 \\ 1,25 \\ -2,75 \\ -1,75 \\ 0,25 \\ 2,25 \\ -0,75 \\ 0,75 \\ 2,75 \\ -1,25 \\ -2,25 \\ 1,75 \\ 0,75 \\ -2,25 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{i31} = Y_{i31} - \mu - \alpha_3 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{31} = Y_{i31} - 8,17 - 2,08 - 1,66 - 0,34 = Y_{i31} - 12,25$$

- Y_{i31} puntuazioen arabera: $\varepsilon_{131} = 13 - 12,25 = 0,75$
 $\varepsilon_{231} = 15 - 12,25 = 2,75$
 $\varepsilon_{331} = 11 - 12,25 = -1,25$
 $\varepsilon_{431} = 10 - 12,25 = -2,25$

$$\varepsilon_{i32} = Y_{i32} - \mu - \alpha_3 - \beta_2 - (\alpha\beta)_{32} = Y_{i32} - 8,17 - 2,08 - (-1,67) - (-0,33) = Y_{i32} - 8,25$$

- Y_{i32} puntuazioen arabera: $\varepsilon_{132} = 10 - 8,25 = 1,75$
 $\varepsilon_{232} = 9 - 8,25 = 0,75$
 $\varepsilon_{332} = 6 - 8,25 = -2,25$
 $\varepsilon_{432} = 8 - 8,25 = -0,25$

Honaino, bada, kalkuluen garapena. Berbiduren baturak, arestian erakutsi moduan, bektoreen eta beraien iraulien arteko biderkadurak besterik ez dira. Bektoreen arteko biderketa nola egiten den dakigula, ekuazioak agertzen ditugu:

$$SCA = \{\alpha\}^T \{\alpha\} = 52,33$$

$$SCB = \{\beta\}^T \{\beta\} = 66,66$$

$$SCAB = \{\alpha\beta\}^T \{\alpha\beta\} = 1,34$$

$$SCE = \{\varepsilon\}^T \{\varepsilon\} = 57$$

Eta ondorengo batetzen da: $SCT = SCA + SCB + SCAB + SCE = 177,33$

IV.7. taula. AXB diseinurako bariantza-analisiaren taula, adibide praktikoa.

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko <i>mailen</i> artekoa	$SCA = 52,33$	$a - 1 = 2$	$MCA = 26,16$	$F_A = 8,25$
B faktoreko <i>mailen</i> artekoa	$SCB = 66,66$	$b - 1 = 1$	$MCB = 66,66$	$F_B = 21,03$
A B faktoreen arteko <i>interakzioa</i>	$SCAB = 1,34$	$(a - 1)(b - 1) = 2$	$MCAB = 0,67$	$F_{AB} = 0,21$
Taldeen barnekoa edo <i>hondakinak</i> edo <i>erroreak</i>	$SCE = 57$	$ab(n - 1) = 18$	$MCE = 3,17$	
GUZTIRA	$SCT = 177,33$	$abn - 1 = 23$		

Dagoeneko, faktoreek azaldutako aldakortasuna esanguratsua ote den ebatz dezakegu. Horretarako, ohi denez, F tauletara jotzen dugu. Demagun % 99ko konfiantza-maila ($\alpha = 0,01$) eskuinaldeko hipotesi-testa dela, orduan,

IV.8. taula. % 99ko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko eraketak.

	Tauletako $F_{0,99;u1/v2}$	Behatutako F	Desberdintza
A faktorea	$F_{0,99;2/18} = 6,013$	$F_A = 8,25$	$6,013 < 8,25$
B faktorea	$F_{0,99;1/18} = 8,285$	$F_B = 21,03$	$8,285 < 21,03$
<i>Interakzioa</i>	$F_{0,99;2/18} = 6,013$	$F_{AB} = 0,21$	$6,013 > 0,21$

Emaizten arabera, esan dezakegu *haur elebidunen euskara gaitasuna* gurasoen euskara mailak (A faktoreak) eta haien hiztun-tipologiak (B faktoreak) esan-guratsuki ($p \leq 0,01$) azalduta dago eta, ez, ordea, faktoreen arteko interakzioak. Hori goiko taulako desberdintzetan antzeman daiteke hain zuzen ere.

4.3. TALDE ARTEKO AXBXC DISEINU FAKTORIALA

Dagoeneko esana dugu diseinuaren dimentsioak tratamendu eta talde esperimental kopurua zehazten duela. $AXBXC$ idaztean hiru aldagai aske edo faktoreko diseinuaz ari garela uler daiteke beraz. Jakina denez, subjektuak talde esperimentaletan ausaz banatzen dira. Zorizko banatze hori nahikoa dugu taldeak elkarren artean baliokideak direla esan ahal izateko. Hau da, haien artean aldeztu aurretik ez dela ematen inolako desberdintasunik eta, ondorioz, esperimentua burutu eta gero desberdintasunen bat egotekotan lanketa esperimentalari berari egotz diezaioketula. Gogoan izan, mendeko aldagaia zorizko aldagaia delarik aztertzen dugun aldagaia bera dela. Hau da, taldeen arteko eraketarako aldagaia.

Gatozen, bada, $AXBXC$ ereduaren egiturako ekuazioa aurkeztera:

$$Y_{ijkm} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_m + (\alpha\beta)_{jk} + (\alpha\gamma)_{jm} + (\beta\gamma)_{km} + (\alpha\beta\gamma)_{jkm} + \varepsilon_{ijkm}$$

Y_{ijkm} Hurrenez hurren, A , B eta C faktoreetako j ., k . eta m . mailen dagokien i . subjektuaren behaketa.

μ Esperimentuan parte hartzen duten subjektu guztiei dagokien batez besteko orokorra. Bere baitan eragin egonkor guztiak biltzen ditu

α_j A faktorearen eragin nagusia.

β_k B faktorearen eragin nagusia.

γ_m C faktorearen eragin nagusia.

$(\alpha\beta)_{jk}$ A -ren j . eta B -ren k . mailen arteko interakzioak ekarritako efektua edo elkarren arteko eragina.

$(\alpha\gamma)_{jm}$ A -ren j . eta C -ren m . mailen arteko interakzioak ekarritako efektua edo elkarren arteko eragina.

- $(\beta\gamma)_{km}$ B -ren k . eta C -ren m mailen arteko interakzioak ekarritako efektua edo elkarren arteko eragina.
- $(\alpha\beta\gamma)_{jkm}$ A -ren j , B -ren k eta C -ren m . mailen arteko interakzioak ekarritako efektua edo elkarren arteko eragina.
- ε_{ijkm} Hondakinak edo errore esperimentalak.

Hondakinek banaketa normalari jarraitu behar diote. Oro har, honako hau bariantza-analisiaren ezinbesteko aurretikoa dugu eta honela idazten da: $\varepsilon_{ijkm} \approx NID(0, \sigma_e^2)$. Nolanahi ere, bariantza txikia eta ezaguna delarik, errorearen itxaropen matematikoak zero izan behar du.

4.3.1. Talde arteko AXBXC diseinu faktoriala, adibide praktikoa

Demagun, psikologia klinikoaren eremuan HIES (*Hartutako Immuno eska-siaren Sindromea*) gaixotasunak jotako subjektuen egoera fisiko eta psikologikoa aztergai dugula. Zehazki, hiru terapia mota desberdinek gaixotasunaren garape-nean izan dezaketen eragina aztertu nahi dugu. Gaixoak bi taldetan erdibanatu ziren: lehenengo taldeari (a_2) botika jakin bat eman zitzaion; bestea (a_1), berriz, inolako botikarik hartu gabe geratu zen. Halaber, laguntza psikologikoa erabiltzea erabaki zen, gaixoeekin eurekin, eta haien sendiekin. Lehenengo kasua, *banakako psikoterapia*, bigarren faktoreztat (B faktorea) hartzen da —jasotzen dutenak (b_1) eta jasotzen ez dutenak (b_2)—. Eta, azkena, *sendi-psikoterapia*, hirugarren faktorea (C faktorea) dugu. Azken horretan ere, bi maila bereizten dira, terapia izan (c_1) ala ez izan (c_2). Nolanahi ere, eratutako talde guztietan subjektu kopuru berbera dugu. Horrela, hirunako zortzi talde esperimental ditugu, $2 \times 2 \times 2$ hain zuzen ere. Mendeko aldagaia, gaixo guztiei neurtzen zaiena (Y), egoera fisiko eta psikologikoaren garapena da. Ondorengo taulan, egitura eta puntuazioak ikus ditzakegu:

IV.9. taula. AXBXC diseinurako datuen taula, ariketaren datuak.

		BOTIKAREN BITARTEKO TERAPIA (A)			
		a_1		a_2	
		b_1	b_2	b_1	b_2
BANAKAKO (B) PSIKOTERAPIA					
SENDI - PSIKOTERAPIA (C)	c_1	22	14	16	28
		20	13	18	29
		18	14	14	25
	c_2	9	35	34	12
		10	29	30	16
		8	33	32	15

Begiratu, errenkadetan, C faktoreko mailak (c_1 eta c_2) eta, zutabeetan, eredu honen beste bi faktoreak ditugula: goian A faktoreko bi mailak (a_1 eta a_2) eta behealdean B faktoreko biak (b_1 eta b_2). Faktoreei dagozkien azpiindizeak, hurrenez hurren, $j = 1, 2$; $k = 1, 2$ eta $m = 1, 2$ dira. Oro har, mota honetako ereduak dagokien egitura sakonago antzemateko honako taula hau ekartzeari egoki deritzogu:

IV.10. taula. $AXBXC$ diseinurako datuen taula, eredu orokorra.

		A FAKTOREA								
		a_1			a_j			a_a		
B FAKTOREA		b_1	b_k	b_b	b_1	b_k	b_b	b_1	b_k	b_b
C FAKTOREA										
c_1	Y_{1111}	Y_{11kl}	Y_{11bl}	Y_{1j11}	Y_{1jkl}	Y_{1jbl}	Y_{1a11}	Y_{1akl}	Y_{1abl}	
	Y_{i111}	Y_{i1kl}	Y_{i1bl}	Y_{ij11}	Y_{ijk1}	Y_{ijb1}	Y_{ia11}	Y_{iak1}	Y_{iab1}	
	Y_{n111}	Y_{n1kl}	Y_{n1bl}	Y_{nj11}	Y_{njkl}	Y_{njb1}	Y_{na11}	Y_{nak1}	Y_{nab1}	
c_m	Y_{111m}	Y_{11km}	Y_{11bm}	Y_{1j1m}	Y_{1jkm}	Y_{1jbm}	Y_{1a1m}	Y_{1akm}	Y_{1abm}	
	Y_{i11m}	Y_{i1km}	Y_{i1bm}	Y_{ij1m}	Y_{ijkm}	Y_{ijbm}	Y_{ia1m}	Y_{iakm}	Y_{iabm}	
	Y_{n11m}	Y_{n1km}	Y_{n1bm}	Y_{nj1m}	Y_{njkm}	Y_{njbm}	Y_{na1m}	Y_{nakm}	Y_{nabm}	
c_c	Y_{111c}	Y_{11kc}	Y_{11bc}	Y_{1j1c}	Y_{1jkc}	Y_{1jbc}	Y_{1a1c}	Y_{1akc}	Y_{1abc}	
	Y_{i11c}	Y_{i1kc}	Y_{i1bc}	Y_{ij1c}	Y_{ijkc}	Y_{ijbc}	Y_{ia1c}	Y_{iakc}	Y_{iabc}	
	Y_{n11c}	Y_{n1kc}	Y_{n1bc}	Y_{nj1c}	Y_{njkc}	$Y_{njb c}$	Y_{na1c}	Y_{nack}	Y_{nabc}	

Azpiindizeak:

- $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ($AXBXC$ tratamenduetako subjektuei dagokiena)
 $j = 1, 2, 3, \dots, a$ (A faktoreko maila bakoitzari dagokiona)
 $k = 1, 2, 3, \dots, b$ (B faktoreko maila bakoitzari dagokiona)
 $m = 1, 2, 3, \dots, c$ (C faktoreko maila bakoitzari dagokiona)

Taulan antzeman daiteke diseinuaren dimentsioek dakarten konplexutasuna. Irakurketa-lanak erraztu nahian bazterkiak ez ditugu jarri. Dena den, aurreko diseinuaren azalpen-egiturari jarraitu nahi diogunez, hurrengo taulan (IV.11. taula), T batukariak eta haien berbidurak erakustea komenigarria dela iruditzen zaigu.

IV.11. taula. *AXBXC diseinurako datuen taula, mailaz mailako baturak eta berbidurak.*

										$T_{...}^2$	
A											
a_l			a_j			a_a					
B	b_l	b_k	b_b	b_l	b_k	b_b	b_l	b_k	b_b		
C											
c_l										$T_{...l}^2$	
c_m										$T_{...m}^2$	
c_c										$T_{...c}^2$	
$T_{j..}^2$	$T_{.l..}^2$			$T_{.j..}^2$			$T_{.a..}^2$				
$T_{..k.}^2$	$T_{.ll.}$			$T_{.jl.}$			$T_{.al.}$			$T_{..l.}^2$	
		$T_{.lk.}$			$T_{.jk.}$			$T_{.ak.}$		$T_{..k.}^2$	
			$T_{.lb.}$			$T_{.jb.}$			$T_{.ab.}$	$T_{..b.}^2$	
GUZTIRA										$T_{...}^2$	

4.3.2. Talde arteko AXBXC diseinua, berbiduren baturen kalkulua

Aurrekoetan egin dugun moduan, oro har, ereduaren egiturako ekuazioan oinarritutako bi prozedura desberdin azaltzen ditugu.

OHIKO PROZEDURA

Eragin edo efektuen kalkuluetarako formulak:

- A faktorearen eragina: $SCA = \left(\frac{1}{bcn} \sum_{j=1}^b T_{j..}^2 \right) - C = \left[\frac{1}{bcn} \sum_{j=1}^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^a \sum_{m=1}^c Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C$
- B faktorearen eragina: $SCB = \left(\frac{1}{acn} \sum_{k=1}^b T_{..k.}^2 \right) - C = \left[\frac{1}{acn} \sum_{k=1}^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^a \sum_{m=1}^c Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C$
- C faktorearen eragina: $SCC = \left(\frac{1}{abn} \sum_{m=1}^c T_{...m}^2 \right) - C = \left[\frac{1}{abn} \sum_{m=1}^c \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C$
- A eta B faktoreen arteko elkarreragina edo interakzioa:

$$SCAB = \left[\left(\frac{1}{cn} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^c Y_{ijkm} \right)^2 \right) - C \right] - (SCA + SCB)$$

- A eta C faktoreen arteko elkarreragina edo interakzioa:

$$SCAC = \left[\left(\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^a \sum_{m=1}^c \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^b Y_{ijkn} \right)^2 \right) - C \right] - (SCA + SCC)$$

- B eta C faktoreen arteko elkarreragina edo interakzioa:

$$SCBC = \left[\left(\frac{1}{an} \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^a Y_{ijkn} \right)^2 \right) - C \right] - (SCB + SCC)$$

- A , B eta C faktoreen arteko elkarreragina edo interakzioa:

$$SCABC = \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijkn} \right)^2 \right) - C \right] - (SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC)$$

- Hondakinak edo erroreen aldakortasuna:

$$SCE = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{j=1}^a Y_{ijkn}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijkn} \right)^2$$

$$SCE = SCT - (SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC + SBAC)$$

- Aldakortasun orokorra kalkulatzeko formula: $SCC = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkn}^2 - C$

- Aurreko formuletan agerturiko C osagaia, azkenik,

$$C = \frac{1}{N} T^2 = \frac{1}{abcn} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkn} \right)^2$$

Formulak formula, ariketako datuei helduz, C osagai orokor horretatik abiatuta kalkuluei ekin diezaiegun.

$$C = \frac{1}{2.2.2.3} (22 + 20 + 18 + 9 + 10 + 8 + 14 + 13 + 14 + 35 + 29 + 33 + 16 + \\ + 18 + 14 + 34 + 30 + 32 + 28 + 29 + 25 + 12 + 16 + 15)^2 = \frac{(494)^2}{24} = 10168,167$$

C balioa behin ezagututa, faktoreek ekarritako aldakortasunak SCA , SCB eta SCC hurrenez hurren:

$$SCA = \frac{I}{bcn} [T_{..1}^2 + T_{..2}^2] - C$$

$$SCA = \frac{I}{2 \cdot 2 \cdot 3} [(225)^2 + (269)^2] - 10168,167 = 80,66$$

Dagoeneko $T_{j..}^2$ eta $T_{..k}^2$ osagaiak zein diren jakiteko lehen emandako azalpenari hel diezaiokegu. Notazio hori nahiko argia delakoan, B faktoreari dagokiona kalkula dezakegu:

$$SCB = \frac{I}{acn} [T_{..1}^2 + T_{..2}^2] - C$$

$$SCB = \frac{I}{2 \cdot 2 \cdot 3} [(231)^2 + (263)^2] - 10168,167 = 42,66$$

Pausoz pauso, aldakortasun orokorraren osagai gehigarriak kalkulatzeko ari gara. Hurrena C faktoreak dakarren aldakortasunari dagokio. Notazioa ulertzeko lehen eraikitako taulan aurki daitezke argibideak. Bien bitartean, hona hemen SCC :

$$SCC = \frac{I}{abn} [T_{...1}^2 + T_{...2}^2] - C$$

$$SCC = \frac{I}{2 \cdot 2 \cdot 3} [(231)^2 + (263)^2] - 10168,167 = 42,66$$

Ariketa honetan SCB eta SCC balio bertsukoak suertatu bazaizkigu ere, ez dago usterik beti horrela izan daitekeenik.

FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOAK: $SCAB$, $SCAC$, $SCBC$ eta $SCABC$

A eta B faktoreek elkarren artean ekarritako interakzioa:

$$SCAB = \left[\frac{I}{cn} (T_{.11}^2 + T_{.12}^2 + T_{.21}^2 + T_{.22}^2) \right] - (C + SCA + SCB)$$

$$SCAB = \left[\frac{I}{2 \cdot 3} ((87)^2 + (138)^2 + (144)^2 + (125)^2) \right] - (10168,167 + 80,66 + 42,66) = 204,17$$

A eta C faktoreek elkarren artean ekarritako interakzioa:

$$SCAC = \left[\frac{1}{bn} (T_{.1.1}^2 + T_{.1.2}^2 + T_{.2.1}^2 + T_{.2.2}^2) \right] - (C + SCA + SCC)$$

$$SCAC = \left[\frac{1}{2 \cdot 3} ((101)^2 + (124)^2 + (130)^2 + (139)^2) \right] - (10168,167 + 80,66 + 42,66) = 8,17$$

B eta C faktoreek elkarren artean ekarritako interakzioa:

$$SCBC = \left[\frac{1}{an} (T_{..11}^2 + T_{..12}^2 + T_{..21}^2 + T_{..22}^2) \right] - (C + SCB + SCC)$$

$$SCBC = \left[\frac{1}{2 \cdot 3} ((108)^2 + (123)^2 + (123)^2 + (140)^2) \right] - (1,0168167 + 4,266 + 4,266) = 0,17$$

A, B eta C hiru faktoreek elkarren artean ekarritako interakzioa:

$$SCABC = \left[\frac{1}{n} (T_{.111}^2 + T_{.112}^2 + T_{.121}^2 + T_{.122}^2 + T_{.211}^2 + T_{.212}^2 + T_{.221}^2 + T_{.222}^2) \right] - (C + SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC)$$

$$\left[\frac{1}{3} ((60)^2 + (27)^2 + (41)^2 + (97)^2 + (48)^2 + (96)^2 + (82)^2 + (43)^2) \right] = 11837,333$$

$$(10168,167 + 80,66 + 42,66 + 42,66 + 204,17 + 8,17 + 0,17) = 10546,657$$

$$SCABC = 11837,333 - 10546,657 = 1290,66$$

Ikus daitekeenez, T batugaien kopurua talde esperimentalen kopuruarekin bat dator, bi bider bi bider bi hain zuzen ere. Hau da, $AXBXC$ diseinuaren dimentsioa.

HONDAKINAK EDO ERROREEI DAGOKIEN ALDAKORTASUNA (SCE)

Aurrenik, puntuazioen berbiduren batura kalkulatzeko dugu:

$$\sum_j \sum_k \sum_m \sum_i Y_{ijk}^2 = [(22)^2 + (20)^2 + (18)^2 + (9)^2 + (10)^2 + (8)^2 + (14)^2 + (13)^2 + (14)^2 + (35)^2 + (29)^2 + (33)^2 + \dots$$

$$\dots + (16)^2 + (18)^2 + (14)^2 + (34)^2 + (30)^2 + (32)^2 + (28)^2 + (29)^2 + (25)^2 + (12)^2 + (16)^2 + (15)^2] = 11900$$

ABC interakzioak ekarritako aldakortasuna kalkulatzekoan honako balio hau aurkitu dugu:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_j \sum_k \sum_m \left(\sum_i Y_{ijk} \right)^2 = 11837,333$$

Azkenik, erroreei dagokien aldakortasuna (SCE):

$$SCE = 11900 - 11837,333 = 62,67$$

ALDAKORTASUN OROKORRAREN KALKULUA (SCT)

Badakigu jakin aldakortasun orokorra (SCT) aipatutako gainerako aldakortasun guztien batura dela, modu horretan kalkula genezake, hain zuzen ere. Halere, modu honetan errazagoa da:

$$SCT = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkm}^2 - C = 11900 - 10168,167 = 1731,83$$

Prozedura honi dagokion azkeneko ebazpena agertu baino lehenago *T* baturak (eta baturen berbidurak) nondik atera ditugun ondorengo taularen bitartez azalduko dugu. Oro har, ariketaren egiturari lotuko gatzazkio azalpen honetan baina, jakina denez, adibidea orokortuz edozein kasutarako balio lezake honako honek.

IV.12. taula. 2X2X2 diseinurako *BATUREN* taula, mailaz mailako baturak eta berbidurak.

	A				$T_{...}^2$
	a_1		a_2		
	b_1	b_2	b_1	b_2	
B					
C					
c_1	$T_{.111}$	$T_{.121}$	$T_{.211}$	$T_{.221}$	$T_{...1}^2$
c_2	$T_{.112}$	$T_{.122}$	$T_{.212}$	$T_{.222}$	$T_{...2}^2$
$T_{.j..}^2$	$T_{.1..}^2$		$T_{.2..}^2$		
$T_{..k.}^2$	$T_{.11.}$		$T_{.21.}$		$T_{..1.}^2$
		$T_{.12.}$		$T_{.22.}$	$T_{..2.}^2$
GUZTIRA					$T_{....}^2$

Ikusten denez, eredua zenbat eta konplexuagoa izan, taulak orduan eta zailagoak dira, nahasiagoak. Nolanahi ere, datuen eraketa argi batek kalkuluak (eskuz egiten direnean) nabarmen erraz ditzake. Gomendagarria da, beraz, datuen taulak ahalik eta txukunen egituratzea kalkuluei heldu aurretik. Ordenagailu bitarteko ebazpena lortzen badugu ere, ikerketa txostenetan datuen aurkezpenak badu eduki bere garrantzia txosten eta ebazpenaren ulergarritasunean.

Oro har, faktoreek ekarritako aldakortasun-neurriak, hondakin edo erroreetatik eratorritako aldakortasunaren eta faktoreen arteko konbinaziotik sor daitezkeen aldakortasun-neurriak aldakortasun orokorraren zatiak dira, zati batukorrak, jakina. Azken horiek (faktoreen arteko elkarrenerginak edo interakzioak) beti

gertatzen ez badira ere, gure azalpen horiek kontuan hartzea erabaki dugu. Nolanahi ere, interakzioak gertatzen diren ala ez, arazo estatistikoa baino gehiago eredu teorikoaren ondorio direla ulertu beharra dago. Hots, ikertzaileak darabiltzan diseinu eta faktoreak direla eta alde zurretik erabaki behar du haien artean interakzioak aintzat hartuko dituen ala ez.

Esate baterako, *jatorrizko hiztun-tipologia* (elebakarrak, aldibereko elebidunak, elebidun goiztiarrak eta elebidun beran-tiarrak), *sexua* (gizonezkoak, emakumezkoak) eta *sorterria* (Euskal Herria edo beste nonbait) hiru aldagai aske edo faktore hauek *hizkuntz gaitasuna* delako mendeko aldagaian eragin badezakete ere, ezin esan daiteke alde zurretik guztien arteko interakzioak onargarriak direnik. *Jatorrizko hiztun tipologia* eta *sorterria* direlako aldagaien arteko interakzioa badela izan, duda izpirik ez daukagu. Baina nekez aldarrika daiteke *sorterriaren* eta *sexuaren* arteko interakziorik dagoenik. Izan ere, oinarri-oinarrian aldagai horiek, *sexua* eta *sorterria*, elkarren artean independenteak dira. Hori da hain zuzen interakziorik dagoen ala ez erabakitzeko erabili behar dugun irizpidea, ikuspegi teorikoa, alegia. Azkenik, *sexua* eta *jatorrizko hiztun tipologia* direlako aldagai askeen artean interakziorik dagoen ala ez, ikertzaileak ikuspegi teorikotik aztertu beharko luke aurrenean.

Analisi estatistikoa interakzioa, edozein interakzio azter daiteke, eta, esanguratsua izanda ere, ez dakar ezinbestean interakzio hori benetakoa denik. Are guxtiago esandako aldagai horiek benetan independenteak direla arrazoitu daitekeen. Horrela, bada, interakzioa teorikoki adierazgarria, onargarria eta estatistikoki esanguratsua denean hartuko dugu aintzakotzat. Aipatutako adibideari helduz, *jatorrizko hiztun tipologiaren* eta *sorterriaren* arteko interakzioak honako hau adieraziko liguke: bietako batek hizkuntz gaitasunean duen eragina beste faktoreak hartzen dituen mailen arabera aldatzen dela. Hots, aldagai bakoitzaren efektua aldakorra da beste aldagaia aldatzen den neurrian eta, beraz, ezin esan dezakegu, ez *jatorrizko hiztun tipologiak* ez eta *sorterriak* berak bakarrik ere hizkuntz gaitasunean eragiten dutenik. Gogorarazi behar dugu, orobat, interakzioak ez duela faktoreen eraginen batura soila suposatzen, faktoreen arteko interakzioak aldakortasunaren azalpenean biek eta zeinek bere aldetik baino zer edo zer gehiago dakarrelako.

Dena den, gomendio horiek eman eta gero, lantzen ari garen bariantza-analisi mota honen azkeneko taula eraikitzeari lotuko gatzazkio.

IV.13. taula. *AXBXC* diseinurako bariantza-analisiaren taula, eredu orokorra.

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBID. BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	<i>SCA</i>	$a - 1$	$MCA = SCA / (a - 1)$	$F_A = \frac{MCA}{MCE}$
B faktoreko mailen artekoa	<i>SCB</i>	$b - 1$	$MCB = SCB / (b - 1)$	$F_B = \frac{MCB}{MCE}$
C faktoreko mailen artekoa	<i>SCC</i>	$c - 1$	$MCC = SCC / (c - 1)$	$F_C = \frac{MCC}{MCE}$
A B faktoreen arteko interakzioa	<i>SCAB</i>	$(a - 1)(b - 1)$	$MCAB = SCAB / (a - 1)(b - 1)$	$F_{AB} = \frac{MCAB}{MCE}$
A C faktoreen arteko interakzioa	<i>SCAC</i>	$(a - 1)(c - 1)$	$MCAC = SCAC / (a - 1)(c - 1)$	$F_{AC} = \frac{MCAC}{MCE}$
B C faktoreen arteko interakzioa	<i>SCBC</i>	$(b - 1)(c - 1)$	$MCBC = SCBC / (b - 1)(c - 1)$	$F_{BC} = \frac{MCBC}{MCE}$
A B C faktoreen arteko interakzioa	<i>SCABC</i>	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$MCABC = SCABC / (a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$F_{ABC} = \frac{MCABC}{MCE}$
Taldeen barnekoa edo hondakinak edo erroreak	<i>SCE</i>	$abc(n - 1)$	$MCE = SCE / abc(n - 1)$	
GUZTIRA	<i>SCT</i>	$abcn - 1$		

Aldakortasun-sorburuak kasu honetan interakzio kopuruen arabera dira, taulan posible diren guztiak agertu ditugu, zortzi izan daitezke alegia. Aldakortasun-sorburuak direla-eta, ezinbestean betetzen da:

$$SCT = SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC + SCABC + SCE$$

Askatasun-graduak, beste alderditik, faktoreen mailen (a b eta c) eta subjektu kopuruaren (n) arabera dira, non $abcn$ (N) guztirako subjektu kopurua den. Taulan bertan ikus daiteke zein diren aldakortasun-neurri bakoitzari dagozkion askatasun-graduak (ikus IV.13. taula).

Ariketari dagokion ANOVaren taula bigarren prozedurako kalkuluak erakutsi eta gero azalduko dugu.

4.3.3. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena

Aurreko kapituluko ildoari jarraituz, honetan berriz ere, formulak agertzen ditugu aurren:

1. A FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCA):

$\alpha_j = \mu_{j..} - \mu$ A faktorearen ekarpena.

$\mu = \frac{1}{abcn} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkm}$...Batez besteko aritmetiko orokorra.

$\mu_{j..} = \frac{1}{bcn} \left(\sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)$...A faktorearen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCA = bcn \sum_{j=1}^a \alpha_j^2$ A faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.

2. B FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCB):

$\beta_j = \mu_{.k.} - \mu$ B faktorearen ekarpena.

$\mu_{.k.} = \frac{1}{acn} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)$...B faktorearen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCB = acn \sum_{k=1}^b \beta_k^2$ B faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.

3. C FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCC):

$\gamma_m = \mu_{...m} - \mu$ C faktorearen ekarpena.

$\mu_{...m} = \frac{1}{abn} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)$...C faktorearen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCC = acn \sum_{m=1}^c \gamma_m^2$ C faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.

4. AB FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (SCAB):

$(\alpha\beta)_{jk} = \mu_{jk.} - (\mu + \alpha_j + \beta_k)$ AB interakzioaren ekarpena.

$\mu_{jk.} = \frac{1}{cn} \left(\sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)$ AB faktoreen arabera taldeen batez bestekoak.

$SCAB = cn \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{jk}^2$...AB interakzioaren talde arteko aldakortasuna.

5. AC FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (SCAC):

$$(\alpha\gamma)_{jm} = \mu_{j.m} - (\mu + \alpha_j + \gamma_m) \text{ ..AC interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{j.m} = \frac{1}{bn} \left(\sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right) \text{AC faktoreen araberako taldeen batez bestekoak.}$$

$$SCAC = bn \sum_{j=1}^a \sum_{m=1}^c (\alpha\gamma)_{jm}^2 \text{AC interakzioaren talde arteko aldakortasuna.}$$

6. BC FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (SCBC):

$$(\beta\gamma)_{km} = \mu_{.km} - (\mu + \beta_k + \gamma_m) \text{ ...BC interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{.km} = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right) \text{BC faktoreen araberako taldeen batez bestekoak.}$$

$$SCBC = an \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c (\beta\gamma)_{km}^2 \text{BC interakzioaren talde arteko aldakortasuna.}$$

7. ABC FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOAREN ALDAKORTASUNA (SCABC):

$$(\alpha\beta\gamma)_{jkm} = \mu_{jkm} - (\mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_m + (\alpha\beta)_{jk} + (\alpha\gamma)_{jm} + (\beta\gamma)_{km}) \text{ ABC interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{jkm} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right) \text{ABC faktoreen araberako taldeen batez bestekoak.}$$

$$SCABC = n \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c (\alpha\beta\gamma)_{jkm}^2 \text{ .ABC interakzioaren talde arteko aldakortasuna.}$$

8. HONDAKIN EDO ERROREEI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCE):

$$\varepsilon_{ijkm} = Y_{ijkm} - (\mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_m + (\alpha\beta)_{jk} + (\alpha\gamma)_{jm} + (\beta\gamma)_{km} + (\alpha\beta\gamma)_{jkm}) \text{ Zoriaren ekarpena.}$$

$$SCE = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ijkm}^2 \text{Hondakinak, talde barneko aldakortasuna.}$$

Ondorioz,

$$\alpha_1 = \mu_{1..} - \mu = 18,75 - 20,58 = -1,83$$

$$\alpha_2 = \mu_{2..} - \mu = 22,41 - 20,58 = 1,83$$

B BEKTOREA

B faktoreak ekarritako aldakortasunari dagokiolarik, B faktoreko mailen batez bestekoak kalkulatzeari lotuko gatzaizkio. Horrela, B faktore nagusiko batez bestekoak hurrenez hurren:

$$\mu_{..1} = (1/2 \times 2 \times 3) [22+20+18+9+10+8+16+18+14+34+30+32] = 19,25$$

$$\mu_{..2} = (1/2 \times 2 \times 3) [14+13+14+35+29+33+28+29+25+12+16+15] = 21,91$$

Ondorioz,

$$\beta_1 = \mu_{..1} - \mu = 19,25 - 20,58 = -1,33$$

$$\beta_2 = \mu_{..2} - \mu = 21,91 - 20,58 = 1,33$$

$$B = \{\beta\} =$$

$$\begin{pmatrix} -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \end{pmatrix}$$

C BEKTOREA

C faktoreak ekarritako aldakortasunari dagokionez, C faktoreko mailen batez bestekoak kalkulatzeari lotuko gatzaizkio. Aurrekoan bezala honetan, batez bestekoak hurrenez hurren:

$$\mu_{..1} = (1/2 \times 2 \times 3) [22+20+18+14+13+14+16+18+14+28+29+25] = 19,25$$

$$\mu_{..2} = (1/2 \times 2 \times 3) [9+10+8+35+29+33+34+30+32+12+16+15] = 21,91$$

Ondorioz,

$$\gamma_1 = \mu_{..1} - \mu = 19,25 - 20,58 = -1,33$$

$$\gamma_2 = \mu_{..2} - \mu = 21,91 - 20,58 = 1,33$$

$$C = \{\gamma\} =$$

$$\begin{pmatrix} -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ -1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \\ 1,33 \end{pmatrix}$$

Interakzioak:

$\{\alpha\beta\}$ BEKTOREA

$\{\alpha\beta\}$ bektoreak ekarritako aldakortasunari interakzioarena esaten diogu. Hau da, A eta B faktoreen artean azaldutako aldakortasuna.

$$\begin{aligned}\mu_{11.} &= (1/2 \times 3) [22+20+18+9+10+8] = 14,5 \\ \mu_{12.} &= (1/2 \times 3) [14+13+14+35+29+33] = 23 \\ \mu_{21.} &= (1/2 \times 3) [16+18+14+34+30+32] = 24 \\ \mu_{22.} &= (1/2 \times 3) [28+29+25+12+16+15] = 20,83\end{aligned}$$

Ondorioz,

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)_{11} &= \mu_{11.} - \mu - \alpha_1 - \beta_1 = 14,5 - 20,58 - (-1,83) - (-1,33) = -2,91 \\ (\alpha\beta)_{12} &= \mu_{12.} - \mu - \alpha_1 - \beta_2 = 23 - 20,58 - (-1,83) - 1,33 = 2,91 \\ (\alpha\beta)_{21} &= \mu_{21.} - \mu - \alpha_2 - \beta_1 = 24 - 20,58 - 1,83 - (-1,33) = 2,91 \\ (\alpha\beta)_{22} &= \mu_{22.} - \mu - \alpha_2 - \beta_2 = 20,83 - 20,58 - 1,83 - 1,33 = -2,91\end{aligned}$$

$\{\alpha\gamma\}$ BEKTOREA

$\{\alpha\gamma\}$ bektoreak ekarritako aldakortasunari interakzioarena esaten diogu. Hau da, A eta C faktoreen artean azaldutako aldakortasuna:

$\mu_{j.m}$ kalkulatu:

$$\begin{aligned}\mu_{1.1} &= (1/2 \times 3) [22+20+18+14+13+14] = 16,83 \\ \mu_{1.2} &= (1/2 \times 3) [9+10+8+35+29+33] = 20,66 \\ \mu_{2.1} &= (1/2 \times 3) [16+18+14+28+29+25] = 21,66 \\ \mu_{2.2} &= (1/2 \times 3) [34+30+32+12+16+15] = 23,16\end{aligned}$$

Ondorioz,

$$\begin{aligned}(\alpha\gamma)_{11} &= \mu_{1.1} - \mu - \alpha_1 - \gamma_1 = 16,83 - 20,58 - (-1,83) - (-1,33) = -0,58 \\ (\alpha\gamma)_{12} &= \mu_{1.2} - \mu - \alpha_1 - \gamma_2 = 20,66 - 20,58 - (-1,83) - 1,33 = 0,58 \\ (\alpha\gamma)_{21} &= \mu_{2.1} - \mu - \alpha_2 - \gamma_1 = 21,66 - 20,58 - 1,83 - (-1,33) = 0,58 \\ (\alpha\gamma)_{22} &= \mu_{2.2} - \mu - \alpha_2 - \gamma_2 = 23,16 - 20,58 - 1,83 - 1,33 = -0,58\end{aligned}$$

$$\{\alpha\beta\} = \begin{pmatrix} -2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ 2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \\ -2,91 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha\gamma\} = \begin{pmatrix} -0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \\ -0,58 \end{pmatrix}$$

$\{\beta\gamma\}$ BEKTOREA

$\{\beta\gamma\}$ bektoreak ekarritako aldakortasunari interakzioarena esaten diogu. Hau da, B eta C faktoreen artean azaldutako aldakortasuna:

$\mu_{.km}$ kalkulatz:

$$\mu_{.11} = (1/2 \times 3) [22+20+18+16+18+14] = 18$$

$$\mu_{.12} = (1/2 \times 3) [9+10+8+34+30+32] = 20,5$$

$$\mu_{.21} = (1/2 \times 3) [14+13+14+28+29+25] = 20,5$$

$$\mu_{.22} = (1/2 \times 3) [35+29+33+12+16+15] = 23,33$$

Ondorioz,

$$(\beta\gamma)_{11} = \mu_{.11} - \mu - \beta_1 - \gamma_1 = 18 - 20,58 - (-1,33) - (-1,33) = 0,08$$

$$(\beta\gamma)_{12} = \mu_{.12} - \mu - \beta_1 - \gamma_2 = 20,5 - 20,58 - (-1,33) - 1,33 = -0,08$$

$$(\beta\gamma)_{21} = \mu_{.21} - \mu - \beta_2 - \gamma_1 = 20,5 - 20,58 - 1,33 - (-1,33) = -0,08$$

$$(\beta\gamma)_{22} = \mu_{.22} - \mu - \beta_2 - \gamma_2 = 23,33 - 20,58 - 1,33 - 1,33 = 0,08$$

$$\{\beta\gamma\} = \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \\ -0,08 \\ -0,08 \\ -0,08 \\ -0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \\ -0,08 \\ -0,08 \\ -0,08 \\ -0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \\ 0,08 \end{pmatrix}$$

 $\{\alpha\beta\gamma\}$ BEKTOREA

$\{\alpha\beta\gamma\}$ bektoreak ekarritako aldakortasunari interakzioarena esaten diogu. Hau da, A , B eta C faktoreen artean azaldutako aldakortasuna:

μ_{jkm} kalkulatz:

$$\mu_{111} = (1/3) [22+20+18] = 20$$

$$\mu_{211} = (1/3) [16+18+14] = 16$$

$$\mu_{112} = (1/3) [9+10+8] = 9$$

$$\mu_{212} = (1/3) [34+30+32] = 32$$

$$\mu_{121} = (1/3) [14+13+14] = 13,66$$

$$\mu_{221} = (1/3) [28+29+25] = 27,33$$

$$\mu_{122} = (1/3) [35+29+33] = 32,33$$

$$\mu_{222} = (1/3) [12+16+15] = 14,33$$

Ondorioz,

$$(\alpha\beta\gamma)_{111} = \mu_{111} - \mu - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - (\alpha\beta)_{11} - (\alpha\gamma)_{11} - (\beta\gamma)_{11}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{111} = 20 - 20,58 - (-1,83) - (-1,33) - (-1,33) - (-2,91) - (-0,58) - 0,08 =$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{112} = \mu_{112} - \mu - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_2 - (\alpha\beta)_{11} - (\alpha\gamma)_{12} - (\beta\gamma)_{12}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{112} = 9 - 20,58 - (-1,83) - (-1,33) - 1,33 - (-2,91) - 0,58 - (-0,08) =$$

$$\{\alpha\beta\gamma\} = \begin{pmatrix} 7,33 \\ 7,33 \\ 7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ 7,33 \\ 7,33 \\ 7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ -7,33 \\ 7,33 \\ 7,33 \\ 7,33 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{121} = \mu_{121} - \mu - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_1 - (\alpha\beta)_{12} - (\alpha\gamma)_{11} - (\beta\gamma)_{21}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{121} = 13,66 - 20,58 - (-1,83) - 1,33 - (-1,33) - 2,91 - (-0,58) - (-0,08) = -7,33$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{122} = \mu_{122} - \mu - \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_2 - (\alpha\beta)_{12} - (\alpha\gamma)_{12} - (\beta\gamma)_{22}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{122} = 32,33 - 20,58 - (-1,83) - 1,33 - 1,33 - 2,91 - 0,58 - 0,08 = 7,33$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{211} = \mu_{211} - \mu - \alpha_2 - \beta_1 - \gamma_1 - (\alpha\beta)_{21} - (\alpha\gamma)_{21} - (\beta\gamma)_{11}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{211} = 16 - 20,58 - 1,83 - (-1,33) - (-1,33) - 2,91 - 0,58 - 0,08 = -7,33$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{212} = \mu_{212} - \mu - \alpha_2 - \beta_1 - \gamma_2 - (\alpha\beta)_{21} - (\alpha\gamma)_{22} - (\beta\gamma)_{12}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{212} = 32 - 20,58 - 1,83 - (-1,33) - 1,33 - 2,91 - (-0,58) - (-0,08) = 7,33$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{221} = \mu_{221} - \mu - \alpha_2 - \beta_2 - \gamma_1 - (\alpha\beta)_{22} - (\alpha\gamma)_{21} - (\beta\gamma)_{21}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{221} = 27,33 - 20,58 - 1,83 - 1,33 - (-1,33) - (-2,91) - 0,58 - (-0,08) = 7,33$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{222} = \mu_{222} - \mu - \alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 - (\alpha\beta)_{22} - (\alpha\gamma)_{22} - (\beta\gamma)_{22}$$

$$(\alpha\beta\gamma)_{222} = 14,33 - 20,58 - 1,83 - 1,33 - 1,33 - (-2,91) - 0,58 - (-0,08) = -7,33$$

E BEKTOREA, HONDAKIN EDO ERROREEN KALKULUA

Aurrekoetan moduan, sailka eta banan-banan kalkulatzeko ditugu:

$$\varepsilon_{ijk} = Y_{ijk} - \left[\mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_m + (\alpha\beta)_{jk} + (\alpha\gamma)_{jm} + (\beta\gamma)_{km} + (\alpha\beta\gamma)_{jkm} \right]$$

$$\varepsilon_{i111} = Y_{i111} - (\mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + (\alpha\beta)_{11} + (\alpha\gamma)_{11} + (\beta\gamma)_{11} + (\alpha\beta\gamma)_{111})$$

$$\varepsilon_{i111} = Y_{i111} - (20,58 + (-1,83) + (-1,33) + (-1,33) + (-2,91) + (-0,58) + 0,08 + 7,33) = Y_{i111} - 20$$

- Y_{i111} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1111} = 22 - 20 = 2$$

$$\varepsilon_{2111} = 20 - 20 = 0$$

$$\varepsilon_{3111} = 18 - 20 = -2$$

$$\varepsilon_{i112} = Y_{i112} - (\mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2 + (\alpha\beta)_{11} + (\alpha\gamma)_{12} + (\beta\gamma)_{12} + (\alpha\beta\gamma)_{112})$$

$$\varepsilon_{i112} = Y_{i112} - (20,58 + (-1,83) + (-1,33) + 1,33 + (-2,91) + 0,58 + (-0,08) + (-7,33)) = Y_{i112} - 9$$

- Y_{i112} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1112} = 9 - 9 = 0$$

$$\varepsilon_{2112} = 10 - 9 = 1$$

$$\varepsilon_{3112} = 8 - 9 = -1$$

$$\varepsilon_{i121} = Y_{i121} - (\mu + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 + (\alpha\beta)_{12} + (\alpha\gamma)_{11} + (\beta\gamma)_{21} + (\alpha\beta\gamma)_{121})$$

$$\varepsilon_{i121} = Y_{i121} - (20,58 + (-1,83) + 1,33 + (-1,33) + 2,91 + (-0,58) + (-0,08) + (-7,33)) = Y_{i121} - 13,66$$

- Y_{i121} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1121} = 14 - 13,66 = 0,33$$

$$\varepsilon_{2121} = 13 - 13,66 = -0,66$$

$$\varepsilon_{3121} = 14 - 13,66 = 0,33$$

$$\varepsilon_{i122} = Y_{i122} - (\mu + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_2 + (\alpha\beta)_{12} + (\alpha\gamma)_{12} + (\beta\gamma)_{22} + (\alpha\beta\gamma)_{122})$$

$$\varepsilon_{i122} = Y_{i122} - (20,58 + (-1,83) + 1,33 + 1,33 + 2,91 + 0,58 + 0,08 + 0,08 + 7,33 = Y_{i122} - 32,33$$

- Y_{i122} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1122} = 35 - 32,33 = 2,66$$

$$\varepsilon_{2122} = 29 - 32,33 = -3,33$$

$$\varepsilon_{3122} = 33 - 32,33 = 0,66$$

$$\varepsilon_{i211} = Y_{i211} - (\mu + \alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 + (\alpha\beta)_{21} + (\alpha\gamma)_{21} + (\beta\gamma)_{11} + (\alpha\beta\gamma)_{211})$$

$$\varepsilon_{i211} = Y_{i211} - (20,58 + 1,83 + (-1,33) + (-1,33) + 2,91 + 0,58 + 0,08 + (-7,33) = Y_{i211} - 16$$

- Y_{i211} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1211} = 16 - 16 = 0$$

$$\varepsilon_{2211} = 18 - 16 = 2$$

$$\varepsilon_{3211} = 14 - 16 = -2$$

$$\varepsilon_{i212} = Y_{i212} - (\mu + \alpha_2 + \beta_1 + \gamma_2 + (\alpha\beta)_{21} + (\alpha\gamma)_{22} + (\beta\gamma)_{12} + (\alpha\beta\gamma)_{212})$$

$$\varepsilon_{i212} = Y_{i212} - (20,58 + 1,83 + (-1,33) + 1,33 + 2,91 + (-0,58) + (-0,08) + 7,33 = Y_{i212} - 32$$

- Y_{i212} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1212} = 34 - 32 = 2$$

$$\varepsilon_{2212} = 30 - 32 = -2$$

$$\varepsilon_{3212} = 32 - 32 = 0$$

$$\varepsilon_{i221} = Y_{i221} - (\mu + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_1 + (\alpha\beta)_{22} + (\alpha\gamma)_{21} + (\beta\gamma)_{21} + (\alpha\beta\gamma)_{221})$$

$$\varepsilon_{i221} = Y_{i221} - (20,58 + 1,83 + 1,33 + (-1,33) + (-2,91) + 0,58 + (-0,08) + 7,33 = Y_{i221} - 27$$

- Y_{i221} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1221} = 28 - 27,33 = 0,66$$

$$\varepsilon_{2221} = 29 - 27,33 = 1,66$$

$$\varepsilon_{3221} = 25 - 27,33 = -2,33$$

$$\varepsilon_{i222} = Y_{i222} - (\mu + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + (\alpha\beta)_{22} + (\alpha\gamma)_{22} + (\beta\gamma)_{22} + (\alpha\beta\gamma)_{222})$$

$$\varepsilon_{i222} = Y_{i222} - (20,58 + 1,83 + 1,33 + 1,33 + (-2,91) + (-0,58) + 0,08 + (-7,33) = Y_{i222} - 14,33$$

- Y_{i222} puntuazioen arabera:

$$\varepsilon_{1222} = 12 - 14,33 = -2,33$$

$$\varepsilon_{2222} = 16 - 14,33 = 1,66$$

$$\varepsilon_{3222} = 15 - 14,33 = 0,66$$

$$E = \{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0,33 \\ -0,66 \\ 0,33 \\ 2,66 \\ -3,33 \\ 0,66 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0,66 \\ 1,66 \\ -2,33 \\ -2,33 \\ 1,66 \\ 0,66 \end{pmatrix}$$

Azkenik, berbiduren baturak jakiteko, bektoreen eta beraien iraulien arteko biderkadurak kalkulatzeko biderrik ez dugu egin behar. Honela hain zuzen ere,

$$SCA = \{\alpha\}^T \{\alpha\} = 80,66$$

$$SCAC = \{\alpha\gamma\}^T \{\alpha\gamma\} = 8,17$$

$$SCB = \{\beta\}^T \{\beta\} = 42,66$$

$$SCBC = \{\beta\gamma\}^T \{\beta\gamma\} = 0,17$$

$$SCC = \{\gamma\}^T \{\gamma\} = 42,66$$

$$SCABC = \{\alpha\beta\gamma\}^T \{\alpha\beta\gamma\} = 1290,66$$

$$SCAB = \{\alpha\beta\}^T \{\alpha\beta\} = 204,17$$

$$SCE = \{\varepsilon\}^T \{\varepsilon\} = 62,67$$

Gogoan izan behar dugu ondorengoa betetzen dela:

$$SCT = SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC + SCABC + SCE = 1731,83$$

Horiek horrela, bariantza-analisiaren taula honela geratzen zaigu:

IV.14. taula. *AXBXC diseinurako bariantza-analisiaren taula, adibide praktikoa.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	$SCA = 80,66$	$a-1 = 1$	$MCA = 80,66$	$F_A = \frac{80,66}{3,91} = 20,59$
B faktoreko mailen artekoa	$SCB = 42,66$	$b-1 = 1$	$MCB = 42,66$	$F_B = \frac{42,66}{3,91} = 10,89$
C faktoreko mailen artekoa	$SCC = 42,66$	$c-1 = 1$	$MCC = 42,66$	$F_C = \frac{42,66}{3,91} = 10,89$
A B faktoreen arteko interakzioa	$SCAB = 204,17$	$(a-1)(b-1) = 1$	$MCAB = 204,17$	$F_{AB} = \frac{204,17}{3,91} = 52,21$
A C faktoreen arteko interakzioa	$SCAC = 8,17$	$(a-1)(c-1) = 1$	$MCAC = 8,17$	$F_{AC} = \frac{8,17}{3,91} = 2,08$
B C faktoreen arteko interakzioa	$SCBC = 0,17$	$(b-1)(c-1) = 1$	$MCBC = 0,17$	$F_{BC} = \frac{0,17}{3,91} = 0,04$
A B C faktoreen arteko interakzioa	$SCABC = 1290,66$	$(a-1)(b-1)(c-1) = 1$	$MCABC = 1290,66$	$F_{ABC} = \frac{1290,66}{3,91} = 330,09$
Taldeen barnekoa edo hondakinak edo erroreak	$SCE = 62,67$	$abc(n-1) = 16$	$MCE = 3,91$	
GUZTIRA	$SCT = 1731,83$	$abcn-1 = 23$		

Dagoeneko, faktoreek eta haien artean sortutako interakzioek azaldutako aldakortasuna esanguratsua ote den erabaki dezakegu. Horretarako, ohi denez, F tauletara jotzen dugu. Demagun, % 99ko konfiantza-maila ezartzen dugula ($\alpha = 0,01$) eskuinaldeko hipotesi-testa delarik, orduan:

IV.15. taula. % 99ko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko erkaketak.

	Tauletako $F_{0,99; u1/u2}$	Behatutako F	Desberdintza
A faktorea	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_A = 20,59$	$20,59 > 8,53$
B faktorea	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_B = 10,89$	$10,89 > 8,53$
C faktorea	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_C = 10,89$	$10,89 > 8,53$
AB interakzioa	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_{AB} = 52,21$	$52,21 > 8,53$
AC interakzioa	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_{AC} = 2,08$	$2,08 < 8,53$
BC interakzioa	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_{BC} = 0,04$	$0,04 < 8,53$
ABC interakzioa	$F_{0,99; 1/16} = 8,53$	$F_{ABC} = 330,09$	$330,09 > 8,53$

Desberdintzetan antzeman daitekeenez, hiru faktoreek ekarritako aldakortasuna esanguratsua da ($p \leq 0,01$). Interakzioetan, ostera, A eta B faktoreen artean eta hiru faktoreen artean sortutako interakzioek soilik dakarte aldakortasun esanguratsua. Ondorioz, *botika*, *banakako psikoterapia* zein *sendi-psikoterapia* (A, B eta C faktoreak), zein bere aldetik HIESak jotakoenganako garapen fisiko zein psikologikoan aldagai adierazgarriak direla erabaki dezakegu. Halaber, botikaren eta banakako psikoterapiaren arteko interakzioa eta erabilitako hiru tratamenduen arteko interakzioa ($p \leq 0,01$) oso esanguratsuak dira.

Diseinua *a posteriori* aztertuko bagenu, AC eta BC deitutako interakzioak ez dira esanguratsuak. Hau da, teoriaren ikuspegi hotzetik, ezin esan dezakegu *botikaren* (A) eta *sendi-psikoterapiaren* (C) arteko interakziorik dagoenik. Era berean, HIESaren garapenean, *banakako psikoterapiaren* (B) eta *sendi-psikoterapiaren* (C) arteko interakziorik ez dago. Gerta daitekeena da aipatu faktore horiek elkarren askeak —independenteak— izatea. Eta, elkarren askeak direlakoan, interakziorik ezinezkoa dela erabaki behar dugu.

Demagun horrelako interakzioak aldeztu aurretik baztertzeko ditugula. Hau da, gure ustez AC eta BC direlako faktoreen arteko itxurazko interakzioak ez duela HIESaren garapenean ezer berririk ekartzen. Orduan, interakzio horiei egotzitako aldakortasuna, erroreari dagokiena besterik ez litzateke izango. Hondakinen aldakortasunari gehitu beharko genioke beraz. Honela hain zuzen ere:

$$SCE_b = SCAC + SCBC + SCE$$

$$\text{Orokorrean, } SCT = SCA + SCB + SCC + SCAB + SCABC + SCE_b$$

IV.16. taula. *AXBXC diseinurako bariantza-analisiaren taula.*
(AC eta BC interakzioak izan ezik).

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ-BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	SCA = 80,66	$a-1 = 1$	MCA = 80,66	$F_A = \frac{80,66}{4,43} = 18,20$
B faktoreko mailen artekoa	SCB = 42,66	$b-1 = 1$	MCB = 42,66	$F_B = \frac{42,66}{4,43} = 9,63$
C faktoreko mailen artekoa	SCC = 42,66	$c-1 = 1$	MCC = 42,66	$F_C = \frac{42,66}{4,43} = 9,63$
A B faktoreen arteko interakzioa	SCAB = 204,17	$(a-1)(b-1) = 1$	MCAB = 204,17	$F_{AB} = \frac{204,17}{4,43} = 46,08$
A B C faktoreen arteko interakzioa	SCABC = 1290,66	$(a-1)(b-1)(c-1) = 1$	MCABC = 1290,66	$F_{ABC} = \frac{1290,66}{4,43} = 291,34$
Taldeen barnekoa edo hondakinak edo erroreak	$SCE_b = 71,01$	$abc(n-1) = 16$	MCE = 4,43	
GUZTIRA	SCT = 1731,83	$abcn-1 = 23$		

Lehen ezarri dugun konfiantza-maila bera erabiliz, honela geratuko litzai-guke:

IV.17. taula. *F estatistikoaren arteko eraketak ($\alpha=0,01$).*

	Tauletako $F_{0,99;v1/v2}$	Behatutako F	Desberdintza
A faktorea	$F_{0,99;1/16} = 8,53$	$F_A = 18,20$	$18,20 > 8,53$
B faktorea	$F_{0,99;1/16} = 8,53$	$F_B = 9,63$	$9,63 > 8,53$
C faktorea	$F_{0,99;1/16} = 8,53$	$F_C = 9,63$	$9,63 > 8,53$
AB interakzioa	$F_{0,99;1/16} = 8,53$	$F_{AB} = 46,08$	$46,08 > 8,53$
ABC interakzioa	$F_{0,99;1/16} = 8,53$	$F_{ABC} = 291,34$	$291,34 > 8,53$

Funtsean, aurreko taularekin erkatuz gero, aldaketarik ez dago. Irizpide zorrotzagoa erabiliko bagenu, B eta C faktoreek ekarritako aldakortasunak ez lirateke esanguratsuak izango; egia esanda, aurreko kasuan ere berdin gerta zitekeen. Nolanahi ere, teoriaren ikuspegitik zuzenagoa da ezinezkoak diren interakzioak aldeztu aurretik ereduak baztertzea.

4.4. TALDE BARNEKO EDO NEURKETA ERREPIKATUEN DISEINU ESPERIMENTAL BAKUNA (TRATAMENDUAK X SUBJEKTUAK)

Diseinu esperimental honetan aldagai aske edo faktore bakarra eta mendeko aldagai bakarra ere erabiltzen ditugu. Ohi denez, mendeko aldagaia zorizko aldagaia den bitartean, aldagai askea maila kopuru jakin batean banatzen da —bitan edo ge-

hiagotan—. Aipatu mailak, ikertzaileak erabakitzen dituen tratamenduei dagozkie, hain zuzen ere. Eredu hauetan subjektu guztiek tratamendu guztiak jasotzen dituzte.

Gauzak horrela, diseinu hauetan subjektuek eragindako aldakortasuna bereizi behar dugu hondakin edo errorearen aldakortasunetik. Azken buruan, subjektuen arteko desberdintasunak zoriak eraginda badira ere, gure beste aztergai bilakatzen dira. Esan genezake, neurri batean, talde arteko diseinuen aldetik, talde barneko diseinuak zorrotzagoak direla.

Talde arteko diseinuetan, subjektuen arteko desberdintasunak errore-bariantzaren zati bat dira. Talde barneko diseinuetan, berriz, subjektu talde bakarra dugunez gero, subjektuen arteko desberdintasunak errore-bariantzatik desagerrarazten ditugu, hots, kontrolpean ditugu; ikertzaileak estimatu nahi dituen efektuak —faktoreek eragindako efektuak— kalkulatzeko, diferentzia horrek ez du zentzurik. Subjektuen arteko aldakortasuna irizpide gisa ezin erabil daiteke. Dena den, diseinu zorrotzagoa izateak ez dakar, ezinbestean, hondakin edo erroreak ez dagoenik. Subjektu bakoitzak tratamendu esperimentalen jarraipen berbera izanagatik, jokabide desberdina edo taldearen batez bestekoarekiko desbiderapen desberdina ager baitezake. Horregatik, azaldu gabeko aldakortasuna, edo erkaketa-irizpidea, talde barneko diseinuetan, tratamendu —nahiz tratamendu edo tratamendu-konbinaketa (diseinu faktorialetan)— bakoitzaren eta subjektuaren arteko interakzioa da.

Edozelan ere, eratutako neurketa errepikatuen diseinu esperimental bakunari honako egiturako ekuazioa dagokio: $Y_{ij} = \mu + \pi_i + \alpha_j + (\pi\alpha)_{ij}$
Eta ekuazio horretan:

- Y_{ij} A aldagaiaren j . mailari dagokion i . subjektuaren behaketa.
 μ Behaketa guztien batez besteko aritmetiko orokorra.
 $\pi_i = \mu_i - \mu$ Delako kendura da, non μ_i i subjektuaren a puntuazioaz eratutako batez bestekoa den.
 $\alpha_j = \mu_j - \mu$ Delako kendura da, non μ_j A j -ren eraginpean subjektu kopuru mugagabez osatutako populazioko puntuazioen batez bestekoa den.
 $(\pi\alpha)_{ij}$ Ez tratamenduaren efektuak (α_j) ez eta subjektuen arteko diferentziek (π_i) ere, azaltzen ez duten Y_{ij} -k μ -rekiko duen desbiderapena; hots errore esperimentala.

4.4.1. *Tratamenduak X subjektuak, adibide praktikoa*

Oinarrizko prozesu psikologikoen alorrean, *epe laburreko oroimena* aztertzeko ikerketa egin nahi dugu. Zehatzago, ikertu nahi dugu igarotako denborak nola eragiten duen oroimen mota horretan. Esperimenturako 15 hitzez osatutako hitz-zerrendak prestatzen dira, antzeko zailtasun-mailakoak. Hitz-zerrenda horiek

pertsona guztiei erakusten zaizkie. Gero, zerrenda aurkezten den unetik, subjektuak oroimen-proba burutu arte igarotzen den denbora-tarteak subjektu horrek berorrek gogoratutako hitz kopuruan izan dezakeen eragina aztertzen da. Horrela, hiru denbora-tarte hautatzen dira: (a_1) 10 segundo, (a_2) 20 segundo eta (a_3) 25 segundo. Sei subjekturi 15 hitzez osatutako hitz-zerrendak zenbait alditan zoriz aurkezten zaizkie eta aipatutako hiru denbora-tarte horien arabera oroitzen duten hitzen kopurua zenbatzen da. Hona hemen neurketaren emaitzak:

IV.18. taula. *Tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula, ariketaren datuak.*

		GOGORAPEN-PROBA EGITEN EMANDAKO DENBORA-TARTEA (A)			Baturen berbidurak	Batez beste
		a_1	a_2	a_3		
SUBJEKTUAK (S)	s_1	7	4	5	256	5,33
	s_2	8	5	7	400	6,66
	s_3	8	5	3	256	5,33
	s_4	9	4	2	225	5,00
	s_5	10	3	6	361	6,33
	s_6	7	6	5	324	6,00
Baturen berbidurak		2401	729	784	10816	
Batez bestekoak		8,16	4,50	4,66		5,77

Aurreko kasuetan egin dugun bezala, honetan ere taulan antzeman daitekeen ereduaren egitura aztertuko dugu. Errenkadetan (S) subjektuak ($s_1 \dots s_6$) eta zutabeetan A faktoreko hiru mailak (a_1, a_2 eta a_3), $i=1, \dots, 6$ eta $j=1, 2, 3$, beraz.

Hurrengo taula barruko gelaxka bakoitza momentu jakin batean subjektu jakin batek tratamendu jakinean jasotako puntuazioari dagokio. Bazterkietan eskuintean errenkadako ($i=1, 2, \dots, n$) subjektu bakoitzaren baturen berbidurak ($T_{i.}^2$ zutabeetan) idatziko genituzke eta behean zutabeko ($j=1, 2, \dots, a$) tratamenduei dagozkien baturen berbidurak ($T_{.j}^2$ errenkadan). Ikusten denez, bata S faktoreak dituen maileri dagokiena da, eta bestea, A faktoreak dituen maileri dagokie. Notazioari begira T hizkiak puntuazio batzuen batura adierazten du, kasurik kasu daramatzan azpiindizeek adierazten dutenena alegia. Esaterako $T_{.2}^2$ delakoak puntuazio guztien baturaren berbidura adierazten du. Azkenik, bazterkietan ere, errenkada edota zutabe bakoitzari dagozkion batez besteko aritmetikoak idatzi ditugu. Oro har, honela eratzten dugu:

IV.19. taula. *Tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula, eredu orokorra.*

ALDAGAI ASKEA A							
SUBJEKTUAK B	a_1	...	a_j	...	a_a	T_i^2	Batez bestekoak
s_1	Y_{11}	...	Y_{1j}	...	Y_{1a}	$T_{1.}^2$	$\bar{Y}_{1.}$
...		...		...		...	...
s_i	Y_{i1}	...	Y_{ij}	...	Y_{ia}	$T_{i.}^2$	$\bar{Y}_{i.}$
...		...		...		...	...
s_n	Y_{n1}	...	Y_{nj}	...	Y_{na}	$T_{n.}^2$	$\bar{Y}_{n.}$
T_j^2	$T_{.1}^2$	...	$T_{.j}^2$	...	$T_{.a}^2$	$T_{..}^2$	
Batez bestekoak	$\bar{Y}_{.1}$		$\bar{Y}_{.j}$		$\bar{Y}_{.a}$		$\bar{Y}_{..}$

Oharra: Ohar, emandako azalpenak eta lehengo taula argigarri suerta daitezke kalkuluen garapena ulertzeko.

TALDE BARNEKO AXS DISEINUA, BERBIDUREN BATUREN KALKULUA

Aurrekoetan egin dugun moduan, oro har, ereduaren egiturako ekuazioan oinarritutako prozedura azaltzen dugu. Bektoreen bitarteko ebazpena aipatuko badugu ere, aurrerantzean ez dugu garatuko. Hori horrela, (X.62) ekuazioko osagaien kalkuluarik lotuko gatzazkio. Funtsean honako eredu hau X.a).2. atalean landutakoaren ildo berekoa dugularik, darabiltzagun funtsezko formulak agertzen ditugu aurren.

Eragin edo efektuen kalkuluertarako formulak:

- A faktorearen eragina $SCA = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a T_j^2 \right) - C = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right] - C$
- Subjektu artekoa (S) $SCS = \left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n T_i^2 \right) - C = \left[\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^a Y_{ij} \right)^2 \right] - C$
- SA interakzioa (errorea) $SCAS = \left[\left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 \right) - C \right] - (SCA + SCS)$
- Aldakortasun orokorra $SCT = \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 \right) - C$
- C $C = \frac{1}{N} T_{..}^2 = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2$

OHIKO PROZEDURA

Formulak formula, C osagai orokor horretatik abiatuta kalkuluerei ekin diezaiegun.

$$C = \frac{1}{3.6} (7+8+8+9+10+7+4+5+5+4+3+6+5+7+3+2+6+5)^2 = \frac{(104)^2}{18} = 600,88$$

Behin C balioa ezagututa SCA, SCS, SCAS eta SCT hurrenez hurren:

$$SCA = \frac{1}{6} [(49)^2 + (27)^2 + (28)^2] - 600,88 = 51,45$$

$$SCS = \frac{1}{3} [(16)^2 + (20)^2 + (16)^2 + (15)^2 + (19)^2 + (18)^2] - 600,88 = 6,45$$

Aurreko formuletan, parentesi arteko berbidurak, $T_{.j}$ eta T_i batukariei dagozkie, 22. taulan azaltzen den moduan, errenkada eta zutabe bakoitzeko osagaien baturei, alegia.

$$SCT = [(7)^2 + (8)^2 + (8)^2 + (9)^2 + (10)^2 + (7)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (5)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (6)^2 + \dots \\ \dots + (5)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (2)^2 + (6)^2 + (5)^2] - C = 682 - 600,88 = 81,12$$

Aldakortasun orokorra behin kalkulaturik tratamenduaren eta subjektuaren arteko interakzioa:

$$SCAS = SCT - (SCA + SCS) = 81,12 - (51,45 + 6,45) = 23,22$$

Honaino ailegaturik bariantza-analisi mota honen taula era honetan eraiki dezakegu.

Horrela bariantzak edo berbiduren batez bestekoak eta haien arteko zatidurak (F -ak) kalkula ditzakegu eta ondorengo taula osatu:

IV.20. taula. *Tratamenduak X subjektuak diseinurako bariantza-analisiaren taula, eredu orokorra.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	LIBERTATE-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	SCA	$a - 1$	$MCA = SCA / (a - 1)$	$F_A = \frac{MCA}{MCAS}$
Subjektu artekoa	SCS	$n - 1$	$MCS = SCS / (n - 1)$	
A S faktoreen arteko interakzioa (errorea)	SCAS	$(a - 1)(n - 1)$	$MCAS = SCAS / (a - 1)(n - 1)$	$F_S = \frac{MCS}{MCAS}$
GUZTIRA	SCT	$an - 1$		

Aldakortasun-sorburuak kasu honetan hiru dira eta ezinbestean betetzen da:

$$SCT = SCA + SCS + SCAS$$

Askatasun-graduak, beste alderditik, tratamenduaren mailen (a) eta subjektu kopuruaren (n) arabera dira, non an biderkadura kasu kopurua (N) den. Taulan bertan ikus daiteke zein diren aldakortasun-neurri bakoitzari dagozkion askatasun-graduak.

Aurreko kasuen moduan, kalkuluen bigarren prozedura azaldu eta gero helduko diogu ariketaren behin betiko garapenari.

4.4.2. Bigarren prozedura, bektoreen bitarteko ebazpena

Darabilgun ohiko ildoari jarraituz, egiturako ekuazioko osagaiz osagaiko aurkezpenari loturik, formulak agertzen ditugu:

1. A FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCA):

$$\alpha_j = \mu_{j..} - \mu \quad \dots\dots\dots A \text{ faktorearen ekarpena.}$$

$$\mu = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij} \quad \dots\dots\dots \text{Batez besteko aritmetiko orokorra.}$$

$$\mu_j = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots \text{Talde esperimentalen batez bestekoak.}$$

$$SCA = n \sum_{j=1}^a \alpha_j^2 \quad \dots\dots\dots \text{Talde arteko aldakortasuna.}$$

2. SUBJEKTUEI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCS):

$$\pi_i = \mu_{.i} - \mu \quad \dots\dots\dots \text{Subjektuaren ekarpena.}$$

$$\mu_i = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^a Y_{ij} \quad \dots\dots\dots \text{Subjektuaren batez besteko aritmetikoa.}$$

$$SCS = a \sum_{i=1}^n \pi_i^2 \quad \dots\dots\dots \text{Talde arteko aldakortasuna.}$$

3. SUBJEKTUEN ETA A FAKTOREAREN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (SCAS, errorea):

$$(\pi\alpha)_{ij} = Y_{ij} - (\mu + \pi_i + \alpha_j) \quad \dots\dots\dots \text{Errorea edo hondakina.}$$

$$SCAS = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (\pi\alpha)_{ij}^2 \quad \dots\dots\dots \text{Errorearen aldakortasuna.}$$

Jakina denez, sorburu desberdinetako aldakortasun-neurrien batura aldakortasun orokorra da:

$$SCT = SCA + SCS + SCAS$$

KALKULUA:

α_j BALIOAK

Tratamenduak ekarritako aldakortasunari dagokion formulari jarraituz, orotariko batez besteko aritmetikoa (μ) honela kalkulatzeko dugu:

$$\mu = (1/3.6) [(7+8+8+9+10+7+4+5+5+4+3+6+5+7+3+2+6+5)]$$

$$\mu = (104/18) = 5,77$$

Horrela, μ_j batez bestekoak eta α_j , hurrenez hurren:

$$\begin{aligned} \mu_{.1} &= (1/6) [7+8+8+9+10+7] = 8,16 & \alpha_1 &= \mu_{.1} - \mu = 8,16 - 5,77 = 2,39 \\ \mu_{.22} &= (1/6) [4+5+5+4+3+6] = 4,5 & \alpha_2 &= \mu_{.2} - \mu = 4,5 - 5,77 = -1,27 \\ \mu_{.3} &= (1/6) [5+7+3+2+6+5] = 4,66 & \alpha_3 &= \mu_{.3} - \mu = 4,66 - 5,77 = -1,11 \end{aligned}$$

π_i BALIOAK

Subjektuek ekarritako aldakortasunari dagokion formulari jarraituz, hurrenez hurren:

$$\begin{aligned} \mu_{1.} &= (1/3) [7+4+5] = 5,33 & \pi_1 &= \mu_{1.} - \mu = 5,33 - 5,77 = -0,44 \\ \mu_{2.} &= (1/3) [8+5+7] = 6,66 & \pi_2 &= \mu_{2.} - \mu = 6,66 - 5,77 = 0,89 \\ \mu_{3.} &= (1/3) [8+5+3] = 5,33 & \pi_3 &= \mu_{3.} - \mu = 5,33 - 5,77 = -0,44 \\ \mu_{4.} &= (1/3) [9+4+2] = 5,00 & \pi_5 &= \mu_{4.} - \mu = 5,00 - 5,77 = -0,77 \\ \mu_{5.} &= (1/3) [10+3+6] = 6,33 & \pi_5 &= \mu_{5.} - \mu = 6,33 - 5,77 = 0,56 \\ \mu_{6.} &= (1/3) [7+6+5] = 6,00 & \pi_6 &= \mu_{6.} - \mu = 6,00 - 5,77 = 0,23 \end{aligned}$$

SUBJEKTUEN ETA A FAKTOREAREN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA EDO HONDAKINAK ($\pi\alpha$)_{ij}

Subjektuen eta A faktorearen arteko interakzioak ekarritako aldakortasunari dagokion formulari jarraituz, batez bestekoak kalkulatzeari lotuko gaitzaizkio banan-banan,

$$\begin{aligned} (\pi\alpha)_{11} &= Y_{11} - (\mu + \pi_1 + \alpha_1) = 7 - (5,77 + (-0,44) + 2,39) = -0,72 \\ (\pi\alpha)_{12} &= Y_{12} - (\mu + \pi_1 + \alpha_2) = 4 - (5,77 + (-0,44) + (-1,27)) = -0,06 \\ (\pi\alpha)_{13} &= Y_{13} - (\mu + \pi_1 + \alpha_3) = 5 - (5,77 + (-0,44) + (-1,11)) = 0,78 \end{aligned}$$

$$(\pi\alpha)_{21} = Y_{21} - (\mu + \pi_2 + \alpha_1) = 8 - (5,77 + 0,89 + 2,39) = -1,05$$

$$(\pi\alpha)_{22} = Y_{22} - (\mu + \pi_2 + \alpha_2) = 5 - (5,77 + 0,89 + (-1,27)) = -0,39$$

$$(\pi\alpha)_{23} = Y_{23} - (\mu + \pi_2 + \alpha_3) = 7 - (5,77 + 0,89 + (-1,11)) = 1,45$$

$$(\pi\alpha)_{31} = Y_{31} - (\mu + \pi_3 + \alpha_1) = 8 - (5,77 + (-0,44) + 2,39) = 0,28$$

$$(\pi\alpha)_{32} = Y_{32} - (\mu + \pi_3 + \alpha_2) = 5 - (5,77 + (-0,44) + (-1,27)) = 0,94$$

$$(\pi\alpha)_{33} = Y_{33} - (\mu + \pi_3 + \alpha_3) = 3 - (5,77 + (-0,44) + (-1,11)) = -1,22$$

$$(\pi\alpha)_{41} = Y_{41} - (\mu + \pi_4 + \alpha_1) = 9 - (5,77 + (-0,77) + 2,39) = 1,61$$

$$(\pi\alpha)_{42} = Y_{42} - (\mu + \pi_4 + \alpha_2) = 4 - (5,77 + (-0,77) + (-1,27)) = 0,27$$

$$(\pi\alpha)_{43} = Y_{43} - (\mu + \pi_4 + \alpha_3) = 2 - (5,77 + (-0,77) + (-1,11)) = -1,89$$

$$(\pi\alpha)_{51} = Y_{51} - (\mu + \pi_5 + \alpha_1) = 10 - (5,77 + 0,56 + 2,39) = 1,28$$

$$(\pi\alpha)_{52} = Y_{52} - (\mu + \pi_5 + \alpha_2) = 3 - (5,77 + 0,56 + (-1,27)) = -2,06$$

$$(\pi\alpha)_{53} = Y_{51} - (\mu + \pi_5 + \alpha_3) = 6 - (5,77 + 0,56 + (-1,11)) = 0,78$$

$$(\pi\alpha)_{61} = Y_{61} - (\mu + \pi_6 + \alpha_1) = 7 - (5,77 + 0,23 + 2,39) = -1,39$$

$$(\pi\alpha)_{62} = Y_{62} - (\mu + \pi_6 + \alpha_2) = 6 - (5,77 + 0,23 + (-1,27)) = 1,27$$

$$(\pi\alpha)_{63} = Y_{63} - (\mu + \pi_6 + \alpha_3) = 5 - (5,77 + 0,23 + (-1,11)) = 0,11$$

BERBIDUREN BATUREN KALKULUA:

A ALDAGAIA:

$$SCA = 6 \left[(2,39)^2 + (-1,27)^2 + (-1,11)^2 \right] = 51,34$$

SUBJEKTU ARTEKOA:

$$SCS = 3 \left[(-0,44)^2 + (0,89)^2 + (-0,44)^2 + (-0,77)^2 + (0,56)^2 + (0,23)^2 \right] = 6,41$$

SUBJEKTUEN ETA A ALDAGAIAREN ARTEKO INTERAKZIOA:

$$SCAS = [(-0,72)^2 + (-0,06)^2 + (0,78)^2 + (-1,05)^2 + (-0,39)^2 + (1,45)^2 + (0,28)^2 + (0,94)^2 + (-1,22)^2 + \dots \\ \dots + (1,61)^2 + (0,27)^2 + (-1,89)^2 + (1,28)^2 + (-2,06)^2 + (0,78)^2 + (-1,39)^2 + (1,27)^2 + (0,11)^2]$$

$$SCAS = 23,22$$

$$\text{ALDAKORTASUN OROKORRA: } SCT = 23,22 + 6,41 + 51,34 = 81,12$$

Arestian esan dugunez, ez dugu bektoreen bitarteko ebazpena garatuko. Dena den, jakina da berbiduren baturak bektoreen eta beraien iraulien arteko biderkadurak direla. Beraz bektoreen bitartez honela egingo genuke:

$$SCA = \{\alpha\}^T \{\alpha\} = 51,45$$

$$SCS = \{\pi\}^T \{\pi\} = 6,41$$

$$SCAS = \{\pi\alpha\}^T \{\pi\alpha\} = 23,22$$

Hortik aurrera bariantzak kalkulatzeko besterik ez zaigu geratzen. Askatasun-graduak eta F estatistikoak (bariantzen arteko zatidurak) ondorengo taulan agertzen direlarik, nola kalkulatu diren ez dago azaldu beharrik.

IV.21. taula. *Tratamenduak X subjektuak diseinurako bariantza-analisiaren taula, adibide praktikoa.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	LIBERTATE-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	$SCA = 51,45$	$(a - 1) = 2$	$MCA = SCA / (a - 1)$ $MCA = 25,725$	$F_A = \frac{MCA}{MCAS}$
Subjektu artekoa	$SCS = 6,41$	$(n - 1) = 5$	$MCS = SCS / (n - 1) = 1,282$	$F_A = 11,079$
A S faktoreen arteko interakzioa (errorea)	$SCAS = 23,22$	$(a - 1)(n - 1) = 10$	$MCAS = SCAS / (a - 1)(n - 1)$ $MCAS = 2,322$	$F_S = \frac{MCS}{MCAS}$
GUZTIRA	$SCT = 81,12$	$an - 1 = 17$		$F_S = 0,552$

Behin azaldutako aldakortasun-neurriak (SCA , SCS , $SCAS$) eta, horietatik eratorrita, bariantzak jakinik, azken horiek esanguratsuak ote diren ebatz dezakegu. Horretarako ohi denez F tauletara joko dugu. Demagun % 99ko konfiantza-maila ezartzen dugula, ($\alpha = 0,01$) eskuinaldeko hipotesi-testa delarik, orduan:

IV.22. taula. % 99ko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko eraketak.

	Tauletako $F_{0,99;v_1/v_2}$	Behatutako F	Desberdintza
A faktorea	$F_{0,99;2/10} = 7,559$	$F_A = 11,079$	$7,559 < 11,079$
Subjektu artekoa	$F_{0,99;5/10} = 5,636$	$F_S = 0,552$	$5,636 > 0,552$

Hitzen zerrenda aurkezten zenetik oroimen-proba burutu arterainoko denboratarteak (tratamendua edo A faktorea) subjektuak oroitutako hitz kopuruan dakarren aldakortasuna esanguratsuki ($p \leq 0,01$) azaltzen du; hau da, erroreek eta tratamenduak ekarritako bariantzak baliokideak ez direnez gero, dagokion H_0 baztertzen dugu. Subjektu artekoa, oster, ez da esanguratsua, kasu honetan H_0 hipotesi nuluari eutsi egin behar diogu.

4.5. **BI FAKTOREZ OSATUTAKO TALDE BARNEKO DISEINU FAKTORIALA (TRATAMENDUAK x TRATAMENDUAK x SUBJEKTUAK)**

Diseinu experimental honetan bi aldagai aske edo faktore, eta mendeko aldagai bakarra ere erabiltzen ditugu. Ohi bezala, mendeko aldagaia zorizko aldagaia den bitartean, aldagai askeak maila kopuru jakin batzuetan banatzen dira —bitan edo gehiagotan—. Nolanahi ere, gogoan izan eredu hauetan subjektu guztiek eta bakoitzak tratamendu guztiak —aldagai askeen mailen arteko konbinaketa posibleak— jasotzen dituztela. Esandako mailen arteko konbinaketak ikertzaileak erabakitzen dituen tratamenduei dagozkie, hain zuzen ere, eta subjektuei ezarri behar zaien hurrenkera zoriz egiten da. Horrela, aurrekoetan behin eta birritan esan bezala, aldagai askeak ez dira zorizko aldagaiak ikertzaileak kontrolatzen dituelako alegia.

Dena den aurrekoan bezala berriro, aurkeztu behar dugun eredu honetan subjektuek eragindako aldakortasuna aintzat hartzen dugularik, hondakin-erroreen aldakortasunetik bereizi beharra dago. Azken buru subjektuen arteko desberdintasunak zorizko eitea izanda ere, gure beste behagai bat bilakatzen dira. Arestian esan bezala, talde arteko diseinuekiko erkaketa egitekotan talde barneko diseinuetan subjektu talde bakarra dugunez gero, subjektuen arteko desberdintasunak errore bariantzatik desagerrarazten ditugu, hots, kontrolpean ditugu. Halaber, aipatu arrazoa dela bide, diseinu hau talde arteko diseinuak baino zehatzagoa dela esan dezakegu. Dena den, talde barneko diseinu experimental bakuna aztertzean aipatu den bezala, honetan ere azaldu gabeko aldakortasuna (hondakin-errorea) edo erkaketa-irizpidea tratamendu-konbinaketa bakoitzaren eta subjektuaren arteko interakzioan kokatzen da.

Edozelan ere, eratutako talde barneko diseinu faktorial deritzan horri honako egiturako ekuazio hau dagokio:

$$Y_{ijk} = \mu + \pi_i + \alpha_j + \beta_k + (\pi\alpha)_{ij} + (\pi\beta)_{ik} + (\alpha\beta)_{jk} + (\pi\alpha\beta)_{ijk}$$

non:

Y_{ijk}	A eta B aldagaien j . eta k . mailai, hurrenez hurren, dagokien i . subjektuaren behaketa.
μ	Behaketa guztien batez besteko aritmetiko orokorra.
π_i	Subjektuak (S) delako aldagaiaren zorizko efektua.
α_j	A aldagaiari egotzitako eragin finkoa.
β_k	B aldagaiari egotzitako eragin finkoa.
$(\pi\alpha)_{ij}$	S -ren i mailaren eta A -ren j mailaren arteko interakzio-efektua edo A aldagaiari atxikitako errorea.
$(\pi\beta)_{ik}$	S -ren i mailaren eta B -ren k mailaren arteko interakzio-efektua edo B aldagaiari atxikitako errorea.

$(\alpha\beta)_{jk}$ A-ren j mailaren eta B-ren k mailaren arteko interakzio-efektua.

$(\alpha\pi\beta)_{ijk}$ S-ren i mailaren, A-ren j mailaren eta B-ren k mailaren arteko interakzio-efektua edo AB interakzioari atxikitako errorea.

4.5.1. Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak, adibide praktikoa

Demagun subjektu elebidunen prozesamendu semantikoa aztertu nahi dugula. Zehazki, subjektu elebidunek euskaraz nahiz gaztelaniaz idatzitako testu zientifikoen eduki motak ikasteko duten gaitasuna ikertu nahi da. Horretarako hiru subjekturi euskaraz idatzitako *testu zientifiko (euskaraz)* jakin bat buruz ikas dezaten eskatzen zaie (a_1) eta, handik sei hilabetera, aurreko testuaren *gaztelaniazko itzulpena* aurkezten zaielarik (a_2) eginkizun bera proposatu ere.

Bi proben artean igarotako tarte (sei hilabete) gaia eta proba bera ahazteko nahikoa delakoan, probak, hizkuntza desberdinetan baina eginkizun berekoak direnak hain zuzen ere, elkarren askeak direla suposatzen dugu. Hau da, ziur gaude lehenengo behaketak ez duela bigarrenengoan eragiten. Horrela, garaian garaiko testu bakoitza ikasi ondoren, oroitzen dituzten ideia guztiak idaztea eskatzen zaie. Azkenik, gogoratutako ideien artean hiru eduki moten oroimena neurtzen da, *testuaren ideia nagusiak* (b_1), *bigarren mailako ideiak* (b_2) eta *adibideak* (b_3). Jorratuta-ko bi aldagai horiek direla-eta subjektuek honako puntuazio hauek lortzen dituzte:

IV.23. taula. *Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula (datuak).*

		TESTUAREN HIZKUNTZA (A)						Baturen berbidurak	Batez beste
		EUSKARAZ (a_1)			GAZTANIAZ (a_2)				
EDUKI MOTA (B)		b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3		
SUBJEKTUAK (S)	s_1	19	14	8	19	25	26	12.321	18,50
	s_2	16	11	9	26	16	31	11.881	18,16
	s_3	13	20	13	25	10	17	9.604	16,33
Baturen berbidurak		2.304	2.025	900	4.900	2.601	5.476	101.124	
Batez bestekoak		16	15	10	23,33	17	24,66		17,66

Taulan antzeman daitekeen ereduaren egitura aztertuko dugu. Errenkadetan (S) subjektuak ($s_1 \dots s_3$) eta zutabeetan A faktoreko bi mailetan (a_1 eta a_2) B-ri dagozkion hiruna maila (b_1 , b_2 eta b_3). Hurrenkera horri jarraituz azpiindizeak honako hauek ditugu: subjektuak, $i=1,2,3$; A faktorekoak $j=1,2$ eta B aldagaiak $k=1, 2, 3$.

Taularatuz gero, oro har, honela izan daiteke:

IV.24. taula. *Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula, eredu orokorra.*

		A FAKTOREA															Baturen berbidura $T_{i..}^2$	Batez beste-koak	
		a_i					a_j					a_a							
		B FAKTOREA					b_i	...	b_k	...	b_h	b_j	...	b_k	...	b_h			b_i
SUBJEK- TUAK (S)	s_1	Y_{111}	...	Y_{11k}	...	Y_{11h}	Y_{1j1}	...	Y_{1jk}	...	Y_{1jh}	Y_{1a1}	...	Y_{1ak}	...	Y_{1ah}	$T_{1..}^2$	$\overline{Y}_{1..}$	
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	s_i	Y_{i11}	...	Y_{i1k}	...	Y_{i1h}	Y_{ij1}	...	Y_{ijk}	...	Y_{ijh}	Y_{ia1}	...	Y_{iak}	...	Y_{iah}	$T_{i..}^2$	$\overline{Y}_{i..}$	
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	s_n	Y_{n11}	...	Y_{n1k}	...	Y_{n1h}	Y_{nj1}	...	Y_{njk}	...	Y_{njh}	Y_{na1}	...	Y_{nak}	...	Y_{nah}	$T_{n..}^2$	$\overline{Y}_{n..}$	
Baturen berbidurak $T_{j.}^2$		$T_{.1.}^2$					$T_{.j.}^2$					$T_{.a.}^2$					$T_{...}^2$		
Batez beste-koak		$\overline{Y}_{.1.}$					$\overline{Y}_{.j.}$					$\overline{Y}_{.a.}$						$\overline{Y}_{...}$	

Taula barruko gelaxka bakoitza momentu jakin batean subjektu jakin batek tratamendu jakinean jasotako puntuazioari dagokio. Bazterkietan eskuinean errenkadako ($i = 1, 2, \dots, n$) subjektu bakoitzaren baturen berbidurak ($T_{i..}^2$ zutabea) idatziko genituzke eta behean zutabe ($j = 1, 2, \dots, a$) tratamenduei dagozkien baturen berbidurak $T_{j.}^2$ errenkadan. Egitura erraz ikustearren B faktoreak dituen maileri dagokiena ez dugu taulan agertzen. Nolanahi ere irakurleak aurretik aurkeztutako X.12 taulari hel diezaioke edozein diseinuren dimentsio guztiak aztertu ahal izateko. Notazioari begira T hizkiak puntuazio batzuen batura adierazten du, kasurik kasu daramatzan azpiindizeek adierazten dutenena alegia. Esaterako $T_{...}^2$ delakoak puntuazio guztien baturaren berbidura adierazten du. Azkenik bazterkietan ere errenkada edota zutabe bakoitzari dagozkion batez beste aritmetikoak idatzi ditugu.

Oharra ohar, emandako azalpenak eta lehengo taula argigarri suerta daitezke kalkuluaren garapena ulertzeko, gogoan izan daitezen beraz.

4.5.2. Talde arteko AXBXS diseinua, berbiduren baturen kalkulua

Aurrekoetan egin dugun moduan, oro har, ereduaren egiturako ekuazioan oinarrituriko prozedura azaltzen dugu. Bektoreen bitarteko ebazpena aipatuko badugu ere, aurrerantzean ez dugu garatuko. Hori horrela, egiturako ekuazioko osagaien kalkuluari lotuko gaitzaizkio. Funtsean, honako eredu hau talde arteko AXBXC diseinuaren ildo berekoa dugularik, darabiltzagun funtsezko formulak agertzen ditugu aurren.

Eragin edo efektuen kalkuluetarako formulak:

- *A* faktorearen eragina: $SCA = \left(\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b T_j^2 \right) - C = \left[\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^b \left(\sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$
- *B* faktorearen eragina: $SCB = \left(\frac{1}{an} \sum_{k=1}^b T_k^2 \right) - C = \left[\frac{1}{an} \sum_{k=1}^b \left(\sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$
- Subjektu artekoa (*S*) $SCS = \left(\frac{1}{ab} \sum_{i=1}^n T_i^2 \right) - C = \left[\frac{1}{ab} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$
- *SA* interakzioa (errorea) $SCAS = \frac{1}{b} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \left(\sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C - (SCA + SCS)$
- *SB* interakzioa (errorea) $SCBS = \frac{1}{a} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^b \left(\sum_{j=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C - (SCB + SCS)$
- *AB* interakzioa $SCAB = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^b \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right] - C - (SCA + SCB)$
- *SAB* interakzioa (errorea) $SCABS = SCT - (SCA + SCB + SCS + SCAS + SCBS + SCAB)$
- Aldakortasun orokorra: $SCT = \left(\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk}^2 \right) - C$
- *C* $C = \frac{1}{N} T_{...}^2 = \frac{1}{abn} \left(\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2$

OHIKO PROZEDURA

Formulak formula, *C* osagai orokor horretatik abiatuta kalkuluei ekin diezaiegun.

$$C = \frac{1}{2.3.3} (19 + 16 + 13 + 14 + 11 + 20 + 8 + 9 + 13 + 19 + 26 + 25 + 25 + 16 + 10 + 26 + 31 + 17)^2 = \frac{(318)^2}{18} = 5618$$

Behin *C* balioa ezagututa *SCA*, *SCB* eta *SCS* kalkula ditzagun.

$$SCA = \left[\frac{1}{3.3} \left((19 + 16 + 13 + 14 + 11 + 20 + 8 + 9 + 13)^2 + (19 + 26 + 25 + 25 + 16 + 10 + 26 + 31 + 17)^2 \right) \right] - 5618 = 288$$

Parentesi arteko berbidurak $T_{.j}$ batukariei dagozkiela esan beharrik ez dago (ikus IV.24 taula).

$$SCB = \left[\frac{1}{2.3} \left((19+16+13+19+26+25)^2 + (14+11+20+25+16+10)^2 + (8+9+13+26+31+17)^2 \right) \right] - 5618 = 41,33$$

Parentesi arteko berbidurak $T_{..k}$ batukariei dagozkie (IV.24 taulan gelaxkako osagaien baturei legozkieke baina sartu ezinean ez ditugu jarri).

$$SCS = \left[\frac{1}{2.3} \left((19+14+8+19+25+26)^2 + (16+11+9+26+16+31)^2 + (13+20+13+25+10+17)^2 \right) \right] - 5618 = 16,33$$

Parentesi arteko berbidurak $T_{i..}$ batukariei legozkieke, IV.24 taulan $T_{i..}^2$ zutabeko osagaiei alegia. Aldakortasun orokorra (SCT).

$$SCT = [(19)^2 + (16)^2 + (13)^2 + (14)^2 + (11)^2 + (20)^2 + (8)^2 + (9)^2 + \dots \\ \dots + (13)^2 + (19)^2 + (26)^2 + (25)^2 + (25)^2 + (16)^2 + (10)^2 + (26)^2 + (31)^2 + (17)^2] - 5618 = 768$$

INTERAKZIOAK

– Testuaren hizkuntza (A) X subjektuak (S); SCAS edo errorea:

$$SCAS = \frac{1}{3} [(19+14+8)^2 + (16+11+9)^2 + (13+20+13)^2 + (19+25+26)^2 + (26+16+31)^2 + (25+10+17)^2] \\ - 5618 - (288 + 16,33) = 86,33$$

– Testuen eduki mota (B) X subjektuak (S); SCBS edo errorea:

$$SCBS = \frac{1}{2} [(19+19)^2 + (14+25)^2 + (8+26)^2 + (16+26)^2 + (11+16)^2 + (9+31)^2 + (13+25)^2 + (20+10)^2 + (13+17)^2] \\ - 5618 - (41,33 + 16,33) = 53,34$$

– Testuaren hizkuntza (A) X testuen eduki mota (B):

$$SCAB = \frac{1}{3} [(19+16+13)^2 + (14+11+20)^2 + (8+9+13)^2 + (19+26+25)^2 + (25+16+10)^2 + (26+31+17)^2] \\ - 5618 - (288 + 41,33) = 121,33$$

– Testuaren hizkuntza (A) X testuen eduki mota (B) X subjektuak (S); SCABS edo errorea:

$$SCABS = SCT - (SCA + SCB + SCS + SCAS + SCBS + SCAB) \\ SCABS = 768 - (288 + 41,33 + 16,33 + 86,33 + 53,34 + 121,34) = 161,34$$

Behin aldakortasun-sorburu guztiak ezagututa haietatik eratortzen diren bariantzak eta haien arteko zatidurak (F-ak) kalkula ditzakegu eta ondorengo taula osatu:

IV.25. taula. *Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak diseinua, ANOVA taula, eredu orokorra.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	LIBERTATE-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	SCA	$a - 1$	$MCA = SCA(a - 1)$	$F_A = \frac{MCA}{MCAS}$
B faktoreko mailen artekoa	SCB	$b - 1$	$MCB = SCB(b - 1)$	$F_B = \frac{MCB}{MCBS}$
Subjektu artekoa	SCS	$n - 1$	$MCS = SCS(n - 1)$	
AS interakzioa (errorea)	SCAS	$(a - 1)(n - 1)$	$MCAS = SCAS(a - 1)(n - 1)$	
BS interakzioa (errorea)	SCBS	$(b - 1)(n - 1)$	$MCBS = SCBS(b - 1)(n - 1)$	
AB interakzioa (errorea)	SCAB	$(a - 1)(b - 1)$	$MCAB = SCAB(a - 1)(b - 1)$	
ABS interakzioa (errorea)	SCABS	$(a - 1)(b - 1)(n - 1)$	$MCABS = SCABS(a - 1)(b - 1)(n - 1)$	$F_{AB} = \frac{MCAB}{MCABS}$
OROTARA	SCT	$abn - 1$		

Aldakortasun-sorburuak, ikusten denez, aldagai bakoitzak dakarren eta haien arteko konbinaketa guztiek ekarritako interakzioei dagozkienak dira. Gogoan izan, interakzioen esangura estatistikoa baino lehenago darabilgun eredu teorikoaren arabera izan behar dela. Nolanahi ere aldakortasun orokorra (SCT) aldakortasun-sorburu guztien batura da. Hau da,

$$SCT = SCA + SCB + SCS + SCAS + SCBS + SCAB + SCABS.$$

Askatasun-graduak, beste alderditik, A faktorearen mailen (a), B faktorearen mailen (b) eta subjektu kopuruaren (n) arabera dira non abn orotariko kasu kopurua (N) den. Taulan bertan ikus daiteke zein diren aldakortasun-neurri bakoitzari dagozkion askatasun-graduak.

Nolanahi ere bigarren prozedura azaldu eta gero helduko diogu ariketaren behin betiko garapenari.

4.5.3. Bigarren prozedura: bektoreen bitarteko ebazpena

Darabilgun ohiko ildoari jarraituz, egiturako ekuazioko osagaiz osagaiko aurkezpenari loturik honetan ere formulak agertzen ditugu:

1. A FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCA):

$$\alpha_j = \mu_{j..} - \mu \dots\dots\dots A \text{ faktorearen ekarpena.}$$

$$\mu = \frac{1}{abn} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \dots\dots\dots \text{Batez besteko aritmetiko orokorra.}$$

$$\mu_j = \frac{1}{bn} \left(\sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right) \dots\dots\dots \text{Talde esperimentalen batez bestekoak.}$$

$$SCA = nb \sum_{j=1}^a \alpha_j^2 \dots\dots\dots \text{Talde arteko aldakortasuna.}$$

2. B FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCB):

$$\beta_j = \mu_{.k.} - \mu \dots\dots\dots B \text{ faktorearen ekarpena.}$$

$$\mu_k = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right) \dots\dots\dots \text{Talde esperimentalen batez bestekoak.}$$

$$SCB = na \sum_{k=1}^b \beta_j^2 \dots\dots\dots \text{Talde arteko aldakortasuna.}$$

3. SUBJEKTUEI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCS):

$$\pi_i = \mu_{i..} - \mu \dots\dots\dots \text{Subjektuaren ekarpena.}$$

$$\mu_i = \frac{1}{ab} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right) \dots\dots\dots \text{Subjektuen batez bestekoak.}$$

$$SCS = ab \sum_{i=1}^n \pi_i^2 \dots\dots\dots \text{Subjektuen aldakortasuna.}$$

4. SUBJEKTUEN (S) ETA A FAKTOREAREN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (SCAS errorea):

$$(\pi\alpha)_{ij} = \mu_{ij.} - (\mu - \pi_i + \alpha_j) \dots\dots\dots \text{Interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{b} \left(\sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right) \dots\dots\dots \text{Azpitaldeen batez bestekoak.}$$

$$SCAS = b \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (\pi\alpha)_{ij}^2 \dots\dots\dots \text{Interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

5. SUBJEKTUEN (S) ETA B FAKTOREAREN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA ($SCBS$ errorea):

$$(\pi\beta)_{ik} = \mu_{i.k} - (\mu - \pi_i + \beta_k) \dots\dots\text{Interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{ik} = \frac{1}{a} \left(\sum_{j=1}^a Y_{ijk} \right) \dots\dots\dots\text{Azpitaldeen batez bestekoak.}$$

$$SCBS = a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n (\pi\beta)_{ik}^2 \dots\dots\dots\text{Interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

6. A ETA B FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA ($SCAB$):

$$(\alpha\beta)_{jk} = \mu_{.jk} - (\mu - \alpha_j + \beta_k) \dots\dots\text{Interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{jk} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right) \dots\dots\dots\text{Azpitaldeen batez bestekoak.}$$

$$SCAB = n \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{jk}^2 \dots\dots\dots\text{Interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

7. SUBJEKTUEN (S) ETA A ETA B FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA ($SCABS$ errorea):

$$(\pi\alpha\beta)_{ijk} = Y_{ijk} - \left(\mu + \pi_i + \alpha_j + \beta_k + (\pi\alpha)_{ij} + (\pi\beta)_{ik} + (\alpha\beta)_{jk} \right) \text{ Interakzioaren ekarpena.}$$

$$SCABS = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n (\pi\alpha\beta)_{ijk}^2 \dots\dots\text{Interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

KALKULUA:

α_j BALIOAK

A faktoreak ekarritako aldakortasunari dagokion formulari jarraituz, orotariko batez besteko aritmetikoa (μ) honela kalkulatzen dugu:

$$\mu = (1/2.3.3) [(19+16+13+14+11+20+8+9+13+19+26+25+25+16+10+26+31+17)]$$

$$\mu = (318/18) = 17,66$$

Horrela $\mu_{.j}$ batez bestekoak, hurrenez hurren:

$$\mu_{.1} = (1/3.3) [19+16+13+14+11+20+8+9+13] = 13,66$$

$$\mu_{.2} = (1/3.3) [19+26+25+25+16+10+26+31+17] = 21,66$$

Ondorioz,

$$\alpha_1 = \mu_{..1} - \mu = 13,66 - 17,66 = -4$$

$$\alpha_2 = \mu_{..2} - \mu = 21,66 - 17,66 = 4$$

β_k BALIOAK

B faktoreak ekarritako aldakortasunari dagokion formulari jarraituz, $\mu_{..k}$ batez bestekoak, hurrenez hurren:

$$\mu_{..1} = (1/3) [19+16+13+19+26+25] = 19,66 \quad \beta_1 = \mu_{..1} - \mu = 19,66 - 17,66 = 2$$

$$\mu_{..2} = (1/3) [14+11+20+25+16+10] = 16 \quad \beta_2 = \mu_{..2} - \mu = 16 - 17,66 = -1,66$$

$$\mu_{..3} = (1/3) [8+9+13+26+31+17] = 17,33 \quad \beta_3 = \mu_{..3} - \mu = 17,33 - 17,66 = -0,33$$

π_i BALIOAK

Subjektuek ekarritako aldakortasunari dagokion formulari jarraituz, hurrenez hurren:

$$\mu_{1..} = (1/3) [19+14+8+19+25+26] = 18,5 \quad \pi_1 = \mu_{1..} - \mu = 18,5 - 17,66 = 0,84$$

$$\mu_{2..} = (1/3) [16+11+9+26+16+31] = 18,16 \quad \pi_2 = \mu_{2..} - \mu = 18,16 - 17,66 = 0,5$$

$$\mu_{3..} = (1/3) [13+20+13+25+10+17] = 16,33 \quad \pi_3 = \mu_{3..} - \mu = 16,33 - 17,66 = -1,33$$

INTERAKZIOAK

$(\pi\alpha)_{ij}$ BALIOAK

Arestian agertutako formulari jarraituz dagozkion batez bestekoak honela kalkulatu ditugu, banan-banan:

$$\mu_{11.} = (1/3) [19+14+8] = 13,66 \quad \mu_{21.} = (1/3) [16+11+9] = 12 \quad \mu_{31.} = (1/3) [13+20+13] = 15,33$$

$$\mu_{12.} = (1/3) [19+25+26] = 23,33 \quad \mu_{22.} = (1/3) [26+16+31] = 24,33 \quad \mu_{32.} = (1/3) [25+10+17] = 17,33$$

$$(\pi\alpha)_{11} = \mu_{11.} - (\mu + \pi_1 + \alpha_1) = 13,66 - (17,66 + 0,84 + (-4)) = -0,84$$

$$(\pi\alpha)_{12} = \mu_{12.} - (\mu + \pi_1 + \alpha_2) = 23,33 - (17,66 + 0,84 + 4) = 0,83$$

$$(\pi\alpha)_{21} = \mu_{21.} - (\mu + \pi_2 + \alpha_1) = 12 - (17,66 + 0,5 + (-4)) = -2,16$$

$$(\pi\alpha)_{22} = \mu_{22.} - (\mu + \pi_2 + \alpha_2) = 24,33 - (17,66 + 0,5 + 4) = 2,17$$

$$(\pi\alpha)_{31} = \mu_{31.} - (\mu + \pi_3 + \alpha_1) = 15,33 - (17,66 + (-1,33) + (-4)) = 3$$

$$(\pi\alpha)_{32} = \mu_{32.} - (\mu + \pi_3 + \alpha_2) = 17,33 - (17,66 + (-1,33) + 4) = -3$$

$(\pi\beta)_{ij}$ BALIOAK

Arestian agerturiko formulari lotuz, dagozkion batez bestekoak kalkulatzeko ditugu:

$$\begin{aligned}
\mu_{1,1} &= (1/2) [19+19] = 19 & \mu_{2,1} &= (1/2) [16+26] = 21 & \mu_{3,1} &= (1/2) [13+25] = 19 \\
\mu_{1,2} &= (1/2) [14+25] = 19,5 & \mu_{2,2} &= (1/2) [11+16] = 13,5 & \mu_{3,2} &= (1/2) [20+10] = 15 \\
\mu_{1,3} &= (1/2) [8+26] = 17 & \mu_{2,3} &= (1/2) [9+31] = 20 & \mu_{3,3} &= (1/2) [13+17] = 15
\end{aligned}$$

Aurreko horietatik aurrera:

$$\begin{aligned}
(\pi\beta)_{11} &= \mu_{1,1} - (\mu + \pi_1 + \beta_1) = 19 - (17,66 + 0,84 + 2) = -1,5 \\
(\pi\beta)_{12} &= \mu_{1,2} - (\mu + \pi_1 + \beta_2) = 19,5 - (17,66 + 0,84 + (-1,66)) = 2,66 \\
(\pi\beta)_{13} &= \mu_{1,3} - (\mu + \pi_1 + \beta_3) = 17 - (17,66 + 0,84 + (-0,33)) = -1,17 \\
\\
(\pi\beta)_{21} &= \mu_{2,1} - (\mu + \pi_2 + \beta_1) = 21 - (17,66 + 0,5 + 2) = 0,84 \\
(\pi\beta)_{22} &= \mu_{2,2} - (\mu + \pi_2 + \beta_2) = 13,5 - (17,66 + 0,5 + (-1,66)) = -3 \\
(\pi\beta)_{23} &= \mu_{2,3} - (\mu + \pi_2 + \beta_3) = 20 - (17,66 + 0,5 + (-0,33)) = 2,17 \\
\\
(\pi\beta)_{31} &= \mu_{3,1} - (\mu + \pi_3 + \beta_1) = 19 - (17,66 + (-1,33) + 2) = 0,67 \\
(\pi\beta)_{32} &= \mu_{3,2} - (\mu + \pi_3 + \beta_2) = 15 - (17,66 + (-1,33) + (-1,66)) = 0,33 \\
(\pi\beta)_{33} &= \mu_{3,3} - (\mu + \pi_3 + \beta_3) = 15 - (17,66 + (-1,33) + (-0,33)) = -1
\end{aligned}$$

$(\pi\beta)_{jk}$ BALIOAK

$$\begin{aligned}
\mu_{,11} &= (1/3) [19+16+13] = 16 & \mu_{,21} &= (1/3) [19+26+25] = 23,33 \\
\mu_{,12} &= (1/3) [14+11+20] = 15 & \mu_{,22} &= (1/3) [25+16+10] = 17 \\
\mu_{,13} &= (1/3) [8+9+13] = 10 & \mu_{,23} &= (1/3) [26+31+17] = 24,66 \\
\\
(\alpha\beta)_{11} &= \mu_{,11} - (\mu + \alpha_1 + \beta_1) = 16 - (17,66 + (-4) + 2) = 0,34 \\
(\alpha\beta)_{12} &= \mu_{,12} - (\mu + \alpha_1 + \beta_2) = 15 - (17,66 + (-4) + (-1,66)) = 3 \\
(\alpha\beta)_{13} &= \mu_{,13} - (\mu + \alpha_1 + \beta_3) = 10 - (17,66 + (-4) + (-0,33)) = -3,33 \\
\\
(\alpha\beta)_{21} &= \mu_{,21} - (\mu + \alpha_2 + \beta_1) = 23,33 - (17,66 + 4 + 2) = -0,33 \\
(\alpha\beta)_{22} &= \mu_{,22} - (\mu + \alpha_2 + \beta_2) = 17 - (17,66 + 4 + (-1,66)) = -3 \\
(\alpha\beta)_{23} &= \mu_{,23} - (\mu + \alpha_2 + \beta_3) = 24,66 - (17,66 + 4 + (-0,33)) = 3,33
\end{aligned}$$

$(\pi\alpha\beta)_{ijk}$ BALIOAK

$$\begin{aligned}
(\pi\alpha\beta)_{111} &= 19 - (17,66 + 0,84 + (-4) + 2 + (-0,84) + (-1,5) + 0,34) = 4,5 \\
(\pi\alpha\beta)_{112} &= 14 - (17,66 + 0,84 + (-4) + (-1,66) + (-0,84) + 2,66 + 3) = -3,66 \\
(\pi\alpha\beta)_{113} &= 8 - (17,66 + 0,84 + (-4) + (-0,33) + (-0,84) + (-1,77) + (-3,33)) = -0,83 \\
(\pi\alpha\beta)_{121} &= 19 - (17,66 + 0,84 + 4 + 2 + 0,83 + (-1,5) + (-0,33)) = -4,5 \\
(\pi\alpha\beta)_{122} &= 25 - (17,66 + 0,84 + 4 + (-1,66) + 0,83 + 2,66 + (-3)) = 3,67 \\
(\pi\alpha\beta)_{123} &= 26 - (17,66 + 0,84 + 4 + (-0,33) + 0,83 + (-1,17) + 3,33) = 0,84
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\pi\alpha\beta)_{211} &= 16 - (17,66+0,5+(-4)+2+(-2,16)+0,84+0,34) = 0,82 \\
(\pi\alpha\beta)_{212} &= 11 - (17,66+0,5+(-4)+(-1,66)+(-2,16)+(-3)+3) = 0,66 \\
(\pi\alpha\beta)_{213} &= 9 - (17,66+0,5+(-4)+(-0,33)+(-2,16)+2,17+(-3,33)) = -1,51 \\
(\pi\alpha\beta)_{221} &= 26 - (17,66+0,5+4+2+2,17+0,84+(-0,33)) = -0,84 \\
(\pi\alpha\beta)_{222} &= 16 - (17,66+0,5+4+(-1,66)+2,17+(-3)+(-3)) = -0,67 \\
(\pi\alpha\beta)_{223} &= 31 - (17,66+0,5+4+(-0,33)+2,17+2,17+3,33) = 1,5 \\
(\pi\alpha\beta)_{311} &= 13 - (17,66+(-1,33)+(-4)+2+3+0,67+0,34) = -5,34 \\
(\pi\alpha\beta)_{312} &= 20 - (17,66+(-1,33)+(-4)+(-1,66)+3+0,33+3) = 3 \\
(\pi\alpha\beta)_{313} &= 13 - (17,66+(-1,33)+(-4)+(-0,33)+3+(-1)+(-3,33)) = 2,33 \\
(\pi\alpha\beta)_{321} &= 25 - (17,66+(-1,33)+4+2+(-3)+0,67+(-0,33)) = 5,33 \\
(\pi\alpha\beta)_{322} &= 10 - (17,66+(-1,33)+4+(-1,66)+(-3)+0,33+(-3)) = -3 \\
(\pi\alpha\beta)_{323} &= 17 - (17,66+(-1,33)+4+(-0,33)+(-3)+(-1)+3,33) = -2,33
\end{aligned}$$

BERBIDUREN BATUREN KALKULUA:

$$A \text{ ALDAGAIA (SCA): } SCA = 3.3\left((-4)^2 + (4)^2\right) = 288$$

$$B \text{ ALDAGAIA (SCB): } SCB = 3.2\left((2)^2 + (-1,66)^2 + (-0,33)^2\right) = 41,18$$

$$\text{SUBJEKTU ARTEKOA (SCS): } SCS = 2.3\left((0,84)^2 + (0,5)^2 + (-1,33)^2\right) = 16,34$$

$$\text{SUBJEKTUEN ETA A ALDAGAIAREN ARTEKO INTERAKZIOA (SCAS errorea): } SCAS = 3\left((-0,84)^2 + (0,83)^2 + (-2,16)^2 + (2,17)^2 + (3)^2 + (-3)^2\right) = 86,3$$

$$\text{SUBJEKTUEN ETA B ALDAGAIAREN ARTEKO INTERAKZIOA (SCBS errorea):}$$

$$SCBS = 2\left((-1,5)^2 + (2,66)^2 + (-1,17)^2 + (0,84)^2 + (-3)^2 + (2,17)^2 + (0,67)^2 + (0,33)^2 + (-1)^2\right) = 53,33$$

$$A \text{ ETA B ALDAGAIEN ARTEKO INTERAKZIOA (SCAB):}$$

$$SCAB = 3\left((0,34)^2 + (3)^2 + (-3,33)^2 + (-0,33)^2 + (-3)^2 + (3,33)^2\right) = 121,2$$

$$\text{SUBJEKTUEN, A ETA B ALDAGAIEN ARTEKO INTERAKZIOA (SCABS errorea):}$$

$$\begin{aligned}
SCBS &= (4,5)^2 + (-3,66)^2 + (-0,83)^2 + (-4,5)^2 + (3,67)^2 + (0,84)^2 + (0,82)^2 + (0,66)^2 + (-1,51)^2 + \dots \\
&\dots + (-0,84)^2 + (-0,67)^2 + (1,5)^2 + (-5,34)^2 + (3)^2 + (2,33)^2 + (5,33)^2 + (-3)^2 + (-2,33)^2 = 161,33
\end{aligned}$$

ALDAKORTASUN OROKORRA

Jakina denez, $SCT = SCA + SCB + SCS + SCAS + SCBS + SCAB + SCABS$, hortaz:

$$SCT = 288 + 41,18 + 16,34 + 86,3 + 53,33 + 121,2 + 161,33 = 767,68$$

Azkenik, azaldu moduan, bektoreen arteko biderketak burutu ditugu:

$$SCA = \{\alpha\}^T \{\alpha\} = 288$$

$$SCAS = \{\pi\alpha\}^T \{\pi\alpha\} = 86,3$$

$$SCB = \{\beta\}^T \{\beta\} = 41,18$$

$$SCBS = \{\pi\beta\}^T \{\pi\beta\} = 53,33$$

$$SCS = \{\pi\}^T \{\pi\} = 16,34$$

$$SCAB = \{\alpha\beta\}^T \{\alpha\beta\} = 121,2$$

$$SCABS = \{\pi\alpha\beta\}^T \{\pi\alpha\beta\} = 161,33$$

Hortik aurrera bariantzak kalkulatzeko besterik ez zaigu geratzen. Askatasun-graduak eta F estatistikoak (bariantzen arteko zatidurak) ondorengo taulan agertzen direlarik, nola kalkulatu diren ez dago azaldu beharrik.

IV.26. taula. *Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak, ANOVA taula, adibide praktikoa.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	$SCA = 288$	$a - 1 = 1$	$MCA = 288$	$F_A = \frac{MCA}{MCAS} = 6,67$
B faktoreko mailen artekoa	$SCB = 41,33$	$b - 1 = 2$	$MCB = 20,66$	$F_B = \frac{MCB}{MCBS} = 1,55$
Subjektu artekoa	$SCS = 16,34$	$n - 1 = 2$	$MCS = 8,17$	
AS interakzioa (errorea)	$SCAS = 86,33$	$(a - 1)(n - 1) = 2$	$MCAS = 43,16$	$F_{AB} = \frac{MCAB}{MCABS}$ $F_{AB} = 1,5$
BS interakzioa (errorea)	$SCBS = 53,34$	$(b - 1)(n - 1) = 4$	$MCBS = 13,33$	
AB interakzioa	$SCAB = 121,33$	$(a - 1)(b - 1) = 2$	$MCAB = 60,66$	
ABS interakzioa (errorea)	$SCABS = 161,34$	$(a - 1)(b - 1)(n - 1) = 4$	$MCABS = 40,33$	
GUZTIRA	$SCT = 768$	$abn - 1 = 17$		

Behin azaldutako aldakortasun-neurriak (SCA , SCB , SCS , $SCAS$, $SCBS$ eta $SCABS$) eta, horietatik eratorrita, bariantzak jakinik, azken horiek estatistikoki ekarpen esanguratsuak ote diren ebatz dezakegu. Horretarako ohi denez F tauletara joko dugu. Demagun % 95eko konfiantza-maila ezartzen dugula ($\alpha = 0,05$) eskuinaldeko hipotesi-testa delarik, orduan:

IV.27. taula. % 95eko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoaren arteko eraketak.

	Tauletako $F_{0,95;v_1/v_2}$	Behatutako F	Desberdintza
A faktorea	$F_{0,95;1/2} = 18,51$	$F_A = 6,67$	$18,51 > 6,67$
B faktorea	$F_{0,95;2/4} = 6,94$	$F_B = 1,55$	$6,94 > 1,55$
AB interakzioa	$F_{0,95;2/4} = 6,94$	$F_{AB} = 1,5$	$6,94 > 1,5$

Analisiak analisi, ondorio gisa, honelakoak esan ditzakegu: euskaraz zein gaztelaniaz idatzitako testuen aurrean subjektuek gogoratutako ideia kopuruan ez da diferentzia estatistikoki esanguratsurik antzematen; hots, A faktoreak ez du inolako eraginik oroitutako hitzetan. B faktoreari dagokionez, subjektuek oroitutako «eduki moten» artean ere, ez dago desberdintasun esanguratsurik. Azkenik, A eta B aldagaien arteko interakzio-efekturik ez dela agertu esan dezakegu. Laburbilduz, ez dirudi elebidunengan diferentzia adierazgarririk dagoenik hizkuntza desberdinetako (euskaraz/gaztelaniaz) oroimen-jardueretan.

4.6. DISEINU FAKTORIAL MISTOA

Aldagai aske batek (edo gehiagok) talde arteko efektuak eragiten dituenean eta beste aldagai aske batek (edo gehiagok ere) talde barnekoak eragiten dituenean, diseinu faktorial mistoa dela esaten dugu. Diseinu mota hauen artean sinpleena aurkeztuko dugu; bi faktoreko diseinu faktorial mistoa alegia. Diseinu honetako A aldagaiaren (talde arteko aldagaia) maila bakoitzari (tratamenduei) aukeratutako n subjektuak zoriz esleitzen zaizkio kopuru berdinetan. Horrela, lagin esperimentalak $n.a$ subjektuz osaturik dago eta $n.a$ subjektu horiek B aldagaiaren (talde barneko aldagaia) maila guztiak hartzen dituzte. Gogoan izan, maila diogunean, aldagai aske jakin horrek zehazten duen neurria adierazten dugula.

Eratutako bi faktoreko diseinu faktorial mistoari, bada, honako egiturako ekuazioa dagokio:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + (\pi/\alpha)_{ij} + (\beta\pi/\alpha)_{ijk}$$

Ekuazio horretan:

Y_{ijk} A eta B aldagaien j . eta k mailai, hurrenez hurren, dagokien i . subjektuaren behaketa.

μ Behaketa guztien batez besteko aritmetiko orokorra.

α_j A aldagaiari egotzitako efektu nagusia.

β_k B aldagaiari egotzitako efektu nagusia.

$(\alpha\beta)_{jk}$ A -ren j . mailaren eta B -ren k . mailaren arteko interakzio-efektua.

$(\pi/\alpha)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_j$. . i . subjektu esperimentalaren eragina A -ren j maila bakoitzean, A aldagaiaren errorea..

$(\beta\pi/\alpha)_{ijk}$ i . subjektu esperimentalaren eta B -ren k . mailaren arteko interakzioa A_j eta B_k -ren arteko interakziora egokitua, B aldagaia-
ren eta AB interakzioaren errorea.

4.6.1. Diseinu faktorial mistoa, adibide praktikoa

Psikologia Diferentziala jakintza-alorrean, *Epe Laburrerako Oroimenean* sexuen arteko diferentziarik ote dagoen aztertu nahi dugu. Adin jakin bateko emakumezko eta gizonezko talde bana hautatzen dugu (a_1 eta a_2 , hurrenez hurren). Talde bakoitzari, zein bere aldetik, hitz kopuru desberdinez osatutako zerrendak hainbanatzen zaizkio, eta saio bakoitzaren amaieran oroitutako substantiboak (b_1) zein adjektiboak (b_2) adieraztea eskatzen zaie subjektuei. Saio guztietan lortutako emaitzen batez bestekoak hurrengo taulara ekarri ditugu:

IV.28. taula. Bi faktoreko diseinu faktorial mistoa
delakoaren datuen taula (praktika).

			HITZ- KATEGORIA (B)		Baturen berbidurak	Batez besteko arimetikoak
SUBJEKTUAK			b_1	b_2		
SEXUA (A)	a_1	s_1	9	11	400	10
		s_2	4	4	64	4
		s_3	6	10	256	8
	a_2	s_1	12	7	361	9,5
		s_2	14	12	676	13
		s_3	9	14	529	11,5
Baturen berbidurak			2.916	3.364	12.544	
Batez bestekoak			9	9,66		9,33

Taulan antzeman daitekeen ereduaren egitura aztertuko dugu. Errenkadetan A faktoreko bi mailetan (a_1 eta a_2) banaturik (S) subjektuak ($s_1 \dots s_3$) eta zutabeetan B -ri dagozkion bi maila (b_1 eta b_2). Hurrenkera horri jarraituz, azpiindizeak honako hauek ditugu: subjektuak $i=1,2,3$; A faktorekoak $j=1,2$ eta B aldagaioak $k=1,2$.

IV.29. taula. Bi faktoreko diseinu Faktorial Mistoaren
datuen taula, eredu orokorra.

		SUBJEKTUAK S	B FAKTOREA				
			b_1	b_k	b_b	Baturen berbidurak	Batez bestekoak
A Faktorea	a_1	s_{11}	Y_{111}	Y_{11k}	Y_{11b}	T_{11}^2	$\bar{Y}_{11.}$
		s_{i1}	Y_{i11}	Y_{i1k}	Y_{i1b}	T_{i1}^2	$\bar{Y}_{i1.}$
		s_{n1}	Y_{n11}	Y_{n1k}	Y_{n1b}	$T_{n1.}^2$	$\bar{Y}_{n1.}$
	a_j	s_{1j}	Y_{1j1}	Y_{1jk}	Y_{1jb}	T_{1j}^2	$\bar{Y}_{1j.}$
		s_{ij}	Y_{ij1}	Y_{ijk}	Y_{ijb}	$T_{ij.}^2$	$\bar{Y}_{ij.}$
		s_{nj}	Y_{nj1}	Y_{njk}	Y_{njb}	$T_{nj.}^2$	$\bar{Y}_{nj.}$
	a_a	s_{1a}	Y_{1a1}	Y_{1ak}	Y_{1ab}	T_{1a}^2	$\bar{Y}_{1a.}$
		s_{ia}	Y_{ia1}	Y_{iak}	Y_{iab}	$T_{ia.}^2$	$\bar{Y}_{ia.}$
		s_{na}	Y_{na1}	Y_{nak}	Y_{nab}	$T_{na.}^2$	$\bar{Y}_{na.}$
	Baturen berbidurak		$T_{..1}^2$	$T_{..k}^2$	$T_{..b}^2$	$T_{...}^2$	
	Batez bestekoak		$\bar{Y}_{..1}$	$\bar{Y}_{..k}$	$\bar{Y}_{..b}$		

Taula barruko gelaxka bakoitza momentu jakin batean subjektu jakin batek tratamendu jakinean jasotako puntuazioari dagokio. Bazterkietan eskuinean errenkadako A faktoreko mailaren ($j= 1, 2, \dots, a$) arabera subjektu bakoitzaren ($i= 1, 2, \dots, n$) baturen berbidurak idatziko genituzke. Behean azken-aurreko errenkadan B faktoreko mailei ($k= 1, 2, \dots, b$) dagozkien baturen berbidurak agertzen zaizkizue. Azkenik bazterkietan multzo bakoitzari dagozkion batez besteko aritmetikoak jarri ditugu.

4.6.2. Diseinu fatorial mistoa, berbiduren baturen kalkulua

Aurrekoetan bezala kalkuluatarako prozedurak eta formulak aurkeztuko dizkizuegu.

OHIKO PROZEDURA

Gatozen, bada, berbiduren baturak kalkulatzeko darabiltzagun formulak aurkeztera:

- Subjektu arteko eragina: $SCS = \left[\frac{1}{b} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^s Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$
- A faktorearen eragina..... $SCA = \left[\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$
- Subjektuak x A (barne-aldakortasuna): $SCS_A = SCS - SCA$
- B faktorearen eragina..... $SCB = \left[\frac{1}{bn} \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$
- AB faktoreen arteko interakzioa .. $SCAB = \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right) - C \right] - (SCA + SCB)$
- Subjektuak x B (barne-aldakortasuna): $SCS_{B_A} = SCT - (SCS + SCB + SCAB)$
- Aldakortasun orokorra:..... $SCT = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk}^2 - C$
- C $C = \frac{1}{abn} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2$

Formulak formula, C osagai orokor horretatik abiatuta kalkuluei ekin die-zaiegun.

$$C = \frac{1}{2.2.3} (9 + 4 + 6 + 12 + 14 + 9 + 11 + 4 + 10 + 7 + 12 + 14)^2 = \frac{(112)^2}{12} = 1045,33$$

Behin C balioa ezagututa zortzi aldakortasun-sorburuak kalkulatu ditugu, SCS , SCA , SCS_A , SCB , $SCAB$, SCS_{B_A} , subjektu barnekoa eta aldakortasun-sorburu guztien batura den SCT .

$$SCS = \left[\frac{1}{2} \left((9+11)^2 + (4+4)^2 + (6+10)^2 + (12+7)^2 + (14+12)^2 + (9+14)^2 \right) \right] - 1045,33$$

$$SCS = 1143 - 1045,33 = 9,767$$

A aldagaiari egotziriko aldakortasuna kalkulatzeko:

$$SCA = \left[\frac{1}{3.2} \left((9+4+6+11+4+10)^2 + (10+14+9+7+12+14)^2 \right) \right] - 1045,33$$

$$SCA = 1093,33 - 1045,33 = 48$$

Talde barneko aldakortasunak:

$$SCS_{BARNE_A} = SCS - SCA$$

$$SCS_{BARNE_A} = 97,67 - 48 = 49,67$$

B aldagaiari dagokion aldakortasuna:

$$SCB = \left[\frac{1}{3,2} \left((9+4+6+12+14+9)^2 + (11+4+10+7+12+14)^2 \right) \right] - 1045,33 = 1046,66 - 1045,33 = 1,33$$

Aldakortasun orokorra, (*SCT*):

$$SCT = (9^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2 + 14^2 + 9^2 + 11^2 + 4^2 + 10^2 + 7^2 + 12^2 + 14^2) - 1045,33 = 1180 - 1045,33 = 134,67$$

– Sexua (*A*) X hitz-kategoria (*B*), *AB* interakzioa, (*SCAB*):

$$SCAB = \left[\frac{1}{3} \left((9+4+6)^2 + (12+14+9)^2 + (11+4+10)^2 + (7+12+14)^2 \right) \right] - 1045,33 - (48 + 1,33) = 1100 - 1045,33 - 49,33 = 5,34$$

– (*Subjektuak X B*) barne *A*:

$$SCSB_{barne A} = SCT - (SCS + SCB + SCAB)$$

$$SCSB_{barne A} = 1,3467 - (9,767 + 1,33 + 5,34) = 3,033$$

– *Subjektu barnekoa*:

$$Subjektu barnekoa = SCT - SCS = 134,67 - 97,67 = 37$$

Ondorengo taulan, bost aldakortasun-sorburu desberdin aurkeztu ditugu (*SCA*, *SCB*, *SCS_A*, *SCAB* eta *SCSB_A*). Horien batura, jakina denez, aldakortasun orokorra da (*SCT*). Arestian egindako bereizketan *Subjektu artekoa* (*SCS*) eta *Subjektu barnekoa* deiturikoak saiakuntza honi dagozkio. Nolanahi ere, aurreko taulan agertutakoak, aldagai bakoitzak dakarrenak eta haien arteko konbinaketa guztiek ekarritako interakzioei dagozkien aldakortasun-neurriak dira. Gogoan izan, interakzioen esangura estatistikoa baino lehenago darabilgun eredu teorikoaren arabera izan behar dela.

$$SCT = SCA + SCB + SCS_A + SCSB_A + SCAB$$

Ohi denez, askatasun-graduak, *A* faktoreko mailen (*a*), *B* faktoreko mailen (*b*) eta subjektu kopuruaren (*n*) arabera dira, non *abn* orotariko kasu kopurua (*N*) den. Taulan bertan ikus daiteke zein diren aldakortasun-neurri bakoitzari dagozkion askatasun-graduak.

Behin aldakortasun-sorburu guztiak ezagututa, haietatik eratortzen diren bariantzak eta haien arteko zatidurak (F -ak) kalkula ditzakegu eta ondorengo taula osatu:

IV.30. taula. *Bi faktoreko diseinu faktorial mistoa, ANOVA taula, eredu orokorra.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	SCA	$a - 1$	$MCA = SCA / (a - 1)$	$F_A = \frac{MCA}{MCS_A}$
B faktoreko mailen artekoa	SCB	$b - 1$	$MCB = SCB / (b - 1)$	$F_B = \frac{MCB}{MCSB_A}$
Subjektuak / A (errorea)	SCS_A	$a(n - 1)$	$MCS_A = SCS_A / a(n - 1)$	
AB interakzioa	$SCAB$	$(a - 1)(b - 1)$	$MCAB = SCAB / (a - 1)(b - 1)$	
(SujektuakXB)/A (errorea)	$SCSB_A$	$a(n - 1)(b - 1)$	$MCSB_A = SCSB_A / a(n - 1)(b - 1)$	$F_{AB} = \frac{MCAB}{MCSB_A}$
OROTARA	SCT	$(abn) - 1$		

Aurreko diseinuetan egin moduan, gero helduko diogu ariketaren behin betiko garapenari, momentuz bigarren prozedura azaltzeari lotuko gaitzaizkio.

4.6.3. Bigarren prozedura: bektoreen bitarteko ebazpena

Darabilgun ohiko ildoari jarraituz, egiturako ekuazioko osagaiz osagaiko aurkezpenari loturik, kalkuluetarako formulak agertzen ditugu:

1. A FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (SCA):

$$\alpha_j = \mu_{.j} - \mu \quad \dots \dots \dots \text{.A faktorearen ekarpena.}$$

$$\mu = \frac{1}{abn} \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \quad \dots \text{.Batez besteko aritmetiko orokorra.}$$

$$\mu_{.j} = \frac{1}{bn} \left(\sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right) \quad \dots \text{.A faktorearen araberrako taldeen batez bestekoak.}$$

$$SCA = nb \sum_{j=1}^a \alpha_j^2 \quad \dots \dots \dots \text{.A faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.}$$

2. *B* FAKTOREARI EGOTZITAKO ALDAKORTASUNA (*SCB*):

$$\beta_k = \mu_{..k} - \mu \quad \dots \dots \dots .B \text{ faktorearen ekarpena.}$$

$$\mu_{..k} = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right) \quad \dots \dots .B \text{ faktorearen arabera taldeen batez bestekoak.}$$

$$SCB = an \sum_{k=1}^b \beta_k^2 \quad \dots \dots \dots .B \text{ faktoreak ekarritako talde arteko aldakortasuna.}$$

3. *A* ETA *B* FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOARI DAGOKION ALDAKORTASUNA (*SCAB*):

$$(\alpha\beta)_{jk} = \mu_{.jk} - (\mu + \alpha_j + \beta_k) \quad \dots .AB \text{ interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{.jk} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right) \quad \dots \dots \dots .taldeen batez bestekoak.$$

$$SCAB = n \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b (\alpha\beta)_{jk}^2 \quad \dots \dots .AB \text{ interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

4. SUBJEKTUEN (*S*) ERAGINA *A* FAKTOREKO MAILA BAKOITZEAN. (*SCS_A* ALDAKORTASUNA edo errorea):

$$(\pi/\alpha)_{ij} = \mu_{ij.} - (\mu + \alpha_j) \quad \dots \dots .AS \text{ interakzioaren ekarpena.}$$

$$\mu_{ij.} = \frac{1}{b} \left(\sum_{k=1}^b Y_{ijk} \right) \quad \dots \dots \dots .taldeen batez bestekoak.$$

$$SCS_A = b \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n (\pi/\alpha)_{ij}^2 \quad \dots \dots .AS \text{ interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

5. SUBJEKTUEN (*S*) ETA *B* FAKTOREAREN ARTEKO INTERAKZIOA *A* ETA *B* FAKTOREEN ARTEKO INTERAKZIOAREN ARABERA (*SCSB_A* errorea):

$$(\beta\pi/\alpha)_{ijk} = Y_{ijk} - (\mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk}) \quad \dots .BS \text{ interakzioaren ekarpena.}$$

$$SCSB_A = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n (\beta\pi/\alpha)_{ijk}^2 \quad \dots .BS \text{ interakzioak ekarritako aldakortasuna.}$$

KALKULUAK:

• EFEKTU NAGUSIAK

 α_j BALIOAK

Batez besteko aritmetiko orokorra (μ) honela kalkulatzen dugu

$$\mu = (1/2.2.3) [(9+4+6+12+14+9+11+4+10+7+12+14)]$$

$$\mu = (112/12) = 9,33$$

Ondoren, A faktoreak ekarritako aldakortasuna kalkulatzeari lotzen gatzazkio. Horrela, $\mu_{.j}$ batez bestekoak, hurrenez hurren:

$$\mu_{.1} = (1/3.2) [9+4+6+11+4+10] = 7,33$$

$$\mu_{.2} = (1/3.2) [12+14+9+7+12+14] = 11,33$$

$$\alpha_1 = \mu_{.1} - \mu = 7,33 - 9,33 = -2$$

$$\alpha_2 = \mu_{.2} - \mu = 11,33 - 9,33 = 2$$

 β_k BALIOAK

B faktoreak ekarritako aldakortasuna kalkulatzeko, $\mu_{..k}$ batez bestekoak, hurrenez hurren:

$$\mu_{..1} = (1/3.2) [9+4+6+12+14+9] = 9$$

$$\mu_{..2} = (1/3.2) [11+4+10+7+12+14] = 9,66$$

$$\beta_1 = \mu_{..1} - \mu = 9 - 9,33 = -0,33$$

$$\beta_2 = \mu_{..2} - \mu = 9,66 - 9,33 = 0,33$$

• INTERAKZIOAK

 $(\alpha\beta)_{jk}$ BALIOAK

$$\mu_{.11} = (1/3) [9+4+6] = 6,33$$

$$\mu_{.21} = (1/3) [12+14+9] = 11,66$$

$$\mu_{.12} = (1/3) [11+4+10] = 8,33$$

$$\mu_{.22} = (1/3) [7+12+14] = 11$$

$$(\alpha\beta)_{11} = \mu_{.11} - (\mu + \alpha_1 + \beta_1) = 6,33 - (9,33 + (-2) + (-0,33)) = -0,67$$

$$(\alpha\beta)_{12} = \mu_{.12} - (\mu + \alpha_1 + \beta_2) = 8,33 - (9,33 + (-2) + 0,33) = 0,67$$

$$(\alpha\beta)_{21} = \mu_{.21} - (\mu + \alpha_2 + \beta_1) = 11,66 - (9,33 + 2 + (-0,33)) = 0,66$$

$$(\alpha\beta)_{22} = \mu_{.22} - (\mu + \alpha_2 + \beta_2) = 11 - (9,33 + 2 + 0,33) = -0,66$$

 $(\pi/\alpha)_{ij}$ BALIOAK

Aldakortasun-sorburu hau i . subjektuak A -ren j maila bakoitzean ekarritako aldakortasunari dagokio. Batez bestekoak kalkulatuz, banan-banan:

$$\mu_{11.} = (1/2) [9+11] = 10$$

$$\mu_{21.} = (1/2) [4+4] = 4$$

$$\mu_{31.} = (1/2) [6+10] = 8$$

$$\mu_{12.} = (1/2) [12+7] = 9,5$$

$$\mu_{22.} = (1/2) [14+12] = 13$$

$$\mu_{32.} = (1/2) [9+14] = 11,5$$

Behin horiek jakinik:

$$(\pi/\alpha)_{11} = \mu_{11} - (\mu + \alpha_1) = 10 - (9,33 + (-2)) = 2,67$$

$$\mu(\pi/\alpha)_{12} = \mu_{12} - (\mu + \alpha_2) = 9,5 - (9,33 + 2) = -1,83$$

$$(\pi/\alpha)_{21} = \mu_{21} - (\mu + \alpha_1) = 4 - (9,33 + (-2)) = -3,33$$

$$(\pi/\alpha)_{22} = \mu_{22} - (\mu + \alpha_2) = 13 - (9,33 + 2) = 1,67$$

$$(\pi/\alpha)_{31} = \mu_{31} - (\mu + \alpha_1) = 8 - (9,33 + (-2)) = 0,67$$

$$(\pi/\alpha)_{32} = \mu_{32} - (\mu + \alpha_2) = 11,5 - (9,33 + 2) = 0,17$$

$(\beta\pi/\alpha)_{ijk}$ BALIOAK

$$(\pi\beta/\alpha)_{111} = 9 - (9,33 + (-2) + (-0,33) + (-0,67) + 2,67) = 0$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{121} = 4 - (9,33 + (-2) + (-0,33) + (-0,67) + (-3,33)) = 1$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{131} = 6 - (9,33 + (-2) + (-0,33) + (-0,67) + 0,67) = -1$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{112} = 12 - (9,33 + 2 + (-0,33) + 0,66 + (-1,83)) = 2,17$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{122} = 14 - (9,33 + 2 + (-0,33) + 0,66 + 1,67) = 0,67$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{132} = 9 - (9,33 + 2 + (-0,33) + 0,66 + 0,17) = -2,83$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{211} = 11 - (9,33 + (-2) + 0,33 + 0,67 + 2,67) = 0$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{221} = 4 - (9,33 + (-2) + 0,33 + 0,67 + (-3,33)) = -1$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{231} = 10 - (9,33 + (-2) + 0,33 + 0,67 + 0,67) = 1$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{212} = 7 - (9,33 + 2 + 0,33 + (-0,66) + (-1,83)) = -2,17$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{222} = 12 - (9,33 + 2 + 0,33 + (-0,66) + 1,67) = -0,67$$

$$(\pi\beta/\alpha)_{232} = 14 - (9,33 + 2 + 0,33 + (-0,66) + 0,17) = 2,83$$

BERBIDUREN BATUREN KALKULUA:

$$A \text{ ALDAGAIA (SCA): } SCA = 3.2 \left[(-2)^2 + 2^2 \right] = 48$$

$$B \text{ ALDAGAIA (SCB): } SCB = 3.2 \left[(-0,33)^2 + 0,33^2 \right] = 1,33$$

A eta B ALDAGAIEN ARTEKO INTERAKZIOA (SCAB):

$$SCAB = 3 \left[(-0,67)^2 + 0,67^2 + 0,66^2 + (-0,66)^2 \right] = 5,3$$

SUBJEKTUAK BARNE A (SCS_A):

$$SCS_A = 2 \left[2,67^2 + (-3,33)^2 + 0,67^2 + (-1,83)^2 + 1,67^2 + 0,17^2 \right] = 49,66$$

(SUBJEKTUAK X B) BARNE A ($SCSB_A$):

$$SCSB_A = 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2,17^2 + 0,67^2 + (-2,83)^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2,17)^2 + (-0,67)^2 + 2,83^2 = 30,33$$

ALDAKORTASUN OROKORRA

Jakina denez, $SCT = SCA + SCB + SCS_A + SCAB + SCSB_A$, hortaz:

$$SCT = 48 + 1,33 + 49,66 + 5,34 + 30,33 = 134,66$$

Bektoreen bitarteko ebazpena bere osotasunean garatzen ez badugu ere, gogoratu berbiduren baturak bektoreen eta beraien iraulien arteko biderkadurak direla. Horrela, bektoreen arteko biderketak eginez:

$$SCA = \{\alpha\}^T \{\alpha\} = 48$$

$$SCAB = \{\alpha\beta\}^T \{\alpha\beta\} = 5,34$$

$$SCB = \{\beta\}^T \{\beta\} = 1,33$$

$$SCSB_A = \{\beta\pi/\alpha\}^T \{\beta\pi/\alpha\} = 30,33$$

$$SCS_A = \{\pi/\alpha\}^T \{\pi/\alpha\} = 49,66$$

Hortik aurrera bariantzak kalkulatzeko besterik ez zaigu garatzen. Askatasun-graduak eta F estatistikoak (bariantzen arteko zatidurak) ondorengo taulan agertzen dira.

IV.31. taula. *Bi faktoreko diseinu faktorial mistoa, ANOVA taula, adibide praktikoa.*

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktoreko mailen artekoa	$SCA=48$	$a-1=1$	$MCA = SCA/(a-1) = 48$	$F_A = \frac{MCA}{MCS_A} = 3,86$
B faktoreko mailen artekoa	$SCB=1,33$	$b-1=1$	$MCB = SCB/(b-1) = 1,33$	$F_B = \frac{MCB}{MCSB_A} = 0,17$
Subjektuak / A	$SCS_A=49,66$	$a(n-1)=4$	$MCS_A = SCS_A/(a(n-1)) = 12,42$	
AB interakzioa	$SCAB=5,34$	$(a-1)(b-1)=1$	$MCAB = SCAB/(a-1)(b-1) = 5,34$	
(SubjektuakXB)/A	$SCSB_A=30,33$	$a(n-1)(b-1)=4$	$MCSB_A = SCSB_A / (a(n-1)(b-1)) = 7,58$	$F_{AB} = \frac{MCAB}{MCSB_A} = 0,7$
OROTARA	$SCT=134,66$	$(abn)-1=11$		

Azaldutako aldakortasun-neurriak (SCA , SCB , SCS_A , $SCAB$ eta $SCSB_A$) eta, horietatik eratorritako bariantzak (MCA , MCB , MCS_A , $MCAB$ eta $MCSB_A$) jakinik, erabaki estatistikoa har dezakegu. Hau da, ea faktore eta interakzioen ekarpenak estatistikoki esanguratsuak ote diren ebatz dezakegu. Horretarako, ohi denez, F tauletara joko dugu. Demagun % 95eko konfiantza-maila ezartzen dugula ($\alpha = 0,05$) eskuinaldeko hipotesi-testa delarik, orduan, ondorengo taula hau eratu dezakegu:

IV.32. taula. % 95eko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoaren arteko eraketak.

	Tauletako $F_{0,95;v1/v2}$	Behatutako F	Desberdintza
A faktorea	$F_{0,95;1/4} = 7,71$	$F_A = 3,86$	$7,71 > 3,86$
B faktorea	$F_{0,95;1/4} = 7,71$	$F_B = 0,17$	$7,71 > 0,17$
AB interakzioa	$F_{0,95;1/4} = 7,71$	$F_{AB} = 0,70$	$7,71 > 0,70$

Analisiak analisi, ondorio gisa, honelakoak esan ditzakegu: sexuak (A faktorea) ez du inolako eraginik Epe Laburrerako Oroimenean, ez oroitutako hitzzerrendetako izenak (substantiboak) gogoratzean, ezta adjektiboak direnean ere. Halaber, substantiboen eta adjektiboen gogorapen mailetan ez da desberdintasun esanguratsurik antzematen. Hau da, hitz mota aldagaiak (B faktoreak) ez du hitzen oroitzapen-mailan eragiten, modu esanguratsuan bederen. Azkenik, A eta B aldagaien artean ez dago interakzio-efekturik.

4.7. ALDAGAI KOBARIANTEDUN⁹ DISEINUA: KOBARIANTZA-ANALISIA

Diseinu honen funtsa ikergaiarekiko arrotza den aldagai jarraitu baten edo gehiagoren balediko eragina prozedura estatistikoaren bitartez kontrolatzean datza. Kobariantza-analisiaren bidez, esperimentu jakin batean subjektuek lortutako mendeko aldagaiaren balioak $\bar{Y}_j$ aldagai kobariantean (ikus oin-oharra) hartutako balioen $\bar{X}_j$ arabera egokitzen dira. Ondorioz, aldagai arrotz baten edo gehiagoren eragina bariantza-erroretik desagerrarazten da test estatistikoaren indarra areagotuz. Egokitzapen horrek erregresio linealaren ereduan du oinarri, ondorengo ekuazio-linealari dagokion ereduan hain zuzen: $\bar{Y}_j = \bar{Y} - b(\bar{X}_j - \bar{X})$. Azken batean, kobariantza-analisia atal honetan aztertzen ari garen bariantza-analisiaren eta, Portaera Zientzietan horren erabilia den erregresio-analisiaren, elkarren arteko nahasketa besterik ez da. Hori horrela, edozein bariantza-analisi erabili ahal izateko ezinbesteko baldintzez gaindi, kobariantza-analisiak beste hiru baldintza behar ditu:

9. Hitza aukeratzera koan *kobariantea* nahiago izan dugu *kobariatzailea* baino. Izan ere, darabilgun eredu estatistikoaren arabera *aldagai arrotz* horren eragina beste aldagaiekiko *baterako aldakortasunean* edo *aldakortasun komunean* baitatza. Horrela, *aldagai (jarraiki) arrotz* horri dagokion aldakortasuna isolatzea eta kontrolatzea daukagu helburu. *Kobariatzaile* hitzak, beste alderditik, egile kutsua duelarik beste aldagaien aldakortasun-sortzailea dela pentsaraz diezaguke eta, jakina, hori ez da horrela. Izatekotan *aldagai kobarianteak* besteen aldakortasuna *mozorrotu*, puztu edo ezkuta dezake, ikertzaileari ondorio okerrak iradokiaraziz.

1. Aldagai kobariantedunaren eta mendeko aldagaiaren artean erlazio lineala izatea.
2. Erregresio linealaren malden arteko homogenotasuna.
3. Tratamenduaren eta aldagai kobariantedunaren artean independentzia lineala izatea, hots, tratamendu-aldagaia eta aldagai kobarianteduna elkarrekiko askeak izatea.

Kobariantza-analisan, oro har, egiturako ekuaziorik sinpleena ondorengo hau da:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta (X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij}$$

Ekuazio horretan:

Y_{ij} A aldagaiaren j mailari dagokion i . subjektuaren behaketa.
 μ Behaketa guztien batez besteko aritmetiko orokorra, efektu egonkor guztiak barne dakartzan parametroa.
 $\beta(X_{ij} - \bar{X})$ X_{ij} datuen eta esperimenduaren hasierako batez bestekoaren ($\bar{X}$) arteko kendura adierazten duen parametro egonkorra.
 ε_{ij} Errore esperimentalak.

4.7.1. Aldagai kobariantedun diseinua, adibide praktikoa

Hezkuntza-psikologian diharduen irakasle batek jakin nahi du ea eskolak goizean ala arratsaldean izateak matematikaren ikaskuntzan eraginik ote duen. Hau da, ea haurren errendimendua matematika irakasgaian desberdina den goizeko edo arratsaldeko ikastaldeetan. Halaber, ikertzaileak haur bakoitzaren matematika-gaitasuna kontrolatu nahi du. Horrela, tratamendu esperimentalak ezarri aurretik 10 hurrek matematikan lortutako notak bildu ditu. Ikastaldea erdibanatzen du (5na ikasle taldeko) eta hurrengo sei hilabetetan zehar, ikasleek goiz eta arratseko ikastaldeetan jasotzen dituzte eskolak — a_1 ikastaldea goizean eta a_2 eskolak arratsean—. Pretest edo aldagai kobariantearen emaitzak X aldagaian biltzen dira eta posttest edo mendeko aldagaiarenak, berriz, Y aldagaian. Hona hemen datuen **taula**.

Taulan antzeman daitekeen ereduaren egitura aztertuko dugu. Errenkadetan subjektuek lortutako notak ditugu, gogoan har pretest eta posttest puntuazioak direlarik haur bakoitzak bina puntuazio dituela, hots a_1 eta a_2 egoera desberdinetako hurrek bina puntuazio dituzte, X eta Y alegia. Oro har, honela idatz genezake:

IV.33. taula. Aldagai kobariantedun diseinuaren datuen taula (praktika).

ESKOLAK EMATEKO ORDUAK (Goiz / Arratsalde)			
a_1		a_2	
Pretest X	Posttest Y	Pretest X	Posttest Y
9	8	10	7
6	9	5	6
7	6	7	9
8	9	6	5
5	8	7	8
35	40	35	35
$\sum XY$	280	$\sum XY$	249
$\sum X \sum Y$	1.400	$\sum X \sum Y$	1.225

IV.34. taula. Aldagai kobariantedun diseinuaren datuen taula (eredu orokorra).

AZTERGAIA EDO ALDAGAI ASKEA (A)									
a_1		$\begin{matrix} \dots \\ / \\ \dots \end{matrix}$	a_j		$\begin{matrix} \dots \\ / \\ \dots \end{matrix}$	a_a			
X	Y		X	Y		X	Y		
X_{11}	Y_{11}		X_{1j}	Y_{1j}		X_{1a}	Y_{1a}		
$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$		
X_{i1}	Y_{i1}		X_{ij}	Y_{ij}		X_{ia}	Y_{ia}		
$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$		
X_{n1}	Y_{n1}		X_{nj}	Y_{nj}		X_{na}	Y_{na}		
$\sum_{i=1}^n X_{i1}$	$\sum_{i=1}^n Y_{i1}$	$\sum_{i=1}^n X_{ij}$	$\sum_{i=1}^n Y_{ij}$	$\sum_{i=1}^n X_{ia}$	$\sum_{i=1}^n Y_{ia}$				
$\sum_{i=1}^n X_{i1} Y_{i1}$		$\sum_{i=1}^n X_{ij} Y_{ij}$		$\sum_{i=1}^n X_{ia} Y_{ia}$					
$\sum_{i=1}^n X_{i1} \sum_{i=1}^n Y_{i1}$		$\sum_{i=1}^n X_{ij} \sum_{i=1}^n Y_{ij}$		$\sum_{i=1}^n X_{ia} \sum_{i=1}^n Y_{ia}$					

Azpiindizeak dira, $i=1, 2, \dots, n$ —subjektuak— eta $j=1, 2, \dots, a$ —mailak—.

4.7.2. Aldagai kobariantedun diseinua. Kalkulua, lehenengo prozedura

Aurrekoetan bezala kalkuluetarako prozedurak eta formulak aurkeztuko dizkizuegu. Hona hemen, bada, kalkuluetarako darabiltzagun formulak:

- Kobarianteak ekarritako aldakortasuna: $SCX = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} \right)^2 \right] - C_x$
- Barne-aldagaiak ekarritako aldakortasuna: ... $SCY = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right] - C_y$
- Erregresioak azaldutako aldakortasuna: ... $SCXY = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^a \left(\left(\sum_{i=1}^n X_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right) \right) \right] - C_{xy}$
- Errorea (kobariantea) $SCE_x = SCT_x - SCX$
- Errorea (mendeko aldagaia) $SCE_y = SCT_y - SCY$
- Errorea orokorrean $SCE_{xy} = SCT_{xy} - SCXY$
- Aldakortasun orokorra (kobariantea) $SCT_x = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n X_{ij}^2 - C_x$
- Aldakortasun orokorra (Y) $SCT_y = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 - C_y$
- Aldakortasun orokorra $SCT_{xy} = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n X_{ij} Y_{ij} - C_{xy}$
- C osagaiak: $C_x = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n X_{ij} \right)^2$ $C_y = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2$ $C_{xy} = \frac{1}{an} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n X_{ij} \right) \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)$

X ALDAGAIA EDO KOBARIANTEA

Formulak formula C_x osagai orokor horretatik abiatuta kalkuluei ekin diezaiegun.

$$C_x = \frac{1}{an} \left(\sum_j \sum_i X_{ij} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 5} (9 + 6 + 7 + 8 + 5 + 10 + 5 + 7 + 6 + 7)^2 = \frac{(70)^2}{10} = 490$$

A ALDAGAIA

Behin C_x jakinik *eskolak hartzeko txanda* (A) aldagaiak ekarritako aldakortasuna:

$$SCX = \frac{1}{n} \sum_j \left(\sum_i X_{ij} \right)^2 - C_x = \frac{1}{5} \left[(9+6+7+8+5)^2 + (10+5+7+6+7)^2 \right] - 490 = 490 - 490 = 0$$

ALDAKORTASUN OROKORRA SCT_x

$$SCT_x = \sum_j^a \sum_i^n X_{ij}^2 - C_x = \left[(9)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (8)^2 + (5)^2 + (10)^2 + (5)^2 + (7)^2 + (6)^2 + (7)^2 \right] - 490 = 514 - 490 = 24$$

$$\text{ERROREA: } SCE_x = SCT_x - SCX = 24 - 0 = 24$$

Horrenbestez, aldagai kobarianteari dagozkion kalkuluak eginak daude.

Y MENDEKO ALDAGAIA

Aurrekoan bezala, kalkuluak elkarren jarraian aurkezten ditugu:

$$C_y = \frac{1}{an} \left(\sum_j^a \sum_i^n Y_{ij} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 5} (8 + 9 + 6 + 9 + 8 + 7 + 6 + 9 + 5 + 8)^2 = \frac{(75)^2}{10} = 5,625$$

A ALDAGAIA

$$SCY = \frac{1}{n} \sum_j^a \left(\sum_i^n Y_{ij} \right)^2 - C_y = \frac{1}{5} \left[(8 + 9 + 6 + 9 + 8)^2 + (7 + 6 + 9 + 5 + 8)^2 \right] - 5,625 = 565 - 5,625 = 2,5$$

ALDAKORTASUN OROKORRA SCT_y

$$SCT_y = \sum_j^a \sum_i^n Y_{ij}^2 - C_y = \left[(8)^2 + (9)^2 + (6)^2 + (9)^2 + (8)^2 + (7)^2 + (6)^2 + (9)^2 + (5)^2 + (8)^2 \right] - 5,625 = 581 - 5,625 = 1,85$$

ERROREA

$$SCE_y = SCT_y - SCY = 18,5 - 2,5 = 16$$

BIDERKADURA GURUTZATUEN BATURAK

 C_{xy} OSAGAIA

$$C_{xy} = \frac{1}{an} \left(\sum_j^a \sum_i^n X_{ij} \right) \left(\sum_j^a \sum_i^n Y_{ij} \right)$$

$$C_{xy} = \frac{1}{2 \cdot 5} \left[(9 + 6 + 7 + 8 + 5 + 10 + 5 + 7 + 6 + 7) \cdot (8 + 9 + 6 + 9 + 8 + 7 + 6 + 9 + 5 + 8) \right] = \frac{(70) \cdot (75)}{10} = 525$$

A ALDAGAIA

$$SCXY = \frac{1}{n} \sum_j^a \left(\sum_i^n X_{ij} \right) \left(\sum_i^n Y_{ij} \right) - C_{xy}$$

$$SCXY = \frac{1}{5} \left[(9 + 6 + 7 + 8 + 5) (8 + 9 + 6 + 9 + 8) + (10 + 5 + 7 + 6 + 7) (7 + 6 + 9 + 5 + 8) \right] - 525$$

$$SCXY = 525 - 525 = 0$$

ALDAKORTASUN OROKORRA SCT_{xy}

$$SCT_{xy} = \sum_j^a \sum_i^n X_{ij} Y_{ij} - C_{xy}$$

$$SCT_{xy} = [(9) \cdot (8) + (6) \cdot (9) + (7) \cdot (6) + (8) \cdot (9) + (5) \cdot (8) + (10) \cdot (7) + (5) \cdot (6) + (7) \cdot (9) + (6) \cdot (5) + (7) \cdot (8)] - 525$$

$$SCT_{xy} = 529 - 525 = 4$$

ERROREA

$$SCE_{xy} = SCT_{xy} - SCXY = 4 - 0 = 4$$

Berbiduren baturak eta biderkadura gurutzatuen baturak kalkulatu ondoren, berbiduren batez bestekoak edo bariantza doituak kalkula ditzakegu. Horretarako efektu bakoitzari dagozkion askatasun-gradu kopuruak ezagutu behar ditugu aurrenik. Horren ostean bariantzen arteko zatidura edo F estatistikoa kalkula dezakegu.

Dena den, hobeto uler daitekeelakoan, azkeneko urrats hauek atzekoz aurrera emango ditugu. Aldagai kobariantedun diseinu honetarako funtsean bi aldakortasun-sorburu nagusi ditugu: A aldagaiari egotzirikoa aurrena, eta erroreari atxikirikoa hurrena. Bi horien arteko erlazioak mendeko aldagaian behaturiko diferentziak esanguratsuak diren ala ez adierazten digu. Gogoan izan A aldagaia erabiltzerakoan beste aldagai bat, kobariantea hain zuzen ere, jorratzen genuela. Horrexegatik aipatu bariantzen kalkulua doitu egin behar dugu.

KOBARIANTEAREN ARABERA DOITUTAKO BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK EDO BARIANTZAK

Berbiduren batez bestekoak, MCA_y , eta MCE_y , A aldagaiari egotziriko bariantza eta erroreari egotzirikoa dira, hurrenez hurren. Haien kalkuluak, berriaz:

$$MCA_{y'} = \frac{SCA_{y'}}{a - 1} \quad SCA_{y'} = SCT_y - \frac{SCT_{xy}^2}{SCT_x} - SCE_y + \frac{SCE_{xy}^2}{SCE_x}$$

$$MCE_{y'} = \frac{SCE_{y'}}{a(n - 1) - 1} \quad SCE_{y'} = SCE_y - \frac{SCE_{xy}^2}{SCE_x}$$

Berbiduren batez bestekoak edo bariantzak kalkulatzean, MCA_y , eta MCE_y , kalkulatzean, hain zuzen ere, aintzat hartzen da kobarianteari dagokion aldakortasuna. Azkenik kalkuluei ekin baino lehenago, ohiko bariantza-analisietan bezala, taula modura aurkeztuko dizkizuegu:

IV.35. taula. Aldagai kobariantedun diseinurako taula (eredu orokorra).

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktore doitua	SCA_y	$a-1$	$MCA_y = SCA_y / (a-1)$	$F_A = \frac{MCA_{y'}}{MCE_{y'}}$
Errore doitua	SCE_y	$a(n-1)-1$	$MCE_y = SCE_y / (a(n-1)-1)$	
OROTARA	SCT_y	$(an)-2$		

Gure adibideko datuak erabiliz:

$$SCA_{y'} = SCT_y - \frac{SCT_{xy}^2}{SCT_x} - SCE_y + \frac{SCE_{xy}^2}{SCE_x} = 1,85 - \frac{4^2}{24} - 16 + \frac{4^2}{24} = 2,5$$

Dagokion berbiduren batura doitua (SCA_y) ezagutuz gero:

$$MCA_{y'} = \frac{SCA_{y'}}{a-1} = \frac{2,5}{2-1} = 2,5$$

Erroreari dagokiona beste aldetik, $SCE_{y'} = SCE_y - \frac{SCE_{xy}^2}{SCE_x} = 16 - \frac{4^2}{24} = 1,533$

$$MCE_{y'} = \frac{SCE_{y'}}{a(n-1)-1} = \frac{1,533}{2(5-1)-1} = 2,19$$

Eragiketak eragiketa, aldagai kobariantedun diseinuari dagozkion bariantzak kalkulatu ditugu.

IV.36. taula. Aldagai kobariantedun diseinurako taula (adibide praktikoa).

ALDAKORTASUN-SORBURUA	BERBIDUREN BATURAK	ASKATASUN-GRADUAK	BERBIDUREN BATEZ BESTEKOAK	F
A faktore doitua	$SCA_y = 2,5$	$a-1 = 1$	$MCA_y = SCA_y / (a-1) = 2,5$	$F_A = \frac{MCA_{y'}}{MCE_{y'}} = \frac{2,5}{2,19} = 1,14$
Errore doitua	$SCE_y = 15,33$	$a(n-1)-1 = 7$	$MCE_y = SCE_y / (a(n-1)-1) = 2,19$	
OROTARA	$SCT_y = 17,83$	$(an)-2 = 8$		

Esangura-maila ($\alpha = 0,05$) ezarriaz, F eskuinaldeko testa eta askatasun-graduak $v_1 = 1$; $v_2 = 7$ direla, tauletan ondorengo balioa aurkitzen dugu: $0,95F_{(1;7)} = 5,59$.

Behatutako F eta % 95eko konfiantza-mailari atxikiz, itxaron daitekeen goren mailako F (tauletakoa) balioen artean honako desberdintza hau dugu: $1,14 < 5,59$

betetzen da. Hipotesi nulua ezin bazter dezakegu. Hau da, haur bakoitzaren matematika-gaitasuna estatistikoki kontrolpean izanik, eskolak goizean edo arratsaldean hartzeak ez du inolako eraginik haurren errendimenduan.

5. Kapitulu

Gaur egun, estatistikaren eta informatikaren arteko lotura erabatekoa da. Estatistika irakasteko, analisietarako softwarea ezinbesteko baliabide bihurtu da, beraz. Datuak mekanizatzeko, editatzeko eta ustiatzeko programa asko dago. Kalkulu-orri sinpleenetatik hasita (Excel), analisi-estatistiko konplexuak egiteko programa-bilduma handienetarako tresna ugari dago: SPSS, SAS/STAT... Gizarte Zientzietan; BMDP eta beste batzuk Osasun Zientzietan, eta beste hamaika aplikazio informatiko zehatzago sortu dira maila bateko edo besteko datu-analisiak egiteko.

Software librearen hedapena eta garapena gero eta handiagoa delarik, analisi estatistikoen alorrean lanabes bat baino gehiago daukagu esku-eskura. Horietako bat da *R Commander*.

Datuak editatzeko eta ustiatzeko aukera zabalak eskaintzen ditu. Haren abantaila nagusia, doakoa izateaz gainera, malgutasuna da. Oso tresna malgua da *R* inguruneko lanabesa.

Argitalpen honetan *R Commander* erabiltzeko oinarritzko azalpenak landu ditugu. Hau da, kapitulu hau azaleko aurkezpena besterik ez da.

5. *R Commander*

R software libreko proiektuaren barruan, datuak editatzeko eta ustiatzeko aplikazioa da *R Commander*. Software hau zertan den eta non eta nola eskura daitekeen kontsulta daiteke *R HASIBERRIENTZAT* (Emmanuel Paradis) argitalpenean; euskarazko bertsioa UEUK argitaratu du eta doan ekar daiteke www.buruxkak.org webgunetik.

Software hau, bada, edozeinen esku dago. Behin *R* gure ordenagailura ekarri eta gero, *R Commander* deritzan paketea instalatu behar dugu. Pakete hori, hain zuzen ere, datuak editatzeko, eraldatzeko eta ustiatzeko erreminta da, analisi estatistikoak eta grafikoak egiteko lanabesa. *R Commander* agindu honen bitartez instala dezakegu:

```
> install.packages("Rcmdr", dependencies=TRUE)
```

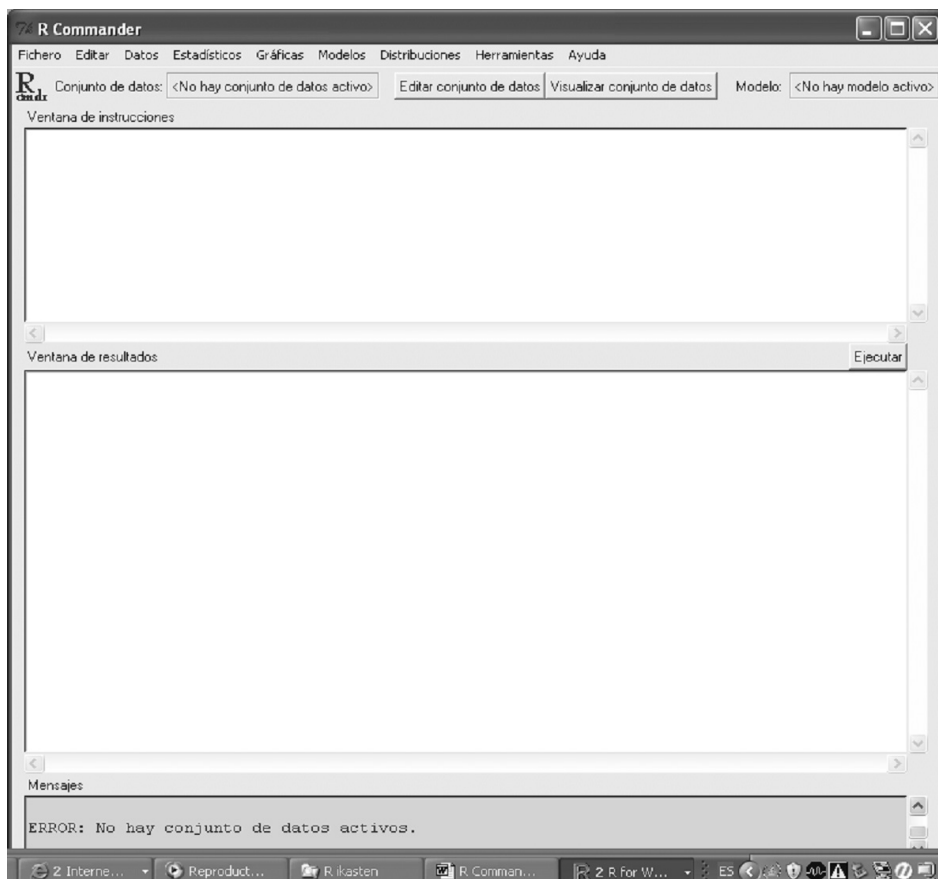
R Commander softwareari buruzko laguntza eta azalpenak *Getting Started With the R Commander* (John Fox 2006) dokumentu elektronikoan aurki daitezke. Dokumentu hori *R Commander* softwarean bertan aurki daiteke laguntza klikatuz. Hain zuzen ere, erreferentzia hori, eta beste batzuk, erabili ditugu hemengo azalpenak idazteko.

Dagoeneko *R Commander* paketearen bertsio bat baino gehiago dago, maiz bereizten da-eta. Hiz-kuntza desberdinetan aurki daiteke, baina euskarazkoa oraindik egiteke dago. Hemen ingelesezko bertsiotik abiatu bagara ere, espainolezkoa erabiliko dugu batik bat.

Behin *R* barruan, *R Commander* abian ipiniko dugu honela:

```
> library(Rcmdr)
```

R Commander lanabesak *windows*-en ohiko egitura dauka: goian menu-lerroa eta bi leiho, bat (*ventana de instrucciones*) aginduak eta eginkizunak idazteko eta, bestea (*ventana de resultados*), analisiak eta emaitzak ikusteko.



V.1. irudia. *R Commander-en sarrerako leihoak.*

Menu horren aukerak eta oinarritzko ezaugarriak:

Fichero. Datu- eta testu-fitxategiak kargatzeko eta gordetzeko; egindako lanak gordetzeko eta *R*-tik ateratzeko aginduak.

Editar. Kopiatu, ebaki eta itsatsi funtzioak testua lantzeko instrukzioen leihoan.

Datos. Datuak irakurtzeko eta eraldatzeko funtzioak.

Estadísticos. Oro har, analisi estatistikoak egiteko funtzioak.

Gráficas. Datuetatik abiatuta oinarritzko grafikoak sortzeko funtzioak.

Modelos. Hautatuko ereduaren arabera, zenbakizko laburpenak, konfiantza-tarteak, hipotesi-testak, ereduaren grafikoak, hondakinen analisiak eta abar.

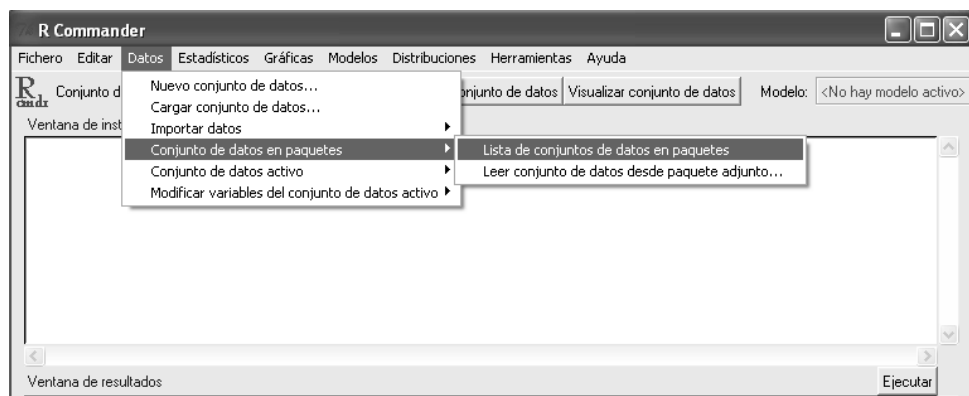
Distribuciones. Probabilitate-banaketa erabilienak, jarraikiak eta diskretuak. Laginak.

Herramientas. Aukera desberdinak *R* inguruneko lanabesak eskuratzeko.

Ayuda. *R Commander* softwareari buruzko informazioa eta laguntza.

5.1. DATUAK ESKURATZEN

Hiru aukera nagusi dauzkagu datuak eskuratzeko, datu-matrize berriak sortzea (*Nuevo conjunto de datos...*), lehendik sortutakoak editatzeko (*Cargar conjunto de datos...*) eta beste formatu bateko datu-matrizeak inportatzeko (*Importar datos*). Bestetik, *R Commander* paketea instalatzearekin batera, datu multzo batzuk eskaintzen zaizkigu, ariketak eta praktikak, nahi izanez gero, egin ahal izateko. Datu-matrize horiek eskuratzeko menuko *Datos* klikatu eta horren barruan *Conjunto de datos en paquetes* aukera hautatu; bertan ikus dezakezu dauden datu-matrizeen zerrenda nahi duzuna aukeratzeko.

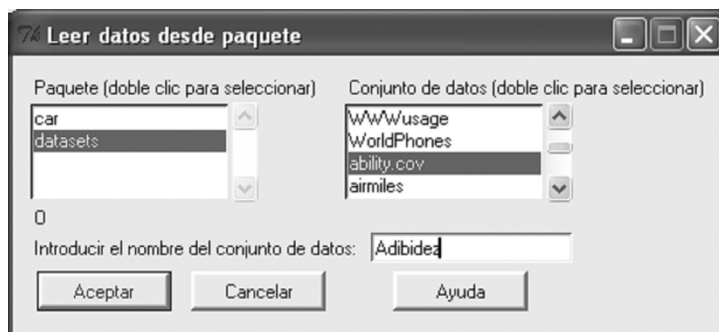


V.2. irudia. *Datu multzoak R Commander-en.*

R Commander paketeko datu multzoen artean hauta dezakegu baten bat datuak editatzeko. Agindua, esaterako, hau izan daiteke:

```
> data(ability.cov, package="datasets")
```

Leihoan honela ikusiko genuke:



V.3. irudia. *Datu multzoa aukeratzeko.*

Orain, menuaren errenkadaren azpian, indarrean dagoen datu multzoa ikusi behar dugu, gure kasuan *ability.cov*. Datu horiek editatu nahi baditugu, berriz:

```
> ability.cov <- as.data.frame(ability.cov)
```

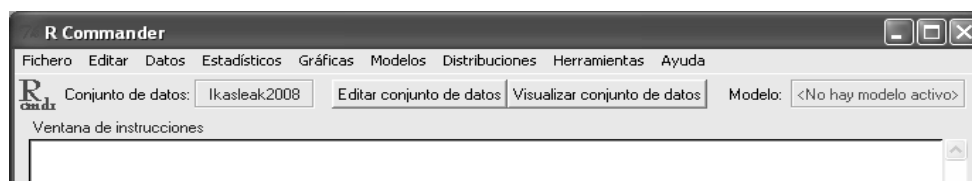
Irekitako leihoan datuak ikusi ez eze, datu-matrizean aldaketak egin ere egin ditzakegu.

R Editor de datos										
Archivo Editar Ayuda										
	row.names	cov.general	cov.picture	cov.blocks	cov.maze	cov.reading	cov.vocab	center	n.obs	var10
1	general	24.641	5.991	33.52	6.023	20.755	29.701	0	112	
2	picture	5.991	6.7	18.137	1.782	4.936	7.204	0	112	
3	blocks	33.52	18.137	149.831	19.424	31.43	50.753	0	112	
4	maze	6.023	1.782	19.424	12.711	4.757	9.075	0	112	
5	reading	20.755	4.936	31.43	4.757	52.604	66.762	0	112	
6	vocab	29.701	7.204	50.753	9.075	66.762	135.292	0	112	
7										
8										
9										
10										

V.4. irudia. *R Commander-en datu-editorea.*

5.2. DATU-EDITOREA

R Commander-eko datu-editorea oso xumea eta erabilerraza da. Datu-editore horretan ez daukagu etiketak erabiltzerik, ez aldagaienak, ez definizioenak, ezta balioenak ere. Datu multzo bat baino gehiago erabil dezakegu, baina aldiari aldiro bakar bat izango da indarrean. Indarrean dagoen datu multzoa leihoan ikusiko dugu.



V.5. irudia. *Indarrean dagoen datu multzoa: Ikasleak2008.*

Datu-editorea irekitzeko *Editar conjunto de datos* klikatu behar dugu. Nahi izanez gero, datu-matrizea zerrenda gisa ikus dezakegu, horretarako *Visualizar conjunto de datos* klikatu behar dugu.

Aldagaiak, oro har, zenbakizkoak eta kategoriazkoak izan daitezke:

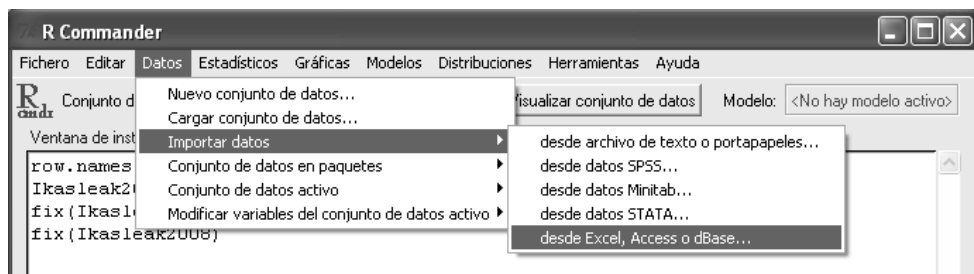


V.6. irudia. Aldagaiak R Commander-en datu-editorean.

Aldagaien izaera zehazteko, zutabe-buruan klikatu besterik ez dugu egin behar, goiko leiho hori (ik. V.6. irudia) zabal dadin. Datu-editorearen menua (*Archivo*, *Editar*, *Ayuda*) oso oinarritzkoa da, eta datuak idazteko, zuzentzeko eta kopiatzeko oinarritzko eragiketak ahalbidetzen dizkigu. Zenbakizko idazkerari dago-kionez, beste aldetik, dezimalak bereizteko koma barik puntua erabili behar dugu.

5.3. DATUAK INPORTATZEN

Datu-matrizeak nola sortu eta sortutakoak nola editatu ikusi dugu. Beste formatu bateko datu multzoak inporta ditzakegu R Commander-era. Testu soila, *ascii* kodean, SPSS, Minitab, STATA, Excel, Acces edo dBase formatuzko datuak ekar ditzakegu R formatura.



V.7. irudia. Datu multzoak inportatzen.

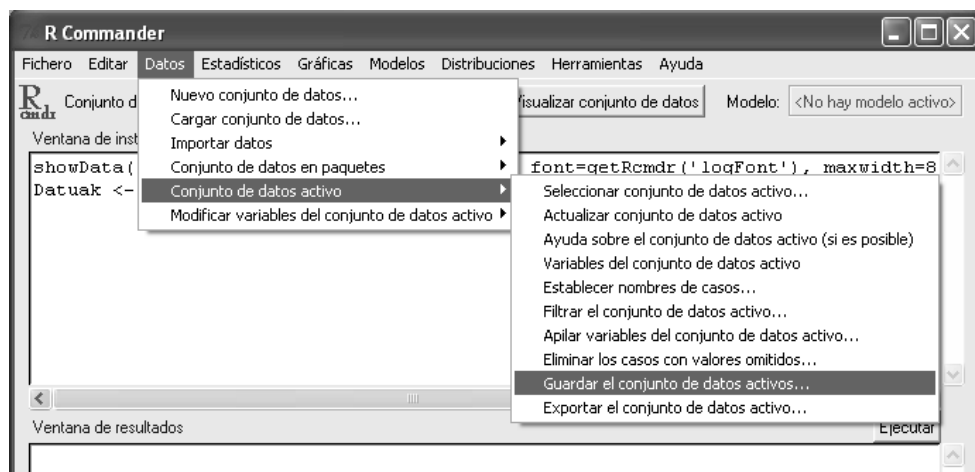
Datuak testu soiletik, *ascii* kodean, ekartzen ditugunean, gure datu-matrizearen ezaugarriak zehaztu behar ditugu. Honela, hain zuzen ere:



V.8. irudia. Datu multzoa, ascii kodean, inportatzen.

5.4. DATUAK GORDETZEN

Editatu ditugun datuak gordetzeko, oro har, bi aukera dauzkagu *R* formatuan: *.rda* luzapeneko fitxategian (*Guardar el conjunto de datos activos...*), edo datuak esportatzea *ascii* kodean (*Exportar el conjunto de datos activo...*).

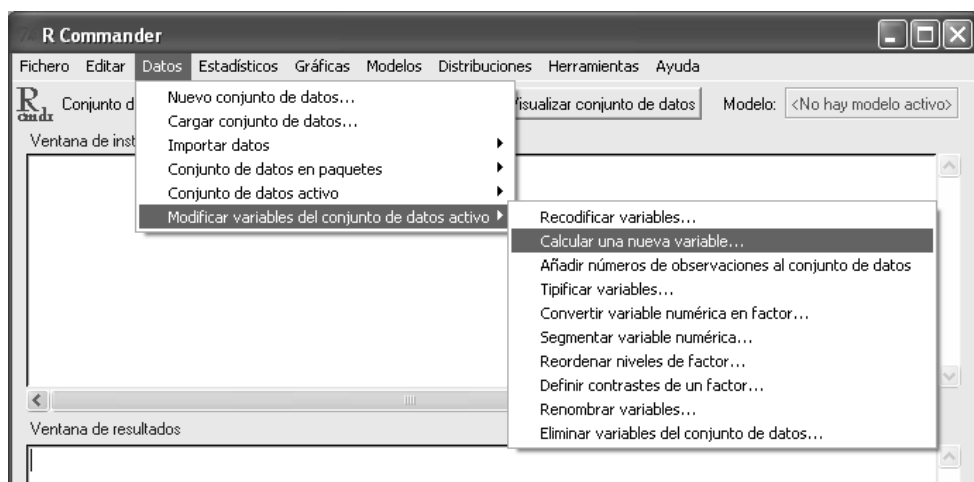


V.9. irudia. Datuak gordetzen.

Gogoan izan erabiltzaileak aukeratu egin behar duela gorde nahi duen fitxategiaren izena eta karpeta.

5.5. ALDAGAIK LANTZEN

R Commander-ek bere menuaren bitartez (*Modificar variables del conjunto de datos activo*) aldagaiekin hainbat eginkizun ahalbidetzen dizkigu. Aukera horien artean, atzekoz aurrera: aldagaiak desagerraraztea (*Eliminar variables del conjunto de datos activo...*), berrizendatzea (*Renombrar variables...*), zenbakizko aldagaia kategoriazko aldagai bihurtzea (*Convertir variable numérica...*), aldagai jarraikia kategoriazko aldagai bihurtzea (*Segmentar variable numérica...*), aldagaiak estandarizatzea (*Tipificar variables...*), kasu berriak datu-matrizeari eranstea (*Añadir números de observaciones al conjunto de datos*), aldagai berriak kalkulatzeko (*Calcular una nueva variable...*) eta aldagaien balioak berrizendatzea (*Recodificar variables...*).



V.10. irudia. Aldagaiak lantzen.

R Commander-ek aldagaiekin egin daitezkeen eragiketa arruntak ahalbidetzen ditu. Lanabes nahiko intuitiboa eta erabilerraza da. Aldagaiekin egiten ditugun aldaketek indarrean dagoen datu multzoa eraldatzen dute.

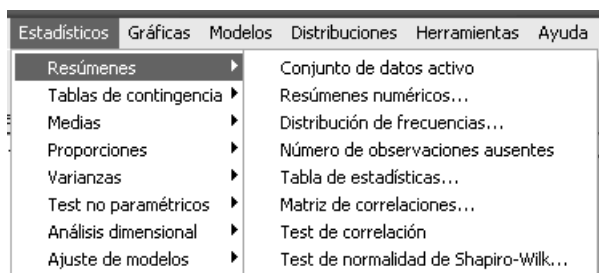
5.6. ESTATISTIKOAK

R Commander-eko menuan aldagai bakarreko estatistika eta analisiak egiteko zenbait aukera eskaintzen dira *Estatistikoak* (*Estadísticos*) hautapenean. Testu honetan ezin dugu aukera guztien azterketa zabala eta sakona egin, baina oso modu xumean bada ere, adieraziko ditugu aukera horiek zein diren eta, kasuan kasu, aipamenen bat edo beste egingo dugu. Gure asmoa da hurrengo argitalpenen batean alderdi horretan sakontzea.

Horiek horrela, dena den, egoki iruditu zaigu *R Commander*-en eragiketa-erakundearen azaleko aurkezpena egitea, erabiltzaileak ikuspegi orokorra izan dezan eta ikus dezan lanabes hau zertan den eta nola erabil daitekeen.

5.7. LABURPENAK

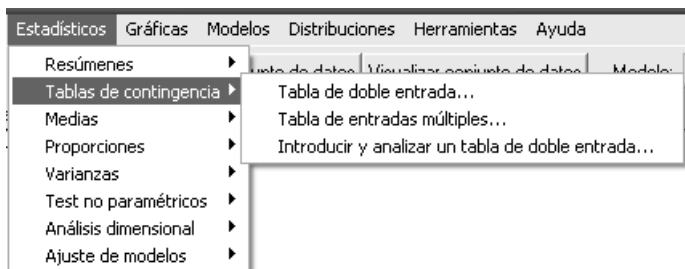
Menuko *Laburpenak* (*Resúmenes*) izenburuean aldagai bakarreko eragiketa estatistiko ohikoenak biltzen dira. Horrez gainera, test pare bat agertzen da: korrelazioaren inguruko hipotesi-testa eta *Shapiro-Wilk* normaltasunaren gaineko hipotesi-testa (ez-parametrikoa).



V.11. irudia. *Laburpenak*.

5.8. KONTINGENTZIA

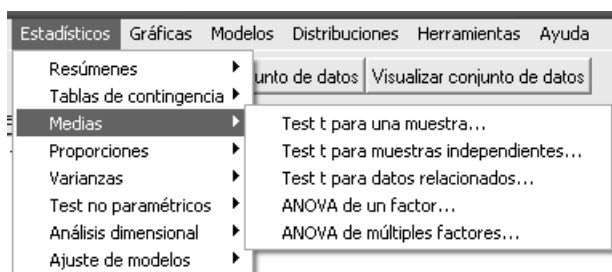
Menuko *Kontingentzia-etaulak* (*Tablas de contingencia*) izenburuean aldagai kategoriazkoen arteko erlazioak aztertze lanabesak eskaintzen dira.



V.12. irudia. *Kontingentzia-etaulak*.

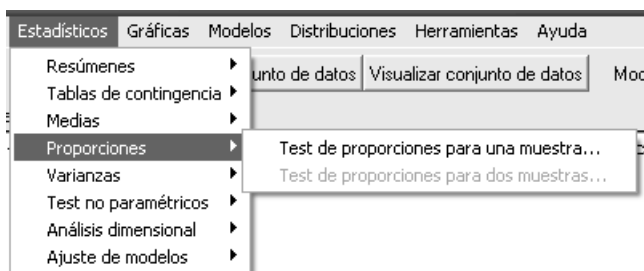
5.9. T HIPOTESI-TESTAK

T hipotesi-testak eta faktore bakarreko ANOVA menuko *Batez bestekoak* (*Medias...*) izenburuean aurkituko ditugu.



V.13. irudia. *Hipotesi-testak*.

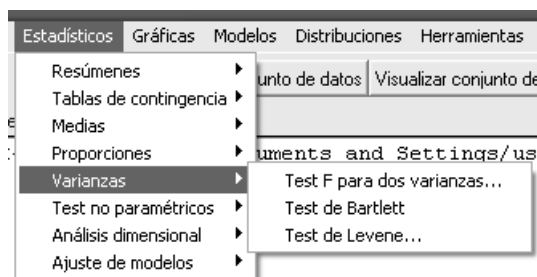
Proportzio bakar edo proportzio biren inguruko testak, berriz, menuko hurrengo aukeran aurkituko ditugu. Test horiek kategoriak aldagaien kasuan erabiltzen dira.



V.14. irudia. Proportzioen inguruko hipotesi-testak.

5.10. BARIANTZEN INGURUKO HIPOTESI-TESTAK

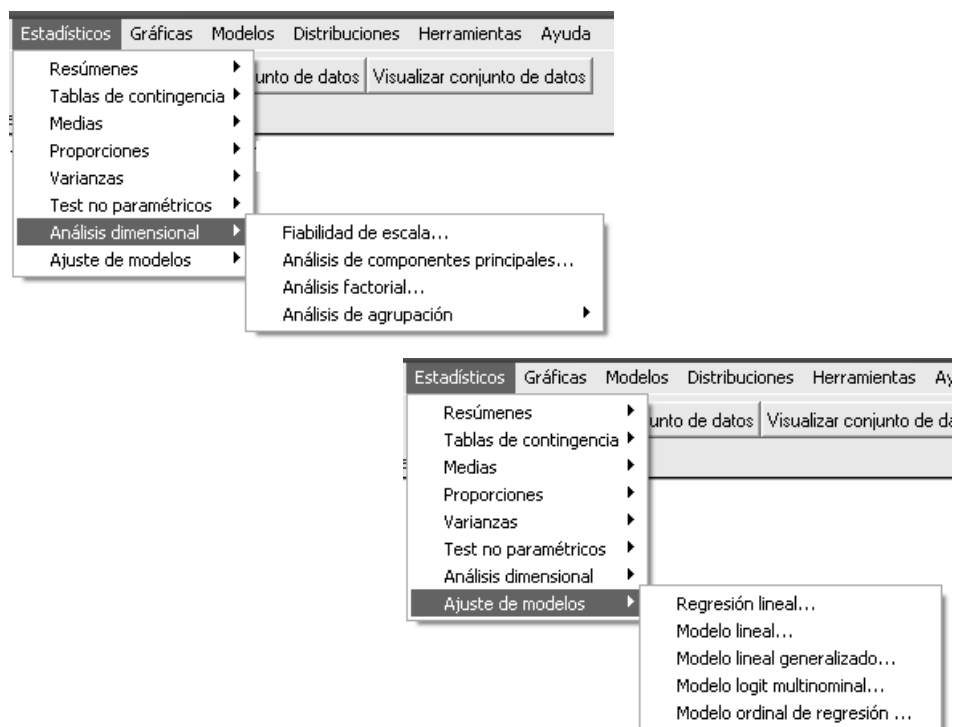
Bariantzen inguruko hipotesi-test erabilienak *Bariantzak* (*Varianzas...*) izenburupean aurkituko ditugu.



V.15. irudia. Bariantzen inguruko hipotesi-testak.

5.11. FIDAGARRITASUN-ANALISIA ETA ERREGRESIO LINEALA

Estatistikoak deritzan menuaren atalean lehen aipatu ditugun aukerez gaindi, fidagarritasun-analisia, osagai nagusiko analisia, faktore-analisia eta multzo-analisiak egin daitezke, eta, baita, beste aldetik, erregresio lineala eta hari lotutako bestelako analisiak ere.



V.16. irudia. Fidagarritasun-analisisa eta erregresio linealaren analisisa.

5.12. R Commander-EN GRAFIKOAK

R Commander-ek grafiko mota multzo txukuna eskaintzen du bere menuan. Grafikoa, oro har, erabilgarritasun eta kalitate handikoak dira. Irudiak aparteko leihoan erakusten dizkigu nahi izanez gero, aparteko fitxategi eta formatuetan gordetzeko.

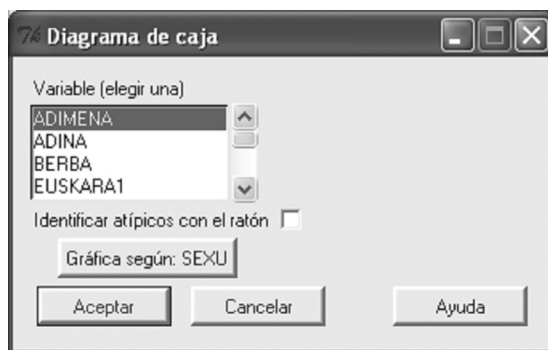


V.17. irudia. *R Commander*-eko grafikoa.

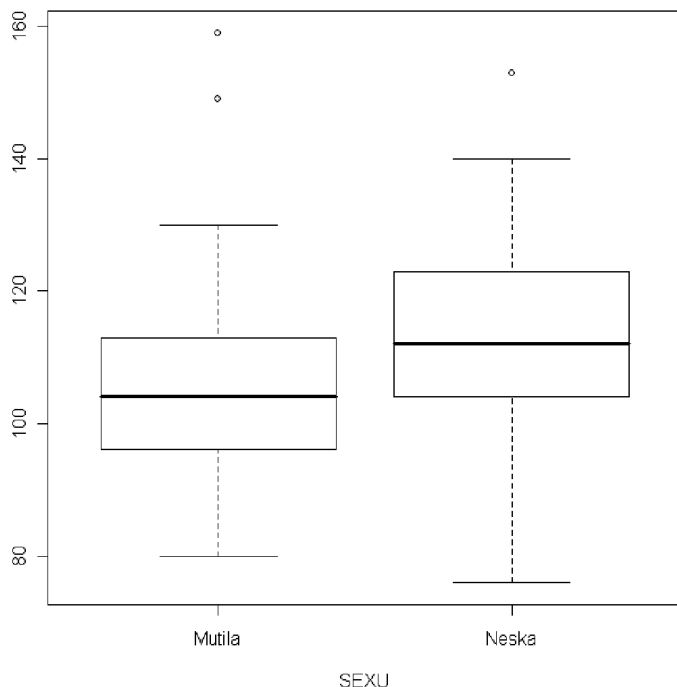
R Commander-ek eskaintzen dituen grafikoen artetik, adibide gisa, hiru aukeratu ditugu bertan aurkezteko: *kutxa-diagrama*, *sakabanaketa-diagrama* eta *batez bestekoen diagrama*. Diagramak, jakina, indarrean dauden datuen gainean egiten dira.

5.12.1. Kutxa-diagrama

Kutxa-diagramaren oinarriak aldagaiaren zentrorako joerako neurriak (mediana, batez besteko aritmetikoa...) eta kuartilak dira. *Kutxak* adierazten digu zein den datuen erdigunea eta haren hedadura. Diagrama eraikitzeko, menuko zerrendatik *Diagrama de caja...* hautatu eta beheko leihoan aldagaiak hautatuko ditugu.



V.18. irudia. *Kutxa-diagrama eraikitzen.*

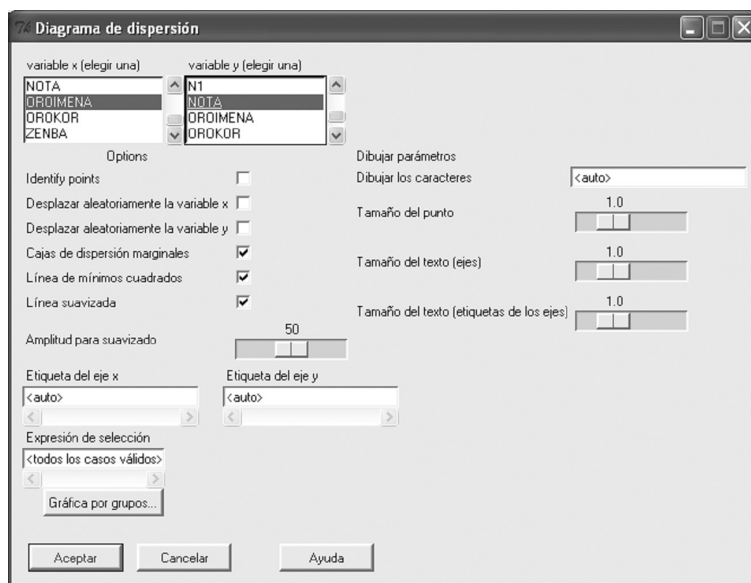


V.1. grafikoa. *Kutxa-diagrama.*

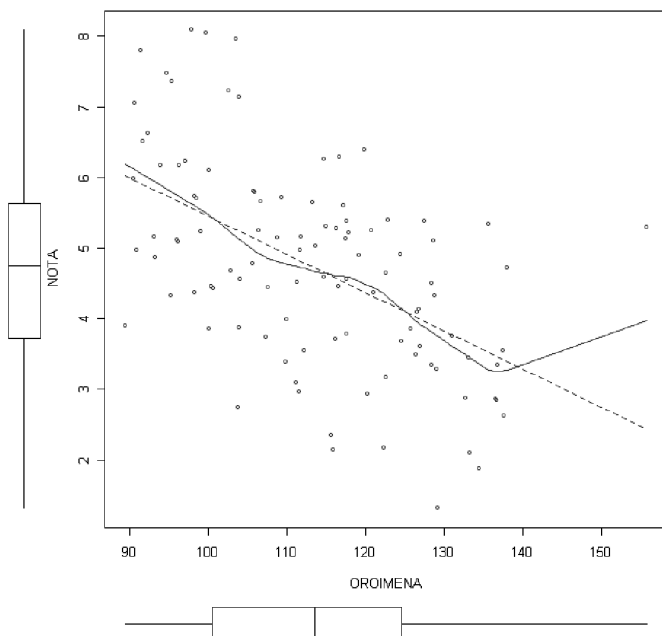
5.12.2. Sakabanaketa-diagrama

Diagrama mota hauek erabiltzen dira aldagaien arteko baterako banaketa irudikatzeko, aldagaien arteko erlazioa erakusteko beste modu bat da. Gutxienik, bada, bi aldagai behar ditugu. Aldagai jarraikiekin erabili ohi dira. Ardatz cartesianek mugatzen duten eremuan bi aldagai horien baterako banaketa irudikatzen da *puntu-hodei* gisa. Gogora dezagun, abzisa kanpo-aldagaia (X) eta ordenatua barne-aldagaia (Y) daudela. Puntu-hodeiaren itxura baliagarria da mugaz kanpoko balioak (*outliers*) ikusteko eta aldagaien arteko erlazioa antzemateko, hodeia biribila izateak zorizko erlazioa adierazten du, erlazio eza; elipse itxurakoak, berriz, erlazioa ez dela zorizkoa adierazten du, aldagaien arteko lotura jakinen bat dagoela, alegia.

Irudia eraikitzeko sakabanaketa-diagrama (*Diagrama de dispersión*) menuko zerrendatik aukeratzuz, aldagaiak hautatzeko leihoa zabaltzen dugu.



V.19. irudia. Sakabanaketa-diagrama eraikitzen.



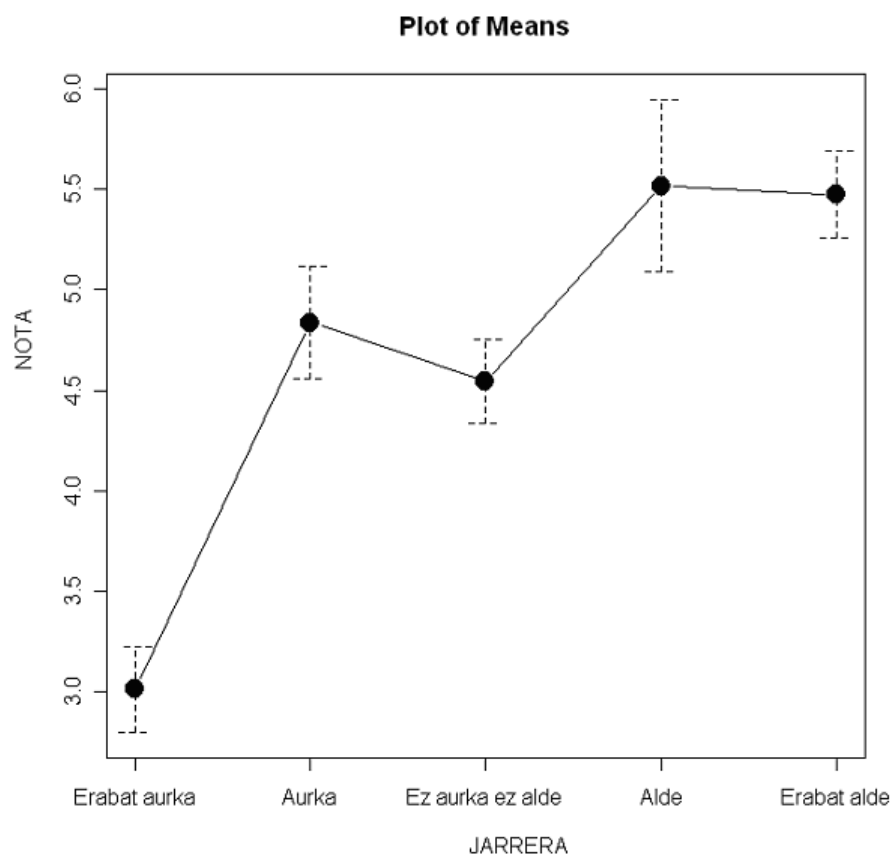
V.2. grafikoa. Sakabanaketa-diagrama.

5.12.3. Batez bestekoen diagrama

Diagrama hau oso erabilgarria da taldeen arteko diferentziak ikusarazteko. Berau, bere horretan, analisi grafikoa dela esan dezakegu. Kategoriazko aldagaiak (faktorea) abzisan zehazten dituen balioak taldeei dagozkie. Aldagai jarraikiak (azaldutako aldagaia), berriz, ordenatuko balioak zehazten ditu. Batez bestekoen diagrama egiteko:



V.20. irudia. Batez bestekoen diagrama eraikitzen.



V.3. grafikoa. Batez bestekoen diagrama.

Software honen erabilerak azalpen luzeago eta sakonago behar du, argitalpen honen xedetik harago doana. Honaino azaldutakoak, gure ustez, balio dezake sarrera gisa.

6. Kapitula

Lagin-teoriatik hasi eta oinarritzko bariantza-analisiraino (ANOVA) 130 ariketa baino gehiago sailkatu eta ordenatu ditugu 16 kategoriatan; gehienak hipotesi-testak dira, parametrikoak eta ez-parametrikoak.

Ariketa gehienak berriak dira, urtetan zehar Datu Analisia irakaste-ko beren-beregi sortutakoak. Beste batzuk han hemen bildu eta euskarara egokitutakoak dira. Bakan batzuk, azkenik, klasikoak dira, analisi eta teknika batzuk azaltzeko erabiltzen diren horietakoak.

Ariketa guztiak ez dira zailtasun-maila berekoak. Batzuk galdera sinpleak edo eragiketa soilak besterik ez dira; errazak, beraz. Beste batzuek, berriz, ikasleen ahalegin handiagoa eskatzen dute. Azken horiek ikasle askok ariketa zailak kontsideratzen dituzte. Egia da, kasu askotan, modu bat baino gehiago egon daitekeela problema horiek ebazteko. Alabaina, liburu honetan, testuinguruak ia guztiz zehazten du ebazpena nondik norakoa izan daitekeen.

Oro har, ariketa zail horiek ebazteko lau urrats egitea proposatzen dugu:

1. **Enuntziatua ondo ulertu:** ulertu ez edo erdizka ulertzen dena ez dago ebazterik. Zer jakin nahi da? Galdera horri erantzunik emateko gai ez bagara, alferrik ari gara.
2. **Ebazpen-estrategia hautatu:** enuntziatua ulertu eta gero, estatistika-tresna egokiak hautatu behar dira (analisi-teknikak, adierazpide grafikoak eta abar), plan bat egiteko.
3. **Planari ekin:** hautatutako erreminta estatistikoak zuzen eta egoki erabili, kalkuluak egin eta erabaki estatistikoak hartu behar dira.
4. **Atzekoz aurrera amaitu:** lortutako emaitzak eta hartu dituzun erabaki estatistikoak ariketaren enuntziatuak zehazten duen inguruan kokatu eta azalpenak eman behar dituzu. Azalpen horiek enuntziatuak proposatzen duenari ahal den modu sinple eta zuzenean erantzun behar diote.

6. Ariketak

6.1. LAGIN-TEORIA ETA ESTIMAZIO-TEORIA

6.1.1. Laginketa-banaketa: batez besteko aritmetikoa

- 1.1. Demagun adimenari buruzko eskala batean Psikologiako ikasleria (populazioa) normaltasunez banatzen dela: $\mu=100$ eta $[N(100,15)]$. Populazio horretatik 100 ikasleko zorizko lagin bat ateratzen badugu: 1) Zer probabilitate dago adimen-koizientea (AK) 103 edo handiagoa lortzeko? 2) Zer probabilitate dago 98 eta 102 bitarteko AK lortzeko?

.....

- 1.2. Demagun adimenari buruzko eskala batean Psikologiako ikasleria (populazioa) normaltasunez banatzen dela: $\mu=100$ eta ezezaguna $N(100, \sigma)$. 20 ikaslez osaturiko zorizko lagina ateratzen badugu eta errorerik gabeko desbiderapen tipikoa $S_{n-1} = 19,5$ bada, zer probabilitate dago batez bestekoa 103 edo handiagoa izateko?

.....

- 1.3. Ikusmenaren zorrozatasuna aztertzean, Lehen Hezkuntzako ikasleriaren banaketak $N(2,4) \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ normaltasunari jarraitzen diola behatu da. Populazio horretatik, 9 urteko umeez osatutako zorizko lagina ($n=9$) aterako dugu eta haien ikusmenaren zorrozatasuna zenbatekoa den neurtuko diegu. Zer probabilitate dago batez bestekoa -1 eta $2,5$ artekoa izateko?

.....

- 1.4. Euskal Herriko unibertsitateetako ikasleriak gaitasun matematikoari buruzko azterketan batez beste 10 puntu lortu du ($\mu=10$). Ikasle horien artetik hamar hautatu ditugu zoriz eta ikusi dugu batez bestekoak 16,5 eta bariantzak 36 puntuatzen dutela. Populazioaren batez bestekoa $\mu=10$ bada, zer probabilitate dago 16,5 edo puntuazio altuagoko batez bestekoak lortzeko?

.....

- 1.5. Hizki edo letra grekoak zertarako erabiltzen dira: estatistikoak izendatzeko ala parametroak adierazteko?

.....

1.6. Test bat normaltasunari badarraio 30eko batez bestekoaz eta 6ko desbiderapen estandarraz, orduan:

- a) Zer probabilitate dago zoriz lortutako puntuazioa 34 edo hori baino handiagoa izateko?
- b) Zoriz bildutako 9 puntuazio aztertzean, zer probabilitate dago multzo horren batez bestekoa 34 edo handiagoa izateko?
- c) $n=16$ zorizko lagin batean, zer probabilitate dago batez bestekoa 28 eta 32 bitarteko izateko?

.....

1.7. Zer da errore tipikoa? Eta zertan datza horren garrantzia?

.....

1.8. Zer erlazio dago lagin-tamainaren eta batez bestekoaren errore tipikoaren artean?

6.1.2. Laginketa-banaketa: bariantza

2.1. Psikologo batek Lehen Hezkuntzako haurren artean sormena ebaluatzeko tresna sortu du. Neurgailu horren arabera umeen sormena $N(17,6; 6)$ —azken hori bariantza izanik— banaketari dagokio. Emaitzak ikusita, psikologoak pentsatu du neurgailuaren ahalmena txikiegia dela umeen artean bereizteko. Hori horrela, galde-sortaren itaun batzuk aldatu ditu eta $n=30$ zorizko lagin bati testa betearazten dio. Lagin horretan, $N(17,2; 9,5)$ —azken hori bariantza izanik— behatzen du. Zer probabilitate dago 9,5eko bariantza edo handiagoa lortzeko?

.....

2.2. Zenbakizko kalkuluan batxilergoko ikasleria $N(50,10)$ normaltasunez banatzen da. Goi-mailako gizarteko ikasleen artean, ordea, neurgailu horrek ez ditu ikasleak elkarren artean ondo bereizten. Psikologo batek neurgailu berri bat eraikitzen du zeinak batez besteko bera baina bariantza handiagoa duen. Neurgailu horrekin, $n=31$ zorizko laginean, 49ko batez besteko aritmetikoa eta 12ko desbiderapen tipiko behatzen ditu. Hori horrela, zer probabilitate dago lehenengo testarekin lagineko balioak edo handiagoak lortzeko?

.....

- 2.3. Euskal Herriko jaioberrien pisua banaketa normalari darraio — $N(3200, 200)$ — (gramotan neurtuta, jakina), 2005. urtean jaiotako 31 umeren pisua ezagutuko bagenu, zer probabilitate dago desbiderapen tipikoa 150 gramokoa edo txikiagoa izateko?

6.1.3. Laginketa-banaketa: proportzioa

- 3.1. Azken ikasturteetan Psikologiako ikasleriaren % 30 gizonezkoak dira. Zoriz 10 ikasle hautatzen baditugu, zer probabilitate dago gure laginean 8 emakume edo gehiago izateko? (Banaketa binomiala eta normala erabili)
-
- 3.2. Baionako Ospitaleko Psikoterapia Zerbitzuak gaixoen artean % 60 sendatzea lortzen du. Hilabete batean ospitale horretara doazen artean zoriz 30 gaixo hautatzen baditugu, zer probabilitate dago 24 edo gaixo gehiago sendatzeko?
-
- 3.3. Itxura denez, neurosi depresiboak jotako gaixoen artean bi hilabeteren buruan % 30 berez sendatzen da inolako tratamendurik behar izan gabe. Iruñeko ospitale bateko itxarote-zerrendan 22 pertsona aurkitu ditugu neurosi depresiboaren diagnostikoa daukatenak eta datozen bi hilabeteetan inolako arretarik izango ez dutenak. Epe hori amaituta, zer probabilitate dago gaixo kopuru horren erdia, gutxienik, berez sendatzeko?
-
- 3.4. Psikologia Fakultatean ikasleen % 60 erdal ikastaldekoak dira. ECTS motako kreditu-sistemarekiko ikasleen jarrera aztertzeko, dekanok 20 ikasle hautatu ditu zoriz. Kalkula itzazu hurrengo probabilitateak: a) 15 ikasle erdal taldekoak izateko, b) 15 ikasle gutxienik erdal taldekoak izateko.
-
- 3.5. Irakasle batek jakin nahi du bere ikastaldeko gizonezkoek eta emakumezkoek armen erabilerari buruz jarrera desberdina ote duten. Jarrerak ezagutzeko ikastaldeko guztiek armen kontrolaren gaineko galde-sorta bat betetzen dute. Gero irakasleak neska eta mutilen batez bestekoak konparatzen ditu. Azterketa hori zer da, estatistika deskribatzailea ala inferentziala?
-
- 3.6. Parkinsonen gaixotasunaren aurkako botika berri bat probatzeko Parkinson sindromeak jotako 10 pertsona hautatzen dira eta beste horrenbeste gaixotasun hori ez daukatenak. Gaixoei botika ematen zaie, eta besteei, berri,

plazebo bat. Azterketa horretan, zer dagokio estatistika deskribatzaileari eta zer estatistika inferentzialari?

.....

- 3.7. Bi urte luzez greban dauden langileek erabaki latza hartu behar dute. Asanblada bildu aurretik sindikatuek aztertu nahi dute auzia nola planteatu langileen artean ahalik kohesiorik handiena lortzeko. Grebalarien erdia (% 50) aurka agertuko balitz, hobe izango litzateke asanbladan ezer ez aurkeztea. Ez dakite zer egin. Azkenean zoriz hautatutako 10 grebalarirekin zundaketa egitea erabakitzen dute. Hamar langile horietatik hiru proposamenaren aurka agertzen dira. Datu hori kontuan hartuta arrisku-maila % 1 dela jakinda, zein da proposamenaren aurka ager daitezkeen proportzioa? Zer egingo dute sindikatuek?

6.1.4. Konfiantza-maila, testaren indarra eta I. eta II. motako erroreak

- 4.1. Adimen espaziala neurtu dugu zoriz hautatutako 100 ikasleren artean. Lagin horretan banaketa normala behatu dugu — $N(80, 10)$ — (10 hori errorerik gabeko desbiderapen tipikoa da) eta konfiantza-maila % 99koa ezarri dugu. Zein dira benetako adimen-mailaren mugak?
-

- 4.2. *Epe laburreko oroimena* ikertzeko esperimentu batean zoriz hautatutako hamar ikasleri proba bana egiten zaie. Proba horretan 4 digituko zerrenda erakusten zaie segundo baten ehunenekoan bi saiotan. Aurreneko bi saioetan norbaitek ez badu antzematen zenbakien zerrenda osoa (4 digituak), beste saio bi eskaintzen zaizkio denboraren ehuneneko bat gehiago emanaz. Horrela esperimentua errepikatzen da, denboraren ehuneneko banatan gehituz, pertsona guztiek 4 digituko zerrenda osoa antzeman arte. Amaitutakoan zorizko lagin horretan kalkulatu dira denboraren batez bestekoa eta albora-penik gabeko bariantza; 4 eta 1,2, hurrenez hurren, hain zuzen ere. Ikertzailak, azkenik, % 95eko konfiantza-maila erabiltzea erabakitzen badu: a) zein dira digitu-zerrenda antzemateko denboraren mugak?, b) hamar pertsonarekin egin beharrean hogeit hamar pertsonarekin egingo bagenu, zein izango lirateke muga horiek?
-

- 4.3. Hautemateari buruzko esperimentu batean psikologoak tamaina eta kolore bereko bola kopuru jakin bat aurkezten die subjektuei segundo batez. Ondoren, pertsona bakoitzak adierazi behar du zenbat bola aurkeztu zaion. Esperimentua zoriz hautatutako hamar pertsonarekin egiten da eta — $N(16, 2,4)$ —

banaketa gertatzen da. Konfiantza-maila % 95ekoa izanik, zein dira bola kopuruaren mugak?

.....

4.4. Txagorritxuko Ospitaleko psikologoak, ospitale horretan psikologorik balego, zoriz hautatutako 40 gaixoren artean 24rengan depresio-zantzuak aurkitu ditu. Hori horrela, arrisku-maila % 5ekoa izanik, zein dira Txagorritxuko gaixoen artean depresio-zantzuak izan ditzaketenen proportzioaren mugak?

.....

4.5. Test batean zoriz hautatutako 100 ikaslek 10eko batez bestekoa eta desbiderapen estandar zuzendua 4 lortu dute. Batez bestekoaren mugak 11 eta 9 kalkulatu ditugu. Zein arrisku-maila erabili dugu?

.....

4.6. Iruñeko Arrosadiko Campuseko Soziologiako ikasleen artean ausaz hautatutako 150ek Estatistikari buruz zer iritzi duten jakiteko galde-sorta bat bete dute. % 43k Estatistikarekiko oso aurkako jarrerak adierazi ditu. Zein dira oso aurkako jarreraren benetako mugak Soziologiako ikasleen artean? ($\alpha=0,05$)

.....

4.7. Zein da konfiantza-tarte zabalagoa, % 95eko konfiantza-mailakoa edo % 99koa?

.....

4.8. Konfiantza-mailaz hitz egitean zerekiko konfiantzaz hitz egiten dugu?

.....

4.9. Nola eragiten du laginaren tamainak konfiantza-tartean?

.....

4.10. Zertarako balio du konfiantza-tartea eraikitzeak?

.....

4.11. Populazio jakin bat normaltasunez banatzen da 2,8ko desbiderapen tipikoaz. Kalkulatu % 95eko konfiantza-mailari dagokion konfiantza-tartea lagin hau erabiliz: 8, 9, 12, 13, 14, 16.

.....

4.12. Apustuzale amorratu batek dio txanpon-jokoan beti asmatzen duela emaitza. Hemezortzi botalditan 12tan asmatzen du. % 95eko konfiantza-mailaz, zein dira apustuzale horrek emaitza asmatzeko dituen proportzioen mugak? Zer esango zenuke apustuzale horren gaitasunaz?

.....

- 4.13. Demagun $H_0: \mu_0=30$ eta $H_1: \mu_1=40$ batez bestekoaren inguruan proposaturiko hipotesi nulua eta ordezkio hipotesia direla hurrenez hurren, eta $\sigma^2=100$ dela. Hogeita bost subjektuz osaturiko zorizko lagina ateratzen badugu, zein da I. motako erroreak hartu behar duen probabilitate-balioa, H_0 -a faltsua delarik, bera baztertzeko probabilitatea $0,99621$ izan dadin? (Alde bakarrek kontrasteari ekinez).

.....

- 4.14. EHU/UPVko irakasle kontratatuen batez besteko soldata 1.386 € omen da eta desbiderapen estandarra, berriz, $\sigma = 361$ € da. Hala ere, egindako zundaketa batean 1.203 € batez bestekoa behatu izan da. Hogeita bost irakaslez osaturiko zorizko lagina hartzen badugu eta $\alpha = 0,05$ ezarri, zein da testaren indarra?

.....

- 4.15. Adimena neurtzeko bi test (A eta B) erabili eta gero banaketa normalari darraizkiola behatu izan da ($\sigma^2=100$). Subjektu bati eginiko neurketa A-ren banaketan 93,32 pertzentilean kokatzen den bitartean, B-renean 15,87 pertzentilean kokatzen da. Bestalde, A neurketa-tresna erabiliz ($n=100$) populazioaren batez besteko adimen-neurria 95 suertatu dela jakinik, zein da aipaturiko subjektuaren adimen-neurria, eta zein B banaketaren batez besteko aritmetikoa?

.....

- 4.16. Populazio normal $N(\mu, 144)$ batetik ateratako zorizko laginaz baliatuz, β kalkulatu honako datuak kontuan hartuz:

- Aldebiko kontrastea egin behar duzu.
- $n=50$
- $\alpha=0,01$
- $H_0: \mu_0= 40$
- $H_1: \mu_1= 45$

.....

- 4.17. Populazio oso handi batean eta populazio oso txiki batean balio bereko desbiderapen estandarra behatuko balitz eta populazio horietatik tamaina bereko zorizko laginak erabiliko bagenitu, tamaina berekoak izango lirateke batez bestekoaren inguruko konfiantza-tarteak eraikitzeke tartek horiek?

.....

- 4.18. Populazio beretik tamaina desberdinetako bi zorizko lagin atera ditugu (n_1 eta n_2). Bestalde, badakigu populazioa banaketa normalari darraiola $N(\mu, \sigma^2)$ eta laginen tamaina nahiko handia dela. Laginen datuen bitartez μ -ren inguruan eraikitako konfiantza-tarteak zabalera berekoak dira. Lehenengo kasuan (n_1)

konfiantza-maila 0,975ekoa da, eta bigarrean (n_2) 0,9koa. Zein da laginik handiena eta zein haien arteko erlazioa?

.....

- 4.19. Demagun mendebaldeko emakumezkoen altuera (aldagai jarraikia) normaltasunez banatzen dela. Hamar emakumez osaturiko zorizko laginean ondorengo behatu dugu: $\bar{X} = 1,72 \text{ m}$; $S_x = 0,37 \text{ m}$

Konfiantza-maila % 95ekoa izanik, μ delakoaren inguruko konfiantza-tartea eraiki.

.....

- 4.20. Autoestimu-eskala bateko batez bestekoa 65 da. Aztertzen ari garen populazioaren bariantza, berriz, 160 da, populazioa normala delarik. Zorizko lagin batean ($n=40$), 67,5eko batez bestekoa behatu dugu. Gure hipotesi-testa egiteko % 1eko arrisku-maila ezarri badugu, zer probabilitate dago II. motako errorea izateko?

.....

- 4.21. Aurreko ariketaren kasuan testaren indarra 15 puntu handiagoa izatea nahiko bagenu, zein tamainatako lagina beharko genuke?

.....

- 4.22. Zorizko lagina $n=100$ eta esangura-maila 0,025ekoa izaki, kalkulatu testaren indarra, hipotesiak ondorengoak dira: $H_0: \pi_0=0,5$; $H_1: \pi_1=0,64$

.....

- 4.23. Aldebiko hipotesi-testean, zenbatekoa da I. motako erroreaken probabilitatea banaketaren muturretan ehuneko bina adierazita badago?

.....

- 4.24. Eskola jakin batean Erljioaren irakaskuntza dago eztabaidagai gurasoen artean. Zundaketa egin ostean ($n=1000$) ikusten da arduradunen harriduraz, 600 gurasok Erljioaren irakaskuntzari ezkor deritzola. Arduradunek espero zuten gutxienez gurasoen % 50 Erljioaren irakaskuntzaren alde agertzea. Hori horrela, behatutakoa esanguratsuki aldentzen da espero zitekeen hartatik? ($\alpha = 0,05$) Kalkulatu testaren indarra.

.....

- 4.25. UBIko ikasleen artean gertatu ohi den eskola-porrota aztertzeko ikertzaileak porrotaren proportzio-balio zehatza jakin nahi du. Proportzioaren desbiderapen tipikoa zein den ezagutzen du: 0,3876. Aurrenik goren mailako errorea

eta esangura-maila finkatzen ditu, $|0,05|$ eta $\alpha=0,01$ balioetan hurrenez hurren. Zein da ikerketa horretarako behar duen zorizko laginaren tamaina?

.....

- 4.26. Txanpon bat 3.000 aldiz bota eta 1.327 alditan *leon* (*cara*, aurpegia...) ateratzen bada, amarrurik gabekoa dela esan dezakegu? (konfiantza-maila % 95a)

6.2. HIPOTESI-TEST PARAMETRIKOAK

- 5.1. Zein desberdintasun dago *esanguratsutasunaren* eta *adierazgarritasunaren* artean?
-

- 5.2. Jakin nahi dugu ikasleek nola ikasten duten hobeto, aste gutxi batzuetan eskola-ordu asko pilaturik edo aste gehiagotan eskola-orduak asteko gutxiago izanik. Hau da, jarduera trinkoetan —*intentsiboetan*— edo banatueta —*apurka-apurka*— Esperimentua diseinatzeko ikastalde batean eskatzen da ea nork parte hartu nahi duen. Hogeik ikasle aurkeztzen dira. Irakasleak lanean jartzen ditu aurkeztu diren aurreneko 10ak jarduera trinkoetan eta gainerako azken 10ak jarduera banatueta. Azaldu, mesedez, zer eragin izan dezakeen subjektuak zoriz ez hautatzeak. Eta talde esperimentalak zoriz ez antolatzeak? Zein da, zure ustez, ez-zorizko laginketarik zorrotzena?
-

- 5.3. Zer adierazi nahi dugu elkarrekiko askeak esatean?
-

- 5.4. Adieraz itzazu *X* batez aldagai bakoitzari dagozkion ezaugarriak:

ALDAGAIA	Politomikoa	Jarraikia	Diskretua	Kuantitatiboa	Kualitatiboa
Erantzuteko denbora					
Lanarekiko jarrera					
Gustuko kolorea					
Lanpostu desiratua					
Gogoratutako hitz kopurua					
Izen-zerrenda					

.....

5.5. Aurreko ariketan zerrendatutako aldagaiei begiratu eta adierazi bakoitzari dagokion neurketa-eskala.

.....

5.6. Ondorengo hipotesien artean zein dira txarto daudenak?

- a.- $H_0: \mu_0=3$; $H_1: \mu_1 \geq 3$
- b.- $H_0: \pi_0=3$; $H_1: \pi_1 \geq 3$
- c.- $H_0: \mu_0 > 3$; $H_1: \mu_1 < 3$
- d.- $H_0: \pi_0=0,5$; $H_1: \pi_1 > 0,5$
- e.- $H_0: \mu_0 \geq 3$; $H_1: \mu_1 \leq 3$
- f.- $H_0: \mu_0 \leq 0,5$; $H_1: \mu_1 \neq 0,5$
- g.- $H_0: \mu_0 \neq 3$; $H_1: \mu_1 = 3$
- h.- $H_0: \mu_0 < 3$; $H_1: \mu_1 \geq 3$

.....

5.7. Eskuinaldeko testean 0,005eko arrisku-maila erabiltzen dugunean, esan zuzenak ala okerrak diren honako baieztapen hauek:

- a. H_0 faltsua izanik, berau onartzeari dagokion probabilitatea 0,005 da.
- b. H_0 faltsua izanik, berau baztertzeari dagokion probabilitatea 0,005 da.
- c. H_0 benetakoa izanik, berau baztertzeko probabilitatea 0,005 da.
- d. H_0 faltsua izanik, hipotesi nuluari eusteko probabilitatea 0,995 da.
- e. H_0 benetakoa izanik, hipotesi nulua baztertzeko probabilitatea 0,995 da.

.....

5.8. Demagun $\theta = 6,13$ testerako estatistikoa dela eta $p(\theta < 6,13) = 0,05$ ezker aldeko testa egiten dugunean ($\alpha = 0,05$) errore-maila jakina erabiltzen dugula. Adierazi behar duzu ondorengo baieztapenak zuzen ala oker dauden.

- a. Hipotesi nuluari eustea erabakitzen dugu.
- b. Hipotesi nulua baztertzea erabakitzen dugu.
- c. H_0 benetakoa izanik berau baztertzeko probabilitatea 0,05 da
- d. Hipotesi nulua baztertzekotan erratzeko arrisku-maila 0,05 izango dugu.
- e. H_0 benetakoa izanik hipotesi nuluari eustea erabakitzen badugu oker izateko probabilitatea gutxienez 0,05 da.

.....

5.9. Zer da errore tipikoa?

.....

5.10. Zein da hipotesi-testen xedea?

.....

5.11. Ikertzaileak zergatik formulatu behar du batzuetan sinesten ez duen hipotesi nulua?

.....

5.12. Zehaztu hipotesi nulua honako kasuetan:

- a. Psikoterapia-teknika biren eraginkortasun-maila konparatzeko.
- b. Ariketa fisikoaren eta kolesterol mailaren korrelazioa aztertzeko.
- c. Euskararen erabilera gazteen eta helduen artean.
- d. Plazebo baten eta botika baten eragina (alde bakarreko testa).

.....

5.13. -Hipotesi-testetan arrisku-maila txikia izan ohi da; zergatik? Zein dira ohiko balioak?

.....

5.14. Alde bakarreko testa, noiz da egokia? Zein da alde bakarreko testaren abantaila? Ipin alde bakarreko testaren adibide bat.

.....

5.15. Zer da kontserbadoreagoa $\alpha=0,01$ ala $\alpha=0,05$? II. motako errorearen probabilitatea aurreko kasu biotako zeinetan izango litzateke handiagoa?

.....

5.16. Adierazi, mesedez, nola eragiten duten honako faktore hauek I. eta II. motako errorearen probabilitateetan:

1. Populazioko batez bestekoen arteko diferentziak.
2. Errore tipikoak
3. Laginaren tamaina
4. Esangura-maila nominala

6.2.1. Hipotesi-test parametrikokoak: batez besteko aritmetiko bakarra

6.1. Adimen-kozientea (AK) neurtzeko test ezagun batek, 6 urteko umeen artean, 100eko batez bestekoa eta 16ko desbiderapen tipikoa ematen ditu. Psikologo batek testa zaharkituta dagoela pentsatzen du, eta haren ustez, gaur egun batez bestekoa 100 baino handiagoa da. Zuzen ote dagoen jakiteko, zoriz

hatutako 64 haurrekin lagina osatu eta lehen erabilitako testa betearazten die. Lortzen duen batez bestekoa 108koa bada, jakin nahi dugu psikologoa zuzen ote dagoen eta zer probabilitate dituen hartutako erabakiak.

.....

- 6.2. Burlatako Lehen Hezkuntzako ikastetxe batean 13 urteko umeen pisuaren banaketa normala da ondorengo parametroekin $N(30, 10)$. Populazio horretatik 25 neska-mutiko hautatzen ditugu zoriz eta behatzen dugu batez bestekoa 40koa dela. Demagun hipotesi nulua faltsua dela berau baztertzeko probabilitatea 0,9962 izateko, zein izan beharko luke I. motako erroreari zegokiokeen probabilitateak?
-

- 6.3. Euskalgintzan diharduten langileen batez besteko soldata 1.000 €-koa da 260 €-ko desbiderapen estandarraz. Kultur industrietan diharduten erdaldunek gehiago irabazten dutela uste dugu. Usteak uste, zuzen ote gauden jakiteko kultur industrietan diharduten langileen artean 25 langile hautatu ditugu zoriz eta 1.150 €-ko soldata irabazten dutela ikusi dugu. Zein da erabaki estatistikoa? Zein da hartutako erabakiaren indarra? Zein ondorio ateratzen ditugu? $\alpha=0,05$ Laginaren tamaina 50 langilekoa izango balitz, zenbatean murritzuko litzateke β ?
-

- 6.4. Demagun honako hipotesiak hauek: $H_0: \mu_0=15$; $H_1: \mu_1=21$, eta honako datu hauek ditugula: $N(\mu, 180)$ (bigarren hori bariantza da), $n=20$ eta $1-\beta=0,80$. Zein da esperimentu honetan erabilitako arrisku-maila?
-

- 6.5. Populazio jakin bateko Y_i aldagaia $N(\mu, 15)$ banaketari darraio. Populazio horretatik ateratako ehun kasuko zorizko lagina dugularik, honako hipotesi estatistikoak hauek erabiliko ditugu: $H_0: \mu_0=30$ $H_1: \mu_1=33$. Hipotesi nulua benetakoa izatekotan berau eusteari dagokion probabilitatea gutxienik 0,95ekoa izateko, zein izan behar du α -ren balioak? Eta zein izango litzateke β -ren balioa? Esangura-maila nominala aldatu barik II. motako errorearen probabilitatearen balioa erdira ekarri nahi badugu, zein lagin-tamaina erabili behar dugu?
-

- 6.6. Psikologo kliniko batek jakin nahi du zenbat hilabete, batenaz beste, ematen duten pazienteek tratamendu psikologikoan depresioa diagnostikatzen zaizenetik. Hori dela-eta, Osakidetzara jotzen du eta depresioa diagnostikatu zaien 150 pertsonaz osaturiko lagina zoriz aukeratzen du. Psikologoak pazientei galdetzen die zenbat hilabete daramaten tratamendu psikologikoan depresioa

diagnostikatu zaienetik, eta emaitzak dira 9,3 hilabeteko batez bestekoa eta 3,2 desbiderapen estandarra. 0,95eko konfiantza-mailaz, depresioaren diagnostikoa duten pazienteek, gutxienik zenbat hilabete ematen dute tratamenduan? Eta zenbat gehienez ere?

.....

- 6.7. Gizarte Psikologia lizentziaturako ikertzaile batek enpresa baterako langileak hautatu behar ditu. Horretarako enplegu-bulego batera jo du jakiteko espezializazio handiko pertsonen zenbat denbora eman duten langabezian. Datua argitu beharrean, enplegu-bulegoan 200 pertsonaz osaturiko zerrenda bat (lagina zoriz aukeratua da) eman diote. Psikologoak zerrenda aztertu eta horretan ikusten du espezializazio handiko pertsonen, batez beste, 279 egun eman dituztela langabezian (96 desbiderapen estandarra). Hori horrela, 0,99eko konfiantza-mailaz, gutxienik zenbat egun ematen dute langabezian pertsona horiek? Eta zenbat gehienez ere?

6.2.2. Hipotesi-test parametrikokoak: proportzio bakarra

- 7.1. Neurosiak jotako gaixoen artean eginiko ikerketa batean ondorioztatzen da kasuen % 30ek berezko hobekuntza sumatzen duela gaixoaldiaren aurreneko hiru hilabeteetan. Hori horrela, edozein terapiak, eraginkortzat hartu ahal izateko, aurreneko 3 hilabeteetan hobekuntzaren proportzio handiagoa lortu beharko luke. Hogei neurotikorekin terapia jakin bat erabili eta aurreneko hiru hilabeteetan 9k bere onera jo duela behatu izan da; zer esan dezakegu terapia horren eraginkortasunaz? (konfiantza-maila % 95ekoa)
-

- 7.2. Loiuko (Bizkaia) biztanleek udalerriko lurretan lurperatutako *lindanoa* dela kasua gaixotasun larriak izateko arriskua daukate. Agintariak arrisku hori dela-eta kezkatu omen daude. Halere, ez dute inolako erabakirik hartuko arrisku-maila Loiuko biztanleriaren erdia kutsatzeko adinakoa ez den bitartean. Egoera zertan den jakiteko, ikerketa bat agintzen dute. Zoriz hautatutako 36 loiutarri odol-analisiak egiten zaizkie eta haien artetik 11k gai kimikoaren kutsadura-arrastoak erakusten dituzte. Ikerketaren emaitzak ikusita, politikariek zerbait egiteko erabakiren bat har dezaten zein esangura-maila erabili behar da?
-

- 7.3. Demagun honako hipotesi hauek egiten ditugula: $H_0: \pi_0 = 0,5$; $H_1: \pi_1 = 0,7$. Arrisku-maila % 5 ezartzen badugu, zer lagin-tamaina erabili behar dugu testaren indarra % 80 izateko?
-

7.4. UBI_n izan ohi den eskola-porrota aztertu nahirik, ikertzaileek jakin nahi dute zein den populazioaren porrotaren proportzioa. Errorerako ezartzen duten goren muga 0,05 da, eta konfiantza-maila % 99. Horren arabera, zein da aztertu behar duten laginaren tamaina? (ik. 4.25 ariketa)

6.2.3. Hipotesi-test parametrikook: bariantza bakarra

8.1. Datu Analisia II irakasgaiko irakasleak bi prozedura erabiltzen ditu ikasleak ebaluatzeko: plataforma digitalaren bitartez, alde batetik, eta, bestetik, ohiko azterketa paperean. Oro har, ohiko azterketak egitean 1,44 puntuko bariantza behatu izan du. Plataformako ebaluazioak egin dituzten 20 ikasleekin, ostera, 1,05eko bariantza kalkulatu du. Pentsa daiteke plataforma bitarteko ebaluazioak homogeneoak direla ohiko azterketak baino? ($\alpha = 0,05$)

.....

8.2. UEUko ikasleen artean zoriz hautatutako 16 neskaren altueraren desbiderapen estandarrak 6,1 cm balio du. Neska unibertsitarioen artean, oro har, 4,5eko desbiderapena kalkulatu izan dela jakinik, UEUko taldea heterogeneoagoa al da? ($\alpha = 0,05$) Kalkulatu UEUko taldearen bariantzaren inguruko konfiantza-tartea.

.....

8.3. Adimen-kozientea neurtzeko ohiko eskalak 15 puntuko desbiderapen tipikoa izan ohi du. Psikologo batek horrelako test bat erabili du zoriz hautatutako 20 pertsonarekin eta 19 puntuko desbiderapen estandarra kalkulatu du. Gauzak horrela psikologoa zalantzan dago testa moldatu behar ote den homogeneoagoa izan dadin. Egiozu alde bakarreko test estatistikoa $\alpha = 0,05$ erabiliz.

.....

8.4. Ikasketa-prozesuan lanak egiten, testuak prestatzen eta abar ikasleek zenbat denbora ematen duten aztertzean ($n=200$), 100 orduko desbiderapen estandarra aurkitu da. Jakin nahi dugu zein diren desbiderapen tipiko horretarako konfiantza-tarteak % 95eko eta % 99ko konfiantza-mailetarako.

.....

8.5. Aldaketa klimatikoa dela-eta, Bizkaiko Nabarriz udalerrian oso kezkatuta daude. Bizkaiko herrialde historikoan 100 urtetan neurtutakoaren arabera tenperaturaren desbiderapen estandarrak 10° (Celsius) eman du. Nabarrizen, berriz, azken 5 urteotan tenperatura hilero-hilero neurtu dute hilean behin, hilak hamabosgarrenean, hain zuzen ere. Neurketa horietatik desbiderapen estandarrak 15° (Celsius) eman du. Bariantzaren hazkuntza hori ikusita nabarriztarrek tenperaturak muturretara jo duela uste dute, hau da, lehen

baino hotzagoa dela neguan eta lehen baino beroagoa udan. Dagokion hipotesi-testa egin. ($\alpha = 0,05$) Kalkulatu, bide batez, Nabarrizko desbiderapen tipiko horretarako konfiantza-tarteak % 95eko eta % 99ko konfiantza-mailetarako.

6.2.4. Hipotesi-test parametrikoak: batez besteko aritmetiko bikoitza independenteak

- 9.1. Ikasleekin azterketak nola egin behar diren lantzeko, irakasleak esperimentu bat egiten du kontrol-talde bat eta talde esperimental bat hartuz ($n_1=n_2=100$). Azterketak egin eta talde esperimentalak, batez bestez, 503 puntu lortzen ditu, eta kontrol-taldeak, berriz, 499 puntu. Halere, batez bestekoen arteko diferentzia ez da esanguratsua gertatzen ($p=0,037$). Zer esango zenuke azterketak egiteko moduen eraginkortasunaz?

.....

- 9.2. Uste denez, alkohola edateak arreta-gaitasuna murritzen du. Ikertzaile batek hipotesi hori aztertzeko esperimentu bat diseinatu du. Takistoskopioaren bitartez letrak bereizteko ariketa prestatzen du. Hamar pertsona bost bikotetan antolatzen ditu, eta bikoteak osatzeko baldintza bikotekideek antzeko ikusmen-zorroztasuna izatea. Bikote bakoitzeko pertsona bati, zoriz hautatua, alkohol dosi jakina ematen zaio. Handik denbora batera guztiei letra sortak aurkezten zaizkie, eta erantzun zuzenen kopurua erregistratzen da. Emaizak taulan agertzen dira. Datuak datu, % 5eko arrisku-mailaz esan dezakegu alkohol-dosiak pertsonen erantzunetan eragiten duela?

Bikoteak	1	2	3	4	5
Alkoholik gabe	5	13	18	19	22
Alkoholarekin	7	17	13	20	25

.....

- 9.3. Psikologia Sozialeko ikertzaile batek uste du azken urteetan emakumezkoek abortuaren aldeko jarrera aldekoagoa daukatela gizonezkoek baino. Usteak uste, datuen bitartez ikusi nahi du hori horrela ote den. Horretarako, 30 emakumezko eta 30 gizonezko zoriz hautatzen ditu eta haien abortuarekiko jarrerak neurtzen ditu galdekizunaren bitartez. Emakumezkoen laginean 13 puntukoa da batez bestekoa, eta gizonezkoenean, 11 puntukoa. Batean zein bestean desbiderapen tipikoa bera da, 4. Datuak datu, emakumezkoen jarrera aldekoagoa dela esan dezakegu? ($\alpha=0,05$)

.....

- 9.4. Enpresa bateko giza baliabideen arduradunek, psikologoek, uste dute enpresa-erabakietan parte hartzen duten langileen asetasun-maila handiagoa dela gainerakoena baino. Horiek ikertzeko, bi zorizko lagin osatzen dituzte: enpresa-erabakietan parte hartzen dutenak $n_1=15$ eta parte hartzen ez dutenak $n_2=22$. Bariantzak ezagutzen ez badituzte ere, aldagai horietan behatutako kuasibariantzak, $S_{n_1-1}^2=30$ eta $S_{n_2-1}^2=28$, baliokideak direla jotzen dute. Batez besteko aritmetikoak, azkenik, 95 eta 90 dira. Datu horiekin eta % 5eko esangura-mailaz, esan dezakegu enpresa-erabakietan parte hartzen dutenen asetasun-maila handiagoa dela?

.....

- 9.5. Bizkaiera irakasteko euskaltegi batean irakaskuntza-metodo bi probatu nahi dituzte: A metodoa ikus-entzunezko teknologian oinarritutakoa da, eta B metodoa pertsonen arteko ahozko komunikazioan. Metodo horiekin ikastaro bi antolatzen dira 110 ikaslerentzat. Ikasleak zoriz banatzen dira talde bitan, A metodoarekin 50 ikasle eta B metodoarekin 60 ikasle. Ikastaroaren amaieran ikasleek ikasitakoa ebaluatzen da eta honako emaitza hauek lortzen dira:

$$\text{A taldea: } \bar{X}_A = 12,3 \quad S_A^2 = 6,25$$

$$\text{B taldea: } \bar{X}_B = 14,9 \quad S_B^2 = 4$$

Populazioen bariantzak ez dira ezagutzen, baina desberdinak direla suposatzen dugu. Horiek horrela, dagokion testa egin konfiantza-maila % 95koa izanik.

.....

- 9.6. Ikertu nahi da ea marraztea lagungarri ote zaien 3 eta 4 urteko haurrentzat, hitzak ikasteko. Horretarako, 80 haur hartu eta talde bitan banatu dira. Talde batean 50 jarri dira, eta haiei hitz berriak erakutsi zaizkie marrazkirik erabili barik. Beste taldeko 30 haurrei berba berri bertsuak irakasteko marrazki xumeak erabili dira. Irakastaldien ostean, haur bakoitzak ikasitako berba kopurua aztertu da eta ondorengo emaitzak lortu dira: $n_A=50$

$$\bar{X}_A = 19 \quad \hat{S}_A = 16$$

$$n_B=30 \quad \bar{X}_B = 30 \quad \hat{S}_B = 21$$

Datu horiek erabilita, esan dezakegu lagin bi horiek batez beste bereko populazioari dagozkiola? ($1-\alpha=0,95$)

.....

- 9.7. Baserritar batek lurrak utzi dizkie bere bederatzia seme-alabei. Oinordekoek lurrak banatzerakoan arazoak dauzkate egindako neurketekin. Ez dira fio elkarrekin, eta nork bere aldetik neurtzen ditu lursailak. Horrela, A eta B lursailak 9 aldiz neurtzen dira prozedura desberdinak erabiliz. Neurketa horietatik estatistiko hauek eratorzen dira:

$$\bar{X}_A = 130,5 \quad S_A = 10,2$$

$$\bar{X}_B = 128,6 \quad S_B = 11,6$$

Horiek horrela, lursailak baliokideak direla ondoriozta daiteke? ($\alpha = 0,05$)

.....

- 9.8. *Etsipen ikasiaren sindromearen* aurrean uste da kanporakoiek erresistentzia-maila handiago daukatela barnerakoiek baino. Horrela ote den jakin nahian, 22 barnerakoi eta 16 kanporakoi hartu eta arazoen soluzioak bilatzeko ariketak egiten jartzen dira. Kontua da, arazo horiek soluziorik ez daukatela, ezin konpon daitezkeela, alegia. Trantze horretatik pasarazi eta gero, beste antzeko arazoak aurkezten zaizkie, horiek, bai, soluzioa dutenak, soluzioak aurki diezazkieten. Ikertzailearen aburuz, aurreko trantzearen ondorioz etsipen ikasiaren sindromeak jota daudenek berehala amore emango dute bigarren saiakeran. Gero zenbatzen dira konpondutako arazoak.

$$\text{Kanporakoiek: } \bar{X}_K = 6,3 \quad S_k = 3,2$$

$$\text{Barnerakoiek: } \bar{X}_B = 3,5 \quad S_B = 1,8$$

Eraitza horien arabera eta % 95eko konfiantza-mailaz esan dezakegu barnerakoiek eta kanporakoiek etsipen ikasiaren sindromearen aurrean erresistentzia-maila bera daukatela?

.....

- 9.9. Estatistikako irakasle batek jakin nahi du zein den modurik egokiena ikasleei ariketak azaltzeko: azalpen laburrak eta xumeak edo azalpen luzeak eta xeheak. Hamahiru ikasle zoriz hautatzen ditu eta horietako bosti ariketak egiteko azalpenak modu labur eta xumean ematen dizkie. Gainerako zortzietan, berriz, ariketa berdinak egiteko azalpen luzeak eta xeheak ematen dizkie. Ariketak egin eta gero, irakasleak zuzendu eta honako eraitza hauek ateratzen dira:

**Azalpen labur eta
xumeak**

1	3	6	7	8
---	---	---	---	---

Azalpen luze eta xeheak

3	5	6	5	8	9	8	4
---	---	---	---	---	---	---	---

Ikusitakoak ikusi, zein da azalpenak emateko modurik egokiena? ($\alpha=0,05$)

.....

- 9.10. Gaur dela hamar urte (ik. 9.3. ariketa), psikologo batek aztertu zuen andrazko eta gizonezkoen jarrera abortuarekiko. Psikologoaren ustez litekeena da denbora honetan jarrerak aldatu izana. Hori jakiteko, berriro ere neurtu ditu abortuarekiko jarrerak 30 emakumezko eta 30 gizonezko haien artean eta honako emaitzak hauek lortu ditu:

Emakumezkoak: $\bar{X}_1 = 31$; $S_1 = 5$ Gizonezkoak: $\bar{X}_2 = 38$; $S_2 = 6$

Puntuazioak zenbat eta handiagoa izan abortuaren aldeko jarrera orduan eta handiago dela jakinik, zer ondoriozta daiteke datuetatik? ($\alpha=0,05$)

.....

- 9.11. Arratoiengan eragiten duten estimulu mota desberdinak ikertzen ari dira. Kasu honetan izaera sexualeko estimuluak, alde batetik, eta, bestetik, janaria aztertzen ari dira. Horretarako, 300 arratoi hartu eta bi taldetan banaturik, labirinto batean ipintzen dira ibilbidea egin dezaten. Talde bati janaria ematen zaio estimulu gisa, eta besteari, berriz, izaera sexualeko estimulua. Bi egun, 48 ordu, isolaturik eduki eta gero, berriro labirintoan jartzen dira eta neurtzen zaie zenbat denbora ematen duten ibilbidea egiteko.

Estimulua, janaria: $\bar{X}_J = 2$ $S_J = 0,3$

Estimulua, sexua: $\bar{X}_S = 1,8$ $S_S = 0,8$

Zer ondorio atera daiteke datu horietatik? ($1-\alpha=0,90$)

6.2.5. Hipotesi-test parametrikokoak: proportzio bi, lagin independenteak

- 10.1. Eskola batean *adimen urrikoen integrazio*-planen arrakasta ikertu nahian, bi metodo (A eta B) ezberdinen artean aukeratu behar dute. A metodoa B baino azkarragoa da, baina B-k, ordea, emaitza hobeak erakusten ditu A-k baino. Hau da, B-ren bitartez haur gehiago *integratzen* dira Lehen Hezkuntzako ikasgela normaletan. Erabakia hartu ahal izateko, proba bat egiten dute, zoriz *adimen urriko* 50 haur hautatu eta taldea zoriz erdibitzen da ezarriko zaien A edo B metodoen arabera. Azkenik, A eta B metodoekin ibili direnen artean, hurrenez hurren, 10 eta 15 dira gela normaletan integrazioa lortu dutenak. Zein dira ondorioak metodoei dagokienez?
-

- 10.2. Bi makinak, A eta B esan dezagun, pieza mota bera egiten dute. A makinak ekoitzitako 100 piezatatik 8 akastunak dira eta B makinak ekoitzitako 120 piezatatik akastunak 15 dira. Hori jakinik, bi makinen pieza akastunen proportzioak berdinak direla esan dezakegu? ($1 - \alpha = 0,95$)

.....

- 10.3. Aldagai anitzeko analisisietako ikasleek generoari buruzko ikerketa bat egin dute unibertsitate- eta institutu-ikasleen artean. Zoriz hautatutako laginean, 45 mutil eta 96 neska, ikusi dute 16 mutil prest leudekeela ume-zaintzan aritzeko diru truk; nesken artean, berriz, 40 neska ibiliko lirateke umeak jagoten ogerleko batzuk ateratzearren. Errore-maila % 1 edo txikiagoa erabiliz esango al zenuke haur-zaintzan aritzeko neska gehiago dagoela prest mutilak baino?

.....

- 10.4. Andrazkoen eta gizonezkoen arteko diferentzien azterketak egitea ohiko eginkizuna da Psikologian aspaldidanik. Horrelako ikerketa batean, psikologo batek 50 andrazko eta 50 gizonezko hartu eta oroimen-gaitasunetan diferentziak ba ote dauden aztertu nahi zuen. Pertsona horiei hitz-zerrenda bana erakusten zitzaien 45 segundoko tartean. Erakustaldia amaituta, paperean idatzi behar zituzten gogoratutako hitzak, ahalik eta gehien, jakina. Hitz-zerrenda oso-osorik idatzi zuten 25 andrazkok eta 30 gizonezkok. Horren argitan, esan dezakegu, % 95eko konfiantza-mailaz, ez dagoela diferentziarik andrazkoen eta gizonezkoen artean?

.....

- 10.5. Test baten itaunen zailtasun-maila erantzun zuzenen proportzioaren bitartez adierazi ohi da; azterketetan berdin egiten da. Hau da, itaun bat guztiek zuzen erantzuten badute, galdera hori oso erraza dela ondorioztatzen da, eta ez badu inork zuzen erantzuten, aldiz, oso zaila dela. Kasu bietan itaun horiek baztertu ohi dira pertsonen arteko desberdintasunik antzemateko balio ez dutelako. Gaitasun orokorrak neurtzeko test baten itaun bi aztertzeko, psikologo batek 200 pertsona hartu eta bi talde kopuruz berdinetan banatzen ditu zoriz. Talde bati eskatzen dio lehenengo itaunari erantzutea, eta besteari, bigarrenari. Lehenengo itaunean lagineko % 70ek zuzen erantzuten du, eta bigarren itaunean, berriz, lagineko % 60k. Horiek horrela, 0,05 esangura-mailaz itaunen zailtasun-maila desberdina dela esan dezakegu?

6.2.6. Hipotesi-test parametrikokoak: bariantza bi, lagin independenteak

- 11.1. Bariantzen arteko baliokidetasuna aztertzeko, zein test erabili behar dugu honako kasu honetan?

$$n_1=50 \quad \bar{X}_1 = 19 \quad S_1 = 16$$

$$n_2=30 \quad \bar{X}_2 = 30 \quad S_2 = 21$$

.....

- 11.2. Enpresa-psikologo batek langileak hautatzeko azterketa-eredu berri bat aukeratu behar du ematen zaizkion biren artean. A eta B ereduak, biak ala biak, estandarizaturik daude eta antzeko batez bestekoak ematen dituzte. A eta B-ren artean zein aukeratu erabakitzeko, bateko eta besteko galdera guztiak nahasten ditu azterketa bakarrean eta 50 pertsonari eginarazten dizkie. Azterketak egin eta gero, A-ko eta B-ko galderak zein bere aldetik aztertzen ditu. Hona hemen emaitzak:

$$\bar{X}_A = 62 \quad S_A^2 = 25$$

$$\bar{X}_B = 59 \quad S_B^2 = 49 \quad r_{AB} = 0,9$$

Hautaprobetarako, zein azterketa-eredu hautatu behar du psikologoak? ($\alpha = 0,05$)

.....

- 11.3. Auto-aseguruen etxe batek ikerketa bat enkargatu du jakiteko gizonezkoak eta emakumezkoak autoa gidatzeko moduan desberdinak ote diren. Horretarako, batean 14 gidari hartzen ditu, 7 andrazko eta 7 gizonezko, eta kale-bidegurutze bat zeharkatzeko eskatzen die. Gidari bakoitzak bidegurutzea zeharkatzeko zenbat segundo behar duen neurtzen du ikertzaileak, eta honako bariantzak hauek lortzen ditu:

$$\text{Emakumezkoak: } S_1^2 = 21,238 \quad \text{Gizonezkoak: } S_2^2 = 11,238$$

% 95eko konfiantza-mailaz, bariantzak baliokideak ote dira?

.....

- 11.4. Aurreko ariketa batean (ik. 9.7 ariketa) oinordekoek lurak banatzerakoan dauzkaten arazoak aipatu ditugu. A eta B lursailak 9 aldiz neurtzen dira prozedura desberdinak erabiliz. Neurketa horietatik estatistiko hauek eratortzen dira:

$$\bar{X}_A = 130,1 \quad S_A = 10,2$$

$$\bar{X}_B = 128,1 \quad S_B = 11,6$$

Oraingo honetan bariantzak baliokideak ote diren jakin nahi dute ($\alpha=0,05$).

.....

- 11.5. Arantzadi Zientzia Elkartea historiaurreko ehiza-tresnak ikertzean, antzinako arkuaren erabilera aztertzen ari da. Hasieran, arkulari batek 30 minutu ematen ditu 38 jaurtiketa elkarren segidan egiteko. Bi hilabeteko entrenamenduen ondoren, 10 minutu behar ditu jaurtiketa kopuru bera egiteko. Jaurtiketa bakoitza puntuatzeko gezia jo-puntuko erdigunetik zein distantziatara gelditu den neurtzen da. Kasu batean eta bestean jo-puntuaren inguruko gezi-banaketen eta jaurtiketa kopuruaren arteko korrelazioa aztertu da, eta honako emaitza hauek lortu dira:

$$S_1^2 = 500 \quad S_2^2 = 350 \quad r_{12} = 0,8$$

Datu horiek erabilita ($1-\alpha=0,95$) egin hauetako hipotesi-testa:

$$H_0 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0 \quad H_1 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 > 0$$

6.2.7. Hipotesi-test parametrikokoak: erlazionaturiko lagin bi

- 12.1. Euskara irakasteko bi metodo ezberdin (A eta B) erkatzeko, Iparraldeko eta Hegoaldeko hogeina erdaldun aukeratu ziren. Hautaketa binaka egin zen, Iparraldeko eta Hegoaldeko bana, baldintza izanik aldagai soziokultural eta ekonomikoak antzekoak izatea. Metodo ezberdinez programatutako euskarazko ikastaroetatik igaro eta gero lorturiko maila neurtu zitzairen, zeini bere aldetik. Batez bestekoaren inguruko hipotesi-testa egin ondoren, $t=2,78$ kontraste estatistikoa behatu zen. Zein izan daiteke erabakia $\alpha=0,01$ ezartzen badugu? Erabilitako irakaskuntza-metodoei buruz, zer esan dezakegu?

.....

- 12.2. Herstura-maila handiko hamaika pertsonarekin autokontrolerako terapia berri baten eragina aztertu nahi da. Terapia hasi aurretik herstura-maila neurtu zaie (*lehen*), eta prozesua bukatu eta gero berriro ere neurtu zaie (*gero*). Lortutako puntuazioak taulan jarri ditugu:

Lehen	Gero
10	8,04
8	6,95
13	7,58
9	8,81
11	8,33
14	9,96
6	7,24
4	4,26
12	10,84
7	4,82
5	5,68

Datuak datu, esan dezakegu terapiak laguntzen duela herstura-maila apaltzen? ($\alpha=0,05$)

.....

- 12.3. *Lexiko-erakarpen askeko testa* erabiliz Bigarren Hezkuntzako ikasle talde baten euskarazko eta erdarazko mailak neurtu izan dira. Test horren xedea da hitzunen oinarritzko hiztegia zenbatekoa den neurtzea. Kasu honetan, jakina, pertsona bakoitzak test bera egin behar izan du euskaraz eta erdaraz. Bildutako datuak honako hauek izan dira:

EUSKARAZ	13 85 27 69 76 30 39 32 13 58 84 27 56 49 88 79 51 37 24 59
ERDARAZ	11 96 15 88 92 34 44 67 37 38 78 27 71 75 89 60 41 28 56 54

Badago egon diferentziarik euskarazko eta erdarazko lexiko-erakarpenetan? ($\alpha=0,05$)

.....

- 12.4. Arantzadi Zientzia Elkartek historiaurreko ehiza-tresnak ikertzean antzina-ko arkuaren erabileraren azterketa aipatu dugu 11.5. ariketan. Lehen erabilitako datuei oraingo honetarako lortutako batez bestekoak gehitu dizkiegu.

$\bar{X}_1 = 55$

$\bar{X}_2 = 85$

$S_1^2 = 500$

$S_2^2 = 350$

$r_{12} = 0,8$

Datu horiek erabilita batez bestekoak desberdinak direla esan dezakegu? ($1-\alpha=0,95$)

.....

- 12.5. Aurreko ariketa batean (ik. 11.2. ariketa) aztertu ditugu langileak hautatzeko azterketa-eredu berri biren bariantzak. Oraingo honetan, lehengo datuekin ($n=50$), batez bestekoak desberdinak ote diren jakin nahi dugu.

$$\begin{array}{llll} \bar{X}_A = 62 & S_A^2 = 25 & & \\ \bar{X}_B = 59 & S_B^2 = 36 & r_{AB} = 0,9 & (\alpha=0,05) \end{array}$$

6.2.8. Hipotesi-test parametrikokoak: korrelazio-koefizientea

- 13.1. BBBko ikasleaz osaturiko 65eko zorizko lagin batean *Raven Matrize Progresiboen Testen* eta *Guilforden Erabileraren Testen* artean $r_{xy}=0,15$ Pearsonen korrelazioa behatu izan da. Hori horrela eta konfiantza-maila % 95 ezarritik, $\rho_{xy}=0$ hipotesiari euts diezaiokegu?

.....

- 13.2. *Hautemateko gaitasuna* eta *eginkizun burokratikoetarako gaitasuna* aztertzean, lan-arloko psikologo batek $r_{xy}=0,25$ eko korrelazio-koefizientea aurkitu zuen. Psikologoak erabilitako zorizko lagina 125 pertsonaz osaturik zegoela jakinik, $\rho_{xy}=0,40$ hipotesia onartu ala baztertu behar ote da? ($\alpha=0,05$)

.....

- 13.3. Esan ohi da euskaldunok nahiko *barnekoiak* garela; barnekoia/kanpokoia ikerketa batean eskola-psikologo batek *kanporakoitasunaren* eta *eskola-errendimenduaren* artean $r_{xy}=0,25$ korrelazio-koefizientea aurkitu zuen Iurretako Lehen Hezkuntzako 3. mailako 200 ikasle aztertu zituela. Bestalde, Bidebietako Batxilergoko 2. mailako 100 ikaslerekin azterketa bera egin zuen eta $r_{xy}=0,05$ eko korrelazioa aurkitu zuen. Bi populazioetan balio berdinak direla esan dezakegu? (Konfiantza-maila = % 95)

.....

- 13.4. *Adimena (X)*, *Irakurketa Abiada (Y)* eta *Irakurketa Ularmena (Z)* elkarri lotuta daudelakoan, pedagogo batek 103 ikasle hartu eta erlazio hori aztertzeari ekin zion, eta honako korrelazio-matrize hau behatu zuen:

$$\begin{pmatrix} & X & Y & Z \\ X & -- & 0,34 & 0,422 \\ Y & & -- & 0,473 \\ Z & & & -- \end{pmatrix} \quad \rho_{xy}=\rho_{xz} \quad \text{Hipotesi Nulu gisa, onargarria al da? } (\alpha=0,05)$$

.....

- 13.5. Enpresa-psikologo batek bulego-lanetarako langileak hautatzeko probak aztertu ditu eta ondorioztatu du hautaketarako testaren puntuazioen (X) eta lan-emankortasunaren (Y) artean $r_{xy}=0,90$ korrelazioa dagoela. Dena den, bere hipotesia egiaztatu nahian, bulegarien artean 20 pertsonaz osaturiko zorizko laginari testa betearazi eta lan-emankortasuna neurtzen du. Behatutako $r_{xy}=0,80$ suertatu dela eta, psikologoak pentsatutakoa onargarria ote? Konfiantza-tartea eraiki ($\alpha=0,01$).

.....

- 13.6. *Elebiduntasunaren* inguruko ikerketa batean hizkuntzen arteko ekoizpen-mailak aztertu dira. Ikertzaileak uste du euskararen edo erdararen *etorria* antzekoa dela; hots, euskaraz hitz asko ekartzen dutenek erdaraz ere asko ekarri behar dutela. Horrela, 20 unibertsitario zoriz hautatu eta eskatu die bost minututan euskaraz otu zaizkien hitzak idazteko eta beste horrenbeste erdaraz ere. Emaizak honako hauek izan dira:

EUSKARAZ	13 85 27 69 76 30 39 32 13 58 84 27 56 49 88 79 51 37 24 59
ERDARAZ	11 96 15 88 92 34 44 67 37 38 78 27 71 75 89 60 41 28 56 54

Euskaraz eta erdaraz idatzitakoak erlazionaturik ote dauden jakin nahi dugu. Era berean, euskaraz ekarritakoaren (X) eta erdaraz ekarritakoaren (Y) arteko korrelazioa $r_{xy}=0,90$ delako hipotesiari euts diezaiokegun jakin nahi dugu. ($\alpha=0,05$).

.....

- 13.7. Sei eta 10 urte bitarteko 200 mutikoren zorizko lagin batean adimenaren (X) eta eskola-emaizten (Y) arteko Pearsonen korrelazio-koefizientea $0,71$ koa dela behatu da. Adin bereko 78 neskatoren zorizko lagin batean koefizientea $0,28$ koa dela jakinik, % 99ko konfiantza-mailaz, ba al da nahikoa arrazoiak populazio horietan korrelazioak desberdinak direla adierazteko?

.....

- 13.8. Udako Euskal Unibertsitatean (UEU) oroimenaren (Y), adimenaren (Z) eta unibertsitateko emaitzen (X) artean izan daitezkeen erlazioak aztertzen ari dira. Euskal Herriko unibertsitate desberdinetako 103 ikasleren artean honako Pearsonen korrelazio-matrizea behatu dute:

	X	Y	Z
X	--	$0,50$	$0,40$
Y		--	$0,30$
Z			--

Hori horrela, adimena (Z) eta oroimena (Y) balio berekoak ote dira unibertsitateko emaitzak (X) auresateko mementoan? ($\alpha=0,05$)

6.3. TEST EZ-PARAMETRIKOAK

- 14.1. Eguneroko janariak arratoien aktibitatean izan dezakeen eragina aztertzeko, ikertzaile batek 10 arratoi behar ditu. Ikerketa horretarako ezinbesteko baldintza izanik aukeraturiko animaliak antzeko aktibitate-mailakoak izatea, 30 minutuz behatu zituen eta arratoien mugimenduak (*mugimenaren erantzunak*) apuntatu (ik. ondorengo taula). Hori horrela, 10 arratoi antzeko *aktibitate-tasakoak* direla esan dezakegu?

ARRATOIAK	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ERANTZUN KOPURUA	4 6 8 5 8 4 3 7 7 5

.....

- 14.2. Lantoki batean jakin nahi dute musikak nola eragiten duen langileen ekoizpen-mailan; musika zenbat eta ozenago jarri, orduan eta unitate gehiago egiten dituzte? Hori jakin nahian, musikaren bolumena eta ekoitziriko unitateak neurtzen dituzte. Musikaren kasuan, sei bolumen-maila ezberdin erabili eta honako emaitza hauek behatu dira:

MUSIKA (dezibelioak)	10 20 30 40 50
EKOIZPENA (unitateak)	112 124 116 109 103

Horren aurrean, musikaren bolumenak eragiten ote du langileen ekoizpentsan?

.....

- 14.3. Demagun 25 bola gorri (1), 10 urdin (2), eta 15 berde (3) zorro batean sartu ditugula eta hortik beheko taulan agertzen diren hiru laginak ateratzen ditugula:

KOLOREA	1 GORRIA	2 URDINA	3 ORLEGIA	GUZTIRA
1. LAGINA	$n_{11} = 8$	$n_{21} = 5$	$n_{31} = 7$	$n_{.1} = 20$
2. LAGINA	$n_{12} = 25$	$n_{22} = 9$	$n_{32} = 6$	$n_{.2} = 40$
3. LAGINA	$n_{13} = 15$	$n_{23} = 10$	$n_{33} = 15$	$n_{.3} = 40$
GUZTIRA	$n_{1.} = 48$	$n_{2.} = 24$	$n_{3.} = 28$	$n = 100$

Hori horrela, lagin guztiak populazio beretik atera diren ala ez jakin nahi dugu.

.....

14.4. *Wechslerren Helduen Adimen Eskala* (WAIS) adimen-kozientea neurtzeko test erabilienetako bat izan da. Bera erabiliaz badakigu jakin adimen-kozienteak, populazio-mailan, normaltasunez banatzen direla: $N(100,256)$. Ikertzaileak testa berriz probatu nahi du, eta 30 subjekturi testa betearazi eta gero, honako emaitza hauek behatu ditu:

Lorturiko puntuazioak tartetan (X_i)	Subjektu kopuruak (n_i)
140 edo gehiago	1
130 – 139	0
120 – 129	2
110 – 119	8
100 – 109	10
90 – 99	5
80 – 89	2
70 – 79	1
70 baino gutxiago	1

Behaturiko emaitzak populazio horri dagozkiola esan dezakegu?

.....

14.5. Unibertsitate publikoetako ikasleen eta konfesionaletakoen artean frustrazioari aurre egiteko gaitasuna berdina ote den jakin nahi dugu. Ikertzaileak 18 unibertsitariori, 8 unibertsitate publikoetakoak eta 10 konfesionaletakoak, frustrazioari aurre egiteko gaitasun-testa betearazten die. Emaitzak hauek izan dira:

Unibertsitate publikoko ikasleak				Unibertsitate konfesionaleko ikasleak				
18,3	16,4	22,7	17,8	12,6	14,1	20,5	10,7	15,9
18,9	25,3	16,1	24,2	19,6	12,9	15,2	11,8	14,7

Badago egon diferentziarik ikasle horien artean? ($\alpha=0,05$)

.....

14.6. Psikologia Fakultatean ikasle asko dagoela-eta goizeko eta arratsaldeko txandak antolatu dira. Irakasle batek goizean eta arratsaldean ematen ditu eskolak eta azterketa bera ipini die goizeko zein arratsaldeko ikasleei. Hogeita bost ikasleren notak aztertu ditu (ik. taula), eta goizeko eta arratsaldeko ikasleen artean diferentziarik ote dagoen jakin nahi du.

Goiz	Arratsaldez
7,3	8,6
8,7	8,1
7,9	8,4
7,5	8,8
8,2	9
6,6	8,5
9,5	8,4
7,5	9,2
7	8,3
	9,1
	5,3
	8,4

.....

- 14.7. Datu Analisia irakasten duen irakasleak praktika eta teoriaren artean egon daitekeen erlazioa aztertzeko zoriz hautatutako 10 ikasleren notak aztertu ditu. Noten arabera hamar ikasle horien hurrenkerak definitu ditu honako taula honetan.

Praktika	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
Teoria	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

Horren arabera, praktika eta teoriaren arteko erlazioa esanguratsua al da? ($\alpha=0,05$)

.....

- 14.8. Bigarren Hezkuntzako ikasleen gaitasunak neurtzeko bost test diseinatu dira: A, B C, D eta E. Funtsean gaitasun bertsuak neurtzen dituzte, baina egitura desberdinetakoak dira. Batzuk errazago betetzen dira besteak baino. Hori horrela, eraginkorrena zein den jakiteko, esperientzia handiko bost psikologori eskatu diegu test horiekin eskola-egun batean ahalik eta ikasle gehien aztertzea. Psikologoek denbora berbera izan dute test bakoitza erabiltzeko. Taulan jaso ditugu test bakoitzarekin aztertutako ikasle kopuruak.

Testak	Psikologoak				
	1	2	3	4	5
A	68	72	77	42	53
B	72	53	63	53	48
C	60	82	64	75	72
D	48	61	57	64	50
E	64	65	70	68	53

Zein da test emankorrena?

.....

14.9. Hiru zorizko lagin hautatu ditugu. Lortutako puntuazioak ordenatu eta gero, hurrenkera-taula hauxe suertatzen zaigu:

Laginak					
1	7	4	6	10	
2	11	9	12		
3	5	1	3	8	2

Diferentziarik ba al dago laginen artean? ($\alpha=0,05$)

.....

14.10. Demagun euskararen aldeko jarrera aztertu nahi dugula erdaldunen artean. Barnetegi batean matrikulaturiko pertsona multzo bat ($n=60$) hartzen da eta euskararekiko iritzia galdetzen zaie behin barnetegian sartu baino lehen eta beste behin ikastaroa amaitu eta gero. Hona hemen emaitzak:

LEHEN GERO	KONTRA	ALDE	GUZTIRA
ALDE	A = 10	B = 16	26
KONTRA	C = 8	D = 26	34
GUZTIRA	18	42	60

Datuak datu, gauzatu ote da jarrera-aldaketarik talde horretan barnetegitik pasatu eta gero?

.....

14.11. Heriotza-zigorraren aurkako militanteek film bat egin dute gizartea sentibilizatzeko. Uste dute filmak heriotza-zigorraren kontrako jarrera areagotuko duela. Filma ikustera doazen 100 pertsonari heriotza-zigorraren alde edo aurka ote dauden galdetzen zaie filma ikusi aurretik eta ondoren. Jasotako informazioa taula batera bildu da:

IKUSI		ondoren	
		AURKA	ALDE
aurretik	AURKA	25	5
	ALDE	35	35

Egia ote da filmak heriotza-zigorraren aurkako jarrera sorrarazten duela?

.....

- 14.12. Etologia eta Datu Analisia irakasgaietan ikasleek zer errendimendu duten aztertzeko, 278 ikasleren emaitzak aztertu dira, ikusteko zenbatek gainditzen duen eta zenbatek suspenditzen duen. Taula batera bildu dira datu horiek:

		Datu Analisia	
		Gainditu	Suspenditu
Etologia	Gainditu	70	90
	Suspenditu	30	28

Irakasgai bi horiek gainditzeko diferentziarik ote dago? ($\alpha=0,01$)

.....

- 14.13. Psikosi-eskizofreniako kasuetan, kobre-tasa handiak aurkitu ohi dira odolean. Gaixotasuna zenbat eta larriagoa izan, orduan eta handiagoa izan ohi da odoleko kobre-tasa. Psikologo kliniko batek uste du botika eta terapia birtartez odoleko kobre-tasa jaitsi daitekeela. Hortaz, bere jarduera klinikoan, psikosi-eskizofreniak jotako 50 pertsonari bere tratamendua (botika-terapia) ematen die. Gaixo guztiei odoleko kobre-tasa neurtzen die tratamendua hasi aurretik eta ondoren.

		Tratamenduaren ondoren	
		Kobre-tasa:	Handia Txikia
Tratamenduaren aurretik	Handia	3	28
	Txikia	10	9

Datu horien argitan, psikologoaren tratamenduak balio ote du odoleko kobre-tasa handiko gaixoen proportzioa murrizteko? ($\alpha=0,05$)

.....

- 14.14. Hautemateko arazoak dauzkaten haurrek, oro har, entrenamendu egokiari esker beren errendimendua hobe dezakete. Hori ikusi ahal izan da, esaterako, *Ravenen Testaren* bitartez. Ikertzaile batek hautemateko arazoak zituzten 5 haurrekin aztertu zuen haurren errendimenduaren hobekuntza hori. Entrenamendua hasi aurretik eta bi hilabeteko entrenamendua egin ondoren, haurrei *Ravenen Testa* eginarazi eta honako emaitza hauek lortu zituen:

		UMEAK				
		1	2	3	4	5
TRATAMENDUA	aurretik	70	72	80	75	77
	ondoren	74	73	84	75	84

Datu horiekin, esan dezakegu entrenamenduak balio dezakeela errendimendua hobetzeko *Ravenen Testean*? ($1-\alpha=0,99$)

6.4. ERREGRESIO LINEALA

Erregresio linealaren ariketak egiteko 90 ikasleren datuak hartu ditugu: unibertsitateko sarrerako nota (*nota*), adimen-koizientea (*adimena*), sexua eta autoestimua-ren puntuazioa. Guztiek ez zituzten datu guztiak bete, eta, azkenean, 78 ikaslek emandako informazioa aldatu dugu hona. Informazioa galtzea ohiko arazoa da datu-analisietan eta, batzuetan, horren erruz ondorioak alboratuak eta desitxuratuak izaten dira.

Behaketa	Nota	Adimena	Sexua	Autoestimua
1	7,94	111	M	67
2	8,292	107	M	43
3	4,643	100	M	52
4	7,47	107	M	66
5	8,882	114	N	58
6	7,585	115	M	51
7	7,65	111	M	71
8	2,412	97	M	51
9	6	100	N	49
10	8,833	112	M	51
11	7,47	104	N	35
12	5,528	89	N	54
13	7,167	104	M	54
14	7,571	102	N	64
15	4,7	91	N	56
16	8,167	114	N	69
17	7,822	114	N	55
18	7,598	103	N	65
19	4	106	M	40
20	6,231	105	N	66
21	7,643	113	M	55
22	1,76	109	M	20
24	6,419	108	N	56
26	9,648	113	M	68
27	10,7	130	N	69
28	10,58	128	M	70
29	9,429	128	M	80
30	8	118	M	53
31	9,585	113	M	65
32	9,571	120	N	67
33	8,998	132	N	62
34	8,333	111	N	39
35	8,175	124	M	71
36	8	127	M	59
37	9,333	128	N	60
38	9,5	136	M	64
39	9,167	106	M	71
40	10,14	118	N	72
41	9,999	119	N	54

M..... mutila

Behaketa	Nota	Adimena	Sexua	Autoestimua
43	10,76	123	M	64
44	9,763	124	M	58
45	9,41	126	M	70
46	9,167	116	M	72
47	9,348	127	M	70
48	8,167	119	M	47
50	3,647	97	M	52
51	3,408	86	N	46
52	3,936	102	M	66
53	7,167	110	M	67
54	7,647	120	M	63
55	0,53	103	M	53
56	6,173	115	M	67
57	7,295	93	N	61
58	7,295	72	N	54
59	8,938	111	N	60
60	7,882	103	N	60
61	8,353	123	M	63
62	5,062	79	M	30
63	8,175	119	M	54
64	8,235	110	M	66
65	7,588	110	M	44
68	7,647	107	M	49
69	5,237	74	N	44
71	7,825	105	M	67
72	7,333	112	N	64
74	9,167	105	M	73
76	7,996	110	M	59
77	8,714	107	N	37
78	7,833	103	N	63
79	4,885	77	M	36
80	7,998	98	N	64
83	3,82	90	M	42
84	5,936	96	N	28
85	9	112	N	60
86	9,5	112	N	70
87	6,057	114	M	51
88	6,057	93	N	21
89	6,938	106	M	56

N..... neska

- 15.1. Psikologia Fakultatera etorritako ikasle berrien artean zorizko lagin bat ($n=78$) hautatu da ikasleriaren autoestimua eta adimen-koefizientearen artean erlaziorik ote dagoen aztertzeko. Adimen-eskala eta autoestimua neurtzeko galdekizuna betearazi zaie eta datu hauek lortu dira:

$$\begin{array}{ll} \text{Adimen-koefizientea:} & \bar{X} = 108,92 \\ & \hat{S}_x = 13,171 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Autoestimua:} & \bar{Y} = 56,96 \\ & \hat{S}_y = 12,412 \end{array}$$

Beste aldetik, korrelazio-koefizientea 0,4931 eta erregresio-koefizientea 0,465 direla kalkulatu da. Datu horiekin osatu erregresio linealaren ekuazioa eta adierazpide grafikoa egin. Adimen-koefizienteak zein proportziotan azaltzen du autoestimua? Aldagaien arteko erlazioa esanguratsua da?

.....

- 15.2. Erabiltzen ari garen laginarekin, lehenengo kurtsoaren amaierako nota aztertu genuen. Oro har, batez besteko nota 7,419 behatu zen. Kasu honetan lortutako notaren eta autoestimua arteko erlazioa aztertu nahi dugu. Horretarako, aurreko ariketako datu batzuk eta beste zenbait datu berri hartu ditugu:

$$S_{xy}=13,631 ; S_x=2,047 ; S_y=12,332 ; a=32,813$$

Esanguratsua ote da notaren eta autoestimua arteko erlazioa? Determinazio-koefizientea, ekuazio lineala eta grafikoa egin.

.....

- 15.3. Lehen aipatutako ikasle horiekin beroriekin adimen-koefizientearen (X) eta notaren (Y) arteko ekuazio lineal hau aurkitu dugu: $Y = -3,277 + 0,098 X$. Kobariantza 16,822 dela jakinik, adimen-koefizienteak zein proportziotan azaltzen du ikasleek lortutako nota?

.....

- 15.4. Atal honen hasierako tauletako nesken datuak erabiliz, azter ezazu adimen-koefizienteak eta autoestimua nola eta zein neurritan azaltzen duten nota.

.....

- 15.5. Ikertzaile-talde batek aztertu nahi du zer eragin izan dezakeen autoestimua pertsonen portaeran. Izan ere, xenofobiari aurre egiteko, kanpotik etorritako pertsonen aldeko jarrera abegikorak sustatu nahi dituzte. Galde-sorta eta neurgailu batzuk sortu eta gero, hamaika pertsona zoriz hautatu eta haien autoestimua (X) eta jarrera abegikorak (Y) neurtu dituzte. Emaitzak azpiko taulan agertzen dira.

X	Y
10,00	8,04
8,00	6,95
13,00	7,58
9,00	8,81
11,00	8,33
14,00	9,96
6,00	7,24
4,00	4,26
12,00	10,84
7,00	4,82
5,00	5,68

Datu horiek aztertu eta esan autoestimua zein neurritan azaltzen duen jarrera abegikorren maila. Dagokion analisia eta irudiak egin ($\alpha=0,05$).

.....

- 15.6. Psikologia Fakultatean Estatistika ikasgaian behaturiko nota eskasak direla-eta, ikasleek ikasgai horretan ematen dituzten ordu kopuruak aztertu ditu irakasleak. Horretarako, ikastaldeko 12 ikasle zoriz hautatu, ematen dituzten orduak kontrolatu eta azken notak aztertu ditu, taulan honetan agertzen diren moduan:

ORDUAK	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8
NOTAK	45	60	59	60	75	75	80	75	90	80	80	85

Demagun aipatutako ikastaldean (osoan) behaturiko erregresio-zuzenaren ekuazioa honako hau dela: $Y_i = 35,95 + 7,21 X_i$

Kalkula ezazu α parametroaren inguruko konfiantza-tartea eta $\beta=0$ hipotesiari buruzko testa burutu.

6.5. BARIANTZA-ANALISIAK (ANOVA)

- 16.1. Lo txarto egiteak esku-trebetasunean izan dezakeen eragina aztertzeko egindako esperimentu batean, 16 pertsona hartu eta tamaina bereko lau talde esperimentaletan banatzen dira. A taldekoei 12 ordu lo egin gabe egotea eskatzen zaie, B taldekoei 24 ordu, C taldekoei 36 eta, azkenik, D taldekoei 48 ordu. Gero pertsona guztiei marrazketa-proba bat egitea, denei berdina, eskatzen zaie. Emaitzak taulan agertzen dira. Lo-gabeziak esku-trebetasunean eragiten du? Zein talderen artean azaldu dira diferentziak?

A	B	C	D
3	4	7	7
6	5	8	8
3	4	7	9
3	3	6	8

.....

- 16.2. Lantoki-giroak zer-nolako muntaketa-kateko ekoizpenean eragiten duen ala ez aztertzeko, lau egoera desberdin diseinatu dira. Egoera bakoitzaren arabera, emaitza hauek behatu dira:

$$T_1=28 ; T_2=35 ; T_3=49 ; T_4=56$$

Erabilitako diseinu esperimentala orekatua dela eta $\alpha 0,05$ ekoa dela jakinik, hipotesi nulua gaineko erabakia zehaztu eta Tukeyren testa egin. Datuak osatzeko honako taula hau eratu dugu:

Aldakortasun-sorburuak	BB	ag	BBB	F
Talde artekoak	()	()	()	()
Talde barnekoak	()	()	0,667	
Guztira	86	27		

.....

- 16.3. Saltoki bateko arduradunek jakin nahi dute aretoaren argitasunak salmentetan eragiten ote duen. Adituei eskatutako azterketan intentsitatearen arabera 4 argitasun-maila desberdin bereizi dira: a_1 , a_2 , a_3 eta a_4 . Horrela, lau saltokitako salmentak aztertu dituzte, eta hurrenez hurren, T_1 , T_2 , T_3 eta T_4 emaitzak lortu dituzte. Emaitza zehatzak, milako €, taulan agertzen dira. Diseinuari dagokion analisisa (ANOVA) egin eta erabaki estatistikoa hartu ($\alpha=0,01$).

	a_1	a_2	a_3	a_4
1. saltokian	6	10	6	14
2. saltokian	7	8	7	10
3. saltokian	8	6	8	10
4. saltokian	5	9	11	13

.....

16.4. Estatistika ikasteko prozedura desberdinak aztertu ditugu; horretarako, hiru metodo desberdin aukeratu ditugu: a_1 , a_2 eta a_3 . Gure ikasleen artean zoriz 15 hautatu eta bosteko taldeak antolatzen ditugu ausaz. Talde bakoitzari ikasteko metodo bana esleitzen zaio. Azkenik, ikasitakoa neurtzeko ebaluazioa egiten diegu guztiei. Hona hemen emaitzak:

IKASTEKO METODOA			
	a_1	a_2	a_3
T_j	118	98	76
$\sum Y_j^2$	2796	1932	1160

Benetan eragiten al du ikasteko metodoak lortutako puntuazioetan? Diferentziak izatekotan, zein talderen artean daude?

.....

16.5. Ikaskuntzaren gaineko ikerketa ugarik erakutsi du edozein eginkizunetan saria zenbat eta handiago izan, orduan eta hobea dela errendimendua. Arratoiekin egin ohi diren mota horretako ikerketa batean, egarriak zeuden 6 animalia hiru talde esperimentaletan banatu ziren. Talde bakoitzari sari-maila (ura) desberdinak ezarri zitzaizkion, 5, 10 eta 15 cc, hurrenez hurren. Arratoiek labirintoa ibili behar zuten saria lortzeko.

5cc	10cc	15cc
9	6	4
8	6	2
7	3	3
8	4	4
7	5	3
9	6	2
48	30	18

$$\sum_i \sum_j Y_{ij}^2 = 604$$

Taulan ikus dezakezu zenbat saio egin zuen arratoi bakoitzak labirintoa osatzeko. Bildutako informazio horrekin dagokion analisia egin ($\alpha=0,01$). Zein talde dira desberdinak?

.....

- 16.6. Haurrentzako literatura-lehiaketa batean sei epailek lau haurrek aurkeztutako lanak ebaluatu dituzte:

UMEAK	EPAILEAK					
	1	2	3	4	5	6
1	9	3	7	2	5	8
2	5	4	3	3	7	6
3	7	2	6	1	5	7
4	6	3	3	1	6	6

Epaileak egindako ebaluazioak desberdinak ote dira? ($\sum_i \sum_j Y_{ij}^2 = 667$) Ba al da diferentziarik haurrek jasotako puntuazioetan?

.....

- 16.7. Testuaren irakurgarritasuna zer-nolakoa den aztertzeko hiru testu-mota aukeratzen dira: *zientifikoa*, *literaturazkoa* eta *saiakera*. Testu-sail bakoitze-ko, antzeko zailtasun-maila eta luzerako testuak hautatu eta 10 ikaslerekin proba egiten da testu bakoitzaren ulermen-maila neurtzeko. Gero, lortutako emaitzekin bariantza-analisia egiten da. Analisi horretatik honako taula hau atera dugu:

Aldakortasun-sorburuak	BB	ag	BBB	F
Talde arteko (I)			40	
Subjektu arteko (B)	20			
Hondakinak (E)				
Guztira (T)	130			

Osatu taula, erabaki estatistikoa hartu eta ondorioak azaldu.

.....

- 16.8. Oinarrizko Psikologia jakintza-alorrean, oroimena ikertzean denborak gogoramenean nola eragiten duen jakin nahi dugu. Horrelako ikerketa batean 9 pertsonari testu bat irakurtzea eskatu zitzaien, eta guztiei testu berdina eta denbora berdina, 20 minutu, eman zitzaien irakurtzeko. Behin irakurrita, ordutik ordubetera gogoratutakoa idaztea eskatu zitzaien. Hogeita lau ordu igarota, berdin egitea eskatu zitzaien, beste horrenbeste handik astebetera eta, azkenik, handik hilabetera.

Subjektua	Ordubete	Egunbete	Astebete	Hilabete	Ti+
1	16	8	8	12	44
2	12	9	9	10	40
3	12	10	10	8	40
4	15	13	7	11	46
5	18	12	12	12	54
6	13	13	8	10	44
7	18	16	10	13	57
8	15	9	6	6	36
9	16	9	11	8	44
T+j	135	99	81	90	405

$$\sum_i \sum_j Y_{ij}^2 = 4913$$

Goiko taulara ekarri ditugu subjektuek une bakoitzean gogoratutakoaren neurriak. Datu horiekin, % 5eko esangura-mailaz, esan dezakegu igarotako denborak oroimenean eragiten duela?

.....

16.9. Zoriz hautatutako 30 pertsonarekin esperimentu bat egin zen aztertzeko zer-nolako eragina duten motibazioak (A) eta lanerako estiloak (B) lorpenetan. Motibazioari dagokionez, bi maila bereizi ziren: motibazio instrumentala (a_1) eta egozpenezko motibazioa (a_2). Bi maila horiei kontrol (a_3) gisako beste bat gehitu zitzaien. Partaideak tamaina bereko hiru taldetan banatu ziren ausaz eta egokitu zitzaien motibazio motan entrenatuak izan ziren; hiru-taldeen taldekoek, jakina, ez zuten entrenamendu berezirik hartu. Lanerako estiloan, berriz, hiru maila bereizi ziren: auzolanekoa (b_1), lehiakorra (b_2) eta indibiduala (b_3). Horrela, hogeita hamar pertsona horiek bi faktoreen arabera-ko sei taldetan banatu ziren. Egin beharreko prestaketa-lanak egin ondoren, guztien errendimendua ebaluatu zen. Hona emaitzak:

MOTIBAZIOA	LANERAKO ESTILOA		
	Auzolana	Lehiakorra	Indibiduala
Instrumentala	35	25	45
Egozpenezkoa	30	20	25
Kontrol-taldea	25	15	20

$$\sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 = 1456$$

Taulan talde bakoitzeko orotariko baturak agertzen dira. Datu horiekin eta % 95eko konfiantza-mailaz, zer esan dezakegu aldagai askeen eraginaz eta haien arteko elkarreraginaz? Dagokion adierazpide grafikoa egin.

.....

- 16.10. Fakultateko dekanok jakin nahi du nola eragiten duten irakaslearen eskarmentuak (A) eta irakaskuntza-metodoek (B) Estatistikaren irakaskuntzan. Irakaslearen esperientziari dagokionez, bi maila bereizi ziren: gehienez bi urteko eskarmentua (a_1) eta bi urtekoa baino handiagoa (a_2). Hiru irakaskuntza-metodo erabili ziren: *magistrala* (b_1), *parte hartzekoa* (b_2) eta *programatua* (b_3) Horrela, ikastaroa egin eta gero, egoera desberdin bakoitzean zeuden bina ikasleren notak bildu ziren:

ESKARMENTUA		IRAKASKUNTZA METODOA		
		b_1	b_2	b_3
a_1		1	4	8
		3	3	10
a_2		2	5	9
		1	6	8

Emaitza horiek ikusita, dekanok jakin nahi du, % 95eko konfiantza-mailaz, zein den erabaki estatistikoa.

.....

- 16.11. Animalien ikaskuntza-prozesuak aztertzeko, ikerketa bat diseinatu da botika pizgarriak (A) eta proteina-gabeziak (B) ikaskuntzan izan dezaketen eragina hobeto ezagutzeko. Laborategiko 36 arratoi ausaz hautatzen dira eta haien artetik zoriz aukeratutako 12ri proteina urriko dieta bat (a_1) ezartzen zaie astebetez; gainerakoek ohiko elikagaiak (a_2) hartzen jarraitu zuten. Halaber, talde horiek biak, zoriz banatu ziren hiru talde txikiagotan, eta, labirintoko lana hasi aurretik, bakoitzari botika pizgarri dosi jakina eman zitzaion. Hain zuzen ere, 0 mg (b_1), 100 mg (b_2) eta 250 mg (b_3) Gero, esan moduan, arratoi guztiek labirintoa ibili behar izan zuten. Arratoi bakoitzak labirintoa osatzeko zenbat saio egin behar izan zituen zenbatu zituen ikertzaileak. Talde esperimental bakoitzeko baturak honako hauek ziren:

		Botika		
		0 mg	100 mg	250 mg
Dieta	ohikoa	36	24	18
	murritzua	48	36	24

$$\sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 = 1120$$

Esangura-maila 0,05 ezarri zen. Hori horrela, zein da aldagai askeen eragina? Eta haien arteko elkarreragina?

7. Kapitulu

Liburu honen muina *estatistika inferentziala* bada ere, kapitulu honetan beharrezkoa iruditzen zaigu estatistika deskribatzaileari buruzko atal txiki bat idaztea. Atal honetan, gainera, dena ez dira formulak. Hasieran estatistikaren ibilbide historikoaren laburpen xumea, estatistikaren definizio bat eta notazioari buruzko jakinarazpenak idatzi ditugu. Beste aldetik, hipotesi-test eta bariantza-analisiari buruzko oinarritzko azalpenak ere ematen ditugu.

Ehun formula desberdin baino gehiago idatzi ditugu liburu honetan. Gehienak formula arruntak dira, oso ezagunak eta oso erabiliak. Bat edo besteren artean aukeratu behar izan dugunean, formula sinpleenen alde jo dugu. Eta, irizpide gisa, Gizarte Zientzietan gehien erabiltzen den softwareko formulak hautatu ditugu.

Formulak, errazenetatik konplexuenera sailkatu ditugu. Gure helburua izan da erabiltzaileak bilaketa erraza eta bizkorra egin ahal izatea. *Formulen katalogo* itxura eman nahi izan diogu, eragiketa estatistikoen arabera sailkatu, taula-formatuan eta formula guztiak zenbakitu ditugu, aurkibide orokorretik abiatuta, nahi dugun analisia eta formulak erraz eta bizkor aurkitu ahal izateko. Ildo beretik, liburuaren amaieran *taulen aurkibidea* txertatu dugu, taula bakoitza ahalik azkarren bilatu ahal izateko.

Berririo esan nahi dugu, material hau ikasleentzat sortua da, ikasgelan erabiltzeko, bai, baina baita ikasle bakoitzak bere eskuz oharra eta iradokizunak idatz ditzala. Horregatik, hain zuzen ere, formulako taulen azpian, han hemenka, **OHARRAK** izenburupeko koadroak tartekatzen ditugu.

7. Formulak

7.1. ESTATISTIKAZ

XVIII. mendean herrien eta nazioen erakundetze-prozesuak indar berezia hartu zuen: estatuak eratzen hasi ziren. Estatuaren antolaketari zein sistematizazioari buruzko jakintza-alorrari Estatistika esan zioten. Estatistika izena, hain zuzen ere, hortik dator. Dena den, biztanleria eta aberastasuna zenbatzeko ohitura aspaldikoa da, oso aspaldikoa. Jada, Egiptoko faraoien garaitik biztanleriaren zentsuen berri iritsi zaigu. Hori zen, besteak beste, agintarien lanabesa zergak eta soldaduak lortzeko. Edozein kasutan, Estatu Modernoak ezarri du Estatistikaren ohiko erabilera.

XVII. eta XVIII. mendeetako filosofiako pentsamoldeek, arrazionalismoak eta enpirismoak, batez ere, determinismo teologikoaren gainbehera ekarri zuten. Ingarumari horretan egin zituen estatistikak bere aurreneko urratsak. Ilustrazio garaian Isaac Newton (1643-1727) matematikariak munduaren ikuskera berriari ateak ireki zizkion. Ezaguera esperientziatik eta obserbaziotik sortzen da arrazoiak gidatutako prozesuetan, orain mundua zertan den azaltzeko erlijioak indarra galtzen du. Blaise Pascal (1623-1662) filosofo eta matematikari frantziarrak probabilitateen kalkulua erabiltzen du Jainkoaren existentzia justifikatzeko.

Jacques Bernoulli (1654-1705) matematikari frantziarrak bere *Ars Conjectandi* (1713) zorizko fenomenoek gainera arrazoibide berriari zabaltzen dizkio ateak. Bernoulliren teorema, *zenbaki handien legea* izenez ezagutuko zenak, fenomenoek errepikagarritasuna aztertzen du eta gertatzeko joerak, probabilitateak, zehazten ditu. Errepikapena, azken buruan, teoriaren euskarri enpiriko bihurtzen da. Bernoullik hasitako bideari Abraham De Moivre (1667-1754) lotu zitzaion probabilitateen kalkuluetan.

Thomas Bayes (1702-1761), matematikari britainiarra, eta Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matematikari frantziarra, probabilitateen teorian ekarpen handieneko egileak dauzkagu. XIX. mendetik aurrera, gaur arte, Estatistikaren garapena eta hedapena gero eta gehiago bihurtzen da.

Estatistari, edo Estatuaren nagusiei, informazio erabilgarria helarazteko modu berriak Alemaniako erreduari jarraitzen dio. Hermann Coring (1606-1681) izan zen bere *Staatwissenschaft* argitalpenean informazioa lantzeko modu berria zehaztu zuena. Haren eskolei jarraituz, Gottfried Achenwall (1719-1772) filosofo eta

estatistikari alemaniarrek *estatistika* terminoa proposatu zuen egoera edo *statusa* aztertzeo zientzia izendatzeko.

Hortik abiatuta, Estatistika ekimen jakinak aurrera eramateko diziplina gisa ulerturik, modu desberdinetan garatuko da Alemanian, Britainia Handian (*Aritmetika Politikoa*) edo Frantziako estatuko eredu administratiboan. Alemaniako ereduak jarduera akademikoetan izango du oinarri eta gizartearen ezagutza bilatuko du: biztanleria, usadioak, eskubideak, klima, aberastasuna eta beste edozein ezaugarri gizartea hobeto ezagutzeko ahalbidetzen duena. Nolanahi ere, Estatistikaren ikuspegi honek indarra galduko du eta *Aritmetika Politikoaren* ikuspegi gailenduko da.

Britainia Handiko Aritmetika Politikoak askoz ikuspegi praktikoagoa ezartzen du. Informazioa biltzeak modu antolatu eta sistematikotik harago, *proiektzioak* edo *estimazioak* egitea du helburu. Zeharkako kalkulu prozesuetatik, kasu partikularretatik, populazio osora hedatzea bilatzen da-eta. Eredu frantsesak, azkenik, britainiarren zeharkako kalkuluen teknikak bereganatzen baditu ere, alemanen ikuspegi osoa izateari eusten dio.

Gaur egun Estatistika ezinbesteko lanabes eta ikasgai bihurtu da. Estatistikaren sorreraz eta ibilbide laburraz hitz egin dugu, orain Estatistikaz zer ulertzen den saiaturako gara argitzen. Walter F. Willcox (1861-1964) estatistikari amerikarrak 1935. urtean Estatistikaren gaineko 135 definizio desberdin bildu zituen. Orduz geroztik definizio berriak sortu dira, Willcoxei berak berri bat proposatu zuen-eta. Kontua da ez dagoela Estatistikaren definizio bakarra.

Edozelan ere, definizioaren auzi horrek badu garrantzia. Are garrantzi handiagoa, jakina, Estatistika irakatsi nahi dugunean. Zer irakatsi nahi dugu? Hemen ez dugu definizio berririk proposatuko, nahiko anabasa sortu da-eta dagoeneko. Emandakoen artean, oster, bat hautatu dugu, gure ustez, Datu Analisia irakasteko egokiena. Definizio hori Gonzalo Sánchez-Crespo eta Vicente Manzano irakasleek proposatutakoa da eta *International Association for Statistical Education* erakundeak argitaratzen duen *Hipótesis Alternativa* agerkari digitaleko 2002ko 2. zenbakian agertu zen:

Unibertso aldakorreko eta izaera orokorreko fenomeno konplexuak aztertzen dituen zientzia da Estatistika. Estatistikak informazioa murrizteko ereduak erabiltzen ditu eta emaitzen baliotasunaren analisiak ere egiten ditu errealitatearen errepresentazio onargarria lortu ahal izateko.

Definizio horrek Estatistikari buruzko ideia orokor bat ematen digu, zabalegia, agian. Edozein kasutan, hautatu dugun definizio horren bitartez Estatistikaren alderdi aplikagarria nabarmendu nahi izan dugu. Errealitatea aztertzeo edo ikuskatzeko tresna gisa har dezakegu Estatistika; begien bistan ez dagoena antzemateko

lanabesa, hain zuzen ere. XXI. mendeko gizartea ulertzea zaila da berez, baina Estatistika barik gizarte konplexu hori erabat ulertezina izango litzateke dudarik gabe. Informazio eta komunikazioaren garaiotan Estatistikari esker, informazioaren ugaritasuna murriz dezakegu eta gure ulermenaren mailaraino ekarri. Antzemanekin diren milioika datu-bilduma oso ulerterraza egingo zaigun orrialde bakarreko taula xumera ekar ditzakegu. Hori da, hain zuzen ere, Estatistikaren eginkizuna: konplexutasuna formatu sinple eta ulergarrietara ekartzea.

Informazioa murriztea, bada, Estatistikaren eginkizunetariko bat da, beraz. Halere, informazioa murrizteak badakar ekarri informazio-galera maila jakin batean edo bestean. Hau da, informazioa murrizteak errorea dakar. Neurri batean, errorea saihestezina da konplexutasuna sinplifikatzean. Baina errorea bera neurtu eta kontrolatu daiteke. Arazo hori da, agian, Estatistikari halako ospe txarra ekarri diona. *Egiak, gezurrak eta estatistika* aipatu zuen behin Benjamin Disraelek (1804-1881), eta, orduz geroztik, Estatistika *gezurraren zientzia* dela askotan salatu izan da. Alabaina, bitxia da, Estatistika gezurtizat jotzen duten horiek berak izan ohi dira aurrenak Estatistikari heltzen diotenak, beren diskurtsoa oinarritu edo sendotzeko komeni zaienean.

Argi dezagun, bada, Estatistika ez dela gezurraren zientzia; Matematikaren atal bat besterik ez da, fenomeno ezezagun eta aldagarriak hobeto ezagutzeko balio duena. Bide batez, esan dezagun, Estatistika dela Gizarte eta Osasun Zientzien zutabe sendoenetako bat eta gure *ongizatearen* gizarteko zutarria. Estatistikaren oinarritzko ezaguera, bada, herritarren prestakuntzaren ezinbesteko osagaia da. Horregatik, hain justu, Lehen Hezkuntzatik unibertsitate-mailaraino jorratu beharreko jakintza-alor bihurtu zaigu Estatistika. Hori horrela dela ikusarazteko badira datuak eta estatistikak. Horretarako ere, Estatistika.

Estatistika zer den apur bat argitu dugu. Estatistikaren eginkizun ugarietako datuak dira, aldi berean, tresna eta ezinbesteko informazio-iturri. Datuak, oro har, errealtatearen alderdi jakineko errepresentazio sinbolikoak dira. Hertsia-hertsian ezin esan dezakegu datuek errealtatea ordezkatzan dutenik, baina modu egokian jaso eta ustiatuz gero, oso baliagarriak izan litezke eta erabil litezke errealtatean eragin dezaketen erabakiak hartzeko. Datu-analisien funtsa da datuak biltzea, sailkatzea, antolatzea eta ustiatzea. *Ustiatzea* diogunean, datuetatik, haietatik, ondorioak ateratzea esan nahi dugu, datu soilek diotena baino zerbait berriagoa esatea, alegia. Datuetan dagoen informazio berri hori ateratzeko, kalkulua erabiltzen da, ekuazioak eta formulak, hain zuzen ere.

Lortu nahi dugun informazioaren arabera, honelako edo halako prozedurak eta analisi estatistikoak erabiltzen ditugu. Askotan ez da erraza izaten jakitea zein den analisi estatistiko egokia gure helburu eta datuetarako. Izan ere, kalkuluprozedurak ondo ezagutzeak ez dakar, beste barik, datuen ustiapen zuzena. Horretarako, oso garrantzitsua da analisi-teknika egokiak hautatzea, aztertu nahi

dugun fenomenoaren arabera prozedura bat edo beste erabili behar da-eta. Datuen analisietarako sortu diren prozeduretako bakoitzak arazo jakin batzuei heltzen die. Teknologia estatistiko guztiak ez dira beti eta kasu guztietan erabilgarriak. Halere, prozedura horien sailkapen argia erabiltzeak asko lagun diezaguke tresneria estatistikoa hobeto ulertzen eraginkorki erabili ahal izateko.

Eginkizun hori erraztu nahian, datu-analisietan eta analisi estatistikoetan erabiltzen diren formularik ohikoenak sailkatu eta orri hauetara ekarri ditugu. Formula desberdin asko daude, eta sarri askotan estatistiko bera kalkulatzeko formula bi edo gehiago dauzkagu. Batzuetan, esaterako, formula bera modu desberdinetan idazten da. Hau da, batzuetan notazio desberdina erabiltzeak formula desberdinak direla pentsaraz diezaguke.

Matematikan ibiltzen ekandurik dagoenak ez du problemarik izaten notazio desberdinen arteko ñabardurak ikusteko eta ulertzeko. Ohiturarik ez duena, berriz, erraz nahastu daiteke notazioaren aldaera desberdinak erabiltzen direnean gauza bera adierazteko. Notazioaren ugaritasun hori Estatistikaren didaktikarako arazo bat da.

VII.1. taula. Hizki grekoak hurrenkeran.

Hurrenkera	xehe	LARRI	Izena
1	α	A	Alfa
2	β	B	Beta
3	γ	Γ	Gamma
4	δ	Δ	Delta
5	ε	E	Epsilon
6	ζ	Z	Zeta
7	η	H	Eta
8	θ	Θ	Teta
9	ι	I	Iota
10	κ	K	Kappa
11	λ	Λ	Lambda
12	μ	M	Mu
13	ν	N	Ni
14	ξ	Ξ	Xi
15	$\omicron$	O	Omikron
16	π	Π	Pi
17	ρ	P	Ro
18	σ	Σ	Sigma
19	τ	T	Tau
20	υ	Y	Ipsilon
21	ϕ	Φ	Fi
22	χ	X	Khi
23	ψ	Ψ	Psi
24	ω	Ω	Omega

Notazioari dagokionez, argitalpen honetan saiatu gara ahalik eta notaziorik estandarrena erabiltzen. Horrek ez du esan nahi, lehen esan dugunez, hemen agertzen diren formulak idazkera bakarrekoak direnik.

Estatistika-adierazleak idazteko erabiltzen den ikur bakoitzak izena du. Horrela, estatistikoa azaltzerakoan, batez bestekoa, bariantza edo korrelazioa delarik, bakoitzari dagokion notazioa (ikurra) azaltzen da. Notazioaz hitz egiterakoan, badira bestela erabiltzen diren ikurrak. Irakurgarritasuna errazte aldera edo, sarritan erabiltzen diren hizki grekoak taula batera bildu ditugu.

7.1.1. Estatistika deskribatzailea

Eragiketa estatistikoak bata bestearen gainean metatzen dira; elkarri kateatzen zaizkio, eragiketa sinpleenetatik hasi eta konplexueneraino, hurrenkeran. Analisi landuak eta konplexuak egin ahal izateko hasierako analisi xumeak egitea ezinbestekoa da, beraz. Horrela, datuak biltzea, ordenatzea eta antolatzea oinarritzko Estatistikako eginkizunak dira.

Estatistika deskribatzailearen lanabes behinenak datuak eta aldagaiak dira. Aldagai, oro har, edozein ezaugarri neurgarriri esaten diogu. Estatistika deskribatzailearen xedea da, hain zuzen ere, aldagaiak azaltzea eta laburbiltzea datu edo puntuazioen bitartez. Datu isolatuek adierazten digute banakako neurriak zeintzuk diren; datu horiei puntuazio zuzenak edo, beste barik, puntuazioak esaten diegu. Adibidez, *ikasleen notak* zenbakien zerrenda (*bektorea*) bat besterik ez da, aldagai bat, alegia; zenbakiak ikasle bakoitzak lortu duten emaitza akademikoa adierazten dute. Zenbakien zerrenda hori ordenatzen badugu, muturretan notarik txikiena, aurrena, eta handiena, atzena, ikus ditzakegu. Estatistika deskribatzailearen lana da puntuazio zuzenen bildumatik harago, eta bakoitzaren notatik harago, talde edo multzo-mailako adierazleetara igarotzea. Talde edo multzoko adierazle horiek, hain zuzen ere, *estatistikoak* dira.

Aldagai bakarreko estatistikak edo estatistika deskribatzaileak erabiltzen dituen estatistiko ohikoenak lau multzotara ekarri ditugu: *Posizio-adierazleak* edo kokapen-neurriak, *zentrorako joerako adierazleak*, *sakabanatze-adierazleak* eta *banaketa-adierazleak*.

Gure jardunerako multzo horietako estatistiko erabilien formula ezagunak hautatu ditugu. Jakina denez, formula bakoitza erabiltzeko begiratu behar dugu zer-nolakoa den datu-antolaketa. Testu honetan datu isolatuekin erabiltzeko formulak hobetsi ditugu.

Notazio arrunta, ohikoa, erabiltzea hobetsi dugu, eta taulen formatura ekarri ditugu formulak. Tauletan, lehenengo zutabean, estatistikoaren izena eta haren notazioa ipini ditugu; bigarren zutabean, parametroaren notazioa, eta, hirugarren zutabean, azkenik, formula ipini dugu.

7.1.1.1. Posizio-adierazleak

Edozein datu multzo biltzen dugunean, aurreneko eginkizuna da datuak **ordenatzea**. Datuak ordenatzea kontsidera dezakegu, berez, azterketa estatistikoa dela. Zenbakizko datuak direnean, ohiko hurrenkera, zenbakiak txikienetatik handienetara antolatzea izaten da. Datu asko direnean, berriz, datuak ordenatzea eginkizun nekeza eta astuna izaten da. Gaur egun, dena den, ordenagailu bidez ziztu bizian egiten da lan hori eta ez dugu arduratu behar datuak zein hurrenkerratan idazten ditugun gure datu-editorean. Behin datuak ordenaturik ikustean, berehala jabetzen gara datu batzuk errepikatzen direla, hurrenkerako beste batzuk falta direla, daturik txikiena zein den, handiena zein den, eta abar. Horrela, informazio berri esanguratsua lortzen dugu. Datuen mugarriak, baliorik txikiena eta handiena alegia, eta **maiztasuna**, datuen errepikapen-maila, ustiapen estatistikoetarako oinarriak dira.

Posizio-estatistikoek, bada, aldagaiaren dimentsioko leku jakinak adierazten dizkigute. Adierazle horiek oso erabilera arruntekoak dira. Adibidez, multzo bat erdibitzen dugunean, bi zati berdinetan bereizi nahi dugunean, erdiko puntuazio bereizgarri hori da, hain zuzen ere, posizio-adierazlea, mediana, alegia.

VII.2. taula. Posizio-adierazleak.

<i>ESTATISTIKOA</i>	<i>PARAMETROA</i>	<i>FORMULA</i>	<i>Zk.</i>
Proporzioa P	π	$p = \frac{Y_i}{n}$	VII.2.1
Pertzentila P		$P_p = L + \frac{p - (f_a)}{f}$	VII.2.2
Mediana M_e		$M_e = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) .c$	VII.2.3

7.1.1.2. Zentrorako joerako adierazleak

Datu multzoen erdiko gunea zein den adierazten diguten indizeak dira. Neurri batean, estatistiko hauek deskribatzen digute nolakoak diren taldeak, laginak edo datu multzoak. Estatistikoak, oro har, taldeko adierazleak dira, taldeen ezaugarriak, alegia. Populazio osoari dagozkionean, **parametroak** direla diogu.

Datu multzoaren grabitate-zentroa batez besteko aritmetikoak adierazten du. Batez besteko aritmetikoak badauzka ezaugarri interesgarri batzuk. Hasteko, datuak haien orokortasunean ondoen islatzen dituen adierazlea da. Datu guztien nola-halako grabitate-zentroa da. Horregatik, datuen eta batez besteko aritmetikoa-

ren arteko diferentzien (distantzien) batura zero da. Horrela, distantziak puntuazio bereziak dira, kasu bakoitza taldearekiko zein posiziotan dagoen azaltzen digute-nak.

Zentrorako joerako estatistikoek, hein batean behintzat, datuen egitura ira-dokitzen digute. Oro har, kalkulu estatistikoak hurrenkera jakineko kalkuluak dira, sinpleenetatik konplexuenetara. Hasierako eragiketa estatistikoak, beraz, ezinbes-tekoak dira.

VII.3. taula. Zentrorako joerako adierazleak.

ESTATISTIKOA	PARAMETROA	FORMULA	Zk.
Moda Mo		$Mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \cdot c$ $d_1 = f_i - f_{i-1}$ $d_2 = f_i - f_{i+1}$	VII.3.1
BATEZ BESTEKO ARITMETIKOA $\bar{Y}$	μ	$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \quad \text{Datu isolatuak}$ $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i Y_i}{n} \quad \text{Datu multzokatuak}$	VII.3.2
BATEZ BESTEKO HAZTATUA $\bar{Y}_p$	μ_p	$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$	VII.3.3
BATEZ BESTEKO GEOMETRIKOA $\bar{Y}_g$	μ_g	$\bar{Y}_g = \sqrt[n]{Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \cdot \dots \cdot Y_n}$	VII.3.4
BATEZ BESTEKO HARMONIKOA $\bar{Y}_h$	μ_h	$\bar{Y}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}}$	VII.3.5

7.1.1.3. Sakabanatze-adierazleak

Errealitatearen gaineko edozein datu multzok haren askotariko izaera islatzen du, maila batean edo bestean. Datuak, oro har, heterogeneoak dira, beraz. Datuen barreiadura edo heterogeneotasun hori aztertzeko, sakabanatze-adierazleak erabili ohi dira. Datuen hedadura ezagutzeak, datuak oso bilduak edo sakabanatuak diren jakiteak ahalbidetzen digu errealitatea hobeto ezagutzea. Halako estatistikoek oso informazio esanguratsua ekartzen digute eta oinarritzkoak dira analisi sakonagoak egin ahal izateko.

Sakabanatze-adierazleak kalkulatzeko, jakina, aurretik zentrorako joerako estatistikoak ezagutu behar ditugu.

VII.4. taula. *Sakabanatze-estatistiko batzuk.*

ESTATISTIKOA	PARAMETROA	FORMULA	Zk.
IBILTARTEA		$(Y_n - Y_1) + 1$	VII.4.1
ALDAKORTASUNA		$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$	VII.4.2
BATEZ BESTEKO DESBIDERAPENA		$\bar{Y}_p = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \bar{Y} }{n}$	VII.4.3
BARIANTZA S_y^2	σ_y^2	$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n}$	VII.4.4
KUASIBARIANTZA $\hat{S}_y^2$	σ_y^2	$\hat{S}_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}$	VII.4.5
DESBIDERAPEN ESTANDARRA $\hat{S}_y$	σ_y	$\hat{S}_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}}$	VII.4.6
KOBARIANTZA S_{xy}	σ_{xy}	$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$	VII.4.7
ALDAKUNTZA-koefizientea		$A_k = \frac{S_y}{\bar{Y}} \times 100$	VII.4.8

7.1.1.4. Banaketa-adierazleak

Datuen antolaketa moduari *banaketa* esaten diogu; kontzeptu horrek datuek zer-nolako egitura duten adierazten du, neurri batean. Banaketaren estatistikoek edo adierazleek, beraz, egituraren itxuraren berri ematen digute. Datu multzoak elkarren artean desberdinak ote diren jakin nahi badugu, ez da nahikoa jakitea zentrorako joerako neurri desberdinekoak direla edota sakabanatze-adierazle desberdinak dauzkatela, sakabanaketaren estatistikoak aztertzea ere beharrezkoa da.

VII.5. taula. Banaketaren estatistikoak eta puntuazio tipikoak.

ESTATISTIKOA	PARAMETROA	FORMULA	Zk.
ASIMETRIA-KOEFIZIENTEA A_s		$A_s = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\frac{(Y_i - \bar{Y})^3}{S_y^3} \right]}{n}$	VII.5.1
ZORROZTASUNA KURTOSIA C_r		$C_r = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\frac{(Y_i - \bar{Y})^4}{S_y^4} \right]}{n} - 3$	VII.5.2
PUNTUAZIO TIPIKOA Z		$Z = \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_y}$	VII.5.3

Aurreko taulan (VII.5. taula) puntuazio tipiko edo estandarren formula erantsi dugu. Berez ez dagokio banaketa-adierazle izaera baina egoki iritzi diogu atal honetan sartzeari. Puntuazio tipikoak Banaketa Normal Estandarizatuko desbiderapen-puntuazioak dira. Estandarrak direlako oso puntuazio klase erabilgarriak dira. Horren haritik aipatzekoak dira puntuazio diferentzialak, zeren puntuazio mota horiek batez bestekoarekiko distantziak adierazten baitituzte. Puntuazio berezi horien batez bestekoa zero da. Ikus dezagun:

$$d_i = Y_i - \bar{Y} \quad \bar{d}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n \bar{Y} \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n Y_i - n \cdot \bar{Y}$$

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n Y_i - n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

7.1.1.5. Aldagaien arteko erlazio-adierazleak

Estatistiko deskribatzaileen artean aldagai bakarreko adierazleak aztertu ditugu. Aldagai bi edo gehiago dauzkagunean, oster, adierazle berriak agertzen zaizkigu. Aldagai biko adierazleen artean ezagunenak eta erabilienak, berriz, aldagaien arteko erlazioa adierazten dutenak dira. Desberdinak izaten dira aldagaien izaeren arabera. Hona hemen arruntenak.

VII.6. taula. Korrelazio-koefizienteak.

ESTATISTIKOA	PARAMETROA	FORMULA	Zk.
KORRELAZIO-KOEFIGIZIENTEA (Pearson I) r_{xy}	ρ_{xy}	$r_{xy} = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$	VII.6.1
KORRELAZIO-KOEFIGIZIENTEA (Pearson II) r_{xy}	ρ_{xy}	$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$	VII.6.2
KORRELAZIO-KOEFIGIZIENTEA (Pearson II) r_{xy}	ρ_{xy}	$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{s_x} \right) \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{s_y} \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_x z_y}{n}$	VII.6.3
KORRELAZIO-KOEFIGIZIENTEA (Spearman) r_s		$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$ d_i i.ko behaketaren heinen arteko diferentzia da	VII.6.4
KORRELAZIO-KOEFIGIZIENTE PUNTU-BISERIALA		$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_q}{s_x} \sqrt{p \cdot q} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}}{s_x} \sqrt{\frac{p}{q}}$	VII.6.5
ϕ KORRELAZIO-KOEFIGIZIENTEA		$\phi = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$	VII.6.6

OHARRAK:

7.1.2. Erregresio linealaren estatistikoak

VII.7. taula. Erregresio linealaren estatistikoak.

ESTATISTIKOA	PARAMETROA	FORMULA	Zk.
ORDENATUAREKIKO EBAKI-PUNTUA A	α	$A = \bar{Y} - B\bar{X}$	VII.7.1
EKUAZIO LINEALA		$\hat{Y}_i = \alpha - \beta.X_i$	VII.7.2
ERREGRESIO-KOEFIZIENTEA B	β	$B = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$	VII.7.3
ERREGRESIO-KOEFIZIENTE ESTANDARIZATUA	β	$\beta = B \frac{S_x}{S_y}$	VII.7.4
ESTIMAZIOAREN ERRORE TIPIKOA S_{ee}	σ_{ee}	$S_{ee} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2}}$	VII.7.5
DETERMINAZIO-KOEFIZIENTEA r^2_{xy}	ρ^2_{xy}	$r^2_{xy} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$	VII.7.6
DETERMINAZIO-KOEFIZIENTE ZUZENDUA r_a^2	ρ^2_{xy}	$r_a^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y - \bar{Y})^2} \frac{n - p - 1}{n - 1}$	VII.7.7
		$\frac{S_{ee}^2}{S_y^2} = 1 - r^2_{xy}$	VII.7.8

OHARRAK:

7.2. ANALISIEN ESTATISTIKOAK

Analisi hitza oso adiera zabalekoa da, polisemikoa, alegia. *Harluxet* hiztegiak, esaterako, bost adiera ematen ditu. Lehenengo adieraren definizioa, kasurako, hauxe da: *osotasun baten zatien eta beraien arteko harremanen azterketa*. Definizio horrek balio diezaguke estatistikaren bitartez egiten diren datuen azterketa zertan den azaltzeko.

Aldagai bakarreko estatistika eta aldagai biko estatistika zertan den ikusi dugu. Aurrerapausoa egin eta test estatistikoak eta bestelako aldagai askotariko analisiak aztertu behar ditugu. Estatistika inferentzialaren eremuan sartzen gara. Inferentzia estatistikoa estatistika orokorraren alderdia da eta erabiltzen da populazio jakin baten ezaugarriak antzemateko —inferentziaren bitartez—, haren zati —lagin— baten azterketatik abiatutik.

Analisi estatistikoen formarik xumeena test estatistikoa da, edo, beste era batera esanda, hipotesi-testa. Estatistikoak, esan dugunez, lagin, talde, aldagai edo, oro har, edozein datu multzoren adierazleak dira. Hau da, errealitate osoaren zatien adierazleak; estatistikoek, adiera hertsian, ez baitute errealitatea bere osotasunean ordezkatzeko. Horregatik, osotasunaren zatien adierazleak direlako, aztertu behar dugu osotasun hartara zein neurritan hurbiltzen diren. Horretarako erabiltzen dugu, besteak beste, hipotesi-testak.

Argitalpen honen irizpideari jarraituz, test eta analisiari dagozkien formulak errazenetatik konplexuenetara antolatu ditugu. Kasu bakoitzean azalpen labur bat ematen dugu eta gero formulak ohiko tauletara ekartzen ditugu.

7.2.1. Hipotesi estatistikoak

Hipotesiak dira analisi estatistiko guztien abiaburua. Hipotesia, oro har, aztergai jakin bati buruz egiten den *baiezko* proposamena edota iradokizuna da, aztergaia ulertzeko edo azaltzeko. Hipotesia, kontrastagarria denean *zientifikoa* dela diogu. Hau da, ikertzaile batek egindako ikerketa urratsez urrats errepikagarria denean, behaketa edo esperimendua berreraiki (errepika) daitekeenean, hipotesiak zientifikoak direla esaten diogu.

Hipotesi estatistikoak, ostera, **zenbakietara ekarritako proposamen kontrastagarriak** direla diogu. Zientzialariak behaturiko gertakizunei azalpena emateko, hipotesiak sortu behar ditu, eta hipotesiak fenomenoaren probabilitateen arabera eraikitzen dira. Azken buru, hipotesia, hipotesi estatistikoa barne, gertakizunen azalpen posibletariko bat edo azalpen multzo bat besterik ez da.

Estatistikak, bere aldetik, zientzialariari eskaintzen dizkio bitartekoak, datu-analisirako teknikak, eta kasu honetan, bereziki, hipotesi-testak. Edonola ere, estatistikaren bitartez aurkitutakoa ez da inoiz izango *eragile/eragindako* ereduaren moduko ondorioa. Batzuetan, aztertzen dugunaren oinarri-oinarrian, eredu hori antzeman badaiteke ere, estatistika ez da hori egiaztatzeko bide zuzena; zehazkiago esanda, aldagaien arteko erlazio estatistikoa —*kontingentea*— ez da, berez, *kausazko erlazioa*.

Esandakoa erraz ulertzeko adibide bat ekarriko dugu: *Euskara zenbat eta gehiago jakin orduan eta gehiago erabiliko da*. Hori izan da, euskararen erabilera aztertu denean, ikerketatik eratorritako ondorio nagusia. Alabaina, euskararen ezaguera, euskaraz jakitea, erabilera gertatzeko **ezinbesteko aurretikoa** da. Horraino, euskararen jakite-mailaren eta erabileraren arteko erlazioa erabat zehatza eta ezaguna da; jakin barik ez dago erabiltzerik! Ezagutu nahi duguna da, ostera, euskaraz **dakitenen artean**, gehiago ala gutxiago jakiteak euskaraz hitz egitearen aldakortasuna azaltzen duen.

Teknika estatistikoak, oro har, ez dira beti izaten egokiak azterketa guztietarako. Horregatik, hain zuzen ere, estatistikak agerian uzten dituen erlazioak adierazgarriak izan daitezen, teknika estatistikoak zuzen eta modu egokian erabili behar dira. Gogoan izan behar dugu, azterketa estatistiko guztien oinarrian probabilitatea eta probabilitate legeak daudela. Analisi estatistikoen ondorioak probabilitateen mendeak dira, beraz. Hau da, probabilitate handiz, txikiz edo oso txikiz, beti egon daitezkeela beste lagin edo beste datu batzuk oso bestelako ondorioetara eramán gaitzaketenak. Horregatik esaten dugu, hain zuzen ere, erabaki estatistiko oro probabilitatezko erabakia dela.

7.2.2. Hipotesi nulua eta ordezkio hipotesia

Lehen esan dugu hipotesi estatistikoak **zenbakietara ekarritako proposamen kontrastagarriak** direla. Gehiago argitu behar dugu baieztapen hori. Hipotesi estatistikoen abiapuntua **estatistikoa** da, edozein estatistiko. Eta edozein estatistiko izendatzeko θ alfabeto grekoko ikurra erabiltzen da. Demagun, bada, edozein estatistiko: batez besteko, moda, mediana, bariantza, korrelazio-koefiziente eta abar; demagun, orobat, berari buruz proposamen bat egiten dugula, balio bat egozten diogula. Hori da, hain zuzen ere, hipotesi estatistikoa. Zehatz-mehatz, hipotesi estatistikoak bi dira: **hipotesi nulua** — H_0 — eta **ordezkio hipotesia** — H_1 —.

HIPOTESI NULUA (H_0): funtsean, onartzen ala ukatzen dugun hipotesia da, abiapuntuko proposamena. Test estatistikoak, normalean, kontserbadorak dira eta hipotesi nuluak ohiko balioak proposatzen ditu. Hipotesi nulia behin zehaztu eta gero estimagailuaren laginketa-banaketa H_0 -ren arabera eratzen da eta, ondoren, testa gauzatzen da.

ORDEZKO HIPOTESIA (H_1): hipotesi nuluari kontrajartzen zaion eta aldi berean beraren osagarria den hipotesi estatistikoa da. Literalki, hipotesi nulia ukatzen dugunean, bere ordeztzat hartzen dugun hipotesia da.

Hipotesi bi dira, beraz. Hipotesi nulia zoriaren arabera hipotesiatzat har dezakegu. Bera onartzen dugunean, estatistikoa zoriaren mendekoa dela onartzen ari gara. Alegia, ez dagoela arrazoi ezagunik estatistikoaren balio hori azaltzeko. Hipotesi nulia ukatzen dugunean, osteraz, zoriaren arabera ezin azal daitekeela esaten ari gara, edo, beste era batera esanda, emaitza zorizko gertaeretatik urruntzen dela.

Bata ala bestea; hipotesi nulia onartu eta ordeztako hipotesia baztertu ala hipotesi nulia ukatu eta ordeztako hipotesia aintzat hartu. Horietatik kanpo ez dago beste erabaki estatistiko posiblerik. Hori horrela, honela idatz dezakegu:

$$p(H_0) + p(H_1) = 1.$$

7.3. HIPOTESI-TEST PARAMETRIKOEN ESTATISTIKOAK

Hipotesi-testak, funtsean, erabaki estatistikoak hartzeko lanabesak dira. Oinarri-oinarrian egiten den lana da laginetan behatutako estatistikoak elkarren artean edo proposatutako balioekin erkatzea, besterik ez da. Zein estatistiko den eta zenbat lagin erabiltzen dugun, horrek formula-katalogo zabala erabiltzea dakar.

Hipotesi-test parametrikokoak erabiltzeko, bestalde, aurrekari parametrikokoak betetzen direla suposatzen dugu.

7.3.1. Lagin bakarra

Zorizko lagin bakarra erabiltzen dugunean, formulak aurkezteko egitura bertsua izango da kasu gehienetan: estatistikoa adierazi, hipotesi estatistikoak aurkeztu eta formula erakutsi.

7.3.1.1. Batez besteko aritmetiko bakarra, populazioaren bariantza ezaguna

Hipotesi
estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : $\mu_0 = a$

Ordezko hipotesia: H_1 : $\begin{cases} \mu_1 < a & \text{ezkerraldeko testa} \\ \mu_1 \neq a & \text{aldebiko testa} \\ \mu_1 > a & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.8. taula. Batez besteko aritmetiko bakarraren inguruko testa (bariantza ezaguna).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$	VII.8.1
Errore tipikoa	σ_μ	$\sigma_\mu = \sqrt{\sigma^2/n}$	VII.8.2
Laginareen tamaina	n	$n = \sigma^2 \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{(\mu_0 + \mu_1)^2}$	VII.8.3

OHARRAK:

7.3.1.2. Batez besteko aritmetiko bakarra, populazioaren bariantza ezezaguna

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0:$ $\mu_0 = a$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $\begin{cases} \mu_1 < a & \text{ezkerraldeko testa} \\ \mu_1 \neq a & \text{aldebiko testa} \\ \mu_1 > a & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.9. taula. Batez besteko aritmetiko bakarraren inguruko testa (bariantza ezezaguna).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	t	$t = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$	VII.9.1
Errore tipikoa	σ_μ	$\sigma_\mu = \sqrt{\hat{S}_y^2/n}$	VII.9.2

OHARRAK:

7.3.1.3. Proportzio bakarra

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0:$ $\pi_0 = a$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $\begin{cases} \pi_1 < a & \text{ezkerraldeko testa} \\ \pi_1 \neq a & \text{aldebiko testa} \\ \pi_1 > a & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.10. taula. *Proportzio bakarraren inguruko testa.*

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{P - \pi_0}{\sigma_\pi}$	VII.10.1
Errore tipikoa	σ_π	$\sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}$	VII.10.2

OHARRAK:

7.3.1.4. Bariantza bakarra

**Hipotesi
estatistikoak**

Hipotesi nulua: $H_0: \sigma_0 = a$

Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} \sigma_1 < a & \text{ezkerraldeko testa} \\ \sigma_1 \neq a & \text{aldebiko testa} \\ \sigma_1 > a & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.11. taula. *Bariantza bakarraren inguruko testa.*

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa (I)	χ^2_{n-1}	$\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2}$	VII.11.1
Testerako estatistikoa (II)	χ^2_{n-1}	$\chi^2 = \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}$	VII.11.2
Askatasun-graduak	ν	$\nu = n - 1$	VII.11.3

OHARRAK:

7.3.2. Bi lagin independente (zorizkoak)

Lagin independenteak, oro har, elkarren artean erlazio ezagunik ez daukaten laginak dira. Edozein zorizko lagin bi, printzipioz, independenteak dira.

7.3.2.1. Batez besteko aritmetiko bi, populazioaren bariantza ezagunak

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \mu_1 - \mu_2 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.12. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (bariantza ezezagunak).

<i>ESTATISTIKOA</i>	<i>NOTAZIOA</i>	<i>FORMULA</i>	<i>Zk.</i>
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\mu_1 - \mu_2}}$	VII.12.1
Errore tipikoa	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2}$	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$	VII.12.2

OHARRAK:

7.3.2.2. Batez besteko aritmetiko bi, populazioaren bariantza ezezagunak

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \mu_1 - \mu_2 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.13. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (bariantza ezezagunak).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa (I)	T	$T = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\mu_1 - \mu_2}}$	VII.13.1
Errore tipikoa	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2}$	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = \sqrt{\left(\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right) \left(\frac{1}{n_1}\right)}$	VII.13.2
Askatasun-graduak	ν	$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 + 1}} - 2$	VII.13.3
Testerako estatistikoa (II)	T	$T = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\mu_1 - \mu_2}}$	VII.13.4
Errore tipikoa	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2}$	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = \sqrt{\left(S_{n_1-1}^2/n_1\right) + \left(S_{n_2-1}^2/n_2\right)}$	VII.13.5

OHARRAK:

7.3.2.3. Proportzio bi

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : $\pi_1 - \pi_2 = 0$

Ordezko hipotesia: H_1 : $\begin{cases} \pi_1 - \pi_2 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \pi_1 - \pi_2 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \pi_1 - \pi_2 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.14. taula. Proportzio biren inguruko testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa (I)	Z	$Z = \frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sigma_{\pi_1 - \pi_2}}$	VII.14.1
Errore tipikoa	$\sigma_{\pi_1 - \pi_2}$	$\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = \sqrt{\left(\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1}\right) + \left(\frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}\right)}$	VII.14.2
Testerako estatistikoa (II)	Z	$Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\left(\frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}\right) \left(1 - \frac{n_1 P_1 + n_2}{n_1 + n_2}\right) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	VII.14.3
Errore tipikoa	$\sigma_{\pi_1 - \pi_2}$	$\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = \sqrt{\left(\frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}\right) \left(1 - \frac{n_1 P_1 + n_2}{n_1 + n_2}\right) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$	VII.14.4

OHARRAK:

7.3.2.4. Bariantza bi. Homozedastizitate-testa

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 :

$\pi_1 - \pi_2 = 0$

Ordezko hipotesia: H_1 :

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 < 0 \text{ ezkerraldeko testa} \\ \sigma_1 - \sigma_2 \neq 0 \text{ aldeko testa} \\ \sigma_1 - \sigma_2 > 0 \text{ eskuinaldeko testa} \end{array} \right.$

VII.15. taula. Homozedastizitate-testa (Leveneren testa).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa (Fisher)	F	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	VII.15.1
Askatasun-graduak	ν	$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}$	VII.15.2
Testerako estatistikoa (Levene, batez bestekoarekiko)	$Z_{ij} = \left Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} \right $	$W = \frac{(N - k)}{(k - 1)} \frac{\sum_{i=1}^k N_i (\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2}$	VII.15.3
Testerako estatistikoa (Levene, mediana)	$Z_{ij} = \left Y_{ij} - \tilde{Y}_{i.} \right $		VII.15.4
Testerako estatistikoa (Levene, % 10koa)	$Z_{ij} = \left Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}' \right $		VII.15.5

Leveneren testa hiru modutan egin daiteke: taldeen batez besteko aritmetikoe-kiko distantzien arabera, taldeen medianarekiko distantzien arabera, eta taldeen erdiko % 10eko batez besteko aritmetikoekiko distantzien arabera. Horiek dira, hain zuzen, taulan agertu ditugun Z_{ij} balio desberdinak; erabiltzaileak kasuan ka-suko prozedurarik egokiena hautatu beharko du analisia egiteko. Leveneren testa, azkenik, bi lagin edo lagin gehiagorekin erabil daiteke.

OHARRAK:

7.3.3. Erlazionaturiko bi lagin (edo aldagai)

Kasu honetan, laginen arteko erlazioa, edo aldagaien arteko erlazioa, esaten dugunean, erlazio hori ezaguna dela esaten ari gara.

7.3.3.1. Batez besteko aritmetiko bi, erlazionaturiko laginak

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \mu_1 - \mu_2 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.16. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (erlazionaturiko laginak).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\mu_1 - \mu_2}}$	VII.16.1
Errore tipikoa	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2}$	$\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r_{12}\sigma_1\sigma_2}$	VII.16.2

OHARRAK:

7.3.3.2. Batez besteko aritmetiko bi, binakaturiko puntuazioak

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: \mu_d = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} \mu_d < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \mu_d \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \mu_d > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.17. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (binakaturiko puntuazioak).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{\bar{D} - \mu_d}{\sigma_d}$	VII.17.1
Errore tipikoa	σ_d	$\sigma_d = \sqrt{S_d^2/n}$	VII.17.2

OHARRAK:

7.3.3.3. Korrelazio-koefiziente bat (Pearson)

Korrelazio-koefiziente bakarra, lagin independenteak:

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 :

$\rho_0 = 0$

Ordezko hipotesia: H_1 :

$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 - \rho_2 < 0 \text{ ezkerraldeko testa} \\ \rho_1 - \rho_2 \neq 0 \text{ aldebiko testa} \\ \rho_1 - \rho_2 > 0 \text{ eskuinaldeko testa} \end{array} \right.$

VII.18. taula. Korrelazio-koefiziente bakarraren inguruko testa (Pearson).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	t	$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$	VII.18.1
Errore tipikoa	σ_ρ	$\sigma_\rho = \sqrt{1-r_{xy}^2}$	VII.18.2
Askatasun-graduak	ν	$\nu = n - 2$	VII.18.3

OHARRAK:

7.3.3.4. Korrelazio-koefiziente bi (Pearson I)

Korrelazio bi, lagin independenteak.

Hipotesi
estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0:$ $\rho_1 - \rho_2 = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $\begin{cases} \rho_1 - \rho_2 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \rho_1 - \rho_2 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \rho_1 - \rho_2 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.19. taula. Korrelazio-koefiziente biren inguruko testa, lagin independenteak.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{Z_{r_1} - Z_{r_2}}{\sigma_{\rho_1 - \rho_2}}$	VII.19.1
Errore tipikoa (I)	$\sigma_{\rho_1 - \rho_2}$	$\sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$	VII.19.2
Errore tipikoa (II)	$\sigma_{\rho_1 - \rho_2}$	$\sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \sqrt{\frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)}}$	VII.19.3
Fisherren eraldaketa (z)	z	$Z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r}{1-r}$	VII.19.4

7.3.3.5. Korrelazio-koefiziente bi (Pearson II)

Korrelazio bi, erlazionaturiko laginak.

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : $\rho_1 - \rho_2 = 0$

Ordezko hipotesia: H_1 : $\begin{cases} \rho_1 - \rho_2 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \rho_1 - \rho_2 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \rho_1 - \rho_2 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.20. taula. Korrelazio-koefiziente biren inguruko testa, erlazionaturiko laginak.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	t	$t = \frac{(r_{xy} - r_{xz}) \sqrt{(n-3)(1+r_{xy})}}{\sigma_{\rho_1-\rho_2}}$	VII.20.1
Errore tipikoa	$\sigma_{\rho_1-\rho_2}$	$\sigma_{\rho_1-\rho_2} = \sqrt{2(1-r_{xy}^2-r_{xz}^2-r_{yz}^2+2r_{xy}r_{xz}r_{yz})}$	VII.20.2
Askatasun-graduak	ν	$\nu = (n_1 - 2) + (n_2 - 2)$	VII.20.3

7.3.4. Erregresio linealaren estatistikoek gainezko testak

7.3.4.1. Konstantearen inguruko hipotesi-testa.

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : $\alpha_0 = 0$

Ordezko hipotesia: H_1 : $\begin{cases} \alpha_1 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \alpha_1 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \alpha_1 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.21. taula. Erregresio linealeko konstantearen inguruko testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa, bariantza ezagunak	Z	$Z = \frac{a - \alpha_0}{\sigma} \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}$	VII.21.1
Testerako estatistikoa, bariantza ezezagunak	t	$T = \frac{a - \alpha_0}{\sqrt{\frac{s_e^2 \sum_{i=1}^n Y_i^2}{n \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}}$	VII.21.2
Estimazio-errorea		$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - a - bX_i)^2}{n - 2}$	VII.21.3

OHARRAK:

7.3.4.2. Zuzenaren malda edo pendizaren inguruko hipotesi-testa.

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : $\beta_0 = 0$

Ordezko hipotesia: H_1 : $\begin{cases} \beta_1 < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ \beta_1 \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ \beta_1 > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.22. taula. Erregresio linealeko erregresio-koefizientearen inguruko testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	t	$T = \frac{b - \beta_0}{\sqrt{s_e^2 / \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$	VII.22.1
Askatasun-graduak	ν	$\nu = n - 2$	VII.22.2

OHARRAK:

7.4. HIPOTESI-TEST EZ-PARAMETRIKOAK

Bi talde, edo aldagai, populazio normaletatik eratorriak direla, independenteak direla eta bariantzak baliokideak dituztela (homozedastizitatea) ezagutzea zerbait jakitea da. Populazioaren izaera ezagutu dugunean eta laginketa-prozedura jakina hautatzen dugunean, hurrengo urratsa diseinu estatistikoa zehaztea da, dagokion eredu estatistikoa zehaztu behar dugu. Edozein test estatistikok baditu eduki eredu eta neurketa-izaera jakinak; horiek bete ezean, probatik eratorritako ondorioak zalantzarik direla jo behar dugu. Hori horrela, test estatistiko bakoitzari dagozkion aurretikoak betetzen direla jo behar dugu. Gehienetan betetzen direla *suposatzen* badugu ere, behin baino gehiagotan, esandako aurretiko horien hutsuneetan ikerketaren adierazgarritasun eza egon daiteke.

Oro har, aurrekari parametrikok behar ez dituen testa, test *sendoa* dela esan ohi dugu. *Test indartsuenak*, tamalez, ondoriorik emankorrenak ekartzen dituztenak, aurretiko ugari behar dituzte. Indartsuenak test parametrikok dira. Lehen aztertu ditugun t edo F testek neurketa eta banaketei buruzko aurretiko asko behar dute. Hona hemen, adibidez, t motako testari dagozkion aurretikoak:

1. Behaketak independenteak izatea.
2. Behaketak banaketa normaleko populazioetatik eratorriak izatea.
3. Populazio horien bariantzek baliokideak behar dute izan (*homozedastizitatea*).
4. Aldagaiak, gutxienik, tarte-mailako neurketa-eskalan neurtuak izan behar dute.
5. Esandako populazio normal eta homozedastikoetan eraginak (efektuak) gehigarriak izan behar dira¹⁰.

Nolanahi ere, aurretikoak benetakoak diren ala ez diren zalantzan jartzeko motibo sendorik ez badugu, test parametrikok egokienak dira. Test parametrikok H_0 -a ukatzerakoan indartsuagoak dira-eta.

Berriz, inferentzia-alorrean, erabil ditzakegun teknikak ez-parametrikok izan daitezke baldin eta:

- a. Aldagaien neurketa izenezkoa edo ordena-mailakoa bada.
- b. Tarte edo proportzio-eskalak izanagatik populazioaren parametroak estimatu nahi ez baditugu.
- c. Populazioaren banaketari buruzko informazioa zalantzarik bada, hots, aldeztu aurretiko suposizioak oso orokorrak badira, hala nola banaketa simetrikoa, jarraikia...

10. Honako *aurretikoa* F motako testari dagokio.

Teknika ez-parametrikokoak erabili beharko genituzke erabilitako neurketa-maila ahula denean. Hau da, gure aldagaiari dagokion neurketa-escala izenezko edo ordena-mailako eskala denean. Horrez gain, badira bi alderdi bereziki zaindu beharrekoak:

- Laginketaren prozedurari dagokiona.
- Laginaren populazioari buruzko aurretikoak.

Laginketaren prozedurari dagokionez, bilatu behar dugu *beti* zorizko lagina izatea, bai teknika parametrikoki zein teknika ez-parametrikoki kasuetarako. Test guztiak erabiltzeko, mota bateko edo besteko zorizko laginak izatea bilatu behar dugu, beraz.

Populazioaren izaerari buruzko aurretikoei dagokienez, bestalde, teknika ez-parametrikoki aurretiko urri erabiltzen dute, ia beti betetzen diren horietakoak. Horrek ematen die sendotasuna test ez-parametrikoki. Teknika parametrikoki kasuan, oster, populazioaren inguruko aurretikoak oso zorrotzak dira. Hau da, test parametrikoki erabili aurretik ziurtatu behar dugu populazioaren ezaugarri batzuk betetzen direla.

Posible denean, teknika parametrikoki erabiltzeko gomendatzen da; halere, parametrikoki aldetik ez-parametrikoki erabiltzeko zenbait abantaila dauzkagu:

1. Sinpletasun matematikoa.
2. Testaren erraztasuna eta arintasuna erabiltzeko.
3. Eragingarritasun estatistikoa.
4. Adierazgarritasun-maila.
5. Auzi *errealak* ebazteko erabilgarritasuna.
6. Lagin txikiekin lan egiteko egokitasuna.
7. Test ez-parametrikoki sendotasuna.

Test ez-parametrikoki aztergaien ugaritasunak proba eta formulen aniztasuna dakar. Test ez-parametrikoki asko dira eta bakoitzak bere berezitasunak eta ñabardurak dauzka. Bertan arruntenak eta erabilienak aurkeztu ditugu, lagin kopuruaren eta estatistikoki arabera sailkatuta.

7.4.1. Lagin bakarra

Datu multzo bakarra daukagunean, datuak zorizkoak izan ala ez.

7.4.1.1. Doikuntza-testak

Doikuntza-testak, oro har, datuen banaketari buruzko proba ez-parametrikoki dira.

7.4.1.1.1. Pearsonen χ^2 testa

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: F_0(x) = F(x)$

Ordezko hipotesia: $H_1: F_0(x) \neq F(x)$

VII.23. taula. *Khi karratuaren testa.*

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	χ^2	$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j}$	VII.23.1

OHARRAK:

7.4.1.1.2. Kolmogorov-Smirnov

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: F_0(x) = F(x)$

Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} F_0(x) < F(x) & \text{ezkerraldeko testa} \\ F_0(x) \neq F(x) & \text{aldebiko testa} \\ F_0(x) > F(x) & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.24. taula. *Kolmogorov-Smirnoven testa.*

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	D	$D = \max F_0(x) - S(x) $	VII.24.1

7.4.1.1.3. Lilliefors

Hipotesi estatistikoak	Hipotesi nulua:	$H_0:$	$F(x)$ banaketa normala da
	Ordezko hipotesia:	$H_1:$	$F(x)$ ez da banaketa normala

VII.25. taula. Lillieforsen testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	L	$L = \max F(x) - S(x) $	VII.25.1

OHARRAK:

7.1.4.2. Posizio-adierazleen gaineo testak

7.1.4.2.1. Zeinuen testa

Hipotesi estatistikoak	Hipotesi nulua:	$H_0:$	$p(+)-p(-)=0,5$
	Ordezko hipotesia:	$H_1:$	$\begin{cases} p(x)-p(-)<0,5 & \text{ezkerraldeko testa} \\ p(x)-p(-)\neq 0,5 & \text{aldebiko testa} \\ p(x)-p(-)>0,5 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.26. taula. Zeinuen testa.

<i>ESTATISTIKOA</i>	<i>NOTAZIOA</i>	<i>FORMULA</i>	<i>Zk.</i>
Testerako estatistikoa	z	$Z = \frac{(T + 0,5) - n/2}{\sqrt{n/4}}$	VII.26.1
T : T_1 eta T_2 balioen arteko txikerrena		T_1 : zeinu positiboen (+) kopurua T_2 : zeinu negatiboen (-) kopurua	

7.4.1.2.2. Medianaren testa

Hipotesi nulua: H_0 : $M_0 = M$ edo $p(+) - p(-) = 0,5$

**Hipotesi
estatistikoak**

Ordezko hipotesia: H_1 :

$$\begin{cases} p(x) - p(-) < 0,5 & \text{ezkerraldeko testa} \\ p(x) - p(-) \neq 0,5 & \text{aldebiko testa} \\ p(x) - p(-) > 0,5 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$$

VII.27. taula. Medianaren testa.

<i>ESTATISTIKOA</i>	<i>NOTAZIOA</i>	<i>FORMULA</i>	<i>Zk.</i>
Testerako estatistikoa	z	$Z = \frac{(T + 0,5) - n/2}{\sqrt{n/4}}$	VII.27.1
T : T_1 eta T_2 balioen arteko txikerrena		T_1 : zeinu positiboen (+) kopurua T_2 : zeinu negatiboen (-) kopurua	

OHARRAK:

7.4.1.2.3. Koantilen testa

1. Koantila (p_0) x_0 balioarekin bat datorrenean:

Hipotesi nulua: $H_0:$ $P(X \leq x_0) = p_0$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $\begin{cases} P(X \leq x_0) < p_0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ P(X \leq x_0) > p_0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

Hipotesi
estatistikoak

2. Koantila (p_0) x_0 balioa edo handiagoa denean:

Hipotesi nulua: $H_0:$ $P(X \leq x_0) \leq p_0$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $P(X \leq x_0) > p_0$

3. Koantila (p_0) x_0 balioa edo handiagoa denean:

Hipotesi nulua: $H_0:$ $P(X \leq x_0) \geq p_0$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $P(X \leq x_0) < p_0$

VII.28. taula: Koantilen testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	z	$Z = \frac{(T + 0,5) - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$	VII.28.1

OHARRAK:

7.4.1.2.4. Wilcoxonen testa (I)

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0:$ $M = M_0$ edo $E(X) = \mu_0$
Ordezko hipotesia: $H_1:$ $\begin{cases} E(X) < \mu_0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ E(X) \neq \mu_0 & \text{aldebiko testa} \\ E(X) > \mu_0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.29. taula. Wilcoxonen testa (I).

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	z	$Z = \frac{(W + 0,5) - E(W)}{\sqrt{\text{var}(W)}}$	VII.29.1
W : S_1 eta S_2 balioen arteko txikerrena		$S_1 = \sum O_i^+$ $S_2 = \sum O_i^-$	

OHARRAK:

7.4.1.3. Ausazkotasun-testak

7.4.1.3.1. Bolada-testa

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : Lagina zorizkoa da
Ordezko hipotesia: H_1 : Lagina ez da zorizkoa

VII.30. taula. Bolada-testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	Z	$Z = \frac{(T \pm 0,5) - E(T)}{\sqrt{\text{var}(T)}}$	VII.30.1
		$E(T) = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$	VII.30.2
		$\text{var}(T) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$	VII.30.3

OHARRAK:

7.4.2. Erlazionaturiko bi lagin, binakaturiko puntuazioak

Binakaturiko puntuazioak esatean subjektu edo kasu bertsuek bina puntuazio (bi aldagai direnean) dauzkatela adierazi nahi dugu.

7.4.2.1. Wilcoxonen testa (II)

Neurketa-eskala proportziozkoa edo tarte-mailakoa da.

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 : $M_D = 0$ edo $E(X) = E(Y)$
Ordezko hipotesia: H_1 :
 $\begin{cases} E(X) < E(Y) & \text{ezkerraldeko testa} \\ E(X) \neq E(Y) & \text{aldebiko testa} \\ E(X) > E(Y) & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.31. taula. Wilcoxonen testa (II)

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	z	$Z = \frac{(W + 0,5) - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$	VII.31.1
W : S_1 eta S_2 balioen arteko txikerrena		$S_1 = \sum O_i^+$ $S_2 = \sum O_i^-$	

OHARRAK:

7.4.2.2. Zeinuen testa

Neurketa-eskala ordenazkoa edo hurrenkera izaerakoa denean.

Hipotesi
estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0:$ $P(+)-P(-)=0$

Ordezko hipotesia: $H_1:$ $\begin{cases} P(+)-P(-)<0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ P(+)-P(-)\neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ P(+)-P(-)>0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.32. taula. Zeinuen testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	z	$Z=\frac{(T+0,5)-n/2}{\sqrt{n/4}}$	VII.32.1
T : T_1 eta T_2 balioen arteko txikerrena		T_1 : zeinu positiboen (+) kopurua T_2 : zeinu negatiboen (-) kopurua	

OHARRAK:

7.4.2.3. McNemarren testa

Neurketa-eskala izenezkoa da.

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0: P(A) - P(D) = 0$
Ordezko hipotesia: $H_1: \begin{cases} P(A) - P(D) < 0 & \text{ezkerraldeko testa} \\ P(A) - P(D) \neq 0 & \text{aldebiko testa} \\ P(A) - P(D) > 0 & \text{eskuinaldeko testa} \end{cases}$

VII.33. taula. McNemarren testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	χ^2	$\chi^2 = \frac{(A - D + 1)^2}{A + D}$	VII.33.1

OHARRAK:

7.4.3. Bi lakin independente

Laginak, txikiak izanagatik, elkarren artean erlaziorik ez daukatenean.

7.4.3.1. Mann-Whitneyren testa

Neurketa-eskala proportziozkoa edo tarte-mailakoa da.

Hipotesi estatistikoak

Hipotesi nulua: H_0 :

$E(X) = E(Y)$

Ordezko hipotesia: H_1 :

$$\begin{cases} E(X) < E(Y) \text{ ezkerraldeko testa} \\ E(X) \neq E(Y) \text{ aldebiko testa} \\ E(X) > E(Y) \text{ eskuinaldeko testa} \end{cases}$$

VII.34. taula. Mann-Whitneyren testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	z	$Z = \frac{(T + 0,5) - E(T)}{\sqrt{\text{var}(T)}}$	VII.34.1
		$\text{var}(T) = \frac{n_2(n_1 + n_2 + 1)(n_1)}{12}$	VII.34.2
		$\begin{aligned} S_1 &= \sum O_{ix} \\ S_2 &= \sum O_{iy} \end{aligned}$	VII.34.3
T : T_1 eta T_2 balioen arteko txikerrena		$\begin{aligned} T_1 &= S_1 - \left[n_1(n_1 + 1)/2 \right] \\ T_2 &= S_2 - \left[n_2(n_2 + 1)/2 \right] \end{aligned}$	VII.34.4

OHARRAK:

7.4.3.2. Pearsonen χ^2 testa

Hipotesi
estatistikoak

Hipotesi nulua: $H_0:$ $F_1(x) - F_2(x) = 0$
Ordezko hipotesia: $H_1:$ $F_1(x) - F_1(x) \neq 0$

VII.35. taula. χ^2 testa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	χ^2	$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^k \frac{(B_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$	VII.35.1
Askatasun-graduak		$2k - 1$	

OHARRAK:

7.4.4. *k* lagin independente

Bi lagin baino gehiago direnean eta elkarren artean erlazio ezagunik ez dutenean, txikiak badira ere.

7.4.4.1. *Kruskal-Wallisen testa*

Neurketa-eskala proportziozkoa edo tarte-mailakoa da.

VII.36. taula. *Kruskal-Wallisen testa.*

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Testerako estatistikoa	χ^2	$SS_{bk} = \sum_{j=1}^k \left[n_k \left(\bar{Y}_k - \bar{Y} \right)^2 \right]$	VII.36.1
		$SS_{bk} = \left(\sum_{j=1}^k \frac{T_k^2}{n_k} \right) - \frac{T^2}{N}$	VII.36.2
		$H = \frac{12}{N(N+1)} \left(\sum_{j=1}^k \frac{T_k^2}{n_k} \right) - 3(N+1)$	VII.36.3
		$(k-1) \frac{N(N+1)}{12}$	VII.36.4

OHARRAK:

7.5. **BARIANTZA-ANALISIAK (ANOVA)**

Bariantza-analisiak deituriko azterketa estatistikoen oinarria aldagai baten edo batzuen aldakortasunaren deskonposatzea da. Aldakortasun hitzak adierazten duen moduan, aldagaien aldaketaren berri ematen digu. Horrexegatik, hain zuzen ere, analisi mota horiek erabilienak dira eredu esperimentaletan. Bariantza-analisiaren bitartez aldaketaren sorburua, eta zioa, antzeman dezakegu, diseinu esperimentala egokia denean.

Ikuspegi estatistikotik, bariantza-analisia hipotesi-test izaerako tekniken orokorpen gisa har dezakegu. Dena den, hipotesi-testetan laginak azterketaren oinarria genituen moduan, edo erregresio linealean kanpo- eta barne-aldagaiak oinarritzkoak diren eran, analisi mota hauetan taldeaz, mendeko aldagaiaz eta aldagai askeaz mintzatuko gara.

Esperimentuetan, oro har, ikertzailearen aztergaiak izan ohi dira denboraren jarioan gertatzen diren aldaketak. Momentu jakin bateko, aurrekoaren eta ostekoaren arteko, diferentziak izandako aldaketaren berri ematen digu. *Aurrekoak ondorengoa* dakarrelakoan, *aurreko* hori zertan den jakinez gero, *ondorioa* ikertzailearen jardunaren emaitza izan daiteke-eta. Edozelan ere, askotan esan dugun moduan, errealitatea bere zabaltasun eta zehaztasun osoan antzeman ezina da. Horregatik, analisi estatistikoa ezin ekar diezaguke gura bezainbesteko zehaztasunik. Bariantza-analisiak, teknika estatistiko orori gertatzen zaion eran, ez dio zehaztasun ezari ihes egiten. Tresna eraginkorra eta emankorra da, dudarik ez, baina test parametrikoei dituzten muga bertsuak ditu. Ikertzaileak esperimentu zientifikoetan jardun arren, errore-iturriak aurkitzen ditu. Zientziaren eremuan ikertzaileak kontrolatu behar ditu errore horiek beste inork baino zorrotzago eta zehatzago.

Bariantza-analisietan, gutxienik, bi aldagai erabiltzen dira:

Aldagai askea: ikertzaileak kontrolatzen duen aldagaia da. Ez da zoriz banatzen, beraz. Haren neurriak eta ezaugarriak ikertzaileak lantzen ditu alde aurreko diseinuaren arabera. Mailetan emana dago oinarritzko bariantza-analisietan; are zehatzago, ikertzaileak zehaztutako maila finkoetan erabiltzen da. Aldagai askeak edo faktoreak, bat edo gehiago izan daitezke, diseinuaren arabera.

Mendeko aldagaia: ikertzaileak aztertu nahi duen aldagaia(k) da. Zoriz banatzen da. Zoriz banatze hori da, hain justu, analisi klase horien gako: mendeko aldagaietan behatutako aldakortasuna ea zein neurritan dagokion zoriari eta zein neurritan aldagai askearen eraginari. Aurreko kasuan bezala, mendeko aldagai bat, bi edo gehiago izan daitezke diseinuaren arabera, Y (edo $Y_1, Y_2, \dots$) hizkia adierazten dira.

7.5.1. ANOVA faktore bakarra, eragin finkoak. Eredu orekatuko bariantza-analisisa

VII.37. taula. Bariantza-analisisa (ANOVA). Faktore bakarra, eragin finkoa.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Aldakortasun orokorra		$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$	VII.37.1
Aldakortasun orokorra	SCT	$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2}{N}$	VII.37.2
Talde arteko aldakortasuna	SCA	$SCA = \left[\sum_{j=1}^K \frac{\left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2}{n_i} \right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k Y_{ij} \right)^2}{N}$	VII.37.3
Talde barneko aldakortasuna	SCE	$SCE = SCT - SCA$	VII.37.4
Batez besteko koadratikoa (talde artekoa)	MCA	$MCA = \frac{SCA}{k-1}$	VII.37.5
Batez besteko koadratikoa (talde barnekoa)	MCE	$MCE = \frac{SCE}{n(k-1)}$	VII.37.6
Fisherren F	F	$F = \frac{MCA}{MCE}$	VII.37.7

7.5.11.. Tukeyren HSD testa (Honestly Significantly Different)

VII.38. taula. Tukey

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Tukey	ts	$ts = \frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{\frac{MCR}{n_h}}}$	VII.38.1

OHARRAK:

7.5.2. ANOVA Bi faktore A X B diseinua. Eredu orekatuko bariantza-analisia

VII.39. taula. Bariantza-analisia (ANOVA). A X B diseinua.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Aldakortasun orokorra	SCT	$SCT = \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijk}^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijk} \right)^2}{N}$	VII.39.1
	C	$C = \frac{\left(\sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijk} \right)^2}{abn}$	VII.39.2
A faktoreak ekarritako aldakortasuna	SCA	$SCA = \left[\frac{1}{bn} \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$	VII.39.3
B faktoreak ekarritako aldakortasuna	SCB	$SCB = \left[\frac{1}{an} \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijk} \right)^2 \right] - C$	VII.39.4
A eta B faktoreen arteko interakzioa	SCAB	$SCAB = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^a \sum_{j=1}^b \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijk} \right)^2 \right] - C - (SCA + SCB)$	VII.39.5
Hondakinak	SCR	$SCR = SCT - (SCA + SCB + SCAB)$	VII.39.6
Batez besteko koadratikoa (A faktorea)	MCA	$MCA = \frac{SCA}{a-1}$	VII.39.7
Batez besteko koadratikoa (B faktorea)	MCB	$MCB = \frac{SCB}{(b-1)}$	VII.39.8
Batez besteko koadratikoa (AB interakzioa)	MCAB	$MCAB = \frac{SCAB}{(a-1)(b-1)}$	VII.39.9
Errorea	MCR	$MCR = \frac{SCR}{ab(n-1)}$	VII.39.10
Fisherren F	F	$F = \frac{MCA}{MCR} \quad F = \frac{MCB}{MCR} \quad F = \frac{MCAB}{MCR}$	VII.39.11

OHARRAK:

7.5.3. ANOVA A X B X C diseinua. Eredu orekatuko bariantza-analisia

VII.40. taula. Bariantza-analisia (ANOVA). A X B X C diseinua.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Aldakortasun orokorra	SCT	$SCT = \sum_{m=1}^c \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijkm}^2 - \frac{\left(\sum_{m=1}^c \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijkm} \right)^2}{N}$	VII.40.1
	C	$C = \frac{\left(\sum_{m=1}^c \sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijkm} \right)^2}{abcn}$	VII.40.2
A faktoreak ekarritako aldakortasuna	SCA	$SCA = \left[\frac{1}{bcn} \sum_{j=1}^b \left(\sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^a Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C$	VII.40.3
B faktoreak ekarritako aldakortasuna	SCB	$SCB = \left[\frac{1}{acn} \sum_{k=1}^a \left(\sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C$	VII.40.4
C faktoreak ekarritako aldakortasuna	SCC	$SCC = \left[\frac{1}{abn} \sum_{m=1}^c \left(\sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C$	VII.40.5
A B interakzioa	SCAB	$SCAB = \left(\left[\frac{1}{cn} \sum_{k=1}^a \sum_{j=1}^b \left(\sum_{m=1}^c \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C \right) - (SCA + SCB)$	VII.40.6
A C interakzioa	SCAC	$SCAC = \left(\left[\frac{1}{bn} \sum_{m=1}^c \sum_{j=1}^b \left(\sum_{k=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C \right) - (SCA + SCC)$	VII.40.7
B C interakzioa	SCBC	$SCBC = \left(\left[\frac{1}{an} \sum_{m=1}^c \sum_{k=1}^a \left(\sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C \right) - (SCB + SCC)$	VII.40.8
A B C interakzioa	SCBAC	$SCBAC = \left(\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^b \sum_{m=1}^c \sum_{k=1}^a \left(\sum_{i=1}^n Y_{ijkm} \right)^2 \right] - C \right) - (SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC)$	VII.40.9
Hondakinak	SCR	$SCR = SCT - (SCA + SCB + SCC + SCAB + SCAC + SCBC + SCBAC)$	VII.40.10

OHARRAK:

<i>ESTATISTIKOA</i>	<i>NOTAZIOA</i>	<i>FORMULA</i>	<i>Zk.</i>
Batez besteko koadratikoa (A faktorea)	MCA	$MCA = \frac{SCA}{a-1}$	VII.40.11
Batez besteko koadratikoa (B faktorea)	MCB	$MCB = \frac{SCB}{(b-1)}$	VII.40.12
Batez besteko koadratikoa (C faktorea)	MCC	$MCC = \frac{SCC}{c-1}$	VII.40.13
Batez besteko koadratikoa (AB interakzioa)	MCAB	$MCAB = \frac{SCAB}{(a-1)(b-1)}$	VII.40.14
Batez besteko koadratikoa (AC interakzioa)	MCAC	$MCAC = \frac{SCAC}{(a-1)(c-1)}$	VII.40.15
Batez besteko koadratikoa (BC interakzioa)	MCBC	$MCBC = \frac{SCBC}{(c-1)(b-1)}$	VII.40.16
Batez besteko koadratikoa (ABC interakzioa)	MCABC	$MCABC = \frac{SCABC}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	VII.40.17
Errorea	MCR	$MCR = \frac{SCR}{abc(n-1)}$	VII.40.18
Fisherren F	F	$F = \frac{MCA}{MCR} ; F = \frac{MCB}{MCR} ; F = \frac{MCC}{MCR}$ $F = \frac{MCAB}{MCR} ; F = \frac{MCAC}{MCR} ; F = \frac{MCBC}{MCR}$ $F = \frac{MCABC}{MCR}$	VII.40.19

OHARRAK:

7.5.4. ANOVA Tratamenduak X Subjektuak. A X S diseinua. Eredu orekatuko bariantza-analisisa

VII.41. taula. Bariantza-analisisa (ANOVA). Tratamendua X Subjektuak. A X S diseinua.

ESTATISTIKOA	NOTAZIOA	FORMULA	Zk.
Aldakortasun orokorra	SCT	$SCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^a Y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^a Y_{ij} \right)^2}{N}$	VII.41.1
	C	$C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^a Y_{ij} \right)^2}{an}$	VII.41.2
A faktoreak ekarritako aldakortasuna	SCA	$SCA = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^a Y_{ij} \right)^2 \right] - C$	VII.41.3
Subjektuen arteko aldakortasuna (S)	SCS	$SCS = \left[\frac{1}{a} \sum_{j=1}^a \left(\sum_{i=1}^n Y_{ij} \right)^2 \right] - C$	VII.41.4
S X A interakzioaren aldakortasuna	SCAS	$SCAS = \left(\left[\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^n Y_{ij}^2 \right] - C \right) - (SCA + SCS)$	VII.41.5
Batez besteko koadratikoa (A faktorea)	MCA	$MCA = \frac{SCA}{a-1}$	VII.41.6
Batez besteko koadratikoa (A faktorea)	MCA	$MCA = \frac{SCA}{a-1}$	VII.41.7
Batez besteko koadratikoa (A S interakzioa –errorea–)	MCAS	$MCS = \frac{SCAS}{(a-1)(n-1)}$	VII.41.8
Fisherren F	F	$F = \frac{MCA}{MCS} \quad F = \frac{MCAS}{MCS}$	VII.41.9

OHARRAK:

8. Kapitulu

Softwareko lanabesek estatistikaren erabilera zeharo aldatu dute, baita estatistikaren irakaskuntza ere. Ordenagailuek estatistikaren izugarrizko garapena ahalbidetu dute; beraiei esker, edozeinen esku dago milioika datuekin lan egitea eta goi-mailako analisiak egin ahal izatea. Estatistikarako tresna ahaltsuak dauzkagu.

Halere, estatistika-softwarea taxuz eta eraginkorki erabiltzeko, estatistikaren oinarriak ahalik ondoen ezagutzea eta ulertzea behar-beharrezkoa da. Estatistika-aulak XIX. eta XX. mendeetako ekarpenak dira, analisiak egiteko eta, batez ere, erabaki estatistikoak hartzeko erreminta oso lagungarriak dira. Estatistika-aulak, funtsean, estatistiko eta probabilitate-banaketen zenbakizko koadroak besterik ez dira. Gaur egun, aplikazio informatiko xumeek, kalkulu-orriak, esaterako, gure estatistika-tauletako balio horiek beroriek xeheago eta arinago eskaintzen dizkigute. Hau da, estatistika-aulak, ordenagailua izanez gero, gaur eguneko analisi-jardueretan ez dira beharrezkoak.

Estatistika irakasteko, berriz, estatistika-aulak oso baliabide erabilgarriak dira. Alde batetik, laguntzen digute erakusten probabilitate-banaketak eta banaketa-funtzioak zertan diren. Eta, beste aldetik, analisiak egiteko eta erabaki estatistikoak hartzeko, funtsezko oinarriak zein diren ezagutzeko beharrezkoak dira.

Argitalpen honetan agertzen ditugu estatistika-taula arruntenak eta erabilienak. Guztira, hamazazpi taula. Zenbait kasutan, garrantzitsuenetan, banaketei buruzko azalpenak eta taulen erabilerari buruzko gida, adibideak eta iradokizunak txertatu ditugu.

8. Estatistika-taulak

8.1. ZORIZKO ZENBAKIAK

Zorizko zenbakiak terminoak adierazten duen eran, ausaz hautatutako zenbakiak dira. Zenbaki horiek, batez ere, laginketa-prozesuetan erabiltzen dira, zozketetan, alegia. Gaur egun, baliabide informatikoen bitartez egin ohi dira horrelako prozesuak. Eta ia ez dira erabiltzen zorizko zenbakien taulak. Guk hemen eraiki dugun zorizko zenbakien taula SPSSren laguntzaz osatu dugu. Horrelako taulak eraikitzeke oinarria ohiko hamar digituak dira, 0tik 9 bitartekoak. Digitu horiek banan-banan zozketatuz eratzen dira taulan agertzen diren zifrak.

Taula erabilgarri gerta dadin, egiturak argi eta erraz egina behar du izan. Zifra bakoitza bost digituz osaturik dago. Zorizko zifrak eroso hautatu ahal izateko, 20 zutabe eta 60 errenkada antolatu eta 48 laukitan bildu ditugu. Zozketarako prozedurarik sinpleena da edozein errenkada eta edozein zutabe hautatu eta zenbakiak hurrenez hurren aukeratzea. Horretarako, jakina, aldeztu aurretik jakin behar dugu zein den lagina (n) eta zein dagokion populazioaren tamaina (N).

Adibidez, demagun $n = 357$ tamainako lagina hautatu behar dugula $N = 999$ tamainako populazio batetik. Populazioko kasu guztiak zenbakiturik daude 1etik 999raino. Azken zenbaki horrek hiru digitu dituelarik hein horretako zifrak aukeratu behar ditugu. Orotara, 357 zenbaki desberdin hautatu behar ditugu. Hasierako puntua zehazteko, zozketa egin dezakegu 60 errenkada eta 20 zutabeen artean. Jo dezagun 12. errenkada eta 10. zutabea suertatzen zaizkigula. Leku horretan 09652 zifra dugu: hori da abiapuntua. Zenbaki horretatik aurreneko hiru digituak hartu behar ditugu: 096. Hori da, hain zuzen ere, gure lehenengo kasua, 96a. Horrela, errenkadaz errenkada hiruak hautatzen segituko dugu gure lagina osatu arte. Gure adibidean, lehenengo kasuak honako hauek izango dira: 96, 520, 261, 526, 705, 591, 225, 545, 572, 849, 191, 176, 154, 53, 321... Horrela jarraituko dugu behar dugun kasu kopurua osatu arte.

Zorizko zenbakiak erabiltzen baditugu, ziur egon gaitezke kasu guztiek probabilitate-maila bera izan dutela hautatuak izateko. Zorizko zenbakiak banaketa uniformeari darraizkio eta haien probabilitate-funtzioa eta banaketa-funtzioa honako hauek dira:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{non:} \quad a \leq x \leq b$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{baldin } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{baldin } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{baldin } x \geq b \end{cases}$$

8.2. BANAKETA BINOMIALA

Aldagai dikotomikoak direnean eta gertaera bakoitzari dagozkion probabilitateak ezagutzen ditugunean, Bernoulli motako esperimendu batean posible da kalkulatzeari zer probabilitate duen gertaera jakin batek x aldiz agertzeko. *Jacob Bernoulli* (1654-1705) matematikari suitzarrak aztertu eta argitu zituen horrelako fenomenoak.

Banaketa binomiala izaera horretako kasuetan aplikatzen da, eta haren **probabilitate-funtzioa** honako hau da:

$$\text{Prob}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Non: n esperimendua zenbat aldiz errepikatzen den
 p aztertzen dugun gertaeraren probabilitatea
 x gertaera zenbat aldiz agertzen den

Taulak multzoka antolatuta daude $n=1$ etik $n=20$ raino. Ezkerreko lehenengo zutabean x -ren balioak agertzen dira, eta aurreneko errenkadan, berriz, aztertzen dugun gertaerari dagokion probabilitatea (p). Taula barruan, jakina, probabilitateak agertzen zaizkigu.

Adibidea

Demagun amarrurik gabeko txanpon batekin *leon-castillo* jolasean ari garela. Bi jazoera eta probabilitate-maila berekoak, beraz. Jakin nahi dugu zein den probabilitatea hamar botalditatik zortzitan *castillo* agertzeko. Hona hemen dauzkagun datuak:

$$n = 0 ; \quad x = 8 ; \quad p = 0,5$$

Taulan begiratu behar dugun probabilitatea $n = 10$ da, eta esandako x eta p -ren arabera bilatuko dugu; puntu horretan taulak 0,0439 probabilitatea ematen digu. Hau da, txanpona hamar aldiz botata *castillo* 8 aldiz gertatzeko probabilitatea % 4,39koa da.

Banaketa-funtzioa

$$\text{Prob}(X \geq x) = \sum_{r=x}^n \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{baldin } p \leq 0,5$$

$$\text{Prob}(X \leq x) = \sum_{r=0}^x \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{baldin } p \geq 0,5$$

Banaketa-funtzioaren bitartez kalkulatu ahal ditugu puntu jakin baterainoko probabilitateak. Hau da, esperimentua zenbat aldiz egingo den (n) badakigu eta gertaerari dagokion probabilitatea (p) zein den ezagutzen badugu, gure gertaera x aldiz edo gutxiago izateko probabilitatea kalkula dezakegu. Hau da, 1, 2, 3... eta x aldiz izateko probabilitatea.

Adibidea

Demagun dado-jokoan ari garela, hamar (n) botaldi jokalaria bakoitzeko. Gauzak horrela, jakin nahi dugu zein probabilitate dagoen botaldi horietan guztietan seiko bi (x) edo gutxiago agertzeko. Dauzkagun datuak, bada, hauek dira:

$$n = 10 ; \quad x \leq 2 ; \quad p = 1/6$$

Bi edo gutxiago gertaerei dagokien probabilitatea *hiru edo gehiago* gertaerei dagokien probabilitatearen osagarria da. Hau da, jakin nahi dugun probabilitatea honela idatz dezakegu: $p(X \leq 2) = 1 - p(X \geq 3)$

Tauletan, lehenik, hautatu behar dugu $n = 10$ adierazpideko taula; taula horretan bilatzen dugu $p = 1/6 = 0,17$ eta $x = 3$ eta ikusiko dugu $p(X \geq 3) = 0,2248$. Hau da, hamar botalditan, seikoa hiru, lau, bost, sei, zazpi, zortzi, bederatzi edota hamar aldiz gertatzeko probabilitatea % 22,48koa da. *Bi edo gutxiago* izateko probabilitatea, berriz, $p(X \leq 2) = 1 - 0,2248 = 0,7752$.

Dado-jokoan hamar botalditan seiko bi edo gutxiago izateko probabilitatea % 77,52koa da, beraz.

BANAKETA BINOMIALA; BANAKAKO PROBABILITATEAK

BANAKETA BINOMIALA; BANAKAKO PROBABILITATEAK

		n=7																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0		0,9321	0,8681	0,8080	0,7514	0,6983	0,6485	0,6017	0,5578	0,5168	0,4783	0,3206	0,2791	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078	7
1		0,0659	0,1240	0,1749	0,2192	0,2573	0,2897	0,3170	0,3396	0,3578	0,3720	0,3960	0,3907	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547	6
2		0,0020	0,0076	0,0162	0,0274	0,0406	0,0555	0,0716	0,0886	0,1061	0,1240	0,2097	0,2344	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641	5
3		0,0000	0,0003	0,0008	0,0019	0,0036	0,0059	0,0090	0,0128	0,0175	0,0230	0,0617	0,0781	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734	4
4		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0011	0,0017	0,0026	0,0109	0,0156	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734	3
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0012	0,0019	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641	2
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547	1
7		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078	0
																						x
		n=8																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0		0,9227	0,8508	0,7837	0,7214	0,6634	0,6096	0,5596	0,5132	0,4703	0,4305	0,2725	0,2326	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039	8
1		0,0746	0,1389	0,1939	0,2405	0,2793	0,3113	0,3370	0,3570	0,3721	0,3826	0,3847	0,3721	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313	7
2		0,0026	0,0099	0,0210	0,0351	0,0515	0,0695	0,0888	0,1087	0,1288	0,1488	0,2376	0,2605	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094	6
3		0,0001	0,0004	0,0013	0,0029	0,0054	0,0089	0,0134	0,0189	0,0255	0,0331	0,0839	0,1042	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188	5
4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0013	0,0021	0,0031	0,0046	0,0185	0,0260	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734	4
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0004	0,0026	0,0042	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188	3
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0004	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094	2
7		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313	1
8		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039	0
																						x
		n=9																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0		0,9135	0,8337	0,7602	0,6925	0,6302	0,5730	0,5204	0,4722	0,4279	0,3874	0,2316	0,1938	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020	9
1		0,0830	0,1531	0,2116	0,2597	0,2985	0,3292	0,3525	0,3695	0,3809	0,3874	0,3679	0,3489	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176	8
2		0,0034	0,0125	0,0262	0,0433	0,0629	0,0840	0,1061	0,1285	0,1507	0,1722	0,2597	0,2791	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703	7
3		0,0001	0,0006	0,0019	0,0042	0,0077	0,0125	0,0186	0,0261	0,0348	0,0446	0,1069	0,1302	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641	6
4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0021	0,0034	0,0052	0,0074	0,0283	0,0391	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461	5
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0050	0,0078	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461	4
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0010	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641	3
7		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703	2
8		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176	1
9		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020	0
																						x
		n=10																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0		0,9044	0,8171	0,7374	0,6648	0,5987	0,5386	0,4840	0,4344	0,3894	0,3487	0,1969	0,1615	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	10
1		0,0914	0,1667	0,2281	0,2770	0,3151	0,3438	0,3643	0,3777	0,3851	0,3874	0,3474	0,3230	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098	9
2		0,0042	0,0153	0,0317	0,0519	0,0746	0,0988	0,1234	0,1478	0,1714	0,1937	0,2759	0,2907	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439	8
3		0,0001	0,0008	0,0026	0,0058	0,0105	0,0168	0,0248	0,0343	0,0452	0,0574	0,1298	0,1550	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172	7
4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0010	0,0019	0,0033	0,0052	0,0078	0,0112	0,0401	0,0543	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051	6
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0005	0,0009	0,0015	0,0085	0,0130	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461	5
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0012	0,0022	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051	4
7		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172	3
8		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439	2
9		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098	1
10		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0
																						x
		0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50	

BANAKETA BINOMIALA; BANAKAKO PROBABILITATEAK

		n=11																					
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50			
0	0,8953	0,8007	0,7153	0,6382	0,5688	0,5063	0,4501	0,3996	0,3544	0,3138	0,1673	0,1346	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005	11		
1	0,0995	0,1798	0,2433	0,2925	0,3293	0,3555	0,3727	0,3823	0,3855	0,3835	0,3248	0,2961	0,2362	0,1549	0,0932	0,0636	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054	10		
2	0,0050	0,0183	0,0376	0,0609	0,0867	0,1135	0,1403	0,1662	0,1906	0,2131	0,2866	0,2961	0,2953	0,2581	0,1998	0,1590	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269	9		
3	0,0002	0,0011	0,0035	0,0076	0,0137	0,0217	0,0317	0,0434	0,0566	0,0710	0,1517	0,1777	0,2215	0,2581	0,2568	0,2384	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806	8		
4	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0014	0,0028	0,0048	0,0075	0,0112	0,0158	0,0536	0,0711	0,1107	0,1721	0,2201	0,2384	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611	7		
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0015	0,0025	0,0132	0,0199	0,0388	0,0803	0,1321	0,1669	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256	6		
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0023	0,0040	0,0097	0,0268	0,0566	0,0835	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256	5		
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0006	0,0017	0,0064	0,0173	0,0298	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611	4		
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0011	0,0037	0,0075	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806	3		
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0012	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269	2		
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054	1		
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005	0		

										$n=12$											
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0	0,8864	0,7847	0,6938	0,6127	0,5404	0,4759	0,4186	0,3677	0,3225	0,2824	0,1422	0,1122	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002	12
1	0,1074	0,1922	0,2575	0,3064	0,3413	0,3645	0,3781	0,3837	0,3827	0,3766	0,3012	0,2692	0,2062	0,1267	0,0712	0,0462	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029	11
2	0,0060	0,0216	0,0438	0,0702	0,0988	0,1280	0,1565	0,1835	0,2082	0,2301	0,2924	0,2961	0,2835	0,2323	0,1678	0,1272	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161	10
3	0,0002	0,0015	0,0045	0,0098	0,0173	0,0272	0,0393	0,0532	0,0686	0,0852	0,1720	0,1974	0,2362	0,2581	0,2397	0,2120	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537	9
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0021	0,0039	0,0067	0,0104	0,0153	0,0213	0,0683	0,0888	0,1329	0,1936	0,2311	0,2384	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208	8
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0014	0,0024	0,0038	0,0193	0,0284	0,0532	0,1032	0,1585	0,1908	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934	7
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0005	0,0040	0,0066	0,0155	0,0401	0,0792	0,1113	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256	6
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0011	0,0033	0,0115	0,0291	0,0477	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934	5
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0149	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208	4
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0033	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537	3
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161	2
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029	1
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0

		n=13																				
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50		
0	0,8775	0,7690	0,6730	0,5882	0,5133	0,4474	0,3893	0,3383	0,2935	0,2542	0,1209	0,0935	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001	13	
1	0,1152	0,2040	0,2706	0,3186	0,3512	0,3712	0,3809	0,3824	0,3773	0,3672	0,2774	0,2430	0,1787	0,1029	0,0540	0,0334	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016	12	
2	0,0070	0,0250	0,0502	0,0797	0,1109	0,1422	0,1720	0,1995	0,2239	0,2448	0,2937	0,2916	0,2680	0,2059	0,1388	0,1002	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095	11	
3	0,0003	0,0019	0,0057	0,0122	0,0214	0,0333	0,0475	0,0636	0,0812	0,0997	0,1900	0,2138	0,2457	0,2517	0,2181	0,1837	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349	10	
4	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0028	0,0053	0,0089	0,0138	0,0201	0,0277	0,0838	0,1069	0,1535	0,2097	0,2337	0,2296	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873	9	
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0022	0,0036	0,0055	0,0266	0,0385	0,0691	0,1258	0,1803	0,2067	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571	8	
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0005	0,0008	0,0063	0,0103	0,0230	0,0559	0,1030	0,1378	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095	7	
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0021	0,0058	0,0186	0,0442	0,0689	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095	6	
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0011	0,0047	0,0142	0,0258	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571	5	
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0072	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873	4	
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0014	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349	3	
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095	2	
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	1	
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0	
																						x
	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50		

0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

BANAKETA BINOMIALA; BANAKAKO PROBABILITATEAK

		$n=14$																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0	0,8687	0,7536	0,6528	0,5647	0,4877	0,4205	0,3620	0,3112	0,2670	0,2288	0,1028	0,0779	0,0440	0,0178	0,0068	0,0034	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	14
1	0,1229	0,2153	0,2827	0,3294	0,3593	0,3758	0,3815	0,3788	0,3698	0,3559	0,2539	0,2181	0,1539	0,0832	0,0407	0,0240	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009	0,0000	13
2	0,0081	0,0286	0,0568	0,0892	0,1229	0,1559	0,1867	0,2141	0,2377	0,2570	0,2912	0,2835	0,2501	0,1802	0,1134	0,0779	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056	0,0000	12
3	0,0003	0,0023	0,0070	0,0149	0,0259	0,0398	0,0562	0,0745	0,0940	0,1142	0,2056	0,2268	0,2501	0,2402	0,1943	0,1559	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222	0,0000	11
4	0,0000	0,0001	0,0006	0,0017	0,0037	0,0070	0,0116	0,0178	0,0256	0,0349	0,0998	0,1247	0,1720	0,2202	0,2290	0,2143	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611	0,0000	10
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0031	0,0051	0,0078	0,0352	0,0499	0,0860	0,1468	0,1963	0,2143	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222	0,0000	9
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0013	0,0093	0,0150	0,0322	0,0734	0,1262	0,1607	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833	0,0000	8
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0019	0,0034	0,0092	0,0280	0,0618	0,0918	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095	0,0000	7
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0006	0,0020	0,0082	0,0232	0,0402	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833	6
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0018	0,0066	0,0134	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222	0,0000	5
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0033	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611	0,0000	4
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222	0,0000	3
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056	0,0000	2
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009	0,0000	1
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
		$n=15$																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0	0,8601	0,7386	0,6333	0,5421	0,4633	0,3953	0,3367	0,2863	0,2430	0,2059	0,0874	0,0649	0,0352	0,0134	0,0047	0,0023	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	15
1	0,1303	0,2261	0,2938	0,3388	0,3658	0,3785	0,3801	0,3734	0,3605	0,3432	0,2312	0,1947	0,1319	0,0668	0,0305	0,0171	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005	0,0000	14
2	0,0092	0,0323	0,0636	0,0988	0,1348	0,1691	0,2003	0,2273	0,2496	0,2669	0,2856	0,2726	0,2309	0,1559	0,0916	0,0599	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032	0,0000	13
3	0,0004	0,0029	0,0085	0,0178	0,0307	0,0468	0,0653	0,0857	0,1070	0,1285	0,2184	0,2363	0,2501	0,2252	0,1700	0,1299	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139	0,0000	12
4	0,0000	0,0002	0,0008	0,0022	0,0049	0,0090	0,0148	0,0223	0,0317	0,0428	0,1156	0,1418	0,1876	0,2252	0,2186	0,1948	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417	0,0000	11
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0024	0,0043	0,0069	0,0105	0,0449	0,0624	0,1032	0,1651	0,2061	0,2143	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916	0,0000	10
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0011	0,0019	0,0132	0,0208	0,0430	0,0917	0,1472	0,1786	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527	0,0000	9
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0030	0,0053	0,0138	0,0393	0,0811	0,1148	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964	0,0000	8
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0011	0,0035	0,0131	0,0348	0,0574	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964	0,0000	7
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0034	0,0116	0,0223	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527	0,0000	6
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0067	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916	0,0000	5
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0015	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417	0,0000	4
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139	3
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032	0,0000	2
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0000	1
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
		$n=16$																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0	0,8515	0,7238	0,6143	0,5204	0,4401	0,3716	0,3131	0,2634	0,2211	0,1853	0,0743	0,0541	0,0281	0,0100	0,0033	0,0015	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	16
1	0,1376	0,2363	0,3040	0,3469	0,3706	0,3795	0,3771	0,3665	0,3499	0,3294	0,2097	0,1731	0,1126	0,0535	0,0228	0,0122	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002	0,0000	15
2	0,0104	0,0362	0,0705	0,1084	0,1463	0,1817	0,2129	0,2390	0,2596	0,2745	0,2775	0,2596	0,2111	0,1336	0,0732	0,0457	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018	0,0000	14
3	0,0005	0,0034	0,0102	0,0211	0,0359	0,0541	0,0748	0,0970	0,1198	0,1423	0,2285	0,2423	0,2463	0,2079	0,1465	0,1066	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085	0,0000	13
4	0,0000	0,0002	0,0010	0,0029	0,0061	0,0112	0,0183	0,0274	0,0385	0,0514	0,1311	0,1575	0,2001	0,2252	0,2040	0,1732	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278	0,0000	12
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0033	0,0057	0,0091	0,0137	0,0555	0,0756	0,1201	0,1802	0,2099	0,2078	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667	0,0000	11
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0009	0,0017	0,0028	0,0180	0,0277	0,0550	0,1101	0,1649	0,1905	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222	0,0000	10
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0045	0,0079	0,0197	0,0524	0,1010	0,1361	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746	0,0000	9
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0018	0,0055	0,0197	0,0487	0,0765	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964	0,0000	8
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0058	0,0185	0,0340	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746	0,0000	7
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0119	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222	0,0000	6
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0032	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667	0,0000	5
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278	4
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,																		

	$n=17$																			
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,8429	0,7093	0,5958	0,4996	0,4181	0,3493	0,2912	0,2423	0,2012	0,1668	0,0631	0,0451	0,0225	0,0075	0,0023	0,0010	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
1	0,1447	0,2461	0,3133	0,3539	0,3741	0,3790	0,3726	0,3582	0,3383	0,3150	0,1893	0,1532	0,0957	0,0426	0,0169	0,0086	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
2	0,0117	0,0402	0,0775	0,1180	0,1575	0,1935	0,2244	0,2492	0,2677	0,2800	0,2673	0,2452	0,1914	0,1136	0,0581	0,0345	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
3	0,0006	0,0041	0,0120	0,0246	0,0415	0,0618	0,0844	0,1083	0,1324	0,1556	0,2359	0,2452	0,2393	0,1893	0,1245	0,0863	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
4	0,0000	0,0003	0,0013	0,0036	0,0076	0,0138	0,0222	0,0330	0,0458	0,0605	0,1457	0,1716	0,2093	0,2209	0,1868	0,1510	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0010	0,0023	0,0044	0,0075	0,0118	0,0175	0,0668	0,0893	0,1361	0,1914	0,2081	0,1963	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0013	0,0023	0,0039	0,0236	0,0357	0,0680	0,1276	0,1784	0,1963	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0065	0,0112	0,0267	0,0668	0,1201	0,1542	0,1685	0,1527	0,1841	0,1484
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0014	0,0128	0,0084	0,0279	0,0644	0,0964	0,1134	0,1206	0,1853	0,1855
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0006	0,0021	0,0093	0,0276	0,0482	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0025	0,0095	0,0193	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0061	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0015	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
16	0,																			

BANAKETA BINOMIALA; BANAKAKO PROBABILITATEAK

										n=19													
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50			
0	0,8262	0,6812	0,5606	0,4604	0,3774	0,3086	0,2519	0,2051	0,1666	0,1351	0,0456	0,0313	0,0144	0,0042	0,0011	0,0005	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	19		
1	0,1586	0,2642	0,3294	0,3645	0,3774	0,3743	0,3602	0,3389	0,3131	0,2852	0,1529	0,1189	0,0685	0,0268	0,0093	0,0043	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000	18		
2	0,0144	0,0485	0,0917	0,1367	0,1787	0,2150	0,2440	0,2652	0,2787	0,2852	0,2428	0,2141	0,1540	0,0803	0,0358	0,0193	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003	17		
3	0,0008	0,0056	0,0161	0,0323	0,0533	0,0778	0,1041	0,1307	0,1562	0,1796	0,2428	0,2426	0,2182	0,1517	0,0869	0,0546	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018	16		
4	0,0000	0,0005	0,0020	0,0054	0,0112	0,0199	0,0313	0,0455	0,0618	0,0798	0,1714	0,1941	0,2182	0,2023	0,1491	0,1093	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074	15		
5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0018	0,0038	0,0071	0,0119	0,0183	0,0266	0,0907	0,1165	0,1636	0,2023	0,1916	0,1639	0,1468	0,0933	0,0497	0,0222	14		
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012	0,0024	0,0042	0,0069	0,0374	0,0544	0,0955	0,1574	0,1916	0,1912	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518	13		
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0014	0,0122	0,0202	0,0443	0,0974	0,1525	0,1776	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961	12		
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0032	0,0061	0,0166	0,0487	0,0981	0,1332	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442	11		
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0015	0,0051	0,0198	0,0514	0,0814	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762	10		
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0066	0,0220	0,0407	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762	9		
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0166	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442	8		
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0055	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961	7		
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0015	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518	6	
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222	5		
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074	4		
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	3		
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2		
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1		
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0		

										n=20												
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50		
0	0,8179	0,6676	0,5438	0,4420	0,3585	0,2901	0,2342	0,1887	0,1516	0,1216	0,0388	0,0261	0,0115	0,0032	0,0008	0,0003	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	20	
1	0,1652	0,2725	0,3364	0,3683	0,3774	0,3703	0,3526	0,3282	0,3000	0,2702	0,1368	0,1043	0,0576	0,0211	0,0068	0,0030	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000	19	
2	0,0159	0,0528	0,0988	0,1458	0,1887	0,2246	0,2521	0,2711	0,2818	0,2852	0,2293	0,1982	0,1369	0,0669	0,0278	0,0143	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002	18	
3	0,0010	0,0065	0,0183	0,0364	0,0596	0,0860	0,1139	0,1414	0,1672	0,1901	0,2428	0,2379	0,2054	0,1339	0,0716	0,0429	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011	17	
4	0,0000	0,0006	0,0024	0,0065	0,0133	0,0233	0,0364	0,0523	0,0703	0,0898	0,1821	0,2022	0,2182	0,1897	0,1304	0,0911	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046	16	
5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0022	0,0048	0,0088	0,0145	0,0222	0,0319	0,1028	0,1294	0,1746	0,2023	0,1789	0,1457	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148	15	
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0032	0,0055	0,0089	0,0454	0,0647	0,1091	0,1686	0,1916	0,1821	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370	14	
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0020	0,0160	0,0259	0,0545	0,1124	0,1643	0,1821	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739	13	
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0046	0,0084	0,0222	0,0609	0,1144	0,1480	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201	12	
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0022	0,0074	0,0271	0,0654	0,0987	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602	11	
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005	0,0020	0,0099	0,0308	0,0543	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762	10	
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0030	0,0120	0,0247	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602	9	
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0092	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201	8	
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0028	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739	7	
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370	6	
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148	5	
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046	4	
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	3	
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	2	
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1	
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0	
																						x
0,99		0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50		

0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,93 0,92 0,91 0,90 0,85 0,83 0,80 0,75 0,70 0,66 0,65 0,60 0,55 0,50

BANAKETA BINOMIALA; PROBABILITATE METATUAK

		$n=7$																					
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50		
0		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	7	
1		0,0679	0,1319	0,1920	0,2486	0,3017	0,3515	0,3983	0,4422	0,4832	0,5217	0,6794	0,7209	0,7903	0,8665	0,9176	0,9415	0,9510	0,9720	0,9848	0,9922	6	
2		0,0020	0,0079	0,0171	0,0294	0,0444	0,0618	0,0813	0,1026	0,1255	0,1497	0,2834	0,3302	0,4233	0,5551	0,6706	0,7366	0,7662	0,8414	0,8976	0,9375	5	
3		0,0000	0,0003	0,0009	0,0020	0,0038	0,0063	0,0097	0,0140	0,0193	0,0257	0,0738	0,0958	0,1480	0,2436	0,3529	0,4294	0,4677	0,5801	0,6836	0,7734	4	
4		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0018	0,0027	0,0121	0,0176	0,0333	0,0706	0,1260	0,1733	0,1998	0,2898	0,3917	0,5000	3	
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0012	0,0020	0,0047	0,0129	0,0288	0,0453	0,0556	0,0963	0,1529	0,2266	2	
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0004	0,0013	0,0038	0,0069	0,0090	0,0188	0,0357	0,0625	1
7		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078	0	

		$n=8$																				
x		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	8
1		0,0773	0,1492	0,2163	0,2786	0,3366	0,3904	0,4404	0,4868	0,5297	0,5695	0,7275	0,7674	0,8322	0,8999	0,9424	0,9610	0,9681	0,9832	0,9916	0,9961	7
2		0,0027	0,0103	0,0223	0,0381	0,0572	0,0792	0,1035	0,1298	0,1577	0,1869	0,3428	0,3953	0,4967	0,6329	0,7447	0,8049	0,8309	0,8936	0,9368	0,9648	6
3		0,00010	0,0004	0,0013	0,0031	0,0058	0,0096	0,0147	0,0211	0,0289	0,0381	0,1052	0,1348	0,2031	0,3215	0,4482	0,5318	0,5722	0,6846	0,7799	0,8555	5
4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0013	0,0022	0,0034	0,0050	0,0214	0,0307	0,0563	0,1138	0,1941	0,2586	0,2936	0,4059	0,5230	0,6367	4
5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0004	0,0029	0,0046	0,0104	0,0273	0,0580	0,0879	0,1061	0,1737	0,2604	0,3633	3
6		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0004	0,0012	0,0042	0,0113	0,0197	0,0253	0,0498	0,0885	0,1445	2
7		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0026	0,0036	0,0085	0,0181	0,0352	1
8		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039	0

		n=9																			
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50	
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	9
1	0,0865	0,1663	0,2398	0,3075	0,3698	0,4270	0,4796	0,5278	0,5721	0,6126	0,7684	0,8062	0,8658	0,9249	0,9596	0,9740	0,9793	0,9899	0,9954	0,9980	8
2	0,0034	0,0131	0,0282	0,0478	0,0712	0,0978	0,1271	0,1583	0,1912	0,2252	0,4005	0,4573	0,5638	0,6997	0,8040	0,8569	0,8789	0,9295	0,9615	0,9805	7
3	0,0001	0,0006	0,0020	0,0045	0,0084	0,0138	0,0209	0,0298	0,0405	0,0530	0,1409	0,1783	0,2618	0,3993	0,5372	0,6228	0,6627	0,7682	0,8505	0,9102	6
4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0013	0,0023	0,0037	0,0057	0,0083	0,0339	0,0480	0,0856	0,1657	0,2703	0,3497	0,3911	0,5174	0,6386	0,7461	5
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0009	0,0056	0,0090	0,0196	0,0489	0,0988	0,1448	0,1717	0,2666	0,3786	0,5000	4
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0011	0,0031	0,0100	0,0253	0,0424	0,0536	0,0994	0,1658	0,2539	3
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0043	0,0083	0,0112	0,0250	0,0498	0,0898	2
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0010	0,0014	0,0038	0,0091	0,0195	1
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020	0

										$n=10$																			
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50									
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	10								
1	0,0956	0,1829	0,2626	0,3352	0,4013	0,4614	0,5160	0,5656	0,6106	0,6513	0,8031	0,8385	0,8926	0,9437	0,9718	0,9827	0,9865	0,9940	0,9975	0,9990	9								
2	0,0043	0,0162	0,0345	0,0582	0,0861	0,1176	0,1517	0,1879	0,2254	0,2639	0,4557	0,5155	0,6242	0,7560	0,8507	0,8960	0,9140	0,9536	0,9767	0,9893	8								
3	0,0001	0,0009	0,0028	0,0062	0,0115	0,0188	0,0283	0,0401	0,0540	0,0702	0,1798	0,2248	0,3222	0,4744	0,6172	0,7009	0,7384	0,8327	0,9004	0,9453	7								
4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0010	0,0020	0,0036	0,0058	0,0088	0,0128	0,0500	0,0697	0,1209	0,2241	0,3504	0,4407	0,4862	0,6177	0,7340	0,8281	6								
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0006	0,0010	0,0016	0,0099	0,0155	0,0328	0,0781	0,1503	0,2131	0,2485	0,3669	0,4956	0,6230	5								
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0014	0,0024	0,0064	0,0197	0,0473	0,0766	0,0949	0,1662	0,2616	0,3770	4								
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0035	0,0106	0,0197	0,0260	0,0548	0,1020	0,1719	3								
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0034	0,0048	0,0123	0,0274	0,0547	2								
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0005	0,0017	0,0045	0,0107	1								
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0								
																						x							
	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50									

0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,93 0,92 0,91 0,90 0,85 0,83 0,80 0,75 0,70 0,66 0,65 0,60 0,55 0,50

BANAKETA BINOMIALA; PROBABILITATE METATUAK

					n=11																				
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50					
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	11				
1	0,1047	0,1993	0,2847	0,3618	0,4312	0,4937	0,5499	0,6004	0,6456	0,6862	0,7327	0,7654	0,8141	0,8578	0,9002	0,9884	0,9912	0,9964	0,9986	0,9995	10				
2	0,0052	0,0195	0,0413	0,0692	0,1019	0,1382	0,1772	0,2181	0,2601	0,3026	0,3478	0,3953	0,4456	0,4979	0,5524	0,6091	0,6679	0,7284	0,7904	0,8534	0,9171	9			
3	0,0002	0,0012	0,0037	0,0083	0,0152	0,0248	0,0370	0,0519	0,0695	0,0896	0,1212	0,1732	0,2362	0,3104	0,3964	0,4941	0,6034	0,7244	0,8564	0,9991	0,9673	8			
4	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0053	0,0085	0,0129	0,0185	0,0264	0,0395	0,0561	0,0764	0,1004	0,1284	0,1604	0,1964	0,2364	0,2804	0,3284	7			
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0010	0,0017	0,0028	0,0159	0,0245	0,0404	0,0504	0,0714	0,1034	0,1464	0,1964	0,2544	0,3204	0,3964	6			
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0027	0,0046	0,0117	0,0343	0,0782	0,1221	0,1487	0,2465	0,3669	0,5000	0,5000	5			
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0006	0,0020	0,0076	0,0216	0,0386	0,0501	0,0994	0,1738	0,2744	0,3964	4			
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0012	0,0043	0,0088	0,0122	0,0293	0,0610	0,1133	0,1991	3			
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0014	0,0020	0,0059	0,0148	0,0327	2			
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0022	0,0059	1			
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005	0			

										n=12													
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50			
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	12		
1	0,1136	0,2153	0,3062	0,3873	0,4596	0,5241	0,5814	0,6323	0,6775	0,7176	0,8578	0,8878	0,9313	0,9683	0,9862	0,9923	0,9943	0,9978	0,9992	0,9998	11		
2	0,0062	0,0231	0,0486	0,0809	0,1184	0,1595	0,2033	0,2487	0,2948	0,3410	0,5565	0,6187	0,7251	0,8416	0,9150	0,9460	0,9576	0,9804	0,9917	0,9968	10		
3	0,0002	0,0015	0,0048	0,0107	0,0196	0,0316	0,0468	0,0652	0,0866	0,1109	0,2642	0,3226	0,4417	0,6093	0,7472	0,8105	0,8487	0,9166	0,9579	0,9807	9		
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0022	0,0043	0,0075	0,0120	0,0180	0,0256	0,0922	0,1252	0,2054	0,3512	0,5075	0,6069	0,6533	0,7747	0,8655	0,9270	8		
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0009	0,0016	0,0027	0,0043	0,0239	0,0364	0,0726	0,1576	0,2763	0,3685	0,4167	0,5618	0,6956	0,8062	7		
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0046	0,0079	0,0194	0,0544	0,1178	0,1777	0,2127	0,3348	0,4730	0,6128	6		
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0013	0,0039	0,0143	0,0386	0,0664	0,0846	0,1582	0,2607	0,3872	5		
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0028	0,0095	0,0188	0,0255	0,0573	0,1117	0,1938	4		
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0017	0,0039	0,0056	0,0153	0,0356	0,0730	3		
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005	0,0008	0,0028	0,0079	0,0193	2		
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0011	0,0032	1		
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0		
																						x	

										n=13													
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50			
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	13		
1	0,1225	0,2310	0,3270	0,4118	0,4867	0,5526	0,6107	0,6617	0,7065	0,7458	0,8791	0,9065	0,9450	0,9762	0,9903	0,9949	0,9963	0,9987	0,9996	0,9999	12		
2	0,0072	0,0270	0,0564	0,0932	0,1354	0,1814	0,2298	0,2794	0,3293	0,3787	0,6017	0,6635	0,7664	0,8733	0,9363	0,9615	0,9704	0,9874	0,9951	0,9983	11		
3	0,0003	0,0020	0,0062	0,0135	0,0245	0,0392	0,0578	0,0799	0,1054	0,1339	0,3080	0,3719	0,4983	0,6674	0,7975	0,8613	0,8868	0,9421	0,9731	0,9881	10		
4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0014	0,0031	0,0060	0,0103	0,0163	0,0242	0,0342	0,1180	0,1581	0,2527	0,4157	0,5794	0,6776	0,7217	0,8314	0,9071	0,9539	9		
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0013	0,0024	0,0041	0,0065	0,0342	0,0512	0,0991	0,2060	0,3457	0,4480	0,4995	0,6470	0,7721	0,8666	8		
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0005	0,0009	0,0075	0,0127	0,0300	0,0802	0,1654	0,2413	0,2841	0,4256	0,5732	0,7095	7		
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0013	0,0024	0,0070	0,0243	0,0624	0,1035	0,1295	0,2288	0,3563	0,5000	6		
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	5		
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4		
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	3		
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0013	0,0041	0,0112	2	
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0017	1	
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0	
																						x	
	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50			

0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,93 0,92 0,91 0,90 0,85 0,83 0,80 0,75 0,70 0,66 0,65 0,60 0,55 0,50

▲

0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

BANAKETA BINOMIALA; PROBABILITATE METATUAK

										n=17												
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50		
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	17	
1	0,1571	0,2907	0,4042	0,5004	0,5819	0,6507	0,7088	0,7577	0,7988	0,8332	0,9369	0,9549	0,9775	0,9925	0,9977	0,9990	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000	16	
2	0,0123	0,0446	0,0909	0,1465	0,2078	0,2717	0,3362	0,3995	0,4604	0,5182	0,7475	0,8017	0,8818	0,9499	0,9807	0,9904	0,9933	0,9979	0,9994	0,9999	15	
3	0,0006	0,0044	0,0134	0,0286	0,0503	0,0782	0,1118	0,1503	0,1927	0,2382	0,4802	0,5565	0,6904	0,8363	0,9226	0,9558	0,9673	0,9877	0,9959	0,9988	14	
4	0,0000	0,0003	0,0014	0,0040	0,0088	0,0164	0,0273	0,0419	0,0603	0,0826	0,2444	0,3113	0,4511	0,6470	0,7981	0,8696	0,8972	0,9536	0,9816	0,9936	13	
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0026	0,0051	0,0089	0,0145	0,0221	0,0987	0,1396	0,2418	0,4261	0,6113	0,7186	0,7652	0,8740	0,9404	0,9755	12	
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0027	0,0047	0,0319	0,0504	0,1057	0,2347	0,4032	0,5223	0,5803	0,7361	0,8529	0,9283	11	
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0083	0,0147	0,0377	0,1071	0,2248	0,3261	0,3812	0,5522	0,7098	0,8338	10	
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0017	0,0035	0,0109	0,0402	0,1046	0,1719	0,2128	0,3595	0,5257	0,6855	9	
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0007	0,0026	0,0124	0,0403	0,0755	0,0994	0,1989	0,3374	0,5000	8	
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0031	0,0127	0,0273	0,0383	0,0919	0,1834	0,3145	7	
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0032	0,0080	0,0120	0,0348	0,0826	0,1662	6	
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0019	0,0030	0,0106	0,0301	0,0717	5	
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0025	0,0086	0,0245	4
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0064	0,0016	3
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0001	2
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	1
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0
																						x
										n=18												
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50		
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	18	
1	0,1655	0,3049	0,4220	0,5204	0,6028	0,6717	0,7292	0,7771	0,8169	0,8499	0,9464	0,9624	0,9820	0,9944	0,9984	0,9993	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000	17	
2	0,0138	0,0495	0,1003	0,1607	0,2265	0,2945	0,3622	0,4281	0,4909	0,5497	0,7759	0,8272	0,9009	0,9605	0,9858	0,9932	0,9954	0,9987	0,9997	0,9999	16	
3	0,0007	0,0052	0,0157	0,0333	0,0581	0,0898	0,1275	0,1702	0,2168	0,2662	0,5203	0,5973	0,7287	0,8647	0,9400	0,9674	0,9764	0,9918	0,9975	0,9993	15	
4	0,0000	0,0004	0,0018	0,0050	0,0109	0,0201	0,0333	0,0506	0,0723	0,0982	0,2798	0,3521	0,4990	0,6943	0,8354	0,8983	0,9217	0,9672	0,9880	0,9962	14	
5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0015	0,0034	0,0067	0,0116	0,0186	0,0282	0,1206	0,1682	0,2836	0,4813	0,6673	0,7689	0,8114	0,9058	0,9589	0,9846	13	
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0021	0,0038	0,0064	0,0419	0,0653	0,1329	0,2825	0,4656	0,5878	0,6450	0,7912	0,8923	0,9519	12	
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0118	0,0206	0,0513	0,1390	0,2783	0,3915	0,4509	0,6257	0,7742	0,8811	11	
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0027	0,0053	0,0163	0,0569	0,1407	0,2233	0,2717	0,4366	0,6085	0,7597	10	
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0011	0,0043	0,0193	0,0596	0,1076	0,1391	0,2632	0,4222	0,5927	9	
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009	0,0054	0,0210	0,0433	0,0597	0,1347	0,2527	0,4073	8	
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0061	0,0144	0,0212	0,0576	0,1280	0,2403	7	
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0039	0,0062	0,0203	0,0537	0,1189	6	
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0009	0,0014	0,0058	0,0183	0,0481	5	
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0049	0,0154	4	
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0038	3	
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	2	
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	1	
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0	
																						x
0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,93 0,92 0,91 0,90 0,85 0,83 0,80 0,75 0,70 0,66 0,65 0,60 0,55 0,50																						x

BANAKETA BINOMIALA; PROBABILITATE METATUAK

									n=19															
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50				
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	19			
1	0,1738	0,3188	0,4394	0,5396	0,6226	0,6914	0,7481	0,7949	0,8334	0,8649	0,9544	0,9687	0,9856	0,9958	0,9989	0,9995	0,9997	0,9999	1,0000	1,0000	18			
2	0,0153	0,0546	0,1100	0,1751	0,2453	0,3171	0,3879	0,4560	0,5202	0,5797	0,8015	0,8498	0,9171	0,9690	0,9896	0,9953	0,9969	0,9992	0,9998	1,0000	17			
3	0,0009	0,0061	0,0183	0,0384	0,0665	0,1021	0,1439	0,1908	0,2415	0,2946	0,5587	0,6357	0,7631	0,8887	0,9538	0,9760	0,9830	0,9945	0,9985	0,9996	16			
4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0061	0,0132	0,0243	0,0398	0,0602	0,0853	0,1150	0,3159	0,3930	0,5449	0,7369	0,8668	0,9213	0,9409	0,9770	0,9923	0,9978	15			
5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0020	0,0044	0,0085	0,0147	0,0235	0,0352	0,1444	0,1989	0,3267	0,5346	0,7178	0,8121	0,8500	0,9304	0,9720	0,9904	14			
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0014	0,0029	0,0051	0,0086	0,0537	0,0824	0,1631	0,3322	0,5261	0,6481	0,7032	0,8371	0,9223	0,9682	13			
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0009	0,0017	0,0163	0,0281	0,0676	0,1749	0,3345	0,4569	0,5188	0,6919	0,8273	0,9165	12			
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0041	0,0079	0,0233	0,0775	0,1820	0,2793	0,3344	0,5122	0,6831	0,8204	11			
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0008	0,0018	0,0067	0,0287	0,0839	0,1462	0,1855	0,3325	0,5060	0,6762	10			
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0089	0,0326	0,0648	0,0875	0,1861	0,3290	0,5000	9			
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0023	0,0105	0,0241	0,0347	0,0885	0,1841	0,3238	8			
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0028	0,0074	0,0114	0,0352	0,0871	0,1796	7			
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0019	0,0031	0,0116	0,0342	0,0835	6			
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0007	0,0031	0,0109	0,0318	5			
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0006	0,0028	0,0096	4			
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	3			
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	2			
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1			
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0			

									n=20																															
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50																				
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	20																			
1	0,1821	0,3324	0,4562	0,5580	0,6415	0,7099	0,7658	0,8113	0,8484	0,8784	0,9612	0,9739	0,9885	0,9968	0,9992	0,9997	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	19																			
2	0,0169	0,0599	0,1198	0,1897	0,2642	0,3395	0,4131	0,4831	0,5484	0,6083	0,8244	0,8696	0,9308	0,9757	0,9924	0,9967	0,9979	0,9995	0,9999	1,0000	18																			
3	0,0010	0,0071	0,0210	0,0439	0,0755	0,1150	0,1610	0,2121	0,2666	0,3231	0,5951	0,6713	0,7939	0,9087	0,9645	0,9824	0,9879	0,9964	0,9991	0,9998	17																			
4	0,0000	0,0006	0,0027	0,0074	0,0159	0,0290	0,0471	0,0706	0,0993	0,1330	0,3523	0,4335	0,5886	0,7748	0,8929	0,9396	0,9556	0,9840	0,9951	0,9987	16																			
5	0,0000	0,0000	0,0003	0,0010	0,0026	0,0056	0,0107	0,0183	0,0290	0,0432	0,1702	0,2313	0,3704	0,5852	0,7625	0,8485	0,8818	0,9490	0,9811	0,9941	15																			
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0068	0,0113	0,0673	0,1018	0,1958	0,3828	0,5836	0,7028	0,7546	0,8744	0,9447	0,9793	14																			
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0013	0,0024	0,0219	0,0371	0,0867	0,2142	0,3920	0,5207	0,5834	0,7500	0,8701	0,9423	13																			
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0059	0,0113	0,0321	0,1018	0,2277	0,3385	0,3990	0,5841	0,7480	0,8684	12																			
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0028	0,0100	0,0409	0,1133	0,1905	0,2376	0,4044	0,5857	0,7483	11																			
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0026	0,0139	0,0480	0,0919	0,1218	0,2447	0,4086	0,5881	10																			
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0039	0,0171	0,0376	0,0532	0,1275	0,2493	0,4119	9																			
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0051	0,0130	0,0196	0,0565	0,1308	0,2517	8																			
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0037	0,0060	0,0210	0,0580	0,1316	7																			
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0009	0,0015	0,0065	0,0214	0,0577	6																			
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0003	0,0016	0,0064	0,0207	5																			
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0059	4																			
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	3																			
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	2																			
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1																			
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0																			
																						x																		
0,99																						0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,85	0,83	0,80	0,75	0,70	0,66	0,65	0,60	0,55	0,50

0,99 0,98 0,97 0,96 0,95 0,94 0,93 0,92 0,91 0,90 0,85 0,83 0,80 0,75 0,70 0,66 0,65 0,60 0,55 0,50

8.3. POISSONEN BANAKETA

Poissonen probabilitate-banaketak denbora-tarte jakinetan gertatutako jazoeren probabilitateak aztertzen ditu. Jazoera horiek independenteak dira eta haien agerpen-tasa, batez besteko aritmetikoa, ezaguna da.

Simeón-Denis Poisson (1781-1840) matematikari frantziarrak *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (1837) argitaratu zuen. Bertan azaldu zituen probabilitate-banaketaren oinarriak.

Banaketaren probabilitate-funtzioa honako hau da:

$$\text{Prob}(X = x) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^x}{x!} \quad (x=0,1,2,3,\dots)$$

non:

x	aztertutako jazoeraren agerpen kopurua
e	logaritmo arrunten oinarria ($e=2,7182818284\dots$)
μ	denbora-tarte jakineko gertatze-tasa edo batez besteko aritmetikoa; $\mu = \lambda = n.p$

n eta p , hurrenez hurren, laginaren tamaina eta jazoerari dagokion probabilitatea dira, eta x , berriz, aztertzen ari garen jazoera kopurua.

Adibidez, UEUko argitalpenetan, inprenta-arazoak direla-eta, ale akastunen proportzioa % 3 da. Hurrengo argitaraldia 300 alekoa bada, jakin nahi dugu zer probabilitate dagoen hiru ale akastun izateko. Ikus dezagun:

$$n = 300 ; p = 0,03 \quad \text{Beraz, } \mu = n.p = 300.0,03 = 9$$

Hortik, $\text{Prob}(X=2)$ honela kalkulatzen dugu:

$$\text{Prob}(X = 2) = 2,71828\dots^{-9} \cdot \frac{9^2}{2!} = 0,015$$

Taulan begiratzeko, aurrenik, bilatu behar dugu taularen buruan $\mu=9$, gero, azpitaula horretan lehenengo zutabean $x=3$ eta errenkada horretan aurkituko dugu nahi dugun probabilitatea: 0,015.

8.3.1. Poissonen banaketa; banakako probabilitateak

	μ																				
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	
0	0,9901	0,9802	0,9705	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139	0,9048	0,8607	0,8187	0,7788	0,7408	0,7047	0,6703	0,6376	0,6065	0,5770	0,5488	
1	0,0099	0,0196	0,0291	0,0384	0,0476	0,0565	0,0653	0,0739	0,0823	0,0905	0,1291	0,1638	0,1947	0,2223	0,2466	0,2681	0,2869	0,3033	0,3173	0,3293	
2	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0012	0,0017	0,0023	0,0030	0,0037	0,0045	0,0097	0,0164	0,0243	0,0333	0,0432	0,0536	0,0646	0,0758	0,0873	0,0988	
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0020	0,0033	0,0050	0,0072	0,0097	0,0126	0,0160	0,0198	
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0004	0,0007	0,0011	0,0016	0,0022	0,0030	
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0004	

	μ																				
x	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	
0	0,5221	0,4966	0,4724	0,4493	0,4274	0,4066	0,3867	0,3679	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353	0,1225	0,1108	
1	0,3393	0,3476	0,3543	0,3595	0,3633	0,3659	0,3674	0,3679	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707	0,2572	0,2438	
2	0,1103	0,1217	0,1329	0,1438	0,1544	0,1647	0,1745	0,1839	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707	0,2700	0,2681	
3	0,0239	0,0284	0,0332	0,0383	0,0438	0,0494	0,0553	0,0613	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1805	0,1890	0,1966	
4	0,0039	0,0050	0,0062	0,0077	0,0093	0,0111	0,0131	0,0153	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902	0,0992	0,1082	
5	0,0005	0,0007	0,0009	0,0012	0,0016	0,0020	0,0025	0,0031	0,0045	0,0063	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361	0,0417	0,0476	
6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0008	0,0013	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120	0,0146	0,0175	
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034	0,0044	0,0055	
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009	0,0012	0,0015	
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	

	μ																				
x	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00	3,10	3,20	3,30	3,40	3,50	3,60	3,70	3,80	3,90	4,00	4,10	4,20	
0	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498	0,0451	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183	0,0166	0,0150	
1	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733	0,0680	0,0630	
2	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465	0,1393	0,1323	
3	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954	0,1904	0,1852	
4	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954	0,1951	0,1944	
5	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0941	0,1008	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563	0,1600	0,1633	
6	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042	0,1093	0,1143	
7	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0140	0,0163	0,0188	0,0216	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0386	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595	0,0640	0,0686	
8	0,0020	0,0025	0,0031	0,0039	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298	0,0328	0,0360	
9	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0077	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132	0,0150	0,0168	
10	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053	0,0061	0,0071	
11	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0027	
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	0,0009	
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	

x	μ																			
	4,30	4,40	4,50	4,60	4,70	4,80	4,90	5,00	5,10	5,20	5,30	5,40	5,50	5,60	5,70	5,80	5,90	6,00	6,10	6,20
0	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0075	0,0067	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0034	0,0030	0,0027	0,0025	0,0022	0,0020
1	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0428	0,0395	0,0365	0,0337	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149	0,0137	0,0126
2	0,1254	0,1188	0,1125	0,1064	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446	0,0417	0,0390
3	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892	0,0849	0,0806
4	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339	0,1294	0,1250
5	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1748	0,1753	0,1755	0,1753	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606	0,1579	0,1549
6	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606	0,1605	0,1601
7	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1235	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377	0,1399	0,1418
8	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033	0,1066	0,1099
9	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688	0,0723	0,0757
10	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413	0,0441	0,0469
11	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225	0,0245	0,0265
12	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113	0,0124	0,0137
13	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0016	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0065
14	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0020	0,0022	0,0025	0,0029
15	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012

x	μ																			
	6,30	6,40	6,50	6,60	6,70	6,80	6,90	7,00	7,10	7,20	7,30	7,40	7,50	7,60	7,70	7,80	7,90	8,00	8,10	8,20
0	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003
1	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0083	0,0076	0,0070	0,0064	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045	0,0042	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
2	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0125	0,0116	0,0107	0,0100	0,0092
3	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286	0,0269	0,0252
4	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573	0,0544	0,0517
5	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1350	0,1314	0,1277	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916	0,0882	0,0849
6	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1547	0,1529	0,1511	0,1490	0,1468	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221	0,1191	0,1160
7	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490	0,1489	0,1486	0,1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396	0,1378	0,1359
8	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304	0,1322	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1382	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396	0,1395	0,1392
9	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014	0,1043	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1225	0,1241	0,1256	0,1269
10	0,0498	0,0528	0,0558	0,0588	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993	0,1017	0,1040
11	0,0286	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452	0,0478	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0667	0,0695	0,0722	0,0749	0,0776
12	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0264	0,0283	0,0303	0,0323	0,0344	0,0366	0,0388	0,0411	0,0434	0,0457	0,0481	0,0506	0,0530
13	0,0073	0,0081	0,0089	0,0099	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296	0,0315	0,0334
14	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071	0,0078	0,0086	0,0095	0,0104	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169	0,0182	0,0196
15	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090	0,0098	0,0107
16	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0015	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,0027	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0045	0,0050	0,0055

		μ																		
x	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,50
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,1571	0,2907	0,4042	0,5004	0,5819	0,6507	0,7088	0,7577	0,7988	0,8332	0,9369	0,9549	0,9775	0,9925	0,9977	0,9990	0,9993	0,9998	1,0000	1,0000
2	0,0123	0,0446	0,0909	0,1465	0,2078	0,2717	0,3362	0,3995	0,4604	0,5182	0,7475	0,8017	0,8818	0,9499	0,9807	0,9904	0,9933	0,9979	0,9994	0,9999
3	0,0006	0,0044	0,0134	0,0286	0,0503	0,0782	0,1118	0,1503	0,1927	0,2382	0,4802	0,5565	0,6904	0,8363	0,9226	0,9558	0,9673	0,9877	0,9959	0,9988
4	0,0000	0,0003	0,0014	0,0040	0,0088	0,0164	0,0273	0,0419	0,0603	0,0826	0,2444	0,3113	0,4511	0,6470	0,7981	0,8696	0,8972	0,9536	0,9816	0,9936
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0026	0,0051	0,0089	0,0145	0,0221	0,0987	0,1396	0,2418	0,4261	0,6113	0,7186	0,7652	0,8740	0,9404	0,9755
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0027	0,0047	0,0319	0,0504	0,1057	0,2347	0,4032	0,5223	0,5803	0,7361	0,8529	0,9283
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0008	0,0083	0,0147	0,0377	0,1071	0,2248	0,3261	0,3812	0,5522	0,7098	0,8338
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0017	0,0035	0,0109	0,0402	0,1046	0,1719	0,2128	0,3595	0,5257	0,6855
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0007	0,0026	0,0124	0,0403	0,0755	0,0994	0,1989	0,3374	0,5000
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0031	0,0127	0,0273	0,0383	0,0919	0,1834	0,3145
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0032	0,0080	0,0120	0,0348	0,0826	0,1662
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0019	0,0030	0,0106	0,0301	0,0717
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0025	0,0086	0,0245
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0064
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

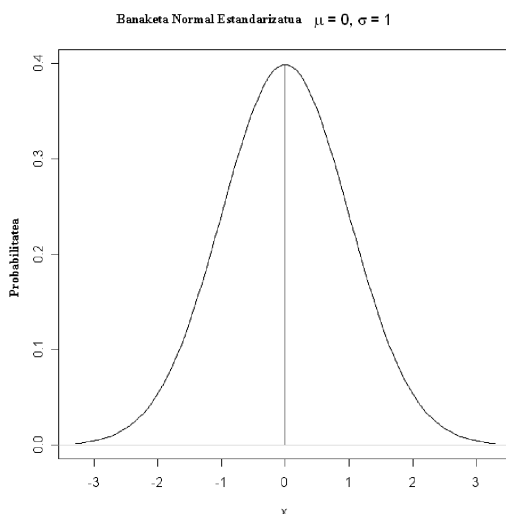
		μ																			
x		8,30	8,40	8,50	8,60	8,70	8,80	8,90	9,00	9,10	9,20	9,30	9,40	9,50	9,60	9,70	9,80	9,90	10,00	10,50	11,00
0		0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
1		0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0015	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0003	0,0002
2		0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023	0,0015	0,0010
3		0,0237	0,0222	0,0208	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076	0,0053	0,0037
4		0,0491	0,0467	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189	0,0140	0,0102
5		0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378	0,0293	0,0224
6		0,1129	0,1097	0,1066	0,1035	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631	0,0513	0,0411
7		0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171	0,1145	0,1118	0,1092	0,1064	0,1037	0,1010	0,0983	0,0955	0,0928	0,0901	0,0769	0,0646
8		0,1388	0,1382	0,1375	0,1366	0,1356	0,1345	0,1332	0,1318	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126	0,1009	0,0888
9		0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251	0,1177	0,1085
10		0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1251	0,1251	0,1236	0,1194
11		0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0926	0,0948	0,0970	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137	0,1180	0,1194
12		0,0555	0,0579	0,0604	0,0629	0,0654	0,0679	0,0703	0,0728	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0929	0,0948	0,1032	0,1094
13		0,0354	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0482	0,0504	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729	0,0834	0,0926
14		0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521	0,0625	0,0728
15		0,0116	0,0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347	0,0438	0,0534
16		0,0060	0,0066	0,0072	0,0079	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0158	0,0169	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217	0,0287	0,0367
17		0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128	0,0177	0,0237
18		0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071	0,0104	0,0145

									u																
x	11,50	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00	16,00	17,00	18,00	19,00	20,00	21,00	22,00	23,00	24,00	25,00	30,00	50,					
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
2	0,0007	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
3	0,0026	0,0018	0,0012	0,0008	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
4	0,0074	0,0053	0,0038	0,0027	0,0019	0,0013	0,0009	0,0007	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
5	0,0170	0,0127	0,0095	0,0070	0,0051	0,0037	0,0027	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
6	0,0325	0,0255	0,0197	0,0152	0,0115	0,0087	0,0065	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
7	0,0535	0,0437	0,0353	0,0281	0,0222	0,0174	0,0135	0,0104	0,0060	0,0034	0,0019	0,0010	0,0005	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,00					
8	0,0769	0,0655	0,0551	0,0457	0,0375	0,0304	0,0244	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013	0,0007	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,00					
9	0,0982	0,0874	0,0765	0,0661	0,0563	0,0473	0,0394	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029	0,0017	0,0009	0,0005	0,0003	0,0002	0,0000	0,00					
10	0,1129	0,1048	0,0956	0,0859	0,0760	0,0663	0,0571	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058	0,0035	0,0020	0,0012	0,0007	0,0004	0,0000	0,00					
11	0,1181	0,1144	0,1087	0,1015	0,0932	0,0844	0,0753	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106	0,0067	0,0041	0,0025	0,0014	0,0008	0,0000	0,00					
12	0,1132	0,1144	0,1132	0,1099	0,1049	0,0984	0,0910	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176	0,0116	0,0075	0,0047	0,0029	0,0017	0,0000	0,00					
13	0,1001	0,1056	0,1089	0,1099	0,1089	0,1060	0,1015	0,0956	0,0814	0,0659	0,0509	0,0378	0,0271	0,0188	0,0127	0,0083	0,0053	0,0033	0,0000	0,00					
14	0,0822	0,0905	0,0972	0,1021	0,1050	0,1060	0,1051	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387	0,0282	0,0199	0,0137	0,0091	0,0059	0,0000	0,00					
15	0,0630	0,0724	0,0810	0,0885	0,0945	0,0989	0,1016	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0517	0,0395	0,0292	0,0209	0,0146	0,0099	0,0000	0,00					
16	0,0453	0,0543	0,0633	0,0719	0,0798	0,0866	0,0920	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646	0,0518	0,0402	0,0301	0,0219	0,0155	0,0000	0,00					
17	0,0307	0,0383	0,0465	0,0550	0,0633	0,0713	0,0785	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760	0,0640	0,0520	0,0407	0,0309	0,0227	0,0000	0,00					
18	0,0196	0,0256	0,0323	0,0397	0,0475	0,0554	0,0632	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844	0,0747	0,0635	0,0520	0,0412	0,0316	0,0001	0,00					
19	0,0119	0,0161	0,0213	0,0272	0,0338	0,0409	0,0483	0,0558	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888	0,0826	0,0735	0,0629	0,0520	0,0415	0,0001	0,00					
20	0,0068	0,0097	0,0133	0,0177	0,0228	0,0286	0,0350	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888	0,0867	0,0809	0,0724	0,0624	0,0519	0,0002	0,00					
21																					0,0713		0,0618	0,0004	0,00
22																					0,0778		0,0702	0,0007	0,00
23																					0,0812		0,0763	0,0012	0,00
24																					0,0812		0,0795	0,0019	0,00
25																					0,0779		0,0795	0,0031	0,00
26																					0,0719		0,0765	0,0047	0,00
27																					0,0639		0,0708	0,0070	0,00
28																					0,0548		0,0632	0,0100	0,00
29																					0,0453		0,0545	0,0139	0,00
30																					0,0363		0,0454	0,0185	0,00
31																					0,0281		0,0366	0,0238	0,00
32																					0,0211		0,0286	0,0298	0,00
33																					0,0153		0,0217	0,0361	0,00
34																					0,0108		0,0159	0,0425	0,00
35																					0,0074		0,0114	0,0485	0,00
36																					0,0049		0,0079	0,0539	0,00
37																					0,0032		0,0053	0,0583	0,01
38																					0,0020		0,0035	0,0614	0,01
39																					0,0013		0,0023	0,0630	0,01
40																					0,0008		0,0014	0,0630	0,02
41																					0,0004		0,0009	0,0614	0,02
42																					0,0003		0,0005	0,0585	0,03
43																					0,0001		0,0003	0,0544	0,03
44																					0,0001		0,0002	0,0495	0,04
45																					0,0000		0,0001	0,0440	0,04
46																					0,0000		0,0001	0,0382	0,04
47																					0,0000		0,0000	0,0325	0,05
48																					0,0000		0,0000	0,0271	0,05
49																					0,0000		0,0000	0,0221	0,05
50																					0,0000		0,0000	0,0177	0,05

8.4. BANAKETA NORMAL ESTANDARIZATUA

Banaketa normal estandarizatua — $N(0,1)$ —, banaketa mota erabilienetako bat da. Banaketa simetrikoa, muturretan asintotakoa eta mesokurtikoa da. Banaketa honetan batez besteko aritmetikoa, mediana eta moda bat datoz, eta zero balioa hartzen dute; desbiderapen tipikoa —eta barientza kasu honetan— bat da. Haren probabilitate-funtzioa honako hau da:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

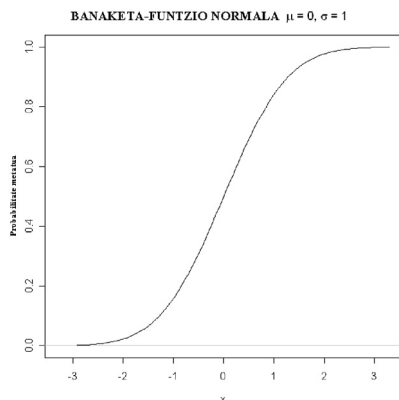


VIII.1. grafikoa. Banaketa normal estandarizatua.

Kurbaren erpinean ordenatuak 0,3889 balioa hartzen du. Erabiltzen diren taulak, berriz, banaketa-funtzioari dagozkio. Jarraian formula eta banaketa-funtzioaren irudia aurkezten dizkizuegu:

$$\Phi(z) = \text{prob}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt$$

Horrela kalkulatzeko dira, hain zuzen ere, tauletan agertzen diren probabilitate-balioak, probabilitate metatuak dira beraz.



VIII.2. grafikoa. Banaketa-funtzio normala.

8.4.1. $N(0,1)$ taulen erabilera

Taulen aurreneko zutabeen ordenatuen balioak agertzen dira, ordenatubalioek kurba-puntu jakinetako probabilitate-balioak adierazten dizkigute. Ikus daitekeenez, ordenatu-baliorik handiena, 0,39894, kurbaren punturik altuenari dagokio, puntuazio tipikoak zero balio duenean.

Ordenatuak aparte utzita, tauletan agertzen diren gainerako probabilitateak banaketa-funtzioaren emaitzak dira.

Taulen sarrerak, lehenbiziko errenkada eta bigarren zutabeak dira, hurrenez hurren, puntuazio tipikoen (z) batekoak eta hamarrenekoak —taulako bigarren zutabeen horiz markaturik—. Bigarren hamarrena, puntuazio tipikoaren ehunenekoa, berriz, taularen lehenengo errenkadan agertzen zaigu.

Demagun $-1,83$ puntuazio tipikoa; banaketa normal estandarizatuaren probabilitate-funtzioaren bitartez, puntuazio horri dagokion ordenatua kalkula dezakegu:

$$\phi(-1,83) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-1,83)^2} = 0,07895$$

Balio horrek adierazten du zenbatekoa den puntuazio tipiko jakin horri dagokion probabilitatea. Kalkulatu dugun ordenatuaren balio hori taulan ikus daiteke $-1,8$ puntuazio tipikoaren ezker aldeko zutabeen. Taulek, ikusten denez, kalkuluak egin behar ez izateko laguntzen digute.

Esandako $-1,83$ puntuazio tipikoari zein probabilitate dagokion kalkulatuta eta ikusi dugu. Beste kontua da jakitea zein den $-1,83$ puntuazio tipikorainoko probabilitatea. Hau da, jakitea zer probabilitate dagokien puntuazio horri eta bera baino txikiagoak diren guztiei. Probabilitate hori banaketa-funtzioaren bitartez kalkulatuta behar dugu. Baina hori baino askoz errazagoa da taulak erabiltzea. Ikus dezagun:

$$\Phi(-1,83) = \text{prob}(Z \leq -1,83) = 0,0336$$

Probabilitate-balio hori tauletan ikusteko, bilatu bigarren zutabea $-1,8$ puntuazio tipikoa eta lehenengo errenkadan ehunenekoari dagokion zifra (3); aurkitutako errenkada eta zutabe horiek elkartzen diren gelaxkan bilatzen dugun probabilitatea dago.

Taulak bi orrialdetan agertzen dira. Aurrenekoa banaketaren ezker aldeko alderdiari dagokio, puntuazio tipikoak zero baino txikiagoak diren kasuei. Hurrena, berriz, zerotik gorako puntuazio tipikoei dagokie. Banaketa simetrikoa dela eta, puntuazio tipikoaren balio absolutuak (zeinurik gabeko zifrak) probabilitate-balio bera uzten du banaketaren muturretan; negatiboa denean, ezker aldean eta positiboa denean, eskuinaldean. Taularen erabilerak berak erakusten du ondoen esaten dugun hori.

Erabilitako notazioari dagokionez, irizpide argigarriak adierazi nahi ditugu. Probabilitateak, jakina denez, zero eta bat bitarteko zenbakiak dira. Zenbakiak oso txikiak direnean —zerotik oso gertu daudenean—, edo oso handiak direnean —batetik oso gertu daudenean— notazio berezia erabili dugu. Zenbaki oso txikiak adierazteko, Excel kalkulu-orriak darabilen notazioa hobetsi dugu. Adibidez $-5,62$ puntuazio tipikorainoko probabilitatea horrela agertzen da:

$$\Phi(-5,62) = \text{prob}(Z \leq -5,62) = 9,550\text{E}-09$$

Ekuaizioaren azken zenbaki hori notazio zientifikoa da eta horrela ulertu behar da.

Ohiko idazkeran ipintzeko, errazagoa da begiratzea berretzaileak zenbat balio duen eta zein den aurretik daraman zeinua eta, negatiboa denean, koma ezker aldean eramango dugu berretzaileak adierazten duen horrenbesteko leku mugituz, eta hutsuneak zeroz betez.

$$9,550 \cdot 10^{-9} = \frac{9,55}{10^9} = 0,00000000955$$

Tauletan notazio zientifikotik harago, beste notazio mota berezi bat erabili dugu. Oso probabilitate-balio handiak direnean, unitatetik oso gertukoak direnean, lau hamarreneko erabiltzea ez da nahikoa izaten elkarren arteko diferentziak antzeman ahal izateko. Horrelako kasuetan, probabilitatearen koma ostean zenbat 9 erantsi behar diren jakiteko, aurrenik 9 zenbakia eta berretzailea idatzi ditugu; berretzaile horrek, hain zuzen ere, koma osteko bederatzi kopurua adierazten du. Jo dagigun $5,25$ puntuazio tipikoa, taulak honako probabilitate-balio hau ematen digu: 9^6 $9,2395\text{E}-01$. Notazio berezi hori ohiko idazkerara ekarrita, honako zenbaki hau izango dugu:

$$9^6$$
 $9,2395\text{E}-01 = 0,99999992395$

$\phi(z)$	z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,076E-09	-6.0	9,870E-10	9,300E-10	8,700E-10	8,200E-10	7,710E-10	7,240E-10	6,810E-10	6,400E-10	6,010E-10	5,650E-10
1,102E-08	-5.9	1,818E-09	1,710E-09	1,610E-09	1,510E-09	1,425E-09	1,341E-09	1,261E-09	1,186E-09	1,116E-09	1,049E-09
1,977E-08	-5.8	3,316E-09	3,120E-09	2,940E-09	2,770E-09	2,610E-09	2,458E-09	2,314E-09	2,179E-09	2,051E-09	1,931E-09
3,514E-08	-5.7	5,990E-09	5,650E-09	5,330E-09	5,020E-09	4,734E-09	4,462E-09	4,206E-09	3,964E-09	3,735E-09	3,519E-09
6,183E-08	-5.6	1,072E-08	1,012E-08	9,550E-09	9,010E-09	8,503E-09	8,022E-09	7,569E-09	7,140E-09	6,735E-09	6,352E-09
1,077E-07	-5.5	1,899E-08	1,794E-08	1,695E-08	1,601E-08	1,512E-08	1,428E-08	1,349E-08	1,274E-08	1,203E-08	1,135E-08
1,857E-07	-5.4	3,332E-08	3,151E-08	2,980E-08	2,818E-08	2,664E-08	2,519E-08	2,381E-08	2,250E-08	2,127E-08	2,010E-08
3,171E-07	-5.3	5,790E-08	5,481E-08	5,188E-08	4,911E-08	4,647E-08	4,398E-08	4,161E-08	3,937E-08	3,724E-08	3,523E-08
5,361E-07	-5.2	9,964E-08	9,442E-08	8,946E-08	8,476E-08	8,029E-08	7,605E-08	7,203E-08	6,821E-08	6,459E-08	6,116E-08
8,972E-07	-5.1	1,698E-07	1,611E-07	1,528E-07	1,449E-07	1,374E-07	1,302E-07	1,235E-07	1,170E-07	1,109E-07	1,051E-07
1,487E-06	-5.0	2,867E-07	2,722E-07	2,584E-07	2,452E-07	2,328E-07	2,209E-07	2,096E-07	1,989E-07	1,887E-07	1,790E-07
2,439E-06	-4.9	4,792E-07	4,554E-07	4,327E-07	4,112E-07	3,906E-07	3,711E-07	3,525E-07	3,348E-07	3,179E-07	3,019E-07
3,961E-06	-4.8	7,933E-07	7,547E-07	7,178E-07	6,827E-07	6,492E-07	6,173E-07	5,869E-07	5,580E-07	5,304E-07	5,042E-07
6,370E-06	-4.7	1,301E-06	1,239E-06	1,179E-06	1,123E-06	1,069E-06	1,017E-06	9,680E-07	9,211E-07	8,765E-07	8,339E-07
1,014E-05	-4.6	2,112E-06	2,013E-06	1,919E-06	1,828E-06	1,742E-06	1,660E-06	1,581E-06	1,506E-06	1,434E-06	1,366E-06
1,598E-05	-4.5	3,398E-06	3,241E-06	3,092E-06	2,949E-06	2,813E-06	2,682E-06	2,558E-06	2,439E-06	2,325E-06	2,216E-06
2,494E-05	-4.4	5,413E-06	5,169E-06	4,935E-06	4,712E-06	4,498E-06	4,294E-06	4,098E-06	3,911E-06	3,732E-06	3,561E-06
3,854E-05	-4.3	8,540E-06	8,163E-06	7,801E-06	7,455E-06	7,124E-06	6,807E-06	6,503E-06	6,212E-06	5,934E-06	5,668E-06
5,894E-05	-4.2	1,335E-05	1,277E-05	1,222E-05	1,168E-05	1,118E-05	1,069E-05	1,022E-05	9,774E-06	9,345E-06	8,934E-06
8,926E-05	-4.1	2,066E-05	1,978E-05	1,894E-05	1,814E-05	1,737E-05	1,662E-05	1,591E-05	1,523E-05	1,458E-05	1,395E-05
1,338E-04	-4.0	3,167E-05	3,036E-05	2,910E-05	2,789E-05	2,673E-05	2,561E-05	2,454E-05	2,351E-05	2,252E-05	2,157E-05
1,987E-04	-3.9	4,810E-05	4,615E-05	4,427E-05	4,247E-05	4,074E-05	3,908E-05	3,747E-05	3,594E-05	3,446E-05	3,304E-05
2,919E-04	-3.8	7,235E-05	6,948E-05	6,673E-05	6,407E-05	6,152E-05	5,906E-05	5,669E-05	5,442E-05	5,223E-05	5,012E-05
4,248E-04	-3.7	1,078E-04	1,036E-04	9,961E-05	9,574E-05	9,201E-05	8,842E-05	8,496E-05	8,162E-05	7,841E-05	7,532E-05
6,119E-04	-3.6	1,591E-04	1,531E-04	1,473E-04	1,417E-04	1,363E-04	1,311E-04	1,261E-04	1,213E-04	1,166E-04	1,121E-04
0,00087	-3.5	2,326E-04	2,241E-04	2,158E-04	2,078E-04	2,001E-04	1,926E-04	1,854E-04	1,785E-04	1,718E-04	1,653E-04
0,00123	-3.4	3,369E-04	3,248E-04	3,131E-04	3,018E-04	2,909E-04	2,803E-04	2,701E-04	2,602E-04	2,507E-04	2,415E-04
0,00172	-3.3	4,834E-04	4,665E-04	4,501E-04	4,342E-04	4,189E-04	4,041E-04	3,897E-04	3,758E-04	3,624E-04	3,495E-04
0,00238	-3.2	6,871E-04	6,637E-04	6,410E-04	6,190E-04	5,976E-04	5,770E-04	5,571E-04	5,377E-04	5,190E-04	5,009E-04
0,00327	-3.1	9,676E-04	9,354E-04	9,043E-04	8,740E-04	8,447E-04	8,164E-04	7,888E-04	7,622E-04	7,364E-04	7,114E-04
0,00443	-3.0	1,350E-03	1,306E-03	1,264E-03	1,223E-03	1,183E-03	1,144E-03	1,107E-03	1,070E-03	1,035E-03	1,001E-03
0,00595	-2.9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
0,00792	-2.8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
0,01042	-2.7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
0,01358	-2.6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
0,01753	-2.5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
0,02239	-2.4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
0,02833	-2.3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
0,03547	-2.2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
0,04398	-2.1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
0,05399	-2.0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
0,06562	-1.9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
0,07895	-1.8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
0,09405	-1.7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
0,11092	-1.6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
0,12952	-1.5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
0,14973	-1.4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
0,17137	-1.3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
0,19419	-1.2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
0,21785	-1.1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
0,24197	-1.0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
0,26609	-0.9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
0,28969	-0.8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,31225	-0.7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,33322	-0.6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,35207	-0.5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,36827	-0.4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,38139	-0.3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,39104	-0.2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,39605	-0.1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,39894	-0.0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

$\phi(z)$	z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.39894	0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.39695	0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.39104	0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.38139	0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.36827	0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.35207	0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.33322	0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.31225	0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.28069	0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.26609	0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
0.24197	1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8511	0.8534	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
0.21785	1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
0.19419	1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
0.17173	1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
0.14973	1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
0.12952	1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
0.11092	1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
0.09405	1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
0.07895	1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
0.06562	1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
0.05399	2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
0.04398	2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
0.03547	2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
0.02833	2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
0.02239	2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9929	0.9932	0.9936	0.9939	0.9943	0.9936
0.01753	2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
0.01358	2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
0.01042	2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
0.00792	2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9979	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
0.00595	2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	

8.5. STUDENTEN t BANAKETA

«Student» gaitzenez ezaguna egin zen Willian Sealy Gosset (186–1937) Britainia Handiko kimikari eta estatistikariari zor diogu t probabilitate-banaketa. Banaketa mota hauek hipotesi-test parametrikoean erabili ohi dira. Horrelakoetan, aurrekari parametrikoak betetzen direla suposatzen da, eta hortaz, aldagai eta laginen normaltasuna, homozedastizitatea eta independentzia betetzen direnean erabiltzen dira.

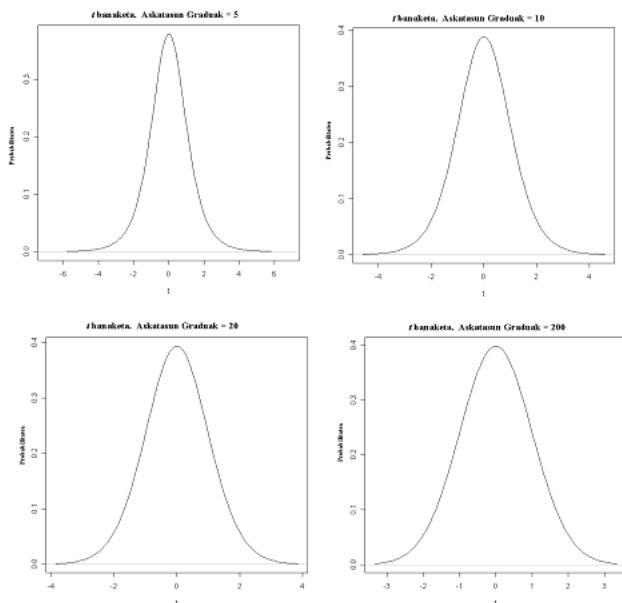
Zorizko lagin bakarren kasuan t banaketak honelako ezaugarriak dauzka:

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma = \frac{(\bar{Y} - \mu)}{\sqrt{\frac{S_y}{n}}} \quad \text{Askatasun-graduak: } \nu = n - 1$$

Lagin biak independenteak direnean, berriz:

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_{\mu_1 - \mu_2} = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{Askatasun-graduak: } \nu = n_1 + n_2 - 2$$

Taularen aurreneko errenkadan konfiantza-maila $(1-\alpha)$ agertzen da, eta aurreneko zutabean, berriz, askatasun-graduak. Demagun eskuinaldeko testa, $n=10$ eta $\alpha=0,05$, orduan, begiratu beharko genuke $\nu=n-1=9$ (askatasun-graduak) eta $q=1-\alpha=0,95$ (esangura-maila). Taulan agertzen zaigun t balioa 1,8331 da.



VIII.3. grafikoa. Studenten t banaketak; 5, 10, 20 eta 200 askatasun-graduak.

	Eskuinaldekoa. Probabilitate-balioak $q = 1 - \alpha$					
	0,900	0,925	0,950	0,975	0,990	0,995
1	3,0777	4,1653	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567
2	1,8856	2,2819	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,6377	1,9243	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,5332	1,7782	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,4759	1,6994	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,4398	1,6502	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,4149	1,6166	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,3968	1,5922	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,3830	1,5737	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,3722	1,5592	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	1,3634	1,5476	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,3562	1,5380	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,3502	1,5299	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,3450	1,5231	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,3406	1,5172	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,3368	1,5121	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,3334	1,5077	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,3304	1,5037	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,3277	1,5002	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,3253	1,4970	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,3232	1,4942	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,3212	1,4916	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,3195	1,4893	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,3178	1,4871	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,3163	1,4852	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,3150	1,4834	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,3137	1,4817	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,3125	1,4801	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,3114	1,4787	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,3104	1,4774	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
31	1,3095	1,4761	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440
32	1,3086	1,4749	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385
33	1,3077	1,4738	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333
34	1,3070	1,4728	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284
35	1,3062	1,4718	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238
36	1,3055	1,4709	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195
37	1,3049	1,4701	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154
38	1,3042	1,4692	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116
39	1,3036	1,4685	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079
40	1,3031	1,4677	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045
41	1,3025	1,4670	1,6829	2,0195	2,4208	2,7012
42	1,3020	1,4664	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981
43	1,3016	1,4657	1,6811	2,0167	2,4163	2,6951
44	1,3011	1,4651	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923
45	1,3006	1,4645	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896
46	1,3002	1,4640	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870
47	1,2998	1,4635	1,6779	2,0117	2,4083	2,6846
48	1,2994	1,4629	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822
49	1,2991	1,4625	1,6766	2,0096	2,4049	2,6800
50	1,2987	1,4620	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778
55	1,2971	1,4599	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682
60	1,2958	1,4582	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603
65	1,2947	1,4567	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536
70	1,2938	1,4555	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479
70	1,2938	1,4555	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479
80	1,2922	1,4535	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387
90	1,2910	1,4519	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316
100	1,2901	1,4507	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259
150	1,2872	1,4469	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090
200	1,2858	1,4451	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006
	1,2816	1,4395	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758

Askatasun-graduak $v = n - 1$

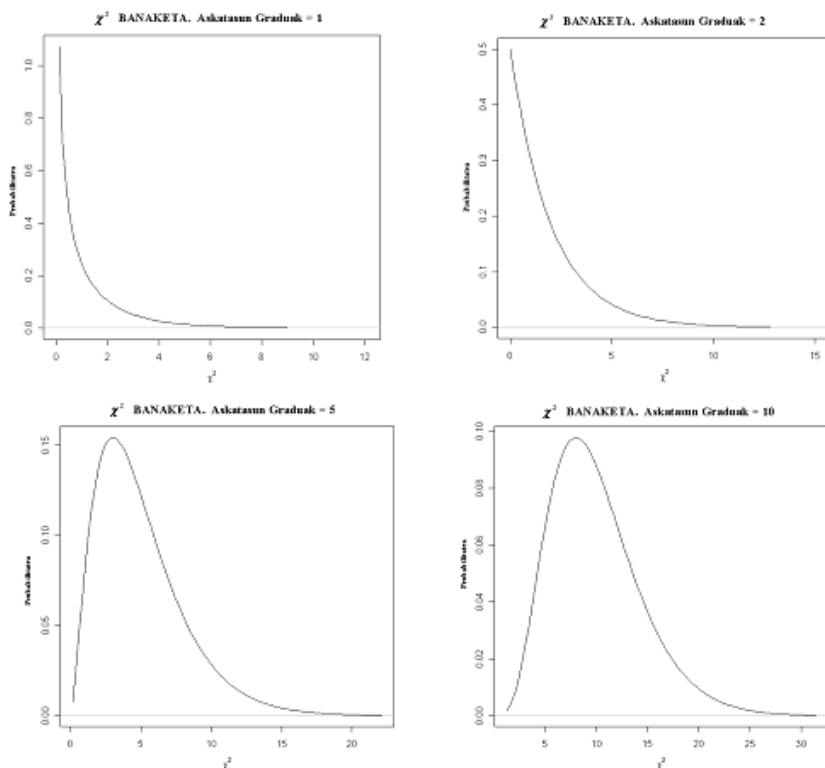
8.6. χ^2 BANAKETA

χ^2 banaketa banaketa soil bat baino gehiago banaketa multzoa da. Demagun $v = (n-1)$, askatasun-graduak χ^2 banaketa; batez bestekoa v izango litzateke, eta desbiderapen tipikoa eta asimetria honako hauek izango lirateke:

$$\text{Desbiderapen tipikoa: } \sqrt{2v} \qquad \text{Asimetria: } \sqrt{\frac{8}{v}}$$

Horiek horrela, χ^2 banaketa guztiak asimetrikoki positiboak dira. Hala ere, laginaren tamaina handia denean asimetriak desagertzera jotzen du. Alegia, χ^2_{n-1} banaketak banaketa normalerantz jotzen du n handitzean. Hauxe da haren probabilitate-funtzioa:
$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

Ondorengo irudietan agertzen dizuegu χ^2 banaketak hartzen duen itxura askatasun-graduak 1, 2, 5 eta 10 direnean.



VIII.4. grafikoa. χ^2 probabilitate-banaketak, 1, 2, 5 10 askatasun-graduak.

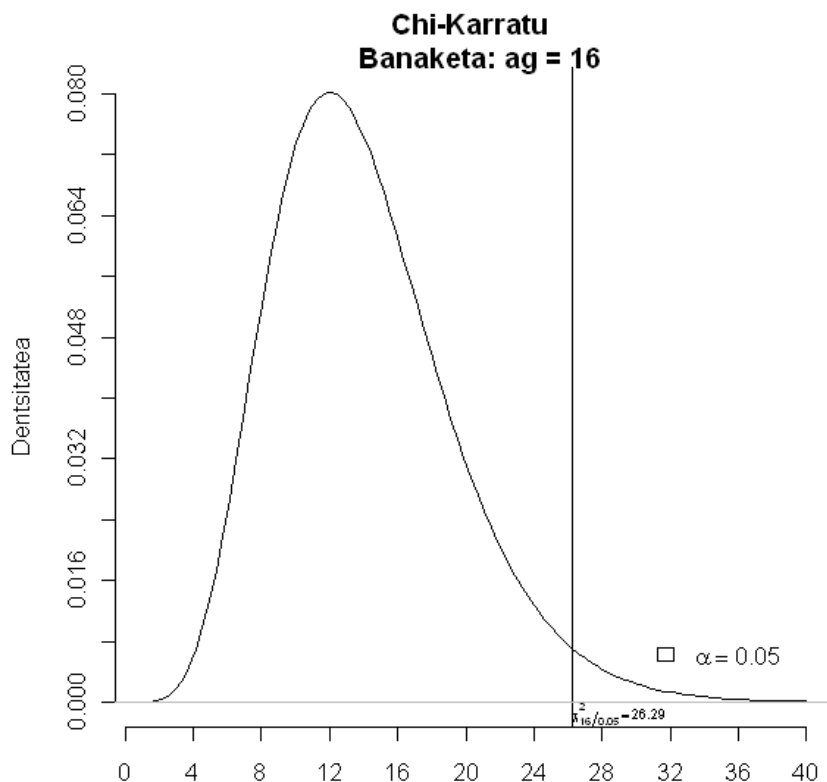
8.6.1. χ^2 taulen erabilera

Taulak bi orrialdetan aurkezten ditugu. Aurreneko orrialdea ezker aldeko testak erabiltzen ditugunean, esangura-maila nominalaren (α) balio handikoak; eta, hurrengo orrialdea eskuinaldeko testak erabiltzen ditugunean, esangura-maila nominalaren (α) balio txikiak.

Taularen lehenengo zutabean *askatasun-graduak* (ν) adierazi ditugu eta aurreneko errenkadan esangura-maila nominalak (α). Kasuan kasuko askatasun-gradu $-(n-1)-$, eta α balioen arabera χ^2_{n-1} balioak zehazten dira. Balio horiek, bada, taularen barrualdean agertuko zaizkigu.

Demagun, laginaren tamaina $n=17$ dela eta $\alpha=0,05$. Orduan, askatasun-graduak ($\nu=n-1=17-1=16$) izango dira. Finkatu dugun esangura-maila nominala ($\alpha=0,05$) izanik, horrek adierazten digu eskuinaldeko testa egin behar dugula, beraz, bigarren taulan bilatu behar dugu.

Horiek horrela, bilatu behar dugun $\chi^2_{16;0,05}$ balioa da: $= 26,2962$



VIII.5. grafikoa. $\chi^2_{16;0,05}$ probabilitate-banaketa.

		Esangura-maila nominala α			
		0,990	0,975	0,950	0,900
Askatasun-graduak $v = n - 1$	1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158
	2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107
	3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844
	4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636
	5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103
	6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041
	7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331
	8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895
	9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682
	10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652
	11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778
	12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038
	13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415
	14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895
	15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468
	16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122
	17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852
	18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649
	19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509
	20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426
	21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396
	22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415
	23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480
	24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587
	25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734
	26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919
	27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139
	28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392
	29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677
	30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992
	31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336
	32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706
	33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102
	34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523
	35	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967
	36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433
	37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921
	38	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430
	39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958
	40	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505
	41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071
	42	23,6501	25,9987	28,1440	30,7654
	43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255
	44	25,1480	27,5746	29,7875	32,4871
	45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504
	46	26,6572	29,1601	31,4390	34,2152
	47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814
	48	28,1770	30,7545	33,0981	35,9491
	49	28,9406	31,5549	33,9303	36,8182
	50	29,7067	32,3574	34,7643	37,6886
	55	33,5705	36,3981	38,9580	42,0596
	60	37,4849	40,4817	43,1880	46,4589
	65	41,4436	44,6030	47,4496	50,8829
	70	45,4417	48,7576	51,7393	55,3289
	70	45,4417	48,7576	51,7393	55,3289
	80	53,5401	57,1532	60,3915	64,2778
	90	61,7541	65,6466	69,1260	73,2911
	100	70,0649	74,2219	77,9295	82,3581
	150	112,6676	117,9845	122,6918	128,2751
	200	156,4320	162,7280	168,2786	174,8353

		Esanura-maila nominala α						
		0.200	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005
Askatasun-graduak $v = n - 1$	1	1.6424	2.7055	3.8415	5.0239	5.4119	6.6349	7.8794
	2	3.2189	4.6052	5.9915	7.3778	7.8240	9.2103	10.5966
	3	4.6416	6.2514	7.8147	9.3484	9.8374	11.3449	12.8382
	4	5.9886	7.7794	9.4877	11.1433	11.6678	13.2767	14.8603
	5	7.2893	9.2364	11.0705	12.8325	13.3882	15.0863	16.7496
	6	8.5581	10.6446	12.5916	14.4494	15.0332	16.8119	18.5476
	7	9.8032	12.0170	14.0671	16.0128	16.6224	18.4753	20.2777
	8	11.0301	13.3616	15.5073	17.5345	18.1682	20.0902	21.9550
	9	12.2421	14.6837	16.9190	19.0228	19.6790	21.6660	23.5894
	10	13.4420	15.9872	18.3070	20.4832	21.1608	23.2093	25.1882
	11	14.6314	17.2750	19.6751	21.9200	22.6179	24.7250	26.7568
	12	15.8120	18.5493	21.0261	23.3367	24.0540	26.2170	28.2995
	13	16.9848	19.8119	22.3620	24.7356	25.4715	27.6882	29.8195
	14	18.1508	21.0641	23.6848	26.1189	26.8728	29.1412	31.3193
	15	19.3107	22.3071	24.9958	27.4884	28.2595	30.5779	32.8013
	16	20.4651	23.5418	26.2962	28.8454	29.6332	31.9999	34.2672
	17	21.6146	24.7690	27.5871	30.1910	30.9950	33.4087	35.7185
	18	22.7595	25.9894	28.8693	31.5264	32.3462	34.8053	37.1565
	19	23.9004	27.2036	30.1435	32.8523	33.6874	36.1909	38.5823
	20	25.0375	28.4120	31.4104	34.1696	35.0196	37.5662	39.9968
	21	26.1711	29.6151	32.6706	35.4789	36.3434	38.9322	41.4011
	22	27.3015	30.8133	33.9244	36.7807	37.6595	40.2894	42.7957
	23	28.4288	32.0069	35.1725	38.0756	38.9683	41.6384	44.1813
	24	29.5533	33.1962	36.4150	39.3641	40.2704	42.9798	45.5585
	25	30.6752	34.3816	37.6525	40.6465	41.5661	44.3141	46.9279
	26	31.7946	35.5632	38.8851	41.9232	42.8558	45.6417	48.2899
	27	32.9117	36.7412	40.1133	43.1945	44.1400	46.9629	49.6449
	28	34.0266	37.9159	41.3371	44.4608	45.4188	48.2782	50.9934
	29	35.1394	39.0875	42.5570	45.7223	46.6927	49.5879	52.3356
	30	36.2502	40.2560	43.7730	46.9792	47.9618	50.8922	53.6720
31	37.3591	41.4217	44.9853	48.2319	49.2264	52.1914	55.0027	
32	38.4663	42.5847	46.1943	49.4804	50.4867	53.4858	56.3281	
33	39.5718	43.7452	47.3999	50.7251	51.7429	54.7755	57.6484	
34	40.6756	44.9032	48.6024	51.9660	52.9952	56.0609	58.9639	
35	41.7780	46.0588	49.8018	53.2033	54.2438	57.3421	60.2748	
36	42.8788	47.2122	50.9985	54.4373	55.4889	58.6192	61.5812	
37	43.9782	48.3634	52.1923	55.6680	56.7305	59.8925	62.8833	
38	45.0763	49.5126	53.3835	56.8955	57.9688	61.1621	64.1814	
39	46.1730	50.6598	54.5722	58.1201	59.2040	62.4281	65.4756	
40	47.2685	51.8051	55.7585	59.3417	60.4361	63.6907	66.7660	
41	48.3628	52.9485	56.9424	60.5606	61.6654	64.9501	68.0527	
42	49.4560	54.0902	58.1240	61.7768	62.8918	66.2062	69.3360	
43	50.5480	55.2302	59.3035	62.9904	64.1155	67.4593	70.6159	
44	51.6389	56.3685	60.4809	64.2015	65.3367	68.7095	71.8926	
45	52.7288	57.5053	61.6562	65.4102	66.5553	69.9568	73.1661	
46	53.8177	58.6405	62.8296	66.6165	67.7714	71.2014	74.4365	
47	54.9056	59.7743	64.0011	67.8206	68.9852	72.4433	75.7041	
48	55.9926	60.9066	65.1708	69.0226	70.1968	73.6826	76.9688	
49	57.0786	62.0375	66.3386	70.2224	71.4061	74.9195	78.2307	
50	58.1638	63.1671	67.5048	71.4202	72.6133	76.1539	79.4900	
55	63.5772	68.7962	73.3115	77.3805	78.6191	82.2921	85.7490	
60	68.9721	74.3970	79.0819	83.2977	84.5799	88.3794	91.9517	
65	74.3506	79.9730	84.8206	89.1771	90.5012	94.4221	98.1051	
70	79.7146	85.5270	90.5312	95.0232	96.3875	100.4252	104.2149	
80	90.4053	96.5782	101.8795	106.6286	108.0693	112.3288	116.3211	
90	101.0537	107.5650	113.1453	118.1359	119.6485	124.1163	128.2989	
100	111.6667	118.4980	124.3421	129.5612	131.1417	135.8067	140.1695	
150	164.3492	172.5812	179.5806	185.8004	187.6785	193.2077	198.3602	
200	216.6088	226.0210	233.9943	241.0579	243.1869	249.4451	255.2642	

8.7. *F* BANAKETAK

Mota honetako banaketek, baita χ^2 eta Studenten t banaketek ere, banaketa normalean daukate sorburua. F estatistikoa, hain zuzen ere, ratio bat da.

$$F_{v_1, v_2} = \frac{\frac{\chi_{v_1}^2}{v_1}}{\frac{\chi_{v_2}^2}{v_2}}$$

Askatasun-graduak (v_1 , v_2) laginek tamainatik kalkulatzen dira:

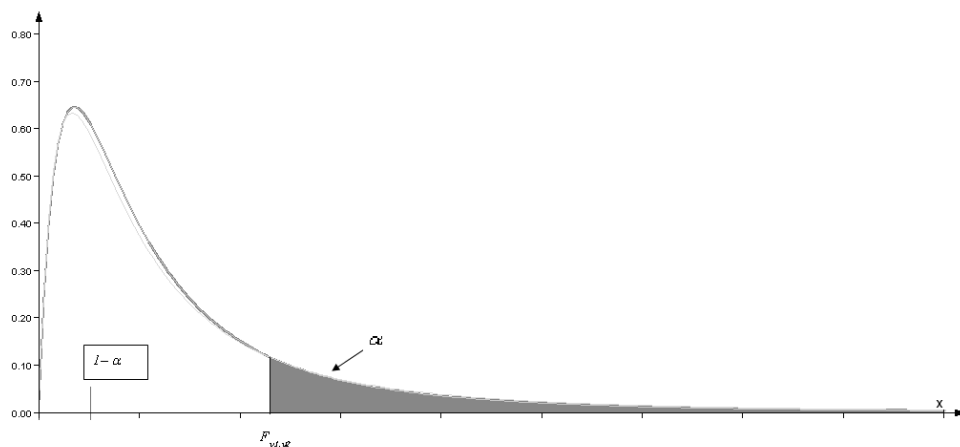
$$v_1 = n_1 - 1$$

$$v_2 = n_2 - 1$$

F banaketaren ezaugarriak honako hauek dira:

1. Asimetriko positiboa.
2. Moda bakarrekoa.
3. Mediana 1 edo txikiagoa da.
4. Batez bestekoa, berriz, $n_2 / (n_2 - 2)$ da, $n_2 \geq 3$ balio guztietarako.

F banaketak, bestalde, analisi eta testetan erabiltzen dira erabaki estatistikoak hartzeko. Hiru kasutan erabiltzen dira, batik bat. Bi bariantzaren arteko desberdintasunak aztertzeko, bariantza-analisietan (ANOVA) eta korrelazio-koefiziente anizkoitzaren esangura aztertzeko.



VIII.6. grafikoa. F banaketa.

8.7.1. Bariantza biren inguruko testak

Gogoan izan aurrekari parametrikoak bete beharrekoak direla bi lagin independenteen homogeneotasuna aztertzeko. Horrelako hipotesi-test parametrikoei dagokien estatistikoa honoko hau da:

$$F_{\nu_1, \nu_2} = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$$

Bariantzak baliokideak izateak laginak populazio berekoak direla adierazten omen du. Hiru kasu bereizten ditugu.

8.7.2. Eskuinaldeko testa $S_1^2 > S_2^2$

Honako hau ohiko testa da bi lagineko bariantzak konparatzen ditugunean. Hona hemen hipotesi estatistikoak:

Hipotesi nulua: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Ordezko hipotesia: $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Demagun, bi lagin ditugula $n_1 = 5$ eta $n_2 = 8$, eta esangura-maila $\alpha = 0,05$.

Askatasun-graduak (ν_1, ν_2), beraz: $\nu_1 = n_1 - 1 = 4$

$\nu_2 = n_2 - 1 = 7$

Dagokion taula hautatzen dugu (taula-buruan $1 - \alpha = 0,95$ agertzen duena), eta emandako askatasun-graduen arabera muga kritikoa zein den jakin dezakegu.

Kasu honetan, $F_{0,95;4,7} = 4,120$

8.7.3. Ezkerraldeko testa $S_1^2 < S_2^2$

Hipotesi estatistikoak:

Hipotesi nulua: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Ordezko hipotesia: $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Demagun, bi lagin ditugula $n_1 = 5$ eta $n_2 = 8$, eta esangura-maila $\alpha = 0,05$. Ezkerraldeko testerako askatasun-graduak (ν_1, ν_2), honela kalkulatzen ditugu:

$\nu_1 = n_2 - 1 = 7$

$\nu_2 = n_1 - 1 = 4$

Dagokion taula hautatzen dugu (taula-buruan $1 - \alpha = 0,95$ agertzen duena), eta emandako askatasun-graduen arabera muga kritikoa zein den jakin dezakegu.

Kasu honetan, $F_{0,05;7,4} = 6,094$

8.7.4. Aldebiko testa

Hipotesi estatistikoak:

Hipotesi nulua: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Ordezko hipotesia: $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Demagun, bi lagin ditugula $n_1 = 5$ eta $n_2 = 8$, eta esangura-maila $\alpha = 0,05$

Aurreko kasuetan ez bezala, honetan bi muga kritiko bilatu behar ditugu; esangura-maila erdibitu behar dugu, beraz. Ezkerraldeko muga kritikorako askatasun-graduak (v_1, v_2), honela kalkulatzen ditugu:

$$v_1 = n_2 - 1 = 7$$

$$v_2 = n_1 - 1 = 4$$

Eta eskuineko muga kritikorako, berriz, honela:

$$v_1 = n_1 - 1 = 4$$

$$v_2 = n_2 - 1 = 7$$

Esangura-maila erdibitzen dugularik, taula-buruan $1 - \alpha/2 = 0,975$ agertu behar du. Taula horretan eta emandako askatasun-graduen arabera muga kritikoak zein diren jakin dezakegu.

Kasu honetan, $F_{0,025;7,4} = 9,074$ (behe-muga kritikoa) eta, $F_{0,975;4,7} = 5,523$ (goi-muga kritikoa).

8.7.5. Leveneren testa

Aurreko testetan erabilitako estatistikoak baino sendoagoa da Levenek proposatutakoa. Taulen erabilerari begira ez dago aldaketarik. Hala ere, egoki iruditu zaigu test hau hona ekartzea. Test hau, bestalde, Bartletten testaren baliokidea da, eta sarritan haren ordez erabiltzen da.

$$W = \frac{(N - k) \sum_{i=1}^k N_i (\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2}{(k - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2}$$

$$\text{Non: } Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}|$$

		$1-\alpha=0.995$																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	150	175	200	∞	
1	v_1/v_1	23925.43	24091.02	24224.50	24630.21	24835.97	25043.63	25148.15	25211.09	25338.43	25380.07	25392.03	25401.03	25410.45	25420.25	25429.43	24091.02	24224.50	24630.21	24835.97	25043.63	25148.15
2		199.375	199.388	199.400	199.433	199.450	199.466	199.475	199.480	199.490	199.493	199.494	199.495	199.500	199.505	199.507	199.388	199.433	199.450	199.466	199.475	199.475
3		44.126	43.882	43.686	43.085	42.778	42.466	42.308	42.213	42.022	41.957	41.939	41.925	41.824	44.126	43.882	43.686	43.085	42.778	42.466	42.308	42.308
4		21.352	21.139	20.967	20.438	20.167	19.892	19.752	19.667	19.497	19.440	19.423	19.411	19.324	21.352	21.139	20.967	20.438	20.167	19.892	19.752	19.752
5		13.961	13.772	13.618	13.146	12.903	12.656	12.530	12.454	12.300	12.248	12.233	12.222	12.143	13.961	13.772	13.618	13.146	12.903	12.656	12.530	12.530
6		10.566	10.391	10.250	9.814	9.589	9.358	9.241	9.170	9.026	8.977	8.963	8.953	8.879	10.566	10.391	10.250	9.814	9.589	9.358	9.241	9.241
7		8.678	8.514	8.380	7.968	7.754	7.534	7.422	7.354	7.217	7.170	7.157	7.147	7.076	8.678	8.514	8.380	7.968	7.754	7.534	7.422	7.422
8		7.496	7.339	7.211	6.814	6.608	6.396	6.288	6.222	6.088	6.042	6.029	6.019	5.951	7.496	7.339	7.211	6.814	6.608	6.396	6.288	6.288
9		6.693	6.541	6.417	6.032	5.832	5.625	5.519	5.454	5.322	5.278	5.265	5.255	5.188	6.693	6.541	6.417	6.032	5.832	5.625	5.519	5.519
10		6.116	5.968	5.847	5.471	5.274	5.071	4.966	4.902	4.772	4.728	4.715	4.706	4.639	6.116	5.968	5.847	5.471	5.274	5.071	4.966	4.966
11		5.682	5.537	5.418	5.049	4.855	4.654	4.551	4.488	4.359	4.315	4.302	4.293	4.226	5.682	5.537	5.418	5.049	4.855	4.654	4.551	4.551
12		5.345	5.202	5.085	4.721	4.530	4.331	4.228	4.165	4.037	3.993	3.980	3.971	3.904	5.345	5.202	5.085	4.721	4.530	4.331	4.228	4.228
13		5.076	4.935	4.820	4.460	4.270	4.073	3.970	3.908	3.780	3.736	3.723	3.714	3.647	5.076	4.935	4.820	4.460	4.270	4.073	3.970	3.970
14		4.857	4.717	4.603	4.247	4.059	3.862	3.760	3.698	3.569	3.525	3.513	3.503	3.436	4.857	4.717	4.603	4.247	4.059	3.862	3.760	3.760
15		4.674	4.536	4.424	4.070	3.883	3.687	3.585	3.523	3.394	3.350	3.337	3.328	3.260	4.674	4.536	4.424	4.070	3.883	3.687	3.585	3.585
16		4.521	4.384	4.272	3.920	3.734	3.539	3.437	3.375	3.246	3.202	3.189	3.180	3.112	4.521	4.384	4.272	3.920	3.734	3.539	3.437	3.437
17		4.389	4.254	4.142	3.793	3.607	3.412	3.311	3.248	3.119	3.075	3.062	3.052	2.984	4.389	4.254	4.142	3.793	3.607	3.412	3.311	3.311
18		4.276	4.141	4.030	3.683	3.498	3.303	3.201	3.139	3.009	2.965	2.952	2.942	2.873	4.276	4.141	4.030	3.683	3.498	3.303	3.201	3.201
19		4.177	4.043	3.933	3.587	3.402	3.208	3.106	3.043	2.913	2.868	2.855	2.846	2.776	4.177	4.043	3.933	3.587	3.402	3.208	3.106	3.106
20		4.090	3.956	3.847	3.502	3.318	3.123	3.022	2.959	2.828	2.783	2.770	2.760	2.690	4.090	3.956	3.847	3.502	3.318	3.123	3.022	3.022
21		4.013	3.880	3.771	3.427	3.243	3.049	2.947	2.884	2.753	2.707	2.694	2.684	2.614	4.013	3.880	3.771	3.427	3.243	3.049	2.947	2.947
22		3.944	3.812	3.703	3.360	3.176	2.982	2.880	2.817	2.685	2.640	2.626	2.616	2.545	3.944	3.812	3.703	3.360	3.176	2.982	2.880	2.880
23		3.882	3.750	3.642	3.300	3.116	2.922	2.820	2.756	2.624	2.579	2.565	2.555	2.484	3.882	3.750	3.642	3.300	3.116	2.922	2.820	2.820
24		3.826	3.695	3.587	3.246	3.062	2.868	2.765	2.702	2.569	2.523	2.510	2.500	2.428	3.826	3.695	3.587	3.246	3.062	2.868	2.765	2.765
25		3.776	3.645	3.537	3.196	3.013	2.819	2.716	2.652	2.519	2.473	2.459	2.449	2.377	3.776	3.645	3.537	3.196	3.013	2.819	2.716	2.716
30		3.580	3.450	3.344	3.006	2.823	2.628	2.524	2.459	2.323	2.276	2.262	2.251	2.176	3.580	3.450	3.344	3.006	2.823	2.628	2.524	2.524
35		3.447	3.318	3.212	2.876	2.693	2.497	2.392	2.327	2.188	2.139	2.125	2.114	2.036	3.447	3.318	3.212	2.876	2.693	2.497	2.392	2.392
50		3.219	3.092	2.988	2.653	2.470	2.272	2.164	2.097	1.951	1.899	1.884	1.872	1.786	3.219	3.092	2.988	2.653	2.470	2.272	2.164	2.164
60		3.134	3.008	2.904	2.570	2.387	2.187	2.079	2.010	1.861	1.807	1.791	1.779	1.689	3.134	3.008	2.904	2.570	2.387	2.187	2.079	2.079
70		3.076	2.950	2.846	2.513	2.329	2.128	2.019	1.949	1.797	1.741	1.724	1.712	1.618	3.076	2.950	2.846	2.513	2.329	2.128	2.019	2.019
90		2.999	2.873	2.770	2.437	2.253	2.051	1.939	1.868	1.711	1.652	1.635	1.622	1.520	2.999	2.873	2.770	2.437	2.253	2.051	1.939	1.939
100		2.972	2.847	2.744	2.411	2.227	2.024	1.912	1.840	1.681	1.621	1.603	1.590	1.485	2.972	2.847	2.744	2.411	2.227	2.024	1.912	1.912
150		2.894	2.770	2.667	2.335	2.150	1.944	1.830	1.756	1.595	1.526	1.507	1.492	1.374	2.894	2.770	2.667	2.335	2.150	1.944	1.830	1.830
200		2.856	2.732	2.629	2.297	2.112	1.905	1.790	1.715	1.544	1.478	1.457	1.442	1.314	2.856	2.732	2.629	2.297	2.112	1.905	1.790	1.790
300		2.818	2.694	2.592	2.260	2.074	1.866	1.749	1.673	1.498	1.428	1.406	1.389	1.247	2.818	2.694	2.592	2.260	2.074	1.866	1.749	1.749
∞		2.744	2.621	2.519	2.187	2.000	1.789	1.669	1.590	1.402	1.322	1.297	1.276	1.005	2.744	2.621	2.519	2.187	2.000	1.789	1.669	1.669

v_i/v_j	$1-\alpha=0.99$																					∞
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	150	175	200			
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.850	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847	6157.306	6208.743	6260.655	6286.785	6302.519	6334.110	6344.677	6347.699	6349.967	71564.090		
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.433	99.449	99.466	99.474	99.479	99.489	99.492	99.493	99.494	99.499		
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	26.872	26.890	26.505	26.411	26.354	26.240	26.202	26.191	26.183	26.124		
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.198	14.020	13.838	13.745	13.690	13.577	13.539	13.528	13.520	13.463		
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.722	9.553	9.379	9.291	9.238	9.130	9.094	9.083	9.075	9.020		
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.559	7.396	7.229	7.143	7.091	6.987	6.951	6.941	6.934	6.880		
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.314	6.155	5.992	5.908	5.858	5.755	5.720	5.710	5.702	5.650		
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.515	5.359	5.198	5.116	5.065	4.963	4.929	4.919	4.911	4.859		
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	4.962	4.808	4.649	4.567	4.517	4.415	4.380	4.371	4.363	4.311		
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.558	4.405	4.247	4.165	4.115	4.014	3.979	3.969	3.962	3.909		
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.251	4.099	3.941	3.860	3.810	3.708	3.673	3.663	3.656	3.602		
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.010	3.858	3.701	3.619	3.569	3.467	3.432	3.422	3.414	3.361		
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.815	3.665	3.507	3.425	3.375	3.272	3.237	3.227	3.219	3.165		
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.656	3.505	3.348	3.266	3.215	3.112	3.076	3.066	3.059	3.004		
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.522	3.372	3.214	3.132	3.081	2.977	2.942	2.931	2.923	2.868		
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.409	3.259	3.101	3.018	2.967	2.863	2.827	2.816	2.808	2.753		
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.312	3.162	3.003	2.920	2.869	2.764	2.728	2.717	2.709	2.653		
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.227	3.077	2.919	2.835	2.784	2.678	2.641	2.631	2.623	2.566		
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.153	3.003	2.844	2.761	2.709	2.602	2.565	2.555	2.547	2.489		
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.088	2.938	2.778	2.695	2.643	2.535	2.498	2.487	2.479	2.421		
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.030	2.880	2.720	2.636	2.584	2.475	2.438	2.427	2.419	2.360		
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	2.978	2.827	2.667	2.583	2.531	2.422	2.384	2.373	2.365	2.305		
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	2.931	2.781	2.620	2.535	2.483	2.373	2.335	2.324	2.316	2.256		
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	2.889	2.738	2.577	2.492	2.440	2.329	2.291	2.279	2.271	2.211		
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.850	2.699	2.538	2.453	2.400	2.289	2.250	2.239	2.230	2.169		
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.700	2.549	2.386	2.299	2.245	2.131	2.091	2.079	2.070	2.006		
35	7.419	5.268	4.396	3.908	3.592	3.368	3.200	3.069	2.963	2.876	2.597	2.445	2.281	2.193	2.137	2.020	1.979	1.967	1.957	1.891		
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698	2.419	2.265	2.098	2.007	1.949	1.825	1.780	1.767	1.757	1.683		
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.352	2.198	2.028	1.936	1.877	1.749	1.703	1.689	1.678	1.601		
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585	2.306	2.150	1.980	1.886	1.826	1.695	1.647	1.633	1.622	1.540		
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.845	2.715	2.611	2.524	2.244	2.088	1.916	1.820	1.759	1.623	1.572	1.557	1.546	1.457		
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503	2.223	2.067	1.893	1.797	1.735	1.598	1.546	1.530	1.518	1.427		
150	6.807	4.749	3.915	3.447	3.142	2.924	2.759	2.630	2.526	2.441	2.160	2.004	1.829	1.732	1.670	1.531	1.478	1.461	1.448	1.331		
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.497	2.411	2.129	1.971	1.794	1.694	1.629	1.481	1.423	1.405	1.391	1.279		
300	6.720	4.677	3.848	3.382	3.079	2.862	2.699	2.571	2.467	2.380	2.099	1.940	1.761	1.660	1.594	1.441	1.380	1.361	1.346	1.220		
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.039	1.878	1.696	1.592	1.523	1.358	1.288	1.265	1.247	1.005		

v_i/v_j	$1-\alpha=0.975$																∞			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100		150	175	200
1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.848	937.111	948.217	956.656	963.285	968.627	984.867	993.103	1001.414	1005.598	1008.117	1013.178	1014.868	1015.351	1015.714	1031.822
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.431	39.448	39.465	39.473	39.478	39.488	39.491	39.492	39.493	39.498
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419	14.253	14.167	14.081	14.037	14.010	13.956	13.938	13.933	13.929	13.902
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844	8.657	8.560	8.461	8.411	8.381	8.319	8.299	8.293	8.289	8.257
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.428	6.329	6.227	6.175	6.144	6.080	6.059	6.052	6.048	6.015
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461	5.269	5.168	5.065	5.012	4.980	4.915	4.893	4.887	4.882	4.849
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.568	4.467	4.362	4.309	4.276	4.210	4.188	4.181	4.176	4.142
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.101	3.999	3.894	3.840	3.807	3.739	3.716	3.710	3.705	3.670
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964	3.769	3.667	3.560	3.505	3.472	3.403	3.380	3.373	3.368	3.333
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.522	3.419	3.311	3.255	3.221	3.152	3.128	3.121	3.116	3.080
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.330	3.226	3.118	3.061	3.027	2.956	2.932	2.925	2.920	2.883
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.177	3.073	2.963	2.906	2.871	2.800	2.775	2.768	2.763	2.725
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250	3.053	2.948	2.837	2.780	2.744	2.671	2.647	2.639	2.634	2.595
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147	2.949	2.844	2.732	2.674	2.638	2.565	2.539	2.532	2.526	2.487
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	2.862	2.756	2.644	2.585	2.549	2.474	2.448	2.441	2.435	2.395
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.788	2.681	2.568	2.509	2.472	2.396	2.370	2.362	2.357	2.316
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.723	2.616	2.502	2.442	2.405	2.329	2.302	2.294	2.289	2.247
18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866	2.667	2.559	2.445	2.384	2.347	2.269	2.242	2.235	2.229	2.187
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817	2.617	2.509	2.394	2.333	2.295	2.217	2.190	2.182	2.176	2.133
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.573	2.464	2.349	2.287	2.249	2.170	2.142	2.134	2.128	2.085
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735	2.534	2.425	2.308	2.246	2.208	2.128	2.100	2.092	2.086	2.042
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700	2.498	2.389	2.272	2.210	2.171	2.090	2.062	2.054	2.047	2.003
23	5.750	4.349	3.750	3.408	3.183	3.023	2.902	2.807	2.731	2.668	2.466	2.357	2.239	2.176	2.137	2.056	2.027	2.019	2.013	1.968
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.640	2.437	2.327	2.209	2.146	2.107	2.024	1.995	1.987	1.981	1.935
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.411	2.300	2.182	2.118	2.079	1.996	1.966	1.958	1.952	1.906
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.307	2.195	2.074	2.009	1.968	1.882	1.851	1.842	1.835	1.787
35	5.485	4.106	3.517	3.179	2.956	2.796	2.676	2.581	2.504	2.440	2.235	2.122	1.999	1.932	1.890	1.801	1.769	1.760	1.753	1.702
50	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317	2.109	1.993	1.866	1.796	1.752	1.656	1.621	1.611	1.603	1.545
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.061	1.944	1.815	1.744	1.699	1.599	1.563	1.552	1.543	1.482
70	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237	2.028	1.910	1.779	1.707	1.660	1.558	1.520	1.509	1.500	1.436
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194	1.983	1.864	1.731	1.657	1.610	1.503	1.463	1.451	1.441	1.371
100	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179	1.968	1.849	1.715	1.640	1.592	1.483	1.442	1.430	1.420	1.347
150	5.126	3.781	3.204	2.872	2.652	2.494	2.373	2.278	2.200	2.135	1.922	1.801	1.665	1.588	1.538	1.428	1.379	1.365	1.355	1.271
200	5.100	3.758	3.182	2.850	2.630	2.472	2.351	2.256	2.178	2.113	1.900	1.778	1.640	1.562	1.511	1.393	1.346	1.332	1.320	1.229
300	5.075	3.735	3.160	2.829	2.609	2.451	2.330	2.234	2.156	2.091	1.877	1.755	1.616	1.536	1.484	1.361	1.312	1.297	1.285	1.182
∞	5.024	3.689	3.116	2.786	2.567	2.408	2.288	2.192	2.114	2.048	1.833	1.708	1.566	1.484	1.428	1.296	1.239	1.220	1.205	1.004

v _i	1-α=0.95																∞			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100	150	175	200	∞
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882	245.950	248.013	250.095	251.143	251.774	253.041	253.465	253.586	253.677	254.415
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396	19.429	19.446	19.462	19.471	19.476	19.486	19.489	19.490	19.491	19.496
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.703	8.660	8.617	8.594	8.581	8.554	8.545	8.542	8.540	8.526
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.858	5.803	5.746	5.717	5.699	5.664	5.652	5.649	5.646	5.628
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.496	4.464	4.444	4.405	4.392	4.388	4.385	4.365
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	3.938	3.874	3.808	3.774	3.754	3.712	3.698	3.693	3.690	3.669
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.511	3.445	3.376	3.340	3.319	3.275	3.260	3.256	3.252	3.230
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.218	3.150	3.079	3.043	3.020	2.975	2.959	2.955	2.951	2.928
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.006	2.936	2.864	2.826	2.803	2.756	2.739	2.735	2.731	2.707
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.700	2.661	2.637	2.588	2.572	2.567	2.563	2.538
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.719	2.646	2.570	2.531	2.507	2.457	2.439	2.434	2.431	2.404
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.617	2.544	2.466	2.426	2.401	2.350	2.332	2.327	2.323	2.296
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.533	2.459	2.380	2.339	2.314	2.261	2.243	2.238	2.234	2.206
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.463	2.388	2.308	2.266	2.241	2.187	2.169	2.163	2.159	2.131
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.247	2.204	2.178	2.123	2.105	2.099	2.095	2.066
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.352	2.276	2.194	2.151	2.124	2.068	2.049	2.044	2.039	2.010
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.308	2.230	2.148	2.104	2.077	2.020	2.001	1.995	1.991	1.960
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.269	2.191	2.107	2.063	2.035	1.978	1.958	1.952	1.948	1.917
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.234	2.155	2.071	2.026	1.999	1.940	1.920	1.914	1.910	1.878
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	2.039	1.994	1.966	1.907	1.886	1.880	1.875	1.843
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.176	2.096	2.010	1.965	1.936	1.876	1.855	1.849	1.845	1.812
22	4.301	3.443	3.048	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.151	2.071	1.984	1.938	1.909	1.849	1.827	1.821	1.817	1.783
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.128	2.048	1.961	1.914	1.885	1.823	1.802	1.796	1.791	1.757
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.108	2.027	1.939	1.892	1.863	1.800	1.779	1.772	1.768	1.733
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.919	1.872	1.842	1.779	1.757	1.751	1.746	1.711
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.841	1.792	1.761	1.695	1.672	1.665	1.660	1.622
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114	1.963	1.878	1.786	1.735	1.703	1.635	1.610	1.603	1.598	1.558
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.871	1.784	1.687	1.634	1.599	1.525	1.498	1.490	1.484	1.438
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.649	1.594	1.559	1.481	1.453	1.444	1.438	1.389
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.812	1.722	1.622	1.566	1.530	1.450	1.420	1.411	1.404	1.353
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938	1.779	1.688	1.586	1.528	1.491	1.407	1.375	1.366	1.358	1.302
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.190	2.103	2.032	1.975	1.927	1.768	1.676	1.573	1.515	1.477	1.392	1.359	1.349	1.342	1.283
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.159	2.071	2.001	1.943	1.894	1.734	1.641	1.535	1.475	1.436	1.345	1.309	1.298	1.290	1.223
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878	1.717	1.623	1.516	1.455	1.415	1.321	1.283	1.272	1.263	1.189
300	3.873	3.026	2.635	2.402	2.244	2.129	2.040	1.969	1.911	1.862	1.700	1.606	1.497	1.435	1.393	1.296	1.256	1.244	1.234	1.156
∞	3.841	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938	1.880	1.831	1.666	1.571	1.459	1.394	1.350	1.243	1.197	1.182	1.170	1.093

8.8. PEARSONEN KORRELAZIO-KOEFIZIENTEA

Pearsonen korrelazio-koefizientearen inguruko probabilitate-taulan agertzen diren balioek estatistikoaren esangura adierazten digute. Hau da, zortzi kasuko lagin batekin ($n - 2 = 6$) eta 0,05 esangura-maila nominalpean (eskuinaldeko testa) korrelazio-koefizienteak 0,622 balioa edo hori baino balio handiagoak hartu behar ditu esanguratsua dela esan ahal izateko.

Edo, lau kasuko lagin batekin ($n - 2 = 2$) eta 0,05 esangura-maila nominalpean (aldebiko testa) korrelazio-koefizienteak 0,95 balioa edo hori baino balio handiagoak hartu behar ditu esanguratsua dela esan ahal izateko.

Pearson

$n - 2$	α			
	0.05	0.03	0.01	0.01
1	0,988	0,997	1,000	0,9999
2	0,900	0,950	0,980	0,990
3	0,805	0,878	0,934	0,959
4	0,729	0,811	0,882	0,917
5	0,669	0,754	0,833	0,874
6	0,622	0,707	0,789	0,834
7	0,582	0,666	0,750	0,798
8	0,549	0,632	0,716	0,765
9	0,521	0,602	0,685	0,735
10	0,497	0,576	0,658	0,708
11	0,476	0,553	0,634	0,684
12	0,458	0,532	0,612	0,661
13	0,441	0,514	0,592	0,641
14	0,426	0,497	0,574	0,623
15	0,412	0,482	0,558	0,606
16	0,400	0,468	0,542	0,590
17	0,389	0,456	0,528	0,575
18	0,378	0,444	0,516	0,561
19	0,369	0,433	0,503	0,549
20	0,360	0,423	0,492	0,537
21	0,352	0,413	0,482	0,526
22	0,344	0,404	0,472	0,515
23	0,337	0,396	0,462	0,505
24	0,330	0,388	0,453	0,496
25	0,323	0,381	0,445	0,487
26	0,317	0,374	0,437	0,479
27	0,311	0,367	0,430	0,471
28	0,306	0,361	0,423	0,463
29	0,301	0,355	0,416	0,456
30	0,296	0,349	0,409	0,449
35	0,275	0,325	0,381	0,418
40	0,257	0,304	0,358	0,393
45	0,243	0,288	0,338	0,372
50	0,231	0,273	0,322	0,354
60	0,211	0,250	0,295	0,325
70	0,195	0,232	0,274	0,302
80	0,183	0,217	0,256	0,283
90	0,173	0,205	0,242	0,267
100	0,164	0,195	0,230	0,254

8.9. SPEARMANEN KORRELAZIO-KOEFIZIENTEA

Korrelazio-koefiziente hau aurrekari parametrikokoak betetzen ez direnean erabili ohi da Pearsonen korrelazio-indizea erabili beharrean. Oro har, neurraketa ahuleko aldagaien arteko erlazio-adierazlea da. Haren heina honakoa da: $-1 < r_s < 1$

n	α					
	0,25	0,10	0,05	0,03	0,01	0,01
4	0,600	1,000	1,000	—	—	—
5	0,500	0,800	0,900	1,000	1,000	—
6	0,371	0,657	0,829	0,886	0,943	1,000
7	0,321	0,571	0,714	0,786	0,893	0,929
8	0,310	0,524	0,643	0,738	0,833	0,881
9	0,267	0,483	0,600	0,700	0,783	0,833
10	0,248	0,455	0,564	0,648	0,745	0,794
11	0,236	0,427	0,536	0,618	0,709	0,755
12	0,217	0,406	0,503	0,587	0,678	0,727
13	0,209	0,385	0,484	0,560	0,648	0,703
14	0,200	0,367	0,454	0,538	0,626	0,679
15	0,189	0,354	0,446	0,521	0,604	0,654
16	0,182	0,341	0,429	0,503	0,582	0,635
17	0,176	0,328	0,414	0,485	0,566	0,615
18	0,170	0,317	0,401	0,472	0,550	0,600
19	0,165	0,309	0,391	0,460	0,535	0,584
20	0,161	0,299	0,380	0,447	0,520	0,570
21	0,156	0,292	0,370	0,435	0,508	0,556
22	0,152	0,284	0,361	0,425	0,496	0,544
23	0,148	0,278	0,353	0,415	0,486	0,532
24	0,144	0,271	0,344	0,406	0,476	0,521
25	0,142	0,265	0,337	0,398	0,466	0,511
26	0,138	0,259	0,331	0,390	0,457	0,501
27	0,136	0,255	0,324	0,382	0,448	0,491
28	0,133	0,250	0,317	0,375	0,440	0,483
29	0,130	0,245	0,312	0,368	0,433	0,475
30	0,128	0,240	0,306	0,362	0,425	0,467
31	0,126	0,236	0,301	0,356	0,418	0,459
32	0,124	0,232	0,296	0,350	0,412	0,452
33	0,121	0,229	0,291	0,354	0,405	0,446
34	0,120	0,225	0,287	0,340	0,399	0,439
35	0,118	0,222	0,283	0,335	0,394	0,433
36	0,116	0,219	0,279	0,330	0,388	0,427
37	0,114	0,216	0,275	0,325	0,383	0,421
38	0,113	0,212	0,271	0,321	0,378	0,415
39	0,111	0,210	0,267	0,317	0,373	0,410
40	0,110	0,207	0,264	0,313	0,368	0,405
41	0,108	0,204	0,261	0,309	0,364	0,400
42	0,107	0,202	0,257	0,305	0,359	0,395
43	0,105	0,199	0,254	0,301	0,355	0,391
44	0,104	0,197	0,251	0,298	0,351	0,386
45	0,103	0,194	0,248	0,294	0,347	0,382
46	0,102	0,192	0,246	0,291	0,343	0,378
47	0,101	0,190	0,243	0,288	0,340	0,374
48	0,100	0,188	0,240	0,285	0,336	0,370
49	0,098	0,186	0,238	0,282	0,333	0,366
50	0,097	0,184	0,235	0,279	0,329	0,365
51	0,096	0,182	0,233	0,276	0,326	0,359
52	0,095	0,180	0,231	0,274	0,323	0,356

n	α					
	0,25	0,10	0,05	0,03	0,01	0,01
53	0,095	0,179	0,228	0,271	0,320	0,352
54	0,094	0,177	0,226	0,268	0,317	0,349
55	0,093	0,175	0,224	0,266	0,314	0,346
56	0,092	0,174	0,222	0,264	0,311	0,343
57	0,091	0,172	0,220	0,261	0,308	0,340
58	0,090	0,171	0,218	0,259	0,306	0,337
59	0,089	0,169	0,216	0,257	0,303	0,334
60	0,089	0,168	0,214	0,255	0,300	0,331
61	0,088	0,166	0,213	0,252	0,298	0,329
62	0,087	0,165	0,211	0,250	0,296	0,326
63	0,085	0,163	0,209	0,248	0,293	0,323
64	0,085	0,162	0,207	0,246	0,291	0,321
65	0,085	0,161	0,206	0,244	0,289	0,318
66	0,084	0,160	0,204	0,243	0,287	0,316
67	0,084	0,158	0,203	0,241	0,284	0,314
68	0,083	0,157	0,201	0,239	0,282	0,311
69	0,082	0,156	0,200	0,237	0,280	0,309
70	0,082	0,155	0,198	0,235	0,278	0,307
71	0,081	0,154	0,197	0,234	0,276	0,305
72	0,081	0,153	0,195	0,232	0,274	0,303
73	0,080	0,152	0,194	0,230	0,272	0,301
74	0,080	0,151	0,193	0,229	0,271	0,299
75	0,079	0,150	0,191	0,227	0,269	0,297
76	0,078	0,149	0,190	0,226	0,267	0,295
77	0,078	0,148	0,189	0,224	0,265	0,293
78	0,077	0,147	0,188	0,223	0,264	0,291
79	0,077	0,146	0,186	0,221	0,262	0,289
80	0,076	0,145	0,185	0,220	0,260	0,287
81	0,076	0,144	0,184	0,219	0,259	0,285
82	0,075	0,143	0,183	0,217	0,257	0,284
83	0,075	0,142	0,182	0,216	0,255	0,282
84	0,074	0,141	0,181	0,215	0,254	0,280
85	0,074	0,140	0,180	0,213	0,252	0,279
86	0,074	0,139	0,179	0,212	0,251	0,277
87	0,073	0,139	0,177	0,211	0,250	0,276
88	0,073	0,138	0,176	0,210	0,248	0,274
89	0,072	0,137	0,175	0,209	0,247	0,272
90	0,072	0,136	0,174	0,207	0,245	0,271
91	0,072	0,135	0,173	0,206	0,244	0,269
92	0,071	0,135	0,173	0,205	0,243	0,268
93	0,071	0,134	0,172	0,204	0,241	0,267
94	0,070	0,133	0,171	0,203	0,240	0,265
95	0,070	0,133	0,170	0,202	0,239	0,264
96	0,070	0,132	0,169	0,201	0,238	0,262
97	0,069	0,131	0,168	0,200	0,236	0,261
98	0,069	0,130	0,167	0,199	0,235	0,260
99	0,068	0,130	0,166	0,198	0,234	0,258
100	0,068	0,129	0,165	0,197	0,233	0,257

8.10. FISHERREN Z ERALDAKETA

Korrelazio-koefizienteen eraldaketa z puntuazioak kalkulatzeko. Hauxe da erabili-

tako formula:

$$z(r) = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = 1,153 \log_{10} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

ρ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0601	0.0701	0.0802	0.0902
0.1	0.1003	0.1104	0.1206	0.1307	0.1409	0.1511	0.1614	0.1717	0.1820	0.1923
0.2	0.2027	0.2132	0.2237	0.2342	0.2448	0.2554	0.2661	0.2769	0.2877	0.2986
0.3	0.3095	0.3205	0.3316	0.3428	0.3541	0.3654	0.3769	0.3884	0.4001	0.4118
0.4	0.4237	0.4356	0.4477	0.4599	0.4722	0.4847	0.4973	0.5101	0.5230	0.5361
0.50	0.5493	0.5506	0.5520	0.5533	0.5547	0.5560	0.5573	0.5587	0.5600	0.5614
0.51	0.5627	0.5641	0.5654	0.5668	0.5682	0.5695	0.5709	0.5722	0.5736	0.5750
0.52	0.5763	0.5777	0.5791	0.5805	0.5818	0.5832	0.5846	0.5860	0.5874	0.5888
0.53	0.3775	0.3791	0.3806	0.3822	0.3838	0.3854	0.3869	0.3885	0.3901	0.3917
0.54	0.6042	0.6056	0.6070	0.6084	0.6098	0.6112	0.6127	0.6141	0.6155	0.6170
0.55	0.6184	0.6198	0.6213	0.6227	0.6241	0.6256	0.6270	0.6285	0.6299	0.6314
0.56	0.6328	0.6343	0.6358	0.6372	0.6387	0.6402	0.6416	0.6431	0.6446	0.6460
0.57	0.6475	0.6490	0.6505	0.6520	0.6535	0.6550	0.6565	0.6580	0.6595	0.6610
0.58	0.6625	0.6640	0.6655	0.6670	0.6685	0.6700	0.6716	0.6731	0.6746	0.6761
0.59	0.6777	0.6792	0.6807	0.6823	0.6838	0.6854	0.6869	0.6885	0.6900	0.6916
0.60	0.6932	0.6947	0.6963	0.6979	0.6994	0.7010	0.7026	0.7042	0.7057	0.7073
0.61	0.7089	0.7105	0.7121	0.7137	0.7153	0.7169	0.7185	0.7202	0.7218	0.7234
0.62	0.7250	0.7266	0.7283	0.7299	0.7315	0.7332	0.7348	0.7365	0.7381	0.7398
0.63	0.7414	0.7431	0.7447	0.7464	0.7481	0.7498	0.7514	0.7531	0.7548	0.7565
0.64	0.7582	0.7599	0.7616	0.7633	0.7650	0.7667	0.7684	0.7701	0.7718	0.7736
0.65	0.7753	0.7770	0.7788	0.7805	0.7823	0.7840	0.7858	0.7875	0.7893	0.7910
0.66	0.7928	0.7946	0.7964	0.7982	0.7999	0.8017	0.8035	0.8053	0.8071	0.8089
0.67	0.8107	0.8126	0.8144	0.8162	0.8180	0.8199	0.8217	0.8236	0.8254	0.8273
0.68	0.8291	0.8310	0.8328	0.8347	0.8366	0.8385	0.8404	0.8423	0.8442	0.8461
0.69	0.8480	0.8499	0.8518	0.8537	0.8556	0.8576	0.8595	0.8614	0.8634	0.8653
0.70	0.8673	0.8693	0.8712	0.8732	0.8752	0.8772	0.8792	0.8812	0.8832	0.8852
0.71	0.8872	0.8892	0.8912	0.8933	0.8953	0.8973	0.8994	0.9014	0.9035	0.9056
0.72	0.9077	0.9097	0.9118	0.9139	0.9160	0.9181	0.9202	0.9223	0.9245	0.9266
0.73	0.9287	0.9309	0.9330	0.9352	0.9374	0.9395	0.9417	0.9439	0.9461	0.9483
0.74	0.9505	0.9527	0.9549	0.9571	0.9594	0.9616	0.9639	0.9661	0.9684	0.9707
0.75	0.9730	0.9753	0.9775	0.9799	0.9822	0.9845	0.9868	0.9892	0.9915	0.9939
0.76	0.9962	0.9986	1.0010	1.0034	1.0058	1.0082	1.0106	1.0130	1.0154	1.0179
0.77	1.0203	1.0228	1.0253	1.0277	1.0302	1.0327	1.0352	1.0378	1.0403	1.0428
0.78	1.0454	1.0479	1.0505	1.0531	1.0557	1.0583	1.0609	1.0635	1.0661	1.0688
0.79	1.0714	1.0741	1.0768	1.0795	1.0822	1.0849	1.0876	1.0903	1.0931	1.0958
0.80	1.0986	1.1014	1.1042	1.1070	1.1098	1.1127	1.1155	1.1184	1.1212	1.1241
0.81	1.1270	1.1300	1.1329	1.1358	1.1388	1.1417	1.1447	1.1477	1.1508	1.1538
0.82	1.1568	1.1599	1.1630	1.1661	1.1692	1.1723	1.1754	1.1786	1.1817	1.1849
0.83	1.1881	1.1914	1.1946	1.1979	1.2011	1.2044	1.2077	1.2111	1.2144	1.2178
0.84	1.2212	1.2246	1.2280	1.2315	1.2349	1.2384	1.2419	1.2454	1.2490	1.2526
0.85	1.2562	1.2598	1.2634	1.2671	1.2708	1.2745	1.2782	1.2819	1.2857	1.2895
0.86	1.2934	1.2972	1.3011	1.3050	1.3089	1.3129	1.3169	1.3209	1.3249	1.3290
0.87	1.3331	1.3372	1.3414	1.3456	1.3498	1.3540	1.3583	1.3626	1.3670	1.3714
0.88	1.3758	1.3802	1.3847	1.3892	1.3938	1.3984	1.4030	1.4077	1.4124	1.4171
0.89	1.4219	1.4268	1.4316	1.4366	1.4415	1.4465	1.4516	1.4567	1.4618	1.4670
0.90	1.4722	1.4775	1.4829	1.4882	1.4937	1.4992	1.5047	1.5104	1.5160	1.5217
0.91	1.5275	1.5334	1.5393	1.5453	1.5513	1.5574	1.5636	1.5698	1.5762	1.5826
0.92	1.5890	1.5956	1.6022	1.6089	1.6157	1.6226	1.6296	1.6366	1.6438	1.6510
0.93	1.6584	1.6659	1.6734	1.6811	1.6889	1.6967	1.7048	1.7129	1.7211	1.7295
0.94	1.7381	1.7467	1.7555	1.7645	1.7736	1.7829	1.7923	1.8019	1.8117	1.8216
0.95	1.8318	1.8422	1.8527	1.8635	1.8745	1.8858	1.8972	1.9090	1.9210	1.9333
0.96	1.9459	1.9588	1.9721	1.9857	1.9996	2.0140	2.0287	2.0439	2.0595	2.0757
0.97	2.0923	2.1095	2.1273	2.1458	2.1649	2.1847	2.2054	2.2269	2.2494	2.2729
0.98	2.2976	2.3235	2.3508	2.3796	2.4102	2.4427	2.4774	2.5147	2.5550	2.5988
0.99	2.6467	2.6996	2.7587	2.8258	2.9031	2.9945	3.1063	3.2504	3.4534	3.8002

8.11. DURBIN-WATSON ESTATISTIKOAREN BALIO KRITIKOAK

Durbin-Watson estatistikoak erregresio linealaren estimazioetako erroreen arteko korrelazio eza aztertzeke adierazlea da.

		Kanpo-aldagai kopurua (<i>k</i>)									
Laginaren tamaina (<i>n</i>)	Esangura maila (α)	1		2		3		4		5	
		<i>d_B</i>	<i>d_G</i>	<i>d_B</i>	<i>d_G</i>	<i>d_B</i>	<i>d_G</i>	<i>d_B</i>	<i>d_G</i>	<i>d_B</i>	<i>d_G</i>
15	0,010	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,96
	0,025	0,95	1,23	0,83	1,40	0,71	1,61	0,59	1,84	0,48	2,09
	0,050	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	0,010	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,63	1,57	0,60	1,74
	0,025	1,08	1,28	0,99	1,41	0,89	1,55	0,79	1,70	0,70	1,87
	0,050	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
25	0,010	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
	0,025	1,13	1,34	1,10	1,43	1,02	1,54	0,94	1,65	0,86	1,77
	0,050	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
30	0,010	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
	0,025	1,25	1,38	1,18	1,46	1,12	1,54	1,05	1,63	0,98	1,73
	0,050	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
40	0,010	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,05	1,58
	0,025	1,35	1,45	1,30	1,51	1,25	1,57	1,20	1,63	1,15	1,69
	0,050	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
50	0,010	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
	0,025	1,42	1,50	1,38	1,54	1,34	1,59	1,30	1,64	1,26	1,69
	0,050	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
60	0,010	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
	0,025	1,47	1,54	1,44	1,57	1,40	1,61	1,37	1,65	1,33	1,69
	0,050	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
80	0,010	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
	0,025	1,54	1,59	1,52	1,62	1,49	1,65	1,47	1,67	1,44	1,70
	0,050	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
100	0,010	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,45	1,63	1,44	1,65
	0,025	1,59	1,63	1,57	1,65	1,55	1,67	1,53	1,70	1,51	1,72
	0,050	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

8.12. IBILTARTE ESTUDENTIZATUAK

Tukeyren HSD edo diferentzia txikienaren gaineko testa.

Hondakinen askatasun- graduak	α	k= Talde kopurua (tratamenduak)																			
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
5	0,05	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	6,99	7,17	7,32	7,47	7,6	7,72	7,83	7,93	8,03	8,12	8,21	
	0,01	5,70	6,98	7,80	8,42	8,91	9,32	9,67	9,97	10,24	10,48	10,7	10,89	11,08	11,24	11,40	11,55	11,68	11,81	11,93	
6	0,05	3,46	4,34	4,90	5,30	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49	6,65	6,79	6,92	7,03	7,14	7,24	7,34	7,43	7,51	7,59	
	0,01	4,95	5,92	6,54	7,01	7,37	7,68	7,94	8,17	8,37	8,55	8,71	8,86	9,00	9,12	9,24	9,35	9,46	9,55	9,65	
7	0,05	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,3	6,43	6,55	6,66	6,76	6,85	6,94	7,02	7,10	7,17	
	0,01	4,48	5,27	5,77	6,14	6,43	6,67	6,87	7,05	7,21	7,36	7,49	7,60	7,71	7,81	7,91	7,99	8,08	8,15	8,23	
8	0,05	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,05	6,18	6,29	6,39	6,48	6,57	6,65	6,73	6,80	6,87	
	0,01	4,75	5,64	6,20	6,62	6,96	7,24	7,47	7,68	7,86	8,03	8,18	8,31	8,44	8,55	8,66	8,76	8,85	8,94	9,03	
9	0,05	3,20	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74	5,87	5,98	6,09	6,19	6,28	6,36	6,44	6,51	6,58	6,64	
	0,01	4,60	5,43	5,96	6,35	6,66	6,91	7,13	7,33	7,49	7,65	7,78	7,91	8,03	8,13	8,23	8,33	8,41	8,49	8,57	
10	0,05	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60	5,72	5,83	5,93	6,03	6,11	6,19	6,27	6,34	6,40	6,47	
	0,01	4,48	5,27	5,77	6,14	6,43	6,67	6,87	7,05	7,21	7,36	7,49	7,60	7,71	7,81	7,91	7,99	8,08	8,15	8,23	
11	0,05	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,61	5,71	5,81	5,90	5,98	6,06	6,13	6,20	6,27	6,33	
	0,01	4,39	5,15	5,62	5,97	6,25	6,48	6,67	6,84	6,99	7,13	7,25	7,36	7,46	7,56	7,65	7,73	7,81	7,88	7,96	
12	0,05	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39	5,51	5,61	5,71	5,80	5,88	5,95	6,02	6,09	6,15	6,21	
	0,01	4,32	5,05	5,50	5,84	6,10	6,32	6,51	6,67	6,81	6,94	7,06	7,17	7,26	7,36	7,44	7,52	7,59	7,66	7,73	
13	0,05	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32	5,43	5,53	5,63	5,71	5,79	5,86	5,93	5,99	6,05	6,11	
	0,01	4,26	4,96	5,40	5,73	5,98	6,19	6,37	6,53	6,67	6,79	6,90	7,01	7,10	7,19	7,27	7,35	7,42	7,48	7,55	
14	0,05	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36	5,46	5,55	5,64	5,71	5,79	5,85	5,91	5,97	6,03	
	0,01	4,21	4,89	5,32	5,63	5,88	6,08	6,26	6,41	6,54	6,66	6,77	6,87	6,96	7,05	7,13	7,20	7,27	7,33	7,39	
15	0,05	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,20	5,31	5,40	5,49	5,57	5,65	5,72	5,78	5,85	5,90	5,96	
	0,01	4,17	4,84	5,25	5,56	5,80	5,99	6,16	6,31	6,44	6,55	6,66	6,76	6,84	6,93	7,00	7,07	7,14	7,20	7,26	
16	0,05	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15	5,26	5,35	5,44	5,52	5,59	5,66	5,73	5,79	5,84	5,9	
	0,01	4,13	4,79	5,19	5,49	5,72	5,92	6,08	6,22	6,35	6,46	6,56	6,66	6,74	6,82	6,90	6,97	7,03	7,09	7,15	
17	0,05	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,70	4,86	4,99	5,11	5,21	5,31	5,39	5,47	5,54	5,61	5,67	5,73	5,79	5,84	
	0,01	4,10	4,74	5,14	5,43	5,66	5,85	6,01	6,15	6,27	6,38	6,48	6,57	6,66	6,73	6,81	6,87	6,94	7,00	7,05	
18	0,05	2,97	3,61	4,00	4,28	4,49	4,67	4,82	4,96	5,07	5,17	5,27	5,35	5,43	5,5	5,57	5,63	5,69	5,74	5,79	
	0,01	4,07	4,70	5,09	5,38	5,60	5,79	5,94	6,08	6,20	6,31	6,41	6,50	6,58	6,65	6,73	6,79	6,85	6,91	6,97	
19	0,05	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,14	5,23	5,31	5,39	5,46	5,53	5,59	5,65	5,70	5,75	
	0,01	4,05	4,67	5,05	5,33	5,55	5,73	5,89	6,02	6,14	6,25	6,34	6,43	6,51	6,58	6,65	6,72	6,78	6,84	6,89	
20	0,05	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01	5,11	5,20	5,28	5,36	5,43	5,49	5,55	5,61	5,66	5,71	
	0,01	4,02	4,64	5,02	5,29	5,51	5,69	5,84	5,97	6,09	6,19	6,28	6,37	6,45	6,52	6,59	6,65	6,71	6,77	6,82	
24	0,05	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,01	5,10	5,18	5,25	5,32	5,38	5,44	5,49	5,55	5,59	
	0,01	3,96	4,55	4,91	5,17	5,37	5,54	5,69	5,81	5,92	6,02	6,11	6,19	6,26	6,33	6,39	6,45	6,51	6,56	6,61	
30	0,05	2,89	3,49	3,85	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,82	4,92	5,00	5,08	5,15	5,21	5,27	5,33	5,38	5,43	5,47	
	0,01	3,89	4,45	4,80	5,05	5,24	5,40	5,54	5,65	5,76	5,85	5,93	6,01	6,08	6,14	6,20	6,26	6,31	6,36	6,41	
40	0,05	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,63	4,73	4,82	4,90	4,98	5,04	5,11	5,16	5,22	5,27	5,31	5,36	
	0,01	3,82	4,37	4,70	4,93	5,11	5,26	5,39	5,50	5,60	5,69	5,76	5,83	5,90	5,96	6,02	6,07	6,12	6,16	6,21	
60	0,05	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,73	4,81	4,88	4,94	5,00	5,06	5,11	5,15	5,20	5,24	
	0,01	3,76	4,28	4,59	4,82	4,99	5,13	5,25	5,36	5,45	5,53	5,60	5,67	5,73	5,78	5,84	5,89	5,93	5,97	6,01	
120	0,05	2,80	3,36	3,68	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56	4,64	4,71	4,78	4,84	4,90	4,95	5,00	5,04	5,09	5,13	
	0,01	3,70	4,20	4,50	4,71	4,87	5,01	5,12	5,21	5,30	5,37	5,44	5,50	5,56	5,61	5,66	5,71	5,75	5,79	5,83	
infinitu	0,05	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47	4,55	4,62	4,68	4,74	4,80	4,85	4,89	4,93	4,97	5,01	
	0,01	3,64	4,12	4,40	4,60	4,76	4,88	4,99	5,08	5,16	5,23	5,29	5,35	5,40	5,45	5,49	5,54	5,57	5,61	5,65	

8.13. KOLMOGOROV-SMIRNOV

Kolmogorov-Smirnov doikuntza-testerako muga kritikoen balioen taula. Diferentzia handieneko balioen taula. $D_{\max} = |F_0(X) - S_n(X)|$

Laginare tamaina (n)	Esangura-maila (α)				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,960	0,775	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,566	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,566	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,470
11	0,307	0,326	0,352	0,371	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,347	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,307	0,371
17	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,210	0,220	0,240	0,270	0,320
30	0,170	0,200	0,220	0,240	0,270
35	0,180	0,190	0,210	0,230	0,270
35 baino handiagoa	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

8.14. ZEINUEN TESTA. WILCOXONEN BOLADA-TESTA

x	α			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	—	—	—	—
4	—	—	—	—
5	0	—	—	—
6	2	0	—	—
7	3	2	0	—
8	5	3	1	0
9	8	5	3	1
10	10	8	5	3
11	13	10	7	5
12	18	13	9	7
13	21	17	12	9
14	25	21	15	12
15	30	25	19	15
16	35	29	23	19
17	41	34	27	23
18	47	40	32	27
19	53	46	37	32
20	60	52	43	37
21	67	58	49	42
22	75	65	55	48
23	83	73	62	54
24	91	81	69	61
25	100	89	76	68
26	110	98	84	75
27	119	107	92	83
28	130	116	101	91
29	140	126	110	100
30	151	137	120	109
31	143	147	130	118
32	175	159	140	128
33	187	170	161	138
34	200	182	162	148
35	213	195	173	159
36	227	208	185	171
37	241	224	198	182
38	256	235	211	194
39	271	249	224	207
40	286	264	238	220
41	302	279	252	233
42	319	294	266	247
43	336	310	281	261
44	353	327	296	276
45	371	343	312	291
46	389	361	328	307
47	407	378	345	322
48	426	396	362	339
49	446	415	379	355
50	466	434	397	373

x	α			
	0,01	0,02	0,03	0,04
51	486	453	416	390
52	507	473	434	408
53	529	494	454	427
54	550	514	473	445
55	573	536	493	465
56	595	557	514	484
57	618	579	535	504
58	642	602	556	525
59	666	625	578	546
60	690	648	600	567
61	715	672	623	589
62	741	697	646	611
63	767	721	669	634
64	793	747	693	657
65	820	772	718	681
66	8417	798	742	705
67	875	825	768	729
68	903	852	793	754
69	931	879	819	779
70	960	907	846	805
71	990	936	873	831
72	1020	964	901	858
73	1050	994	928	884
74	1081	1023	957	912
75	1112	1053	986	940
76	1144	1084	1015	938
77	1176	1115	1044	997
78	1209	1147	1075	4026
79	1242	1179	1105	4056
80	1276	1211	1136	4086
81	1310	1244	1168	1116
82	1345	1277	1200	1147
83	1380	1311	1232	1178
84	1415	1345	1265	1210
85	1451	1380	1298	1242
86	1487	1415	1332	1275
87	1524	1451	1366	1308
88	1561	1487	1400	1342
89	1599	1523	1435	1376
90	1638	1560	1471	1410
91	1676	1597	1507	1445
92	1715	1635	1543	1480
93	1755	1674	1580	1516
94	1795	1712	1617	1552
95	1836	1752	1655	1589
96	1877	1791	1693	1626
97	1918	1832	1731	1664
98	1960	1872	1770	1702
99	2003	1913	1810	1740
100	2045	1955	1850	1779

8.15. ZEINUEN TESTA

x	α			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	—	—	—	—
4	—	—	—	—
5	0	—	—	—
6	0	0	—	—
7	0	0	0	—
8	1	0	0	0
9	1	1	0	0
10	1	1	0	0
11	2	1	1	0
12	2	2	1	1
13	3	2	1	1
14	3	2	2	1
15	3	3	2	2
16	4	3	2	2
17	4	4	3	2
18	5	4	3	3
19	5	4	4	3
20	5	5	4	3
21	6	5	4	4
22	6	5	5	4
23	7	6	5	4
24	7	6	5	5
25	7	7	6	5
26	8	7	6	6
27	8	7	7	6
28	9	8	7	6
29	9	8	7	7
30	10	9	8	7
31	10	9	8	7
32	10	9	8	8
33	11	10	9	8
34	11	10	9	9
35	12	11	10	9
36	12	11	10	9
37	13	12	10	10
38	13	12	11	10
39	13	12	11	11
40	14	13	12	11
41	14	13	12	11
42	15	14	13	12
43	15	14	13	12
44	16	14	13	13
45	16	15	14	13
46	16	15	14	13
47	17	16	15	14
48	17	16	15	14
49	18	17	15	15
50	18	17	16	15

x	α			
	0,01	0,02	0,03	0,04
51	19	18	16	15
52	19	18	17	16
53	20	18	17	16
54	20	19	18	17
55	20	19	18	17
56	21	20	18	17
57	21	20	19	18
58	22	21	19	18
59	22	21	20	19
60	23	21	20	19
61	23	22	20	20
62	24	22	21	20
63	24	23	21	20
64	24	23	22	21
65	25	24	22	21
66	25	24	23	22
67	26	25	23	22
68	26	25	23	22
69	27	25	24	23
70	27	26	24	23
71	28	26	25	24
72	28	27	25	24
73	28	27	26	25
74	29	28	26	25
75	29	28	26	25
76	30	28	27	26
77	30	29	27	26
78	31	29	28	27
79	31	30	28	27
80	32	30	29	28
81	32	31	29	28
82	33	31	30	28
83	33	32	30	29
84	33	32	30	29
85	34	32	31	30
86	34	33	31	30
87	35	33	32	31
88	35	34	32	31
89	36	34	33	31
90	36	35	33	32
91	37	35	33	32
92	37	36	34	33
93	38	36	34	33
94	38	37	35	34
95	38	37	35	34
96	39	37	36	34
97	39	38	36	35
98	40	38	37	35
99	40	38	37	36
100	41	39	37	36

8.16. KRUSKAL-WALLISEN TESTA

α			
n_1	n_2	n_3	0,10 0,05 0,01
3	2	1	4,286 — —
3	2	2	4,500 4,714 —
3	3	1	4,571 5,143 —
3	3	2	4,556 5,361 —
3	3	3	4,622 5,600 7,200
4	2	1	4,500 — —
4	2	2	4,458 5,333 —
4	3	1	4,056 5,208 —
4	3	2	4,511 5,444 6,444
4	3	3	4,709 5,727 6,746
4	4	1	4,167 4,967 6,667
4	4	2	5,554 5,455 7,036
4	4	3	4,546 5,598 7,144
4	4	4	4,654 5,692 7,654
5	2	1	4,200 5,000 —
5	2	2	4,373 5,160 6,533
5	3	1	4,018 4,960 —
5	3	2	4,651 5,251 6,909
5	3	3	4,533 5,648 7,079
5	4	1	3,987 4,986 6,954
5	4	2	4,541 5,273 7,204
5	4	3	4,549 5,656 7,445
5	4	4	4,619 5,657 7,760
5	5	1	4,109 5,127 7,309
5	5	2	4,623 5,338 7,338
5	5	3	5,545 5,705 7,578
5	5	4	4,523 5,666 7,823
5	5	5	4,560 5,780 8,000
6	2	1	4,200 4,822 —
6	2	2	4,545 5,345 6,655
6	3	1	3,909 4,855 6,873
6	3	2	4,682 5,348 6,970
6	3	3	4,590 5,615 7,410
6	4	1	4,038 4,947 7,106
6	4	2	4,494 5,340 7,340
6	4	3	4,604 5,610 7,500
6	4	4	4,595 5,681 7,795
6	5	1	4,128 4,990 7,182
6	5	2	4,596 5,338 7,376
6	5	3	4,593 5,602 7,590
6	5	4	4,522 5,661 7,936
6	5	5	4,547 5,729 7,028
6	6	1	4,000 4,945 7,424
6	6	2	4,438 5,410 7,467
6	6	3	4,558 5,625 7,725
6	6	4	4,548 5,724 8,000
6	6	5	4,542 5,765 8,124
6	6	6	4,643 5,801 8,222

α			
n_1	n_2	n_3	0,10 0,05 0,01
7	2	1	4,200 4,7060 —
7	2	2	4,526 5,143 7,0000
7	3	1	4,173 4,952 7,0300
7	3	2	4,582 5,357 6,8390
7	3	3	4,603 5,620 7,228
7	4	1	4,121 4,9860 6,9860
7	4	2	4,549 5,376 8,3210
7	4	3	4,527 5,623 7,5500
7	4	4	4,562 5,650 7,814
7	5	1	4,035 5,064 7,061
7	5	2	4,485 5,393 7,450
7	5	3	4,535 5,607 7,697
7	5	4	4,542 5,733 7,931
7	5	5	4,571 5,708 8,108
7	6	1	4,033 5,067 7,2540
7	6	2	4,500 5,357 7,490
7	6	3	4,550 5,689 7,7756
7	6	4	4,562 5,706 8,039
7	6	5	4,560 5,770 8,157
7	6	6	4,530 5,730 8,257
7	7	1	3,986 4,986 7,157
7	7	2	4,491 5,398 7,491
7	7	3	4,613 5,688 7,810
7	7	4	4,563 5,776 8,142
7	7	5	4,546 5,746 8,257
8	2	1	4,011 4,909 —
8	2	2	4,587 5,356 6,663
8	3	1	4,010 4,881 6,804
8	3	2	4,451 5,316 7,022
8	3	3	4,543 5,617 7,350
8	4	1	4,038 5,044 6,973
8	4	2	4,500 5,393 7,350
8	4	3	4,529 5,623 7,585
8	4	4	4,561 5,779 7,853
8	5	1	4,967 4,869 7,110
8	5	2	4,466 5,415 7,440
8	5	3	4,514 5,614 7,706
8	5	4	4,549 5,718 7,992
8	5	5	4,555 5,769 8,116
8	6	1	4,015 5,015 7,256
8	6	2	4,463 5,404 7,522
8	6	3	4,575 5,678 7,796
8	6	4	4,563 5,743 8,045
8	6	5	4,550 5,750 8,226
8	7	1	4,045 5,041 7,308
8	7	2	4,451 5,403 7,571
8	7	3	4,556 5,698 7,827
8	7	4	4,548 5,759 8,118

8.17. KRUSKAL-WALLISEN TESTA; TAMAINA BERDINEKO TALDEAK

k=3				α	k=4			α	k=5			α	k=6			n
n	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01	
2	4,571	—	—		5,667	6,167	6,667		6,982	7,418	8,291		8,154	8,846	9,846	2
3	4,622	5,600	7,200		6,026	7,000	8,538		7,333	8,333	10,20		8,620	9,789	11,82	3
4	4,654	5,692	7,654		6,088	7,235	9,287		7,457	8,685	11,07		8,800	10,14	12,72	4
5	4,560	5,780	8,000		6,120	7,377	9,789		7,532	8,876	11,57		8,902	10,36	13,26	5
6	4,643	5,801	8,222		6,127	7,453	10,09		7,557	9,002	11,91		9,958	10,50	13,60	6
7	4,594	5,819	8,378		6,141	7,501	10,25		7,600	9,080	12,14		8,992	10,59	13,84	7
8	4,595	5,805	8,465		6,148	7,534	10,42		7,624	9,126	12,29		9,037	10,66	13,99	8
9	4,586	5,831	8,529		6,161	7,557	10,53		7,637	9,166	12,41		9,057	10,71	14,13	9
10	4,581	5,853	8,607		6,167	7,586	10,62		7,650	9,200	12,50		9,078	10,75	14,24	10
11	4,587	5,885	8,648		6,163	7,623	10,69		7,660	9,242	12,58		9,093	10,76	14,32	11
12	4,578	5,872	8,712		6,185	7,629	10,75		7,675	9,274	12,63		9,105	10,79	14,38	12
13	4,601	5,901	8,735		6,191	7,645	10,80		7,685	9,303	12,69		9,115	10,83	14,44	13
14	4,592	5,896	8,754		6,198	7,658	10,84		7,695	9,307	12,74		9,125	10,84	14,49	14
15	4,591	5,902	8,821		6,201	7,676	10,87		7,701	9,302	12,77		9,133	10,86	14,53	15
16	4,595	5,909	8,822		6,205	7,678	10,90		7,705	9,313	12,79		9,140	10,88	14,56	16
17	4,593	5,915	8,856		6,206	7,682	10,92		7,709	9,325	12,83		9,144	10,88	14,60	17
18	4,596	5,932	8,865		6,212	7,698	10,95		7,714	9,334	12,85		9,149	10,89	14,63	18
19	4,598	5,923	8,887		6,212	7,701	10,98		7,717	9,342	12,87		9,156	10,90	14,64	19
20	4,594	5,926	8,905		6,216	7,703	10,98		7,719	9,353	12,91		9,190	10,92	14,67	20
21	4,597	5,930	8,918		6,218	7,709	11,01		7,723	9,356	12,92		9,164	10,93	14,70	21
22	4,598	5,932	8,928		6,215	7,714	11,03		7,724	9,362	12,92		9,168	10,94	14,72	22
23	4,598	5,937	8,947		6,220	7,719	11,03		7,727	9,368	12,94		9,171	10,93	14,74	23
24	4,598	5,936	8,964		6,221	7,724	11,06		7,729	9,375	12,96		9,170	10,93	14,74	24
25	4,599	5,942	8,975		6,222	7,727	11,07		73,730	9,377	12,96		9,177	10,94	14,77	25
∞	4,605	5,991	9,210		6,251	7,815	11,34		7,779	9,488	13,28		9,236	11,07	15,09	∞

9. Ariketen ebazpenak

9.1. LAGIN-TEORIA ETA ESTIMAZIO-TEORIA

9.1.1. Laginketa-banaketa: batez besteko aritmetikoa

1.1. ariketaren ebazpena:

$$p(\mu > 103) = 0,42074031$$

$$p(98 < \mu < 102) = 0,1060703$$

.....

1.2. ariketaren ebazpena:

$$p(\mu > 103) = 0,4388655$$

.....

1.3. ariketaren ebazpena:

$$p(-1 < \mu < 2,5) = 0,77338932$$

.....

1.4. ariketaren ebazpena:

$$p(\mu > 16,5) = 0,00030654$$

.....

1.5. ariketaren ebazpena:

Parametroak adierazteko.

.....

1.6. ariketaren ebazpena:

a) $p(\mu > 34) = 0,252492467$

b) $n = 9$; $p(\mu > 34) = 0,022750062$

c) $n = 16$; $p(28 < \mu < 32) = 0,817577436$

9.1.2. Laginketa-banaketa: bariantza

2.1. ariketaren ebazpena:

$$p(\sigma^2 > 9,5) = 0,03155177$$

.....

2.2. ariketaren ebazpena:

$$p(\sigma^2 > 144) = 0,041681945$$

.....

2.3. ariketaren ebazpena:

$$p(\sigma^2 < 22500) = 0,033052935$$

9.1.3. Laginketa-banaketa: proportzioa

3.1. ariketaren ebazpena:

Banaketa binomiala. Jakin nahi dugu zer probabilitate dagoen emakumezkoak zortzi edo gehiago edo gizonezkoak bi edo gutxiago izateko. Azken hori tauletan behatzen badugu:

$$p_e = 0,7 ; n = 10 ; x \leq 8$$

$$p(X \leq 8) = 0,8507$$

Horrela, emakumezkoak zortzi edo gehiago izateko probabilitatea:

$$p(X \geq 8) = 1 - p(X \leq 8) = 1 - 0,8507 = 0,1493$$

Banaketa normalari jarraituz, berriz, hipotesiak hauek izango dira:

$$H_0: \pi_0 = 0,7 ; H_1: \pi_1 > 0,7 \text{ (eskuinaldeko testa)}$$

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{10}} = 0,144913767$$

$$\text{Testerako estatistikoa: } Z = \frac{P - \pi_0}{\sigma_\pi} = \frac{0,8 - 0,7}{0,144913767} = 0,690065559$$

Bilatzen dugun probabilitatea —N(0,1) taulak erabiliz—,

$$p(Z \geq 0,690065559) = 0,24506407$$

.....

3.2. ariketaren ebazpena:

Banaketa binomiala erabiliz honako datu hauek dauzkagu:

$$p = 0,6 ; n = 30 ; x \geq 24$$

$$p(X \geq 24) = 0,005658796$$

Banaketa normalari jarraituz, berriz, hipotesiak hauek izango dira:

$$H_0: \pi_0 = 0,6 ; H_1: \pi_1 > 0,6 \text{ (eskuinaldeko testa)}$$

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{30}} = 0,089442719$$

$$\text{Testerako estatistikoa: } Z = \frac{P - \pi_0}{\sigma_\pi} = \frac{0,8 - 0,6}{0,089442719} = 2,236067977$$

Bilatzen dugun probabilitatea —N(0,1) taulak erabiliz—,

$$p(Z \geq 2,236067977) = 0,012673617$$

.....

3.3. ariketaren ebazpena:

Hipotesi estatistikoak:

$$H_0: \pi_0 = 0,3 ; H_1: \pi_1 > 0,3 \text{ (eskuinaldeko testa)}$$

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{22}} = 0,097700842$$

$$\text{Testerako estatistikoa: } Z = \frac{P - \pi_0}{\sigma_\pi} = \frac{0,5 - 0,3}{0,097700842} = 2,047065263$$

Bilatzen dugun probabilitatea —N(0,1) taulak erabiliz—,

$$p(Z \geq 2,047065263) = 0,020325771$$

.....

3.4. ariketaren ebazpena:

Banaketa binomiala.

$$\text{a) } p(X = 15) = 0,07464702$$

$$\text{b) } p(X \geq 15) = 0,125598973$$

.....

3.5. ariketaren ebazpena:

Konparaketa estatistika inferentzialari dagokio.

.....

3.6. ariketaren ebazpena:

Laginaren deskribapena estatistika deskribatzaileari dagokio eta botikaren eraginkortasuna antzematea, berriz, estatistika inferentzialari.

.....

3.7. ariketaren ebazpena:

Hipotesi estatistikoak:

 $H_0: \pi_0 = 0,5$; $H_1: \pi_1 \neq 0,5$ (aldebiko testa)

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{10}} = 0,14913767$$

$$\text{Testerako estatistikoa: } Z = \frac{P - \pi_0}{\sigma_\pi} = \frac{0,3 - 0,5}{0,14913767} = -1,380131119$$

Muga kritikoak, z puntuazioak, — $N(0,1)$ taulak erabiliz—, $|Z_{\alpha/2}| = 2,58$

Gauzak horrela, ezin bazter dezakegu langileen erdia proposamenaren alde egon daitekeela.

Proposamenaren aurka ager daitezkeen proportzioari dagokionez ($1-\alpha = 0,99$),

$$p\left((\pi + Z_{\alpha/2}\sigma_\pi) \leq \pi \leq (\pi + Z_{1-\alpha/2}\sigma_\pi)\right) = 0,99 \quad ; \quad p(-0,073 \leq \pi \leq 0,637) = 0,99$$

9.1.4. Konfiantza-maila, testaren indarra eta I. eta II. motako erroreak

4.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 100$; $\bar{X} = 80$; $\hat{S}_x = 10$; $\alpha = 0,01$ Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 80$

$$\text{Konfiantza-tartea: } p\left((\mu + Z_{\alpha/2}\sigma_\mu) \leq \mu \leq (\mu + Z_{1-\alpha/2}\sigma_\mu)\right) = 0,99$$

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_\mu = \sqrt{\hat{S}_x^2/n} = \sqrt{10^2/100} = 1$$

Puntuazio tipikoak — $N(0, 1)$ — tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 2,58$

$$\text{Konfiantza-tartea: } p(77,42 \leq \mu \leq 82,58) = 0,99$$

.....

4.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 10$; $\bar{X} = 4$; $\hat{S}_x^2 = 1,2$; $a = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 4$

Konfiantza-tartea: $p\left((\mu + Z_{\alpha/2}\sigma_\mu) \leq \mu \leq (\mu + Z_{1-\alpha/2}\sigma_\mu)\right) = 0,95$

Errore tipikoa: $\sigma_\mu = \sqrt{\hat{S}_x^2/n} = \sqrt{1,2^2/10} = 0,379473319$

Puntuazio tipikoak $—N(0, 1)—$ tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 1,96$

Konfiantza-tartea: $p(3,256 \leq \mu \leq 4,744) = 0,95$

Lagina $n = 10$ izan beharrean $n = 20$ izango balitz:

Errore tipikoa: $\sigma_\mu = \sqrt{\hat{S}_x^2/n} = \sqrt{1,2^2/20} = 0,268328157$

Konfiantza-tartea: $p(3,474 \leq \mu \leq 4,526) = 0,95$

.....

4.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 10$; $\bar{X} = 16$; $S_x = 2,4$; $a = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 16$

Konfiantza-tartea: $p\left((\mu + Z_{\alpha/2}\sigma_\mu) \leq \mu \leq (\mu + Z_{1-\alpha/2}\sigma_\mu)\right) = 0,95$

Errore tipikoa: $\sigma_\mu = \sqrt{S_x^2/n} = \sqrt{2,4^2/10} = 0,758946638$

Puntuazio tipikoak $—N(0, 1)—$ tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 1,96$

Konfiantza-tartea: $p(14,512 \leq \mu \leq 17,488) = 0,95$

.....

4.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 100$; $x = 24$; $a = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,6$

Errore tipikoa: $\sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{40}} = 0,077459667$

Puntuazio tipikoak $—N(0, 1)—$ tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 1,96$

Konfiantza-tartea: $p(0,448 \leq \pi \leq 0,752) = 0,95$

.....

4.5. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 10$; $\bar{X} = 4$; $\hat{S}_x = 4$; $a = ??$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 10$

Konfiantza-tartea: $p(9 \leq \mu \leq 11) =$

Errore tipikoa: $\sigma_\mu = \sqrt{\hat{S}_x^2/n} = \sqrt{4^2/40} = 0,63245532$

Puntuazio tipikoak $—N(0, 1)—$ tauletan: $Z_{\alpha/2} = \frac{9-10}{0,632} = -1,581$

Konfiantza-tartea: $p(9 \leq \mu \leq 11) = 0,886$

Esangura-maila *enpirikoa*: $\alpha = 1 - 0,886 = 0,114$

.....

4.6. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 150$; $p = 0,43$; $a = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,43$

Errore tipikoa: $\sigma_\pi = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,43(1-0,43)}{150}} = 0,040422466$

Puntuazio tipikoak $—N(0, 1)—$ tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 1,96$

Konfiantza-tartea: $p(0,3508 \leq \pi \leq 0,5092) = 0,95$

.....

4.7. ariketaren ebazpena:

% 99ko konfiantza-mailakoa, puntuazio tipikoak handiagoak direlako.

.....

4.8. ariketaren ebazpena:

Hipotesi nuluaren proposamenarekiko.

.....

4.9. ariketaren ebazpena:

Laginaren tamaina zenbat eta handiagoa izan orduan eta konfiantza-tartea estuagoa.

.....

4.10. ariketaren ebazpena:

Balioaren *benetako* mugak ezagutzeko probabilitate-maila jakinaren arabera.

.....

4.11. ariketaren ebazpena:

Batez bestekoa ($n = 6$): 12Errore tipikoa: $\sigma_{\mu} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,8}{\sqrt{6}} = 1,143095213$ Puntuazio tipikoak — $N(0, 1)$ — tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 1,96$ Konfiantza-tartea: $p(9,7595 \leq \mu \leq 14,2405) = 0,95$

.....

4.12. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 18$; $x = 12$; $\alpha = 0,05$ Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,667$ Errore tipikoa: $\sigma_{\pi} = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,667(1-0,667)}{18}} = 0,1111$ Puntuazio tipikoak — $N(0, 1)$ — tauletan: $|Z_{\alpha/2}| = 1,96$ Konfiantza-tartea: $p(0,4489 \leq \pi \leq 0,8844) = 0,95$

Apustuzalea harroputza galanta da!

.....

4.13. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 25$; $\sigma^2 = 100$; $1 - \beta = 0,99621$ Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 30$; $H_1: \mu_1 = 40$ Ordezko hipotesiaren banaketan ($\mu_1 = 40$) —eskuinaldeko testa—, probabilitateari dagokion puntuazio tipikoa — $N(0, 1)$ — tauletan begiratuko dugu: $z_{\beta} = -2,67$ Hori jakinik, *muga kritikoa* kalkulatu dugu:

$$M_k = \mu + z_{\beta} \sigma_{\mu} = 40 + (-2,67)2 = 34,66$$

Hipotesi nuluaren banaketan ($\mu_1 = 30$) —eskuinaldeko testa—, z_{β} puntuazio tipikoa kalkulatu dugu:

$$Z_{1-\alpha} = \frac{34,66 - 30}{2} = 2,33$$

Eta, azkenik, — $N(0, 1)$ — tauletan begiratuko dugu: $z_{1-\alpha} = 0,99$. Beraz, $\alpha = 0,01$

.....

4.14. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 25$; $\mu = 1386$; $\sigma = 361$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 1386$; $H_1: \mu_1 < 1386$

Hipotesi-testaren arabera —ezkerraldeko testa— tauletan begiratuko dugu: $z_\alpha = 1,645$ Hori eta errore tipikoa (σ_μ) jakinik, ondoren *muga kritikoa* kalkulatu dugu:

$$M_k = \mu + z_\alpha \sigma_\mu = 1386 + (-1,645) 72,2 = 1267,231$$

Lagineko irakasleek 1.203 € besterik ez dute irabazten. Hipotesi nulua ukatu behar dugu, beraz. Hori horrela, proposa dezagun, bada, $H_1: \mu_1 = 1203$. Hipotesi horren araberako banaketa barruan, testaren indarra kalkulatu dugu.

$$Z_{1-\beta} = \frac{1267,231 - 1203}{72,2} = 0,8896$$

Azkenik, *testaren indarra* $(1 - \beta)$ — $N(0, 1)$ — tauletan begiratuko dugu: $p(Z \leq z_{1-\beta}) = 0,8132$

.....

4.15. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 100$; $p(\mu_A < X_A) = 0,9332$; $p(\mu_B < X_B) = 0,1587$; $\mu_B = 95$; $\sigma^2 = 100$

Errore tipikoa: $\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$

Pertsona horrek puntuazio bera lortu du A eta B testetan. Hau da, $X_A = X_B$

Beraz: $\mu_A + z_A \sigma_\mu = \mu_B + z_B \sigma_\mu$

Puntuazio tipikoak tauletan begiratuko ditugu — $N(0, 1)$ —

A-ren banaketan: $p(Z \leq z_A) = 0,9332$ —————→ $z_A = 1,5$

B-ren banaketan: $p(Z \leq z_B) = 0,1587$ —————→ $z_B = -0,93$

Beraz: $\mu_B = 95 + 2,43 = 97,43$

Eta pertsonaren adimen-neurria: $X_A = X_B = 96,5$

.....

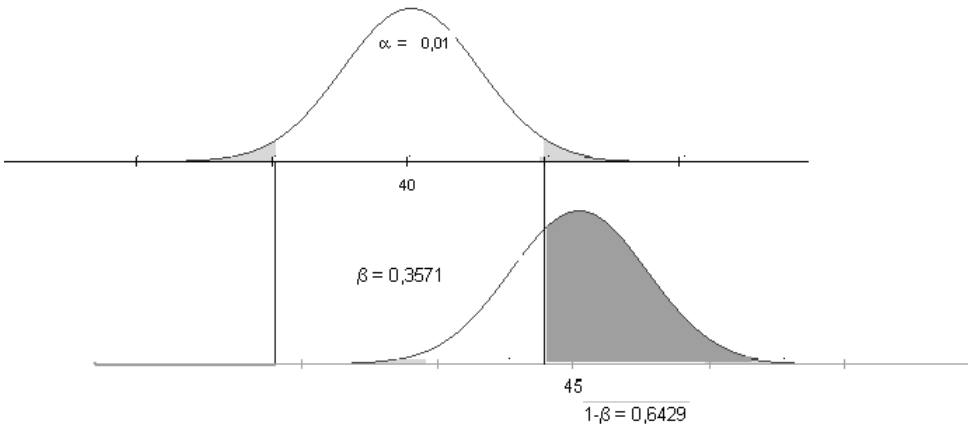
4.16. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 50$; $\sigma^2 = 144$; $\alpha = 0,01$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 40$; $H_1: \mu_1 = 45$ Aldebiko testa

Errore tipikoa: $\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{144}{50}} = 1,697$

Muga kritikoen puntuazio tipikoak $\text{---}N(0, 1)\text{---}$ tauletan: $\left| z_{\frac{\alpha}{2}} \right| = 2,58$



.....

4.17. ariketaren ebazpena:

Bai, laginen tamaina berberak eta desbiderapen berberak direnean errore tipikoak berdinak direlako.

.....

4.18. ariketaren ebazpena:

Lehenengo lagina da handiena, laginen arteko erlazioa, berriz, $\frac{n_1}{n_2} = 1,84$ da

.....

4.19. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 10$; $\overline{X} = 1,72\ m$; $S_x = 0,37\ m$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 1,72$ Aldebiko testa

Konfiantza-tartea: $p(1,49 \leq \mu \leq 1,95) = 0,95$

.....

4.20. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 40$; $\bar{X} = 70,5$; $\sigma^2 = 160$; $\alpha = 0,01$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 65$; $H_1: \mu_1 = 70,5$ Aldebiko testa

$\beta = 0,4325$

.....

4.21. ariketaren ebazpena:

Aurreko ariketako datu batzuk eta *testaren indarra* hamabost puntu handiagoa,
 $1 - \beta = 0,7175$

Tauletan $N(0, 1)$ — begiratuko dugu z_β puntuazio tipikoa:

$p(Z \leq z_\beta) = 0,2825$

$z_\beta = -0,5754$ Datu horiekin lagin-tamaina kalkulatu dugu:

$$n = \sigma^2 \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{(\mu_0 + \mu_1)^2} = 160 \frac{(2,58 + (-0,5754))^2}{(65 + 70,5)^2} = 52,66 \approx 53$$

.....

4.22. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 100$; $\alpha = 0,025$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 v = 0,5$; $H_1: \pi_1 v = 0,64$ Eskuinaldeko testa. $\sigma_\pi = 0,05$
 $1 - \beta = 0,80$

.....

4.23. ariketaren ebazpena:

$\alpha = 0,04$

.....

4.24. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 1000$; $X = 600$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,5$; $H_1: \pi_1 = 0,6$ Eskuinaldeko testa.

$\sigma_\pi = 0,0158$ $1 - \beta = 0,999998$

Bai, oso esanguratsuki aldentzen da espero zitekeenetik.

.....

4.25. ariketaren ebazpena:

$$|z_{\alpha/2}| = 2,58 \quad n = \frac{\sigma^2 \left| z_{\frac{\alpha}{2}} \right|^2}{e^2} = \frac{0,3876^2 \cdot 2,58^2}{0,05^2} = 400$$

.....

4.26. ariketaren ebazpena:

Hipotesi estatistikoak zehaztu ditzagun:

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,50$; $H_1: \pi_1 \neq 0,50$ Aldebiko testa

$\sigma_\pi = 0,0091$; $|z_{\alpha/2}| = 1,96$ Konfiantza-tartea:

$$\pi_0 + \sigma_\pi z_{\alpha/2} \leq \pi_0 \leq \pi_0 + \sigma_\pi z_{1-\alpha/2} = 0,482 \leq \pi_0 \leq 0,513$$

Horiek horrela, behatutako probabilitatea ($p = 0,442$) konfiantza-tartetik kanpo dagoenez, ezin esan dezakegu txanponak amarrurik ez duenik.

9.2. HIPOTESI-TEST PARAMETRIKOAK

5.1. ariketaren ebazpena:

Esanguratsutasuna alderdi estatistikoari dagokio. *Adierazgarritasuna*, berriz, zabalagoa da. Adibidez, Bilboko biztanle guztien artean, erdaldunak eta euskaldunak, euskararen jakite-mailaren eta euskararen erabileraren arteko erlazioa *esanguratsua* da (estatistikoki) baina ez da *adierazgarria* euskaraz ez dakitenek erabiltzerik ez daukatelako!

.....

5.2. ariketaren ebazpena:

Euren burua aurkezten duten ikasleak *bereziak* dira, gutxienik, *parte hartu nahi izateak* bereizten dituelako. Hori horrela, laginaren *adierazgarritasuna* zalantzan dago. Era berean, taldeak antolatzerakoan aurkezten diren aurrenak *prestuago* egon daitezkeela pentsa dezakegu. Horrek guztiak taldeen arteko alde aurretiko baliokidetasuna zalantzan ipintzen du. Edozein kasutan, ez-zorizko laginketa-tekniken artean *zorrotzena*, ausazkotasunaren printzipioetara gehien hurbiltzen dena, *ustekabeko laginketa* da.

.....

5.3. ariketaren ebazpena:

Independenteak direla, elkarren artean erlazio jakinik ez daukatela, biak ahala biak zorizkoak direla.

.....

5.4. ariketaren ebazpena:

ALDAGAIA	Politomikoa	Jarraikia	Diskretua	Kuantitatiboa	Kualitatiboa
Erantzuteko denbora		X		X	
Lanarekiko jarrera	X				X
Gustuko kolorea	X				X
Lanpostu desiratu	X				X
Gogoratu hitz kopurua			X	X	
Izen-zerrenda	X				X

.....

5.5. ariketaren ebazpena:

Arrazoikoa; ordena-mailakoa; izenezkoa; ordena-mailakoa; proportziozkoa; izenezkoa.

.....

5.6. ariketaren ebazpena:

Gaizki daudenak: a, b, c, e, f, g, h.

.....

5.7. ariketaren ebazpena:

Oker daudenak: a, b, d, e.

.....

5.8. ariketaren ebazpena:

Zuzen: b, c, e. Oker: a, d.

.....

5.9. ariketaren ebazpena:

Estatistikoaren laginketa-banaketaren desbiderapen estandarra.

.....

5.10. ariketaren ebazpena:

Datuak zorizkoak diren ala ez erabakitzea.

.....

5.11. ariketaren ebazpena:

Hipotesi nuluak zorizko datuak edo gertaerak diren adierazten duelako.

.....

5.12. ariketaren ebazpena:

Teknika biak berdinak dira (a). Ez dago korrelaziorik ($\rho_0 = 0$) (b). Erabilera-mailak berdinak dira (c). Eraginak berdinak dira (d).

.....

5.13. ariketaren ebazpena:

Ustezko erroreari dagokiolako. Haren ohiko balioak 0,05 edo txikiagoak izaten dira.

.....

5.14. ariketaren ebazpena:

Estatistikoa muga jakinetik harago ote doan jakin nahi dugunean. *Indartuagoa* izatea. Gazteek euskara *gutxiago* erabiltzen dute helduek baino?

.....

5.15. ariketaren ebazpena:

$\alpha = 0,01$ hipotesi nuluaaren aldeko erabakia probabilitate handiagokoa delako. Aurrenekoan.

.....

5.16. ariketaren ebazpena:

- 1) Diferentzia zenbat eta handiagoa izan, β orduan eta txikiagoa da.
- 2) Errorea handitzean β handitzen da.
- 3) Tamaina handitzeak $1 - \beta$ handitzea dakar.
- 4) I. motako errorearen probabilitate (α) bera da.

9.2.1. Hipotesi-test parametrikok: batez besteko aritmetiko bakarra

6.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 64$; $\sigma = 16$; $\mu = 100$; $\bar{X} = 108$; $\alpha = 0,01$ (guk jarrita)

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 100$; $H_1: \mu_1 > 100$ Eskuinaldeko testa

$z_\alpha = 2,33$; Muga kritikoa $Mk = 104,67$; Erabaki estatistikoa: H_0 baztertu

Testaren indarra $(1 - \beta) = 0,953$

.....

6.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 25$; $\sigma = 10$; $\mu = 30$; $\bar{X} = 40$; $(1 - \beta) = 0,9962$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 30$; $H_1: \mu_1 > 30$ Eskuinaldeko testa

$\sigma_\mu = 2$; $z_\beta = -2,67$; Muga kritikoa $Mk = 34,66$

Erabaki estatistikoa: H_0 baztertu ; $z_\alpha = 2,33$

Eta, azkenik, $\alpha = 0,01$

.....

6.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 25$; $\sigma = 30$; $\mu = 1000$; $\bar{X} = 1150$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 1000$; $H_1: \mu_1 > 1000$ Eskuinaldeko testa

$\sigma_\mu = 52$; $z_{1-\alpha} = 1,65$; Muga kritikoa $Mk = 1085,53$

Erabaki estatistikoa: H_0 baztertu ; $z_\beta = -1,24$ Testaren indarra $(1-\beta) = 0,8925$

.....

6.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 20$; $\sigma^2 = 180$; $\mu_0 = 15$; $1-\beta = 0,80$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 15$; $H_1: \mu_1 > 15$ ($\mu_1 = 21$) Eskuinaldeko testa

$\sigma_\mu = 3$; $z_\beta = -0,8416$; Muga kritikoa $Mk = 18,48$; $z_{1-\alpha} = 1,16$

Arrisku-maila: $\alpha = 0,1234$

.....

6.5. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 100$; $\sigma^2 = 15$; $\mu_0 = 30$; $1-\alpha = 0,95$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 30$; $H_1: \mu_1 > 30$ ($\mu_1 = 33$) Eskuinaldeko testa

$\sigma_\mu = 1,5$; $z_{1-\alpha} = 1,65$; Muga kritikoa $Mk = 32,48$; $z_\beta = -0,35$

II. motako errorearen probabilitatea: $\beta = 0,3632$

II. motako errorearen probabilitatearen erdia: $\beta = 0,1816$

$z_\beta = -0,9093$; Muga kritikoa $Mk = 31,066$; $\sigma_\mu = 0,646$; $n = 539$

.....

6.6. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 150$; $S_y = 3,2$; $\mu_0 = 9,3$; $1-\alpha = 0,95$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 30$

$\sigma_\mu = 0,26$; $z_{\alpha/2} = -1,65$; $z_{1-\alpha/2} = 1,65$

Muga kritikoak: $Mk_b = 8,87$; $Mk_g = 9,77$

.....

6.7. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 200$; $S_y = 96$; $\mu_0 = 279$; $1 - \alpha = 0,99$

Hipotesiak: $H_0: \mu_0 = 279$

$\sigma_\mu = 96$; $z_{\alpha/2} = -2,33$; $z_{1-\alpha/2} = 2,33$

Muga kritikoak: $Mk_b = 263$; $Mk_g = 295$

9.2.2. Hipotesi-test parametrikokoak: proportzio bakarra

7.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 20$; $X = 9$; $\pi_0 = 0,30$; $1 - \alpha = 0,95$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,30$; $H_1: \pi_1 > 0,30$ Eskuinaldeko testa

$p = 0,45$; $\sigma_\pi = 0,1025$; $z_{1-\alpha} = 1,65$; Muga kritikoa $Mk = 0,4691$

Erabaki estatistikoa: H_0 onartu % 95eko konfiantza-mailaz. Terapiak ez du eraginkortasun esanguratsurik.

.....

7.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 36$; $X = 11$; $\pi_0 = 0,50$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,50$; $H_1: \pi_1 \neq 0,50$ Aldebiko testa

$p = 0,306$; $\sigma_\pi = 0,0833$; $|z_{\alpha/2}| \sigma_\pi = 0,194$; $z_{\alpha/2} = -2,33$;

$p(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0,01$

Politikariek zerbait egin dezaten erabili behar dugun arrisku-maila (α) % 2 edo txikiagoa da.

.....

7.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $1 - \beta = 0,80$; $\alpha = 0,05$; $\pi_0 = 0,50$

Hipotesiak: $H_0: \pi_0 = 0,50$; $H_1: \pi_1 > 0,50$ ($\pi_1 = 0,7$) Eskuinaldeko testa

$\sigma_\pi = 0,08026$; $|z_{\alpha/2}| \sigma_\pi = 0,194$; $z_{1-\alpha} = 1,65$; $p(Z \leq z_{1-\beta}) = 0,8$;

$z_\beta = -0,8416$

Errore tipikoaren balioa ezaguturik, $n = 39$

.....

7.4. ariketaren ebazpena:

Ondorengo formularen bitartez goren mailako errorea zehazten dugu:

$$\left| Z \frac{\alpha}{2} \right| \sigma_p = \left| Z \frac{\alpha}{2} \right| \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

Eta hortik eratorrita, behin π eta E ezaguturik laginaren tamaina honela kalkulatu:

$$n = \frac{\left(\frac{Z_{\alpha}}{2}\right)^2}{E_{\max}^2} [\pi(1-\pi)]$$

Gure ariketan $|Z_{\alpha/2}| = 2,58$ Kasu honetan π ezagutzen ez dugunez, demagun $\pi = 1/2$

Orduan:

$$n = \frac{(2,58)^2}{(0,05)^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] = 665,64$$

Hau da, 666 pertsonaz osaturiko lagina behar dugu.

9.2.3. Hipotesi-test parametrikook: bariantza bakarra

8.1. ariketaren ebazpena:

Ebazpena: $\chi^2 = 14,85$ tauletan $_{0,05}\chi^2_{19} = 10,1$

.....

8.2. ariketaren ebazpena:

$\chi^2 = 29,4$ tauletan $_{0,05}\chi^2_{15} = 25$ Hipotesi nulua baztertzen dugu, UEUko taldea heterogeneoa da, beraz. Konfiantza-tartea:

$$S_y \sqrt{\frac{n}{1 - \frac{\alpha}{2} \chi^2_{\nu}}} \leq \sigma \leq S_y \sqrt{\frac{n}{\frac{\alpha}{2} \chi^2_{\nu}}} \quad 6,1 \sqrt{\frac{16}{27,5}} = 4,65 \leq \sigma \leq 6,1 \sqrt{\frac{16}{6,26}} = 9,75$$

.....

8.3. ariketaren ebazpena:

$H_0: \sigma_0^2 = 225$; $H_1: \sigma_1^2 > 225$; $\chi^2 = 32,09$ tauletan $_{0,95}\chi^2_{19} = 30,14$

Erabaki estatistikoa: hipotesi nulua ukatu. Adimen-koizientea neurtzeko testa berritu beharko litzateke bariantza txikiagoa lortzeko.

.....

8.4. ariketaren ebazpena:

Laginaren tamaina nahiko handia denez, banaketa normalarekiko egokitza-pena erabiltzen dugu.

$$z_p = \sqrt{2\chi_p^2} - \sqrt{2\nu - 1} \quad \text{eta hortik,} \quad \chi_p^2 = \frac{(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2}{2}$$

$$\text{Goi-muga:} \quad {}_{0.975}\chi_{199}^2 = \frac{(1,96 + \sqrt{2(199) - 1})^2}{2} \approx 239$$

$$\text{Behe-muga:} \quad {}_{0.025}\chi_{199}^2 = \frac{(-1,96 + \sqrt{2(199) - 1})^2}{2} \approx 161$$

$$S_y \sqrt{\frac{n}{1 - \frac{\alpha}{2}} \chi_{\nu}^2} \leq \sigma \leq S_y \sqrt{\frac{n}{\frac{\alpha}{2}} \chi_{\nu}^2} \quad 100 \sqrt{\frac{200}{239}} = 91,2 \leq \sigma \leq 100 \sqrt{\frac{200}{161}} = 111,3$$

.....

8.5. ariketaren ebazpena:

$$H_0: \sigma_0^2 = 100 ; H_1: \sigma_1^2 > 100 ; \chi^2 = 86,4 \text{ tauletan} \quad {}_{0.95}\chi_{59}^2 = 77,93$$

Erabaki estatistikoa: hipotesi nulua ukatu. Itxuraz, nabarritzar horiek arrazioia daukate eta tenperaturaren bariantza handitu da.

9.2.4. Hipotesi-test parametrikokoak: batez besteko aritmetiko bi, lagin independenteak

9.1. ariketaren ebazpena:

$$\text{Datuak:} \quad n_1 = n_2 = 100 ; \alpha = 0,037 \text{ (enpirikoa)} ; \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 503 - 499 = 4$$

Esangura-maila enpirikoari (eskuinaldeko testa) $z_{1-\alpha} = 1,787$ dagokio.

Batez bestekoen arteko diferentzia 4 puntukoa da eta errore tipikoa 2,24

Horiek horrela, % 99ko konfiantza-maila erabiliko bagenu ezin onar genezake bi lagain artean diferentzia esanguratsuak direnik. Bata eta bestearen eraginkortasunak antzekoak direla esan beharko genuke. Erabaki estatistikoa aldatuko litzateke konfiantza-maila % 95ekoa erabiliz gero.

.....

9.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = n_2 = 5$; $\alpha = 0,05$

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 15,4 - 16,4 = 1$; $S_1^2 = 35,44$; $S_2^2 = 37,44$;

$\sigma_{\mu 1 - \mu 2} = 3,82$

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $t_{\alpha/2;8} = 2,3060$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = 0,33$ Hipotesi nulua onartu behar dugu % 95eko konfiantza-mailaz.

.....

9.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = n_2 = 30$; $\alpha = 0,05$

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 13 - 11 = 2$; $S_1^2 = S_2^2 = 4$; $\sigma_{\mu 1 - \mu 2} = 3,82$

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $t_{\alpha/2;70} = 1,9944$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = 3,873$ Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko arrisku-mailaz; emakumezkoen abortuarekiko jarrera aldekoagoa erakusten dute.

.....

9.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 15$; $n_2 = 22$; $\alpha = 0,05$; $S_1'^2 = 30$; $S_2'^2 = 28$

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 95 - 90 = 5$; $\sigma_{\mu 1 - \mu 2} = 1,81$

Esangura-maila nominalari (eskuinaldeko testa) $t_{\alpha/2;35} = 1,6896$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = 2,7639$ Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko arrisku-mailaz; langileen asetasun-maila handiagoa da erabakietan parte hartzen dutenean.

.....

9.5. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 50$; $n_2 = 60$; $\alpha = 0,05$; $S_1^2 = 6,25$; $S_2^2 = 4$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ Ezkerraldeko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 12,3 - 14,9 = -2,6$; $\sigma_{\mu 1 - \mu 2} = 0,47$

Esangura-maila nominalari (ezkerraldeko testa) $t_{\alpha;108} = -1,98$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = -5,5$ Hipotesi nulua ukatzen dugu % 5eko arrisku-mailaz; A metodoa B baino okerragoa da.

.....

9.6. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_A = 50$; $n_B = 30$; $\alpha = 0,05$; $S_A^2 = 256$; $S_B^2 = 441$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Aldebiko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_A - \bar{Y}_B = 19 - 30 = -$; $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 1,87$

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $t_{\alpha/2;78} = -2,29$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = -5,87$ Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko arrisku-mailaz; ezin esan dezakegu bi lagingak populazio berekoak direnik.

.....

9.7. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_A = 130,5$; $n_B = 128,6$; $\alpha = 0,05$; $S_A^2 = 104,04$; $S_B^2 = 134,56$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Aldebiko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_A - \bar{Y}_B = 130,5 - 128,6 = 1,9$; $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 3,81$

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $t_{\alpha/2;16} = -2,47$; $t_{(1-\alpha/2);16} = 2,47$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = 0,50$ Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ezin esan dezakegu bi lursailen artean diferentziarik dagoenik.

.....

9.8. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_K = 16$; $n_B = 22$; $\alpha = 0,05$; $S_K^2 = 10,24$; $S_B^2 = 3,24$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ Ezkerraldeko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_A - \bar{Y}_B = 3,5 - 6,3 = -2,8$; $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 0,58$

Esangura-maila nominalari (ezkerraldeko testa) $t_{\alpha;36} = -2,03$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = -4,87$ Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko arrisku-mailaz; ezin esan dezakegu kanporakoiek eta barnerakoiek erresistentzia-maila bera daukatenik, itxura denez kanporakoiek erresistentzia-maila hobea daukate.

.....

9.9. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1=5$; $n_2=8$; $\alpha = 0,05$; $S_1^2=6,8$; $S_2^2 = 4$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ Ezkerraldeko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_A - \bar{Y}_B = 5 - 6 = -1$; $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 1,22$

Esangura-maila nominalari (ezkerraldeko testa) $t_{\alpha;11} = -2,20$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = -0,82$ Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; datu hauen arabera ezin esan dezakegu azalpenak emateko modu horietan desberdintasunik dagoenik.

.....

9.10. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1=30$; $n_2=30$; $\alpha = 0,05$; $S_1^2=25$; $S_2^2 = 36$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ Ezkerraldeko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 31 - 38 = -7$; $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 1,04$

Esangura-maila nominalari (ezkerraldeko testa) $t_{\alpha;11} = -2,0$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = -6,72$ Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko errore-mailaz; datu hauen arabera abortuarekiko aldeko jarrera handitzen dela esan dezakegu.

.....

9.11. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_J=150$; $n_S=150$; $\alpha = 0,10$; $S_J^2=0,09$; $S_S^2 = 0,64$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Aldebiko testa

Kalkulatutakoak: $\bar{Y}_J - \bar{Y}_S = 2 - 1,8 = 0,2$; $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 0,08$

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $t_{\alpha/2;298} = -1,97$;

$t_{(1-\alpha/2);298} = 1,97$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $t = 2,51$ Hipotesi nulua ukatuko dugu % 10eko errore-mailaz; estimulu desberdinek, janariak eta sexuak, modu desberdinean eragiten dute arratoiengan.

9.2.5. Hipotesi-test parametrikokoak: proportzio bi, lagin independenteak

10.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = n_2 = 25$; $\alpha = 0,05$; $p_1 - p_2 = 0,4 - 0,6 = -0,6$

Hipotesiak: $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$; $H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$ Aldebiko testa. Errore tipikoa: $\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = 0,14$

Esangura-maila nominala (aldebiko testa): $z_{\alpha/2} = -1,96$; $z_{(1-\alpha/2)} = 1,96$

Testerako estatistikoa: $z = -1,44$ Hipotesi nulua onartzen dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentziarik haurren integrazio-prozesuan metodoen arabera.

.....

10.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 100$ $n_2 = 120$; $\alpha = 0,05$; $p_1 - p_2 = 0,08 - 0,125 = -0,045$

Hipotesiak: $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$; $H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

Aldebiko testa. Errore tipikoa: $\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = 0,04$

Esangura-maila nominala (aldebiko testa): $z_{\alpha/2} = -1,96$; $z_{(1-\alpha/2)} = 1,96$

Testerako estatistikoa: $z = -1,1$ Hipotesi nulua onartzen dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentziarik makinaren artean, pieza akastunen proportzioa antzekoa da-eta.

.....

10.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 45$ $n_2 = 96$; $\alpha = 0,05$; $p_1 - p_2 = 0,36 - 0,42 = -0,06$

Hipotesiak: $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$; $H_1: \pi_1 - \pi_2 < 0$ Ezkerraldeko testa.

Errore tipikoa: $\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = 0,09$

Esangura-maila nominalari (ezkerraldeko testa) $z_{\alpha} = -2,33$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $z = -0,7$ Hipotesi nulua onartzen dugu % 99eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentziarik neska eta mutilen artean.

.....

10.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 50$ $n_2 = 50$; $\alpha = 0,05$; $p_1 - p_2 = 0,56 - 0,6 = -0,04$

Hipotesiak: $H_0: \pi_1 - \pi_2 = 0$; $H_1: \pi_1 - \pi_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Errore tipikoa: $\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = 0,10$

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $z_{\alpha/2} = -1,96$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $z = -0,45$ Hipotesi nulua onartzen dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentziarik andrazko eta gizonezkoen artean.

9.2.6. Hipotesi-test parametrikook: bariantza bi, lagin independenteak

11.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 50$; $n_2 = 30$; $\alpha = 0,01$; $S_1 = 16$; $S_2 = 21$

Hipotesiak: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v_1 = 49$; $v_2 = 29$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $_{\alpha/2} F_{v_1/v_2} \leq F \leq_{1-\alpha/2} F_{v_1/v_2}$

Testerako estatistikoa: $F = 0,58$ Beraz: $0,44 \leq 0,58 \leq 2,50$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 99ko konfiantza-mailaz; bariantzak balio-kideak dira.

.....

11.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_A = 50$; $n_B = 50$; $\alpha = 0,05$; $S^2_A = 25$; $S^2_B = 49$

Hipotesiak: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v_1 = 49$; $v_2 = 49$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $_{\alpha/2} F_{v_1/v_2} \leq F \leq_{1-\alpha/2} F_{v_1/v_2}$

$\dots 0,57 \leq F \leq 1,76$

Testerako estatistikoa: $F = 0,51$ Beraz, konfiantza-tartetik kanpo dago.

Hipotesi nulua ukatuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; B ereduko hauta-probak hobeto bereizten ditu subjektuak bariantza handiagoa duelako.

.....

11.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 7$; $n_2 = 7$; $\alpha = 0,05$; $S^2_1 = 21,238$; $S^2_2 = 11,238$

Hipotesiak: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v_1 = 6$; $v_2 = 6$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $_{\alpha/2} F_{v_1/v_2} \leq F \leq_{1-\alpha/2} F_{v_1/v_2}$

Testerako estatistikoa: $F = 1,89$ Beraz: $0,17 \leq 1,89 \leq 5,82$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; bariantzak balio-kideak dira.

.....

11.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 9$; $n_2 = 9$; $\alpha = 0,05$; $S^2_1 = 104,04$; $S^2_2 = 134,56$

Hipotesiak: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v_1 = 8$; $v_2 = 8$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $_{\alpha/2} F_{v_1/v_2} \leq F \leq_{1-\alpha/2} F_{v_1/v_2}$

Testerako estatistikoa: $F = 0,77$ Beraz: $0,23 \leq 0,77 \leq 4,43$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; bariantzak balio-kideak dira.

.....

11.5. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 38$; $n_2 = 38$; $\alpha = 0,05$; $S^2_1 = 500$; $S^2_2 = 350$

Hipotesiak: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v_1 = 37$; $v_2 = 37$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $_{\alpha/2} F_{v_1/v_2} \leq F \leq_{1-\alpha/2} F_{v_1/v_2}$

Testerako estatistikoa: $F = 1,43$ Beraz: $0,52 \leq 1,43 \leq 1,92$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; bariantzak balio-kideak dira.

9.2.7. Hipotesi-test parametrikokak: erlazionaturiko lagin bi

12.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 20$; $n_2 = 20$; $\alpha = 0,01$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v_1 + v_2 = (20 - 1) + (20 - 1) = 38$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $t_{\alpha/2; v_1+v_2} \leq t \leq t_{1-\alpha/2; v_1+v_2}$

Testerako estatistikoa: $t = 2,78$ Konfiantza-tartetik $-2,71 \leq t \leq 2,71$ kanpo dago.

Hipotesi nulua baztertuko dugu % 99ko konfiantza-mailaz; metodoen artean badago egon diferentzia esanguratsurik.

.....

12.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 11$; $n_2 = 11$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \bar{D} = 0$; $H_1: \bar{D} < 0$ Ezkerraldeko testa.

Errore tipikoa: $\sigma_{\pi_1 - \pi_2} = 0,10$

Esangura-maila nominalari (ezkerraldeko testa): $z_\alpha = -1,65$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $z = -2,57$

Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko errore-mailaz; terapiak herztura apaltzen duela ematen du.

.....

12.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 20$; $n_2 = 20$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \bar{D} = 0$; $H_1: \bar{D} \neq 0$ Aldebiko testa.

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $z_\alpha = -1,96$ dagokio.

Testerako estatistikoa: $z = -0,53$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2}$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentzia esanguratsurik lexiko-ekarpenetan euskaraz eta erdaraz elebidunongan.

.....

12.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 38$; $n_2 = 38$; $\alpha = 0,05$; $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 55 - 85 = 30$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $z_\alpha = -1,96$ dagokio.

Errore tipikoa: $\sigma_{\mu_1 - \mu_2} = 22,7$

Testerako estatistikoa: $z = -1,01$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2}$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentzia esanguratsurik aurreneko eta entrenamenduaren osteko jaurtiketetan.

.....

12.5. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 50$; $n_2 = 50$; $\alpha = 0,05$; $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 62 - 59 = 3$

Hipotesiak: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Esangura-maila nominalari (aldebiko testa) $z_{\alpha} = -1,96$ dagokio.

Errore tipikoa: $\sigma_{\mu 1 - \mu 2} = 6,52$

Testerako estatistikoa: $z = 0,46$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2}$

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; ez dago diferentzia esanguratsurik A eta B ereduak hautaprobeen artean.

9.2.8. Hipotesi-test parametrikook: korrelazio-koefizientea

13.1. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 65$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \rho_{xy} = 0$; $H_1: \rho_{xy} \neq 0$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v = n - 2 = 63$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $t_{\alpha/2; v_1 + v_2} \leq t \leq t_{1-\alpha/2; v_1 + v_2}$

Testerako estatistikoa: $t = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$ $t = 1,2$

Konfiantza-tarte honen $-1,998 \leq t \leq 1,998$ barruan dago.

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; korrelazioa zero dela esan dezakegu.

.....

13.2. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 125$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \rho_{xy} = 0$; $H_1: \rho_{xy} \neq 0$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v = n - 2 = 123$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $t_{\alpha/2; v_1 + v_2} \leq t \leq t_{1-\alpha/2; v_1 + v_2}$

Testerako estatistikoa: $t = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$ $t = 2,86$

Konfiantza-tarte honetatik $-1,98 \leq t \leq 1,98$ kanpo dago.

Hipotesi nulua ukatuko dugu % 5eko errore-mailaz; korrelazioa txikia baina esanguratsua da.

.....

13.3. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 200$; $n_2 = 100$; $\alpha = 0,05$; $r_{xy1} = 0,25$; $r_{xy2} = 0,35$

Lagin independenteak.

Hipotesiak: $H_0: \rho_1 - \rho_2 = 0$; $H_1: \rho_1 - \rho_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \sqrt{\frac{1}{(n_1 - 3)} + \frac{1}{(n_2 - 3)}} = 0,12$$

$$\text{Testerako estatistikoa: } Z = \frac{Z_{r_1} - Z_{r_2}}{\sqrt{\frac{1}{(n_1 - 3)} + \frac{1}{(n_2 - 3)}}} = \frac{0,2554 - 0,3769}{\sqrt{\frac{1}{(200 - 3)} + \frac{1}{(100 - 3)}}}$$

$$Z = -0,9795$$

Konfiantza-tarte honen $-1,96 \leq z \leq 1,96$ barruan dago.

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; korrelazioak baliokideak dira.

.....

13.4. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 103$; $\alpha = 0,05$

Hipotesiak: $H_0: \rho_{xy} - \rho_{xz} = 0$; $H_1: \rho_{xy} - \rho_{xz} \neq 0$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $v = n - 2 = 101$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $t_{\alpha/2; v_1 + v_2} \leq t \leq t_{1-\alpha/2; v_1 + v_2}$

$$\text{Errore tipikoa: } \sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \sqrt{2(1 - r_{xy}^2 - r_{xz}^2 - r_{yz}^2 + 2r_{xy}r_{xz}r_{yz})}$$

$$\text{Testerako estatistikoa: } t = \frac{(r_{xy} - r_{xz}) \sqrt{(n-3)(1 + r_{yz})}}{\sigma_{\rho_1 - \rho_2}} \quad t = -1,207$$

Konfiantza-tarte honen $-1,984 \leq t \leq 1,984$ barruan dago.

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; korrelazioak baliokideak dira.

.....

13.5. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 20$; $\alpha = 0,01$; $r_{xy1} = 0,90$; $r_{xy2} = 0,80$

Lagin independenteak.

Hipotesiak: $H_0: \rho_1 - \rho_2 = 0$; $H_1: \rho_1 - \rho_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Errore tipikoa: $\sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0,24$

Fisherren eraldaketa (z) —tauletan—: $Z_{r1} = 1,4722$; $Z_{r2} = 1,0986$

Testerako estatistikoa: $Z = \frac{Z_{r1} - Z_{r2}}{\sigma_{\rho_1 - \rho_2}} = \frac{1,4722 - 1,0986}{0,24} \quad Z = 1,54$

Konfiantza-tarte honen $-2,58 \leq z \leq 2,58$ barruan dago.

Hipotesi nulua onartuko dugu % 99ko konfiantza-mailaz; korrelazioak balio-kideak dira.

.....

13.6. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 20$; $\alpha = 0,05$; $r_{xy1} = 0,79$; $r_{xy2} = 0,90$

Lagin independenteak.

Hipotesiak: $H_0: \rho_1 - \rho_2 = 0$; $H_1: \rho_1 - \rho_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Errore tipikoa: $\sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0,24$

Fisherren eraldaketa (z) —tauletan—: $Z_{r1} = 1,0714$; $Z_{r2} = 1,4722$

Testerako estatistikoa: $Z = \frac{Z_{r1} - Z_{r2}}{\sigma_{\rho_1 - \rho_2}} = \frac{1,0714 - 1,4722}{0,24} \quad Z = -1,65$

Konfiantza-tarte honen $-1,96 \leq z \leq 1,96$ barruan dago.

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; korrelazioak baliokideak dira.

.....

13.7. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n_1 = 200$; $n_2 = 100$; $\alpha = 0,05$; $r_{xy1} = 0,25$; $r_{xy2} = 0,35$

Lagin independenteak.

Hipotesiak: $H_0: \rho_1 - \rho_2 = 0$; $H_1: \rho_1 - \rho_2 \neq 0$ Aldebiko testa.

Errore tipikoa: $\sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \sqrt{\frac{1}{(n_1 - 3)} + \frac{1}{(n_2 - 3)}} = 0,12$

Testerako estatistikoa:
$$Z = \frac{Z_{\hat{\rho}_1} - Z_{\hat{\rho}_2}}{\sqrt{\frac{1}{(n_1 - 3)} + \frac{1}{(n_2 - 3)}}} = \frac{0,8872 - 0,2877}{\sqrt{\frac{1}{(200 - 3)} + \frac{1}{(78 - 3)}}}$$

$$Z = -4,418$$

Konfiantza-tarte honetatik $-2,58 \leq z \leq 2,58$ kanpo dago.

Hipotesi nulua ukatuko dugu % 1eko errore-mailaz; korrelazioak esanguratsuki desberdinak dira.

.....

13.8. ariketaren ebazpena:

Datuak: $n = 103$; $\alpha = 0,05$; $r_{xy} = 0,5$; $r_{xz} = 0,4$; $r_{yz} = 0,3$

Hipotesiak: $H_0: \rho_{xy} - \rho_{xz} = 0$; $H_1: \rho_{xy} - \rho_{xz} \neq 0$ Aldebiko testa.

Askatasun-graduak: $\nu = n - 2 = 101$

Konfiantza-tartea (aldebiko testa): $t_{\alpha/2; \nu_1 + \nu_2} \leq t \leq t_{1-\alpha/2; \nu_1 + \nu_2}$

Errore tipikoa:
$$\sigma_{\rho_1 - \rho_2} = \sqrt{2(1 - r_{xy}^2 - r_{xz}^2 - r_{yz}^2 + 2r_{xy}r_{xz}r_{yz})}$$

Testerako estatistikoa:
$$t = \frac{(r_{xy} - r_{xz}) \sqrt{(n-3)(1+r_{yz})}}{\sigma_{\rho_1 - \rho_2}} \quad t = 1,024$$

Konfiantza-tarte honen $-1,984 \leq t \leq 1,984$ barruan dago.

Hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz; korrelazioak baliokideak dira.

9.3. TEST EZ-PARAMETRIKOAK

14.1. ariketaren ebazpena:

Honetan jakin nahi dugu ea *erantzun kopurua* aldagaia banaketa uniformearen arabera banatuko ote den. Horretarako χ^2 testa erabiliko dugu eta $\alpha 0,05$. Honako hipotesietatik abiatuko gara:

Hipotesi nulua: $H_0: F_0(x) = S(x)$

Ordezko hipotesia: $H_1: F_0(x) \neq S(x)$

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j} = 4,93 \quad \text{Tauletan muga kritikoak, } \chi^2_{9;0,05} = 16,92$$

Horiek horrela, hipotesi nulua % 95eko konfiantza-mailaz onartuko dugu; arratoien artean ez dago diferentzia esanguratsurik.

.....

14.2. ariketaren ebazpena:

Dezibelio-mailak eragingo ez balu ekoizpena *uniformeki* banatuko litzateke. Hori horrela, χ^2 testa erabiliko dugu eta α 0,05. Honako hipotesietatik abiatuko gara:

Hipotesi nulua: $H_0: F_0(x) = S(x)$

Ordezko hipotesia: $H_1: F_0(x) \neq S(x)$

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j} = 2,19 \quad \text{Tauletan muga kritikoak, } \chi^2_{9;0,05} = 9,4877$$

Horiek horrela, hipotesi nulua % 95eko konfiantza-mailaz onartuko dugu; musikak ez du eragiten ekoizpen-mailan.

.....

14.3. ariketaren ebazpena:

Laginak eta bolen hautaketak gertaera elkarren askeak direla jotzen dugu. Horiek horrela, lagin bakoitzaren kasuan χ^2 testa erabiliko dugu eta α 0,05. Honako hipotesietatik abiatuko gara:

Hipotesi nulua: $H_0: F_0(x) = S(x)$

Ordezko hipotesia: $H_1: F_0(x) \neq S(x)$

Lehenengo laginaren kasuan:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j} = 0,81' \quad \text{Tauletan muga kritikoak, } \chi^2_{2;0,05} = 5,9915$$

Horiek horrela, hipotesi nulua % 95eko konfiantza-mailaz onartuko dugu, banaketak baliokideak dira; lehenengo lagina jatorrizko populaziotik eratorria da.

Bigarren laginaren kasuan:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j} = 4,37. \quad \text{Tauletan muga kritikoak, } \chi^2_{2;0,05} = 5,9915$$

Horiek horrela, hipotesi nulua % 95eko konfiantza-mailaz onartuko dugu, banaketak baliokideak dira; bigarren lagina jatorrizko populaziotik eratorria da. Hirugarren laginaren kasuan:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(B_j - E_j)^2}{E_j} = 2,5 \quad \text{Tauletan muga kritikoak, } \chi^2_{2;0,05} = 5,9915$$

Horiek horrela, hipotesi nulua % 95eko konfiantza-mailaz onartuko dugu, banaketak baliokideak dira; hirugarren lagina jatorrizko populaziotik eratorria da.

Oro har, hautatutako hiru laginak jatorrizko populazioaren banaketa berekoak dira, populazio horretatik eratorriak dira, beraz.

.....

14.4. ariketaren ebazpena:

Datuak $N(100,16)$ banaketari dagozkion ala ez jakin nahi dugu. Kolmogorov-Smirnov lagin bakarreko testa erabiliko dugu. Abiapuntuko hipotesiak, beraz:

Hipotesi nulua: $H_0: F_0(x) = S(x) \quad N(100,16)$

Ordezko hipotesia: $H_1: F_0(x) \neq S(x) \quad N(100,16)$

Lorturiko puntuazioak tartetan (X_j)	Subjektu kopuruak (n_j)	Goi-muga	$N(100,16)$ Z_i	$F_0(x)$	$S(x)$	Diferentzia
> 140	1	149,5	3,09	0,9990	1,0000	0,0010
130 – 139	0	139,5	2,47	0,9932	0,9667	-0,0266
120 – 129	2	129,5	1,84	0,9671	0,9667	-0,0004
110 – 119	8	119,5	1,22	0,8888	0,9000	0,0112
100 – 109	10	109,5	0,59	0,7224	0,6333	-0,0891
90 – 99	5	99,5	-0,03	0,4880	0,3000	-0,1880
80 – 89	2	89,5	-0,66	0,2546	0,1333	-0,1213
70 – 79	1	79,5	-1,28	0,1003	0,0667	-0,0336
< 70	1	69,5	-1,91	0,0281	0,0333	0,0053

Horiek horrela, behatutako diferentziarik handiena:

$$D = \max |F_0(x) - S(x)| = 0,188$$

Tauletan, $n = 30$ eta $\alpha = 0,05$ izanik espero daitekeen diferentziarik handiena 0,24 delarik hipotesi nulua onartuko dugu % 95eko konfiantza-mailaz. Gure datuak $N(100,16)$ banaketari dagozkio.

.....

14.5. ariketaren ebazpena:

U-test Mann-Whitney

Publikoa		Konfesionala	
Hurrenkera	Puntuazioa	Hurrenkera	Puntuazioa
9	16,1	1	10,7
10	16,4	2	11,8
11	17,8	3	12,6
12	18,3	4	12,9
13	18,9	5	14,1
16	22,7	6	14,7
17	24,2	7	15,2
18	25,3	8	15,9
		14	19,6
		15	20,5
106		65	

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 = (8)(10) + \frac{(8)(9)}{2} - 106 = 10$$

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} = 40 \quad \sigma^2_U = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = 126,67$$

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = -2,67 \quad p(-1,96 \leq \mu_U \leq 1,96) = 0,95$$

Hori horrela, hipotesi nulua baztertuko dugu. Antza denez, unibertsitate konfesionalaletako ikasleek eta publikoetako ikasleek ez daukate gaitasun-maila bera frustrazioaren aurrean.

.....

14.6. ariketaren ebazpena:

U-test Mann-Whitney

Goizez	Hurrenkera	Arratsaldez	Hurrenkera
7,3	4	8,6	15
8,7	16	8,1	8
7,9	7	8,4	12
7,5	5,5	8,8	17
8,2	9	9	18
6,6	2	8,5	14
9,5	21	8,4	12
7,5	5,5	9,2	20
7	3	8,3	10
		9,1	19
		5,3	1
		8,4	12
	73		158

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = (9)(12) + \frac{(9)(10)}{2} - 73 = 80$$

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} = 54 \quad \sigma_U^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = 198$$

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = 1,85 \quad p(-1,96 \leq \mu_U \leq 1,96) = 0,95$$

Hori horrela, hipotesi nulua onartuko dugu. Ez dirudi diferentziarik dagoenik goizeko eta arratsaldeko txanden artean.

.....

14.7. ariketaren ebazpena:

Spearmanen korrelazioa

$H_0: \rho_s = 0$; $H_1: \rho_s \neq 0$; tauletan $\rho_{s; 0,05} = 0,564$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{j=1}^k D^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(24)}{10(10^2 - 1)} = 0,8545$$

Erabaki estatistikoa H_0 ukatu. Teoriaren eta praktikaren artean erlazio esanguratsua dago.

.....

14.8. ariketaren ebazpena:

Kruskal-Wallisen H testa.

Hurrenkeren **taula**.

Testak							R_j
A	17,5	21	24	1	6,5		70
B	21	6,5	12	6,5	2,5		48,5
C	10	25	14	23	21		93
D	2,5	11	9	14	4		40,5
E	14	16	19	17,5	6,5		73

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = 6,44$$

Tauletan, $\alpha = 0,05$, $_{0,95}\chi^2_{54} = 9,49$. Hori horrela, hipotesi nulua onartu behar dugu. Hau da, testen artean ez dago diferentziarik: berdin dio zein erabili.

.....

14.9. ariketaren ebazpena:

Kruskal-Wallisen H testa.

Hurrenkeren baturak $R_1 = 27$, $R_2 = 32$, $R_3 = 19$.

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) = 6,83$$

Tauletan, $\alpha = 0,05$, $_{0,95}\chi^2_2 = 5,99$. Hori horrela, hipotesi nulua baztertuko dugu, eta esan dezakegu laginek artean diferentziak badirela. Erabaki estatistikoa aldatuko litzateke, ($\alpha = 0,01$) erabiliko bagenu.

.....

14.10. ariketaren ebazpena:

Kontingentzia, McNemarren testa.

Aurkeztutako kontingentzia-taulan A eta D gelaxkek aldaketa adierazten dute. Hau da, hasieran *alde* zeudenak gero *kontra* daude (D) eta, aitzitik hasieran *kontra* zeudenak gero *alde* daude (A). Horiek horrela, hipotesi estatistikoak hauek dira:

Hipotesi nulua: $H_0: P(A) - P(D) = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: P(A) - P(D) \neq 0$

$$\text{Testerako estatistikoa: } \chi^2 = \frac{(|A - D| + 1)^2}{A + D} = \frac{(|26 - 10| + 1)^2}{26 + 10} = 8,028$$

Tauletan, % 95eko konfiantza-mailaz, muga kritikoa: $_{0,95}\chi^2_1 = 3,842$

Gauzak horrela, hipotesi nulua ukatuko dugu. Euskararekiko jarrera *esangu-ratsuki* ($p < 0,005$) aldatzen da.

.....

14.11. ariketaren ebazpena:

Kontingentzia, McNemarren testa.

Aurreko ariketan egin dugun moduan, hipotesiak:

Hipotesi nulua: $H_0: P(A) - P(D) = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: P(A) - P(D) \neq 0$

$$\text{Testerako estatistikoa: } \chi^2 = \frac{(|A - D| + 1)^2}{A + D} = \frac{(|35 - 5| + 1)^2}{35 + 5} = 24,025$$

Tauletan, % 95eko konfiantza-mailaz, muga kritikoa: $_{0,95}\chi^2_1 = 3,842$

Hipotesi nulua ukatuko dugu. Ia dudarik gabe ($p < 0,0001$) pelikulak heriotza-zigorraren aurkako jarrera sorrazten du.

.....

14.12. ariketaren ebazpena:

Kontingentzia, McNemarren testa.

Etologia eta Datu Analisia irakasgaien arteko diferentziarik ote dagoen jakin nahi dugu.

Hipotesi nulua: $H_0: P(A) - P(D) = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: P(A) - P(D) \neq 0$

Testerako estatistikoa: $\chi^2 = \frac{(|A - D| + 1)^2}{A + D} = \frac{(|30 - 90| + 1)^2}{30 + 90} = 29,008$

Tauletan, % 95eko konfiantza-mailaz, muga kritikoa: $_{0,99}\chi^2_1 = 6,635$

Hipotesi nulua ukatuko dugu. Ia dudarik gabe ($p < 0,0001$) irakasgaien arteko diferentziak esanguratsuak dira.

.....

14.13. ariketaren ebazpena:

Kontingentzia, McNemarren testa.

Tratamenduak eskizofrenikoen kobre-tasan aldaketarik ote dakarren jakin nahi dugu.

Hipotesi nulua: $H_0: P(A) - P(D) = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: P(A) - P(D) \neq 0$

Testerako estatistikoa: $\chi^2 = \frac{(|A - D| + 1)^2}{A + D} = \frac{(|10 - 28| + 1)^2}{10 + 28} = 7,605$

Tauletan, % 95eko konfiantza-mailaz, muga kritikoa: $_{0,95}\chi^2_1 = 3,842$

Hipotesi nulua ukatuko dugu. Arrisku-maila txikiaz ($p < 0,006$) adieraz dezakegu tratamenduak kobre-tasen aldaketak dakartzala.

.....

14.14. ariketaren ebazpena:

Lagin txiki ($n = 5$) honen bitartez jakin nahi dugu hobekuntzarik gertatzen ote den. Laginaren tamaina eta datuen ezaugarriak kontuan hartuz erlazio-naturiko bi laginen kasurako erabiltzen den Wilcoxonon testa baliatuko dugu.

	1	2	3	4	5
aurretik	70	72	80	75	77
ondoren	74	73	84	75	84
	-4	-1	-4	0	-7
	2,5	1	2,5		4

Laugarren haurraren kasuan izan ezik, besteetan diferentziak gertatzen dira. Lau diferentzia dauzkagu, beraz. Diferentzia horiek ordenatuko ditugu eta batura kalkulatu. Diferentziak esanguratsuak dira.

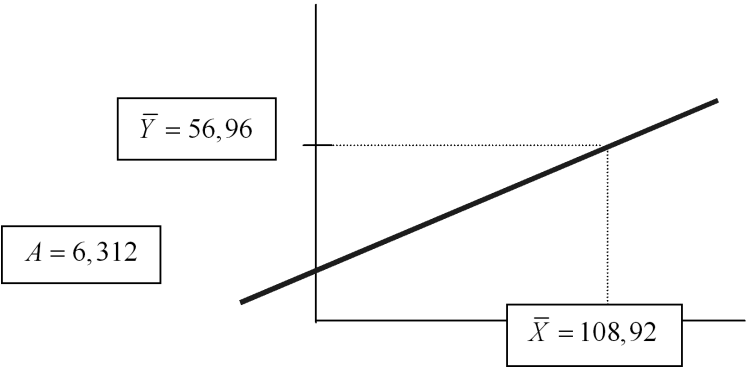
9.4. ERREGRESIO LINEALA

15.1. ariketaren ebazpena:

Lehenik eta behin zuzenaren ekuazioa osatuko dugu: $Y_i = A + BX_i$

A kalkulatzeko: $A = \bar{Y}_i - B\bar{X}_i = 108,92 - 0,465 * 56,96 = 6,312$

Datu horiekin adierazpide grafikoa egin dezakegu:



Adimen-koefizienteak zein neurritan azaltzen duen autoestimua jakiteko *determinazio-koefiziente*a kalkulatu dugu: $r_{xy}^2 = 0.243$ Bariantza azalduaren proportzioa % 24,3koa da.

Aldagaien arteko erlazioa *esanguratsua* ote den jakiteko bariantza-analisia (ANOVA) egingo dugu. Bariantza-analisiaren taula osatzeko laginaren tamaina ($n = 78$) finkatuko dugu eta barne-aldagaiaren desbiderapen tipikotik abiatuko gara. Gero, askatasun-graduak, ipini ditugu beheko taulan, eta aldakortasun orokorra (SCT) kalkulatu dugu: $SCT = \hat{S}_y^2 * (n - 1) = 11862,45$

Determinazio-koefizientea ezagutzen dugularik, *SCE (hondakinak)* eta, ondoren, *SCR (erregresioa)* kalkula ditzakegu:

$$SCE = SCT - SCT * r_{xy}^2 = 879,12$$

$$SCR = SCT - SCE = 2884,33$$

ANOVAren taula:

ANOVA				
Aldakortasun-sorburuak	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F
Erregresioa	2884,33	1	2884,33	24,42
Hondakinak	8978,12	76	118,13	
Guztira	11862,45	77		

Jar dezagun % 99ko konfiantza-maila. Horren arabera, muga kritikoa bilatuko dugu tauletan $_{0,99}F_{1/70} = 7,011$. Hipotesi nulua ukatuko dugu: adimen-koizientearen eta autoestimuaeren arteko erlazioa esanguratsua da ($p < 0,001$).

.....

15.2. ariketaren ebazpena:

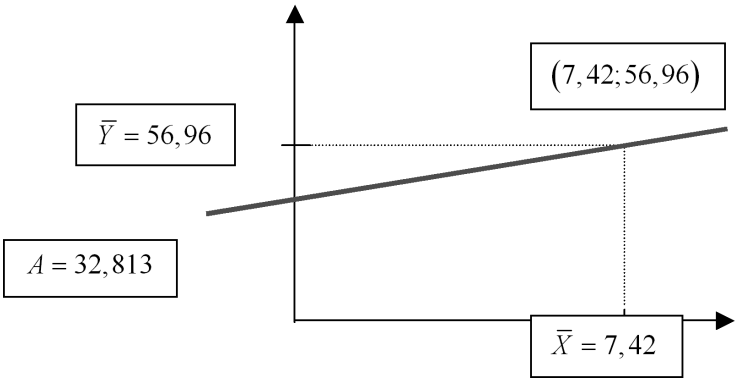
Kasu honetan barne-aldagaia *autoestimua* eta kanpo-aldagaia, berriz, *nota*. Aurreko ariketako datu batzuk eta beste berri batzuk hartuta, lehen egin moduan kalkula daiteke eskatzen dena.

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_y S_x} = 0,54 \quad r_{xy}^2 = 0,292 \quad SCT = S_y^2 * n = 11862,1$$

$$B = \frac{\bar{Y} - A}{\bar{X}} = 3,25 \quad \text{Ekuazio lineala: } Y_i = 32,813 + 3,25X_i$$

ANOVA				
Aldakortasun-sorburuak	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F
Erregresioa	3458,71	1	3458,71	31,28
Hondakinak	8403,39	76	110,57	
Guztira	11862,10	77		

Jar dezagun % 99ko konfiantza-maila. Horren arabera, muga kritikoa bilatuko dugu tauletan $_{0,99}F_{1/70} = 7,011$. Hipotesi nulua ukatuko dugu: autoestimuaeren eta notaren arteko erlazioa esanguratsua da ($p < 0,001$). Azkenik, grafikoa egingo dugu:



15.3. ariketaren ebazpena:

Kasu honetan barne-aldagaia *adimen-kozientea* da eta kanpo-aldagaia, berriz, *nota*. Determinazio-koefizientea kalkulatu behar dugu. 15.1 eta 15.2 ariketetatik hartuko ditugu, *adimen-kozientearen* eta *notaren* desbiderapen tipikoak eta kalkuluak egingo ditugu:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_y S_x} = 0,6239 \qquad r_{xy}^2 = 0,3893$$

Horiek horrela, adimen-kozienteak notaren % 38,93 azaltzen du.

15.4. ariketaren ebazpena:

SPSS programaren bitartez erregresio linealaren analisia egingo dugu:

1. Estatistiko deskribatzaileak:

Estatistiko deskribatzaileak			
	N	Batez bestekoa	Desbiderapena
Adimen-kozientea	32	105,438	14,222
Autoestimua	32	55,688	12,527
N baliagarria	32		

R	Determinazio-koefizientea	Det. Koef. Zuzendua	Errore tipikoa
0,6814804	0,46441554	0,45013329	1,52767347

2. Erregresio-analisiaren estatistikoak:

	Estandarizatu gabeko koefizienteak		Koefiziente estandarizatuak	t	Ziga.
	B	Errore tipikoa	Beta	B	Errore tipikoa
(Konstantea)	-3,59769284	1,453703155		-2,474846966	0,01558817
Adimen-koizientea	0,07467813	0,015194111	0,47742974	4,914939297	5,0849E-06
Autoestimua	0,05059749	0,016122907	0,30484349	3,138236091	0,00242994

3. Erregresio-analisiari atxikitako bariantza-analisia (ANOVA):

	Berbiduren baturak	ar	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Erregresioa	151,775304	2	75,8876521	32,51696808	6,7772E-11
Hondakinak	175,033967	75	2,33378622		
Guztira	326,809271	77			

Adimen-koizienteak eta autoestimua notaren aldakortasunaren % 46 azaltzen dute *esanguratsuki*.

.....

15.5. ariketaren ebazpena:

SPSS programaren bitartez, erregresio linealaren analisia egingo dugu:

1. Korrelazioa eta determinazio-koefizientea:

R	Determinazio-koefizientea	Den. Koef. Zuzendua	Errore tipikoa
0,81642052	0,66654246	0,62949162	2,01880959

2. Erregresio-analisiaren estatistikoak:

	Estandarizatu gabeko koefizienteak		Koefiziente estandarizatuak	t	Sig.
	B	Errore tipikoa	Beta	B	Errore tipikoa
(Konstantea)	-0,99753106	2,43442503		-	0,69156303
Jarrera	1,33284258	0,314241809	0,81642052	4,241455289	0,00216963

3. Erregresio-analisiari atxikitako bariantza-analisia (ANOVA):

	Berbiduren baturak	ag	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Erregresioa	73,31967055	1	73,3196705	17,989943	0,00216963
Hondakinak	36,68032945	9	4,07559216		
Guztira	110	10			

Autoestimua aldagaiak jarreraren aldakortasunaren % 67 azaltzen du *esanguratsuki* ($p < 0,01$).

.....

15.6. ariketaren ebazpena:

Datuak: $\alpha = 39,95$ $a = 37,19$

$\beta = 7,21$ $b = 6,96$

Dauzlagun datuetatik errore tipikoa kalkulatu dugu:

$S_e = 7,987$

Demagun esangura-maila nominala % 5 ($\alpha = 0,05$) erabiltzen dugula.

Horren arabera α -ren inguruko konfiantza-tartea,

$$p\left(\left(\alpha + S_e z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \leq \alpha \leq \left(\alpha + S_e z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) = 0,95$$

$$p(21,56 \leq \alpha \leq 48,69) = 0,95$$

Erregresio-koefizientearen inguruko hipotesi-testaren hipotesiak:

Hipotesi nulua: $H_0: \beta_0 = 0$

Ordezko hipotesia: $H_1: \beta_0 \neq 0$

Errore tipikoa: $\sigma_\beta = 0,1833$

Testerako estatistikoa: $t = \frac{b}{\sigma_\beta} = \frac{6,96}{0,1833} = 37,97$

Balio hori ikusita hipotesi nulua bazter dezakegu ia inolako arrisku-mailarik gabe.

9.5. BARIANTZA-ANALISIAK

16.1. ariketaren ebazpena:

Faktore bakarra, eragin finkoak; bariantza-analisiaren taula:

	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	54,6875	3	18,22916667	17,1568627	0,0001226
Talde barnekoa	12,75	12	1,0625		
Guztira	67,4375	15			

HSD de Tukey

(I) Lo egindako orduak	(J) Lo egindako orduak	Batez bestekoen diferentziak (I-J)	Errore tipikoa	Esangura
12 ordu	24 ordu	-0,25	0,729	0,985
	36 ordu	-3,25	0,729	0,004
	48 ordu	-4,25	0,729	0,000
24 ordu	12 ordu	0,25	0,729	0,985
	36 ordu	-3	0,729	0,007
	48 ordu	-4	0,729	0,001
36 ordu	12 ordu	3,25	0,729	0,004
	24 ordu	3	0,729	0,007
	48 ordu	-1	0,729	0,539
48 ordu	12 ordu	4,25	0,729	0,000
	24 ordu	4	0,729	0,001
	36 ordu	1	0,729	0,539

Datuen arabera lehenengo eta bigarren taldeak, alde batetik, eta hirugarren eta laugarren taldeak, beste aldetik, desberdinak dira % 5eko arrisku-mailaz.

.....

16.2. ariketaren ebazpena:

Badakigu lau talde esperimental direla ($k = 4$); talde barneko kategorian 3 askatasun-gradu dira, beraz. Hortik abiatuta, ANOVaren taula osa dezakegu:

	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	83,999	24	3,500	5,247	0,098
Talde barnekoa	2,001	3	0,667		
Guztira	86	27			

Esangura-maila nominala % 5 denez, hipotesi nulua onartu beharrean gaude. Ez dago diferentzia esanguratsurik lantokiko lau giro desberdinen artean.

.....

16.3. ariketaren ebazpena:

Bi faktoreko diseinua (4X4 diseinua) badirudi ere, talde esperimentaletan kasu bakarra dago. Hori horrela, faktore bakarreko bariantza-analisi bi egin behar ditugu: alde batetik, *argitasuna* eta, bestetik, *saltokia* faktore gisa harturik. Kasu bietan lau maila eta lau talde esperimental dauzkagu ($k = 4$); mendeko aldagaia, berriz, *salmenta* da.

SPSSren bitartez, egindako analisiak aurkeztuko ditugu:

Argitasuna faktorearen analisia:

	Berbiduren baturak	Ag	Batezbeste koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	59,250	3	19,750	5,852	,011
Talde barnekoa	40,500	12	3,375		
Guztira	99,750	15			

Horren arabera *argitasunak* salmentan eragiten duela erabakiko dugu ($p<0,02$).

Saltokia faktorearen analisia:

	Berbiduren baturak	Ag	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura.
Talde artekoa	6,750	3	2,250	,290	,832
Talde barnekoa	93,000	12	7,750		
Guztira	99,750	15			

Horren arabera, *saltokiak* ez du esanguratsuki salmentan eragiten (konfiantza-maila % 83,2).

.....

16.4. ariketaren ebazpena:

Agertzen zaizkigun datuekin ANOVAREN taula osatuko dugu:

	Berbiduren baturak	Askatasun-graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	4723,95	2	2361,973	36,737	0,000
Talde barnekoa	771,52	12	64,293		
Guztira	5495,47	14			

Irakaskuntza-metodoek eragiten dute errendimenduan, duda barik. Diferentziak esanguratsuak dira lehenengo eta hirugarren taldeen artean.

.....

16.5. ariketaren ebazpena:

Agertzen zaizkigun datuekin ANOVAREN taula osatuko dugu:

	Berbiduren baturak	Ag	Batezbeste koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	76,000	2	38,000	35,625	,000
Talde barnekoa	16,000	15	1,067		
Guztira	92,000	17			

.....

16.6. ariketaren ebazpena:

Aurreko 16.3 ariketan egin legez, bi faktoreen araberrako (*epaileak* eta *umeak*) bi bariantza-analisiak egiten ditugu:

Faktorea: *Epaileak*

	Berbiduren baturak	Ag	Batez beste koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	84,208	5	16,842	9,548	,000
Talde barnekoa	31,750	18	1,764		
Guztira	115,958	23			

Faktorea: *Umeak*

	Berbiduren baturak	Ag	Batez beste koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	7,125	3	2,375	,436	,729
Talde barnekoa	108,833	20	5,442		
Guztira	115,958	23			

Egindako analisien arabera, lehenengo analisisian *epaileen* artean ebaluatzeko joera desberdinak daudela ondorioztatuko dugu ($p < 0,001$). Bigarren analisisaren arabera, berriz, *umeen* artean diferentziarik ez dagoela onartuko dugu % 72,9ko konfiantza-mailaz.

.....

16.7. ariketaren ebazpena:

Ariketa honetan *Tratamendua X Subjektuak* tankerako diseinua daukagu. Ematen dizkiguten ($n = 10$, $k = 3$) datuekin ANOVAREN taula osatuko dugu:

	Berbiduren baturak	Askatasun- graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	80	2	40,0	24	0,000
Subjektu artekoa	20	9	2,222	1,333	0,288
Talde barnekoa	30	18	1,667		
Guztira	130	29			

Horren arabera testu motak (*zientifikoa*, *literaturazkoa* eta *saiakera*) diferentzia esanguratsuak sorrarazten dituela ondorioztatuko dugu ($p < 0,001$). Subjektuen arteko diferentziei buruz, berriz, diferentzia esanguratsurik dagoenik ezin esan dezakegu (konfiantza-maila % 28,8).

.....

16.8. ariketaren ebazpena:

Aurreko ariketaren antzera, *Tratamendua X Subjektuak* tankerako diseinua daukagu. Ematen dizkiguten datuekin ($n = 9$, $k = 4$) ANOVAREN taula osatuko dugu:

	Berbiduren baturak	Askatasun- graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
Talde artekoa	187	3	62,3	19	0,000
Subjektu artekoa	90	8	11,250	3,375	0,010
Hondakinak	80	24	3,333		
Guztira	356,75	35			

Nahiko argi dago igarotako tarteak oroimenean eragiten duela ($p < 0,001$), eta subjektuen artean diferentzia esanguratsuak badirela ($p < 0,02$).

.....

16.9. ariketaren ebazpena:

Bi faktoreko bariantza-analisia da, $A \times B$ diseinua, hain zuzen ere. A faktoreak (*motibazioa*) hiru maila dauzka (*instrumentala*, *egozpenezkoa* eta *kontrola*) eta B faktoreak (*lanerako estiloa*) beste hiru (*auzolana*, *lehiakorra* eta *indibiduala*). Guztira bederatzi talde esperimental dauzkagu eta 6 pertsona taldeko. Horiek horrela, datuetatik honako ANOVA taula osatuko dugu:

	Berbiduren baturak	Askatasun- graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
A faktorea	40	2	20,0	20	0,000
B faktorea	70	2	35,000	34,239	0,000
AXB interakzioa	20	4	5,000	4,891	0,002
Hondakinak	46	45	1,022		
Guztira	176,00	53			

Analisiaren arabera, *motibazioak* ($p < 0,001$), *lanerako estiloak* ($p < 0,001$) eta faktore horien arteko interakzioak ($p < 0,005$) esanguratsuki azaltzen dute lorpen-maila.

.....

16.10. ariketaren ebazpena:

Aurreko ariketaren modukoa da honako hau ere: bi faktoreko bariantza-analisia ($A \times B$ diseinua). A faktoreak (*eskarmetua*) bi maila dauzka eta B faktoreak (*irakaskuntza-metodoa*), berriz, hiru maila. Bost talde esperimental dauzkagu eta taldeko bina puntuazio. Horiek horrela, honako ANOVA taula osatuko dugu:

	Berbiduren baturak	Askatasun- graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esangura
A faktorea	0,33	1	0,3	0,444	0,524
B faktorea	99,50	2	49,750	66,333	0,000
AXB interakzioa	4,17	2	2,083	2,778	0,121
Hondakinak	6	8	0,750		
Guztira	110	11			

Analisiaren argitan *irakaskuntza-metodoak* ($p < 0,001$) esanguratsuki azalduko du ikasleen nota. Irakasleen *eskarmetuek* eta bi faktoreen arteko interakzioak, osteraz, ez dute eragin esanguratsurik.

.....

16.11. ariketaren ebazpena:

$A \times B$ izaerako diseinu honetan, A faktoreak (*botika*) hiru maila dauzka eta B faktoreak (*dieta*), berriz, bi maila. Sei talde esperimental dauzkagu eta taldeko seina puntuazio.

	Berbiduren baturak	Askatasun- graduak	Batez besteko koadratikoak	F	Esanguratsu
A faktorea	74	2	37,0	19	0,000
B faktorea	25	1	25,000	12,931	0,001
AXB interakzioa	2	2	1,000	0,517	0,601
Hondakinak	58	30	1,933		
Guztira	159,00	35			

Ezarritako esangura-mailaren arabera (0,05) faktoreen eragina esanguratsua da; faktoreen arteko interakzioarena, ordea, ez.

Erreferentziak

- Abelson, R. P. (1998): *La estadística razonada: Reglas y principios*, Paidós, Bartzelona.
- Amón, J. (1988): *Estadística para psicólogos I y II*, Pirámide, Madril.
- Etxeberria Murgiondo, J. (1989): *Giza zientziei egokitutako estatistika, SPSS/ + programa paketea erabiliz*. UEU, Bilbo.
- , (1999): *Estatistika. Teoria eta praktika SPSSWIN erabiliz*, Elhuyar, Usurbil.
- , (2004): *Estatistika eta SPSS*, Elhuyar, Usurbil.
- Fernández Díaz, M. J.; García, J. M.; Asensio, I. eta Fuentes, A. (1990): *225 Problemas de Estadística Aplicada a las Ciencias Sociales: Ejercicios Prácticos para Alumnos*, Síntesis, Madril.
- Fox, John (2006): *Gettin Started UIT the R Commander*, dokumento elektronikoa R.
- Glass, G.V. eta Stanley, J. C. (1986): *Métodos estadísticos aplicados a las Ciencias Sociales*, Prentice may, Mexico.
- Ibabe, I. eta Etxeberria Murgiondo, J. (2001): *Datu Analisia eta SPSS praktikak*, Elhuyar, Usurbil.
- Isasi Balanzategi, X. eta Balluerka Lasa, N. (1995): *Datu analisia eta saiakuntza diseinuak portaera zientziatan*, UEU, Bilbo.
- Kish, L. (1995): *Diseño estadístico para la investigación*, CIS, Madril.
- Maciá, A.; Lubin, P. eta Rubio, P. (1997): *Psicología Matemática II*, UNED, Madril.
- Murdoch, J. eta Barnes, J.A. (1986): *Statistical Tables*, MacMillan Educ. Ltd., Londres.
- Neave, H. R. (1981): *Elementary Statistics Tables*, Unwin Hyman.
- Norusis, M. J. (1986): *SPSS/PC+; Advanced Statistics*, SPSS Inc., Chicago.
- Paradis, Emmanuel (Azkune Galparsoro, G. eta Yurramendi Mendizabal, Y. —euskaraz—) (2005): *R Hasiberrientzat*, UEU, Bilbo.
- Pardo, A. eta San Martín, R. (1998): *Análisis de Datos en Psicología II* (2. arg.), Pirámide, Madril.
- Spiegel, M. R. (1997): *Estadística* (2. arg.), McGraw-Hill, Mexico.

Taulen aurkibidea

I.1. taula. <i>Distantziak eta kobariantzak</i>	14
I.2. taula. <i>Neska-mutikoen hurrenkerak</i>	21
I.3. taula. <i>Bertsolarien sailkapenak</i>	22
I.4. taula. <i>Bertsolarien binakako konparaketak</i>	23
I.5. taula. <i>2X2ko kontingentzia-taula</i>	23
I.6. taula. <i>Hizkuntzaren eta jarrera politikoaren arteko erlazioa</i>	24
I.7. taula. <i>Adimen emozionala, neskak eta mutilak</i>	26
I.8. taula. <i>2X2ko kontingentzia-taula</i>	27
I.9. taula. <i>Neskak eta teknologiazko ikasketak</i>	28
II.1. taula. <i>Eraldaketa psikofisiologikoa (X_1), adina (X_2), motibazioa (X_3) eta errendimendua (Y)</i>	35
II.2. taula. <i>Oinarrizko estatistikoak</i>	36
II.3. taula. <i>Erregresio linealari atxikitako bariantza-analisia</i>	39
II.4. taula. <i>Erregresio linealari atxikitako bariantza-analisia</i>	40
II.5. taula. <i>Erregresio lineal anizkoitza SPSSn</i>	45
II.6. taula. <i>Erregresio lineal anizkoitza, bi kanpo-aldagai eta erregresioaren planoak</i>	51
III.1. taula. <i>Bariantza-analisirako taula (ANOVA)</i>	73
III.2. taula. <i>Saio esperimentalerako egitura-taula</i>	74
III.3. taula. <i>Bariantza-analisirako ebazpen-taula</i>	80
IV.1. taula. <i>Bariantza-analisia, zorizko talde anitzeko diseinua</i>	89
IV.2. taula. <i>Bariantza-analisia, adibide praktikoa</i>	91
IV.3. taula. <i>Zuzeneko puntuazioak eta aldakortasunak</i>	92
IV.4. taula. <i>AXB diseinurako datuen taula, ariketaren datuak</i>	99
IV.5. taula. <i>AXB diseinurako datuen taula, eredu orokorra</i>	99
IV.6. taula. <i>AXB diseinurako bariantza-analisiaren taula, eredu orokorra</i>	101
IV.7. taula. <i>AXB diseinurako bariantza-analisiaren taula, adibide praktikoa</i>	107
IV.8. taula. <i>% 99ko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko eraketak</i>	108
IV.9. taula. <i>AXBXC diseinurako datuen taula, ariketaren datuak</i>	109
IV.10. taula. <i>AXBXC diseinurako datuen taula, eredu orokorra</i>	110

IV.11. taula. <i>AXBXC diseinurako datuen taula, mailaz mailako baturak eta berbidurak</i>	111
IV.12. taula. <i>2X2X2 diseinurako BATUREN taula, mailaz mailako baturak eta berbidurak</i>	115
IV.13. taula. <i>AXBXC diseinurako bariantza-analisiaren taula, eredu orokorra</i>	117
IV.14. taula. <i>AXBXC diseinurako bariantza-analisiaren taula, adibide praktikoa</i>	126
IV.15. taula. <i>% 99ko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko erkaketak</i>	127
IV.16. taula. <i>AXBXC diseinurako bariantza-analisiaren taula (AC eta BC interakzioak ezik)</i>	128
IV.17. taula. <i>F estatistikoen arteko erkaketak ($\alpha=0,01$)</i>	128
IV.18. taula. <i>Tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula, ariketaren datuak</i>	130
IV.19. taula. <i>Tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula, eredu orokorra</i>	131
IV.20. taula. <i>Tratamenduak X subjektuak diseinurako bariantza-analisiaren taula, eredu orokorra</i>	132
IV.21. taula. <i>Tratamenduak X subjektuak diseinurako bariantza-analisiaren taula, adibide praktikoa</i>	136
IV.22. taula. <i>% 99ko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko erkaketak</i>	136
IV.23. taula. <i>Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula (datuak)</i>	138
IV.24. taula. <i>Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak diseinurako datuen taula, eredu orokorra</i>	139
IV.25. taula. <i>Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak diseinua, ANOVA taula, eredu orokorra</i>	142
IV.26. taula. <i>Tratamenduak X tratamenduak X subjektuak, ANOVA taula, adibide praktikoa</i>	148
IV.27. taula. <i>% 95eko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko erkaketak</i>	149
IV.28. taula. <i>Bi faktoreko diseinu faktorial mistoa delakoaren datuen taula (praktika)</i>	150
IV.29. taula. <i>Bi faktoreko diseinu faktorial mistoaren datuen taula, eredu orokorra</i>	151
IV.30. taula. <i>Bi faktoreko diseinu faktorial mistoa, ANOVA taula, eredu orokorra</i>	154
IV.31. taula. <i>Bi faktoreko diseinu faktorial mistoa, ANOVA taula, adibide praktikoa</i>	158
IV.32. taula. <i>% 95eko konfiantza-mailari atxikiz F estatistikoen arteko erkaketak</i>	159

IV.33. taula. Aldagai kobariantedun diseinuaren datuen taula (praktika)	161
IV.34. taula. Aldagai kobariantedun diseinuaren datuen taula (eredu orokorra).....	161
IV.35. taula. Aldagai kobariantedun diseinurako taula (eredu orokorra)	165
IV.36. taula. Aldagai kobariantedun diseinurako taula (adibide praktikoa) ...	165
VII.1. taula. Hizki grekoak hurrenkeran.....	226
VII.2. taula. Posizio-adierazleak	228
VII.3. taula. Zentrorako joerako adierazleak	229
VII.4. taula. Sakabanatze-estatistiko batzuk.....	230
VII.5. taula. Banaketaren estatistikoak eta puntuazio tipikoak.....	231
VII.6. taula. Korrelazio-koefizienteak	232
VII.7. taula. Erregresio linealaren estatistikoak	233
VII.8. taula. Batez besteko aritmetiko bakarraren inguruko testa (bariantza ezaguna).....	237
VII.9. taula. Batez besteko aritmetiko bakarraren inguruko testa (bariantza ezezaguna)	238
VII.10. taula. Proportzio bakarraren inguruko testa	239
VII.11. taula. Bariantza bakarraren inguruko testa.....	239
VII.12. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (bariantza ezezagunak)	240
VII.13. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (bariantza ezezagunak)	241
VII.14. taula. Proportzio biren inguruko testa	242
VII.15. taula. Homozedastizitate-testa (Leveneren testa).....	243
VII.16. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (erlazonaturiko laginak).....	244
VII.17. taula. Batez besteko aritmetiko biren inguruko testa (binakaturiko puntuazioak)	245
VII.18. taula. Korrelazio-koefiziente bakarraren inguruko testa (Pearson)....	245
VII.19. taula. Korrelazio-koefiziente biren inguruko testa, lagin independenteak.....	246
VII.20. taula. Korrelazio-koefiziente biren inguruko testa, erlazonaturiko laginak.....	247
VII.21. taula. Erregresio linealeko konstantearen inguruko testa	248
VII.22. taula. Erregresio linealeko erregresio-koefizientearen inguruko testa	249
VII.23. taula. Khi karratuaren testa	252
VII.24. taula. Kolmogorov-Smirnoven testa.....	252
VII.25. taula. Lillieforsen testa.....	253
VII.26. taula. Zeinuen testa	254
VII.27. taula. Medianaren testa.....	254

VII.28. taula. <i>Koantilen testa</i>	255
VII.29. taula. <i>Wilcoxonon testa (I)</i>	256
VII.30. taula. <i>Bolada-testa</i>	257
VII.31. taula. <i>Wilcoxonon testa (II)</i>	258
VII.32. taula. <i>Zeinuen testa</i>	259
VII.33. taula. <i>McNemarren testa</i>	260
VII.34. taula. <i>Mann-Whitneyren testa</i>	261
VII.35. taula. χ^2 <i>testa</i>	262
VII.36. taula. <i>Kruskal-Wallisena testa</i>	263
VII.37. taula. <i>Bariantza-analisia (ANOVA). Faktore bakarra, eragin finkoa</i>	265
VII.38. taula. <i>Tukey</i>	265
VII.39. taula. <i>Bariantza-analisia (ANOVA). A X B diseinua</i>	266
VII.40. taula. <i>Bariantza-analisia (ANOVA). A X B X C diseinua</i>	267
VII.41. taula. <i>Bariantza-analisia (ANOVA) tratamendua X subjektuak.</i> <i>A X S diseinua</i>	269
 <i>Zorizko zenbakien taula</i>	274
<i>Banaketa binomiala; banakako probabilitateak</i>	277
<i>Banaketa binomiala; probabilitate metatuak</i>	283
<i>Poissonen banaketa; banakako probabilitateak</i>	290
<i>Banaketa normal estandarizatua $N(0,1)$</i>	297
<i>Studenten t banaketa</i>	300
χ^2 <i>banaketa</i>	303
<i>F banaketak</i>	308
<i>Pearsonen koefizientearen taula</i>	312
<i>Spearmanen koefizientearen taula</i>	313
<i>Fisherren z eraldaketa</i>	314
<i>Durbin-Watson estatistikoaren balio kritikoak</i>	315
<i>Ibiltarte estudentizatuak</i>	316
<i>Kolmogorov-Smirnoven taula</i>	317
<i>Wilcoxonon bolada-testaren taula</i>	318
<i>Zeinuen testaren taula</i>	319
<i>Kruskal-Wallisena testaren taula</i>	320
<i>Kruskal-Wallisena testaren taula (tamaina berdineko taldeak)</i>	321

Irudi eta grafikoen aurkibidea

I.1. grafikoa. Erabateko korrelazioak.....	16
I.2. grafikoa. Korrelazio-puntuen diagramak.....	17
I.3. grafikoa. Homozedastizitatea	18
I.4. grafikoa. Heterozedastizitatea.....	18
I.5. grafikoa. Aldaketa ez-proportzionalen funtzioa	18
I.6. grafikoa. Aldaketa proportzionalen funtzioa.....	18
I.7. grafikoa. Aldagai arrotzaren eragina korrelazioan.....	19
II.1. grafikoa. Erregresioaren zuzena ardatz cartesianen eremuan	31
II.2. grafikoa. Sakabanaketa-diagramak. Linealtasuna erraz antzeman daiteke ezkerreko grafikoa, positiboa, eta eskuinekoan, negatiboa	32
II.3. grafikoa. Korrelazio lerromakurra, ezkerrean, eta heterozedastizitatea, eskuinean.....	33
II.4. grafikoa. Erregresioaren eredua, jario- edo fluxu-diagrama	35
II.5. grafikoa. Erregresio lineal bakuna: sakabanaketa-diagrama.....	37
II.6. grafikoa. Erregresio linealaren zuzena	38
II.7. grafikoa. F banaketa, onartze- eta ukatze-barrutiak	40
II.8. grafikoa. Zuzenaren maldaren inguruko testa.....	44
II.9. grafikoa. Estimazioen banaketa normalak	46
II.10. grafikoa. Hondakin tipifikatuen banaketa (SPSS v14.0)	47
II.11. grafikoa. P–P grafikoa, hondakinen banaketa-funtzioa	48
II.12. grafikoa. Erregresioaren balio estandarizatuak eta barne-aldaia.....	48
II.13. grafikoa. Erregresioaren balio estudentizatuak eta estimazio estandarrik.....	49
II.14. grafikoa. Erregresio lineal anizkoitza, bi kanpo-aldagai, erregresio-planoa	52
II.15. grafikoa. Dimentsio anitzeko sakabanaketa-grafikoa (Martin Maechler –R, http://addictedtor.free.fr/graphiques/ –)	57
II.16. grafikoa. Erregresio-koefiziente estandarizatuak jario-diagraman	61
II.17. grafikoa. Erregresio linealaren grafikoak R-n	68
II.1. irudia. Erregresio lineala SPSS (v14.0) hasierako leihoa	63
II.2. irudia. Erregresio lineala SPSSn, estatistikoaren aukera	64
II.3. irudia. Erregresio lineala SPSSn, grafikoen aukera.....	66

II.4. irudia. <i>Urratsez urratseko prozedura, aldagaien sarrera eta irteerako probabilitateak</i>	67
III.1. grafikoa. <i>Faktore bakarreko ANOVA, aldakortasunaren deskonposaketa.....</i>	76
III.2. grafikoa. <i>F banaketa, onartze- eta ukatze-barrutiak</i>	82
IV.1. grafikoa. <i>Bariantza-analisia, batez bestekoen arteko distantziak.....</i>	88
V.1. grafikoa. <i>Kutxa-diagrama.....</i>	179
V.2. grafikoa. <i>Sakabanaketa-diagrama.....</i>	181
V.3. grafikoa. <i>Batez bestekoen diagrama.....</i>	182
V.1. irudia. <i>R Commander-en sarrerako leihoak</i>	170
V.2. irudia. <i>Datu multzoak R Commander-en</i>	171
V.3. irudia. <i>Datu multzoa aukeratzen</i>	171
V.4. irudia. <i>R Commander-en datu-editorea</i>	172
V.5. irudia. <i>Indarrean dagoen datu multzoa: Ikasleak2008.....</i>	172
V.6. irudia. <i>Aldagaiak R Commander-en datu-editorean.....</i>	173
V.7. irudia. <i>Datu multzoak inportatzen.....</i>	173
V.8. irudia. <i>Datu multzoa, ascii kodean, inportatzen</i>	174
V.9. irudia. <i>Datuak gordetzen.....</i>	174
V.10. irudia. <i>Aldagaiak lantzen</i>	175
V.11. irudia. <i>Laburpenak.....</i>	176
V.12. irudia. <i>Kontingentzia-taulak</i>	176
V.13. irudia. <i>Hipotesi-testak.....</i>	176
V.14. irudia. <i>Proporzioen inguruko hipotesi-testak</i>	177
V.15. irudia. <i>Bariantzen inguruko hipotesi-testak.....</i>	177
V.16. irudia. <i>Fidagarritasun eta erregresio linealaren analisiak.....</i>	178
V.17. irudia. <i>R Commander-eko grafikoak.....</i>	178
V.18. irudia. <i>Kutxa-diagrama eraikitzen.....</i>	179
V.19. irudia. <i>Sakabanaketa-diagrama eraikitzen</i>	180
V.20. irudia. <i>Batez bestekoen diagrama eraikitzen</i>	181
VIII.1. grafikoa. <i>Banaketa normal estandarizatu</i>	294
VIII.2. grafikoa. <i>Banaketa-funtzio normala.....</i>	295
VIII.3. grafikoa. <i>Student t banaketak; 5, 10, 20 eta 200 askatasun-graduak ..</i>	299
VIII.4. grafikoa. <i>χ^2 probabilitate-banaketak, 1, 2, 5 10 askatasun-graduak...</i>	301
VIII.5. grafikoa. <i>$\chi^2_{16;0,05}$ probabilitate-banaketa</i>	302
VIII.6. grafikoa. <i>F banaketa</i>	305

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Psikoanalisi eta zenbait psikoterapia

Mikel Plazaola (arg.)
2000n argitaratua
ISBN: 84-8438-006-8

Familia eta giza-garapena

Mikel Plazaola (arg.)
María José Rodrigo Jesús Palacios (Koord.)
Fernando Olabarrieta (Euskarazko bertsioaren koord.)
2001ean argitaratua
ISBN: 84-8438-021-1

Ikerkuntza psikologian. Ikerketa-baldintzak eta diseinuaren baliotasuna

Nekane Ballueta eta Xabier Isasi
2003an argitaratua
ISBN: 84-8438-038-6

Komunikazioaren Gizarte Psikologia

Eduardo Apodaka
2004an argitaratua
ISBN: 84-8438-051-3

Psikologia politikorako sarrera

Jose Valencia Garate
2005ean argitaratua
ISBN: 84-8438-064-5

Amatasuna eta aitatasuna. Proposamen berriak

Itziar Alonso-Arbiol (koord.)
2006an argitaratua
ISBN: 84-8438-086-6

Ikerkuntza psikologian. Ikerketa-baldintzak eta diseinuaren baliotasuna (2. argitalpena)

Nekane Ballueta eta Xabier Isasi

2007an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-089-4

Gizarte-ezagutzaren garapena nerabegarora arte

Luixa Reizabal (arg.)

2007an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-089-4

Hurrei emandako tratu txarrak: atzematea, jatorria eta ondorioak

Alexander Muela

2007an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-100-6

Hizkuntza idatziaren didaktika Haur Hezkuntzan eta Lehen Hezkuntzan

Mikel Haranburu, Itziar Alonso-Arbiol, Nekane Balluerka,

Arantxa Gorostiaga

2008an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-166-2

Giza garapen psikologiaren ereduak I

Izarne Lizaso Elgarresta, Mariaje Apodaka Ostaiakoetxea

2008an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-169-2

Giza garapen psikologiaren ereduak II (eranskinak)

Izarne Lizaso Elgarresta, Mariaje Apodaka Ostaiakoetxea

2008an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-170-9

Generoa aztergai Psikologian: egungo ikerketak

Itziar Alonso-Arbiol eta Miriam Gallarin(koord.)

2009an argitaratua

ISBN: 978-84-8438-239-3

Alzheimer motako dementzia: zer da eta zer egin?

Izarne Lizaso Elgarresta eta Alaitz Aizpurua Sanz (koord.)

2010ean argitaratua

ISBN: 978-84-8438-286-7

Psikologia Sailean Uztaro aldizkarian argitaratu diren artikulua

Jokaera agonistikoen ondorio ezkorrak ekiditeko estrategiak: errekontziliazioa primateetan

Aizpurua Sanz, Eluska, *Uztaro* **36**, 41-52.

Gatazken konponketa gizakietan eta beste primateetan

Aizpurua Sanz, Eluska, *Uztaro* **39**, 85-99.

Haur batek adierazitako egonezinaren lekukoek agertutako jokaera prosozialean eragiten duten aldagaiak

Aizpurua Sanz, Eluska, *Uztaro* **50**, 89-109.

Parafilia eta sexu-nahasteei buruzko ikuspegiak psikopatologian eta sexologia

Alonso-Arbiol, Itzi, *Uztaro* **32**, 69-80.

Metaanalisiaren azterketa: kritikak eta ekarpenak

Alonso-Arbiol, Itzi; Unzurrunzaga, Erne, *Uztaro* **39**, 75-83.

Elkarrizketa sexologikoa: ezaugarriak, dianostikorako eredua eta deribaziorako prozedura

Alonso-Arbiol, Itziar; Azanza, Maite, *Uztaro* **57**, 67-80.

Jatorri desberdineko emakumeen migrazio-egitasmoa eta ongizatea. Genero-ikuspun-tutik egindako ekarpenak

Arnoso, Ainara; Elgorriaga, Edurne eta Martinez-Taboada, Cristina, *Uztaro* **67**, 87-104.

Immigrazioa eta gutxiengo kulturalak: etorkinen irudikapenak eta gizarte eta komuni-tatearen partaidetzarako hausnarketak

Arnoso, Ainara; Elgorriaga, Edurne; Martinez-Taboada, Cristina eta Rico, Ander, *Uztaro* **70**, 79-96.

Euskara erabiltzearen erraztasunaren/zailtasunaren eragin emozionala eta horren ondorioak

Azurmendi, M.J., *Uztaro* **64**, 83,97.

Ludopatiaren tratamendua talde-terapia kognitibo-jokabidezkoarekin: kasu baten ikerketa

Báez, Kontxi; Salaberria, Karmele, *Uztaro* **17**, 151-158.

Testu zientifikoen ikaskuntza. Argibide eta eskemen eragina

Balluerka, N.; Isasi, X. Yenes, F.; López, A.; Elosua, P., *Uztaro* **5**, 139-149.

Emozioei begirada psikologikoa

Conejero, S.; Pascual, A. Etxebarria, I., *Uztaro* **63**, 77-89.

Giza irudiaren marrazkia: heldutasun-adierazleen datu normatiboak Euskal Autonomia Erkidegoan

Cruz, Soledad; Maganto, Carmen; Pérez, Gorka, *Uztaro* **42**, 103-121.

Froga psikologikoen euskaratzea

Elosua, Pauli; López, Alicia, *Uztaro* **23**, 95-106.

Autokontzeptu fisikoa neurtzeko galdesorta berri baten propietate psikometrikoak

Esnaola, Igor; Goñi, Alfredo, *Uztaro* **56**, 109-122.

Hizkuntzaren erabilera lankidetzan eta lehiaketa-harremanetan

Gil de Montes, L.; Ortiz Anzola, G.; Valencia, J., *Uztaro* **41**, 47-63.

Elebidunen garapen kognitibo eta neuropsikologikoaren inguruko ikerkuntza XX. mendean zehar: berrikuspen teoriko-metodologikoa
Gorostiaga, Arantxa; Balluerka, Nekane, *Uztaro 35*, 89-130.

Familia-harreraren jarraipena Gipuzkoan: gaur egungo egoera eta hobekuntzarako proposamenak ikerkuntzaren eremutik
Gorostiaga, Arantxa; Herce, Cristina; Achúcarro, Cristina; Torres, Bárbara; Rivero, Ana, *Uztaro 40*, 105-116.

Osakidetzako elikadura-jokabidearen nahasteen tratamendurako berariazko programan tratamenduan dauden pazienteen nortasun-ezaugarriak
Grijalvo, Jorge; Aparicio, M. Dolores; Iruín, Alvaro; Insúa, Patricia; Marañon, Izaskun, *Uztaro 45*, 91-100.

Haurraren adimenaren eboluzioa
Haranburu, Mikel, *Uztaro 0*, 99-110.

Anorexia
Haranburu, Mikel, *Uztaro 25*, 125-131.

Ikasleen estilo kognitiboen, garapen operatorioaren eta prekontzepzioen arteko harremanak, irakaskuntzari begira
Haranburu, Mikel, *Uztaro 30*, 85-104.

Norberaren egiaztapen- eta goratze-estrategiak
Haranburu, Mikel; Guerra, Jesús, *Uztaro 41*, 27-45.

Enpresaren irudia eta prestakuntza iraunkorra
Haranburu, Mikel; Asua, Begoña; Arregi, Paki; Arrieta, Elisabet, *Uztaro 46*, 81-92.

Istripuak, gaixotasunak eta gertaera negatiboak jasateko joera duten pertsonen eta substantzia adiktiboen kontsumitzaileak diren pertsonen nortasunaren profila
Haranburu, Mikel; Gorostiaga, Arantxa; Alonso-Arbiol, Itziar; Balluerka, Nekane, *Uztaro 55*, 89-104.

Edukiaren eragina arrazonamendu deduktiboan
Huizi, Pello; Alzate, Ramón; Balluerka, Nekane, *Uztaro 16*, 125-143.

Bere begiz ikusi duen lekukoaren oroimena eta ebaluazio-tartearen eragina
Ibabe, Izaskun, *Uztaro 31*, 101-111.

Internet bidezko ebaluazio hezitzailea
Ibabe, Izaskun eta Jauregizar, Joana, *Uztaro 59*, 91-108.

Grafologia
Ibarra, Irune, *Uztaro 4*, 115-126.

Psikografologia
Ibarra, Irune, *Uztaro 7*, 141-153.

Metafora terapeutikoen erabilera
Ibarra, Irune, *Uztaro 12*, 111-120.

Prozesu psikolinguistikoak eta eskizofrenia
Insua, P.; Huizi, P.; Grijalvo, J., *Uztaro 34*, 92-112.

Zaporearekiko abertsioa arratoietan: adiskide pozoituaren efektuan hainbat aldagai kognitibo eta sozialen eragina
Iraola, J.A.; Balluerka, N.; Gorostiaga, A., *Uztaro 22*, 69-80.

Zapore-lehentasuna arratoietan: aldagai kognitibo eta harreman sozialen eragina
Iraola, Jose Angel, *Uztaro 29*, 95-107.

Kreditu europarrerantz hurbiltzeko eredu estatistikoa. Psikologiako ikasketak aztergai
Isasi, Xabier; Balluerka, Nekane, *Uztaro 52*, 77-89.

Erretiratuaren soslai berria konstruktuko teoriko gisa
Lizaso Elgarresta, Izarne; Norbert Sanchez de Miguel, Manuel, *Uztaro 60*, 89-105.

Hurrei emandako tratatu txarren ondorioak eta parekoekiko harremanak
Muela, Alexander, *Uztaro 60*, 107-123.

Genero-identitatea testuinguruan: ikerketa enpirikoa
Ortiz, Garbiñe; Valencia, Jose F., *Uztaro 28*, 99-111.

Hizkuntzaren erabilera genero-estereotipoak iraunarazteko tresna gisa: hizkuntzaren
abstrakzioaren ondorioak
Ortiz, Garbiñe; Valencia, Jose F. eta Gil de Montes, Lorena, *Uztaro 59*, 63-88.

Nork bere burua zaintzeko laguntza emanez
Murphy, Maripat (Itzul.: Xabier Yurramendi), *Uztaro 38*, 83-96. Jokin Zaitegi Itzulpen Laburren
Sariketa.

Familiako giroaren kalitatea eta haurren garapen psikologikoa Euskal Autonomia
Erkide-goan; azterketa deskriptiboa
Olabarrieta, Fernando; Martín, Juan Luis; Arranz, Enrique; Manzano, Ainhoa; Azpiroz, Amaia;
Bellido, Arantza; Oliva, Alfredo; Richards, Martin, *Uztaro 47*, 81-95.

Identitate soziala nabarmentzearen eragina eskusio moralean
Reizabal, Luixa; Valencia, Joxe, *Uztaro 15*, 97-107.

Identitate nazionalaren garapena Euskal Herriko haur eta nerabeengan
Reizabal, Luixa; Valencia, Joxe; Jimenez, Maritxu; Barret, Martyn, *Uztaro 40*, 75-103.

Talde-identifikazioa, barne-taldearekiko faboritismoa eta hautemandako homogeneo-
tasun-maila testuinguru soziopolitiko desberdinetan garatzen ari diren haur eta
nerabeengan
Reizabal, L.; Valencia, J.; Jimenez, M.; Del Valle, A.; García, A., *Uztaro 43*, 105-122.

Nortasunari buruzko adjektiboak. "Izanak izena du"
Sainz de Murieta, Luis, *Uztaro 20*, 105-118.

Lana eta osasun mentala: generoaren ikuspegitik aztertutako etxeko lanaren eta
langintzaren estresa
Sanchez de Miguel, Manuel Norbert, *Uztaro 51*, 99-108.

Emakumezko autobus-gidariak EAEn
Sanchez de Miguel, M. N.; Lizaso, I.; Arrospide, J.J.; Larrañaga, M., *Uztaro 64*, 99-107.

Adineko emakumeak: zenbait ekarpen lan-mundura sartzearen eta erretiroa hartze-
aren inguruan
Sanchez de Miguel, Manuel Norbert eta Lizaso, Izarne, *Uztaro 66*, 75-85.

Erretirorako prestakuntza-programak: historia laburra, helburuak eta edukiak
Sanchez de Miguel, Manuel Norbert eta Lizaso, Izarne, *Uztaro 68*, 71-80.

Familia-ingurua eta Gogamenaren Teoria 5 urteko umeengan

Sanchez de Miguel, Manuel Norbert; Galende, Nuria eta Arranz, Enrique, *Uztaro* **69**, 103-120.

Elikadurarekiko jarrerak neska nerabeengan

Sansinenea, Eneko; Valencia, Jose, *Uztaro* **26**, 47-64.

Dismorfofobiaren tratamendu psikologikoa: kasu klinikoa

Salaberria, Karmele; Belaunzaran, Jon, *Uztaro* **47**, 67-79.

Hezkuntza Berezian esku hartzeko oinarri psikologikoak

Trebol, F.; Astiz, M.; Bildarratz, S.; Etxabarri, J., Olazabal, J., *Uztaro* **49**, 59-86.

Heziketa-praxia, sexu-desberdintasunaren uste-sistemak eta genero-identitatea

Valencia, Jose; Gil de Montes, L.; Arruti, Itziar; Carbonell, Arantza, *Uztaro* **19**, 55-64.

Komunikabideak eta taldearteko mintzaira soslaia: Picassoren "Guernica" Bilboko Guggenheim-era ekartzearen inguruko polemika

Valencia, J.; Gil de Montes, L.; Sansinenea, E.; Erdozia, B.; Usabiaga, B.; Ripalda, N., *Uztaro* **24**, 89-101.

Ikuspuntu berriak umeen zenbatze-ekintzari buruz: Piaget-engandik harago

Villaroel Villamor Jose Domingo et Nuño Angósm, Teresa, *Uztaro* **65**, 51-71.

Atxikimendua ebaluatzeko tresnak

Yárnoz, Sagrario, *Uztaro* **11**, 89-103.

Mary Salter Ainsworth. In memoriam

Yárnoz, Sagrario; Sainz de Murieta, Luis; Plazaola, Mikel; Alonso Itzi, *Uztaro* **31**, 113-128.

Autokontzeptu fisikoa: kirol-jarduera eta itxura fisikoaren eragina

Zulaika Isasti, Luix M., *Uztaro* **33**, 87-98.