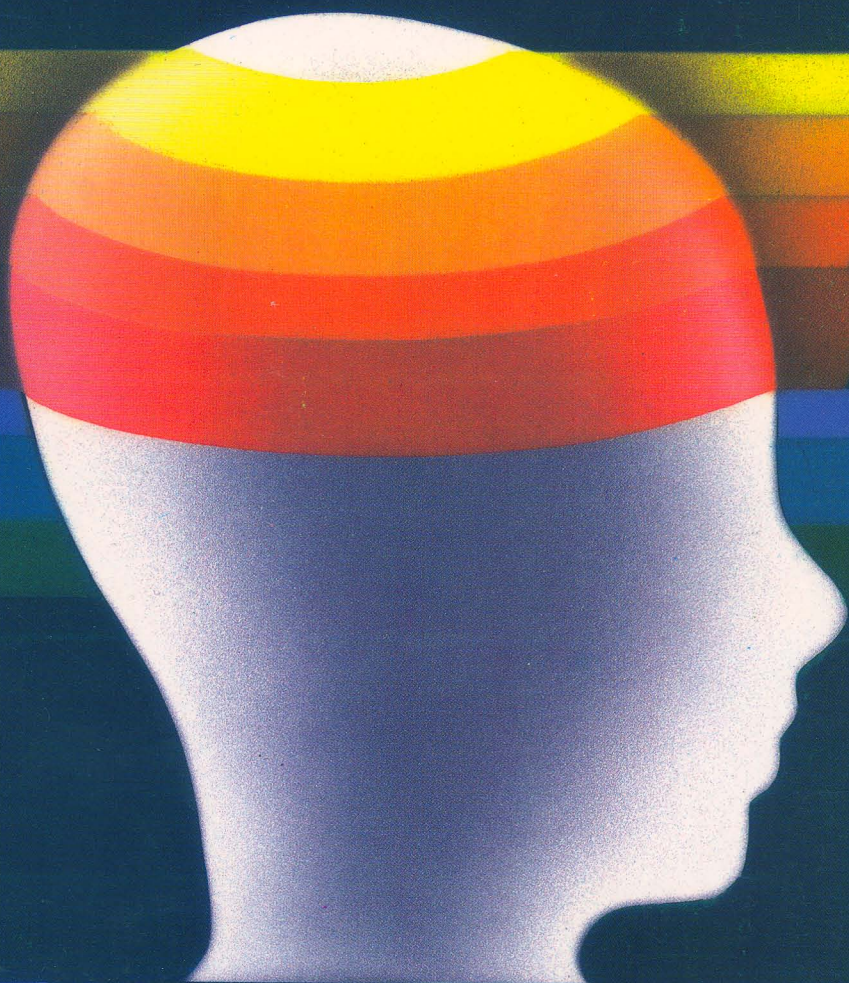


MEKANIKA ANALITIKOA



J.M. AGIRREGABIRIA
J.R. ETXEBARRIA



© U.E.U.ko Fisika Saila
General Concha 25, 6. 48010 BILBO telf. 4317145

I.S.B.N.: 84-86967-02-3
Lege-gordailua: BI-955-88

Inprimategia: BOAN S.A.
Particular de costa 12, 14. 48010 BILBO

Mekanika Analitikoa

J. M. Agirregabiria
J.R. Etxebarria

Fisika Teorikoa.
Zientzi Fakultatea.
Euskal Herriko Unibertsitatea.

Udako Euskal Unibertsitatea
Iruñea, 1988.

AURKIBIDEA

<i>Aurkibidea</i>	V
<i>Lehenengo argitarapeneko aintzinsolasa</i>	IX
<i>Bigarren argitarapeneko sarrera</i>	XI
 1. GAIA: ESTATIKA ANALITIKOA	1
1.1 <i>Sistema mekanikoak. Loturak</i>	3
1.2. <i>Sistema holonomoak eta koordenatu orokortuak</i>	9
1.3. <i>Estatika Analitikoa</i>	11
1.3.1. <i>Lan birtualen printzipioa</i>	11
1.3.2. <i>Indar orokortuak</i>	13
1.3.3. <i>Eremu kontserbakorrak</i>	15
1.3.4. <i>Torricelli-ren teorema</i>	16
1.4. <i>Lotura-indar orokortuak. Lagrange-ren</i> <i>biderkatzaileen metodoa</i>	19
1.4.1 <i>Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa</i> <i>lotura holonomoen kasuan</i>	19
1.4.2. <i>Lotura-indarren kalkulua</i>	23
1.4.3. <i>Adibidea</i>	26
<i>Ariketak</i> ..	32
 2. GAIA: LAGRANGE-REN DINAMIKA	35
2.1. <i>D' Alembert-en printzipioa. Lotura idealak</i>	37
2.2. <i>Lotura holonomoak. Lagrange-ren ekuazioak</i>	39
2.3. <i>Eremu kontserbakorrak. Sistemaren lagrangearra</i>	42
2.4. <i>Potentzial orokortuak</i>	43
2.5. <i>Indar iraungikorak. Rayleigh-en funtzioa</i>	45
2.6. <i>Lotura ez-holonomoak eta Lagrange-ren biderkatzaileak</i> ..	47
2.7. <i>Laburpena</i>	51
2.8. <i>Higidura inpulsihoa</i>	53
2.9. <i>Lagrange-ren ekuazioen kobariantzia formala</i>	56
2.10. <i>Momentu orokortuak. Koordenatu ziklikoak.</i> <i>Routh-en metodoa</i>	56
<i>Adibideak</i>	60
<i>Ariketak</i>	74

3. GAIA: HAMILTON-EN PRINTZIPIOA	77
3.1. Bariazioen kalkulua	79
3.1.1. Bariazioen kalkuluaren notazio klasikoa	85
3.1.2. Bariazioen kalkulua n aldagai independenteren kasuan	87
3.2. Hamilton-en printzipioa	89
3.3. Printzipioaren orokorpena sistema ez-kontserbakorren kasuan	91
3.4. Potentzial orokortuen kasua	94
3.5. Loturadun extremalak	95
3.6. Sistema ez-holonomoak	98
3.7. Lerro geodesikoak	101
Adibideak	105
Ariketak	108
4. GAIA: SIMETRIAK ETA KONTSERBAZIO-PRINTZIPIOAK	111
4.1. Kontserbazio-legeak eta higidura-konstanteak	113
4.2. Transformazio infinitesimalak	116
4.3. Simetri transformazioak	118
4.4. Noether-en teorema	121
4.5. Momentu kanoniko konjokatuaren kontserbazioa	124
4.6. Momentu linealaren kontserbazioa	125
4.7. Momentu angeluarraren kontserbazioa	127
4.8. Energiaren kontserbazioa	129
4.9. Masa-zentruaren teorema	131
Adibideak	134
Ariketak	146
5. GAIA: HAMILTON-EN FORMALISMOA	149
5.1. Legendre-ren transformazio duala	151
5.2. Hamilton-en ekuazio kanonikoak	155
5.3. Routh-en metodoa	156
5.4. Hamilton-en printzipioa	160
5.5. Maupertius-en printzipioa	163
5.6. Poisson-en kortxeteak	167
5.7. Poisson-en kortxeteak eta higidura-ekuazioak	171
5.8. Poisson-en kortxeteak eta higidura-konstanteak	172
Adibideak	176
Ariketak	184
6. GAIA: TRANSFORMAZIO KANONIKOAK ETA HAMILTON-JACOBI-REN METODOA	187
6.1. Transformazio kanonikoak	189

6.2. Transformazio kanoniko infinitesimalak	194
6.3. Simetriak eta higidura-konstanteak	199
6.4. Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa. Hamilton-en funtzio nagusia	202
6.5. Hamilton-en funtzio karakteristikoa	209
6.6. Aldagaien banaketa	215
6.7. Ekintza-aldagaiak eta angelu-aldagaiak	218
Adibideak	224
Ariketak	231
Bibliografia	235
Aurkibide alfabetikoa	239

Lehen argitarapeneko aintzinsolasa

Newton-en mekanika bektoriala baino ezagutzen ez duen irakurleari, harrigarria gertatuko zaioke lantxo honen izena, Mekanika Analitikoarena alegia. Berau nolako mekanika den galde diezaioke bere buruari. Newton-enaren desberdina ote? Ez, jakina; berbera da, edo hobeto esan, Newton-enaren ondorio matematikoa, analitikoa. Beraz, ez dauka Newton-enak baino aplikazio-arlo handiagorik; alderantziz, kasu berezi batzutan, marruskadura dagoenean batez ere, ezin dezakegu Mekanika Analitikoa erabil.

Orduan, non ote datza teoria honen garrantzia? Zertarako balio du? Beronetaz aritzea ez ote da denbora alferrik ematea? Ez al litzateke hobe izanen, Fisikaren arlo modernoagotaz arduratzea?

Azken bi galdera hauen erantzuna, gure eritziz ezetz biribila da, gauzak beti pausoka eta patxadaz egitea komeni dela uste baitugu eta, batik bat, Fisikaren ikasbidean. Hortaz, zehatzagoak izateko Dinamika Analitikoaz arduratzeke arrazoi batzu banan-banan emanen ditugu. Hauexek prezeski:

- *Mekanikaren historian guztiz zeregin garrantzitsua bete du Mekanika Analitikoak, eta ez dugu uste Fisikaren edozein arloren historiaz aritzea denbora alferrik ematea denik.*
- *Arazo mekaniko klasiko batzu ebazteko, oso egoki eta eroso izan da eta da, gaur egun horrelako arazoak lehen bezain interesgarriak izan ez arren.*
- *Hemen ikusten diren teknika matematikoak nahiko orokorrak dira eta hemengoen antzeko ekuazio diferentziales parte hartzen duteneko arazoetara heda daitezke.*
- *Formulismo hauen bidez, Mekanikaren kontzeptu oinarritzko batzu hobeto ulertzen dira. Esate baterako, aipa ditzagun simetrien eta kontserbazio-legeen arteko harremanak.*
- *Mekanika Analitikoa ezagutzeke, Fisika modernoa, hots, Mekanika Kuantikoa, Eremuen Teoria Klasiko eta Kuantikoa eta abar menperatzea zaila da, zeren Mekanika Analitikoan oinarritzen*

baita eta beronen teknika batzuk, aldaketa egokiaren ondoren, arlo modernoetan ere baitiraute.

Hori dela eta, Fisika modernora heda daitezkeen teknika eta emaitzak azpimarratzen saiatu gara, arazo klasiko ospatsuen —hala nola, solido zurrunaren— azterketaren kaltetan.

Bestaldetik, lantxo honek ez du Mekanika Analitikorako sarrera baino izan nahi. Unibertsitateko bigarren mailako kurtsuaren mailari dagokio, beraz, eta ondo ulertzeko, lehen kurtsuaren mailako Fisika Orokorra eta Analisia baino ez dira ezagutu behar aldezturik.

Derragun, berriro, hau ez dela Mekanikaren tratatu osoa, ez eta gutxiagorik ere. Ez ditugu gai guztiak ukitu, baina bai geure helburuarentzako egokienak eritzi diegunak.

Eta zein izan da gure helburua? Aipaturiko mailan, Dinamika Analitikoa ikasten hasten direnek euskaraz idatziriko kontsultaliburua izan dezatela. Horretarako, gutariko batek —J.R.Etxebarriak— Leioan berton ematen duen asignaturaren eskuzkribuetan oinarritu gara.

Lana 1978-79 ikasturtean zehar burutu izan dugu Leioako Zientzi Fakultatean, eta Udako Euskal Unibertsitatean aurkezteko asmoarekin. Modu honetan, urtean zeharreko lanez lotu nahi izan ditugu Euskal Herrian dugun erdal unibertsitate publikoa, etorkizuneko Euskal Unibertsitatea izanen denaren beste abiaburuarekin, hau da, oraingoz udan eta bi astez soilik egiten den UEUrekin.

Gizalan guztiak bezelaxe, hau berau ere kritikoki hartu eta aztertu behar da. Areago, lan honetan oker batzu eta, horhemenka, zehaztasunik eza aurkituko dira, segur aski —gutxi izanen ahal dira!— beste arrazoi batzuren artean, lana prestatzeko nahi adina betarik eduki ez dugulako.

Ez dugu aintzinsolas hau bukatu nahi, lan hau prestatzean lagundu diguten pertsona batzuren izenak aipatu gabe, publikoki eskertu nahi baitiegu beren laguntza. Lehenik Anibal Hernández irakaslea aipatu nahi dugu, lanari buruzko elkarrizketetan hainbeste ideia eman dizkigulako, eta lana burutzeko eman digun adorea. Bestetik, Cristina García eta María Victoria Garde idazkarien izena ere agertu nahi dugu, gure izkribuak makinatzean egin duten lanagatik. Eskerrak hauei eta adorea-hitzak eman dizkiguten guztiei.

Gaizki esanak barka eta ongi esanak onar.

Egileek

Leioan, 1979.eko Ekainaren 11n

Bigarren argitarapeneko sarrera

Bederatzi urte iragan dira ia, liburu honen lehenengo argitarapena egin genuenetik eta bigarren honetan itxura aldaturik kaleratzen dugu. Izan ere, ez dira alferrik joan urte horiek eta euskarazko textuliburuaren arloan hainbeste aurrerapauso eman dira bitartean.

Liburuaren argitarapeneko urte berean, 1979.aren amaiera aldean, U.Z.E.I. erakundeak (Unibertsitate Zerbitzuetarako Euskal Ikastetxea) bere "Fisika. Hiztegia" plazaratu zuen, gero etorriko ziren hainbat hiztegi teknikoren atarian. Ezin daiteke uka, hiztegi horiek euskararen normalizazioranzko bidean izan duten, duten eta, seguruen, izango duten garrantzia, hain zuzen ere horiek baitira Elhuyar taldean, Udako Euskal Unibertsitatean, Euskal Herriko Unibertsitatean eta bestetan diharduten gehienek beren lanak prestatzean abiaburutzat duten iparrorratza. Zorionez, gaur egun, orduko oinarria ongi jarria zegoela esan daiteke eta, ondorioz, unibertsitatean zein irakaskuntzako beste mailetan dihardugunok oso hizkuntza bateratu eta normalizatua erabiltzen dugu Zientziaren arloan bederen. Zer esanik ez, bigarren argitarapena egitean, oso kontutan hartu izan ditugu azken urte hauetako praktika eta lanak, eta horien arauerako bateratze-bidean goitik beherako orrazketa egin dugu.

Euskararen normalizazioarekin zerikusirik dutenez gaineko zuzenketak eta osoketak ere egin ditugu. Batetik, noski, aurreko argitarapeneko okerrak eta akatsak zuzentzen saiatu gara. Bestalde, zenbait gehikuntza egin ditugu, ariketei dagokienez batez ere, horrela osoago geldituko delakoan. Dena den, orokorrean, aurreko argitarapeneko edukia gorde dugu, liburuari egitura berbera emanez.

Amaitzeko, UEUko idazkariak eskertu nahi ditugu textua euskarri informatikoan sartzeagatik eta, halaber, UEU erakundea bera, dituen bitarteko tekniko guztiak gure esku utzi dituelako.

Lagrange-k bere "Mechanique Analytique" liburu ospetsua 1788. urtean argitaratu zuenetik berrehun urte iragan direneko honetan, euskarazko irakaskuntzarako lagungarri gertatuko delakoan plazaratzen dugu geure ekarpen hau.

Egileek

Leioan, 1988.eko Apirilaren 11n

1. GAIA

ESTATIKA ANALITIKOA

- 1.1. Sistema mekanikoak. Loturak.
 - 1.2. Sistema holonomoak eta koordenatu orokortuak.
 - 1.3. Estatika Analitikoa.
 - 1.3.1. Lan birtualen printzipioa.
 - 1.3.2. Indar orokortuak.
 - 1.3.3. Eremu kontserbakorrak.
 - 1.3.4. Torricelli-ren teorema.
 - 1.4. Lotura-indar orokortuak.
 - Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa.
 - 1.4.1. Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa lotura holonomoen kasuan.
 - 1.4.2. Lotura-indarren kalkulua.
 - 1.4.3. Adibidea.
- Ariketak.

Sarrera orokorrean adierazi dugunez, ikastaro honetan Mekanika Analitikoaren oinarriak ezarri nahi dira. Ordenari dagokionez, ongi dakigu jakin, ezen Estatika delako atala Dinamikaren atal berezi bat dela, eta beraz, logikaren arauera, Dinamika Analitikoa aztertu ondoren azaldu beharko genukeela, hots, adibide berezi modura. Hala ere, eta arrazoi pedagogikoz, hortik hasiko gara azterketa egiten, gaian progresiboki sartzeko egokiago ikusten baitugu.

Partikulaz osaturiko sistema mekanikoak aztertuko ditugu. Eta partikula horien artean zenbait erlazio ohi daude higidura posibleak mugatzen. Horregatik, lehen pauso batetan loturak definituko ditugu, berorien bidez sistema mekanikoak sailkatzeko. Bigarren pauso batetan, loturek sortzen dituzten problemak aztertuko ditugu, arazoaren irtenbideak bilatzen hasteko. Gai honekin bukatzeko, orekan dauden sistemak aztertuko ditugu, horretarako bete behar diren baldintzak analisatuz. Gehigarri gisa eta oreka-egoerako lotura-indarrak kalkulatzeko, biderkatzaile langrangeren metodoaren azalpena egingen dugu.

1.1. SISTEMA MEKANIKOAK. LOTURAK

Demagun, N partikulaz osaturiko sistema bat dugula. Partikula horien higidura mugatzen duen inolako baldintzarik ez balego, partikula bakoitzak 3 askatasun-gradu edukiko lituzke; hau da, 3 koordenatu independentez definitu beharko genuke partikula bakoitzaren posizioa. Eta denetara, sistema osoaren konfigurazioa definitzeko, $3N$ koordenatu edukiko genituzke. Inertzi sistema batetatik aztertuz, ondoko higidura-ekuazioak edukiko genituzke:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i . \quad (1.1)$$

- Hemen:
- i azpiindizeak partikula bakoitza adierazten du. Beraz, N ekuazio bektorial ditugu, hots, $3N$ ekuazio eskalar (osagaien arauera).
 - $\mathbf{r}_i$: i partikularen posizio-bektorea.

$$- \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} .$$

- F_i : i partikularene gainean eragiten duten indarren erresultantea.

Ikusten denez, $3N$ ekuazio diferentzial eta $3N$ denboraren funtzio ezezagun. Dena den, sistema mekanikoen higidura ezin ahal izaten da hain sinpleki azaldu, higidura posibleak mugaturik egoten direlako. Hitz arruntez esanik, askatasun-gradu gutxiago ohi daude.

Partikulen higiduraren gainean, zenbait erlazio edo baldintza mugatzaile egoten dira praktikan: *loturak*. Zer dira, ba, loturak? Lotura mekanikoak, sistema mekanikoen partikulen higidura mugatzen duten baldintzak dira. Loturek, beraz, askatasun-graduak kentzen dituzte. Eta horrela, k lotura —edo lotura-baldintza sinple— baditugu, N partikulatako sistema mekanikoak $(3N-k)$ askatasun-gradu ditu soilik.

Hala ere, lotura guztiak ez dira modu berekoak. Era desberdinetako loturak daudenez, interesgarria dateke, aurrera segitu baino lehen, lotura mekanikoen sailkapena egitea.

Dena den, loturak daudelarik sistema mekanikoak izan ditzakeen desplazamenduak kontutan hartu beharko ditugu, *desplazamendu birtual* izenaz ezagutuko ditugunak. Honelaxe defini ditzakegu: "Sistema mekanikoaren desplazamendu birtual infinitesimala, beraren konfigurazioaren aldaketa infinitesimal bat da, partikulen $\delta \mathbf{r}_i$ desplazamenduez adierazia, non $\delta \mathbf{r}_i$ desplazamenduak sistemak aldiune horretan dituen loturekin bateragarriak diren". Beraz, desplazamendu birtuala ez da denborarekin gertatzen, eta horregatik aldiunea aldatu gabe gertatzen da, hots, $\delta t = 0$. Definizio hori eman ondoren, goazen loturen sailkapena egitera.

Erizpide desberdinak har daitezke loturak sailkatzeko, baina gu gehien erabiltzen denetik abiatuko gara: Lotura-baldintzaren forma matematikoa edukiko dugu kontutan. Bi eratako loturak kontsidera daitezke:

- *Lotura unilateralak*. Lotura-baldintza inekuazio baten bidez adierazi ohi da:

$$f(\mathbf{r}_i, t) \geq 0. \quad (1.2)$$

Kasu honetan zenbait norabidetan, loturak norantza bakar batetan uzten ohi du higidura, hau da, norabide batzutan, desplazamendu birtual infinitesimal bat, $\delta \mathbf{r}_i$, posible izanik ere, beraren kontrakoa ez da posible. Hurrengo irudietako kasuetan adibidez:

Soka ez-zurrun luza ezina: $x^2 + y^2 \leq l^2$	Planoaren gainetik $y/x \geq \tan \varphi$	Gainazalaz kanpo $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$

- *Lotura bilateralak* . Loturak norabide ber baten bi norantzetan uzten ohi du higidura (beti ere desplazamendu birtual infinitesimalak kontsideratuz). Hau da, desplazamendu birtual infinitesimal bat, $\delta \mathbf{r}_i$, posible bada, beraren kontrakoa ere posiblea da. Hurrengo irudietan horrelakoak adierazten zaizkigu:

Soka zurruna $x^2 + y^2 = l^2$	Plano inklinatuan $y/x = \tan \varphi$	Gainazal esferikoan $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Lotura bilateralak abiaduren dependentziaren arauera sailka daitezke:

- *Lotura holonomoak, geometrikoak edota finituak*.. Ez da abiadurarik ageri lotura-ekuazioan:

$$f(\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad (1.3)$$

- *Lotura ez-holonomoak, diferentzialak edota zinematikoak*.. Abiadurak explizitoki ageri dira lotura-ekuazioan. Abiadurekiko linealak direnak kontsideratuko ditugu soilik:

$$f(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0 . \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=0}^N a_i(\mathbf{r}_i, t) \dot{\mathbf{r}}_i + b(\mathbf{r}_i, t) = 0 . \quad (1.5)$$

Lotura bilateralak denborarekiko dependentziaren arauera ere sailka daitezke:

- *Lotura egonkorak edo eskleronomoak* . Kasu honetan denbora ez da explizitoki agertzen lotura-ekuazioan. Adibidez, lotura holonomoa bada,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 . \quad (1.6)$$

- *Lotura higikorak edo erreonomoak* . Hauetan denbora explizitoki ageri da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 . \quad (1.7)$$

Egindako sailkapenez gainera, bestelako bat ere egingo dugu, gerorako oso baliagarri gertatuko zaigu eta. Honetan lotura-indarren lan birtuala hartuko dugu erizpidetzat. Lan birtual hori honela adierazten da desplazamandu birtualen bidez:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{(1)} \cdot \delta \mathbf{r}_i ,$$

$\mathbf{f}_i^{(1)}$ direlakoak lotura-indarrak direlarik.

Lotura-indarren lan birtuala nulua denean, *lotura idealak* ditugula esango dugu eta bestelako kasuetan, *lotura ez-idealak*. Beraz, *lotura idealak* ondoko baldintza betetzen dutenak dira:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{(1)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.8)$$

Lotura idealen artean hiru motatakoak daude gutxienez:

- *Lotura leunak*. Hauetan lotura-indarra eta desplazamendu birtuala elkarren perpendikularrak dira partikula bakoitzean:

$$\mathbf{f}_i^{(1)} \perp \delta \mathbf{r}_i .$$

- *Solido zurrunari dagokion lotura* . Edozein partikula-bikoteren arteko distantziak konstante irauten duenez, honelako bilketak egin ditzakegu:

$$\mathbf{f}_{ij}^{(1)} \cdot (\delta \mathbf{r}_i - \delta \mathbf{r}_j) = \mathbf{f}_{ij}^{(1)} \cdot \delta \mathbf{r}_{ij} = 0 . \quad (1.9)$$

Ohar bat egin behar da honi buruz. (1.9) bete dadin, ondoko baldintzak bete behar dira:

- $\mathbf{f}_{ij}^{(1)}$ indarrek akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen dute.
- Gainera, $\mathbf{f}_{ij}^{(1)}$ indarrek $\mathbf{r}_{ij}$ bektorearen norabidea daukate.

Bestela ez da zertan (1.9) bete behar.

- *Errodadurazko lotura* . Kasu honetan, sistemak higidura duen arren, lotura-indarra dagoeneko puntuaren desplazamendu birtuala, nulua da, hots:

$$\delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.10)$$

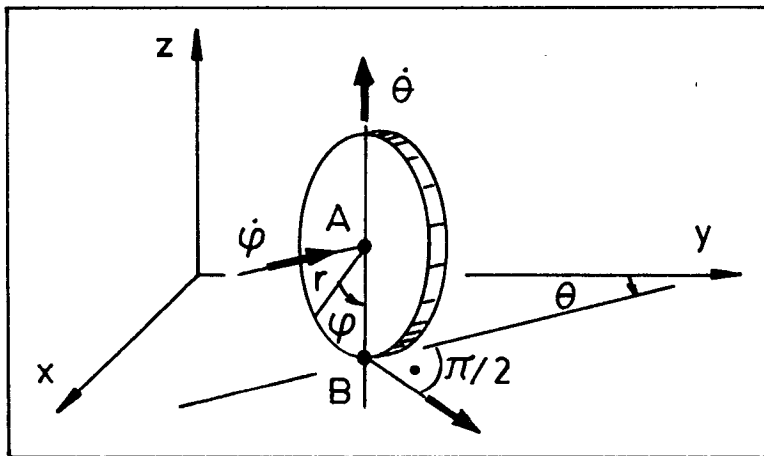
Hauxe da, adibidez, labandu gabe errotatzen ari den zilindroaren kasua.

Adibidea

Azter ditzagun gupil bertikal batek Oxy planoan labanketarik gabe errotatzean dituen loturak. Batetik , solido zurruna dela kontsideratuz, beraren partikulen artean ondoko loturak daude:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = k_{ij} ,$$

k_{ij} konstanteak direlarik.



Lotura hauek bilateral, holonomo eta idealak dira. Lotura horiek kontutan hartuz, 6 askatasun-gradu geratzen zaizkigu (solido zurrunen kasuan bezala), ondoko koordenatuez adierazteko modukoak direlarik (ikus irudia):

$$x, y, z, \theta, \varphi, \psi .$$

Gurpila bertikal dagoenez eta bestetik Oxy planoari etengabe ukitzen dagoenez, beste bi lotura hauek ditugu:

$$z = r,$$

$$\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\psi} = 0.$$

Loturok bilateral holonomoak dira. (Berez, planoaren gainean egotean $z \geq r$ lotura dugu, baina etengabe ukitzen ari dela esatean, bilateral gertatzen da, hots, $z = r$).

z eta ψ koordenatuak eliminatuz, ondoko lau koordenatu orokortuak geratzen zaizkigu:

x, y, θ eta φ .

Oraindik errodaduraren lotura dugu hauen artean. Errodadurako higidurak $v_B = 0$ dela esan gura du, B puntua une bakoitzean dagoen ukitze-puntua izanik. Solido zurrunaren zinematikaren arauera,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \vec{\omega} \wedge \vec{BA} .$$

$$\begin{aligned}\text{Hemen} \quad \vec{\omega} &= -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{j} + \dot{\theta} \mathbf{k} , \\ \vec{BA} &= z \mathbf{k} = r \mathbf{k} , \\ \mathbf{v}_A &= \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} .\end{aligned}$$

Beraz, garatuz haxe geratzen zaigu:

$$\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = r \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{i} + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{j} .$$

Hau da

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r \dot{\phi} \cos \theta , \\ \dot{y} &= r \dot{\phi} \sin \theta .\end{aligned}$$

Eta dt delakoaz biderkatuz:

$$\begin{aligned}dx &= r \cos \theta d\phi , \\ dy &= r \sin \theta d\phi .\end{aligned}$$

Lotura hauek bilateral ez-holonomoak dira zeren diferentzialen arteko erlazioak ageri baitira eta ez baitira zuzenki integragarriak. Hala ere, idealak dira, zeren eta, labantzerik ez egotean, ez baita lan birtualik egiten.

1.2. SISTEMA HOLONOMOAK ETA KOORDENATU OROKORTUAK

Demagun, lotura holonomoak dituen partikula-sistema bat aztertzen ari garela. Esan dugunez, loturek mugatu egiten dute partikulen higidura; horretarako, loturen kausaz indar bereziak agertzen dira partikuletan, guk lotura-indarrak deituko ditugunak. Beraz, higiduraren ekuazioak honela idatzi ahalko ditugu:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i^{(1)} + \mathbf{F}_i^{(k)} , \quad (1.11)$$

non $\mathbf{f}_i^{(1)}$ i partikularen gaineko lotura-indarra den eta $\mathbf{F}_i^{(k)}$ i partikularen gaineko kanpo-indarra den .

Hurrengo puntuetan ikusiko dugunez, lotura holonomoen kasuan erraz gaindi daitezke aipaturiko zailtasunak, koordenatu orokortuak erabiliz eta Langrage-ren formulazioaz baliatuz.

N partikulaz osaturiko sistemaren partikulen posizioa definitzeko, $3N$ koordenatu behar ditugu (koordenatu kartesiarrak, zilindrikoak, esferikoak edo bestelakoak). Baina k lotura-ekuazio baldin badaude, koordenatu horietako $(3N-k)$ bakarrik dira independenteak. Aukera ditzagun, ba, $3N-k$ aldagai independente:

Aldagai hauen bidez zehazki definitzen da partikula guztien posizioa, t aldiunean. q_j hauek, berez, denboraren funtzioak dira, higidura kontutan hartzen badugu. Eta dimentsio-ekuazioari dagokionez, q_j direlakoak edozein eratako magnitudeak dira, baina bakoitzak askatasun-gradu baten adierazpena du.

[illegible]

Esandako moduan definituriko q_j magnitude independenteak, *koordinatu orokortuak* deitzen dira. Eta posizio-bektoreak koordinatu orokortuen bidez definitzeko (1.11) ekuazioak, *transformazio-ekuazioak*. Zer esanik ez, transformazio-ekuazioetan inplizitoki daude sarturik lotura-baldintza guztiak. Modu orokorrean honela idatziko ditugu:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (j = 1, \dots, 3N - k). \quad (1.13)$$

Koordenatu orokortuek osotzen duten espazioari, *konfigurazio-espazioa* deritzen. Edozein modutan, esandako guztia lotura holonomoen kasuan erabil daiteke bakarrik, nahiz eta beste zenbait loturaren kasurako ere erraz orokor daitekeen.

Beste zailtasun bat ere agertzen dela esan dugu, alegia, lotura-indarrak ez ditugula ezagutzen. Izan ere, lotura definitzean ez dugu indarra definitzen, higidurari jartzen dion muga baizik. Problema hau gainditzeko, Langrange-ren formulazioa prestatuko dugu. Eta ikusiko dugunez, lotura-indarrak kendu egingo ditugu formulaziotik, problema hori gaindituz.

1.3. ESTATIKA ANALITIKOA

Has gaitezen, ba, N partikulaz osoturik dagoen sistema baten oreka aztertzen. Daukagun lehenengo problema, lotura-indarrak ez ditugula ezagutzen da. Problema hau lotura idealen kasuan oso erraz gaindituko dugu lan birtualen printzipioa erabiliz.

1.3.1. Lan birtualen printzipioa

Lehenago definituriko (ikus 1.1. atala) desplazamendu birtual infinitesimalak erabiliko ditugu hemen. Bertan esan dugun bezala, desplazamendu birtualak sistemak aldiune horretan dituen loturekin bateragarriak dira.

Berez, desplazamendu birtuala ez da denborarekin gertatzen, eta horregatik aldiunea aldatu gabe gertatzen da, hots, $\delta t = 0$. Ondorioz, desplazamendu birtuala ($\delta \mathbf{r}_i$) eta desplazamendu erreala ($d\mathbf{r}_i$) bi kontzeptu desberdin dira, zeren bigarrenetan, denbora aldatu egiten baita, hots, $dt \neq 0$. Horregatik bi ikur desberdin erabiltzen ditugu bi desplazamendu-mota horiek adierazteko, δ eta d .

Ohar horiek egin ondoren, kontsidera dezagun orekan dagoen

sistema bat. Partikula guztiak orekan daudenez (inertzi sistema batetan):

$$\mathbf{F}_i = 0 . \quad (1.14)$$

Eta oreka-posizioaren inguruko desplazamendu birtualak (orekan eta pausagunean egonik ez dago desplazamendu errealik) kontsideratuz, erraz ikus dezakegu indarrek egiten duten lan birtuala nulua dela, zeren eta haxe betetzen baita:

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.15)$$

$\mathbf{F}_i = 0$ baita; eta beraz:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.16)$$

(1.11) adierazpena erabiliz,

$$\sum_i \mathbf{f}_i^{(l)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.17)$$

Lotura idealak dituen sistema bat kontsideratzen badugu (ikus (1.8)),

$$\sum_i \mathbf{f}_i^{(l)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 .$$

Beraz, azkenean emaitza hau geratzen zaigu:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.18)$$

Honek zera esan gura du, alegia, oreka-posizioan kanpo-indarrek egin dezaketen lan birtual infinitesimala nulua dela. Izatez, haxe da *lan birtualen printzipioa*.

Dena den, kontutan hartu behar dugu ezen orokorki $\mathbf{F}_i^{(k)} \neq 0$ direla, eta, beraz $\delta \mathbf{r}_i$ desplazamenduak independenteak ez direla. Hau normala da, zeren, esan dugunez, zenbait lotura daude eta. Edozetara ere, lan birtualen printzipioa erabiltzean, kendu egin ditugu formulaziotik lotura-indarrak (lotura idealen kasuan) eta, horrela, loturek sortzen duten problema hori gaingidurik geratzen da.

Ohar bat egin behar da, hala ere, zeren eta aurreko arrazoiketan

(1.18) adierazpenera heltzeko baldintza beharrezkoa baino ez baitugu erabili. Alderantziz, galdetu egin daiteke ea (1.18) baldintza nahikoa ote den (1.14) betetzeko, kontutan hartu behar baita ezen (1.14) adierazpeneko $3N$ baldintzetatik (1.18)ko baldintza bakarrera pasatu garela. Izatez, hor hipotesi bat egin dugu, (1.18) ekuazioa loturekin bateragarria den orekarako baldintza nahikoa dela onartuz, edo bestela esanda, nahiz eta lotura-indarretan $(3N - 1)$ baldintza "izkutatu" ditugun, lotura-indarrak behar diren modukoak direla, baldintzaren nahikotasuna bete dadin (honetaz ikus Gantmacher, 21. or.).

1.3.2. Indar orokortuak

Lan birtualen printzipioa aztertzean, $\delta \mathbf{r}_i$ desplazamenduak independenteak ez direla ikusi dugu. Hurrengo pausoa, bestelako desplazamendu independente batzu erabiltzera zuzenduko dugu.

Orekan eta pausagunean (inertzi sistema batetan) dagoen sistema mekanikoaren kasuan, lotura guztiak bilateral holonomotzat jo ditzakegu normalki, zeren eta lotura-baldintzek posizio-bektoreen arteko erlazioak izan behar baitute, ez baitu zentzurik abiadurak edo denbora agertzeak. Honelakoak dira, ba, loturak

$$f_l(\mathbf{r}_i) = 0, \quad (l = 1, \dots, k). \quad (1.19)$$

Beraz, koordenatu orokortuak erabil ditzakegu. Dena den, koordenatu orokortuak erabiltzean, denbora ager daiteke transformazio-ekuazioetan. Hauek, azken batez, honela idatz ditzakegu (ikus 1.13):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t), \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, 3N - k). \quad (1.20)$$

Idatz dezagun orain lan birtualen printzipioa koordenatu orokortuen bidez. Horretarako, lehenik eta behin desplazamendu birtualak idatzi behar ditugu.

Desplazamendu birtual infinitesimalak kalkulatzeko, (1.20) adierazpenaren diferentziala egin behar dugu. Eta desplazamendu birtualak denboratik aparte gertatzen direla kontutan hartuz, hots, $\delta t = 0$ eginez,

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.21)$$

Beraz, (1.17) adierazpenean zera geratuko zaigu:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \\ &= \sum_j \left(\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nomenklatura hau erabiliko dugu:

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} , \quad (j = 1, \dots, 3N - k) . \quad (1.23)$$

Honela definituriko Q_j direlakoei, *indar orokortuak* deritzegu.

Horien funtzioan, modu honetan geratzen da lan birtualen printzipioa

$$\sum_j Q_j \delta q_j = 0 . \quad (1.24)$$

Baina orain δq_j guztiak independenteak dira, koordenatu orokortu guztiak independenteak baitira. Beraz, lan birtualen printzipioa bete dadin, beharrezkoa da Q_j guztiak nulu izatea. Hots, $(3N-k)$ ekuazio independente geratzen zaizkigu, ondokoak hain zuzen ere:

$$Q_j = 0 , \quad (j = 1, \dots, 3N - k) . \quad (1.25)$$

Era honetara, Estatika Analitikoaren problematika ebatzirik utzi dugu: "Inertzi sistema batetan orekan dagoen edozein sistema mekanikoren kasuan, indar orokortu guztiek zero balio dute". Ondorioz, sistemaren ebazketa matematikoa $(3N-k)$ ekuazio independenteren ebazketara laburtzen da.

Nolakoak dira indar orokortuak? Berez, dimentsionalki hitz eginez, edonolako magnitudeak izan daitezke; hots, ez dute halabeharrez indar-dimentsiorik eduki behar. Azken batez, koordenatu orokortuen funtzioan definitzen direnez, kontutan eduki behar da, zer dimentsiotako koordenatu orokortuak hartu diren. Honela, adibidez, q_j luzera bat bada, dagokion Q_j , indarra izango da; q_j angelua bada, Q_j indar-momentu bat

izango da; eta abar. Denetara esan daitekeena, zera da, $Q_j \delta q_j$ biderkaduraren dimentsioak derrigorrez lanarena izan behar duela.

1.3.3. Eremu kontserbakorrak

Orain, kanpo-indarrak kontserbakorrak direnean gertatzen dena aztertuko dugu. Kasu horretan posizio-bektoreen dependentzia duen funtzio potentzial bat dago:

$$V = V(\mathbf{r}_i) . \quad (1.26)$$

Eta kanpo-indarrak funtzio potentzial horren gradiente modura kalkula daitezke

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = - \nabla_i V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \mathbf{k} \right) . \quad (1.27)$$

Honelatan, ba, kalkula ditzagun indar orokortuak. Horretarako, posizio-bektoreen adierazpen cartesiarrak baliatuko gara

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} , \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \mathbf{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \mathbf{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \mathbf{k} . \quad (1.29)$$

Beraz (1.23), (1.27) eta (1.29) erabiliz,

$$\begin{aligned} Q_j &= - \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \mathbf{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \mathbf{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \mathbf{k} \right) = \\ Q_j &= - \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) . \end{aligned} \quad (1.30)$$

Transformazio-ekuazioak potentzialean ordeztuz:

$$V(\mathbf{r}_i) \longrightarrow V(q_j, t) \quad \text{eta ondorioz}$$

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} . \quad (1.31)$$

Azkenean honela geratzen zaigu Estatika Analitikoaren formulazioa eremu kontserbakorren kasuan:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 , \quad (j = 1, \dots, 3N - k) . \quad (1.32)$$

1.3.4. Torricelli-ren teorema

Eremu kontserbakorren artean grabitatearena azter daiteke. Lurreko puntu batetan partikula bakoitzaren pisua $m_i \mathbf{g} = -m_i g \mathbf{k}$ ($g = \text{kte.}$) dela kontsideratuz, sistema mekanikoaren potentziala honela adieraz daiteke:

$$V = \sum_i m_i g z_i . \quad (1.33)$$

Transformazio-ekuazioen bidez potentzial hori koordinatu orokortuen funtzioan idatz daiteke, $V(q_j, t)$ lortuz.

Halaber, sistemaren grabitate-zentruaren koordinatuen bidez ere idatz dezakegu potentziala:

$$V = g \sum_i m_i z_i = M g z_G , \quad (1.34)$$

z_G delakoa grabitate-zentruari dagokion koordinatua izanik. Eta transformazio-ekuazioen bidez, z_G hau koordinatu orokortuen funtzioan jar daiteke:

$$z_G = z_G(\mathbf{r}_i) = z_G(q_j, t) . \quad (1.35)$$

Beraz, (1.32) adierazpenera eramanik:

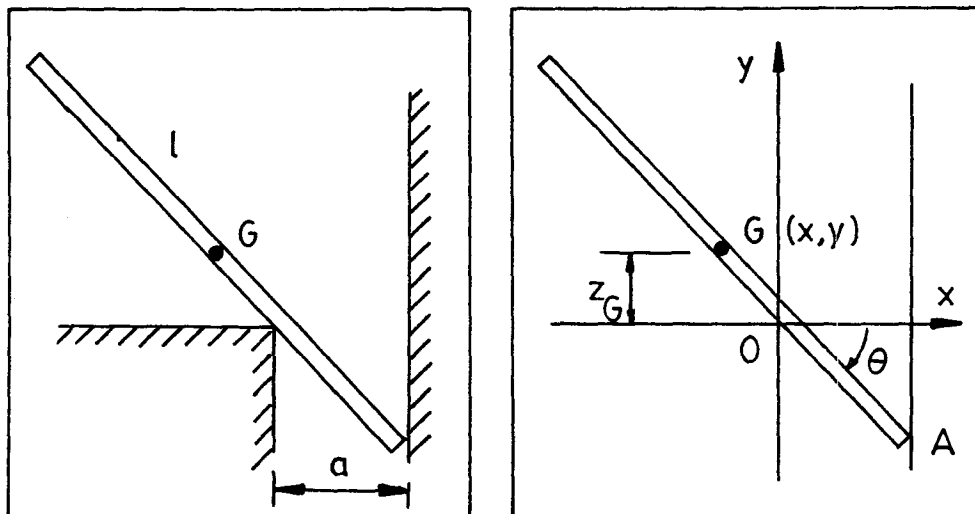
$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = M g \frac{\partial z_G}{\partial q_j} = 0 ,$$

$$\frac{\partial z_G}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, 3N - k). \quad (1.36)$$

Hauxe da, prezeski, *Torricelli-ren teorema*. Zera dio: "Grabitatearen eremuaren eraginpean dagoen sistema mekanikoaren oreka-posizioan, grabitate-zentruaren z koordenatuak minimo (edo maximo) bat du koordenatu orokortuekiko".

Adibidea

"Demagun l luzerako barra homogeno bat plano bertikal batean higitzen (nahi bada, bi plano bertikalek osotzen duten espaziotartean higitzen da). Barrak bi ukitze-puntu ditu: horma bertikal bat eta mahai baten ertza. Ertz eta horma artean a distantzia dago (ikus irudia) eta puntu horietan ez dago marruskadurarik. Kalkula ezazu oreka-posizioa".



Horma eta mahaiertzeko loturak aztertu aurretik, bestelako batzu kontsideratuko ditugu:

- Hagaxka hori solido zurruna da. Beraz, denetara sei askatasun-gradu ditu. Lotura hauek holonomoak dira, noski, eta sei koordenatu orokortu aukera ditzakegu.
- Hagaxka plano bertikalean higitzean, beste hiru askatasun-gradu galtzen ditugu: Bat translaziozkoa eta beste bi orientaziozkoak. Lotura hauek ere holonomoak dira.

- Denetara, bada, hiru koordenatu orokortuz defini dezakegu hagaxkaren posizioa:

x eta y grabitate-zentruaren koordenatuak,

θ hagaxkaren orientazioa.

- Baina oraindik beste bi lotura ditugu:

- 1.- Hagaxkaren muturrak (A-k) horma ukitzen du etengabe. Berez, lotura unilaterala da, hau da, $x_A \leq a$; baina lotura hori etengabe dagoela kontsideratzean, bilateraltzat jo dezakegu problema honetan $x_A = a$. Eta x, y, θ koordenatuen bidez jarritz:

$$x + \frac{l}{2} \cos \theta = a .$$

Lotura hau holonomoa da.

- 2.- Hagaxkaren puntu batek (0 delakoak) mahaiertza ukitzen du. Honi buruz ere lehengo ohar berbera egin dezakegu, eta honela agertuko zaigu lotura holonomo hau:

$$-\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta .$$

Bestalde, marruskadurarik ez dagoenez, lotura horiek idealtzat hartuko ditugu. Horrela izanik, zilegi da lan birtualen printzipioa erabiltzea edo eta, grabitatearen eraginpe hutsean gabiltzanez, Torricelli-ren teorema erabiltzea.

Loturak kontutan hartuz, 3 askatasun-graduri bi loturen baldintzak jarritz, askatasun-gradu bakar bat geratzen zaigu. Sinplifikatzeko, θ delakoa hartuko dugu koordenatu orokortu bakartzat. Izan ere, θ definituz eta loturak ba direla onartuz, guztiz definiturik eta zehazturik geratzen da hagaxkaren posizioa.

Grabitate-zentruaren koordenatu bertikala θ -ren funtzioan ipiniz,

$$z_G = \frac{l}{2} \sin \theta - a \operatorname{tg} \theta .$$

Torricelliren teorema erabiliz,

$$\frac{\partial z_G}{\partial \theta} = \frac{l}{2} \cos \theta - \frac{a}{\cos^2 \theta} = 0 .$$

Azkenik, oreka-posizioan baldintza hau betetzen dela dakusagu:

$$\cos^3 \theta = \frac{2a}{l} .$$

Honela, ba, lortu egin dugu problemaren planteamenduan eskatutako hagaxkaren oreka-posizioa.

1.4. LOTURA-INDAR OROKORTUAK. LAGRANGE-REN BIDERKATZAILEEN METODOA

Estatika Analitikoa aztertzen hastean, lotura-indarrak ezezagunak direla ikusi izan dugu. Lotura-indarrek sortzen duten problema gainditzeko, indar hauek formulaziotik kentzea komeni zaigula ikusi dugu, eta izan ere, horixe da prezeski egin duguna, lotura idealak kontsideratuz eta hortik lan birtualen printzipioa lortuz.

Hala ere, batzutan indar horiek ezagutzea komeni zaigu eta orduan aipaturiko metodoa antzu gertatzen zaigu. Dena dela, puntu honetan ikusiko dugunez, aldakuntza matematiko txiki batzu eginez, erraz egoki dezakegu aurreko metodoa, lotura-indarrak kalkulatu ahal izateko, lotura holonomoen kasuan.

1.4.1. Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa lotura holonomoen kasuan

Demagun m lotura holonomotan egiten diren lotura-indarrak kalkulatu nahi ditugula. Lotura horiek kontsideratuz, sistemak n askatasun-gradu ditu. Beraz, sistema osoa n koordenatu orokorturen bidez defini daiteke:

$$q_j, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Demagun orain, lotura holonomo horiek ez ditugula kontsideratzen. Askatasun-gradu gehiago edukiko ditu sistemak, noski: $(n + m)$ hain zuzen ere. Eta hauek definitzeko, $(n + m)$ koordenatu orokortu hartu beharko ditugu:

$$q_k, \quad (k = 1, \dots, n + m).$$

Har ditzagun koordenatu hauek, lehenengo n koordenatuak, q_j ($j = 1, \dots, n$), aurreko kasuko berberak izanik.

Azter dezagun sistemaren estatika q_k horien bidez. Zer esanik ez, q_k horiek guztiok ez dira elkarren independenteak, beren artean m lotura holonomo baitaude. Lehenengo n koordenatuak $-q_j$ direlakoak alegia—horiek bai, ordea; horiek independenteak dira.

Loturak holonomo izanik, q_k koordenatuen artean m lotura-ekuazioak daude:

$$f_l(q_k, t) = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (1.38)$$

Diferentziaturik, hauxe geratzen zaigu:

$$\sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial f_l}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} dt = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (1.38)$$

Ondoko nomenklatura erabil dezakegu,

$$\frac{\partial f_l}{\partial q_k} = a_{lk}, \quad \frac{\partial f_l}{\partial t} = b_l,$$

eta honelaxe geratzen zaigu:

$$\sum_k a_{lk} dq_k + b_l dt = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (1.39)$$

Desplazamendu birtualak kontsideratuz, $\delta t = 0$ denez:

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (1.40)$$

Hauexek dira beraz, q_k koordenatu orokortuen artean dauden erlazioak. Hau kontutan edukiz, has gaitezen berriro lan birtualen printzipioa aztertzen. (1.17) adierazpenetik:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Eta posizio-bektoreak transformazio-ekuazioez q_k koordenatuen funtzioan ipiniz, (1.23) adierazpena honelaxe geratzen zaigu:

$$\sum_k Q_k \delta q_k = 0. \quad (1.41)$$

Baina hemen, aurretik ikusi dugun bezala, δq_k direlakoak ez dira independenteak, (1.40) adierazpenaren arauera loturik baitaude. Eta beraz, ezin esan dezakegu, Q_k indar orokortuak nuluak direnik.

Kontsidera dezagun berriro (1.40) adierazpena eta biderka dezagun horko ekuazio bakoitza λ_l parametroaz. Hauxe geratzen da:

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (l = 1, \dots, m). \quad (1.42)$$

Eta ekuazio guztien batura eginez,

$$\sum_{l=1}^m \lambda_l \sum_{k=1}^{n+m} a_{lk} \delta q_k = 0, \quad (1.43)$$

(1.41) eta (1.43) ekuazioen batura eginez,

$$\sum_k Q_k \delta q_k + \sum_l \lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{n+m} \left(Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0 . \quad (1.44)$$

Orain arte ez dugu aipatu ere egin, λ_l parametroak nolakoak diren; edo hobeki esateko, (1.42) adierazpena bete dadin, edonolakoak izan daitezkeela esan dezakegu. Edonolakoak izan daitezkeenez, guri komeni zaigun erakoak izan daitezen behartuko edo prestatuko ditugu.

Dena den, aldeaz aurretik esan behar dugu, ezen, berez λ_l hauek denboraren funtzioak ere izan daitezkeela, q_k koordenatuak diren bezala.

Puntu honen hasieran esan dugunez, q_k guztiak ez dira independenteak. Ostera, lehen n koordenatuak ($k = 1, 2, \dots, n$) independenteak dira, eta beste m koordenatuek ($k = n+1, \dots, n+m$) haien dependentzia dute lotura-ekuazioen bidez. Beraz, (1.44) adierazpena hartuz, ondoko pausoak emanen ditugu:

- Denetara m parametro λ_l ditugunez eta hauek edonolakoak izan daitezkeenez, doitu egingen ditugu, ondoko ekuazioak bete daitezen:

$$Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 , \quad (k = n+1, \dots, n+m) . \quad (1.45)$$

Doiketa hori posiblea da, m baldintza independente eta m parametro ditugu eta.

- (1.45) betetzean, honela geratzen da (1.44):

$$\sum_{k=1}^n \left(Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k = 0 . \quad (1.46)$$

Eta geratzen diren δq_k desplazamenduak ($k = 1, 2, \dots, n$) independenteak direnez, (1.46) posible izan dadin, zera bete behar da:

$$Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.47)$$

- (1.45) eta (1.47) batera hartuz

$$Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0, \quad (k = 1, \dots, n+m). \quad (1.48)$$

Hau da, denetara $(n+m)$ ekuazio geratzen zaizkigu estatikaren baldintzak betetzeko. Ongi aztertuz, ekuazio hauek (1.24) direlakoen parekideak dira. Dena den, gure kasu honetan $(n+2m)$ ezezagun ditugu:

$$q_k, \quad (k = 1, \dots, n+m),$$

$$\lambda_l, \quad (l = 1, \dots, m).$$

Beraz, (1.48) ekuazio-sistema ebazteko, beste m ekuazio behar ditugu. Horretarako lotura-ekuazioak ditugu, denetara m hain zuzen ere:

$$f_l(q_k, t) = 0, \quad (l = 1, \dots, m).$$

Horrela, ba, $(n+2m)$ ekuazio eta $(n+2m)$ ezezagun geratzen zaizkigu. Sistema osoa ebatziz, batetik indar orokortuak eta bestetik λ_l parametroak lortzen ditugu. λ_l parametroei *Lagrange-ren biderkatzaileak* deritze eta erabili dugun metodo matematikoari, *Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa* deritzo. Dena den, orain arte ez dugu ezer esan λ_l parametroen esangura fisikoaz eta horixe da, hurrengo puntuan egingo duguna.

1.4.2. Lotura-indarren kalkulua

Azter dezagun, ba, Lagrange-ren biderkatzaileen esangura fisikoa. Ikusiko dugunez, oso loturik daude lotura-indar orokortuekin. Demagun, orain ere 1.4.1. puntuko sistema mekaniko berbera aztertzen ari garela. Eta kontsidera dezagun problema teoriko hau gertatzen dela, ondoko baldintzak betez:

- n askatasun-gradu dituen sistemari, m lotura holonomo kentzen

dizkiogu. Horrela $(n+m)$ askatasun-gradurekin geratzen da. Lehengo $q_1, \dots, q_n$ koordenatu orokortuak ez dira orain nahiko izango eta horregatik beste batzu hartu beharko ditugu kontutan, $q_{n+1}, \dots, q_{n+m}$ alegia. Beraz, denetara ondoko koordenatuak izango ditugu:

$$q_k, \quad (k = 1, \dots, n+m).$$

- Loturen ordeztu indar batzu jarriko ditugu sisteman eragiten, edozein unetan lehengo lotura-indarren berdina direnak:

$$F_i' = f_i^{(1)}, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Honela izanik, sistemako partikulek lehengo loturekin pairatzen zizuten indar berberak jasaten dituzte. Eta ondorioz, sistema ideal berri honen higidura —edo oreka— lehengo sistema errealarena bezalakoa da.

Azter ditzagun, ba, sistema horren estatikaren baldintzak eta, denbora berean, konpara ditzagun Lagrange-ren biderkatzaileen metodoaz lortutakoekin.

Denetara $(n+m)$ askatasun-gradu daudenez eta hauek q_k koordenatuen bidez adierazten direnez, (1.23) adierazpena honela geratuko zaigu kasu honetan:

$$\sum_{k=1}^{n+m} Q'_k \delta q_k = 0. \quad (1.49)$$

Kasu honetako indar orokortuek bi jatorri desberdin dituzte eta horregatik honela bana daitezke:

$$Q'_k = Q_k + Q_k^{(1)}. \quad (1.50)$$

Hemen, sinbolo bakoitzak zera adierazten du:

Q_k : Loturak dituen sisteman kanpo-indarren kausaz lortzen den indar orokortua. Beraz, (1.22) adierazpenaren arauera:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} . \quad (1.51)$$

$Q_k^{(1)}$: Orain aztertzen ari garen sisteman lotura-indarren berdinak diren indarren ($\mathbf{F}_i'$ direlako) kausaz sortzen diren indar orokortuak. Beraz

$$Q_k^{(1)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i' \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_i \mathbf{f}_i^{(1)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} . \quad (1.52)$$

Zer esanik ez, hemen agertzen diren lotura-indarrak, kendutako loturei dagozkienak dira soilik.

(1.49) adierazpena honela geratzen zaigu

$$\sum_{k=1}^{n+m} (Q_k + Q_k^{(1)}) \delta q_k = 0 . \quad (1.53)$$

Baina orain δq_k desplazamendu guztiak independenteak dira, beren artean ez baitago loturarik. Beraz, oreka posible izan dadin, hauxe bete behar da:

$$Q_k + Q_k^{(1)} = 0 , \quad (k = 1, \dots, n+m) . \quad (1.54)$$

Eta lehentxoago esan dugunez, 1.4.1. eta 1.4.2. puntuetan aztertzen ari garen bi sistema mekanikoen oreka-baldintzak berberak dira. Beraz, (1.54) ekuazioak eta (1.48) direlakoak baliokideak dira. Azken hauek, ondokoak dira:

$$Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 , \quad (k = 1, \dots, n+m) .$$

Honelatan, ba, bi ekuazio-sistemak konparatuz, ondorio honetara heltzen gara:

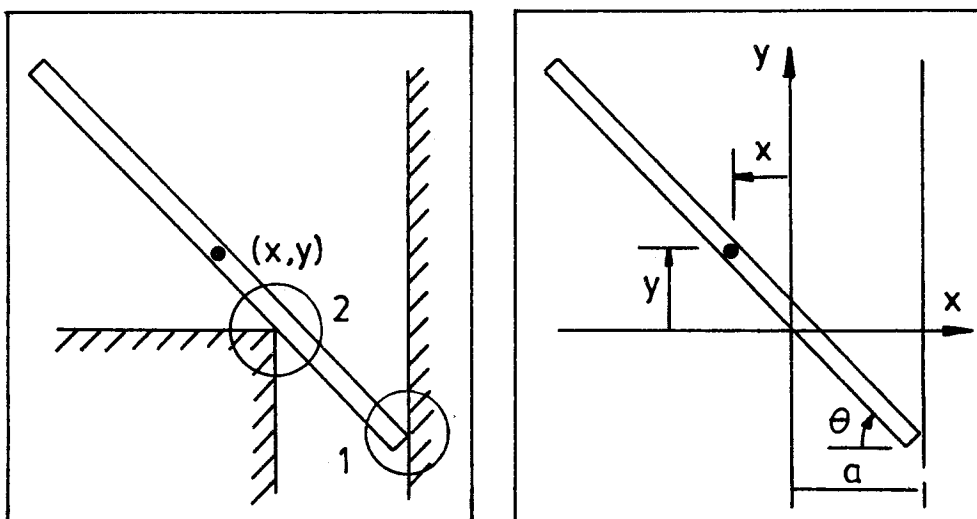
$$Q_k^{(1)} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}, \quad (k = 1, \dots, n+m), \quad (1.55)$$

hau da, lotura-indar orokortuak $-Q_k^{(1)}$ direlakoak— Lagrange-ren biderkatzaileen bidez determina daitezke. λ_l parametroek informazio osotzaile hau ematen digute, eta lan birtualen printzipioan galtzen den informazioa errekupeatzeko balio dute. Bestela esanik: Lan birtualen printzipioaren bidez, kendu egiten ditugu formulaziotik lotura-indarrak, baina denbora berean lotura-indarrei buruzko informazioa galtzen dugu; oster, Langrage-ren biderkatzaileen metodoaren bidez, berriro ere kalkula ditzakegu lotura-indar orokortuak, eta hauek ezagutuz, lotura-indarrak ere bai ((1.52) adierazpenaren bidez). Azken pauso hau, hots, lotura-indar orokortuen interpretazioa, adibide baten bidez egingo dugu.

1.4.3. Adibidea

Kontsidera dezagun berriro lehengo hagaxka berbera (ikus 1.3.4. puntua) eta saia gaitezen, loturetan egiten diren indarrak kalkulatzera.

Berez, sistema mekaniko osoak askatasun-gradu bat du soilik ($n = 1$). Eta bi loturetako lotura-indarrak aztertuko ditugu, 1 eta 2 loturetakoak hain zuzen ere ($m = 2$).



Lagrangeren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko, lotura horiek ez baileuden aztertu behar dugu problema. Horrela, ba, hiru askatasun-gradu geratuko zaizkigu ($n+m = 3$) eta hiru koordinatu orokortu kontsideratu beharko ditugu:

$$q_k \longrightarrow x, y, \theta .$$

Azter ditzagun, koordenatu orokortuen arteko lotura-ekuazioak. Aurreko adibidean ikusi dugunez:

$$1. \text{ lotura: } x + \frac{l}{2} \cos \theta - a = 0 .$$

$$2. \text{ lotura: } y + x \operatorname{tg} \theta = 0 .$$

Lotura-ekuazio hauek diferentziazatuz eta desplazamendu birtualen funtzioan jarriz,

$$\delta x - \frac{l}{2} \sin \theta \delta \theta = 0 .$$

$$\delta y + \operatorname{tg} \theta \delta x + \frac{x}{\cos^2 \theta} \delta \theta = 0 .$$

Bi ekuazio hauek λ_1 eta λ_2 parametroez biderkatuko ditugu. Modu berean, a_{ik} koefizienteak identifika ditzakegu:

$$a_{1x} = 1 ,$$

$$a_{2x} = \operatorname{tg} \theta ,$$

$$a_{1y} = 0 ,$$

$$a_{2y} = 1 ,$$

$$a_{1\theta} = \frac{l}{2} \sin \theta ,$$

$$a_{2\theta} = \frac{x}{\cos^2 \theta} .$$

Bestalde, kanpo-indar bakarrak grabitatearenak dira. Hori dela eta, erraz kalkula ditzakegu indar orokortuak:

$$V = m g y ,$$

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_j} , \longrightarrow$$

$$Q_x = 0 ,$$

$$Q_y = - m g ,$$

$$Q_\theta = 0 .$$

Beraz, (1.48) eta (1.37) ekuazioak honelaxe geratzen zaizkigu:

$$x \text{ koordenatua:} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{tg} \theta = 0 ,$$

$$y \text{ koordenatua:} \quad -m g + \lambda_2 = 0 ,$$

$$\theta \text{ koordenatua:} \quad -\lambda_1 \frac{l}{2} \sin \theta + \lambda_2 \frac{x}{\cos^2 \theta} = 0 ,$$

$$1. \text{ lotura:} \quad x + \frac{l}{2} \cos \theta - a = 0 ,$$

$$2. \text{ lotura:} \quad y + x \operatorname{tg} \theta = 0 .$$

$n + 2m = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ ekuaziotako sistema hau ebatzirik, oreka-posizioan x, y, θ koordenatuek eta λ_1, λ_2 parametroek hartzen duten balioa kalkula daiteke.

Oreka-posizioa aurreko adibidean kalkulatu dugunez, orain λ_1 eta λ_2 parametroak kalkulatzeari interesatzen zaigu, modu honetan lotura-indarrak lortzeko. Lehenengo bi ekuazioetatik zuzenki lortzen dira:

$$\lambda_1 = -m g \operatorname{tg} \theta ,$$

$$\lambda_2 = m g .$$

Dakigunez, honelaxe lortzen dira lotura-indar orokortuak (1.55) delakoaren arauera:

$$Q_k^{(1)} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} .$$

Eta $Q_k^{(1)} \delta q_k$ biderkadurak lanaren dimentsioak dituenenez, ba dakigu ondoko korrespondentzia dagoela:

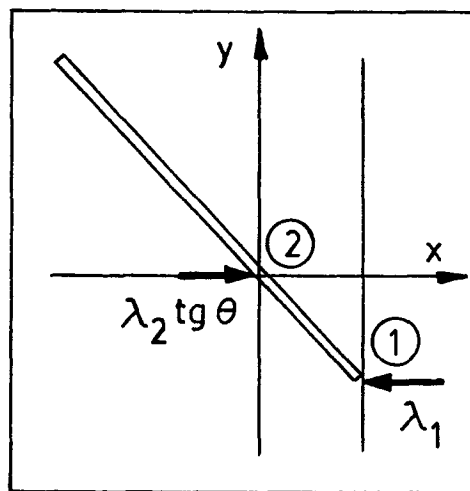
$$-q_k \text{ luzera denean, } Q_k \text{ indarra da.}$$

- q_k angelua denean, Q_k indar-momentua da.

Azter dezagun ba, x koordenatuari dagokion lotura-indar orokortua:

$$Q_x^{(1)} = \lambda_1 + \operatorname{tg} \theta \lambda_2 = 0 .$$

Ikus dezagun termino bakoitzaren esangura zein den



$$\lambda_1 = -m g \operatorname{tg} \theta$$

1. loturan egiten den indar orokortua x koordenatuaren norabidean. Eta x koordenatua luzera bat denez, indar bat da, lotura-indarrak x norabidean duen osagaia, hain zuzen.

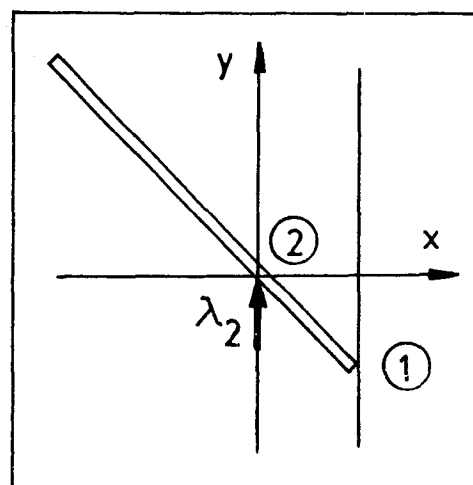
$$\lambda_2 \operatorname{tg} \theta = m g \operatorname{tg} \theta$$

2. loturan sistemari egiten zaion lotura-indar orokortua x koordenatuari dagokionez, indar bat da, lotura-indarrak x norabidean duen osagaia hain zuzen ere.

Ikusten denez, bi indarren batura nulua da.

y koordenatuari dagokion lotura-indar orokortua, ondokoa da:

$$Q_y^{(1)} = \lambda_2 = m g .$$



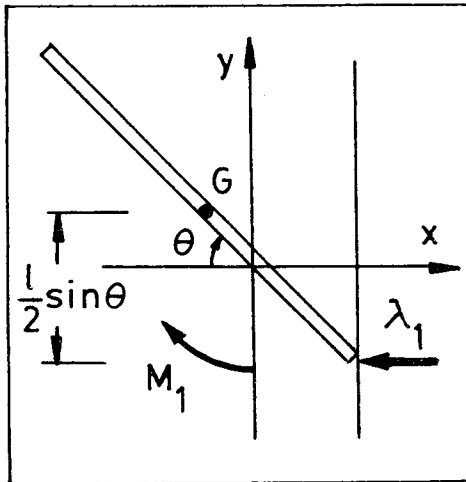
Prezeski, 2. loturan y norabidean egiten den indarra da. 1. loturan ez da lotura-indarririk y norabidean, lotura leuna kontsideratu dugu eta.

Azter dezagun 2. loturan egiten den indar osoa. x eta y norabideetako osagaiak batuz lortzen den erresultantea, hagaxkaren perpendikularra da. Eta horrela behar du izan, ez baitugu marruskadurarik kontsideratu.

Bukatzeko, kontsidera dezagun θ koordenatuari dagokion indar orokortua:

$$Q_{\theta}^{(1)} = -\lambda_1 \frac{l}{2} \sin \theta + \lambda_2 \frac{x}{\cos^2 \theta} = 0 .$$

θ koordenatua angelua denez, lotura-indar orokortu hauek lotura indarren momentuak dira, hain zuzen ere aurretik kalkulatoriko lotura-indarrek grabitate-zentruarekiko duten momentua:



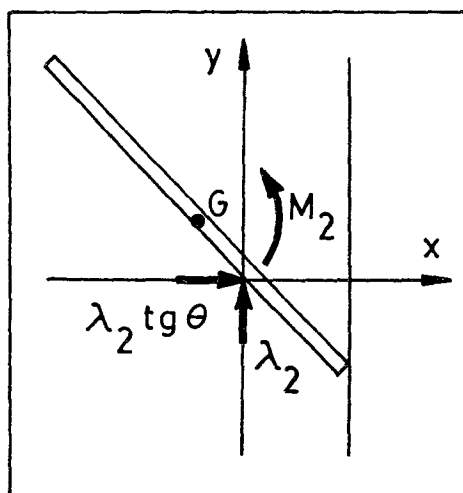
$$-\lambda_1 \frac{l}{2} \sin \theta = M_1$$

M_1 delakoa, 1. loturan egiten den indarrak grabitate-zentruarekiko duen momentua da (hobeki esan, momentuaren modulua):

$$M_1 = m g \tan \theta \frac{l}{2} \sin \theta ,$$

$$M_1 = m g \frac{l}{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} .$$

M_1 positiboa da, θ angeluaren norantza baitu.



$$M_2 = \lambda_2 \frac{x}{\cos^2 \theta} = m g \frac{x}{\cos^2 \theta}$$

Erraz ikus daitekeenez, M_2 hau ere, 2. loturan egiten diren lotura-indarren momentua da. Momentuaren modulua hauxe da:

$$\tau = -\lambda_2 \operatorname{tg} \theta y - \lambda_2 (-x) ,$$

eta $\operatorname{tg} \theta$ delakoaren balioa erabiliz:

$$\tau = \lambda_2 \operatorname{tg} \theta x \operatorname{tg} \theta + \lambda_2 x ,$$

$$\tau = \lambda_2 x (\operatorname{tg}^2 \theta + 1) =$$

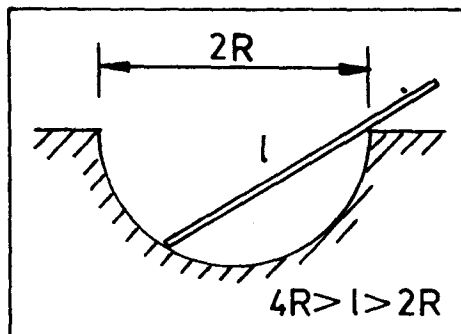
$$= \lambda_2 \frac{x}{\cos^2 \theta} = M_2 .$$

Beraz, kasu honetan ere, lotura-indarrek grabitate-zentruarekiko duten momentua da.

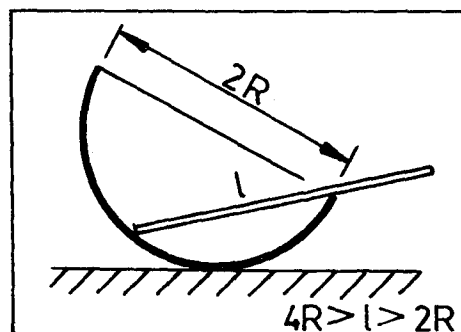
ARIKETAK

- 1.- Lor bitez, mahai gainean errotatzen ari den bilar-bola baten lotura-baldintzak. Loturak zein eratakoak diren azal.

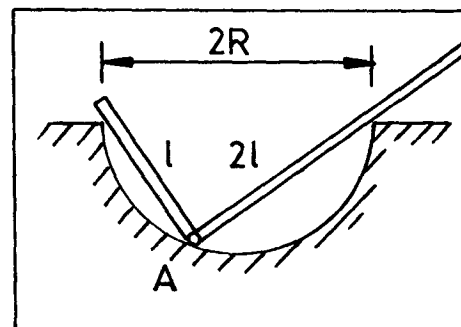
- 2.- Lor bedi irudiko hagaxkaren oreka-posizioa. Loturetan ez dago marruskadurarik.



- 3.- Demagun, R erradioko katilu semiesferikoan l luzerako hagaxka bat jartzen dugula. Katiluak eta hagaxkak masa berbera dute: m . Ez dago marruskadurarik. (ikus irudia). Lor bedi sistemaren oreka-posizioa.

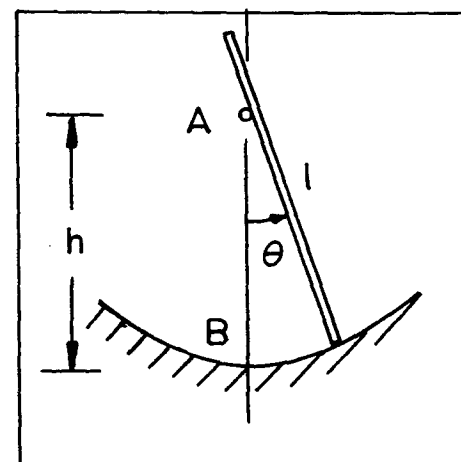


- 4.- l eta $2l$ luzera duten bi hagaxka homogeno, (A) errotula baten bidez loturik daude. Zulo semiesferiko batetan jartzen dira, inolako marruskadurarik gabe. Kalkula bedi bi hagaxken sistemaren oreka posizioa.



- 5.- l luzerako hagaxka, plano bertikal batetan highi daiteke, A puntuan tinkaturik dagoen iltze horizontal batetan etengabe apuiatuz eta beraren muturra B puntutik iragaten den kurba baten gainean marruskadurarik gabe dagoela, irudian adierazten den bezala.

Lor bedi euste-kurbaren ekuazioa, oreka indiferentea izan dadin.



6.- Froga bedi ezen

a) 1.3.4 puntuan aztertutako sistema mekanikoaren oreka, ezegonkorra dela.

b) 2. problemako sistemaren oreka, egonkorra dela.

7.- Lor bitez 2. problemako lotura-indarrak, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz.

2. GAIA

LAGRANGE-REN DINAMIKA

- 2.1. D' Alembert-en printzipioa. Lotura idealak.
- 2.2. Lotura holonomoak. Lagrange-ren ekuazioak.
- 2.3. Eremu kontserbakorrak. Sistemaren lagrangearra
- 2.4. Potentzial orokortuak.
- 2.5. Indar iraungikorrak. Rayleigh-en funtzioa.
- 2.6. Lotura ez-holonomoak eta Lagrange-ren biderkatzaileak.
- 2.7. Laburpena.
- 2.8. Higidura inpultsiboa.
- 2.9. Lagrange-ren ekuazioen kobariantzia formala.
- 2.10. Momentu orokortuak. Koordenatu ziklikoak.
Routh-en metodoa.
Adibideak. Ariketak.

Partikulen sistemak aztertzen jarraitzearren, gai honetan beraien Dinamikaz arduratuko gara, aurrekoan Estatikaz baino ez baikara ari izan.

Zernolako Dinamika eraiki nahi dugun galde diezaiekegu geure buruei. Jakina, ez da izango, gure abiapuntutzat aukeratua dugun Newton-en Mekanika bektoriala, baizik eta lehen gaian ikusi ditugun abantailak dituen formulazio bat, Dinamika Analitikoa deitzen dena, hain zuzen ere. Beronek Estatika edukiko du kasu berezi bezala, noski.

Koordenatu orokortuen sistema guztietan itxura formal berbera azaltzen digun eta lotura-indarrak gabeko formulazioa lortzeko, Estatikaren kasuan lan birtualen printzipioaz baliatu gara. Baina, agerian dagoenez, ezin erabil dezakegu printzipio hori Dinamikaren arloan. Dena dela, ez zaigu zaila gertatuko, Dinamikaren kasurako aplikatu daitekeen orokorpenera aurkitzea.

Beraz, lehenago bezalaxe lotura idealetara mugatuz, gure lehen pausoa D'Alembert-en printzipioa finkatzea izango da. Ondoren, lotura holonomoetako kasuan, Lagrange-ren ekuazioak ezarriko ditugu, jarraian sistema-mota berezi batzutat iharduteko, hots, sistema kontserbakorrez, funtzio potentzial orokortua duten sistemez eta sistemaren gainean, denbora berean, indar kontserbakorrek eta iraungikorrek eragiten duteneko kasuez.

Horren ostean, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa Dinamikara hedatuko dugu, lotura ez-holonomoren batzuei formalismoan sar daitezkeen eta lotura-indarren balioa kalkulatzeko gai izan gaitezkeen. Ordurarte ikusitakoaren laburpena egin ondoren, inpultsuarengatik higiduraren ekuazioak ikusiko ditugu. Geroago, koordenatu orokortuen aldaketei buruzko zenbait ohar egingo dugu. Azkenik, momentu orokortuak eta koordenatu ziklikoak zer diren esan ondoren, Routh-en metodoaz ari izango gara, adibide eta ariketa batzuei ipinuz bukatuz.

2.1. D'ALEMBERT-EN PRINTZIPIOA. LOTURA IDEALAK

Biz aztertu nahi dugun sistemaren i partikula. Inertzi sistema batetan, berorren higidura-ekuazioa hauxe dugu:

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} \equiv \dot{p}_i \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.1)$$

non F_i , partikularen gainean eragiten duen indar erresultantea den eta $p_i = m_i v_i$ partikularen momentu lineala.

Ekuazio hau beste era batetara idatz daiteke:

$$F_i - \dot{p}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (2.2)$$

Egin dugunak, aldakuntza matematiko hutsa badirudi ere, ba du interpretazio fisiko argi eta zehatza. Hasierako inertzi sisteman ari izan beharrean, azter dezagun arazoa, i partikularekin loturik doan erreferentzi sisteman, berorren ardatzek hasierakoen paraleloak irauten dutelarik. Begi bistan dagoenez, sistema berrian i partikula geldirik dagoenez gero, arazo dinamikoa estatiko bihurtu da. Baina, orokorki sistema berria inertziala ez dela kontutan harturik, inertzi indarra kontsideratu behar dugu, mekanikaren ekuazioen tankera gordetzeko. Dakigunez, kasu honetan, agertzen zaigun inertzi indarrak $-\dot{p}_i$ balio du.

Honela, ba, arazo estatiko batez ari garenez gero, aurreko gaiaren metodoa erabil dezakegu. Desplazamendu birtualak harturik eta sistemaren partikula guztien kasurako baturik,

$$\sum_{i=1}^N (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 . \quad (2.3)$$

Indar erresultantea ondoko modura banatzen dugu, ohi bezala,

$$F_i = f_i^{(l)} + F_i^{(k)} \quad (i = 1, \dots, N) , \quad (2.4)$$

non $f_i^{(l)}$ lotura-indarrak diren eta $F_i^{(k)}$ gainerakoak, kanpo-indar deritzegunak hain zuzen.

Lotura leunez, solido zurrunen loturez edo, orokorkiago, lan birtualik egiten ez duten loturez ari izango gara. Beraz, ondoko bi adierazpenak betetzen dira:

$$\sum_{i=1}^N f_i^{(l)} \cdot \delta r_i = 0 , \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(k)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (2.6)$$

Geure lehenengo helburua lortua dugu. Lotura-indarrak ez dira formalismoan agertuko hemendik aurrera. Horregatik, (k) gainindizea kendu egin dezakegu, nahasteren beldurrik gabe, kanpo-indarrak besterik ez baititugu kontutan hartuko, kontrakoa espreski esan ezik. Oñdoko erara, ba, idatz dezakegu lorturiko emaitza:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (2.7)$$

D'Alembert-en printzipioa deritzo honi. Printzipio honetan agertzen diren desplazamendu birtualak, gehienetan, independenteak ez direnez gero, koordenatu orokortuetara iragan beharko dugu.

2.2. LOTURA HOLONOMOAK. LAGRANGE-REN EKUAZIOAK

Suposa dezagun kontsideratzen ditugun loturak idealak eta holonomoak direla. Dakigunez, koordenatu orokortuetara iragateko, ondoko transformazio-ekuazioak erabili ohi dira:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, n) , \quad (2.8)$$

non N partikulen zenbakia eta $n = 3N - k$ diren. n zenbakiak sistemaren askatasun-graduak adierazten ditu, zeren eta

$$f_l(\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad (l = 1, \dots, k) , \quad (2.9)$$

lotura holonomoen ekuazioak direla onartu baitugu.

(2.8) adierazpenetik, baliagarriak gertatuko zaizkigun ondoko berdintzak lortzen dira:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} , \quad (2.10)$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (2.11)$$

zeren desplazamendu birtualak denboraz landa gertatzen baitira.

(2.10) berdintzatik,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.12)$$

Bestalde, (2.8) kontutan harturik,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \mathbf{r}_i}{dt}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.14)$$

transformazio-ekuazioek erregulartasun-baldintza egokiak betez gero.

Aurreko gaiaren arauera definituko ditugu indar orokortuak:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.15)$$

Bestalde, ondoko erara definitzen dugu energia zinetikoa:

$$T(\dot{q}_j, q_j, t) = T(\dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right). \quad (2.16)$$

Hau guztiau egin ondoren, ipin dezagun D'Alembert-en printzipioa, koordenatu orokortuetan. Berorren lehenengo gaia honelaxe geratzen zaigu:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j, \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j. \quad (2.18)$$

Bigarrenaz, berriz, hauxe egiten dugu:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\
&= \sum_j \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\
&= \sum_j \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j = \\
&= \sum_j \sum_i \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \right] \delta q_j, \quad (2.19)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \quad (2.20)$$

(2.18) eta (2.20) baturik, D. Alembert-en printzipioa lortzen dugu:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ Q_j - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j = 0. \quad (2.21)$$

Koordenatu orokortuak independenteak direnez gero, berauen dezplazamendu birtualak edonolakoak izan daitezke. Beraz, D'Alembert-en printzipioa bete dadin, ondoko n ekuazioak dira baldintza beharrezko eta nahikoak:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (2.22)$$

Hauek, lotura ideal eta holonomoak dituen sistema baten *Lagrange-ren ekuazioak* ditugu.

2.3. EREMU KONTSERBAKORRAK. SISTEMAREN LAGRANGEARRA

Demagun, loturak idealak eta holonomoak izateaz gainera, kanpo-indarrak kontserbakorrak direla, hots, partikulen posizio-bektoreen dependentzia baino ez duen funtzio potentzial bat dagoela:

$$V = V(\mathbf{r}_i) , \quad (2.23)$$

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (2.24)$$

Indar orokortuak:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= - \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] = - \frac{\partial V}{\partial q_j} , \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (2.26)$$

non $V(q_j, t) = V(\mathbf{r}_i)$ den.

Beraz, definizioaren arauera,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (2.27)$$

direla kontutan harturik, eta sistemaren *lagrangearra* modu honetan definiturik,

$$L(\dot{q}_j, q_j, t) = T(\dot{q}_j, q_j, t) - V(q_j, t), \quad (2.28)$$

sistema mekanikoaren (2.22) Lagrange-ren ekuazioak, ondoko bi eratara idatz ditzakegu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.30)$$

Azken hauek, lotura ideal eta holonomoak izanik kanpo-indarrak kontserbakorrak direneko kasuko Lagrange-ren ekuazioak ditugu.

2.4. POTENTZIAL OROKORTUAK

Aurreko puntuaren emaitza orokortzeko asmoz, demagun, loturak idealak eta holonomoak izanik, eta kanpo-indarrak kontserbakorrak izan ez arren, $U(\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i, t)$ funtzio bat dagoela, ondoko adierazpenak betetzen dituen:

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} U - \nabla_{\mathbf{q}} U, \quad (2.31)$$

$$F_{i,k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_{i,k}} - \frac{\partial U}{\partial x_{i,k}} \quad (i = 1, \dots, N; k = 1, 2, 3), \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \text{non} \quad F_{i,1} &= F_{ix}, & F_{i,2} &= F_{iy}, & F_{i,3} &= F_{iz}, \\ x_{i,1} &= x_i, & x_{i,2} &= y_i, & x_{i,3} &= z_i \end{aligned}$$

diren. $U(\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i, t)$ delakoa, *potentzial orokortu* edo eta "*abiaduraren dependentzia duen potentziala*" deitu ohi da.

Ipin ditzagun (2.13) eta (2.14) oraingo gure notazioaz,

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j}, \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial q_j} \quad (2.34)$$

Indar orokortuak honelaxe adieraziko dira:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i,k} F_{i,k} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} = \sum_{i,k} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_{i,k}} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} - \sum_{i,k} \frac{\partial U}{\partial x_{i,k}} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i,k} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_{i,k}} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} \right] - \sum_{i,k} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_{i,k}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_{i,k}} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i,k} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_{i,k}} \frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \sum_{i,k} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_{i,k}} \frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial x_{i,k}} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} \right] \quad (2.35) \end{aligned}$$

Beraz,

$$U(\dot{q}_j, q_j, t) = U(\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i, t) \quad (2.36)$$

definitzen badugu,

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.37)$$

adierazpenak betetzen dira. Kasu honetan, sistemaren lagrangearra honela definiturik,

$$L(\dot{q}_j, q_j, t) = T(\dot{q}_j, q_j, t) - U(\dot{q}_j, q_j, t), \quad (2.38)$$

(2.22) Lagrange-ren ekuazioak ondoko erara agertzen zaizkigu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.39)$$

Baina kontura gaitezen, ekuazio hauek (2.30) ekuazioen itxura formal berbera badute ere, beraien ezberdinak direla, zeren hemen (2.38) adierazpenaren bidez definitu baitugu lagrangearra, (2.28)-ren bidez egin beharrean.

Bukatzeko, ohartxo bat egin behar dugu. Potentzial orokortuen interesa ez da osotasun matematikoaren nahi hutsa, kasu fisiko berezi batzu gure formalismoan sartzeko posibilitatea baizik. Are gehiago, gaur bazterturik eta ia-ia ahantzirik dagoen Weber-en indar elektromagnetikoa Lagrange-ren formalismoan sartzegatik sortu zuen E. Schering-ek kontzeptu hau (ikus Whittaker-en 44. or. eta Goldstein-en 26. or.).

Gaur egunean, Lorentz-en indar elektromagnetikoa, aztertzen ari gareneko formalismoan sartzeko erabil daiteke aipaturiko potentzial orokortua. ϕ potentzial eskalar eta $\mathbf{A}$ potentzial bektorialaren bidez, Lorentz-en indarra honela idatz daiteke:

$$F_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial U}{\partial x_k} \quad (k = 1,2,3) , \quad (2.40)$$

$$\text{non} \quad U = e \phi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.41)$$

den, unitateak c.g.s. sisteman egonik, eta e , indarra pairatzen duen partikularen karga elektrikoa delarik. (Ikus Goldstein-en 26. or. eta Corben-Stehle-ren 85. or.).

2.5. INDAR IRAUNGIKORRAK. RAYLEIGH-EN FUNTZIOA

Berrazter ditzagun (2.22) ekuazioak; hots, demagun loturatzat jo ditugun baldintzak, idealak eta holonomoak direla, baina kanpo-indar guztiak ez direla kontserbakorrak ez eta potentzial orokorturen batetikoak ere, baizik eta bi zatitan bana daitezkeenak,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^U + \mathbf{F}_i^D , \quad (2.42)$$

non $\mathbf{F}_i^U$ kanpo-indar kontserbakorrak edo eta U potentzial orokortua onartzen dutenak diren eta $\mathbf{F}_i^D$ izenekoak gainerakoak, indar iraungikorrak deritzegunak. Orduan, aurreko bi puntuen azterketa berregin ondoren, ondoko erara eratuko zaizkigu sistema honen Lagrange-ren ekuazioak:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^D \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (2.43)$$

L lagrangearra aurreko (2.16), (2.36) eta (2.38) adierazpenen bidez definiturikoa delarik, eta

$$Q_j^D = \sum_{i=1}^N F_i^D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.44)$$

indar iraungikor orokortuak izanik.

Baina, egin dugunak, ba ote dauka interesik? Bai, kasu berezi batzutan behintzat. Zeintzu dira indar iraungikorrak? Marruskadurazkoak, jakina, beste indar ezagun guztiak lotura ideal nahiz potentzial orokortuetatikoak baitira, Mekanika Klasikoaren arloan. Baina oztopo bat agertzen zaigula erraz ikus dezakegu. Arazo dinamikoa (2.41) ekuazioen bidez ebazteko, sistemaren higidura ezagutu aurretik, indar iraungikorren balioa ezagutu behar dugu, eta berau ezina gertatuko da, bi gainazalen arteko marruskaduraz ari bagara. Dena dela, ba daude ezagutza hori posiblea deneko kasu batzu. Adibiderik ezagunena, Rayleigh-en iraungipen-funtzioa dateke. Kasu honetan, i partikularen gainean eragiten duen indar iraungikorra, honelakoa da:

$$F_{i,k}^D = -k_{i,k} \dot{x}_{i,k} \quad (k = 1,2,3) \quad (2.45)$$

Beraz, *Rayleigh-en iraungipen-funtzioa* defini dezakegu, ondoko adierazpenaz:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{i,k} \dot{x}_{i,k}^2 = F(\dot{q}_j, q_j, t) \quad (2.46)$$

$$F_{i,k}^D = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{i,k}} \quad (2.47)$$

$$Q_j^D = \sum_{i,k} F_{i,k}^D \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} = - \sum_{i,k} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{i,k}} \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_j} \quad (2.48)$$

Berriro ere (2.31) adierazpenaz baliatuz,

$$Q_j^D = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.49)$$

Ondorioz, kasu honentzako Lagrange-ren ekuazioak

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.50)$$

ditugunez gero, problema ebazteko bi funtzio ezagutu behar ditugu, L eta F alegia.

Ohar bezala zera esan dezakegu: normalki, $k_{1,k} = k_{2,k} = k_{3,k} = \dots = k_{N,k}$ ditugula.

Bukatzeko, Rayleigh-en iraungipen-funtzioaren esangura fisikoa argitu egingen dugu. W^D sinboloaz, indar iraungikorrek eginiko lana adierazten badugu,

$$dW^D = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^D \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^D \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = - \sum_{i,k} k_{i,k} \dot{x}_{i,k}^2 dt ,$$

$$dW^D = - 2F dt . \quad (2.51)$$

Beraz, Rayleigh-en iraungipen-funtzioa indar iraungikarren kontra sistemak eginiko potentziaren erdia da:

$$\frac{dW^S}{dt} = - \frac{dW^D}{dt} = 2F . \quad (2.52)$$

2.6. LOTURA EZ-HOLONOMOAK ETA LAGRANGE-REN BIDERKATZAILEAK.

2.2. puntuan lotura leunetako sistemarentzako D'Alembert-en printzipioa ezarri ondoren, sistema holonomoez baino ez gara arduratu. Baina, zer esan nahi digu horrek? Bestelako loturez ezin egin dezakegula ezer? Ez, kasu berezi batzutan, bederen, aurreko gaiaren Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa heda eta erabil dezakegu, eta, horrela, zenbait sistema ez-holonomo ere ebatzi ahalko ditugu.

Demagun, N partikulak osoturiko sistema bat. Suposa dezagun,

alde batetik k ($k \leq 3N$) lotura holonomoak daudela,

$$f_l(\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad (l = 1, \dots, k), \quad (2.53)$$

eta, beraz, berauen bidez koordenatu orokortuetara iragan gaitezkeela,

$$q_j = q_j(\mathbf{r}_i, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.54)$$

$n = 3N - k$ delarik. Demagun, gainera, n koordenatu orokortu horien artean m ($m \leq n$) lotura bilateral daudela, ondoko eratakoak:

$$\sum_{r=1}^n a_{pr}(q_j, t) \dot{q}_r + b_p(q_j, t) = 0 \quad (p = 1, \dots, m). \quad (2.55)$$

Orokorki, ekuazio hauek ezin integra ditzakegu, arazo dinamiko osoa ebatzi gabe. Zer egin, bada? Hara. Argi dagoenez, D'Alembert-en printzipioaren (2.21) adierazpena, kasu honetan ere, zilegi da,

$$\sum_{j=1}^n \left\{ Q_j - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j = 0, \quad (2.56)$$

baina, orain, δq_j guztiak independenteak ez direnez gero, ezin eman dezakegu hurrengo pausoa (2.22) ekuazioetara pasatzeko, zeren δq_j direlakoan artean ondoko m erlazioak baititugu:

$$\sum_{r=1}^n a_{pr} \delta q_r = 0 \quad (p = 1, \dots, m). \quad (2.57)$$

Har ditzagun, oraingoz edonolakoak diren denboraren m funtzio $\lambda_p(t)$ ($p = 1, \dots, m$). Lagrange-ren biderkatzaileak deituko ditugu. Agerian dagoenez,

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - \left[Q_j + \sum_{p=1}^m \lambda_p a_{pj} \right] \right\} \delta q_j = 0. \quad (2.58)$$

Orokortasunik galdu gabe, demagun, independente diren $(n - m)$ δq_j desplazamenduak, lehendabiziko $(n - m)$ azpiindizeak dituztenak direla. Hauta ditzagun, orain arte edonolakoak ziren $\lambda_l(t)$ erako m biderkatzaileak, ondoko m ekuazioak bete daitezen eran:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - [Q_j + \sum_p \lambda_p a_{pj}] = 0 \quad (j = n - m + 1, \dots, n) . \quad (2.59)$$

Beraz, (2.58) honelaxe geratzen zaigu:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - [Q_j + \sum_{p=1}^m \lambda_p a_{pj}] \right\} \delta q_j = 0, \quad (2.60)$$

eta hemen agertzen zaizkigun δq_j desplazamenduak independenteak direnez gero,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - [Q_j + \sum_{p=1}^m \lambda_p a_{pj}] = 0 \quad (j = 1, \dots, n - m) . \quad (2.61)$$

Beraz, (2.59) eta (2.61) batera hartuz, gure sistemaren Lagrange-ren ekuazioak ondokoak dira:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{p=1}^m \lambda_p a_{pj} \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (2.62)$$

Berauek, ondoko m ekuazioekin batera,

$$\sum_{j=1}^n a_{pj} \dot{q}_j + b_p = 0 \quad (p = 1, \dots, m) , \quad (2.63)$$

$(n + m)$ ekuazio diferentzial dira, $(n + m)$ funtzio ezezagun, $q_j(t)$ eta $\lambda_p(t)$, kalkulatzeko nahiko gertatzen zaizkigunak.

Baina, nahi genuena baina informazio handiagoa lortu dugu, $\lambda_p(t)$ funtzioen balioa aurkitzeko gai baikara. Ezertarako balio al digute funtziook? Erantzuna baiezkoa dela erraz kontura gaitzke. Demagun azterturiko lotura ez-holonomoak kentzen dizkiogula sistemari, berorien ordeztu, higidura alda ez dadin beharrezkoak diren Q_j^L kanpo-indarrak erantsiz. Q_j^L direlakoak, kendu ditugun lotura-indarren berdinak dira, noski. Egoera berriko ekuazioak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^L \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.64)$$

aurrekoen berdinak direnez gero, lotura-indarren balioa ondoko adierazpenen bidez aurki dezakegu, ekuazioak ebatzi ondoren:

$$Q_j^L = \sum_{p=1}^m \lambda_p a_{pj}. \quad (2.65)$$

Beraz, lotura-indarren balioa kalkulatzeko gai da gure formalismoa, loturak holonomoak diren kasua barne delarik, zeren lotura holonomoak ere (2.55) modukoak baitira. Demagun, (2.53) moduko k lotura holonomoak kendu ondoren, beste s ($s \leq n$) geratzen direla

$$f_l(q_j, t) = 0 \quad (l = k + 1, \dots, k + s). \quad (2.66)$$

Orduan

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0 \quad (2.67)$$

betetzen da, eta

$$a_{lj}(q_j, t) = \frac{\partial f_l}{\partial q_j}, \quad (2.68)$$

$$b_l(q_j, t) = \frac{\partial f_l}{\partial t} \quad (2.69)$$

eginik, nahi genuen erako lotura-ekuazioak lortzen ditugu:

$$\sum_{j=1}^n a_{lj} \dot{q}_j + b_l = 0 \quad (l = k+1, \dots, k+s) . \quad (2.70)$$

Hortaz, lotura holonomoek sorturiko indarrak ere kalkula ditzakegu, Lagrangeren biderkatzaileen bidez.

2.7. LABURPENA

Nola azter dezakegu sistema dinamikoa ikusi dugun formalismoaren bidez? Hara. Biz N partikulaz osaturiko sistema bat. $\mathbf{r}_i(t)$ funtzioak kalkulatu nahi ditugu. Orokorki, agertzen zaizkigun problemetariko handiena, $\mathbf{F}_i(\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i, t)$ funtzioak ez ditugula osoki ezagutzen dateke.

Gure lehen urratsa, koordenatu orokortuetara iragatea da. Sisteman k lotura holonomoen ekuazioak badaude, hots,

$$f_l(\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad (l = 1, \dots, k) , \quad (2.71)$$

$3N - k = n$ q_j koordenatu orokortu aukera ditzakegu, ondoko transformazio-ekuazioak betetzen dituztenak:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (2.72)$$

Horietaz gainera, beste lotura-ekuazio batzu egon daitezke,

$$\sum_{j=1}^n a_{lj}(q_j, t) \dot{q}_j + b_l(q_j, t) = 0 \quad (l = 1, \dots, m (\leq n)) , \quad (2.73)$$

holonomoak zein ez-holonomoak direnak. Berauek, Langrage-ren biderkatzaileen bidez aztertuko ditugu.

Are lotura gehiago badaude, eta aipaturiko metodoez adieraztezinak badira, edo, arrazoren batengatik, horrela egin nahi ez badugu, eta berorien lotura-indarren tankera funtzionalak aldezturik ezagutuz gero, existituko ez bailiren jo dezakegu eta lotura-indarren balio berbera duten kanpo-indar batzu gehi diezaizkiokegu sistemari, higidura

berbera izan dadin. Lotura-indarrak ezagutu ezik, ezin azter dezakegu sistema, formalismo honen bidez.

Ardura gaitezen indarrez. Idealez gainera beste guztiak kontutan hartu beharko ditugu, eta bai, problema ebazteko gai izateko, bere t , q_j eta $\dot{q}_j$ -ren dependentzia funtzionala ondoko eraren batetara ezagutu beharko ere:

- $V(q_j, t)$ potentzial baten bidez,

$$Q_j^V = - \frac{\partial V}{\partial q_j} .$$

- $U(\dot{q}_j, q_j, t)$ potentzial orokortu baten bidez,

$$Q_j^U = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} .$$

- $F(\dot{q}_j, q_j, t)$ Rayleigh-en funtzioaz,

$$Q_j^F = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} .$$

- Zuzenki, $Q_j^D(\dot{q}_j, q_j, t)$.

Problema ebazteko, azkenik, sistemaren energia zinetikoa adieraziz:

$$T(\dot{q}_j, q_j, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2(\dot{q}_j, q_j, t) , \quad (2.74)$$

hona hemen Lagrange-ren ekuazioak:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^V + Q_j^U + Q_j^F + Q_j^D + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lj} \\ (j = 1, \dots, n) , \quad (2.75)$$

edo eta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^D + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lj} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (2.76)$$

$$\text{non } L(\dot{q}_j, q_j, t) = T - V - U \quad \text{den.}$$

(2.72) nahiz (2.73) ekuazioek, ondokoekin batera

$$\sum_{j=1}^n a_{lj} \dot{q}_j + b_l = 0 \quad (l = 1, \dots, m) , \quad (2.77)$$

permititzen digute sistemaren zinematika kalkulatzeko, $q_j(t)$, eta beraz $\mathbf{r}_i(t)$ funtzioak alegia, hasierako baldintza egokiak ezagutuz gero. Aurreko puntuan esan dugunez, (2.73) moduko loturek sorturiko indarrak ere kalkulatu ahalko ditugu.

2.8. HIGIDURA INPULTSIBOA

Dakigunez, $[t_0, t]$ denbora-tarteko indar baten inpultsua, honelaxe definitu ohi da:

$$\mathbf{I}_{[t_0, t]} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt , \quad (2.78)$$

$\mathbf{F}(t)$ funtzioa ezagutuz gero.

Indarra inpultsiboa dela esanen dugu, baldin zera betetzen bada:

$$\mathbf{I} = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{I}_{[t_0, t]} = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt \neq \mathbf{0} . \quad (2.79)$$

Jakina, horrelako indarririk ez dago Naturan, baina bai baldintza hori

ia-ia betetzen dutenak, hots, oso denbora txikiz eraginez, oso balio handia duten indarrak, partikulen posizioa ia aldatu gabe berorien abiaduren aldakuntza finitua egiten dutenak. Esate baterako, solido zurrunen arteko talketan sortzen diren indarrak aipa ditzakegu.

Honelako indarrak gure formalismoan nola sartzen diren ikusteko, kontsidera dezagun, berriro, D'Alembert-en printzipioa, kanpo-indar batzu inpulstsiboak direla kontutan hartuz:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^I + \mathbf{F}_i^E - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (2.80)$$

Loturak idealak direla onartzen dugu, zer esanik ez. Demagun, $\mathbf{F}_i^I$ indar inpulstsiboek $[t_0, t_0 + \tau]$ denbora tartean eragiten dutela, τ delakoa ondoko adierazpenak bete daitezen nahiko txikia izanez:

$$\mathbf{I}_i = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{F}_i^I dt , \quad (2.81)$$

$$\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{F}_i^E dt = 0 . \quad (2.82)$$

Bestaldetik,

$$\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(t_0 + \tau) - \mathbf{p}_i(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \dot{\mathbf{p}}_i dt , \quad (2.83)$$

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t_0 + \tau) - \mathbf{r}_i(t_0) = 0 \quad (2.84)$$

direnez gero,

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{I}_i - \Delta \mathbf{p}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 , \quad (2.85)$$

$\delta \mathbf{r}_i$ desplazamenduak integrapenean konstanteak baitira. Horixe dugu *Dinamika Inpultsiboarentzako D'Alembert-en printzipioa*. Berau aplikatzeko, kontutan eduki behar da zer-nolakoak diren loturak. (Ikus adibidez, J.M. Iñiguez, 188 or.).

Demagun, k lotura holonomo dagoela eta ez bestelakorik:

$$f_l (\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad (l = 1, \dots, k) \quad (2.86)$$

Koordenatu orokortuetara pasatuz,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i (q_j, t) = 0 \quad (j = 1, \dots, n = 3N - k), \quad (2.87)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.89)$$

$$\Delta \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] dt = \sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.90)$$

zeren $\Delta \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] = 0$ baita, $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ delakoa q_j eta t -ren funtzioa denez gero, kontsideraturiko denbora-tarte infinitesimalean aldatzen ez delako.

Beraz, honelaxe geratzen zaigu D'Alembert-en printzipioa:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ S_j - \Delta \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] \right\} \delta q_j = 0, \quad (2.91)$$

non *inpultsu orokortuak* honela definitu ditugun:

$$S_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.92)$$

Hortaz, hauexek ditugu higidura-ekuazioak:

$$\Delta \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] = S_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.93)$$

edo eta

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]_{t_0 + \tau} - \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]_{t_0} = S_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.94)$$

Jakina, emaitza hau Lagrange-ren ekuazioetatik ere lor daiteke zuzenki. (Ikus, adibidez, Synge & Griffith, 426, or.).

2.9. LAGRANGE-REN EKUAZIOEN KOBARIANTZIA FORMALA

Erreferentzi sistemaren koordenatu cartesiarretatik koordenatu orokortuetara iragaterakoan, ez dugu mugarik ipini azken hauen gainean. Beraz, koordenatu orokortuen aldaketa bat eginez gero, Lagrange-ren ekuazioen tankera formalak berbera izaten irauten du. Jakina, emaitza hau zuzenki ere froga daiteke. (Ikus J.M. Iñiguez, II tomoa, 25. or.; L.A. Pars, 88. or.). Eta hauxe da oraingo formalismoaren abantaila garrantzitsuenetakoa.

Honelatan, bada, oinarritzko ekuazioak aldatu gabe lor ditzakegu higidura-ekuazioak koordenatu ez-cartesiarretan, adibide batetan, koordenatu esferikoez ikusiko dugunez.

Bestaldetik, koordenatu orokortuak, erreferentzi sistema ez-inertzial batenak izan daitezke, zergatik ez, eta inertzi indarrak explizitoki sartu gabe, sistema ez-inertzialarekiko higidura-ekuazioak agertzen zaizkigu, beste adibide batetan frogatuko dugunez.

Higidura erlatiboari buruz, interesgarria da, Landau-ren liburuko 152. orrialdea eta hurrengoak aztertzea.

2.10. MOMENTU OROKORTUAK. KOORDENATU ZIKLIKOAK. ROUTH-EN METODOA.

Har dezagun lotura ideal eta holonomoak dituen sistema dinamiko bat, potentzial orokortua ametitzen duena. Ondoko adierazpenaren bidez definitzen dugu q_j koordenatu orokortuaren *momentu kanoniko konjokatua* edo *momentu orokortua*:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j (\dot{q}_j, q_j, t) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.95)$$

Eman diegun izanaren zergatikoa ikusteko, demagun sistema kontserbakorra dela eta koordenatu orokortuak cartesianak direla, hots, ez dagoela loturarik eta

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_i, y_i, z_i) \quad (2.96)$$

dela. Orduan,

$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{i,x} \quad (2.97)$$

$$p_{y_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i = p_{i,y} \quad (2.98)$$

$$p_{z_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i = p_{i,z} \quad (2.99)$$

Beraz, aztertutako kasuan, momentu orokortuak momentu linealaren osagai cartesianak dira. Baina kasu orokorragoetan berau ez da beteko. Areago, q_j -k luzeraren dimentsioak ez baditu, p_j -k ez ditu momentuarenak. Adibidez, demagun aurreko kasua koordenatu esferikotan,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + r_i^2 \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i^2) - V(r_i, \phi_i, \theta_i) \quad (2.100)$$

$$p_{r_i} = m_i \dot{r}_i \quad [p_{r_i}] = \text{MLT}^{-1} \quad \text{momentu lineala},$$

$$p_{\theta_i} = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i \quad [p_{\theta_i}] = \text{ML}^2 \text{T}^{-1} \quad \text{momentu angeluarra},$$

$$p_{\phi_i} = m_i r_i^2 \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i \quad [p_{\phi_i}] = \text{ML}^2\text{T}^{-1} \quad \text{momentu angeluarra .}$$

Aztertzen ari garen moduko sistema baten q_l koordenatu orokortua ziklikoa edo ahanzkarria dela esaten dugu (guretzat kontzeptu biak guztiz berdinak dira, nahiz eta, batzuren ustez, koordenatu ziklikoa, energia zinetikoan agertzen ez dena, eta ahanzkarria, lagrangearrean agertzen ez dena izan), lagrangearrean agertzen ez denean, hots,

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad (2.101)$$

denean. Beraz, dagokion Lagrange-ren ekuazioa, honelaxe geratzen da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp_l}{dt} = 0 . \quad (2.102)$$

Lehen integral bat lor dezakegu, bada:

$$p_l (\dot{q}_l, \dot{q}_j, q_j, t) = k_l = \text{ktea} , \quad (2.103)$$

non $j = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n$ diren.

Hurrengo gai batetan sakonago aztertuko ditugun kontserbazio-printzipioetariko bat aurkitu dugu: "Koordenatu orokortu baten momentu kanoniko konjokatua, higidura-konstantea da", higidura osoan konstante baitirau.

Honelako koordenatuari ahanzkarri zergatik deritzogun ikusteko, kontutan har dezagun, (2.103) adierazpenetik zera ateratzen dugula:

$$\dot{q}_l = f (\dot{q}_j, q_j, t, k_l) , \quad (2.104)$$

$$L' (\dot{q}_j, q_j, t, k_l) = L (f ; \dot{q}_j, q_j, t) . \quad (2.105)$$

Lortu dugu, ba, lagrangear berri bat, q_l eta $\dot{q}_l$ -ren dependentziarik ez duena. Baina, ez pentsa, orokorki Lagrange-ren ekuazioek lehengo tankera hartzen dutenik lagrangear berriaren bidez. Dena den, Routh eta Helmholtz-ek asmatutako metodoaz, koordenatu ziklikoa osoki ahanz dezakegu, nahi badugu.

Demagun k lehenbiziko koordenatu orokortuak ziklikoak direla,

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad (j = 1, \dots, k \leq n) . \quad (2.106)$$

eta, beraz,

$$p_l (\dot{q}_l, \dot{q}_j, q_j, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = k_l \quad (2.107)$$

adierazpenek permititu egiten digute ondoko

$$\dot{q}_l = \dot{q}_l (\dot{q}_j, q_j, t, k_l) \quad (l = 1, \dots, k ; j = k + 1, \dots, n) \quad (2.108)$$

funtzioak aurkitzea eta *Routh-en funtzioa* izeneko definitzea:

$$R = L - \sum_{l=1}^k \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} , \quad (2.109)$$

$$R (\dot{q}_j, q_j, t, k_l) = L (\dot{q}_l (\dot{q}_j, q_j, t, k_l), \dot{q}_j, q_j, t) - \sum_{l=1}^k \dot{q}_l (\dot{q}_j, q_j, t, k_l) k_l , \quad (2.110)$$

non azken berdintasuna ibilbidean zehar baino ez den betetzen. Beraz, ibilbidean,

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{l=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} , \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} , \quad (2.112)$$

non $j = k + 1, \dots, n$ den.

$$\frac{\partial R}{\partial k_l} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial k_l} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial k_l} k_i - \sum_{i=1}^k \dot{q}_i \frac{\partial k_i}{\partial k_l} = -\dot{q}_l , \quad (2.113)$$

bertan $l = 1, \dots, k$ delarik.

Ibilbidean zehar, bada,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = k+1, \dots, n) , \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} \quad (j = k+1, \dots, n) , \quad (2.115)$$

$$\dot{q}_l = -\frac{\partial R}{\partial k_l} \quad (l = 1, \dots, k) . \quad (2.116)$$

Honela eginik, n askatasun-gradu dituen problema, k koordinatu zikliko edukirik, $n-k$ askatasun-gradu dituen sistema bihur daiteke, ondoko higidura-ekuazioak dituen:

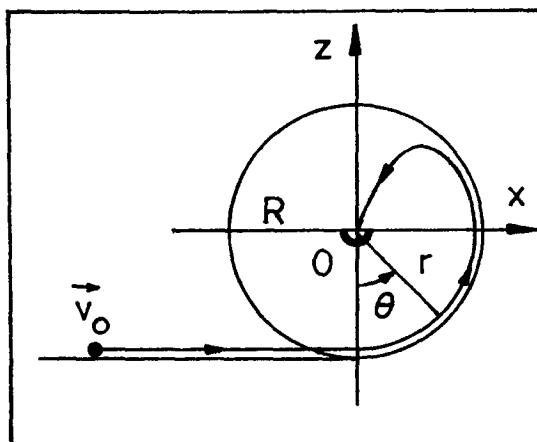
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = k+1, \dots, n) . \quad (2.117)$$

Sistema hau ebatzi ondoren, hots $q_j(t)$ ($j = k+1, \dots, n$) kalkulatu ondoren, koordinatu ziklikoek denborarekiko nolako dependentzia duten aurki daiteke:

$$q_l(t) = q_l(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial k_l} dt \quad (l = 1, \dots, n) . \quad (2.118)$$

1. Adibidea

Zer balio ukan behar du hasierako abiadurak, bola erdiko zuloan sar dadin, irudiko bilar txinoan? Arbuia bitez bolaren erradioa eta marruskadura.



Hasteko, ken dezagun ondoko lotura holonomoa

$$y = 0 ,$$

eta iragan gaitezen r eta θ koordenatu orokortuetara:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta , & r &= \sqrt{x^2 + z^2} , \\ z &= -r \cos \theta , & \theta &= \arctg \left(-\frac{x}{z} \right) , \\ y &= 0 . \end{aligned}$$

Berauek dira transformazio-ekuazioak. Baina oraindik lotura unilateral bat dugu,

$$r \leq R ,$$

eta ez dakigu honelako loturak aztertzen. Dena dela, higidura bi partetan bana dezakegu:

- Lehena, hasieratik bolak bilarreko azala ukitzeari utzi egiten dion arte, $r = R$ lotura holonomoa egonez.
 - Bigarrena, handik erdira heldu arte, r eta θ independenteak direlarik.
- 1.- Bilarreko azala ukitzen dagoen bitartean, bolaren higidura aztertzeko, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoaz baliatuko gara.

$$r = R$$

lotura-ekuazioa deribatuz,

$$\dot{r} = 0$$

(2.55) adierazpenaren antzekoa aurkitzen dugu,

$$m = 1 ,$$

$$a_{11} = 1 ,$$

$$a_{12} = 0 ,$$

$$b_1 = 0$$

direlarik. Bestaldetik,

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - m g z = \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos \theta . \end{aligned}$$

Beraz, (2.76) eta (2.77) higidura-ekuazioak ondokoak ditugu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda_1 a_{1j} \quad (j = 1, 2) ,$$

$$\sum_{j=1}^2 a_{1j} \dot{q}_j = 0 ,$$

edo eta

$$\begin{aligned} q_1 &= r , & m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta &= \lambda_1 , \\ q_2 &= \theta , & m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m g r \sin \theta &= 0 , \\ & & \dot{r} &= 0 \quad (r = R) , \end{aligned}$$

edo baliokideak direnak,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -m (R \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) , \\ R \ddot{\theta} + g \sin \theta &= 0 . \end{aligned}$$

Lotura-indarrak:

$$Q_1^L = \lambda_1 \cdot 1 = \mathbf{F}^L \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F}^L \cdot \mathbf{e}_r = F_r^L = N ,$$

$$Q_2^L = \lambda_2 \cdot 0 = \mathbf{F}^L \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{F}^L \cdot \mathbf{e}_\theta = r F_\theta^L = r R .$$

Hortaz, $\lambda_1 = N$ indar normala da eta marruskadura (R) nulua. Hasierako baldintzak kontutan hartuz:

$$t = 0 , \quad \theta_0 = 0 , \quad \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R} ,$$

eta lehen integrala eginik,

$$N = -m (R \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) ,$$

$$\frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 - g \cos \theta = \frac{1}{2} R \dot{\theta}_0^2 - g .$$

Baldin $t = t_1$ delakoa, bolak azala ukitzeari uzten dioneko aldiunea bada,

$$t = t_1 , \quad N = 0 , \quad R \dot{\theta}_1^2 + g \cos \theta_1 = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} R (\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_0^2) + g (1 - \cos \theta_1) = 0 ,$$

edo eta, beste modu batetara idatziz:

$$R \dot{\theta}_1^2 + g \cos \theta_1 = 0 ,$$

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{3} \theta_0^2 - \frac{2}{3} \frac{g}{R} .$$

- 2.- Heganaldi askearen higidura Lagrange-ren metodoaz azter daiteke, baina ebazpena nabaria denez gero, emaitza baino ez dugu ipiniko:

$$x = x_1 + v_{x1} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = R \sin \theta_1 + R \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 t ,$$

$$z = z_1 + v_{z1} t + \frac{1}{2} a_z t^2 = -R \cos \theta_1 + R \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 t + \frac{1}{2} g t^2 .$$

Eta (0,0) puntutik iragan behar duenez gero,

$$\dot{\theta}_1^2 = -\frac{1}{2} \frac{g}{R} \frac{\sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} .$$

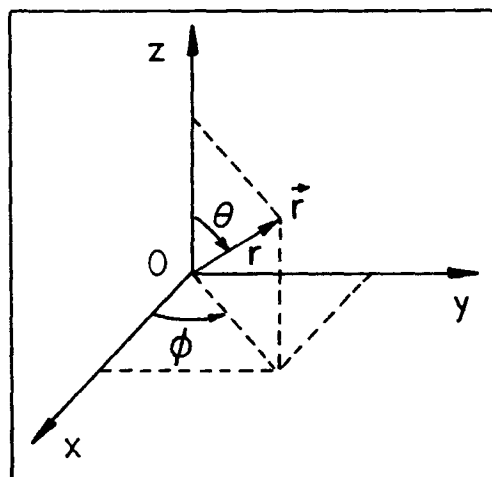
Azkenik, lehen lortu ditugun adierazpenak erabiliz,

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{g}{R} (2 + \sqrt{3})} ,$$

$$v_0 = \sqrt{(2 + \sqrt{3}) g R} .$$

2. Adibidea: Koordinatu esferikoak

Aurki bitez puntu materialaren higidura-ekuazioak sistema inertzial batetan, baina koordinatu esferikoak erabiliz.



Demagun puntuaren gainean eragiten duen indar erresultantea $\mathbf{F}$ dela. Hauexek ditugu transformazio-ekuazioak:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, & \phi &= \arctg \frac{z}{x}, \\z &= r \cos \theta, & \theta &= \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

Beraz,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi, \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2).\end{aligned}$$

Indar orokortuak,

$$\begin{aligned}Q_r &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r = F_r, \\ Q_\theta &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta = r F_\theta, \\ Q_\phi &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r \sin \theta \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\phi = r \sin \theta F_\phi.\end{aligned}$$

Higidura-ekuazioak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = F_r ,$$

$$m (r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} - r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) = r F_{\theta} ,$$

$$m (r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2 r \sin^2 \theta \dot{r} \dot{\phi} + 2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta}) = r \sin \theta F_{\phi} ,$$

edo eta, indarren osagaiak askatuz:

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = F_r ,$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) = F_{\theta} ,$$

$$m (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) = F_{\phi} .$$

Bukatzeko, azelerazioaren osagaiak ipiniko ditugu:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta ,$$

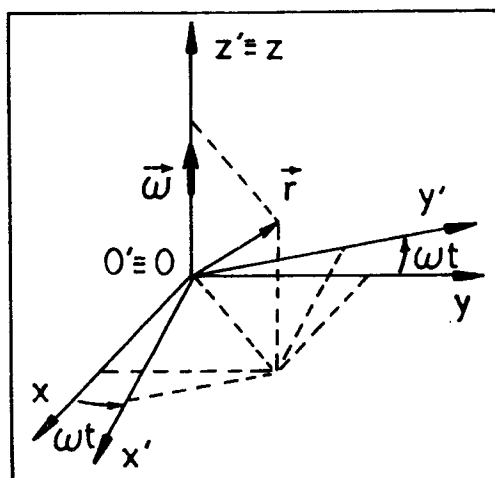
$$a_{\theta} = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta ,$$

$$a_{\phi} = r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta .$$

Dakusagunez, Lagrange-ren ekuazioek, cartesiarrak ez diren koordinatu orokortuetan, azelerazioaren osagaiak eta higidura-ekuazioak aurkitzea permititzen digite.

3. Adibidea: Inertzi indarrak

Bira OXYZ sistema inertziala, eta, beronen O jatorri berbera eta OZ ardatz berbera dituelarik, $\omega = \omega k$ abiadura angeluar konstantez biraka ari den OX'Y'Z'sistema. Azter bitez, puntu materialaren OX'Y'Z'sistema higikorrekiko higidura-ekuazioak.



Transformazio-ekuazioak honako hauek dira:

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t ,$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t ,$$

$$z = z' .$$

Deribatuz, energia zinetikoaren adierazpena lortzen dugu:

$$\dot{x} = \dot{x}' \cos \omega t - \dot{y}' \sin \omega t - x' \omega \sin \omega t - y' \omega \cos \omega t ,$$

$$\dot{y} = \dot{x}' \sin \omega t + \dot{y}' \cos \omega t + x' \omega \cos \omega t - y' \omega \sin \omega t ,$$

$$\dot{z} = \dot{z}' ,$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$T = \frac{1}{2} m [(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + \omega^2 (x'^2 + y'^2) + 2 \omega (x' \dot{y}' - \dot{x}' y')] .$$

Indar orokortuak

$$Q_{x'} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x'} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}' = F_{x'} ,$$

$$Q_{y'} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y'} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{j}' = F_{y'} ,$$

$$Q_{z'} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z'} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}' = F_{z'} .$$

indarrak $OX'Y'Z'$ sisteman dituen osagaiak dira.

Lagrange-ren ekuazioak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, 3) ,$$

era honetara geratzen zaizkigu:

$$m \ddot{x}' - m \omega^2 x' - 2m \omega \dot{y}' = F_{x'} ,$$

$$m \ddot{y}' - m \omega^2 y' + 2m \omega \dot{x}' = F_{y'} ,$$

$$m \ddot{z}' = F_{z'} .$$

$\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ eta $\mathbf{z}'$ bektoreekin errespektiboki biderkatuz eta hiru adierazpenak batuz, zera geratzen zaigu:

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F}' - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}') - 2m \vec{\omega} \wedge \mathbf{v}' ,$$

zeren

$$\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\omega y' \mathbf{i}' + \omega x' \mathbf{j}'$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}') = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y' & \omega x' & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x' \mathbf{i}' - \omega^2 y' \mathbf{j}'$$

$$\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = -\omega \dot{y}' \mathbf{i}' + \omega \dot{x}' \mathbf{j}'$$

baitira.

Azpimarraturiko emaitzaren eskuin aldeko bigarren gaia indar zentripettoa da eta hirugarrena Coriolis-en indarra. Beste bi inertzi indarrak ($-m \mathbf{a}_0$ eta $-m \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}'$) ez dira agertzen, zerengatik O' sistema inertzialean finko baitago eta $\vec{\omega}$ abiadura angeluarra konstantea baita.

Honela bada, lehenago ere esan dugunez, inertzi indarrak automatikoki agertzen dira Lagrange-ren formalismoan.

4. Adibidea: Indar zentralak

Aurki bitez higidura-ekuazio diferentzialak, indar zentralaren peko puntu materialaren higiduraren kasuan, Routh-en metodoaren bidez.

Dakigunez, kasu honetan, momentu zinetikoak konstante irauten duenez gero, higidura launa da, hots, plano batetan gertatzen da. Beraz, higidura gertatzen deneko planoan koordenatu polarrak erabiliz,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) .$$

θ koordenatua ziklikoa denez gero,

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = l$$

konstantea da. Beraren esangura fisikoa, jakina, momentu zinetikoaren modulua da.

Sistemari dagokion Routh-en funtzioa ondokoa da:

$$R = L - \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 - \frac{l^2}{m^2 r^2} \right) - V(r) ,$$

eta higidura-ekuazioa,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} = - \frac{dV}{dr} .$$

Ekuazio diferentzial hau ebatzi ondoren, hots, $r(t)$ funtzioa kalkulatu ondoren,

$$\theta(t) = \theta(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial l} dt ,$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{l}{m r^2(t)} dt$$

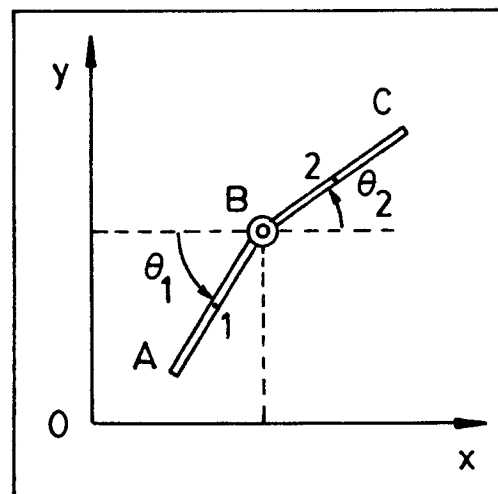
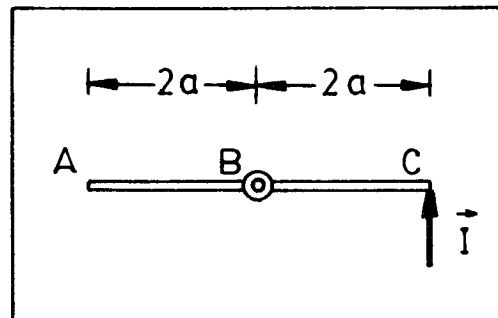
ere aurki daiteke.

Lagrange-ren metodoaren bidez ere azter daiteke hemengo problema, noski. Esate baterako, ikus Goldstein-en 85. orrialdea eta hurrengoak.

5. Adibidea

Kontsidera ditzagun bi barra homogeno, bakoitza m masatakoa eta $2a$ luzeratakoa. B junta leunaren bidez elkarrekin loturik daude eta hasieran pausagunean daude mahai leun horizontal batetan eta zuzen berean, irudiak adierazten digunez. I inpulstu horizontalak eragiten du bapatean C puntuan, BC-ren perpendikularraren norabidean. Kalkula bedi sorturiko hasierako higidura.

Hauta ditzagun B puntuaren koordenatuak, x eta y , eta θ_1 eta θ_2 angeluak, koordenatu orokortzat (ikus bigarren irudia).



Argi dagoenez

$$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 ,$$

non v_1 eta v_2 , AB eta BC barretako zentruen abiaduren moduluak diren, eta $I_1 = I_2$ barra bakoitzeko zentruarekiko inertzi momentua, eta $\vec{\omega}_1$ eta $\vec{\omega}_2$, AB eta BC barren abiadura angeluarrak.

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{3} m a^2 ,$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_B + \vec{\omega}_1 \wedge \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_B + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -a \cos \theta_1 & -a \sin \theta_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_B + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ a \cos \theta_2 & a \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = (\dot{x} + a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) \mathbf{i} + (\dot{y} - a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1) \mathbf{j} ,$$

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{x} - a \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \mathbf{i} + (\dot{y} + a \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \mathbf{j} ,$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 + (\dot{y} - a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + \frac{1}{3} a^2 \dot{\theta}_1^2 + (\dot{x} - a \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + (\dot{y} + a \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + \frac{1}{3} a^2 \dot{\theta}_2^2 \right] .$$

Gainera

$$\mathbf{r}_C = \vec{OC} = (x + 2 a \cos \theta_2) \mathbf{i} + (y + 2 a \sin \theta_2) \mathbf{j}$$

denez gero, inpultsu orokortuak ondokoak dira:

$$S_x = \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial x} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{i} = 0 ,$$

$$S_y = \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial y} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{j} = I ,$$

$$S_{\theta_1} = \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \theta_1} = 0 ,$$

$$S_{\theta_2} = \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \theta_2} = \mathbf{I} \cdot (-2a \sin \theta_2 \mathbf{i} + 2a \cos \theta_2 \mathbf{j}) = 2a \mathbf{I} \cdot \mathbf{j} = 2aI ,$$

zeren inpultsuak eragiten dueneko denbora tartean, θ_2 nulua baita.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \left[(\dot{x} + a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) + (\dot{x} - a \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \right] ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \left[(\dot{y} - a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1) + (\dot{y} + a \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \right] ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = m \left[a \sin \theta_1 (\dot{x} + a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) \right. \\ \left. - a \cos \theta_1 (\dot{y} - a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1) + \frac{1}{3} a^2 \dot{\theta}_1 \right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m \left[-a \sin \theta_2 (\dot{x} - a \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \right. \\ \left. + a \cos \theta_2 (\dot{y} + a \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) + \frac{1}{3} a^2 \dot{\theta}_2 \right] . \end{aligned}$$

t_0 aldiunean, pausagunean dagoenez gero, $t = t_0$, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ eta $\theta_1 = \theta_2 = 0$, jakina. $t_0 + \tau$ aldiunean higidura oraindik hasi berria denez gero, $t = t_0 + \tau$,

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 .$$

Beraz, ondokoak dira Lagrange-ren ekuazioak:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]_{t_0+\tau} - \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right]_{t_0+\tau} = S_j \quad (j = 1,2,3,4) ,$$

$$2 m \dot{x} = 0 .$$

$$m (\dot{y} - a \dot{\theta}_1) + m (\dot{y} + a \dot{\theta}_2) = I ,$$

$$- m a (\dot{y} - a \dot{\theta}_1) + \frac{1}{3} m a^2 \dot{\theta}_1 = 0 ,$$

$$m a (\dot{y} + a \dot{\theta}_2) + \frac{1}{3} m a^2 \dot{\theta}_2 = 2 a I ,$$

non hemen agertzen diren $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, higiduraren hasierako aldiunekoak diren, $t_0 + \tau$ aldiunekoak hain zuzen. Hortik,

$$\dot{x} = 0 ,$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{4} \frac{I}{m} \mathbf{j} ,$$

$$\dot{y} = -\frac{I}{m} ,$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{5}{4} \frac{I}{m} \mathbf{j} ,$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{3}{4} \frac{I}{ma} ,$$

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{3}{4} \frac{I}{ma} \mathbf{k} ,$$

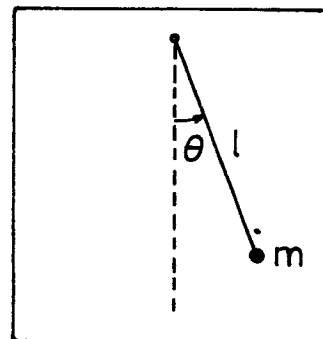
$$\dot{\theta}_2 = \frac{9}{4} \frac{I}{ma} ,$$

$$\vec{\omega}_2 = \frac{9}{4} \frac{I}{ma} \mathbf{k}$$

ditugu, hasia den higidura askearen hasierako abiadurak. Higidura askearen zinatika erraz kalkula dezakegu orain. Jakina, emaitzok Newton-en metodoaren bidez ere lor daitezke (ikus, J.L. Synge eta B.A. Griffith, 214. or.).

ARIKETAK

- 1.- Kalkula bedi irudiko pendulu matematikoaren higidura-ekuazioa. Oszilazio txikien kasuan, integra bedi berau eta aurki bedi hariaren tentsioa. Suposa bedi hariak ez duela masarik, zuzen irauten duela, eta higidura launa dela.



Emaitza: $l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0; \quad \theta = \theta_0 \sin \left[\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right]$

$$T = -m g \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 .$$

- 2.- Potentzial bektorial eta eskalarraren eta eremu elektriko eta magnetikoaren arteko harremanak kontutan hartuz, froga bedi, (2.41) potentzial orokortutik Lorentz-en indarra lor daitekeela:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{r}}{c} \wedge \mathbf{B} \right) .$$

- 3.- Baldin bi partikularen arteko indarrak ondokoak badira,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -k \left(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \right) .$$

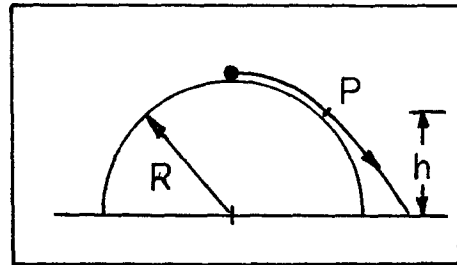
froga bedi, sistemaren higidura-ekuazioak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

direla,

$$F = \frac{1}{2} k \left(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \right)^2 \quad \text{delarik.}$$

- 4.- m masadun puntu materiala, esferaerdi leun batetako gorengo puntuan datza abiadurarik gabe. Grabitatearen eragin pean higitzen hasten da. Zein altueratan hasten da aldentzen esferaren gainazaletik?



Eraitza: $h = \frac{2}{3} R$.

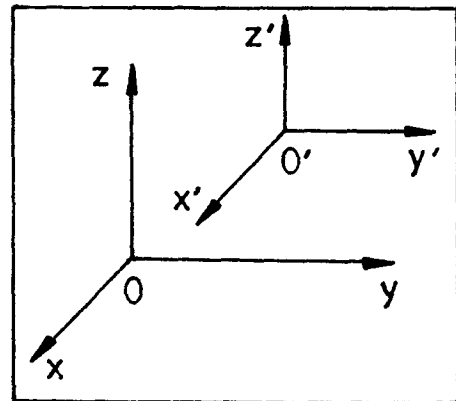
- 5.- 5. adibidearen kasuan, zeintzu izanen lirateke B puntuaren abiadura eta bi barren abiadura angeluarrak, $\mathbf{I} = I \mathbf{j}$ inpultsuak B puntuan eraginez gero.

Eraitza: $\mathbf{v}_B = 2 \frac{I}{m} \mathbf{j}$; $\vec{\omega}_1 = \frac{3}{2} \frac{I}{am} \mathbf{k} = -\vec{\omega}_2$.

- 6.- Aurki bitez puntu materialaren azelerazioaren osagai zilindrikoak, Lagrange-ren metodoaren bidez.

Eraitza: $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2$; $a_\phi = 2 \dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}$; $a_z = \ddot{z}$.

- 7.- Aurki bitez puntu materialaren higidura-ekuazioak, $OXYZ$ sistema inertzialarekiko higitzen den $O'X'Y'Z'$ sistema ez-inertzialean, beronen ardatzek lehenbizikoen paraleloak irauten dutelarik.



Eraitza: $m \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{OO}'}$.

- 8.- Biz eremu elektromagnetiko batetan dagoen partikula bat. Aurki bitez momentu orokortuak, koordinatu cartesiarretan eta esferikoetan.

Emaitza: $p_x = m \dot{x} + \frac{e}{c} A_x ; \dots ;$

$$p_r = m \dot{r} + \frac{e}{c} A_r ,$$

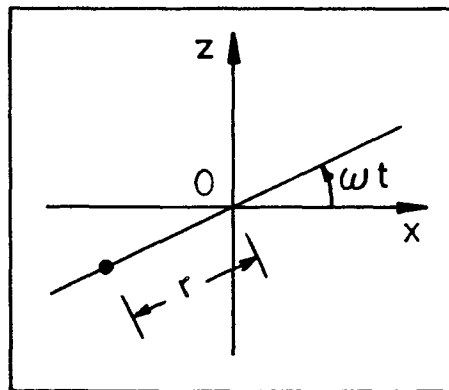
$$p_\theta = m r^2 \dot{\theta} + \frac{e}{c} r A_\theta ,$$

$$p_\phi = m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \frac{e}{c} r \sin \theta A_\phi .$$

- 9.- Azter bedi pendulu esferikoa Routh-en metodoaz. Pendulu esferikoa, azal esferiko baten barruan marruskadurarik gabe higitzen den puntu materiala da. Jakina, hau guztiau grabitatearen eragin pean.

Emaitza: Ikus Landau, 39. or.

- 10.-Puntu material bat higitzen da zuzen leun batetan, O puntutik abiadurarik gabe irtenik. Zuzena plano bertikalean higitzen da, ω abiadura angeluar konstantez, O puntuaren inguruan. Kalkula bitez puntuaren higidura-ekuazioa eta zuzenaren erreakzioa.



Emaitza: $r = \frac{g}{2\omega^2} (\sin \omega t - \text{sh } \omega t) ,$

$$\mathbf{N} = m g (\text{ch } \omega t - 2 \cos \omega t) (\sin \omega t \mathbf{i} - \cos \omega t \mathbf{k}) .$$

3. GAIA

HAMILTON-EN PRINTZIPIOA

- 3.1. Bariazioen kalkulua.
 - 3.1.1. Bariazioen kalkuluaren notazio klasikoa.
 - 3.1.2. Bariazioen kalkulua n aldagai independenteren kasuan.
- 3.2. Hamilton-en printzipioa.
- 3.3. Printzipioaren orokorpena sistema ez-kontserbakorren kasuan.
- 3.4. Potentzial orokortuen kasua.
- 3.5. Loturadun extremalak.
- 3.6. Sistema ez-holonomoak.
- 3.7. Lerro geodesikoak.
Adibideak. Ariketak.

Orain arte, lehen gai bietan, Newton-en printzipioetatik abiatu izan gara Lagrange-ren formulaziora heltzeko. Gai honen jomuga, Lagrange-ren ekuazioak beste postulatu batetan oinarritzea da, Hamiltonen postulatuan hain zuzen ere.

D'Alembert-en printzipioa hartzean —Newton-en printzipioaren ondorio zuzena bestalde—, sistema mekanikoaren egoera bat hartu dugu (edozein t aldiunetan) eta egoera horren inguruko desplazamendu birtualak kontsideratu izan ditugu. Hau da, printzipio honetan momentu baten ingurunea aztertu izan dugu, ingurune diferentziala prezeski, eta horregatik, printzipio diferentziala dela esan dezakegu. Ondorioz, beste horrenbeste esan dezakegu Lagrange-ren ekuazioei buruz, hauek ere egoera baten inguruan lorturikoak baitira.

Gai honetan aztertuko dugun printzipioa, oster, oso bestelakoa da. Kasu honetan, sistema mekanikoak t_1 eta t_2 aldiuneen artean duen higidura osoa edukiko dugu kontutan, horregatik, printzipio integrala dela esango dugu, eta hori izango da, hain zuzen ere, Hamilton-en printzipioa. Ikusiko dugunez, Lagrange-ren ekuazioak Hamilton-en printzipiotik lor daitezke. Honelatan, ba, Hamilton-en printzipioa Mekanikaren oinarritzko postulatu izango da, Newton-en printzipioak izan orde. Era honetako formulazioak zenbait abantail ditu, hala nola, lagrangearra adierazteko erabiltzen diren koordenatu-sistemarekiko guztiz aldaezina dela, eta bai, halaber, eremuen teoria klasikoak eta kuantikoak antzeko hizkuntza matematikoa erabiltzen dutenez, Fisika modernoko arlo horietarako sarrera izan daitekeela.

3.1. BARIAZIOEN KALKULUA.

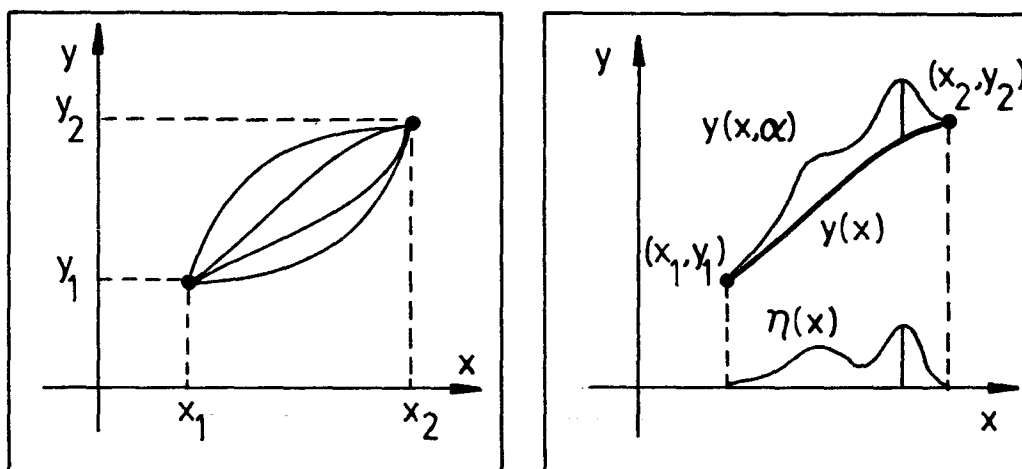
Hamilton-en printzipiora pasatu aurretik, zenbait kontzeptu matematikoren oinarria azaltzen saiatuko gara, beharrezkoak baitira gure formulaziorako. Behar dugun oinarri matematikoa, bariazioen kalkulua da.

Lehen maila batetan, kasurik sinpleena aztertuko dugu, problema unidimentsionala kontsideratuz. Eta hasiera batetan kalkuluak xehetasun osoz egingo ditugu, gero bariazioen kalkuluaren notazio klasiko laburtura pasatzeko.

Demagun $f(y, \dot{y}, x)$ funtzioa dugula, $y = y(x)$ eta $\dot{y} = dy/dx$ izanik. (x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntu finkotzat harturik, kontsidera dezagun ondoko integral kurbilineoa:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx \quad (3.1)$$

Kasu orokorrean, J integrala $y(x)$ kurbaren funtzionala da, hau da, integratzean hartzen dugun kurba bakoitzerako, J funtzionalak balio bat izango du. Egoera hau alboko lehenengo irudian adierazi nahi dena da.



Demagun, orain, $y = y(x)$ kurba bat aurkitu nahi dugula, non J integrala extrema den, hots, maximo edo minimo, eta saia gaitezen kurba horrek bete behar dituen baldintzak aurkitzera. Hauxe da, prezeski, bariazioen kalkuluan planteiatzen den problema. Honetaz nomenklaturazko ohar bat egin behar dugu: Extrema maximo edo minimoari deritzogu eta extremala J integralaren balioa egonkor uzten duen edozein $y(x)$ kurbari. Edo gauza berbera dena, Euler-Lagrangeren ekuazioak betetzen dituen edozein kurbari. Ikus. Corant Hilbert, 184. orrialdea edo D. Lovelock eta H. Rund, 190. orrialdea.

Hasieran esan dugunez, (x, y) grafikan, kurba guztiek iragan behar dute (x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntuetatik. Abiapuntu modura, demagun, planteaturiko problemaren ebazpena $y(x)$ kurba dela, hots, goiko bigarren irudian marra gogorrez adierazirik dagoena. (x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntuetatik pasatzen den beste edozein kurba, $\eta(x)$ funtzio arbitrario batez eta α parametro baten laguntzaz defini dezakegu. Dena den, $\eta(x)$ funtzioa honelako baldintzekin definituko dugu:

$\eta(x_1) = 0$ eta $\eta(x_2) = 0$. Gainera, $x_1 < x < x_2$ tartean edonolako funtzio jarraia da. Edonolakoa dela esatean, nahiz eta gero era parametrikoki bakar batez adierazi, funtzio posible guztiak adierazten ditugu.

Esandakoaren arauera, ondoko eran adieraziko dugu, (x_1, y_1) eta

(x_2, y_2) puntuetatik pasatzen den edozein kurba:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x) . \quad (3.2)$$

Hemen, $y(x)$ problemaren ebazpena da eta, horregatik $\alpha = 0$ egitean:

$$y(x, 0) = y(x) . \quad (3.3)$$

(3.2) deribatuz:

$$\dot{y}(x, \alpha) = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \dot{y}(x) + \alpha \dot{\eta}(x) . \quad (3.4)$$

Esan bezala, α delakoa, kurba bakoitza zehazteko erabiltzen den parametro bat da. Kurba-familia bat hartuz, hots, $\eta(x)$ konkretu bat hartuz, α parametroak familia horretako kurba bakoitza definitzen du.

Honela geratzen da (3.1) adierazpena α parametroaren funtzioan:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx = J(\alpha) . \quad (3.5)$$

Eta integral hau $y(x)$ kurbaren kasurako maximo edo minimo egiten denez, zera beteko da η edonolakoa izanik:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0 , \quad (3.6)$$

zeren eta $\alpha=0$ egitean, $y(x, 0) = y(x)$ baita. Dena den, esan behar da (3.6) baldintza beharrezkoa dela, baina ez nahikoa.

Garatu egingo dugu pausoka (3.6) baldintza. (3.5) deribatuz:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx . \quad (3.7)$$

Hemengo bigarren gaia kontsideratuz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx . \quad (3.8)$$

Ohar gisa, bigarren deribatu gurutzatuak berdinak direla esan behar da.
Hara:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\dot{y} + \alpha \dot{\eta}) = \dot{\eta}(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) &= \frac{d}{dx} \eta(x) = \dot{\eta}(x) . \end{aligned}$$

Integrazioa parteka eginez,

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \text{non } u &= \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \text{ eta } v = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \text{ diren ,} \end{aligned}$$

honela geratzen da (3.8) :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dx . \quad (3.9)$$

Lehen gaia nulua da, zeren $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$ baita eta $\eta(x_2) = 0$, $\eta(x_1) = 0$

baitira. Beraz, azkenean, honela geratzen zaigu (3.7) adierazpena:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx . \quad (3.10)$$

Bariazioen kalkuluan ohitura dago, adierazpen honen gai biak $d\alpha$ delakoaz biderkatzeko:

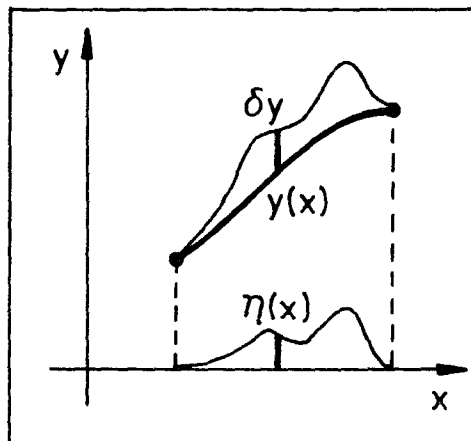
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx . \quad (3.11)$$

Kalkula dezagun honen balorea $\alpha = 0$ egiten denean:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha dx . \quad (3.12)$$

Normalean, notazio-aldaketa hau egin ohi da:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha &= \delta J , \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha &= \delta y , \\ \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha &= \delta \dot{y} . \end{aligned} \quad (3.13)$$



δJ , δy , $\delta \dot{y}$ direlakoak, funtzio horien *bariazioak* dira eta horrelaxe adierazi ohi dira bariazioen kalkuluan.

Ikus dezagun zein den δy delakoaren esangura. (3.2) eta (3.13) adierazpenetatik:

$$\delta y = \eta(x) d\alpha . \quad (3.14)$$

Aurrekoko irudian ikusten den bezala, δy hori y koordenatuaren aldakuntza infinitesimal bat da, puntuaren x parametroa aldatu gabe utzirik.

Geroago ikusiko dugunez, orain arte ikusitako gaietan aipaturiko desplazamendu birtual infinitesimalen antzeko zerbañ da.

(3.13) adierazpenak erabiliz, honelaxe geratzen zaigu (3.12):

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dx, \quad (3.15)$$

eta (3.6) delakoaren arauera, ebazpena adierazten duen kurban $\delta J = 0$ denez gero:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dx = 0. \quad (3.16)$$

Integral hau gai infinitesimal askoren batuketa bat da, izatez. Bestalde, δy bariazioak edonolakoak dira, zeren eta $\eta(x)$ funtzioa edonolakoak baita. Beraz, δy direlakoak edonolakoak izanik, batuketa —edo integral— hori nulua izan ahal dadin, batugai guztiek nulu izan behar dute. Hots, zera bete behar da:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0.} \quad (3.17)$$

Ekuazio honi *Euler-Lagrange-ren ekuazioa* deritzo.

Euler-Lagrange-ren ekuazioa bigarren ordenako ekuazio diferentzial bat da. Hori ebatziz eta kurbak (x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntuetatik iragan behar duela kontutan hartuz, $y(x)$ funtzioa lor daiteke.

(3.17) adierazpena, J integral kurbilineoa maximoa edo minimoa izan dadin bete behar den baldintza beharrezkoa baina ez nahikoa da. Berorren bidez, integrala egin behar deneko kurba lortzen da eta, horrela,

ebatzirik geratzen da problema. Bariazio-kontzeptua erabiltzen denez, eramán dugun prozesu matematikoari *bariazioen kalkulua* deritzo. Bariazioen kalkuluaren zenbait aplikazio ikusteko, gai honen bukaerako ariketetara jo daiteke.

3.1.1. Bariazioen kalkuluaren notazio klasikoa.

Egindako arrazonamendua erraztu egin daiteke zerbait, bariazioek dituzten zenbait propietate kontutan edukiz. Ikus dezagun, nola egin daitekeen hori.

(3.13) expresioan δy eta $\delta \dot{y}$ definitu ditugu (δJ ere antzera):

$$\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha ,$$

$$\delta \dot{y} = \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha .$$

Definizio honetatik bertatik eta hartu dugun α parametroaren forma kontutan hartuz, δ eragilea deribatuek bezala jokatzén duela esan dezakegu, azken batez diferentzial bat baita. Honela, ba, modu honetan kalkulatu beharko da, adibidez, $f(x, y, \dot{y})$ funtzioaren bariazioa:

$$\delta f(x, y, \dot{y}) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} . \quad (3.18)$$

Baina $\delta x = 0$ da, zeren x aldagaiak ez baitu α parametroaren dependentziarik. Hots:

$$\delta f(x, y, \dot{y}) = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} . \quad (3.19)$$

Bestalde, ikusiko dugunez, δ eta d/dx eragileak trukakorrak dira. Hara (3.2) eta (3.4) kontutan hartuz:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \longrightarrow \delta y = \eta(x) d\alpha ,$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} = \dot{\eta}(x) \longrightarrow \delta \dot{y} = \dot{\eta}(x) d\alpha .$$

Era honetan, zera geratzen zaigu:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \delta \dot{y} = \dot{\eta}(x) d\alpha = \frac{d}{dx} \left[\eta(x) d\alpha \right] = \frac{d}{dx} \delta y , \quad (3.20)$$

hau da, bi eragileen ordena trukatu egin daiteke.

Aipaturiko propietateak erabiliz, modu laburtu honetan adieraz daiteke bariazioen kalkulua. Demagun, lehen bezala, ondoko integral kurbilineoa extremal egin nahi dugula ibilbidearekiko:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \dot{y}) dx .$$

Beraz, zera egin behar dugu:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, \dot{y}) dx . \quad (3.21)$$

Adierazpen hori garatuz:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dx = 0 . \quad (3.22)$$

Azter dezagun bigarren gaia. (3.20) adierazpena erabiliz,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \left[\frac{d}{dx} (\delta y) \right] dx =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta y dx . \quad (3.23)$$

Baina x_1 eta x_2 koordenatuetan $\delta y = 0$ da zeren eta kurbaren bi muturrak finko baitira, hau da,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} = 0 .$$

Azkenean honelaxe geratzen zaigu (3.22):

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx = 0 ; \quad (3.24)$$

eta δy bariazioak edonolakoak direnez, (3.24) bete ahal dadin, zera gertatu behar da:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 , \quad (3.25)$$

hots, berriro ere lortzen dugu (3.17) adierazpeneko baldintza berbera, baina orain, modu arinago batez. Hemendik aurrera, ba, notazio klasikoa erabiliko dugu azalpenak errazteko.

3.1.2. Bariazioen kalkulua n aldagai independenteren kasuan

Orain arte aldagai bakar batez mintzatu izan gara. Goazen orain, n aldagairen kasua ikustera.

Demagun x parametroa dugula. Bestalde n aldagai independente ditugu: $y_1, y_2, \dots, y_n$. Edo nahi bada, y_i . Aldagai hauek x parametroaren funtzioan jar daitezke: $y_i(x)$. Halaber, x parametroarekiko deribatuak ditugu:

$$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dx} .$$

Kontsidera dezagun ondoko funtzioa,

$$f (y_i , \dot{y}_i , x) \quad (i = 1, \dots, n) ,$$

eta kalkula dezagun 1 eta 2 egoeren artean, ondoko integral kurbilineoa:

$$J = \int_1^2 f (y_i , \dot{y}_i , x) dx . \quad (3.26)$$

Orohar, lehen bezala, integral honek egiten deneko kurbaren dependentzia izango du. Integrazio-mugak finko utziz, hots, 1 eta 2 puntuak finko utziz, saia gaitezen, J integrala extremal egiten duen bidea aurkitzera. Azterketa errazteko, notazio klasikoa erabiliko dugu. J integralak extremo bat izan dezan,

$$\delta J = \delta \int_1^2 f (y_i , \dot{y}_i , x) dx = 0 \quad (3.27)$$

bete behar da. Adierazpen hau garatuz,

$$\delta J = \int_1^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right) dx = 0 . \quad (3.28)$$

Azter ditzagun batuketaren bigarren gaiak:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i dx &= \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \left[\frac{d}{dx} (\delta y_i) \right] dx = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i \right]_1^2 - \int_1^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \delta y_i dx . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Eta 1 eta 2 egoeretan $\delta y_i = 0$ denez, azkenean honela geratzen zaigu (3.28) adierazpena:

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \delta y_i \, dx . \quad (3.30)$$

Baina y_i guztiak independenteak direnez gero, δy_i bariazioak ere independenteak izanen dira, eta baldintza horietan (3.30) adierazpena bete dadin, integralean ageri diren parentesiak anulatu egin behar dira. Hots J integralak extremo bat izan dezan, ondoko baldintzak bete behar ditu bideak:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0} \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (3.31)$$

Ikusten denez, n ekuazio diferentzial lortzen dira, bigarren ordenakoak bestalde. Ekuazio hauek ebatziz, eta hasierako baldintzak era egokian aukeratuz, $y_i(x)$ funtzioak lortzen dira, hots, 1 egoeratik 2 egoerara pasatzeko bidearen azalpena. Ekuazio-multzo honi *Euler-Lagrange-ren ekuazio diferentzialen multzoa* deritzo, eta erraz ikusten denez, (3.25) ekuazioaren orokorpena da. Honela, ebatzirik geratzen da bariazioen kalkulua n aldagai independenteren kasuan, eta prest daukagu oinarri matematikoa Hamilton-en printzipiora pasatzeko.

3.2. HAMILTON-EN PRINTZIPIOA

Aurreko puntuan, bariazioen kalkuluan oinarriturik Euler-Lagrange-ren ekuazioak lortu ditugu. Ekuazio hauek ebatzirik, J integral kurbilineoa maximo edo minimo egiten duen kurba lor daiteke. Dena den, aipaturiko ekuazioak aztertuz, bigarren gaian ikusitako Lagrange-ren ekuazioen antzekoak direla ikus dezakegu. Antz horrek bide emango digu, Mekanikaren formulazioaren berregituratzeko.

Hara. Orain arte, sistemaren higiduraren dinamika aldiune baten inguruan kontsideratu izan dugu, horrela printzipio diferentzial batetan oinarrituz, Newton-en printzipioan alegia. Puntu honetan, bariazioen kalkuluan finkaturik, eta analogia batetatik abiatuz, sistemaren higidura osoa kontsideratuko dugu eta azkenean, Mekanikaren formulazioa printzipio integral batetan oinarrituko dugu.

Analogia adierazteko, bi zutabetan jarriko ditugu ereduak: Batetik eredu matematiko hutsa eta bestetik sistema mekanikoaren adierazpena izan daitekeen eredu matematikoa.

Bariazioen kalkulua	Sistema mekanikoa
$J = \int_1^2 f(y_i, \dot{y}_i, x) dx$ $y_i(x)$ $\dot{y}_i(x) = dy_i / dx$ x parametroa J integrala extremal egonkorra bihurtu nahi dugu ibilbidearekiko. Horretarako, bariazioen kalkulua erabiltzen da: $\delta J = \delta \int_1^2 f(y_i, \dot{y}_i, x) dx = 0$ Bariazioak ondokoak dira: $\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$ $\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$ Bariazio hauetan: $\delta x = 0$ δy_i guztiak independenteak dira. I integralak balio extremala izan dezan, ondoko ekuazioak bete behar dira: $\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0$	Demagun ondoko integrala: $I = \int_1^2 L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$ L lagrangearra da dt denbora 1 eta 2, sistema mekanikoaren egoerak dira, t_1 eta t_2 aldiuneetan, $q_j(t_1)$ eta $q_j(t_2)$ finkoak izanik $q_j(t)$ $\dot{q}_j(t) = dq_j / dt$ t parametroa $\delta I = \delta \int_1^2 L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0$ $\delta I = \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$ δq_j $\delta t = 0$ Sistema mekanikoaren bariazio hauek, δq_j, desplazamendu birtualak dira. δq_j horiek independenteak dira. Lagrange-ren ekuazioak: $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$

Ikusten den bezala, Lagrange-ren ekuazioak, hau da, sistema mekanikoaren higidura definitzen duten ekuazioak, $\int L dt$ integrala extremal bihurtzeko baldintzatik lortzen dira.

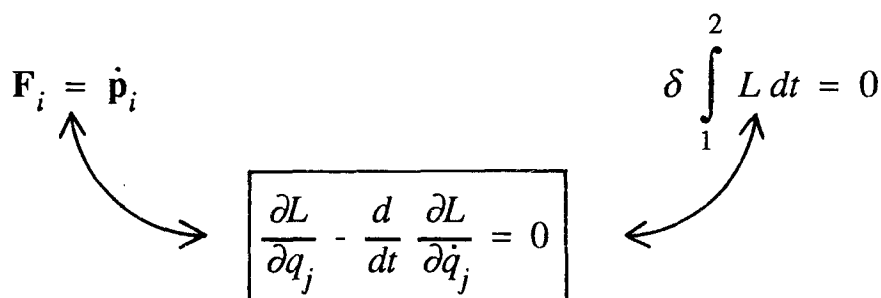
Puntu honetan oinarriturik, era integral batez postula dezakegu mekanikaren higidura arautzen duen printzipioa. Honela hain zuzen ere:

$I = \int L dt$ integrala kontsideratuz, sistemaren higidurak, I integrala extremala bihurtzen duen bidearen arauetara izan behar du konfigurazio-espazioan. Hots, higidurak printzipio matematiko hau bete behar du:

$$\delta \int_1^2 L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0. \quad (3.32)$$

Postulatu hau, *Hamilton-en printzipioa* deitzen da eta Lagrange-ren ekuazioen baliokidea da, aztertzen ditugun sistemen kasuan.

Zer erlazio du printzipio honek Newton-en printzipioekin? Berez, bi postulatu desberdin dira, baina bietatik ondorio berberetara heltzen da, Lagrange-ren ekuazioetara hain zuzen ere. Horregatik "baliokideak" direla esan daiteke. Hau honela adieraz dezakegu eskema baten bidez:



Liburu batzutan Hamilton-en printzipioan oinarritzen dira zuzenki (ikus, adibidez, Landau-Lifshitz, 2. or.), Newton-en postulatuetan finkatu beharrean. Honela egiteak zenbait abantail ditu, zeren L funtzioan ageri diren koordinatuak, orokortuak baitira. Gainera, modu honetan, gero eremuen teoriak aztertzeko ere bide egokia prestatzen da. $\int L(q, \dot{q}, t) dt$ magnitudeari *ekintza* deritzo.

3.3. PRINTZIPIOAREN OROKORPENA SISTEMA EZ-KONTSERBAKORREN KASUAN

Orain arte aipatu dugun Hamilton-en printzipioa, sistema kontserbakorren kasuan zein potentzial orokortu batetikoarenean erabil daitekeena da. Horregatik definitu ahal izan dugu lagrangearra. $L = T - V$

edo $L = T - U$. Baina nola agertzen da printzipioa sistema ez-kontserbakorren kasuan?

$$\delta \int P dt = 0$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

Aurreko eskema honetan adierazten da problemaren planteamendua. Koordenatuen, abiadura orokortuen eta denboraren dependentzia duen $P(q_j, \dot{q}_j, t)$ funtzio bat bilatu behar da, eta ondoren $\delta \int P dt = 0$ eginik, bariazioen kalkuluaren arauera, Lagrange-ren ekuazioak lortu behar ditugu (kasu honi dagozkionak, noski). Hurrengo lerroetan frogatuko dugunez, P funtzioa, ondokoa izanen da:

$$P = T + W, \quad (3.33)$$

non T energia zinetikoa eta W ondoko funtzioa diren,

$$W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{p}_i, \quad (3.34)$$

$\mathbf{F}_i$, lotura idealak sorturiko indarrez beste guztiak direlarik. Adibidez, indar ez-kontserbakorrak izan daitezke.

Ikus dezagun, P funtzioa ongi aukeratu dugunentz. Bariazioen kalkuluaren arauera:

$$\delta \int_1^2 (T + W) dt = \delta \int_1^2 T dt + \delta \int_1^2 W dt = 0. \quad (3.35)$$

Azter ditzagun banaka gai hauek. Orokorki $T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$ denez

$$\delta \int_1^2 T dt = \int_1^2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (3.36)$$

Bestetik, δW delakoa koordinatu orokortuen bariazio baten ondorioa da. $\delta t = 0$ batetarako gertatzen da, eta ageri diren $\delta \mathbf{r}_i$ eta δq_j direlakoak, 3.2. puntuan ikusi denez, desplazamendu birtual infinitesimalak dira. Desplazamendu birtualak ados daude sistemaren loturekin. Eta horrela, bigarren ordenako infinitesimoak arbuiatuz, sistema birtualki desplazatzean indarrek konstante irauten dutela jo dezakegu:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \delta \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (3.37)$$

Baldintza hauetan eta loturak holonomo izanik, lehenagoko gaitan egin genuen bezala, (1.23), zera geratzen zaigu:

$$\delta W = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (3.38)$$

(3.36) eta (3.38) adierazpenak (3.35) delakora eramanez,

$$\delta \int_1^2 (T + W) dt = \int_1^2 \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0 \quad (3.39)$$

eta hemengo δq_j bariazioak guztiz independenteak direnez, (3.39) bete dadin, ondoko ekuazioak bete behar dira:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.40)$$

Ekuazio hauek (2.22) berberak dira. $\mathbf{F}_i$ indar ez-kontserbakorrak badira, kasu honetarako Lagrange-ren ekuazioak dira. Beraz, kasu honetan, Hamilton-en printzipioa honelaxe adierazten da:

$$\delta \int_1^2 (T + W) dt = 0 \quad (3.41)$$

3.4. POTENTZIAL OROKORTUEN KASUA

Aurreko puntuan azalduko printzipioa, edozein indar-motaren kasuan erabil daiteke. Adibide gisa, demagun, ba, indarrak potentzial orokortu batetatik sortzen direla. Dakigunez (ikus 2.4),

$$Q_j = - \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (3.42)$$

da. Bestetik, (3.35) adierazpenaren bigarren gaia honako hau da:

$$\int_1^2 \sum_j Q_j \delta q_j dt = - \sum_j \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt . \quad (3.43)$$

Integral honekin, bariazioen kalkulan segitu dugun prozesuaren alderantzizkoa egin dezakegu:

$$\begin{aligned} \sum_j \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt &= - \sum_j \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \\ &= - \int_1^2 \delta U dt = - \delta \int_1^2 U(q_j, \dot{q}_j, t) dt . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Azkenean (3.35) adierazpena era honetara geratzen zaigu:

$$\begin{aligned} \delta \int_1^2 (T + W) dt &= \delta \int_1^2 T dt - \delta \int_1^2 U dt = \\ &= \delta \int_1^2 (T - U) dt = \delta \int_1^2 L dt = 0 . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ikusten denez, ba, potentzial orokortuen kasuan ere zuzenki aplikatu daiteke Hamilton-en printzipioa.

3.5. LOTURADUN EXTREMALAK

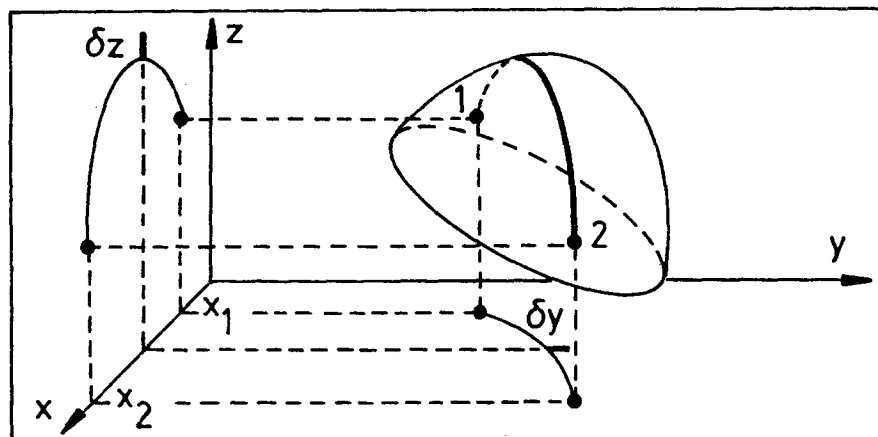
Orain arte, bariazioen kalkulua aztertzean, δy_i guztiak (eta δq_j direlakoak) independenteak zirela kontsideratu izan dugu. Eta baldintza hori erabili dugu problemaren ebazpidean. Hala ere, zenbait sistema mekanikoren kasuan, q_j koordenatuen artean loturaren bat dagoenean, ezin dugu esan q_j horiek guztiok independenteak direnik, eta ezin ditzakegu lehengo ondorio berberak lor. Dena den, ikusiko dugunez, zenbait kasutan, problema ebazteko moduan egoki dezakegu bariazioen kalkulua.

Egokitze hori Mekanikaren arloan erabili aurretik lehenik eta behin matematikaren arloan aztertuko dugu, adibide erraz baten bitartez. Demagun, ondoko integrala dugula

$$J = \int_1^2 f(x, y, \dot{y}, z, \dot{z}) dx, \quad (3.46)$$

$$\text{non } \dot{y} = \frac{dy}{dx} \text{ eta } \dot{z} = \frac{dz}{dx} \text{ diren.}$$

Egin dezagun extremal, baina baldintza hau jarritz: Soilik $F(x, y, z) = 0$ gainazalean dauden kurbak kontsideratuz. Hots, $F(x, y, z) = 0$ gainazalaren kurbekiko extremala. 1 eta 2 puntuak gainazal horretan daude, noski. Era honetako extremalak, loturadun extremalak deitzen dira.



Bariazioen kalkulua egitean, δy eta δz bariazioak ez direla independenteak ikusten dugu, zeren eta, bidea gainazalean zehar gertatzean, ondoko erlazioa baitago bien artean:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0 . \quad (3.47)$$

Hau honela da, zeren $\delta x = 0$ baita, x delakoa integratzen deneko aldagaia baita.

Bestalde, bariazioen kalkuluaren arauera, aurreko integrala extremala egitean, hauxe geratzen zaigu:

$$\int_1^2 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) \delta z \right\} dx = 0 . \quad (3.48)$$

Baina (3.47) adierazpenean ikusi dugun bezala, δy eta δz ez dira edonolakoak, eta horregatik ezin aplika daiteke 3.1. puntuko metodoa, parentesi arteko elementuek nuluak izan behar dutela esanik. Dena den, metodo simple batez, antzeko emaitzetara hel daiteke.

(3.47) ekuazioko elementuak $\lambda(x)$ funtzioaz biderkatuz

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0 \quad (3.49)$$

lortzen dugu. $\lambda(x)$ delako funtzioa, oraingoz, edonolakoa izan daitekeela esango dugu, beraren balioa geroago definituko dugularik. (3.49) dx delakoaz biderkatuz eta 1 eta 2 puntuen artean integratuz,

$$\int_1^2 \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \right) dx = 0 \quad (3.50)$$

daukagu. Eta (3.48)-rekin batuz,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \right) \delta z \right\} dx = 0 . \quad (3.51) \end{aligned}$$

Oraingo honetan δy eta δz independenteak ez direnez, ezin dugu aurreranzko urratsik eman baldintza horretan oinarriturik. Hala ere, bietariko bat independentetzat har dezakegu eta bestea (3.47) adierazpenaren bidez defini dezakegu lehenaren bitartez. Demagun, ba, δy delakoa dela independentea.

λ funtzioa definituko dugu orain. Edozein balio eduki dezakeenez, ondoko adierazpena betetzeko hartu behar duena emango diogu:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0 , \quad (3.52)$$

eta hau honela izanik, modu honetan laburtzen da (3.51):

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y \, dx = 0 . \quad (3.53)$$

Orain δy bariazioa guztiz independente eta edonolakoa denez, (3.35) bete dadin, ondokoa bete behar da:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0 . \quad (3.54)$$

Hain zuzen, (3.52) eta (3.54) adierazpenetan ibilbidea definitzen duten bi baldintza (edo ekuazio) ditugu. Hala ere, hiru ezezagun ditugu: y, z , eta λ . Beraz, sistema ebazteko, beste ekuazio bat behar dugu, eta hori, lotura-ekuazioa da hain zuzen ere, $F(x, y, z) = 0$ delakoa alegia.

Honelatan, ba, loturadun extremalen problema ebazteko, ondoko ekuazio-sistema daukagu:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{aligned}} \quad (3.55)$$

Sistema hau erraz orokor daiteke koordinatu gehiagoren kasuan, 3.1. puntuan baldintza gabeko bariazioen kalkulua aztertzean egiten genuen bezala. Interesgarria da, bestalde, prozesu hau lehen eta bigarren gaitako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoarekin konparatzea (ikus 1.4 eta 2.6 puntuak). Azken batez, metodo berbera bariazioen kalkuluan erabiltzea dela konturatzen gara.

3.6. SISTEMA EZ-HOLONOMOAK

Hamilton-en printzipiotik Lagrange-ren ekuazioetara heltzeko, bariazioen kalkulua erabilirik, azkeneko pauso batetan q_j guztiak independenteak zirela kontsideratzen genuen (ikus 3.2 puntua) Baina hori, sistema mekanikoaren loturak holonomoak badira gertatzen da soilik. Zer egin, ba, sistema ez-holonomoen kasuan?

Loturak ez-holonomoak direnean, ezin daiteke problema orokorki ebatz. Hala ere, lotura ondoko erakoa denean,

$$\sum_k a_{lk} dq_k + b_l = 0 \quad (l = 1, \dots, m) , \quad (3.56)$$

problemak ebazpen orokorra du.

Ikusten denez, lotura-ekuazio hauek (2.55) berberak dira. Bigarren gaian, Lagrange-ren biderkatzaileen metodoaren bidez ebazten genuen arazoa; orain, antzerako gauza bat egingo dugu, baina loturadun extremalen kasuan esandakoa kontutan edukiz.

Demagun, ba, lehen pauso batetan lotura ez-holonomoak alde batetara utziz geratzen diren loturak holonomo izanik, Hamilton-en printzipioa erabiltzen dugula:

$$\delta \int_1^2 L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0 . \quad (3.57)$$

Zer esanik ez, q_k hauek ez dira guztiak independenteak. Ostera, beren artean zenbait lotura daude eta desplazamendu infinitesimal errearen artean lotura hauek (3.56) ekuazioen bidez adierazten dira. Beraz , $k = 1, \dots, n$ izanik, $l = 1, \dots, m$ lotura daude. Noski, $n > m$ da.

Loturadun extremal baten problemaren aurrean aurkitzen garenez, 3.5. puntuko metodoa erabiliko dugu. Bariazioen kalkularen arauera,

(3.57) -tik,

$$\int_1^2 \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right\} dt = 0 . \quad (3.58)$$

Hemengo δq_k desplazamendu birtualak ez dira guztiak independenteak. Beraien artean ondoko loturak daude, (3.56)-tik $\delta t = 0$ eginez lortzen denez:

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad (l = 1, \dots, m) . \quad (3.59)$$

Eta $\lambda_l(t)$ biderkatzaileak erabiliz,

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad (l = 1, \dots, m) , \quad (3.60)$$

$$\sum_l \lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 , \quad (3.61)$$

$$\int_1^2 \left\{ \sum_k \left(\sum_l a_{lk} \lambda_l \right) \delta q_k \right\} dt = 0 . \quad (3.62)$$

Orain artekoan, λ_l direlako parametroek adierazten dituzten funtzioak edonolakoak izan daitezke. (3.62) eta (3.58) adierazpenak batuz,

$$\int_1^2 \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k \right\} dt = 0 . \quad (3.63)$$

δq_k hauen artean, $(n - m)$ dira independenteak. Edonola izenda ditzakegunez, demagun, independente direnak $k = 1, \dots, (n - m)$ azpiindizekoak direla, hots,

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{n-m}$$

direlakoak. Orain λ_l parametroak doitu egingo ditugu, ondoko baldintzak bete daitezten:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0 \quad (k = n-m+1, \dots, n). \quad (3.64)$$

Hau posible da, zeren m ekuazio baitira eta m parametro baititugu.

Bestetik, (3.64) kontutan hartuz, (3.36) honela geratzen da:

$$\int_1^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k \right\} dt = 0. \quad (3.65)$$

Kasu honetan λ_l parametroek balio konkretua dute, $\lambda_l(t)$ orokorrean.

Baina orain (3.65) adierazpenean ageri diren δq_k guztiak ($k = 1, \dots, n-m$), independenteak dira. Beraz, (3.65) bete dadin, ondoko ekuazioak bete behar dira:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0 \quad (k = 1, \dots, n-m). \quad (3.66)$$

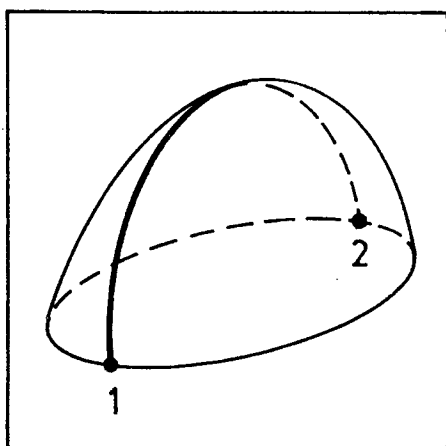
Azkenean, ba, lotura ez-holonomo berezi horien problemaren ere Hamilton-en printzipioa erabil daitekeela ikusten da, loturadun extremala dela kontutan hartuz. Ebazpidea, (3.64), (3.66) eta (3.65) ekuazioek ematen digute, $(n+m)$ ekuaziotako eta $(n+m)$ ezezagunetako (q_k, λ_l) sistema honen bidez:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} &= 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3.67a) \\ \sum_k a_{lk} dq_k + b_l dt &= 0 \quad (l = 1, \dots, m). \quad (3.67b) \end{aligned}}$$

Zer esanik ez, 2.6 puntuan lorturiko ebazpide berbera da, eta hemen ere, $\sum \lambda_l a_{lk}$ gaiek lotura-indar orokortuak adierazten dituzte.

3.7. LERRO GEODESIKOAK

Lerro edo kurba geodesikoak loturadun extremalen kasu berezi bat dira, baina Fisikan duten garrantziagatik aparte aztertuko ditugu. Dena den, puntu honetan ez gara lerro geodesikoen kalkuluaz arituko, kurba horiek dituzten zenbait propietate azpimarkatzeaz baizik.



Kurba geodesikoak, berez, gainazal batetan barrena bi punturen arteko distantziarik luzeena edo laburrena (ingurukoekiko erlatiboki) adierazten dutenak dira. Loturadun extremalen kasu bereziak dira, beraz.

Problema honela planteatzen da : $\int ds$ integrala extremala izan behar da, distantzia neurtzen deneko kurba $F(x, y, z) = 0$ gainazalean dagoelarik. Bestalde, hiru dimentsiotako espazioan,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} . \quad (3.68)$$

Aipaturiko integrala, kurba batetan zehar egiten da eta kurba hori honelaxe adierazten da parametrikoki, t parametroaren bidez:

$$\begin{aligned} x &= x(t) , \\ y &= y(t) , \\ z &= z(t) . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Bestalde, t parametroarekiko deribatuak modu honetan adieraziko ditugu:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} , \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} , \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} . \quad (3.70)$$

Kontsidera dezagun ondoko integral kurbilineoa:

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt . \quad (3.71)$$

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

eginez, eta (3.71) integrala extremala eginez, bariazioen kalkuluaren arauera, ondokoa geratzen zaigu:

$$\begin{aligned} \delta \int_1^2 f dt &= 0 = \\ &= \int_1^2 - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \delta y + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \delta z \right) dt , \quad (3.72) \end{aligned}$$

$$\text{zeren eta } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 , \frac{\partial f}{\partial y} = 0 , \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \text{ baitira.}$$

Ohar gisa, zera esango dugu: Kontutan hartu behar da ezen kasu honetan δx , δy eta δz t parametroarekiko desplazamendu birtualak direla, eta beraz, 3.5. puntuan aipaturikoen desberdinak direla. Hau da, t delakoarekiko integratzen da, eta ez x aldagaiarekiko. Hiru dimentsiotako espazioan egiten da orain integral kurbilineoa. Loturadun extremalen adibidean oster, bi dimentsiotako espazio batetan aritu izan gara integratzen. Desplazamendu birtual hauek gainazal batetan barrena gertatzen direnez, ez dira elkarren independenteak, beraien artean ondoko baldintza betetzen baita:

$$F(x, y, z) = 0 \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0 . \quad (3.73)$$

Aurreko puntuetan egin dugunaren antzera, hemen ere λ parametroa erabiliko dugu (izatez $\lambda(t)$ izango dena):

$$\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \right) = 0 , \quad (3.74)$$

$$\int_1^2 \left(\lambda \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \right) dt = 0 . \quad (3.75)$$

(3.72) adierazpenera eramanez, eta 3.6. puntuan erabilitako metodo berberaz, azkenean zera geratzen zaigu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial x} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial y} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial z} . \end{aligned} \quad (3.77)$$

f funtzioa nolakoa den ikusiz eta deribatuz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial x} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial y} , \\ \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial z} . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ekuazio hauek, ardatz koordenatuen norabideetako $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ eta $\mathbf{k}$ bektore unitarioez hurrenez hurren biderkatuz, eta atalez atal batuz, hauxe lortzen dugu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \lambda \nabla F , \quad (3.78)$$

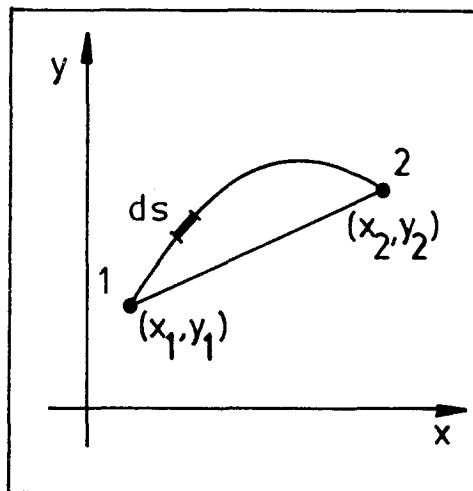
$$\text{non } \dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} , \quad |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

eta $\nabla F = \text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k}$ diren.

- b) Gainazal kurbo batetan, puntu biren artean tentsioan jarritako masa gabeko sokak, lerro geodesiko baten forma hartzen du, zeren eta gainazalak egin dezakeen indar bakarra gainazalaren normalaren norabidekoa baita.

A D I B I D E A K

1. "Plano batetako bi punturen arteko distantziarik laburrena, zein kurbatan zehar gertatzen den kalkula bedi".



Arku-elementu diferentziala ondokoa da:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

Eta puntu biren artean dagoen kurbaren luzera, ondoko hau da:

$$J = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Jarri zaigun baldintza, J hau minimo izatea da. Beraz, bariazioen kalkuluko problema da. Teoriaren arauera,

$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2},$$

eta ebazpena, baldintza hau betetzen duen kurba da:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0, \text{ hots,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0,$$

alegia,
$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = k \quad (\text{konstantea})$$

Eta ekuazio hau ebatzirik:

$$\dot{y} = k \sqrt{1 + \dot{y}^2}$$

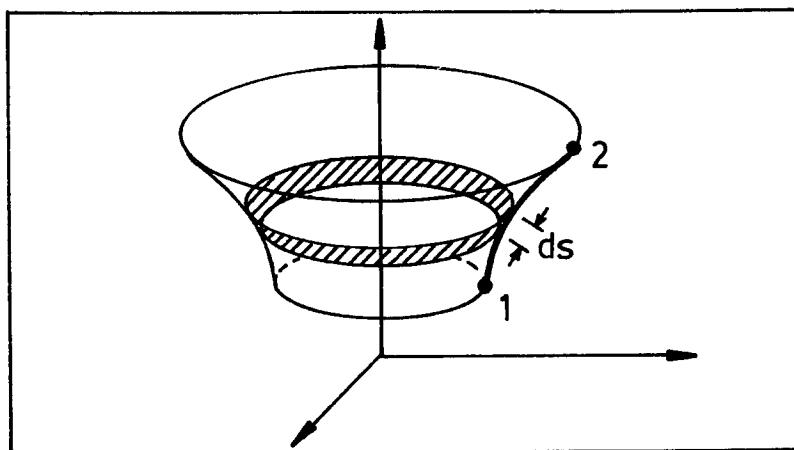
$$\dot{y} = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} = a \quad (\text{konstantea})$$

Beraz, azkenean ondokoa geratzen zaigu:

$$\dot{y} = a \longrightarrow \frac{dy}{dx} = a \longrightarrow y = ax + b ,$$

non a eta b integrazio-konstanteak diren. Konstante hauek 1 eta 2 puntuen koordinatuen bidez kalkula ditzakegu, zeren eta lerro horrek puntu horietan zehar pasatu behar baitu. Ikusten denez, soluzioa lerro zuzen bat da; hain zuzen ere, distantziarik laburrena, 1 eta 2 puntuen artean pasatzen den zuzenaren bidezkoa da.

2. "Demagun Oxy planoan bi puntu finko ditugula. Lor bedi bi puntu horien arteko kurba launa, Oy ardatzaren inguruan bira osoa egitean sortzen den gainazalaren azalera minimoa izan dadin".



Irudian edozein kurbarekin lortzen den biraketa-gainazala adierazten da. Berorren elementu diferentzial bat ere azaltzen da, ds luzera-

elementuak biratzean sortzen duena prezeski. Elementu horren azalera, hauex da:

$$dS = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Beraz, lortzen den azalera, hauex da:

$$S = 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Azalera hau minimoa izan dadin, bariazioen kalkuluan lorturiko baldintza, (3.17), erabiliko dugu:

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}; \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0.$$

Beraz, a delakoa integrazio-konstante bat izanik,

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a.$$

Eragiketak eginez eta integratuz,

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \longrightarrow y = a \operatorname{ar ch} \frac{x}{a} + b,$$

non a eta b direlakoak integrazio-konstanteak diren, 1 eta 2 puntuen koordinatuen bidez kalkulatu ahal izango direnak, Ikus daitekeenez, soluzioa katenaria baten ekuazioari dagokio, alegia luzera-unitateko pisu uniformea duen soka batek bi punturen artean eskegia izatean hartzen duen formaren ekuazioa.

ARIKETAK

- 1.- Froga bedi ezen sistema mekaniko baten lagrangearra indeterminaturik dagoela koordenatuen eta denboraren edozein funtzioaren denborarekiko deribatu osoan (ikus Landau, 4 eta 5 or.).
- 2.- Hurrengo problema honek garrantzi historiko berezia du, zeren beraren analisisian abiatuz, J. Bernouilli-k lehenengo aldiz planteatu baitzuen bariazioen kalkulua. *Brakistokronaren problema* izenaz ezagutzen da eta honela planteatu daiteke: Grabitatearen eraginpean marruskadurarik gabe plano bertikal batetan erortzen den partikula puntual baten kasuan (hari zurrun baten ardatzean iduneko garauen modura loturik dagoen masa puntuala izan daiteke), (x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntuen artean pausagunetik abiatzen den partikula batek zein ibilbide egin behar duen kalkulatu nahi da, bidean ahalik eta denborarik laburrena emateko baldintzapean.

Froga bedi ibilbide hori zikloide bat dela eta egin bedi beraren adierazpen grafikoa.

- 3.- Aurreko problemaren arauera, partikula pausagunetik abiatzen denean, $v_0 = 0$, hasierako puntua zikloidearen erpinean dago kokatuta.
 - a) Nola higituko da partikula, baldin eta hasierako aldiunean v_0 abiadura badu beherantz?
 - b) Froga ezazu, kasu honetan ibilbidea ere zikloidea dela eta beraren erpina hasierako puntua baino $h = v_0^2 / 2g$ altuago dagoela.
- 4.- Oraindik ere brakistokronaren problemarekin jarraituz, froga bedi ezen, behin zikloidea finkatu ondoren, pausagunetik abiatuz partikulak zikloide horren punturik baxuenera iristeko behar duen denborak $\pi\sqrt{a/g}$ balio duela, hasierako puntua zikloideko edozein delarik. Zikloidearen ekuazio parametrikoak honelaxe eman daitezke:

$$x = a (\phi - \sin\phi), \quad y = a (1 - \cos\phi).$$

- 5.- Demagun gorputz bat aske uzten dugula grabitatearen eraginpean erortzen, hutsean eta marruskadurarik gabe, eta hasierako abiadura nulua izanik. Experimentalki neurtzen dugunez, 2 segundutan 20 m egiten ditu. Demagun, halaber, ez dakigula zein den ibilitako altuera (s) eta denbora (t) erlazionatzen dituen ekuazioa. Baldintza horietan

ondoko hiru balio hauek balio dezakete emaitza experimentalak justifikatzeko ($g = 10$ horri kasu bakoitzean dagozkion dimentsioak emanik noski):

$$s = g t \quad ; \quad s = \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \quad s = \frac{1}{4} g t^3 .$$

Froga ezazu, akzioaren integrala hiru hipotesien arauera erabiliz (lagrangearra ezaguntzat hartuz), balio minimoa bigarren adierazpenaren kasuan lortzen dela.

- 6.- Demagun ezen experimentalki ba dakigula partikula batek, bertikalki erortzean, y_0 distantzia konkretu bat egiteko $t_0 = \sqrt{2 y_0 / g}$ denbora behar duela, baina ez dakigula zer denbora behar duen beste distantzietarako. Demagun, halaber, problemaren lagrangearra ezaguna dela, baina $y(t)$ adierazpena lortzeko higiduraren ebazpena egin beharrean, ekintza

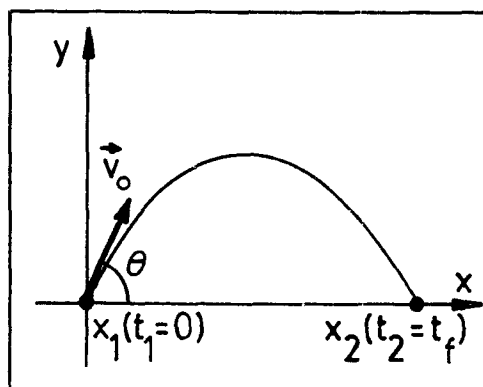
$$\int_0^{t_0} L dt$$

erakoa dela onartzen dugula. Baldin eta a eta b konstanteak y_0 distantziarako t_0 horren bidez adierazteko moduan doitzen badira, froga ezazu zuzenki ezen $y = a t + b t^2$ eginez balio extremala lortuko dugula, baina $a = 0$ eta $b = g/2$ denean soilik.

- 7.- Demagun v_0 abiaduraz eta θ angeluaz jaurtikitzen den projektilaren problema. Dakigunez, beraren ibilbidea ondoko ekuazioen bidez adierazten da:

$$x = v_0 t \cos \theta ,$$

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 .$$



- a) Ibilbide hori kontutan hartuz, lor ezazu ondoko ekintza-inte-

gralaren balioa,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt ,$$

non lagrangearraren balioa hauxe den:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y .$$

b) Kontsidera ezazu ondoko ibilbide aldatua:

$$x_v = x ,$$

$$y_v = y + \varepsilon \sin \omega t ,$$

non ε delakoa oso txikia den eta $\omega = \frac{n\pi}{t_f}$ (n : zenbaki osoa)

Froga ezazu, ibilbide aldatuari dagokion ekintza-integrala aurrekoa baino handiagoa dela.

8.- Froga ezazu ezen biraketazko zilindro bateko lerro geodesikoak helizeak direla.

4. GAIA

SIMETRIAK ETA KONTSERBAZIO-PRINTZIPIOAK

- 4.1. Kontserbazio-legeak eta higidura-konstanteak.
 - 4.2. Transformazio infinitesimalak.
 - 4.3. Simetri transformazioak.
 - 4.4. Noether-en teorema.
 - 4.5. Momentu kanoniko konjokatuaren kontserbazioa.
 - 4.6. Momentu linealaren kontserbazioa.
 - 4.7. Momentu angeluarraren kontserbazioa.
 - 4.8. Energiaren kontserbazioa.
 - 4.9. Masa-zentruaren teorema.
- Adibideak. Ariketak.

Oraingo gaia, Fisikaren kontzeptu oinarritzkoenatariko batzutarako sarrera da, simetria eta kontserbazioaren printzipioetarako hain zuzen. Beraz, kontserbazioaren legeak eta simetriak zer diren esaten hasiko gara.

Ondoren, batzuen eta besteen arteko harremanak argi eta zehazki finkatzeko, Noether-en teorema ezarriko dugu.

Azkenik, kontserbazioaren lau lege funtsezkoak aztertuko ditugu, dagozkien simetriak azpimarratuz.

Ba dakigu jakin, textuliburu gehienetan, zaharrak badira batez ere, higidura-konstanteen eta simetrien arteko erlazioak era intuikorrago eta errezago batez aztertzen direla, Noether-en teorema aipatu ere egin gabe. Horretarako arrazoi nagusia, hauxe dateke: Dinamika Analitikoaren beharretarako, horren metodo landu eta sofistikatuak gehiegikeria hutsa dirudiela. Baina, Dinamika Analitikoa ikastearen helburu garrantzitsuenetarikoa, gaurko fisika teorikoaren arloen sarrera delakoan, modu modernoago batez azaltzea nahiago izan dugu. Horrez gainera, ez dugu uste, hemen aztertutako beste gaiak baino zailagoa denik eta horrela gertatuko balitz, metodo pedagogikoa txarra delako izango litzakete, eta ez gaiaren beraren zailtasunarengatik.

Bestaldetik, metodo hau, askotan, gehiegizkoa gertatzen bada ere, gauza berbera esan liteke, agian, Dinamika Analitiko osoari buruz, zeren, problema asko ebazteko, Newtonen metodoak askoz errazagoak eta intuikorragoak baitira.

4.1. KONTSERBAZIO-LEGEAK ETA HIGIDURA-KONSTANTEAK

Hemendik aurrera, lagrangeaz deritzegun sistemez baino ez gara arduratuko, hots, potentzial arrunt edo orokortutiko kanpo-indarraren eraginpean higitzen diren sistemez, loturak ideal eta holonomo direlarik.

Beraz, sistemaren higidura-ekuazioak, (2.39) Lagrange-ren ekuazioak dira. Dakigunez, berauek, bigarren ordenako n ekuazio diferentzial arrunt dira. Berauen ebazketa, arazo matematiko hutsa dela esan genezake, askotan zaila edo ezina gertatzen bada ere. Baina, teorikoki behintzat, emaitza, hots, sistemaren zinematika, honelako n funtzioaren bidez adieraz daiteke,

$$q_j = q_j (t, k_1, k_2, \dots, k_{2n}) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (4.1)$$

non k_i direlakoak $2n$ integrazio-konstanteak diren eta hasierako baldintzez kalkulatu behar ditugun, kasu berezi bakoitzean.

Dakusagunez, q_j koordenatu orokortuak aldatuz doaz higiduran zehar, baina ba daude higiduran konstante irauten duten $G (\dot{q}_j, q_j, t)$ funtzio batzu, ondoko bi ekuazio baliokideak betetzeko modukoak gainera, baldin $q_j(t)$ direlakoak, (4.1) edozein higidura-soluzio badira,

$$\frac{dG}{dt} = 0 , \quad (4.2)$$

$$G (\dot{q}_j, q_j, t) = \text{ktea} . \quad (4.3)$$

Honelako funtzioei *higidura-konstanteak* edo eta *higidura-integralak* deritze.

Jakina, (4.3) adierazpeneko konstantearen balioak, erabiliriko $q_j(t)$ higidura-soluzioen dependentzia eduki dezake. Beraz, horrelako G funtzioa ez da benetako konstantea, baizik eta $q_j(t)$ funtzioak higidura-ekuazioen soluzio direneko kasuan, denborarekiko deribatu nulua duen funtzioa.

Zer esanik ez, higidura-konstante bati benetako K konstante bat gehitzen bazaio, beste higidura-konstante bat lortzen da:

$$\frac{d}{dt} (G + K) = 0 , \quad (4.4)$$

$$G (\dot{q}_j, q_j, t) + K = \text{ktea} , \quad (4.5)$$

baina, horrelako batuketak eduki fisikoa aldatzen ez duenez gero, higidura-konstanteak, edonolako konstante batetan indeterminaturik daudela esatea nahiago dugu. Gainera, konstante batetan izan ezik, berdinak diren higidura-konstante guztien multzoak, kontserbazio-lege bat definitzen duela esango dugu.

Zein da kontserbazio-printzipioen garrantzia eta interesa? Hara. Alde batetik eta ikuspuntu matematikotik, higidura-ekuazioen ebazketa egiten laguntzen digute, zeren integrazio-bidean, bitarteko urratsak izan ohi baitira, lehen ordenako ekuazio diferentzialak, alegia.

Gainera, askotan, higidura-ekuazioen soluzio matematiko osoa baino askoz interesgarriagoa, higidura-konstante batzuk ematen duten informazioa dateke.

Azken batez, nola adieraz, zehazki-mehazki, fisikaren arlo guztietan, higidura-konstanteek, eta hurrengo puntuko simetriek ere, duten garrantzia? Beraien zeregina hain da handia, eta kontzeptu fisikorik oinarritzkoenekin hain dago loturik, ezen, fisikaren historia egin ezik, ez baitakigu nola azal beraien garrantzia. Horrez gainera, hori egiteko, fisikaren arlo modernoak aipatu beharko genituzke, eta berauek gai honen helburuez landa daude.

Interesgarria gertatzen da, bestalde, zenbat higidura-konstante dagoen jakitea. Demagun, $G_1, G_2, \dots, G_p$ direlakoak sistemaren p higidura-konstante direla, eta biz edozein $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ funtzio. Orduan, $f(G_1, G_2, \dots, G_p)$ ere higidura-konstantea da, zeren

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial G_i} \frac{dG_i}{dt} \quad (4.6)$$

baita. Baina horrelako higidura-konstante berri bakoitzak ez dauka garrantzi berezirik, sistemaren higidurari buruz, ez baitu G_i funtzioek baino informazio gehiagorik. Aitzitik, askotan informazio gutxiago dauka, kontserbazio-lege bat bakarrik baita, eta G_i direlakoak p lege baitira.

Honek guztionek, zenbat higidura-konstante independente dagoen galdetzeraz eramaten gaitu. Hona hemen erantzuna : "*n askatasun-gradu dauzkan sistema baten higiduran, 2n higidura-konstante independente daude, eta berauek aurkitzea, sistemaren higidura-ekuazioak osoki ebatztearen baliokidea da*".

Gainera, sistemaren zinematika ebatzi ondoren,

$$q_j = q_j(t, k_1, k_2, \dots, k_{2n}) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.7)$$

soluzio orokorrak deribaturik,

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(t, k_1, k_2, \dots, k_{2n}) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

lortzen dira, eta $2n$ funtzio horien artean, ondoko $2n$ higidura-konstante independenteak atera ditzakegu:

$$k_i = k_i (\dot{q}_j, q_j, t) \quad (i = 1, \dots, 2n) . \quad (4.9)$$

Beste higidura-konstante guztiak, berauen funtzio gisan ipin daitezke.

Osterantzean, $2n$ $G_i(\dot{q}_j, q_j, t)$ higidura-konstante independente ezagutuz gero, funtzio horiek alderantziz jar daitezke, $q_j(t, G_i)$ eta $\dot{q}_j(t, G_i)$ funtzio berriak aurkitzeko, lehenak higidura-ekuazioen soluzio orokorra direlarik. (Ikus, E.J. Saletan eta A. H. Cromer, 57. orri.).

4.2. TRANSFORMAZIO INFINITESIMALAK

Lehenik eta behin, oraingo gai honetan transformazio infinitesimal zeri deituko diogun aztertzen hasiko gara.

Aipaturiko transformazioak, denbora eta koordenatu orokortuen transformazio-ekuazioen bidez definitzen ditugu, hots,

$$t \longrightarrow t' = t + \delta t , \quad (4.10)$$

$$q_j(t) \longrightarrow q'_j(t') = q_j(t) + \delta q_j \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (4.11)$$

hemen

$$\delta t = t' - t = \varepsilon f(t) , \quad (4.12)$$

$$\delta q_j = q'_j(t') - q_j(t) = \varepsilon g_j(q_k, t) \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad (4.13)$$

izanik, ε delakoa infinitesimoa delarik.

Ohi bezala, kalkulu guztietan lehen ordenako infinitesimoak baino ez ditugu gordeko. Horrexegatik, edozein magnituderen aldaketak balio berbera edukiko du hasierako koordenatuetan zein berrietan. Esate baterako,

$$\delta q_j(q_k, t) = \delta q_j(q'_k, t') , \quad (4.14)$$

zeren

$$\begin{aligned}
\delta q_j(q'_j, t') &= \varepsilon g_j(q'_k, t') \approx \varepsilon \left[g_j(q_k, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial g_j}{\partial t} \delta t \right] \\
&= \varepsilon g_j(q_k, t) + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial q_k} g_k + \frac{\partial g_j}{\partial t} t \right) \approx \varepsilon g_j(q_k, t).
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

Jakina, transformazioan abiadura orokortuak ere aldatu egingo dira,

$$\dot{q}_j(t) \longrightarrow \dot{q}'_j(t') = \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j \quad (j = 1, \dots, n), \tag{4.16}$$

eta adibide batetan ikusiko dugunez, $\delta \dot{q}_j$ direlakoen balioak hauexek ditugu:

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d \delta q_j}{dt} - \dot{q}_j \frac{d \delta t}{dt} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{4.17}$$

Beraz, t , $q_j(t)$ eta $\dot{q}_j(t)$ funtzioen dependentzia edukiko dute.

Lagrangearraren transformazioa, ekintza-integralaren zenbakizko balioa kasu batetan ere ez aldatzeko eran definituko dugu, hots,

$$L(\dot{q}_j(t), q_j(t), t) \longrightarrow L'(\dot{q}'_j(t'), q'_j(t'), t') \tag{4.18}$$

aldaketaren balioa ondoko adierazpenaren bidez definituz:

$$L'(\dot{q}'_j(t'), q'_j(t'), t') \frac{dt'}{dt} = L(\dot{q}_j(t), q_j(t), t). \tag{4.19}$$

Bestaldetik, (4.10) adierazpena erabiliz, ondoko emaitza erraz lor daiteke:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d \delta t}{dt}. \tag{4.20}$$

Kontura gaitezen oraingo transformazioak ez direla Hamilton-en printzipioa ezartzean erabilitakoen berdinak. Hemengoetan, denbora bera ere alda daiteke; haiek, berriz, denboraz landa gertatzen diren. Honelatan,

ba, nahiz eta ikur berberaz adierazi, hauek ez dira transformazio birtualak, oraingoetan denbora aldatzen baita. Definitu berriak ditugun δq_j direlakoek, ez dute zertan ezereztu behar aukeraturiko puntu batzutan. Hamilton-en printzipioaren kasuan, ez genuen lagangearraren aldaketa funtzionala definitu. Orain, oster, bai, (4.19) adierazpenaren bidez hain zuzen ere.

4.3. SIMETRI TRANSFORMAZIOAK

Simetri transformazioak zera dira, higidura-ekuazioen edozein soluzio tranformatuz lortzen dena era berean ekuazio horien soluzio izatea lortzen duten transformazioak. Hortaz, baldin eta soilik baldin hasierako higidura-ekuazioek eta tranformatutakoek soluzio-multzo berbera badute izango da simetria zkoa transformazioa.

Baina, horrela izanik ere, gure xedearentzat egokiago gertatuko zaigun erara definituko ditugu guk honelako transformazioak, definizioa mugatuago bada ere.

Higidura-ekuazioen tankera funtzionala gordetzen duten transformazio infinitesimalak, simetri transformazio infinitesimal deritzegu. Beraz,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad \text{eta} \quad \frac{d}{dt'} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial L'}{\partial q'_j}$$

adierazpenek guztiz berdinak izan behar dute funtzio bezala, hots,

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right] L(\dot{q}_j, q_j, t) = \left[\frac{d}{dt'} \frac{\partial}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial}{\partial q'_j} \right] L'(\dot{q}'_j, q'_j, t') \quad (j = 1, \dots, n), \quad (4.21)$$

edo eta

$$\left[\frac{d}{dt'} \frac{\partial}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial}{\partial q'_j} \right] L'(\dot{q}'_j, q'_j, t') = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right] L(\dot{q}_j, q_j, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.22)$$

berdinak bete behar dira.

Ohar gaitezen, aipaturiko adierazpenak berdintzak direla, eta ez ekuazioak, hots, ez soilik higidura-ekuazioaren soluzioak diren kasurako,

baizik eta $q_j(t)$ funtzioak edonolakoak izanik ere bete behar direla.

Berdintzak betetzeko eta, beraz, kontsideraturiko transformazioak simetriaizkoak izateko baldintza nahiko eta beharrezkoa, honelako funtzio bat izatea da,

$$\delta\Omega = \varepsilon Z(q_j, t), \quad (4.23)$$

ondoko berdintza betetzeko modukoa,

$$L'(\dot{q}_j, q_j, t) = L(\dot{q}_j, q_j, t) + \frac{d\delta\Omega}{dt}. \quad (4.24)$$

Hitzen bidez esanez, lagrangearraren tankera funtzionala, funtzio baten deribatuan baino ez da aldatzen.

Jakina, (4.24) adierazpena ondoko erara ere ipin daiteke:

$$L'(\dot{q}'_j, q'_j, t') = L(\dot{q}'_j, q'_j, t') + \frac{d\delta\Omega}{dt'}, \quad (4.25)$$

eta, lehen ordenaraino,

$$\frac{d\delta\Omega}{dt'} = \frac{d\delta\Omega}{dt}. \quad (4.26)$$

Ikusitako baldintza nahikoa dela, adibide batetan ikusiko dugu, eta berorren premiaren frogia E.J. Saletan eta A.H. Cromer-en liburuko 40. orrialdean aurki daiteke.

Hortaz, transformazio infinitesimala simetriaizkoa dela esan dezakegu, baldin eta soilik baldin lagrangearraren tankera funtzionala aldatu gabe uzten badu, funtzio baten deribatuan salbu.

Kasu berezi eta garrantzitsu bezala, *inbariantzi transformazio infinitesimalak* aipa daitezke, hots, lagrangearraren tankera funtzionala aldatzen ez duten transformazioak. Matematikoki esateko, kasu honetan

$$\delta\Omega = 0 \quad (4.27)$$

dugu, eta hortik

$$L'(\dot{q}_j, q_j, t) = L(\dot{q}_j, q_j, t), \quad (4.28)$$

lehenago esan dugunez.

Orain arte ikusitako bi definizio baliokideak, ez dira baliagarriak gertatzen gehienetan. Hori dela eta, transformazio infinitesimala simetriazkoa noiz den jakiteko, "test" bat aurkitzea komeni zaigu.

(4.19) eta (4.20) adierazpenetatik,

$$L'(\dot{q}'_j, q'_j, t') \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) = L(\dot{q}_j, q_j, t). \quad (4.29)$$

Kontsideraturiko transformazioa simetriazkoa bada, (4.25) erabil dezakegunez,

$$L(\dot{q}'_j, q'_j, t') \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) + \frac{d\delta\Omega}{dt} = L(\dot{q}_j, q_j, t) \quad (4.30)$$

dugu, eta hemendik

$$\begin{aligned} L(\dot{q}_j, q_j, t) \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \\ + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{d\delta\Omega}{dt} = L(\dot{q}_j, q_j, t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Beraz,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \frac{d\delta t}{dt} = - \frac{d\delta\Omega}{dt}. \quad (4.32)$$

Baldin eta soilik baldin aurreko adierazpenaren ezkerreko atala, t eta q_j aldagaien funtzio baten deribatuaren erara ipini ahal bada, transformazioa simetriazkoa da. Noski, aipatu berria dugun emaitzaren baldintza beharrezkoa baino ez dugu frogatu. Baina, nahikoa dela ere erraz frogadaiteke.

Esandakoaz gainera, test honek, garrantzirik gabeko konstante batetan indeterminaturik dagoen $\delta\Omega(q_j, t)$ funtzioa aurkitzea permititzen digu.

Bestaldetik eta ageri denez, transformazio infinitesimala inbariantziazkoa da, baldin eta soilik baldin (4.32) adierazpenaren ezkerreko atala nulua bada, hots, $\delta\Omega$ funtzioa nulua edo eta edozein konstante bada.

4.4. NOETHER-EN TEOREMA

Aurreko puntuetan higidura-konstanteak eta simetri transformazioak definitu ditugu. Eta hori, zertarako? Batzuen eta besteen artean nolako harremanak dauden ikusteko, hain zuzen ere. Oraingoan kontzeptu hauek elkarrekin erlazionatzeko, Noether-en teoremaz baliatuko gara.

Biz simetri transformazio infinitesimal bat. (4.32) adierazpena erabiliz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (L \delta t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\delta \dot{q}_j - \ddot{q}_j \delta t) + \\ + \frac{d \delta\Omega}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

zeren

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (4.34)$$

baita. Hortaz, (4.17) kontutan harturik,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (L \delta t + \delta\Omega) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Beraz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega \right] = \\ = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Hemen, $q_j(t)$ funtzioak higidura-ekuazioen soluzioak badira, eskuineko atala nulua da eta

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega \right] = 0 . \quad (4.37)$$

Hortaz,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega \quad (4.38)$$

higidura-konstantea da.

Honela adieraz dezakegu, ba, Noether-en teorema:

"Sistema lagrangear baten simetri transformazio infinitesimal bakoitzari, kontserbazio-lege bat dagokio, berau ondoko higidura-konstanteaz adierazita dagoelarik:

$$\begin{aligned} \varepsilon G(\dot{q}_k, q_k, t) = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \left(L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \delta t + \delta \Omega " . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Esana dugunez, G higidura-konstantea edonolako konstante batetan izan ezik dago definiturik. Nondik dator arbitraltasun hau? Hara. $\delta \Omega$ delakoa deribatu baten barruan definitu dugunez, edozein konstante, K , gehi dakioke ezer aldatu gabe, eta, beraz, $G(\dot{q}_j, q_j, t) + K$, kontserbazio-printzipio berberari dagokion beste higidura-konstante baliokide bat da.

Momentu orokortuen eta sistemaren hamiltondarraren definizioak erabiltzen baditugu,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (4.40)$$

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q_k, p_k, t) - L(\dot{q}_k(q_k, p_k, t), q_k, t) , \quad (4.41)$$

honela geratzen zaigu higidura-konstantea:

$$\varepsilon K(q_k, p_k, t) = \sum_{j=1}^n p_j \delta q_j - H \delta t + \delta \Omega = \varepsilon G(\dot{q}_k, q_k, t) . \quad (4.42)$$

Oharra : Hamiltondarra (4.41) adierazpenaren bidez definitzeko, (4.40) direlakoetatik ondoko n funtzioak lortu behar ditugu:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t) \quad (j, k = 1, \dots, n) . \quad (4.43)$$

Berau egiteko beharrezkoa den baldintza betetzen dela, hots, ondoko *hessiarra* nulua ez dela onartzen dugu,

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \neq 0 . \quad (4.44)$$

horrela egin ohi baita Mekanika Analitikoan. Ikus A. Mercier, 45. orri. eta E.J. Saletan eta A.H. Cromer, 41. orri.

4.5. MOMENTU KANONIKO KONJOKATUAREN KONTSERBAZIOA

Sistema langrangepar baten simetri propietate sinpleena, q_k koordenatu orokortu ziklikoren bat edukitzea dateke. Demagun, ba, q_k hori koordenatu ziklikoa dela, hau da:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 . \quad (4.45)$$

Azter dezagun ondoko transformakuntza infinitesimala:

$$\delta t = 0 , \quad (4.46)$$

$$\delta q_j = 0 \quad (j \neq k) , \quad (4.47)$$

$$\delta q_k = \varepsilon . \quad (4.48)$$

(4.17) adierazpena kontutan harturik,

$$\delta \dot{q}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (4.49)$$

Beraz, (4.32) testa kontsideratzen badugu,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + L \frac{d \delta t}{dt} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 . \quad (4.50)$$

Honek, ba, aztertutako transformazio infinitesimala, simetria izateaz gain, inbariantzi transformazioa da, zeren $\delta \Omega = 0$ aukera baitezakegu. Noether-en teorema dela medio, beroni dagokion higidura-konstantea, $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ momentu kanonikoa da.

Jakina, emaitza hau ezaguna zaigu, bigarren gaian lortu genuen eta, baina hemen beste bide batetik heldu gara bertoraino, Noether-en teoremaren adibide gisa, hain zuzen.

Gainera, q_k koordenatu orokortua ziklikoa da, baldin eta soilik baldin (4.48) bezalako transformazioa inbariantzi transformazioa bada, zeren transformazioa horrelakoa izateko baldintza nahiko eta beharrezkoa,

ondoko bi baldintza baliokideak betetzea baita:

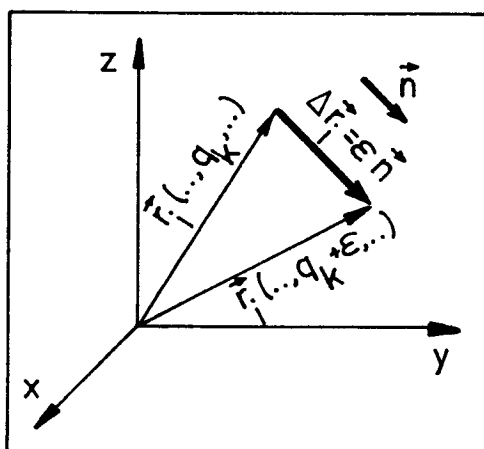
$$L (\dots, q_k + \varepsilon, \dots) = L (\dots, q_k, \dots) , \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 , \quad (4.52)$$

(4.30) adierazpena kontutan harturik ikusten denez.

4.6. MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOA

Aurreko puntuko lehen adibide gisa, demagun q_k koordenatuaren $\Delta q_k = \varepsilon$ aldaketa, sistema talde bezala kontsideratuz, sistemaren translazio bati dagokiola, edo eta, baliokidea dena, ardatz cartesianen kontrako aldaketa adierazten duela.



Aipaturiko translazioaren norabidea eta norantza, $\mathbf{n}$ bektore unitarioaren bidez adierazten dugu. q_k koordenatua ε balioaz aldatzen bada, sistemaren puntu guztien posizio-bektoreen aldaketa, $\varepsilon \mathbf{n}$ bektore berbera da (ikus alboko irudia), hots,

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i (\dots, q_k + \varepsilon, \dots) - \mathbf{r}_i (\dots, q_k, \dots) = \varepsilon \mathbf{n} . \quad (4.53)$$

Beraz,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q_k \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta q_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \mathbf{n}}{\varepsilon} = \mathbf{n} \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (4.54)$$

Hortaz, sistema kontserbakorra bada, q_k delakoari dagokion momentu orokortua, sistemaren momentu lineal osoaren osagai bat dugu, $\mathbf{n}$ bektorearen norabideari eta norantzari dagokiena, hain zuzen ere, zeren, (2.28), (2.16) eta (2.12) adierazpenak erabilirik, zera baitugu:

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \quad (4.55)$$

$$p_k = \mathbf{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}. \quad (4.56)$$

Aurreko puntuko emaitzak kontutan harturik, honela adieraz dezakegu momentu linealaren iraupenaren teorema: *"Norabide bati dagokion translazioa, sistema kontserbakorraren inbariantzi transformazioa baldin bada, norabide horretan, momentu linealak duen osagaia, higidura-konstantea da".*

Bestaldetik, (2.14) adierazpenaren bitartez,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

hots, abiadurak ez dira aldatzen, translazio espazial hutsetan. Beraz,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \right] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}, \quad (4.58)$$

Hortaz, q_k translazio-koordinatua ziklikoa izateko, edo gauza bera dena, q_k koordinatuaren norabidearekiko translazioa inbariantzi transformazioa izateko baldintza beharrezko eta nahikoa, aipaturiko norabidean indar erresultanteak duen osagaia nulua izatea da.

Horregatik, sistema langratarra kontserbakorra bada, eta norabide batetan, indar erresultantearen osagaia nulua bada, dagokion momentu lineal osoaren osagaia, higidura-konstantea da. Beharbada, horixe dateke

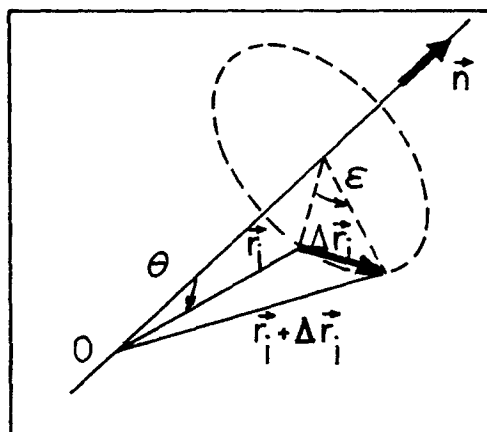
kontserbazio-lege honen adierazpen erabilgarriena.

Aztertutako sistema, itxia edo isolatua baldin bada, hots, bere osagaien arteko interakzioak baino pairatzen ez baditu, espazioaren homogenotasunak, momentu lineal osoa adierazten duen bektorearen kontserbazioa dakarkigu. Hauxe dugu momentu linealaren kontserbazio-legea, sistema kontserbakor isolatuen kasuan. Beraren frogapena zuzena da, zeren, sistema isolatua bada, indar erresultante delako bektorea nulua baita eta, era berean, indar erresultanteak edozein norabidetan duen osagaia ere bai.

4.7. MOMENTU ANGELUARRAREN KONTSERBAZIOA

Oraingo honetan, momentu kanoniko konjokatuaren beste adibide bat ikusteko, q_k koordenatuaren $\Delta q_k = \varepsilon$ aldaketa batek, sistemaren biraketa bat adierazten duela, edo eta ardatz kartesiarren kontrako aldaketari dagokiola kontsideratuko dugu.

Ohi bezala, biraketa-ardatzaren norabidea, $\mathbf{n}$ bektore unitarioaren bitartez adieraz daiteke, berorren norantzak biraketarena ematen digularik.



Erosotasunagatik, ardatz kartesiarren jatorritzat, biraketa-ardatzeko edozein puntu, 0 adibidez, aukeratu dugu. Beraz, irudian dakusagunez, q_k koordenatua ε balioaz aldatuz gero, puntu bakoitzaren posizio-bektorearen aldaketa ondokoa da,

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\dots, q_k + \varepsilon, \dots) - \mathbf{r}_i(\dots, q_k, \dots) = \varepsilon \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i$$

$$(i = 1, \dots, N) , \quad (4.59)$$

lehen ordenaraino, zeren

$$|\Delta \mathbf{r}_i| = r_i \sin \theta \varepsilon \quad (i = 1, \dots, N) \quad (4.60)$$

baita eta $\Delta \mathbf{r}_i$ delakoa, $\mathbf{n}$ eta $\mathbf{r}_i$ bektoreen perpendikularra baita, berorren norantza, $\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i$ bektorearena delarik.

Hortaz,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q_k \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta q_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i}{\varepsilon} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i$$

$$(i = 1, \dots, N) , \quad (4.61)$$

eta (2.28), (2.16) eta (2.12) adierazpenak kontutan harturik, koordenatu honen momentu konjokatua hauxe da,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i) , \quad (4.62)$$

$$p_k = \mathbf{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} , \quad (4.63)$$

hots, biraketa-ardatzarekiko momentu angeluar edo zinetikoaren osagaia.

Beraz, hauxe da momentu angeluarraren kontserbazio-teorema:
"Ardatz baten inguruan egiten den biraketa sistema kontserbakorraren inbariantzi transformazio infinitesimala baldin bada, ardatzaren norabidean momentu angeluar osoak duen osagaia, higidura-konstantea da".

Bestaldetik,

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad (4.64)$$

hots, biraketetan abiadurak alda badaitezke ere, berorien moduluek eta, beraz, energia zinetikoak, konstante irauten dute.

q_k biraketa-koordinatua ziklikoa izateko, hots, beroni dagokion biraketa infinitesimala inbariantzi transformazioa izateko, baldintza beharrezko eta nahikoa, biraketa-ardatzaren norabidean indar-momentu osoak duen osagaia nulua izatea da, zeren, (4.64) erabilirik, zera baitugu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i) = \\ &= \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Honela, bada, Mekanika bektorialean agertzen den momentu angeluarren teorema berraurkitzen dugu : *"Norabide batetan, sistema kontserbakorraren gainean eragiten duen indar-momentu osoaren osagaia nulua bada, dagokion momentu angeluarren osagaiak, konstante dirau higiduran"*.

Aztertzen dugun sistema isolatua edo itxia baldin bada, momentu angeluarra delako bektorea bera ere higidura-konstantea da. Aipaturiko kontserbazio-teorema, espazioaren isotropiari dagokiola esan ohi da.

4.8. ENERGIAREN KONTSERBAZIOA

Demagun, sistemaren lagrangearrak ez duela denboraren dependentzia espliziturik, hots,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (4.66)$$

Aztertuko dugun transformazioa, translazio denborala izango da:

$$\delta t = \varepsilon, \quad (4.67)$$

$$\delta q_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.68)$$

Beraz, δq_j guztiak nuluak dira eta (4.32) betetzen da, $d \delta \Omega / dt = 0$ delarik. Hortaz, transformazio hori simetriadakoa da eta, gainera, inbariantzi transformazioa ere. Ondorioz,

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

delako hamiltondarrak konstante dirau.

Ageri denez, teorema hau Lagrange-ren higidura-ekuazioak besterik ez erabiliz frogatzeak posible izan behar du. Eta horrela da, zeren, $q_j(t)$ higidura-ekuazioen soluzioak badira, zera baitugu,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{dL}{dt} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{dL}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

zeren, ibilbidean,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.70)$$

Beraz, edozein ibilbidetan zehar:

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.71)$$

Lorturiko teorema, honela adieraz daiteke: "*Sistemaren funtzio lagrangearrak, denboraren dependentzia expliziturik ez badu, sistemaren hamiltondarrak konstante irauten du higiduran*".

Kasu berezi gisa, baina oso garrantzi handikoa bestalde, aipa dezagun, lotura egonkorak dituen sistema kontserbakorraren kasua, koordenatu orokortuak higikorak ez direlarik. Kasu honetan, adibide batetan ikusiko dugunez, hamildondarra energia mekaniko osoa da eta

konstante dirau higiduran zehar. Dakusagunez, energia mekanikoaren kontserbazioaren printzipioaren adierazpen hau mugatuagoa da, Mekanikaren formulazio bektorialean eginikoa baino, zeren azken kasu honetan, sistema kontserbakorra izatea baino ez baitugu eskatzen. Eta hau, zergatik? Mekanika analitikoan ez bezala, mekanika bektorialean lotura-indarrek eginiko lana kontutan hartzen delako, eta, beraz, energia potentzialean sartu behar delako. Baina hemen aztertutako kasu berezian, ez da ezberdintasunik, zeren, loturek denboraren dependentzia expliziturik ez dutenez gero, desplazamendu birtualak eta benetakoak berdin-berdinak baitira eta, hortaz, loturak idealak direlarik, lotura-indarrek ez baitute egiten ez lan birtualik ez eta benetako lanik ere.

Simetrien eta kontserbazio-legeen arteko harremanak ager erazteko, ondoko erara ere adieraz daiteke oraingo kontserbazioaren printzipioa: "*Sistemarentzat, translazio denborala inbariantziazkoa baldin bada, funtzio hamiltondarra higidura-konstantea da*".

Teorema hau frogatzeko, kontura gaitezen ezen, (4.30) adierazpenarengatik, translazio denborala inbariantzi transformazioa izateko baldintza nahiko eta beharrezkoa, ondoko bi berdintza baliokideak direla:

$$L(\dot{q}_j, q_j, t + \varepsilon) = L(\dot{q}_j, q_j, t), \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (4.73)$$

Bukatzeko, diogun ezen, sistema lagrangear isolatu baten hamiltondarraren kontserbazioa, denboraren homogenotasunak dakarkigula, zeren kasu honetan $\partial L / \partial t = 0$ berdintza bete behar baita.

Sistema kontserbakor isolatuen kasua, hamiltondarraren kontserbazioa, eta, kasu garrantzitsuenetan, energia mekaniko osoaren kontserbazioa, denboraren homogenotasunari dagokio, momentu linealaren eta momentu zinetikoaren kontserbazioak, espazioaren homogenotasunari eta isotropiari dagozkien bezalaxe.

4.9. MASA-ZENTRUAREN TEOREMA

Orain arte ikusi ditugun simetri transformazio guztiak inbariantziazkoak direnez gero, zera galde diezaiekegu geure buruei, alegia, ez bestelako simetri transformazioek ezertarako balio ote duten. Erantzuna baiezkoa dela esan daiteke, nahiz eta horrelako transformazioen garrantzirik handiena Mekanika Klasikoaren arlotik kanpoan egon.

Adibiderik garrantzitsuenetarikoa, Galileo-ren transformazioa dateke, oraintxe ikusiko dugunez.

Demagun, N partikulaz osaturiko sistema isolatu bat. Koordenatu kartesiarrak aukeratuak ditugu arazoa aztertzeko. Indarrek, barne-indarrak izan beharko dute, sistema isolatua baita. Demagun, indarrak kontserbakorrak direla eta, akzio-erreakzioaren printzipioa hertsiki betetzeko, ondoko potentzialetikoak direla,

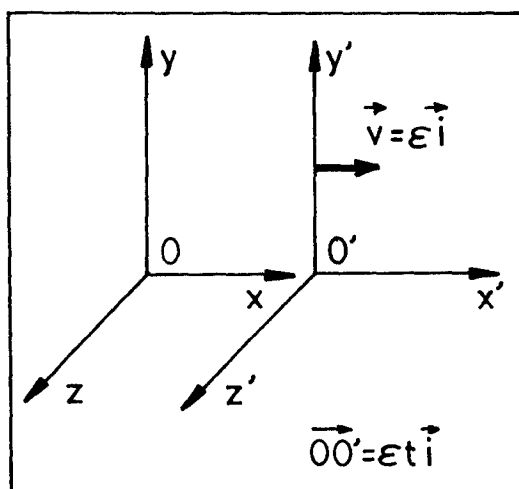
$$V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (4.74)$$

$$\text{non } \mathbf{r}_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (4.75)$$

baita (Ikus H. Goldstein, 13. orri.). Beraz, haxe da sistemaren langrangeparra:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (4.76)$$

Kontsidera ditzagun irudiko bi inertzi sistema. Berorien ardatzak elkarren paraleloak dira, OX eta $O'X'$ direlakoak zuzen berberean daudelarik. $O'X'Y'Z'$ sistema, $OXYZ$ sistemarekiko $\mathbf{v} = \epsilon \mathbf{i}$ abiadura infinitesimalaz higitzen da. Dakigunez, bi sistemetan eginiko neurketak elkarrekin erlazionatzen dituen transformazio infinitesimala, *Galileo-ren transformazio berezia* edo "*higidura-transformazioa*" deituri-koa da,



$$\delta t = 0 \quad (4.77)$$

$$\delta x_i = -\epsilon t \quad , \quad \delta y_i = 0 \quad , \quad \delta z_i = 0 \quad , \quad (i, \dots, N) \quad (4.78)$$

eta, (4.17) erabilirik,

$$\delta \dot{x}_i = -\varepsilon, \quad \delta \dot{y}_i = 0, \quad \delta \dot{z}_i = 0, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.79)$$

Berau simetri transformazioa da, zeren

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (4.80)$$

dela erraz froga baitaiteke eta transformazioak (4.32) adierazpena betetzen baitu, bertan

$$\delta \Omega = \varepsilon \sum_i m_i x_i \quad (4.81)$$

delarik. Noether-en teoremaren arauera, ondoko funtzioa higidura-konstantea da:

$$G_x = \sum_i m_i x_i - t \sum_i m_i \dot{x}_i. \quad (4.82)$$

Jakina, beste bi ardatzei dagozkien Galileoren transformazioak ere azter ditzakegu, eta bai dagozkien kontserbazioaren bi legeak lor ere. Hau guztiau, honela bil daiteke: "*Galileoren hiru transformazio independenteei ondoko higidura-konstante bektoriala dagokie:*

$$\mathbf{G} = M \mathbf{R} - t \mathbf{P}, \quad (4.83)$$

non

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (4.84)$$

sistemaren masa osoa den,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (4.85)$$

masa-zentruaren posizio-bektorea, eta

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i . \quad (4.86)$$

sistemaren momentu lineal osoa.

Beraz, Galileo-ren erlatibitatearen printzipioaren ondorioz, emandako $\mathbf{G} = M \mathbf{R} - t \mathbf{P}$ bektorea higidura-konstantea da. Hauxe dugu masa-zentruaren teorema. Berorren esangura fisikoa argitzeko, gogora gaitezen ezen, 4.7. puntuan ikusi genuenez, sistema isolatua denez gero, $\mathbf{P}$ momentu linealak konstante irauten duela higiduran zehar. Hortaz,

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{G}}{M} + t \frac{\mathbf{P}}{M} , \quad (4.87)$$

hots, masa-zentruaren ibilbidea zuzena da, edo beste hitzez esateko, masa-zentruaren abiadurak,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{M} , \quad (4.88)$$

konstante dirau higiduran. Beraz, baldin momentu linealaren kontserbazioa erabiltzen badugu, masa-zentruaren teoremak, masa-zentruaren abiadura higidura-konstantea dela diosku; eta emaitza hau, erabiliriko momentu linealaren ondorio hutsa da. Baina, berez, masa-zentruaren teorema, (4.83) adierazpeneko bektorea higidura-konstantea izatea da, eta dagokion simetria, inertzi sistema guztietan Mekanikaren higidura-ekuazioak tankera berbera edukitzea. Egia esateko, aipaturiko simetriari, hots, Galileoren erlatibitatearen printzipioari, hamar kontserbazio-lege dagozkio, hain zuzen ere, momentu linealaren hirurak, momentu angeluarraren hirurak, energiarena eta masa-zentruaren hirurak, zeren espazioaren homogenotasuna eta isotropia eta denboraren homogenotasuna, erlatibitatearen printzipioaren kasu bereziak baitira, eta ardatzen translazioak eta biraketak eta denboraren jatorriaren translazioak ere, inertzi sistemaren aldaketak baitira. Azken transformazio hauek lehen aztertu baditugu ere, berriro ikusiko ditugu adibide batzutan, oraingo sistema mekanikoaren kasuan, hemen ikusirikoa argitzeko asmoz.

Masa-zentruari buruzko informazio handiagoa lortzeko, ikus bedi Handbuch der Physik, Band IV, 145. orrialdea.

1. Adibidea

Froga bitez ondoko adierazpenak:

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j - \dot{q}_j \frac{d}{dt} \delta t, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Argi dagoenez,

$$q'_j(t') = q'_j(t) + \frac{dq_j}{dt} \delta t = q'_j(t) + \dot{q}_j \delta t,$$

beraz,

$$q'_j(t) - q_j(t) = [q'_j(t') - q_j(t)] - \dot{q}_j \delta t = \delta q_j - \dot{q}_j \delta t,$$

eta hortik,

$$\dot{q}'_j(t) - \dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt} [q'_j(t) - q_j(t)] = \frac{d}{dt} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t).$$

Bestaldetik,

$$\dot{q}'_j(t') = \dot{q}'_j(t) + \frac{d\dot{q}'_j}{dt} \delta t = \dot{q}'_j(t) + \frac{d\dot{q}_j}{dt} \delta t,$$

zeren, lehen ordenaraino, zera baitugu:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{q}'_j}{dt} \delta t &= \frac{d}{dt} [\dot{q}'_j(t)] \delta t = \\ &= \frac{d}{dt} [\dot{q}_j(t) + \frac{d}{dt} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t)] \delta t = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \dot{q}_j(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} [q_j(t) - \dot{q}_j f(t)] \right\} \varepsilon f(t) = \\ &= \frac{d}{dt} [\dot{q}_j(t)] \varepsilon f(t) = \frac{d\dot{q}_j}{dt} \delta t. \end{aligned}$$

Hortaz,

$$\begin{aligned}\delta \dot{q}_j &= \dot{q}'_j(t') - \dot{q}_j(t) = \left[\dot{q}'_j(t) - \dot{q}_j(t) \right] + \frac{d\dot{q}_j}{dt} \delta t = \\ &= \frac{d}{dt} (\delta q_j - \dot{q}_j \delta t) + \frac{d\dot{q}_j}{dt} \delta t = \frac{d\delta q_j}{dt} - \dot{q}_j \frac{d\delta t}{dt},\end{aligned}$$

frogatu nahi genuen bezala (f.n.g.b).

2. Adibidea

Froga bedi, ondoko berdintza betetzen duen $\delta\Omega(q_j, t)$ funtzio bat badago, transformazio hori simetriadakoa dela.

$$L'(\dot{q}_j, q_j, t) = L(\dot{q}_j, q_j, t) + \frac{d\delta\Omega}{dt}.$$

Begi bistan dagoenez, ondoko berdintzak baino ez ditugu frogatu behar:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right] \frac{d\delta\Omega}{dt} = 0, \quad (j = 1, \dots, n),$$

eta hori, $q_j(t)$ nolanahikoak izanik.

Dakigunez, $\delta\Omega$ delakoak q_j eta t -ren dependentzia duenez gero,

$$\frac{d\delta\Omega}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \delta\Omega}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \delta\Omega}{\partial t}.$$

Beraz,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{d\delta\Omega}{dt} \right] = \frac{\partial \delta\Omega}{\partial q_j},$$

eta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{d \delta \Omega}{dt} \right] &= \sum_k \frac{\partial^2 \delta \Omega}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \delta \Omega}{\partial q_j \partial t} = \\
&= \sum_k \frac{\partial^2 \delta \Omega}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \delta \Omega}{\partial t \partial q_j} = \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta \Omega}{\partial q_j} \right] .
\end{aligned}$$

Hortik,

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right] \frac{d \delta \Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta \Omega}{\partial q_j} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta \Omega}{\partial q_j} \right] = 0 .$$

f.n.g.b.

3. Adibidea: Hamiltondarraren esangura fisikoa

(2.8) transformazio-ekuazioak erabiliz,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i (q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, n) ,$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i (q_j, t) = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} .$$

$$T (q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i .$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i &= \sum_{j,k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \\
&+ 2 \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} .
\end{aligned}$$

Ondoko funtzioak definitzen baditugu,

$$a_{jk} = a_{jk}(q_r, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} ,$$

$$a_j = a_j(q_r, t) = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} ,$$

$$a = a(q_r, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} ,$$

$$T_2 = T_2(\dot{q}_r, q_r, t) = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k ,$$

$$T_1 = T_1(\dot{q}_r, q_r, t) = \sum_j a_j \dot{q}_j ,$$

$$T_0 = T_0(q_r, t) = a ,$$

ondoko emaitza lor dezakegu:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 .$$

Argi dagoenez,

$$\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2 T_2 + T_1 ,$$

(zuzenki lor daitekeen emaitza hau, funtzio homogenoetarako Euler-en teoremaren kasu berezi bat baino ez da).

Sistema kontserbakorra baldin bada

$$L = T - V$$

eta

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} V(q_j, t) = 0 .$$

Hortik,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} ,$$

eta, ondorioz,

$$H = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = T_2 + T_0 + V .$$

Sistema kontserbakorra izateaz gainera, loturak egonkorak badira eta koordinatu orokortuak higidarriak ez badira, edota zehazkiago esanez, (2.8) transformazio-ekuazioak denboraren dependentzia expliziturik ez badute, hots, zera betetzen bada,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0 , \quad (i = 1, \dots, N) .$$

Orduan,

$$T_0 = T_1 = 0 ,$$

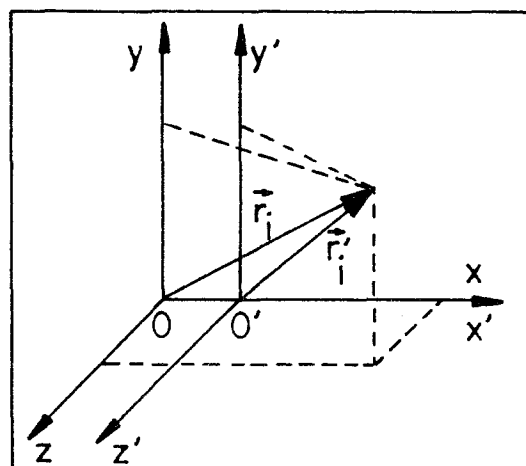
$$T = T_2 ,$$

$$H = T_2 + V = T + V ,$$

hots, hamiltondarra, sistemaren energia mekaniko osoa da, eta konstante dirau higiduran zehar, zeren $\partial L / \partial t = 0$ baita.

4. Adibidea: Ardatzen translazioa

4.9. puntuko sistema mekanikoa itxia denez gero, berorren momentu lineala higidura-konstantea da, baina zuzenki frogatzeko, ezin jarrai gakizkioke 4.6. puntuko metodoari, koordinatu cartesiarretan ez baitago han erabilitako translazio-koordinatu ziklikorik. Zeintzu izan litezke horrelako koordinatuak? Masazentruarenak, noski. Baina ez dugu koordinatuen aldakuntzarik egin nahi, guztiz beharrezkoa ez baita.



Demagun irudian agertzen den ardatzen translazioa, hots,

$$\delta t = 0 ,$$

$$\delta x_i = -\varepsilon , \quad \delta y_i = \delta z_i = 0 , \quad (i = 1, \dots, N) ,$$

$$\delta \dot{x}_i = \delta \dot{y}_i = \delta \dot{z}_i = 0 , \quad (i = 1, \dots, N) .$$

Translazio-koordinatu zikliko bat egotearen ordezt, erabiliko dugun baldintza, hauxe da:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 .$$

(4.74) eta (4.75) erabiliz, erraz froga daitekeenez. Aztertutako translazioa inbariantziazkoa dela ageri da, eta jakina, hori, erraz ikus daiteke, (4.32) adierazpenaren bitartez. Beraz, Noether-en teorema dela medio, ondoko higidura-konstantea lortzen dugu:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m_i \dot{x}_i = P_x .$$

Beste bi ardatzekiko translazioak ondokoak dira:

$$\left. \begin{array}{l} \delta t = 0 , \\ \delta x_i = \delta z_i = 0 , \quad \delta y_i = -\varepsilon , \\ \delta \dot{x}_i = \delta \dot{y}_i = \delta \dot{z}_i = 0 . \end{array} \right| \begin{array}{l} \delta t = 0 , \\ \delta x_i = \delta y_i = 0 , \quad \delta z_i = -\varepsilon , \\ \delta \dot{x}_i = \delta \dot{y}_i = \delta \dot{z}_i = 0 . \end{array}$$

eta dagozkien baldintzak:

$$\left. \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 . \right| \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0 .$$

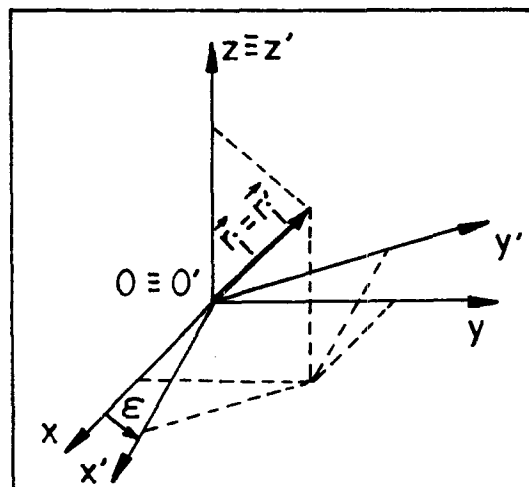
Hauek erabiliz gero, momentu linealaren beste bi osagaien kontserbazioa lor daiteke. Beraz, hiru translazio independenteei momentu linealaren kontserbazioaren lege hirukoitza dagokie, lehenago ere ba genekienez.

Esan dugunez, hemen azaltzen zaigun simetria, Galileo-ren erlatibitatearen printzipioaren kasu berezi bat da, espazioaren homogenotasunari dagokiona hain zuzen. Erabili ditugun transformazioak, ardatzen translaziotzat edo eta sistemaren kontrako translaziotzat uler ditzakegu. Lehen kasuan, inertzi sistema batetatik beste batetara iragan gara.

5. Adibidea: Ardatzen biraketa

Berriro ere 4.9. puntuko sistemaz ari izanen gara. Lehen bezala, ez dago biraketa-koordinatu ziklikorik, eta momentu angeluarraren kontserbazioa Noether-en teoremaz zuzenki frogatzeko, ezin dezakegu erabil 4.7. puntuko metodoa.

Kontsidera dezagun irudian adierazten den ardatzen biraketa,



$$\delta t = 0 ,$$

$$\delta x_i = \varepsilon y_i , \quad \delta y_i = -\varepsilon x_i , \quad \delta z_i = 0 ,$$

$$\delta \dot{x}_i = \varepsilon \dot{y}_i , \quad \delta \dot{y}_i = -\varepsilon \dot{x}_i , \quad \delta \dot{z}_i = 0 ,$$

4.9. puntuan ageri den biraketa-koordinatu zikliko bat egoteko baldintzaren orde, ondokoa erabiliko dugu:

$$\sum_i \left[y_i \frac{\partial L}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial L}{\partial y_i} + \dot{y}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right] = 0 ,$$

zeina erraz frogatu daitekeen.

Agertzen denez, oraingo biraketa inbariantzi transformazioa da eta, gura badugu, (4.32) adierazpenaz frogatu dezakegu. Noether-en teorema erabilirik, ondoko higidura-konstantea lortzen da:

$$\sum_i \left[x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - y_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = \sum_i (x_i m_i \dot{y}_i - y_i m_i \dot{x}_i) = L_x .$$

Beste bi biraketa independenteak kontutan hartuz,

$$\left. \begin{aligned} \delta t &= 0, \\ \delta x_i &= -\varepsilon z_i, \delta y_i = 0, \delta z_i = \varepsilon x_i, \\ \delta \dot{x}_i &= -\varepsilon \dot{z}_i, \delta \dot{y}_i = 0, \delta \dot{z}_i = \varepsilon \dot{x}_i, \end{aligned} \right| \begin{aligned} \delta t &= 0, \\ \delta x_i &= 0, \delta y_i = \varepsilon z_i, \delta z_i = -\varepsilon y_i, \\ \delta \dot{x}_i &= 0, \delta \dot{y}_i = \varepsilon \dot{z}_i, \delta \dot{z}_i = -\varepsilon \dot{y}_i, \end{aligned}$$

eta ondoko baldintzak erabilirik,

$$\sum_i \left[x_i \frac{\partial L}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \dot{z}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] = 0,$$

$$\sum_i \left[z_i \frac{\partial L}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial L}{\partial z_i} + \dot{z}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \dot{y}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right] = 0,$$

momentu zinetikoaren beste bi osagaien kontserbazioa lortzen dugu.

Inertzi sistema batetatik beste batetara iragateko biraketei, momentu angeluarraren hiru kontserbazio-lege independenteak dagozkie, erlatibitatearen printzipioa, edo zehazkiago esanez, espazioaren isotropia dela kausa.

6. Adibidea: Denboraren jatorriaren translazioa

Aurreko bi adibideetako sistema aztertuz, kontsidera dezagun denboraren jatorriaren translazioa edo aldakuntza, hots, erlojuaren aurreratzea zein atzeratzea. Orain ez dugu 4.8. puntuko azalpenak hitzez hitz berresateko oztoporik, zeren $\partial L / \partial t = 0$ baita. Beraz,

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(r_{ij}) = E,$$

hamiltondarra higidura-konstantea izateaz gainera, sistemaren energia osoa da. Emaizta hau argi zegoen, zeren sistema itxia eta kontserbakorra baita, ez baitago loturarik eta koordenatuak ez baitira higigarriak. Hau guztiau ezaguna genuen, baina azpimarratu nahi duguna zera da, denborarekiko translazioa inertzi sistema biren arteko transformazioa dela, eta denboraren homogenotasuna Galileoren erlatibitatearen printzipioaren

ondoriotzat jo dezakegula, zeren inertzi sistema, ardatz cartesiarrez gainera, hots, hiru norabide elkarren perpendikularrez gainera, neurtzeko erregela bat eta erloju bat dituen behatzaile batez osoturik baitago.

7. Adibidea: Runge-Lenz-en bektorea

Arrazoi pedagogikoengatik, δq_j aldaketek t eta q_k aldagaien dependentzia baino ez zezatela eduki eskatu genuen arren, baldintza hau ez da beharrezkoa eta kendu egin dezakegu deus aldatu gabe, (4.15) adierazpenaren frogatzeko metodoa izan ezik. Aitzitik, oraintxe ikusiko dugunez, batzutan, δq_j direlakoek $\dot{q}_k$ aldagaien dependentzia eduki dezatela permititzea interesgarria gerta dakiguke.

Kontsidera dezagun Kepler-en problema, $V = -k/r$ potentzial zentrolean higitzen den puntu material bat. Koordenatu cartesiarrak erabiliko ditugu eta komenigarri denean, notazio bektoriala ere bai.

Hauxe da sistemaren lagrangearra:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad \text{direlarik.}$$

Kontsidera ditzagun ondoko hiru transformazio infinitesimalak,

$$\delta_k t = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\delta_k x_i = \varepsilon m \left[2 \dot{x}_i x_k - x_i \dot{x}_k - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \delta_{ik} \right] \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

eta, (4.17) adierazpenetik,

$$\delta_k \dot{x}_i = \varepsilon m \left[2 \ddot{x}_i x_k + \dot{x}_i \dot{x}_k - x_i \ddot{x}_k - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \delta_{ik} - (\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \delta_{ik} \right].$$

Erraz ikus daitekeenez, transformazio hauek simetria-koak dira, zeren (4.32) baldintza betetzen baitute,

$$\delta_k \Omega = -m^2 \left[\dot{\mathbf{r}}^2 x_k - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{x}_k \right] - m \frac{k}{r} x_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Beraz, Noether-en teorema dela medio, dagozkien hiru higidura-konstanteak, hauexek ditugu:

$$A_k = m^2 \dot{\mathbf{r}}^2 x_k - m^2 (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) x_k - m \frac{k}{r} x_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Hortaz, ondoko bektorea bera ere higidura-konstantea da:

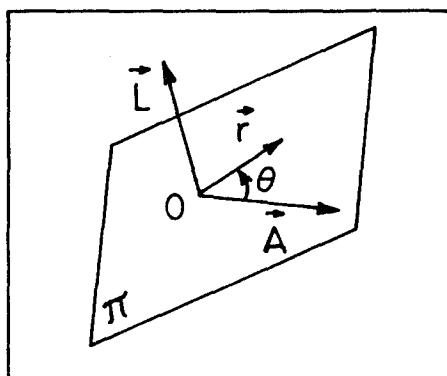
$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{L} - km \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Honi Runge-Lenz-en bektorea deritzo, eta adierazten dizkigun kontserbazioaren hiru legeek, ibilbide edo orbitaren ekuazioa lortzea permititzen digute.

Ageri denez, $\mathbf{L}$ momentu zinetikoa higidura-konstantea da eta, definizioen arauera, ondoko berdintzak betetzen dira:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0,$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0.$$



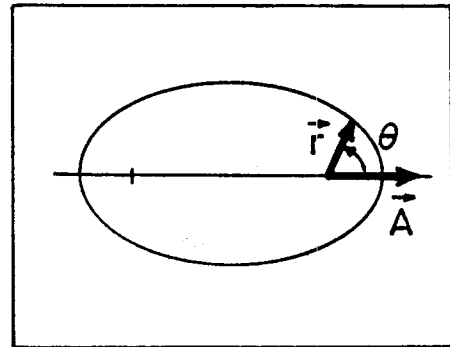
Beraz, $\mathbf{L}$ bektorearen perpendikularra den planoan gertatzen da higidura, eta $\mathbf{A}$ bektorea plano horretan datza. Baldin $\mathbf{r}(t)$ bektorearen eta $\mathbf{A}$ delakoaren arteko angeluari $\theta(t)$ baderitzogu, zera dugu:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = r A \cos \theta = \mathbf{r} \cdot \left[\mathbf{p} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) - km \frac{\mathbf{r}}{r} \right],$$

$$r = \frac{L^2}{mk(1 + e \cos \theta)},$$

$$\text{non } L = |\mathbf{L}| = ktea \text{ eta } e = \frac{A}{mk} = ktea \text{ baitira.}$$

Azken emaitza hori e exzentrikotasunezko konika baten ekuazioa da, indarren zentrua den O puntuan foko bat duena. A bektorearen modulua $e m k$ da eta berorren norabidea, orbitaren ardatz nagusiarena.



Beti bezala, higidura-ekuazioak erabiliz, erraz froga daiteke A bektorearen kontserbazioa.

ARIKETAK

- 1.- Kalkula bedi, eremu elektromagnetiko baten eraginpean higitzen den partikula baten hamiltondarra.

$$\text{Emitza: } H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi .$$

- 2.- Froga bedi ezen $x = \varepsilon \sin \omega t$ (non $\omega = \sqrt{k/m}$) transformazioa, oszilagailu harmoniko unidimentsionalaren simetri transformazioa dela. Zein higidura-konstante dagokio?

$$\text{Emitza: } m (\dot{x} \sin \omega t - \omega x \cos \omega t) .$$

- 3.- Biz, q_k koordenatu ziklikoa duen $L(\dot{q}_j, q_j, t)$ lagrangearra. Beraz p_k momentu orokortua, higidura-konstantea da. Baldin eta lagrangear berritzat

$$L' = L + \frac{d\phi(q_j, t)}{dt}$$

hartzen badugu, higidura-ekuazioak berberak dira, dakigunez. Baina

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\phi}{dt} \neq 0$$

baldin bada, oraingo momentu kanonikoa ez da higidura-konstantea. Azter bedi paradoxa hau. Higidura-ekuazio berberak erabilirik, nola lor daitezke, denbora berean, kontserbazioa eta ez-kontserbazioa?

Iradokizuna : Azter bedi momentu orokortuaren definizioa, bi lagrangearren bitartez.

- 4.- Demagun eremu elektromagnetikoak "gauge transformakuntza" edo "eskala transformazio" bat jasaten duela, hots,

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} ,$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda ,$$

Λ delakoa, $\mathbf{r}$ -ren, eta t -ren edozein funtzio delarik. Froga bedi, lagrangear funtzioa ez bezala, eremuak eta higidura-ekuazioak ez

direla aldatzen.

$$\text{Emitza: } L' = L + \frac{e}{c} \frac{d\Lambda}{dt} .$$

- 5.- Denboraren dependentzia expliziturik ez duen lagrangearra onartzen duen sistemaren hamiltondarraren kontserbazioa, translazio denbora explizituaz baliaturik aurkitu dugu. Froga bedi ondoko transformazioaren bidez ere lor daitekeela delako printzipioa:

$$\delta q_j = \varepsilon \dot{q}_j .$$

Translazio denbora inplizitua deritzo honi.

- 6.- Biz, ondoko lagrangearra:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (\alpha x + \beta y) ,$$

non α eta β konstanteak diren.

- a) Energia, higidura-konstantea al da?
- b) Momentu linealaren osagaien batek konstante al dirau higiduran zehar?
- c) Aurreko galderaren erantzuna baiezkoa baldin bada, aurki bedi dagokion simetri transformazioa.

Emitza : a) Bai.

b) Bai. $p_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$;

$$\mathbf{p} = m (\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j}) ; \mathbf{n} = \beta \mathbf{i} - \alpha \mathbf{j} .$$

c) $\delta x = \varepsilon \beta$; $\delta y = -\varepsilon \alpha$.

- 7.- Aurreko ariketaren kasuan, aurki bitez koordenatu orokortu egokiak, zeintzuetan p_n delakoari dagokion koordenatua ziklikoa den.

$$\text{Emitza: } q_1 = \alpha x + \beta y , \quad q_2 = \beta x - \alpha y .$$

8.- Sistema berbera kontsideratuz, azter bitez translazio espazialak.

Emaitza: Simetriazkoak dira eta dagozkien higidura konstanteak

$$m \dot{x} + \alpha t \quad \text{eta} \quad m \dot{y} + \beta t \quad \text{dira} .$$

9.- Simetriak aztertuz, aurki bidez ondoko lagrangearra duen sistemaren bi higidura-konstante eta dagozkien inbariantzi transformazioak.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V_0 \left(x \sin \frac{2\pi}{R} z + y \cos \frac{2\pi}{R} x \right) .$$

$$\text{Emaitza: Energia eta } L_z - \frac{R}{2\pi} p_z .$$

Translazio denborala eta

$$\delta x = \varepsilon y ; \quad \delta y = -\varepsilon x ; \quad \delta z = \varepsilon \frac{R}{2\pi} .$$

(Eremuak simetria helikoidala du).

10.- Erabil bitez gai honen metodoak, 2. kapituluaren ariketa batzuren higidura-ekuazioak ebazten laguntzeko.

5. GAIA

HAMILTON-EN FORMALISMOA

- 5.1. Legendre-ren transformazio duala.
 - 5.2. Hamilton-en ekuazio kanonikoak.
 - 5.3. Routh-en metodoa.
 - 5.4. Hamilton-en printzipioa.
 - 5.5. Maupertius-en printzipioa.
 - 5.6. Poisson-en kortxeteak.
 - 5.7. Poisson-en kortxeteak eta higidura-ekuazioak.
 - 5.8. Poisson-en kortxeteak eta higidura-konstanteak.
- Adibideak. Ariketak.

Orain arteko gaietan, Mekanika Analitikoaren oinarri bezala, lagrangearra izeneko funtzioa hartu izan dugu, eta beronetik Lagrange-ren izeneko ekuazioak lortu ditugu. Formulazio honen arauera, edozein sistema mekanikoren egoera, koordenatu eta abiadura orokortuen funtzioan ematen da, eta horrela adierazten da osorik.

Gai honetan beste formulazio-modu bat prestatuko dugu, aurrekoaren baliokidea dena: Hamilton-en formulazioa. Ikusiko dugunez, jadanik ezaguna dugun funtzio bat —hamiltondarra, prezeski— erabiliko dugu oinarritzat eta, kasu honetan, sistema mekanikoaren egoera deskribatzeko koordenatu orokortuak eta momentu orokortuak hartuko dira. Formulazio honek zenbait abantail eta desabantail ditu Lagrange-renarekin konparatuz. Besteren artean aipa ditzagun hauek biok: batetik "koordenatu" independente gehiago erabiltzen ditu ($2n$, aurreko n -ren ordezt) eta bestetik, lortzen diren ekuazio diferentzialak lehen ordenakoak dira (Lagrange-ren formalismoan bigarren ordenakoak ageri dira). Bestalde, koordenatu-sistemen arteko transformazioen eremua zabaldu egin daiteke, Hamilton-en formalismoa aldaezina baita puntual ez diren transformazio batzuri buruz ere, transformazio kanonikoei buruz hain zuzen ere.

Honelatan, ba, eta bestelako xehetasunetan sartu gabe, Hamilton-en formalismoak Lagrange-renak ez dituen posibilitate batzutarako bidea irekitzen duela esan dezakegu. Bestalde, ez da ahaztu behar Mekanika Kuantikoaren formalismoak Hamilton-ena hartu zuela abiapuntutzat. Hala ere, hurrengo gaian ikusiko dugunez, honekin ez da posibilitateen eremua ixten.

5.1. LEGENDRE-REN TRANSFORMAZIO DUALA

Orain arte, Mekanika osoa Lagrange-ren ekuazioez aztertzean, sistema mekanikoaren aldagaiak q_j eta $\dot{q}_j$ direlakoan funtzioan agertu izan dira. Hala ere, posible da horien ordezt q_j eta p_j direlakoan funtzioan jartzea, eta gainera, zenbait kasutan, egokiago gertatzen da horrela egitea. Aldagai independenteen aldaketa hori Legendre-ren transformazio dualaz egin daiteke, eta berau da prezeski, puntu honetan aztertuko duguna.

Kontsidera dezagun sistemaren lagrangearra: $L(q_j, \dot{q}_j)$. Sistemaren informazioa daraman beste funtzio bat lortu nahi dugu, $H(q_j, p_j)$ alegia, gero hamiltondarra deituko duguna. Kontutan har, ezen gure arrazonamendu honetan ez dugula denbora aipatzen; aurrerago ikusiko dugu jokabide honen arrazoia.

Idatz dezagun lagrangearraren diferentzial osoa:

$$dL = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j . \quad (5.1)$$

Orain kontutan eduki ditzagun alde batetik momentu orokortuen definizioa eta bestetik Lagrange-ren ekuazioak:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} , \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 . \quad (5.3)$$

Azken honetatik,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = \dot{p}_j . \quad (5.4)$$

(5.2) eta (5.4) direlakoak (5.1) adierazpenera eramanez,

$$dL = \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j . \quad (5.5)$$

Orain Legendre-ren transformazioa egiteko, haxe edukiko dugu kontutan:

$$\sum_j p_j d\dot{q}_j = d \left(\sum_j p_j \dot{q}_j \right) - \sum_j \dot{q}_j dp_j . \quad (5.6)$$

(5.5)-era eramanez,

$$dL = \sum_j \dot{p}_j dq_j + d \left(\sum_j p_j \dot{q}_j \right) - \sum_j \dot{q}_j dp_j . \quad (5.7)$$

Hemendik ondokoa lortzen da errazki:

$$d \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - L \right) = - \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j . \quad (5.8)$$

Lehen zatian diferentzialaren ikurraren eraginaren barnean ageri den funtzioari, *hamiltondarra* deritzogu eta H letraz adieraziko dugu:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L . \quad (5.9)$$

Ongi aztertzen badugu, 4.4. puntuan definitu genuen hamiltondar berbera dela ikusiko dugu. Hamiltondarraren diferentzial osoa honelaxe geratzen zaigu:

$$dH = - \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j . \quad (5.10)$$

Honek zera esan nahi digu, alegia, H delako funtzio hau q_j eta p_j aldagai independenteen funtzio dela, hots, $H(q_j, p_j)$ dela.

Modu honetan, ba, ebatzi egin dugu galdera honen hasieran planteatzen genuen problema, hau da,

$$L(q_j, \dot{q}_j) \longrightarrow H(q_j, p_j)$$

delako transformazioa egin dugu, lagrangearrak sistema mekanikoari buruz $(q_j, \dot{q}_j)$ aldagai independenteen funtzioan zeukan informazioa, hamiltondarraren barnera pasatuz, (q_j, p_j) aldagaien funtzioan. Burutua dugu, beraz, Legendre-ren transformazio duala.

q_j eta $\dot{q}_j$ (edo q_j eta p_j) aldagai independenteez gainera lagrangearrak (edo hamiltondarrak) beste parametro batzu ere ba ditu. Parametro hauek batzutan sistema mekanikoari buruzkoak dira eta bestetan, kanpoko eremuari buruzkoak. Denbora bera ere horrelakoa da. Biz λ horrelako parametro bat. Parametro hori aldagai bezala kontsideraturik, honela idatzi behar da (5.5) diferentziala:

$$dL = \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j p_j dq_j + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda . \quad (5.11)$$

Eta lehengo prozesu berberari jarraituz, honetara idazten da (5.10) adierazpenaren ordaina:

$$dH = - \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda . \quad (5.12)$$

Beraz, (5.11) eta (5.12) adierazpenak batera aztertuz, zera betetzen dela dakusagu:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q,\dot{q}} . \quad (5.13)$$

Parentesiaren azpikaldean jarritako indizeek, deribazioan konstante irauten duten aldagaiak dira. Lorturiko emaitza honetaz bi ohar egingo ditugu:

- Denbora parametro gisa jo daiteke Legendre-ren transformazioaren barnean. Berez, denborari buruz ondoko adierazpena beteko da:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} . \quad (5.14)$$

Honek, azken batez, zera adierazten digu, alegia denbora lagrangearrean explizituki agertzen ez bada hamiltondarrean ere ez dela agertzen. Orduan, lotura erreonomorik ez badago eta koordenatuak higigarriak ez badira, hamiltondarrak energia adierazten du.

- Bestalde, λ parametroaren balore batez dugun lagrangearra L_0 bada, eta λ delakoa $d\lambda$ batez aldatzean duguna $L = L_0 + L'$ bada eta, bestalde, baldintza berberetan ditugun hamiltondarrak H_0 eta $H = H_0 + H'$ badira, (5.13) adierazpena kontutan edukiz, ondoko erlazio hau betetzen dela ikusten da errazki:

$$(H')_{q,p} = - (L')_{q,\dot{q}} . \quad (5.15)$$

5.2. HAMILTON-EN EKUAZIO KANONIKOAK

Lagrange-ren formalismoan lagrange-arretik Lagrange-ren ekuazioak lortzen genituen eta hauek higiduraren ekuazioak ziren. Antzera, ba, hamiltondarretik Hamilton-en ekuazioak lortuko ditugu. (5.10) adierazpenetik,

$$dH = - \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j . \quad (5.16)$$

berau diferentzial osoa izanik, hauxe dugu:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = - \dot{p}_j \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

n askatasun-graduen kopurua izanik.

Lorturiko $2n$ ekuazio hauek *Hamilton-en ekuazio kanonikoak* dira eta q_j eta p_j aldagaien eboluzioa adierazten duten higidura-ekuazioak dira. Ikusten denez, lehen ordenakoak dira bertan q_j , eta p_j aldagaien lehen-deribatuak baino ez baitira agertzen. Bestalde, q_j eta p_j aldagaien independenteak izanik, *fase-espazioa* definitzen dute. Espazio honetan aztertzen da higidura Hamilton-en formalismoan.

Ekuazio horietan finkatuz, azter dezagun hamiltondarrak denborarekiko duen eboluzioa. Horretarako, beti ere denbora parametrotzat harturik, kontsidera dezagun denboraren aldaketa (5.12) eta (5.13) adierazpenetan agertzen denaren arauera:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} . \quad (5.18)$$

Eta ekuazio kanonikoak erabiliz,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_j \dot{p}_j \dot{q}_j + \sum_j \dot{q}_j \dot{p}_j , \quad (5.19)$$

hots,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.20)$$

Hemendik agertzen zaigu (6.3.) puntuan berriro esanen duguna: Hamiltondarrak denboraren dependentzia expliziturik ez badu, ($\partial H/\partial t = 0$), orduan $dH/dt = 0$ da, eta energiaren kontserbazioaren legea dugu, (2.8) transformazio-ekuazioetan denbora explizituki agertzen ez bada.

Hau esan ondoren, galdera bat egin diezaiokegu geure buruari: Ongi da; eginiko transformazio dualaz, q_j eta $\dot{q}_j$ aldagaiak alde batetara utziz, q_j eta p_j aldagaien bidez aztertuko dugu sistemaren mekanika. Baina zeintzu dira formalismo berri honen abantailak?. Oraingoz bi abantail hauek aipatu ditugu:

- 1.- Lortzen diren ekuazioak lehen ordenakoak dira.
- 2.- Koordenatuak zikliko direnean, oso erraz ebatzen da problema. Hara! Ziklikoak izanik, ez dira lagrangearren agertzen. Demagun, adibidez, q_k ziklikoa dela. Orduan, $L(q_j, \dot{q}_j, \dot{q}_k)$ da eta $H = \sum p_j \dot{q}_j - L$ denez, q_k ez da H -n agertzen.

Kasu honetan

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 = \dot{p}_k \longrightarrow p_k = \text{ktea}$$

Eta hamiltondarra honela geratzen da: $H(q_j, p_j, p_k)$. Beste ekuazio kanonikoa hauxe izango da: $\partial H/\partial p_k = \dot{q}_k$ eta hemendik zuzenki integratu ahalko dugu.

Zer esanik ez, abantaila hau ere handiagoa da koordenatu guztiak zikliko direnean. Orduan hamiltondarra honelakoa da: $H(p_j)$ non p_j guztiak kostanteak diren, eta problemaren integrazioa guztiz zuzena da. Kasu honetaz 6.5. puntuan arduratuko gara berriro.

5.3. ROUTH-EN METODOA

Kasu batzutan —koordenatu guztiak zikliko ez direnean, adibidez— ez zaigu interesgarri gertatzen Legendre-ren transformazioa koordenatu

guztiekin aplikatzea, bakar batzurekin baizik. Horrelakoetan, Lagrange-ren eta Hamilton-en formulazioen hibrido bat egin daiteke, bakoitzak dituen abantailak probetxatzeko: Routh-en metodoa.

Ikus dezagun, ba, nolako transformazioak egiten diren kasu horretan eta bai nolako higidura-ekuazioak lortzen diren ere. Lehen pauso batetan, azterketa errazteko, bi koordenatu orokortu dituen sistema bat kontsideratuko dugu: q eta ξ . Abiadura orokortuak hauexek izango dira: $\dot{q}$ eta $\dot{\xi}$.

Lehen bezala $L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ kontsideratuko dugu, denbora parametrotzat hartuz. Baldintza hauetan, lagrangearraren diferentzial osoa hauxe izango da:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} . \quad (5.21)$$

Eta q koordenatuari dagokion Lagrange-ren ekuazioa erabiliz eta bestetik $p = \partial L / \partial \dot{q}$ dela kontutan hartuz,

$$dL = \dot{p} dq + p d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} . \quad (5.22)$$

Orain Legendre-ren transformazioa egingo dugu, baina soilik $q, \dot{q}$ sistematik q, p delakora pasatzeko, hots,

$$p d\dot{q} = d(p \dot{q}) - \dot{q} dp . \quad (5.23)$$

Eta (5.22)-era eramanez hauxe geratzen zaigu:

$$d(p \dot{q} - L) = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} . \quad (5.24)$$

Hamilton-en funtzioaren kasuan egin dugunaren antzera, R delako Routh-en funtzioa (*edo routhiarra*) definitzen dugu:

$$R(q, p, \xi, \dot{\xi}) = p \dot{q} - L . \quad (5.25)$$

Beraz, honelaxe geratzen da (5.23) adierazpena:

$$dR = -\dot{p} dq + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} . \quad (5.26)$$

Lehenago hamiltondarrarekin gertatzen zen bezala, adierazpen honek R -ren diferentzial osoa ematen digu. Bestalde, Routh-en funtzioak sistema mekanikoari buruzko informazio osoa dauka zeren eta azken batez lagrangeak berberaren itxuraldaketa bat baino ez baita. (5.26) delakotik sistema mekanikoaren higidura-ekuazioak lortzen dira, zeintzuak –orain ikusiko dugunez– bi multzo desberdinetan agertzen diren.

- q eta p aldakariei dagokienez:

$$-\frac{\partial R}{\partial q} = \dot{p} , \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \dot{q} .$$

- $\xi, \dot{\xi}$ aldagaiei dagokienez, (5.26) adierazpenetik haxe daukagu:

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = -\frac{\partial L}{\partial \xi} \quad \text{eta} \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} . \quad (5.28)$$

Beraz, Lagrangeren ekuaziora eramanez,

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = 0 . \quad (5.29)$$

Honelatan, ba, Routh-en metodoa hibrido bat da: q, p aldagaiei buruz Hamilton-en formulazioaren baliokidea da eta $\xi, \dot{\xi}$ aldagaiei buruz, Lagrange-renaren baliokidea.

Orain arte, guk geuk bi koordenatu orokorturen kasurako soilik aipatu izan dugu Routh-en metodoa. Baina irakurlea konturatuko denez, errazki orokor daitezke hemengo gorabeherak, n koordenatu ditugunean. Demagun, adibidez, q erako m koordenatu ditugula (q_j) eta ξ erako l koordenatu (ξ_k). Noski, $m + l = n$.

Honela idatziko dugu lagrangearra:

$$L(q_j, \dot{q}_j, \xi_k, \dot{\xi}_k) \quad (j = 1, \dots, m ; k = 1, \dots, l) . \quad (5.30)$$

Routh-en funtzioa modu honetara definituko dugu:

$$R(q_j, p_j, \xi_k, \dot{\xi}_k) = \sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - L . \quad (5.31)$$

Eta higidura-ekuazioak hauexek izango dira:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -\dot{p}_j , \quad \frac{\partial R}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad (j = 1, \dots, m) , \quad (5.32a)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, l) . \quad (5.32b)$$

Irakurleak erraz frogatu dezakeenez, (5.14) adierazpenaren antzerako hau ere betetzen da:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} . \quad (5.33)$$

Routh-en metodoaren aipamenarekin bukatzeko, energia eta routhiarraren arteko erlazioa adieraziko dugu. Horretarako, lagrangearren eta transformazio-ekuazioetan denbora explizituki agertzen ez deneko kasua aztertuko dugu soilik, une berean $V = V(q_j, \xi_k)$ dela kontsideratuz.

Dakigunez, kasu honetan hamiltondarrak sistemaren energia adierazten du. Beraz,

$$H = \sum_{j=1}^m \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{k=1}^l \dot{\xi}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} - L = E , \quad (5.34)$$

$$E = \left(\sum_{j=1}^m p_j \dot{q}_j - L \right) + \sum_{k=1}^l \dot{\xi}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} , \quad (5.35)$$

eta Routh-en funtzioaren definizioa (5.31) erabiliz,

$$E = R - \sum_{k=1}^l \dot{\xi}_k \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}_k} . \quad (5.36)$$

Hau da, ba, energiaren adierazpena, Routh-en funtzioaren bidez emana.

Kontura gaitezen ezen Routh-en funtzioaren hemengo definizioa eta 2.10. puntuan eginikoa desberdinak direla zeinu batez. Baina horrek ez du aldatzen eduki fisikoa, noski.

Aipaturiko 2.10. puntuan ikus daiteke nola erabiltzen den metodo hau koordenatu zikliko batzu daudenean.

5.4. HAMILTON-EN PRINTZIOA

Hirugarren gaian ikusi genuen legez, Mekanikaren oinarrizko printzipioa Hamilton-ena da (ikus 3.2.). Printzipio honek —akzio minimoaren printzipioa ere deitua— zera dio: Sistema mekanikoaren bi egoera kontsideratzen baditugu (1 eta 2), konfigurazio-espazioan

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

delako integrala extremala da sistemak espazio horretan betetzen duen ibilbidearekiko. Bestelako modu batez esanik, integral horren bariazioa nulua da:

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 . \quad (5.37)$$

Bariazioak egitean, integrazioaren muturretan t_1 , $q_j(t_1)$ eta t_2 , $q_j(t_2)$ finko iraun erazi behar dira. Esan bezala, J integralari *akzio* edo *ekintza* izena ematen zaio.

Hamilton-en printzipio hau aztertzean ikusi genuenez, bertotik Lagrange-ren ekuazioak lortzen dira, bariazioen kalkuluko teknikak

erabiliz. Orain galdera hau planteatzen dugu: Hamilton-en ekuazio kanonikoak ere lor ote daitezke Hamilton-en printzipiotik?. Erantzuna baiezkoa da hurrengo lerroetan ikusiko dugunez.

Idatz dezagun berriro akzioa, hamiltondarraren definizioa (5.9.) erabiliz:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt . \quad (3.38)$$

Hemendik:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j dq_j - H dt \right) . \quad (3.39)$$

Hamiltonen printzipioa (5.37) adierazpenean adierazten da. Berau aplikatuz, q_j eta p_j independenteak direnez, integralaren bariazioa hauxe izango da:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j \delta p_j dq_j + \sum_j p_j \delta dq_j \right. \\ \left. - \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j dt - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j dt \right) = 0 , \quad (5.40) \end{aligned}$$

zeren $\delta t = 0$ baita.

$\delta dq_j = d\delta q_j$ denez (ikus 3.1), ondoko integrazioa egin dezakegu parteka:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta dq_j = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j d\delta q_j =$$

$$= \sum_j \left[p_j \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \delta q_j dp_j . \quad (3.41)$$

Integrazio-muturrak finko direlarik (konfigurazio-espazioan), $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ dira. Beraz,

$$\sum_j \left[p_j \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

da. Azkenean, (5.39) adierazpenera eramanez eta gaiak batuz,

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt \right) \delta p_j \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt \right) \delta q_j = 0 . \end{aligned} \quad (5.42)$$

δp_j eta δq_j bariazioak independenteak direnez, (5.42) bete dadin, ekuazio hauek bete behar dira:

$$dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt = 0 \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (5.43a)$$

$$dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt = 0 \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (5.43b)$$

Hauetatik zuzenki lortzen dira Hamilton-en ekuazio kanonikoak:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (5.44a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad . \quad (5.44b)$$

Beraz, egiaztatua daukagu puntu honen hasieran eginiko galderari emandako baiezkoa. Hots, Hamilton-en printzipiotik Hamilton-en ekuazio kanonikoak lortzen dira.

5.5. MAUPERTIUS-EN PRINTZPIOA

Hamilton-en printzipiotik, guztiz definiturik geratzen dira sistema mekanikoaren higiduraren ekuazioak. Ekuazio hauek integratuz, aldiune bakoitzean sistemak fase-espazioan duen posizioa ezagut dezakegu. Hala ere, gorputz biren problemaren kasuan orbitekin gertatzen den bezala, kasu batzutan sistemaren ibilbidea lortzea interesatzen zaigu, beronek sistemaren higiduraren ikuspegi baliagarriak adieraz baititzake. Ibilbidea lortzeko, ba, egokitu eta sinplifikatu egingo dugu aurreko metodoa.

Demagun lagrangearrean ez dela denbora agertzen. Horrela, aurreko puntuetan bizpahiru aldiz aipatu ditugun baldintzetan, hamiltondarrak ez du denboraren dependentziarik, kontserbatu egiten da eta sistemaren energia adierazten du, hots,

$$H(p_j, q_j) = E = \text{ktea} \quad . \quad (5.45)$$

Idatz dezagun berriro, Hamilton-en printzipioan agertzen den akzioa:

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j dq_j - H dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j dq_j - E \int_{t_1}^{t_2} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j dq_j - E (t_2 - t_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Hamilton-en printzipioaren arauera, $\delta J = 0$. Beraz,

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j dq_j - \delta [E(t_2 - t_1)] = 0 . \quad (5.47)$$

Baina integrazio-mugak finkoak direnez,

$$\delta [E(t_2 - t_1)] = 0 \quad (5.48)$$

da eta ondorioz,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j dq_j = 0 . \quad (5.49)$$

Lehen J delakoari akzio izena eman diogun bezala, orain J_0 honelaxe definituko dugu:

$$J_0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j dq_j . \quad (5.50)$$

Liburu batzuk (Goldstein-enak adibidez) honi esaten diote akzioa, baina guk —beste liburu askok egiten dutenaren antzera— *akzio laburtua* esango diogu.

Beraz, (5.49) adierazpena itzuliz, zera esan dezakegu, alegia, puntu berdinetatik eta energia kontserbatuz iragaten diren ibilbideei buruz, sistemaren higidura adierazten duena segituz, akzio laburtuak minimo bat duela (orohar, extremala dela esatea hobe dateke), hots,

$$\delta J_0 = 0 . \quad (5.51)$$

Puntu honetatik abiatuz, nola lor dezakegu zuzenki ibilbidearen ekuazioa? Honela egingo dugu eskematikoki:

▮ Ibilbidearen ekuazioa lortzeko, (5.51) delakoan denbora eliminatu behar dugu, koordenatuak soilik ager daitezten.

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L \left(q, \frac{dq}{dt} \right) .$$

Hemen dt agertzen da .

$$E \left(q, \frac{dq}{dt} \right) = E = \text{ktea}$$

Hemen ere dt agertzen da .

Bietatik dt eliminatuz, $p_j = f(q_j)$ lortuko dugu, eta hau (5.50) adierazpenera eramatean, jadanik ez dugu dt -rik izango. Ondoren (5.51) aplikatzea baino ez zaigu geratzen.

Egin dezagun, ba, esandakoa.

Dakigunez, transformazio-ekuazioetan denbora agertzen ez deneko kasuan, (ikus aurreko gaiko 3. adibidea) honela adierazten da lagrangearra:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k - V(q) . \quad (5.52)$$

Bestalde,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k a_{jk} \dot{q}_k . \quad (5.53)$$

Energia hamiltondarra denez,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + V(q) . \quad (5.54)$$

Azken honetatik dt atereaz,

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k}{2(E - V)}} . \quad (5.55)$$

Emaitza hau, (5.53) adierazpenera eramanez,

$$\begin{aligned}
 p_j &= \sum_k a_{jk} \frac{dq_k}{dt} = \\
 &= \sum_k a_{jk} dq_k \sqrt{\frac{2(E - V)}{\sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k}} . \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Akzio laburtua, (5.50), honelaxe geratuko da:

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j dq_k = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k \sqrt{\frac{2(E - V)}{\sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k}} . \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

Azkenean haxe daukagu:

$$J_0 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(E - V) \sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k} . \quad (5.58)$$

Lortu dugu, ba, akzioa koordenatuen funtzioan huts-hutsean jartzea. Orain, akzio minimoaren printzipioa erabiliz,

$$\delta J_0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(E - V) \sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k} = 0 . \quad (5.59)$$

Honela zuzenean lor dezakegu ibilbidearen ekuazioa. (5.59) delakoa *Maupertius-en printzipioa* izenaz ezagutzen da. Matematikoki

Euler eta Lagrange-k lortu zuten. Printzipio hori Hamilton-en printzipioaren ondorio zuzena da, eta ikusten denez, beraren bidez ez da denborarekiko aldaketarik lortzen, hau da, une bakoitzean ez dugu idearik ere sistema non dagoen. Ibilbidearen ekuazioa lortzean, denborari buruzko informazioa galtzen dugu. Dena den, ez gara horretaz ezertan harritu behar, zeren ibilbide kontzeptua denboraz kanpoko abstrakzioa baita.

5.6. POISSON-EN KORTXETEA

Geroago ikusiko dugunez, Poisson-en kortxeteak direlakoek garrantzi handia dute Hamilton-en formulazioaren barnean eta berari loturik dauden transformazio kanonikoen kasuan. Progresiboki aztertzeko, puntu honetan kortxete hauen definizioa emango dugu eta gero dituzten propietate batzu aztertuko ditugu.

I. Definizioa.

Demagun $f(q_k, p_k, t)$ erako edozein funtzio dugula. Lor dezagun funtzio horrek duen denborarekiko deribatua, sistema mekanikoak fase-espazioan duen ibilbideko puntuetan:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \quad (5.60)$$

Eta (5.16) sistemaren higadura-ekuazioak, Hamilton-enak alegia, kontsideraturik honelaxe adieraz dezakegu:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \quad (5.61)$$

Hemengo emaitzan finkatuz, modu honetan definitzen dugu f eta H funtzioen *Poisson-en kortxetea* (edo *parentesia*):

$$[f, H] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right). \quad (5.62)$$

Ohar gisa diogun ezen, liburu askotan, gaur eguneko Fisika Matematikoan batez ere, $\{f, H\}$ notazioa gero eta gehiago erabiltzen dela. Definizio hau erabiliz, (5.61) ondoko eran geratzen zaigu:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] . \quad (5.63)$$

Ikusten denez, Poisson-en kortxeteen bidez oso modu errazean lortzen dira f erako funtzioen (*aldagai dinamikoen*) deribatuak sistemaren higiduran zehar.

Dena den, orain arteko definizioan, kortxetea osotzen duten funtzioetariko bat hamiltondarra izan da. Definizio hori erraz orokor daiteke edozein bi funtzioen kasurako. Demagun $f(q_k, p_k, t)$ eta $g(q_k, p_k, t)$ funtzioak ditugula. Funtzio horien Poisson-en kortxetea honelaxe definitzen da:

$$[f, g] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) . \quad (5.64)$$

II. Propietateak.

Ikus ditzagun Poisson-en kortxeteek dituzten zenbait propietateren zerrenda. Hauetariko gehienak irakurleak frogatu ditzake zuzenki.

- *Antisimetrikotasuna:*

$$[f, g] = - [g, f] , \quad (5.65)$$

kortxete barruko zeinuen kausaz.

- Funtzio bietako baten ordeztu c konstantea jarritz,

$$[f, c] = 0 . \quad (5.66)$$

- Lineala da:

$$[a_1 f_1 + a_2 f_2, g] = a_1 [f_1, g] + a_2 [f_2, g] . \quad (5.67)$$

- Ostera, funtzioen biderkatetari buruz honelako jokaera du:

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]. \quad (5.68)$$

Azken hau, deribatuen kasuan bezalakoa denez gero, *Leibnitz-en erregela* izenaz ezagutzen da.

- Denborari buruzko deribatua, honela egiten da:

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]. \quad (5.69)$$

- Oso interesgarri da halaber, *Jacobi-ren berdintza* izenarekin ezagutzen den identitate edo propietatea. Kasu honetan, hiru funtzio kontsideratuz, zera betetzen dela frogatuko dugu:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (5.70)$$

Propietate hau frogatzeko, zenbait kontsiderazio egingo ditugu.

Batetik, $[f, g]$ kortxetea f eta g funtzioen lehen deribatuen funtzio homogeno eta bilineala da. Deribatuak q_k eta p_k aldagaiekiko eginak dira eta antzera gertatzen da beste parentesiekin ere, hots, $[h, f]$ eta $[g, h]$ direlakoekin.

Bestetik, $[f, [g, h]]$ kortxetea, g eta h funtzioen bigarren deribatuen funtzio lineal eta homogenoa izango da (Une berean f funtzioaren lehen deribatuak ere agertuko dira, noski). Arrazoi berberagatik, $[g, [h, f]]$ kortxetea, h eta f funtzioen bigarren deribatuen funtzio lineal homogenoa da, eta $[h, [f, g]]$ kortxetea, f eta g funtzioen bigarren deribatuen funtzio lineal homogenoa.

Denetara, ba, Jacobi-ren berdintzaren lehen atala, f, g eta h funtzioen bigarren deribatuen funtzio lineal eta homogenoa da. Honelatan, bildu egingo ditugu funtzioaren bigarren deribatuak agertzen direneko gaiak. Egin dezagun pausoka:

$[f, [g, h]]$ kortxetean ez dago f funtzioaren bigarren ondenako deribaturik. Beraz, $[g, [h, f]]$ eta $[h, [f, g]]$ geratzen zaizkigu aztertzeko. Eta azterketa errazteko, ondoko bi operatzaileak definituko ditugu:

$$D_1(\phi) = [g, \phi], \quad (5.71a)$$

$$D_2(\phi) = [h, \phi], \quad (5.71b)$$

non ϕ delakoa edonolako funtzioa den.

Horrela eginik:

$$\begin{aligned} [g, [h, f]] + [h, [f, g]] &= [g, [h, f]] - [h, [g, f]] = \\ &= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1 D_2 - D_2 D_1)f. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Azter dezagun parentesia:

$$D_1 = \sum_l \xi_l \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad (5.73a)$$

$$D_2 = \sum_l \eta_l \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad (5.73b)$$

Hemen x_l ikurrak q_k eta p_k aldagaiak adierazten ditu eta ξ_l eta η_l direlakoak, q_k eta p_k aldagaien funtzioak dira ($l = 1, \dots, 2n$).

Beraz,

$$D_1 D_2 = \sum_{l,m} \xi_l \eta_m \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} + \sum_{l,m} \xi_l \frac{\partial \eta_m}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad (5.74)$$

$$D_2 D_1 = \sum_{l,m} \eta_l \xi_m \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} + \sum_{l,m} \eta_l \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad (5.75)$$

(5.73) eta (5.74) adierazpenetatik:

$$(D_1 D_2 - D_2 D_1) = \sum_{l,m} \left(\xi_l \frac{\partial \eta_m}{\partial x_l} - \eta_l \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_m}. \quad (5.76)$$

Azken adierazpen hau aztertuz, $(D_1 D_2 - D_2 D_1)f$ egitean, f funtzioaren lehen deribatuak baino ez zaizkigula geratzen dakusagu. Hots, ez zaizkigu bigarren ordenako deribatuak agertzen, berauek eliminatu egin baitira.

Egindako arrazonamendu hau f funtzioaren bigarren deribatuei buruzkoa izan da soilik, baina erraz uler daitekeenez, g eta h funtzioen bigarren deribatuei buruz ere gauza berbera esan daiteke. Beraz, Jacobi-ren berdintzan ez da bigarren ordenako deribaturik duen gairik geratzen.

Bestalde, hasieran esan dugunez, berdintzaren lehen atala, f , g eta h funtzioen bigarren deribatuen funtzio lineal eta homogenoa da. Beraz, gai hauek agertzen ez direnez, lehenengo parte hori anulatu egin behar da, eta honela Jacobi-ren berdintza frogaturik geratzen da, hau da,

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0.$$

Poisson-en kortxeteek bestelako propietate batzu ere ba dituzte, baina hurrengo bi puntuetan ikusiko ditugu.

5.7. POISSON-EN KORTXETEA ETA HIGIDURA-EKUAZIOAK

Poisson-en kortxete berezi batzuren kasuan finkatuz, Hamilton-en ekuazioak Poisson-en kortxeteen bidez adierazi ahalko dira.

Demagun $f = f(q_k, p_k, t)$ funtzioa. Beronekin batera koordenatu eta momentu orokortuak kontsideratuz, erraz froga daiteke ondoko adierazpenak betetzen direla:

$$[q_k, f] = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad (5.77)$$

$$[p_k, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (5.78)$$

Orain f delako funtzio hori, sistemaren hamiltondarra dela kontsideratuz:

$$[q_k, H] = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (5.79)$$

$$[p_k, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (5.80)$$

Bi adierazpen hauek kontutan hartuz, modu honetan idatz daitezke Hamilton-en ekuazioak:

$$\boxed{\dot{q}_k = [q_k, H]} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (5.81a)$$

$$\boxed{\dot{p}_k = [p_k, H]} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5.81b)$$

Hauexek dira, ba, higiduraren ekuazio kanonikoak Poisson-en kortxeteen bidez jarriak. Ikusten denez, modu honetan eginik, ekuazioak guztiz simetrikoak gertatzen dira koordenatu eta momentuekiko. Gehiago oraindik, ekuazio horietan bi aldagai-mota horien artean ez dela inolako desberdintasunik egiten esan dezakegu, biak maila bereko aldagaitzat jo baitaitezke, ekuazioak erabat simetrikoak izatean.

Puntu honetan esanikoa osotzeko, ikus dezagun nola adierazten diren momentu eta koordenatuen arteko kortxeteak, *oinarrizko kortxeteak* izenez ezaguturikoak. Irakurleak erraz egiazta dezakeenez, honelaxe adierazten dira:

$$[q_i, q_k] = 0, \quad (5.82)$$

$$[p_i, p_k] = 0, \quad (5.83)$$

$$[q_i, p_k] = \delta_{ik}. \quad (5.84)$$

5.8. POISSON-EN KORTXETEA ETA HIGIDURA-KONSTANTEAK

Poisson-en kortxeteak (5.6) puntuan aztertzean, $f(q_k, p_k, t)$ delako edozein funtzioaren denborarekiko deribatua honela lortzen dela ikusi dugu, deribatua sistemaren higiduran zehar egiten bada, noski:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \quad (5.85)$$

Demagun f funtzioa higidura-konstante bat dela, hots, higiduraren lehen integrala dela. Zera beteko higidura adierazten duten puntuetan:

$$f(q_k, p_k, t) = \text{ktea} . \quad (5.86)$$

Kasu honetan,

$$\frac{df}{dt} = 0 , \quad (5.87)$$

hau da,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 . \quad (5.88)$$

Demagun f funtzioan denboraren dependentzia ez dela explizituki agertzen ($\partial f / \partial t = 0$). Orduan:

$$[f, H] = 0 . \quad (5.89)$$

Hots, Hamilton-en funtzioaren eta denbora explizituki agertzen ez deneko edozein lehen integralen arteko Poisson-en kortxeteak anulatu egiten dira. Ba dugu, ba, aldagai dinamiko bat (higiduran zehar definituriko funtzioa) higidura-konstantea denentz frogatzeko modu bat.

Hori ikusi eta gero, *Poisson-en teorema* izenaz ezagutzen dena frogatuko dugu. Teorema honek zera diosku: "*f eta g funtzioak higiduraren lehen integralak badira, berorien arteko Poisson-en kortxetea ere higiduraren lehen integrala (hau da, higidura-konstantea) da*". Alegia, $[f, g] = \text{ktea}$ dela frogatu behar dugu. Frogapena bi pausotan egingo dugu.

Demagun, lehenik, f eta g funtzioek denboraren dependentzia expliziturik ez dutela. Honetarako, erabil dezagun Jacobi-ren berdintza, (5.76), h funtziotzat hamiltondarra hartuz:

$$[H, [f, g]] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = 0 . \quad (5.90)$$

Baina, ikusi berria dugunez, denboraren dependentzia expliziturik ez baitago, f eta g higidura-konstanteak izanik,

$$[H, g] = 0 \quad \text{eta} \quad [H, f] = 0, \quad (5.91)$$

eta honela

$$[H, [f, g]] = 0. \quad (5.92)$$

Hau modu honetara izanik, $[f, g]$ kortxeteen ere denboraren dependentziarik ez dagoenez, kortxete hori ere higidura-konstantea dela dakusagu.

Bestetik, demagun orain, f eta g funtzioetan denboraren dependentzia explizituki agertzen dela. Kasu honetan honela lortuko dugu $[f, g]$ kortxetearen denborarekiko deribatua, (5.85) kontutan hartuz,

$$\frac{d}{dt} [f, g] = \frac{\partial}{\partial t} [f, g] + [[f, g], H]. \quad (5.93)$$

Bestalde, Jacobi-ren berdintzaren arauera,

$$[[f, g], H] = [f, [g, H]] + [g, [H, f]]. \quad (5.94)$$

Beraz, (5.93)-ra eramanez,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f, g] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = \\ &= \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + [[f, H], g] \right\} + \\ &\quad + \left\{ \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] \right\}, \end{aligned} \quad (5.95)$$

eta hemendik,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f, g] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], g \right] + \\ &+ \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right], \end{aligned} \quad (5.96)$$

hau da:

$$\frac{d}{dt} [f, g] = \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right]. \quad (5.97)$$

Baina f eta g higidura-konstanteak direnez, $df/dt = 0$ eta $dg/dt = 0$ dira. Ondorioz,

$$\frac{d}{dt} [f, g] = [0, g] + [f, 0] = 0, \quad (5.98)$$

hots, $[f, g]$ kortxetea ere higidura-konstantea da:

$$[f, g] = \text{ktea}. \quad (5.99)$$

Modu honetan, frogaturik geratzen da Poisson-en teorema, aipaturiko bi kasu posibleetan.

Zer ondorio atera dezakegu teorema horretatik? Hara! Teorema horretan oinarriturik eta bi lehen integral ezagutuz (bi higidura-konstante), higidura-konstante berriak lor daitezke. Hala ere, higidura-konstante independenteen kopuruak muga bat du. Prezeski, denboraren dependentzia expliziturik ez duten higidura-konstante independenteen kopurua $(2n - 1)$ da. (Guk hemen frogatuko ez badugu ere, zehazkiago esateko, emaitza hau frogatzeko, beste baldintza bat bete behar du sistemak. Ikus L. A. Pars, 398. or. eta A. Chamorro).

Nola gertatzen dira, ba, gauzak? Begira. Batzutan Poisson-en teoremak ez digu higidura-konstante berririk agertuko, eta hau ondoko arrazoiengatik izan daiteke:

- edo $[f, g]$ egitean konstante bat geratzen zaigulako (kasu tribiala).
- edo $[f, g]$ delakoa f eta g direlako funtzio bat delako.

1. Adibidea

Hamilton-en funtzioak denboraren dependentzia expliziturik ez bada, froga bedi H konstantea dela.

Loturetan denboraren dependentziarik agertzen ez deneko kasua aztertzen ari gara. Hamiltondarra honela definitu dugu:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L .$$

Beraz, $H(q_k, p_k)$ bada, $L(q_k, \dot{q}_k)$ da, denbora ez baita agertzen.

Lor dezagun hamiltondarraren diferentziala:

$$dH = \sum_k p_k d\dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k .$$

Baina, Lagrange-ren ekuazioetan finkatuz,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{eta} \quad \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} .$$

Beraz,

$$dH = \sum_k p_k d\dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \dot{p}_k dq_k - \sum_k p_k d\dot{q}_k ,$$

$$dH = \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \dot{p}_k dq_k ,$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_k \dot{q}_k \frac{dp_k}{dt} - \sum_k \dot{p}_k \frac{dq_k}{dt} = \\ &= \sum_k \dot{q}_k \dot{p}_k - \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k = 0 . \end{aligned}$$

Hots, azkenean zera geratzen zaigu:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \longrightarrow H(q_k, p_k) = \text{ktea.}$$

Frogapen hau askoz era errazagoan egin dezakegu, gai honetako zenbait emaitza erabiliz, jarraian azaltzen den bezala adibidez.

Edozein aldagai dinamikoren kasuan ondokoa dugu:

$$[f, f] = 0 ,$$

Poisson-en kortxeteen propietateei esker. Beraz,

$$[H, H] = 0 ,$$

eta (5.89) emaitzaren arauera, H higidura-konstantea da.

2. Adibidea

Partikula bat OXY planoan higitzen ari da, distantziaren dependentziarik baino ez duen indar zentral baten eraginpean.

a) Lor bedi sistema mekaniko horren hamiltondarra.

b) Idatz bitez higiduraren ekuazio kanonikoak.

a) Koordenatu polarrak erabiliz,

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) ,$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \longrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} .$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} .$$

Ondoko aldagai-transformazioa egingo dugu:

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) \longrightarrow H(r, \theta, p_r, p_\theta) ,$$

$$H = \sum p_k \dot{q}_k - L = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \frac{m \dot{r}^2}{2} - \frac{m r^2 \dot{\theta}^2}{2} + V(r),$$

$$H = p_r \frac{p_r}{m} + p_\theta \frac{p_\theta}{m r^2} - \frac{m}{2} \frac{p_r^2}{m^2} - \frac{m r^2}{2} \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + V(r).$$

Azkenean:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r).$$

Ikusten denez, $H = T + V = E$. Emaitza hau aurretik ezagutzen genuen, 1. adibidean frogatu baitugu.

b) Hamilton-en ekuazioak ondokoak dira:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Hamiltondarraren adierazpena kontutan hartuz,

$$r \text{ aldagaia: } \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m},$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{dV}{dr},$$

$$\theta \text{ aldagaia: } \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2},$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Azken ekuazio hau, θ aldagaia ziklikoa delako gertatzen da.

3. Adibidea

Lor bedi partikula aske bati dagokion Hamiltonen funtzioa

a) Koordenatu kartesiarretan.

b) Koordenatu zilindrikoetan.

c) Koordenatu esferikoetan.

a) Lehenengo kasuan, koordenatu orokortuak, sistema inertzial batetan partikulak dituen x, y, z koordenatuak dira. Hauen funtzioan honela adierazten dira energia zinetiko eta potentziala:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

$$V = V(x, y, z).$$

Bestalde partikulak loturarik ez duenez, denbora ez da agertzen ez lagrangearren eta ez hamiltondarren ere. Honela, hamiltondarra energia osoa izango da (eta konstantea gainera):

$$H = T + V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z).$$

Baina hamiltondarra momentu orokortuen funtzioan adierazi behar da. Beraz $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ direlakoak p_x, p_y eta p_z direlakoan funtzioan jarri beharko dira. Horretarako lagrangearra idatzi behar dugu:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z).$$

Hemendik

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \longrightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}.$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} \longrightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}.$$

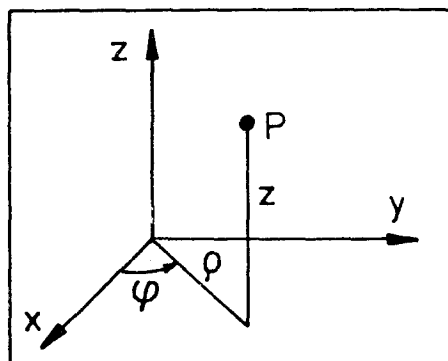
$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \longrightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m} .$$

Beraz, azkenean honelaxe geratuko zaigu hamiltondarra:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) .$$

b) Koordenatu zilindrikoen kasuan, modu berean egingo dugu arrazonamendua.

Oraingoan, hasierako kordenatuak ρ, φ eta z dira (ikus alboko irudia)



Energia zinetiko eta potentziala ondoko eran adierazten dira:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) ,$$

$$V = V(\rho, \varphi, z) .$$

Hamiltondarra eta lagrangearra:

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V(\rho, \varphi, z) .$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \varphi, z) .$$

Kalkuluak eginez,

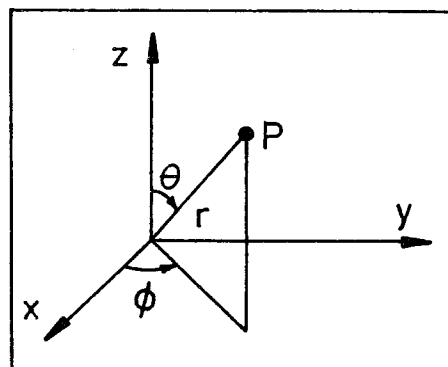
$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \qquad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} ,$$

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi} \longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{m \rho^2},$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

$$H = \frac{1}{2m} (p_{\rho}^2 + \frac{p_{\phi}^2}{\rho^2} + p_z^2) + V(\rho, \phi, z).$$

b) Koordinatu esferikoetan, hots, alboko irudiko (r, θ, ϕ) erabiliz, aurreko kalkulu berberak eginez, eta jarraian adierazten den energia zinetikoa erabiliz,



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta),$$

azkenean modu honetara geratzen zaigu hamiltondarra:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_{\theta}^2}{r^2} + \frac{p_{\phi}^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r, \theta, \phi).$$

4. Adibidea

Momentu-aldagaiekiko higidura-ekuazioak

Hamiltondarra eta Hamilton-en ekuazioak kontutan harturik, egin dezagun ondoko Legendre-ren transformazioa:

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} ,$$

$$D(\dot{p}_j, p_j, t) = -H - \sum_j q_j \dot{p}_j .$$

Agerikoa denez,

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{p}_j} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \dot{p}_j} + \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial \dot{p}_j} \dot{p}_k + q_j = -q_j ,$$

$$\frac{\partial D}{\partial p_j} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial p_j} \dot{p}_k = -\dot{q}_j ,$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad \left(= + \frac{\partial L}{\partial t} \right) .$$

Hortik, ondoko ekuazioak ditugu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial D}{\partial \dot{p}_j} - \frac{\partial D}{\partial p_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Hamilton-en ekuazioen eta, beraz, Lagrange-ren ekuazioen baliokideak dira. Honelatan, ba, koordenatu orokortuen zeregina, momentu kanonikoek ere bete dezakete. Berriro ere dakusagu, koordenatu eta momentuen arteko bereizpena hitzarmen-arazoa baino ez dela.

Hamiltondarra ondokoa dela kontutan harturik,

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L ,$$

hauxe da D funtzioaren adierazpena:

$$D(\dot{p}_j, p_j, t) = L - \frac{d}{dt} \left[\sum_j p_j q_j \right] .$$

Beraz, Lagrange-ren formalismoa, koordenatuen espaziotik momentuen espaziora iragan daiteke, Legendre-ren bi transformazioen bidez, Hamilton-en formalismoa bitarteko pausoa delarik.

Bestaldetik, Lagrange-ren formulaziotik irtenik, egin dezagun ondoko Legendre-ren transformazioa:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} ,$$

$$F(\dot{q}_k, \dot{p}_k, t) = \sum_k q_k \dot{p}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) .$$

Argi dagoenez,

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{p}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}_j} = -p_j ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_j} = p_j ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \left(= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial D}{\partial t} \right) .$$

Hortaz, Lagrange-ren ekuazioen baliokideak dira ondoko hauek:

$$q_j = \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_j} , \quad p_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Eta, jakina, Hamilton-en ekuazioen baliokideak ere ba dira. Kontura gaitzen ondoko berdintzaz:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) + H(q_k, p_k, t) + D(p_k, \dot{p}_k, t) + F(\dot{q}_k, \dot{p}_k, t) = 0 .$$

Ohar gisa diogun ezen, hemen aipaturiko bi baliokidetasunak, norantza batetan bakarrik frogatu ditugula. Kontrako norantzan egin behar diren frogapenak errazak direnez gero, irakurleari uzten dizkiogu.

ARIKETAK

- 1.- Lor bedi oszilatzaile harmoniko linealaren hamiltondarra. Lor bitez, halaber, berorren higiduraren ekuazio kanonikoak.

Eraitza:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 .$$

(k elastikotasunaren koefizientea izanik, $F = - k x$)

- 2.- Lor bedi oszilatzaile harmoniko linealak fase-espazioan duen ibilbidea (ikus Yavorski, 103. or.).

Eraitza:

$$\left(\frac{q}{A} \right)^2 + \frac{p^2}{(m \omega A)^2} = 1 .$$

A , higiduraren elongazioa da. Ibilbidea elipse bat da, ardatzerdien luzera $a = A$ eta $b = m \omega A$ izanik.

- 3.- Azter bedi ardatz finkoaren inguruan biratzen ari den solidoaren higidura, Hamilton-en ekuazio kanonikoen bidez (ikus Belda II, 287. or.).

Eraitza:

$$\left(\frac{q}{A} \right)^2 + \frac{p^2}{(m \omega A)^2} = 1 .$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{I} ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{dV}{d\theta} = - M .$$

- 4.- Lor bedi partikula baten hamiltondarra, bira uniformez higitzen ari den erreferentzi sistema batetan.

Eraitza:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \omega \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) + V .$$

- 5.- Lor bitez partikula baten momentu linealaren ($\mathbf{p}$) eta momentu angeluarraren ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$) osagai cartesiarren arteko Poisson-en kortxeteak.

Eraitza:

$$[L_x, p_y] = -p_z ,$$

$$[L_x, p_x] = 0 ,$$

$$[L_x, p_z] = p_y .$$

- 6.- Lor bitez momentu angeluarraren osagai cartesiarren arteko Poisson-en kortxeteak.

Eraitza:

$$[L_x, L_y] = -L_z ,$$

$$[L_y, L_z] = -L_x ,$$

$$[L_z, L_x] = -L_y .$$

- 7.- Froga bedi ezen $[L_z, \varphi] = 0$, baldin φ delakoa partikula baten koordenatuen eta momentuen funtzio eskalarra bada.

- 8.- Demagun bi askatasun-gradu dituen sistema mekaniko baten hamiltondarra ondokoa dela:

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 ,$$

non a eta b konstanteak diren. Froga ezazu ezen

$$F_1 = \frac{p_2 - b q_2}{q_1}, \quad F_2 = q_1 q_2, \quad F_3 = q_1 e^{-t}$$

direlako aldagai dinamikoak higidura-konstanteak direla. Froga ezazu, halaber, $[F_i, F_j]$ ere higidura-konstanteak direla. Aurreko konstanteekiko independenteak al dira? Ba al dago bestelako higidura-konstanterik?

- 9.- Froga ezazu ezen hamiltondarra eta F aldagai dinamikoa higidura-konstanteak badira, F -ren denborarekiko n -garren deribatu partziala ere higidura-konstantea dela.

Emaitza horren adibide modura, demagun m masadun partikula askearen higidura uniforme. Hamiltondarra kontserbatu egiten da, noski, eta ondoko higidura-konstantea dugu:

$$F = x - \frac{p^2}{m}.$$

Kalkulu zuzenaren bidez, forga ezazu ezen F -ren denborarekiko deribatu partziala higidura-konstantea dela, eta hain zuzen $[H, F]$ delakoaren berdina dela.

- 10.- Poisson-en kortxeteak erabiliz, froga ezazu ezen oszilagailu harmoniko unidimentsionalaren kasuan ondoko higidura-konstantea dagoela:

$$u(q, p, t) = \ln(p + i m \omega q) - i \omega t \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

Zein da higidura-konstante horren esangura?

6. GAIA

TRANSFORMAZIO KANONIKOAK ETA HAMILTON-JACOBI-REN METODOA

- 6.1. Transformazio kanonikoak.
- 6.2. Transformazio kanoniko infinitesimalak.
- 6.3. Simetriak eta higidura-konstanteak.
- 6.4. Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa.
Hamilton-en funtzio nagusia.
- 6.5. Hamilton-en funtzio karakteristikoa.
- 6.6. Aldagaien banaketa.
- 6.7. Ekintza-aldagaiak eta angelu-aldagaiak.
Adibideak. Ariketak.

Izenburuak berak dioskunez, gai honetan bi zati bereiz daitezke, transformazio kanonikoei eta Hamilton-Jacobi-ren metodoari dagozkienak alegia.

Lehenik eta behin, beraz, formalismo hamiltondarraren barnean formalismo lagrangearrean transformazio puntualek betetzen duten zeregin berbera betetzen duten transformazio kanonikoak aztertuko ditugu. Horrela, simetrien eta higidura-konstanteen arteko erlazioa aurkitzeko gai izanen gara formalismo hamiltondarrean ere.

Bigarren zatian, lehenaz baliatuz, higidura aztertzeko beste formalismo batez arduratuko gara, Hamilton-Jacobi-renaz hain zuzen ere. Ondorioz, ikuspuntu matematikotik, n askatasun-gradu dituen arazo mekanikoa ebazteko, hiru metodo izanen ditugu, ba, alegia, Euler-Lagrange-ren bigarren ordenako n ekuazioak, Hamilton-en lehen ordenako $2n$ ekuazio kanonikoak eta hemen ikusiko dugun $n + 1$ aldagaien lehen ordenako deribatu partzialetan ematen den Hamilton-Jacobi-ren ekuazio diferentziala.

Azken metodo honek, problema batzu aztertzeko abantail handiak ditu, mekanika zerutiarrean batik bat.

Ez pentsa, ordea, kapitulu honen teknikek, metodo matematiko sofistikatuak baino ez direlarik, hots, eduki fisikorik ez dutenik. Aitzitik, transformazio kanonikoek oso esangura argia ematen diete. Horrez gainera, aparteko garrantzia eduki dute, Mekanika Kuantikoaren eraiketan, eta beraien metodo eta kontzeptu batzuk –transformazio-teoria batez ere– Mekanika Kuantikoan iraun dute, teoria berri honi egokitu ondoren.

6.1. TRANSFORMAZIO KANONIKOAK

2.9. puntuan esana dugunez, formalismo lagrangearra, koordinatu orokortuen aldagetekiko aldaezina da. Hots, koordinatuen edozein aldaketa alderanzkarri egiten badugu,

$$q_j \longrightarrow Q_j = Q_j(q_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.1)$$

$$L(\dot{q}_j, q_j, t) \longrightarrow$$

$$L'(\dot{Q}_j, Q_j, t) = L(\dot{q}_k(\dot{Q}_j, Q_j, t), q_k(Q_j, t), t), \quad (6.2)$$

Lagrangeren ekuazio berriak,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (6.3)$$

lehengoen baliokideak dira.

Honelako transformazioei transformazio puntual deitu ohi zaie eta jakobiar ez-nulua izan behar dute, (6.1) ekuazioak alderantz ahal izateko.

Formalismo hamiltondarrean, ordea, ondoko erako transformazioak aztertu behar ditugu, koordenatu eta momentu orokortuak elkarren artean aldagai independenteak dira eta:

$$q_j \longrightarrow Q_j = Q_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.4)$$

$$p_j \longrightarrow P_j = P_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.5)$$

$$H(q_j, p_j, t) \longrightarrow K = K(Q_j, P_j, t) . \quad (6.6)$$

Baina, lehen ez bezala, Hamilton-en formalismoak ez du zertan aldaezina izan behar transformazio hauetan, hots, ondoko ekuazioek ez dute zertan higidura-ekuazioak izan behar,

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} , \quad \dot{P}_j = - \frac{\partial K}{\partial Q_j} \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (6.7)$$

(6.7) direlakoak higidura-ekuazioak baldin badira, (6.4) - (6.7) transformazioari, transformazio kanoniko deritza. Baina, hemen, lau kasu berezi baino ez ditugu aztertuko.

a) Lehen motako transformazio kanonikoak.

Biz ondoko baldintza betetzen duen $F_1(q_k, Q_k, t)$ erako edozein funtzio:

$$\det \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial Q_j} \right] \neq 0 . \quad (6.8)$$

Ondoko adierazpenen bidez defini dezakegu transformazio kanonikoa:

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.9)$$

$$P_j = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.10)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} , \quad (6.11)$$

zeren, (6.8) baldintza kontutan harturik, p_k, q_k, Q_k eta t aldagaien funtzioak diren n (6.9) adierazpenetatik, (6.4) transformazio-ekuazioak atera baitaizteke eta, emaitzak erabilirik, (6.10) direlakoetatik (6.5) transformazio-ekuazioak lor baitaizteke, eta, halaber, (6.11) adierazpenetik hamiltondar berria, $K(Q_j, P_j, t)$, irteten baita. Lorturiko transformazioa, lehen motako transformazio kanonikoa dela esango dugu eta F_1 funtzioari, transformazioaren *funtzio sortzailea* deituko diogu.

Transformazioa kanonikoa dela ikusteko, zera egin dezakegu:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \quad (6.12)$$

(6.9)-(6.11) kontutan harturik,

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \sum_j P_j \dot{Q}_j + K - H , \quad (6.13)$$

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dF_1}{dt} . \quad (6.14)$$

t_1 eta t_2 aldiuneen artean integraturik,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right] dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j P_j \dot{Q}_j - K \right] dt + F_1(2) - F_1(1) . \end{aligned} \quad (6.15)$$

Aurreko gaiaren bariazioa harturik,

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right] dt &= \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j P_j \dot{Q}_j - K \right] dt, \end{aligned} \quad (6.16)$$

zeren bariazioak nuluak baitira mugetan. Ondorioz, koordenatu berrietan Hamilton-en printzipioa bete egingo da baldin eta soilik baldin koordenatu zaharretan betetzen bada. Beraz, (6.7) direlakoak higidura-ekuazioak direla eta aipaturiko transformazioa kanonikoa dela frogatu dugu.

b) 2., 3. eta 4. motako transformazio kanonikoak.

Aurrekoaren antzekoak direnez gero, eskematikoki azalduko ditugu:

Funtzio sortzaileak:

$$F_2(q_k, P_k, t), \quad \det \left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial P_k} \right] \neq 0, \quad (6.17a)$$

$$F_3(p_k, Q_k, t), \quad \det \left[\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_j \partial Q_k} \right] \neq 0, \quad (6.17b)$$

$$F_4(p_k, P_k, t), \quad \det \left[\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_j \partial P_k} \right] \neq 0, \quad (6.17c)$$

Transformazio-ekuazioak:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}, \quad (6.18a)$$

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \quad (6.18b)$$

$$q_j = - \frac{\partial F_4}{\partial p_j} , \quad Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} , \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} , \quad (6.18c)$$

Hemendik, (6.4) - (6.6) transformazio-ekuazioak atera daitezke.

Transformazio horiek kanonikoak direla erraz frogatu daiteke, lehen motakoekin erabili dugun metodoaren bitartez. Agerian dagoenez, lau transformazio-moten arteko erlazioak Legendre-ren transformazioak dira:

$$F_2(q_k, P_k, t) = F_1(q_k, Q_k, t) + \sum P_j Q_j , \quad (6.19)$$

$$F_3(p_k, Q_k, t) = F_1(q_k, Q_k, t) - \sum p_j q_j , \quad (6.20)$$

$$F_4(p_k, P_k, t) = F_1(q_k, Q_k, t) + \sum P_j Q_j - \sum_j p_j q_j , \quad (6.21)$$

$$F_3(p_k, Q_k, t) = F_2(q_k, P_k, t) - \sum P_j Q_j - \sum_j p_j q_j , \quad (6.22)$$

$$F_4(p_k, P_k, t) = F_2(q_k, P_k, t) - \sum p_j q_j , \quad (6.23)$$

$$F_4(p_k, P_k, t) = F_3(p_k, Q_k, t) + \sum P_j Q_j , \quad (6.24)$$

Egin ditzagun ondoko hiru oharrak:

- α , edozein konstante bada, F_i eta $F_i + \alpha$, transformazio berberari dagozkio.
- Transformazio kanonikoa, mota bat baino gehiagotakoa izan daiteke. Ikus 1. adibidea.
- Aipaturiko motetakoak ez diren transformazio kanonikoak ere badaude. Ikus F. Gantmacher, IV. kapitulua eta E. J. Saletan eta A. H. Cromer, VI. kapitulua eta 1. adibidea.

Bestaldetik, hemen aztertutako transformazio kanonikoen propietate garrantzitsuenetarikoa, Poisson-en kortxeteak aldatu gabe uztea dateke. Hots, honelako bi funtzio kontsideraturik,

$$R(q_k, p_k, t) = R'(Q_k, P_k, t), \quad (6.25)$$

$$S(q_k, p_k, t) = S'(Q_k, P_k, t), \quad (6.26)$$

berorien Poisson-en kortxeteak berdinak dira nahiz koordenatu berrietan zein zaharretan,

$$[R, S]_{q,p} = [R', S']_{Q,P}, \quad (6.27)$$

non azpiindizeek deribazio-aldagaiak adierazten dituzten. Emaiza honen frogapena, erraza bada ere, luzeegi gertatuko delakoan, ez dugu hemen emango. Ikus H. Goldstein, 484. or.

Bestaldetik, transformazio kanoniko orokorrangoetan haxe da aipaturiko emaitza:

$$[R, S]_{q,p} = z [R', S']_{Q,P}, \quad z \neq 0 \in \mathbf{R}, \quad (6.28)$$

Ikus F. Gantmacher, IV. kapitulua eta E. J. Saletan eta H. A. Cromer, VI. kapitulua. Hantxe bertan aurki daiteke azterketa osoago eta modernoagoa. Horrez gainera, Th. Kahan, lehen kapitulua; Handbuch der Physik, Band III/1, 114. orrialdetik aurrera eta H. C. Corben eta P. Sthele, XII. eta XIII. kapituluak ikus daitezke.

6.2. TRANSFORMAZIO KANONIKO INFINITESIMALAK

Oraingo puntuan transformazio kanoniko infinitesimalez dihardugu, hots, ondoko erakoez,

$$Q_j = q_j + \delta q_j; \quad \delta q_j = \varepsilon f_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.29)$$

$$P_j = p_j + \delta p_j; \quad \delta p_j = \varepsilon g_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.30)$$

$$K(Q_j, P_j, t) = H(q_k, p_k, t) + \bar{\delta}H;$$

$$\bar{\delta}H = \varepsilon h(q_j, p_j, t), \quad (6.31)$$

non ε infinitesimoa den. Ohi bezala, lehen ordenako infinitesimoak baino ez ditugu gordeko kalkuluetan.

Begi bistan dagoenez, horrelako transformazioak lortzeko metodo bat, ondoko moduko funtzio sortzailea erabiltzea da:

$$F_2 = \sum_j q_j P_j + \varepsilon G(q_k, P_k, t), \quad (6.32)$$

zeren, lehen ordeneko infinitesimo batetan izan ezik, identitatearen berdina baita. Ikus 2. adibidea.

Hauexek ditugu transformazio-ekuazioak:

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.33)$$

$$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.34)$$

$$K = H + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (6.35)$$

edo eta

$$\delta q_j = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.36)$$

$$\delta p_j = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.37)$$

$$\bar{\delta} H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (6.38)$$

Gainera, lehenengo ordenaraino,

$$\varepsilon G(q_k, P_k, t) = \varepsilon G(q_k, p_k, t), \quad (6.39)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial P_j} G(q_k, P_k, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial p_j} G(q_k, p_k, t), \quad (6.40)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial q_j} G(q_k, P_k, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial q_j} G(q_k, p_k, t), \quad (6.41)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} G(q_k, P_k, t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} G(q_k, p_k, t) . \quad (6.42)$$

Honelatan, ba, G delakoa, q_j, p_j eta t aldagaien funtziotzat jo dezakegu eta honela idatz ditzakegu transformazio-ekuazioak:

$$\delta q_j = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.43)$$

$$\delta p_j = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.44)$$

$$\bar{\delta} H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} . \quad (6.45)$$

$G(q_k, p_k, t)$ funtzioari, *sortzaile infinitesimal* deritzo. Horrelako edozein funtzioak transformazio kanoniko infinitesimal bat sortzen du. Eraitza hau ikusteko, ondoko funtzio sortzaileaz ere balia gaitzke:

$$F_3 = - \sum_j p_j Q_j + \varepsilon G(p_k, Q_k, t) . \quad (6.46)$$

Biz $u(q_k, p_k, t)$ edozein funtzio. Transformazio kanoniko infinitesimalean, horrelako funtzioak pairatzen duen aldaketa bi eratara defini dezakegu. Bata ondoko ekuazioaren bidez:

$$u'(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t) = u(q_k, p_k, t) , \quad (6.47)$$

non tankera funtzionala aldatzen den, zenbakizko balorea berbera delarik. Bestea, honelakoa da:

$$u(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t) = u(q_k, p_k, t) + \delta u(q_k, p_k, t) , \quad (6.48)$$

non, tankera funtzionala berbera izanez, zenbakizko balorea aldatzen den. Azken hau da interesatzen zaigun aldaketa, hots,

$$\delta u(q_k, p_k, t) = u(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t) - u(q_k, p_k, t) , \quad (6.49)$$

Taylor-en seriaren lehen ordenako gaiak gordez, ondokoa lortzen dugu:

$$\delta u = \sum_j \left[\frac{\partial u}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial u}{\partial p_j} \delta p_j \right] . \quad (6.50)$$

(6.43) - (6.45) transformazio-ekuazioen bidez,

$$\delta u = \varepsilon \sum_j \left[\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right] , \quad (6.51)$$

eta, azkenik, Poisson-en kortxeteen definizioa gogoratuz, honelakotxea da $u(q_k, p_k, t)$ funtzioaren aldaketa:

$$\delta u = \varepsilon [q_j, G] . \quad (6.52)$$

Berriro ere agertzen zaizkigu Poisson-en kortxeteak. Oraingo honetan, berorien bidez oso erraza da transformazio kanoniko infinitesimalek sorturiko aldaketak adieraztea. Kasu berezi gisa, (6.43) - (6.45) transformazio-ekuazioak, zuzenki ere erraz froga daitekeen bezala, ondoko era baliokideaz adieraz daitezke:

$$\delta q_j = \varepsilon [q_j, G] \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.53)$$

$$\delta p_j = \varepsilon [p_j, G] \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.54)$$

$$\bar{\delta} H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} . \quad (6.55)$$

Kontuz! Definitua dugun $\bar{\delta} H$ delakoa ez da (6.49) bezalakoa, (6.31) adierazpenaren bidez eginikoa baizik.

Sortzaile infinitesimala, edozein funtzio izan daitekeela esan dugu. Azter ditzagun kasu interesgarrienak. Demagun, $G = p_k$ dela. Dagokion transformazio kanoniko infinitesimala, hauxe da:

$$\delta q_j = \begin{cases} \varepsilon , & j = k \\ 0 , & j \neq k \end{cases} \quad (6.56)$$

$$\delta p_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.57)$$

$$\bar{\delta}H = 0 . \quad (6.58)$$

Beraz, koordenatu orokortu batekiko translazioa, dagokion momentu orokortuak sortzen du. Hortik, eta 4.6. puntua kontutan harturik, translazio espazial bati dagokion sortzaile infinitesimala, aipaturiko translazioaren norabidean eta norantzan momentu lineal osoak duen osagaia da. Halaber, biraketa baten sortzaile infinitesimala, beronen ardatzarekiko momentu angeluar osoaren osagaia da.

Translazio denbora explizitua, ordea, ezin dezakegu formalismo honen bidez azter, zeren orain denbora parametrotzat hartu dugunez gero, beronen aldakuntza ezina baita. Baina, zorionez, 4.5. ariketan aipatu dugun translazio denbora inplizitua erabil dezakegu. Har dezagun, ba, $G = H(q_k, p_k, t)$ sortzaile infinitesimal gisa, eta egin dezagun $\varepsilon = dt$. Orduan,

$$\delta u = dt [u, H] = dt \left(\frac{du}{dt} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = du - \frac{\partial u}{\partial t} dt , \quad (6.59)$$

$$\delta q_j = dt [q_j, H] = dt \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j dt = dq_j , \quad (6.60)$$

$$\delta p_j = dt [p_j, H] = - dt \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j dt = dp_j , \quad (6.61)$$

$$\bar{\delta}H = dt \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} dt = dH . \quad (6.62)$$

(6.59) adierapenean argi ikus daiteke, translazio denbora inplizituaren eta explizituaren arteko ezberdintasuna. Lehenbizikoari $\delta u = du - (\partial u / \partial t) dt$ dagokio eta bigarrenari, $(\partial u / \partial t) dt$. Bion batura, du , translazio denbora osoa da, noski. Gainera, baldin eta azterturiko u funtzioak, denboraren dependentziarik ez badu, translazio inplizitua, osoaren berdina da:

$$u = u(q_k, p_k) \Rightarrow \delta u = du . \quad (6.63)$$

Beraz, hamiltondarra translazio denbora inplizituaren sortzaile infinitesimala da.

(6.60) eta (6.61) adierazpenek zera dioskute: q_j eta p_j aldagaiek t aldiunean dituzten balioak ezaguturik, $t + dt$ aldiunean dituztenak,

hamiltondarrak sortzen duen transformazio kanoniko infinitesimalak ematen dituela. Beraz, t_0 eta t aldiuneen artean, q_j eta p_j aldagaiek dituzten aldakuntzak, transformazio kanoniko infinitesimalen segida batek emango ditu. Bi transformazio kanonikoren biderkadura ere kanonikoa denez gero, q_j eta p_j direlakoek t_0 hasierako aldiunean dituzten balioak ezaguturik, edozein t aldiunetan dituztenak, denboraren funtzioa den transformazio kanoniko batez lor daitezke:

$$q_j(t) = f_j(q_k(t_0), p_k(t_0), t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.64)$$

$$p_j(t) = g_j(q_k(t_0), p_k(t_0), t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.65)$$

Hortaz, sistema mekanikoaren higidura, edo hobeto esateko, denborarekiko q_j eta p_j aldagaien aldakuntza (fase-espazioan puntu errepresentagarriak duen higidura), transformazio kanoniko baten eboluzio denborala da. Aldiune guztietan transformazio hori ezagutzea, sistemanren higidura ezagutzearen baliokidea da.

Aipaturikoaren alderantzizko transformazioa ere kanonikoa da, eta q_j eta p_j direlakoan hasierako balioetara, edozein aldiunetakoetatik iragan erazten gaitu:

$$q_j(t_0) = f'_j(q_k(t), p_k(t), t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.66)$$

$$p_j(t_0) = g'_j(q_k(t), p_k(t), t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.67)$$

Transformazio hau ezagutzea ere, higiduraren ebazpenaren baliokidea da, baina, honetaz geroago arduratuko gara.

Amaitzeko, derragun honen guztionen antzekoa dela, Mekanika Kuantikoan, eboluzio-eragilearen eta hamiltondarren artean dagoen erlazioa.

Gehiago jakiteko, ikus F. Gantmacher IV. kapitulua eta E. J. Saletan eta A. H. Cromer, VII. kapitulua, eta Th. Kahan, lehen kapitulua. H. C. Corben eta P. Stehle-ren XII. eta XIII. kapituluak ere interesgarriak dira.

6.3. SIMETRIAK ETA HIGIDURA-KONSTANTEAK

Demagun, denboraren dependentzia expliziturik gabeko edozein funtzio, $G(q_k, p_k)$. Aurreko gaian ikusi dugunez,

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] \quad (6.68)$$

dugu, zeren $\partial G/\partial t = 0$ baita. Bestalde, transformazio infinitesimal bat sortzen du. (6.52) adierazpena kontutan harturik,

$$\delta H = \varepsilon [H, G], \quad (6.69)$$

non ondokoa dugun:

$$\delta H = H(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t) - H(q_k, p_k, t), \quad (6.70)$$

$$\bar{\delta} H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (6.71)$$

(6.68) eta (6.69) adierazpenetatik,

$$\delta H = -\varepsilon \frac{dG}{dt}. \quad (6.72)$$

Beraz, $G(q_k, p_k)$ funtzioa, higidura-konstantea da, baldin eta soilik baldin hamiltondarra aldatu gabe uzten duen transformazio kanoniko infinitesimal baten sortzaile infinitesimala bada. Jakina, hamiltondarra aldatu gabe uzten duten transformazio infinitesimalak, ondoko adierazpena betetzen dutenak dira:

$$\delta H = \varepsilon [H, G]. \quad (6.73)$$

Hortaz, (6.31) eta (6.71) kontutan harturik,

$$K(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t) = H(q_k, p_k, t). \quad (6.74)$$

Honekin, δH baturik,

$$K(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t) = H(q_k + \delta q_k, p_k + \delta p_k, t), \quad (6.75)$$

Hots, hamiltondar berriaren tankera funtzionala, zaharrarenaren berdina

da. Hori dela eta, higidura-ekuazio berriek, zaharren tankera funtzional berbera izango dute eta, beraz, kontsideraturiko transformazioa, simetriadakoa izango da (gogora gaitzen 4.3. puntuaz).

Honela adieraz dezakegu, ba, simetrien eta higidura-konstanteen arteko erlazioa: "*Denboraren dependentziarik ez duten higidura-konstanteek, simetri transformazio infinitesimalak sortzen dituzte*".

Hamiltondarren definiziotik, hots, (4.41) adierazpenetik,

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} p_j - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = - \frac{\partial L}{\partial q_k} . \quad (6.76)$$

Beraz, q_k koordenatua ziklikoa da, hots, ez da lagrangearren agertzen, baldin eta soilik baldin hamiltondarrean agertzen ez bada.

Ageri denez, q_k koordenatua ziklikoa bada, berarekiko translazio infinitesimalak, (6.56) - (6.58) delakoak, hamiltondarra aldatu gabe uzten du:

$$\delta H = \varepsilon [H, p_k] = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 . \quad (6.77)$$

Hortaz, Hamilton-en formulazioan ere, koordenatu ziklikoari dagokion momentu orokortuak, konstante dirau higiduran, koordenatuarekiko translazioaren sortzaile infinitesimala baita. Modu honetan, 4.5. puntuko kontserbazio-teorema berraurkitu dugu. Berorren ondorioak diren 4.6. eta 4.7. puntuetako kontserbazio-legeak Hamiltonen formulazioan ere betetzen dira, baina ez ditugu hemen errepikatuko.

Zer esanik ez, energiaren kontserbazio-legea oraingo formalismoan ere betetzen da. Aurreko gaian ikusi genuenez, ondokoa betetzen da:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} . \quad (6.78)$$

Beraz, denbora lagrangearrean edo, gauza bera dena, hamiltondarrean explizituki agertzen ez bada, hamiltondarra higidura-konstantea da, zeren

$$\delta H = \varepsilon [H, H] = 0 \quad (6.79)$$

baita. Jakina, emaitza hau (5.19) adierazpenetik zuzenki lor daiteke.

Gai honi buruz gehiago jakiteko, ondoko textuetara eta artikuluetara jo daiteke:

E. J. Saletan eta A. H. Cromer, VII. kapitulua.

Th. Kahan, lehen kapitulua.

E. Candotti, C. Palmieri eta E. Vitale (1.970).

A. Chamorro (1.969).

6.4. HAMILTON-JACOBI-REN EKUAZIOA: HAMILTON-EN FUNTZIO NAGUSIA

Aurreko 6.2. puntuan esana dugunez, beti iragan gaitezke $q_j(t)$ eta $p_j(t)$ aldakarietatik, konstanteak diren $q_j(t_0)$ eta $p_j(t_0)$ hasierakoetara. Baina, nola lor daiteke horretarako beharrezkoa den transformazio kanonikoa?. Arazo hau aztertu beharrean, orokorragoa den beste batez arduratuko gara.

Demagun, transformazio kanoniko batez lorturiko Q_j eta P_j aldagai berriak, higidura-konstanteak direla, hots, hauxe betetzen dela:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.80)$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.81)$$

Kasu honetan, higiduraren ebazpena nabaria da:

$$Q_j = \beta_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.82)$$

$$P_j = \gamma_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.83)$$

β_j eta γ_j direlakoak konstanteak direlarik. Jakina, koordenatu berrietan ondokoa dugu:

$$Q_j(t) = Q_j(t_0) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.84)$$

$$P_j(t) = P_j(t_0) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.85)$$

eta 6.2. puntuko transformazio kanonikoa, identitatea da. Koordenatu berri hauetara iragateko transformazio kanonikoa aurkitzera saiatuko gara. Bat baino gehiago egon daiteke, noski, baina haietariko edozein, nahiko gertatuko da. Ageri denez, nahi dugun erakoa izateko baldintza nahikoa, hamiltondar berria nulua izatea da:

$$K(Q_k, P_k, t) \equiv 0. \quad (6.86)$$

Baldintza hau betetzen duen edozein transformazio, egokia da. Hemen, bigarren mota transformazioetara mugatuko garenez gero, funtzio sortzailea $F_2 = S(q_k, P_k, t)$ izanen da eta (6.17) adierazpena beteko du:

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial P_k} \right] \neq 0. \quad (6.87)$$

Bestalde, (6.18) eta (6.86) bete behar dituenek, zera dugu:

$$K(Q_k, P_k, t) = H(q_k, p_k, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (6.88)$$

eta (6.18) adierazpena sarturik,

$$H(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.89)$$

(6.87) eta (6.89) betetzen dituen edozein funtziori, $S(q_k, P_k, t)$, *Hamilton-en funtzio nagusia* deritzo eta nahi genuen transformazio kanonikoaren sortzailea da. (6.89) adierazpenari, *Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa* deritzo.

Ikuspuntu matematikotik, lehen ordenako deribatu partzialen ekuazio diferentziala da, $n + 1$ aldakariak, $q_1, \dots, q_n$ eta t direlarik. Ez zaigu berorren *soluzio orokorra* interesatzen, *soluzio osoa* baizik. Kontutan har dezagun, ezen, S funtzioa ekuazio diferentzialaren soluzioa bada eta α edozein konstante gehitzen bazaio, $S + \alpha$ batura ere ekuazioaren soluzioa dela. Demagun, $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$ funtzioa, α_k direlako n konstanteren dependentzia duen ekuazio diferentzialaren soluzio bat dela, ondoko baldintza betetzen duena gainera:

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_k} \right] \neq 0 . \quad (6.90)$$

Orduan, $n + 1$ konstanteren dependentzia duen $S + \alpha$ funtzioari, ekuazio diferentzialaren *integral edo eta soluzio osoa* deritzo. Baina, esana dugunez, S eta $S + \alpha$ funtzioek transformazio berbera definitzen dutenez gero, α konstante gehigarriaz osoki ahantziko gara, eta S funtzioari deituko diogu soluzio oso.

Har dezagun, ba, soluzio osoren bat, $S(q_k, \alpha_k, t)$ adibidez. Nola lor dezakegu bertotik, nahi dugun transformakuntzaren $S(q_k, P_k, t)$ sortzailea? Hots, nola defini ditzakegu P_k momentuak? Hara. Bi eratara egin dezakegu:

A.- Momentutzat, α_k konstanteak hartzen baldin ba ditugu,

$$P_k = \alpha_k \quad (k = 1, \dots, n) , \quad (6.91)$$

ondoko funtzioak,

$$S(q_k, P_k, t) = S(q_k, \alpha_k, t) , \quad (6.92)$$

(6.87) eta (6.89) adierazpenak betetzen ditu, zeren (6.90) betetzen baitu eta Hamilton-Jacobi-ren ekuazioaren soluzioa baita. Beraz, nahi genuen erako transformazio kanonikoa sortzen du:

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial S(q_k, \alpha_k, t)}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.93)$$

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j} = \frac{\partial S(q_k, \alpha_k, t)}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.94)$$

$$K(Q_k, P_k, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \quad (6.95)$$

Azken hau, jakina, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa baino ez da. Dakigunez,

koordinatu berrietan arazoaren ebazpena nabaria da:

$$Q_j(t) = \beta_j = Q_j(t_0) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.96)$$

$$P_j(t) = \gamma_j = P_j(t_0) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.97)$$

Koordenatu zaharretan ere ebatzi dugu arazoa zeren, (6.90) adierazpena kontutan harturik, (6.93) direlakoetatik hauxe atera baitezakegu:

$$\alpha_j = \alpha_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.98)$$

eta (6.94) eta (6.96) adierazpenetatik:

$$\beta_j = \beta_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.99)$$

Hortik, α_j eta β_j konstanteen eta hasierako baldintzen arteko erlazioak lor daitezke:

$$\alpha_j = \alpha_j(q_k(t_0), p_k(t_0), t_0) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.100)$$

$$\beta_j = \beta_j(q_k(t_0), p_k(t_0), t_0) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.101)$$

Bestaldetik, (6.98) eta (6.99) adierazpenetatik, α_k eta β_k konstanteen funtzioak diren higidura-soluzioak atera daitezke:

$$q_j = q_j(\beta_k, \alpha_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.102)$$

$$p_j = p_j(\beta_k, \alpha_k, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.103)$$

Hemendik, (6.100) eta (6.101) direlakoak kontutan harturik, higidura-soluzioak, denboraren eta hasierako baldintzen funtzioan ezagut ditzakegu:

$$q_j = q_j(t; q_k(t_0), p_k(t_0)) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.104)$$

$$p_j = p_j(t; q_k(t_0), p_k(t_0)) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.105)$$

Dakusagunez, Hamilton-Jacobi-ren soluzio osoarekin batera,

higidura-soluzioak eta bilatzen genuen transformazio aurkitu ditugu.

B.- Momentutzat α_j konstanteak aukeratu beharrean, berorien n funtzio independente hauta ditzakegu:

$$\gamma_j = \gamma_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.106)$$

Berauek independenteak direla esatean, alderanzkarriak direla diogu, hots,

$$\det \left[\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_k} \right] \neq 0 \quad (6.107)$$

dela eta, beraz,

$$\alpha_k = \alpha_k(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (6.108)$$

funtzioak aurki daitezkeela. Hortaz, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioaren soluzio osoa, honela adieraz daiteke:

$$S'(q_k, \gamma_k, t) = S(q_k, \alpha_k(\gamma_j), t) \quad (6.109)$$

eta

$$P_k = \gamma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (6.110)$$

aukeraturik, aurreko metodoari jarrai gakizkioke, $S(q_k, \alpha_k, t)$ funtzioaren ordez, $S'(q_k, \gamma_k, t)$ delakoa ipiniz eta α_k konstanteak γ_k direlakoez ordezkatzuz.

Transformazio-ekuazioak hauexek dira:

$$p_j = \frac{\partial S'}{\partial q_j} = \frac{\partial S'(q_k, \gamma_k, t)}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.111)$$

$$Q_j = \frac{\partial S'}{\partial p_j} = \frac{\partial S'(q_k, \gamma_k, t)}{\partial \gamma_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.112)$$

$$K(Q_k, P_k, t) = H + \frac{\partial S'}{\partial t}. \quad (6.113)$$

(6.111) direlakoetatik, ondokoa atera dezakegu:

$$\gamma_j = \gamma_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.114)$$

zeren

$$\det \left[\frac{\partial^2 S'}{\partial q_j \partial \gamma_k} \right] = \det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_r} \right] \det \left[\frac{\partial \alpha_r}{\partial \gamma_k} \right] \neq 0 \quad (6.115)$$

baita.

(6.112) adierazpenetatik, orobat, hauexek datoz,

$$\beta_j = \beta_j(q_k, p_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.114)$$

zeren, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa betetzen denez gero, (6.113) delakoak zera baitio:

$$K = 0 \quad (6.117)$$

eta, hemendik, ondoko emaitza lortzen baita,

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \Leftrightarrow Q_j = \beta_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.118)$$

β_j direlakoak konstanteak direlarik.

Koordenatu berrietan, (6.118) adierazpenek (eta (6.110) direlakoek ere) ematen dizkigute higidura-soluzioak. Hasierako koordenatuei dagozkienak, ordea, (6.111) - (6.113) direlakoan alderantzizko

transformazioaz lor ditzakegu, berrienak erabiliz, zeren (6.114) eta (6.116) adierazpenetatik zera lor baitaiteke:

$$q_j = q_j(\beta_k, \gamma_k, t) \quad (j, k = 1, \dots, n), \quad (6.119)$$

$$p_j = p_j(\beta_k, \gamma_k, t) \quad (j, k = 1, \dots, n). \quad (6.120)$$

β_k eta γ_k integrazio-konstanteen balioak, hasierako baldintzetatik atera daitezke, ondoko erako higidura-soluzioak lortzeko:

$$q_j = q_j(t; q_k(t_0), p_k(t_0)) \quad (j, k = 1, \dots, n), \quad (6.121)$$

$$p_j = p_j(t; q_k(t_0), p_k(t_0)). \quad (j, k = 1, \dots, n). \quad (6.122)$$

Hauexek ditugu bilatzen ari gineneko transformazio kanonikoaren ekuazioak.

Orain arte, informazio dinamikoa daukaten hiru funtzio erabili ditugu: L lagrangearra, H hamiltondarra eta S Hamilton-en funtzio nagusia hain zuzen ere. Lehenbiziko bien arteko erlazioa Legendre-ren transformazioa da, lehenago ikusi dugunez. Hirugarrenak berak ere, ba al du inolako erlazorik beste biekin? Erantzuna baiezkoa da, nahiz eta bestelakoa izan. Berau ikusteko, har dezagun S funtzioaren deribatua,

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (6.123)$$

(6.91), (6.3) eta (6.95) adierazpenak kontutak harturik, zera lortzen dugu:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j p_j \dot{q}_j - H = L. \quad (6.124)$$

Beraz, Hamilton-Jacobi-ren funtzio nagusiaren deribatua, lagrangearra da edo eta, beronen mugagabeko integrala, Hamilton-en funtzio nagusia da:

$$S = \int L dt. \quad (6.125)$$

Hemen, lehen bezalaxe, garrantzirik gabeko konstante gehigarri bat arbuiaitu dugu.

Haatik, emaitza hauek ez digute funtzio batetatik beste batetara iragateko balio, arazo dinamikoa ebatzi aurretik, zeren, (6.124) eta (6.125) adierazpenak erabiltzeko, $q_j(t)$ funtzioak, hots higidura-soluzioak, ezagutu behar baititugu. Ordea, lagrangearrearen eta hamiltondarren arteko transformazioa egiteko, funtzio hauetariko bat ezagutzea nahikoa da.

Bestaldetik, Hamiltonen funtzio nagusia eta hamiltondarraren arteko erlazioa, (6.95) erlazioak eta, azken batez, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioak ematen digu,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad (6.126)$$

baina, berriro ere, berau erabiltzeko, higidura-soluzioak ezagutzea guztiz beharrezkoa ez bada ere, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioaren soluzio osoa ezagutu behar dugu eta, dakigunez, berau aipaturiko ezagutzaren baliokidea da.

6.5. HAMILTONEN FUNTZIO KARAKTERISTIKOA

Azter dezagun aurreko puntua, hamiltondarra higidura-konstantea denean, hots, denboraren dependentzia expliziturik ez duenean. Hamiltondarra $H(q_k, p_k)$ denez gero, honelakoa da Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa:

$$H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.127)$$

Ekuazio diferentzial honetan, q_k koordenatuen dependentzia eta denborarena gai banatan agertzen direnez gero, baliagarri izanen zaigu aldagaien banaketa. Egin dezagun, ba, ondoko aldagaien banaketa:

$$S(q_k, \alpha_k, t) = W(q_k, \alpha_k) + T(t, \alpha_k), \quad (6.128)$$

beti ere α konstante gehigarria alde batetara utziz. Beraz,

$$H(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}) + \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (6.129)$$

adierazpena Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa aldagaien balio guztietarako bete dadin, bi gaiek konstante izan eta elkarren kontrako zeinua ukan behar dute; hots, ondoko bi ekuazioak bete behar dira:

$$H(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}) = E, \quad (6.130)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -E, \quad (6.131)$$

hemen E delakoa konstante delarik.

Bigarren ekuazioa berehala ebatz dezakegu,

$$T = -Et, \quad (6.132)$$

eta beraz, Hamilton-en funtzio nagusiak ondoko tankera izango du:

$$S(q_k, \alpha_k, t) = W(q_k, \alpha_k) - Et, \quad (6.133)$$

non $W(q_k, \alpha_k)$ delakoari *Hamilton-en funtzio karakteristikoa* deritzon eta ondoko Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa bete behar duen:

$$H(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}) = E. \quad (6.134)$$

Kontura gaitezen, ezen E konstantea ezin daitekeela α_k direlakoan independente izan, zeren, bestela, S funtzioak $n + 1$ konstanteren dependentzia izango bailuke, α_k direlako n -rena eta E delakoarena. Beraz, zera dugu,

$$E = E(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (6.135)$$

non funtzio hori, nolanahi hauta badaiteke ere, gehienetan, α_k konstanteetarik bat izan ohi baita. Demagun, adibidez, α_n dela:

$$E = \alpha_n . \quad (6.136)$$

Oroit gaitzen, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioak anitz soluzio oso badu ere, horietariko edozein aski zaigula.

Konstante gehigarria arbuiaurik, (6.134) ekuazioaren soluzio osoak, $n - 1$ konstante independenteren dependentzia du. Beraz, $E = \alpha_n$ delakoa kontutan harturik,

$$W(q_k, \alpha_k) = W(q_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, E) . \quad (6.137)$$

W funtzioa eta, halaber S , n konstante independenteren funtzioa da.

Hamiltondarra higidura-konstantea denean, bada, Hamilton-Jacobiren ekuazioa, $n + 1$ aldagai independente edukitzetik, n bakarrik edukitzera pasatzen da, baina azken batez, aurrekoaren kasu berezia baino ez da.

Guztiarekin ere, oraingo kasua beste modu batetara era daitekeela dirudi, baldin koordenatu berri guztiak ziklikoak direneko transformazio kanonikoren bat aurki badadi, zeren, orduan, momentu guztiak higidura-konstanteak baitirateke:

$$\dot{P}_j = - \frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \gamma_j \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.138)$$

eta hamiltondarrak denboraren eta koordenatuen dependentziarik ez duenez gero, zera baitugu:

$$K = K(\gamma_1, \dots, \gamma_n) , \quad (6.139)$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = \frac{\partial K}{\partial \gamma_j} = \omega_j(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (6.140)$$

Hortaz, higidura-soluzioak hauexek dira:

$$Q_j = \omega_j t + \beta_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.141)$$

ω_j eta β_j direlakoak hasierako baldintzen bidez lortu behar diren konstanteak direlarik.

Honelako transformazioak beti izaten dira, Hamilton-en funtzio karakteristikoak sortzen baititu. Lehen bezalaxe, momentu berrien aukera zein den arau, bi posibilitate dauzkagu:

A.- Hauta ditzagun modu honetara momentu berriak:

$$P_j = \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad (6.142)$$

$$P_n = \alpha_n = E. \quad (6.143)$$

W funtzioak sorturiko transformazio kanonikoaren ekuazioak, hauexek dira:

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.144)$$

$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial P_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.145)$$

$$K = H. \quad (6.146)$$

Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa kontutan harturik,

$$K = H = H(q_k, p_k) = H\left(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = E = \alpha_n, \quad (6.147)$$

hots, koordenatu berri guztiak ziklikoak dira, eta, azkena izan ezik, higidura-konstanteak ere bai,

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_j} = 0; \quad Q_j = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = \beta_j \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad (6.148)$$

$$\dot{Q}_n = \frac{\partial K}{\partial P_n} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_n} = 1 ; \quad Q_n = \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = t + \beta_n, \quad (6.149)$$

(6.144) adierazpenetatik zera lor daiteke:

$$\alpha_j = \alpha_j(q_k, p_k) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.150)$$

(6.148) eta (6.149) direlakoetatikoak, berriz hauexek dira:

$$\beta_j = \beta_j(q_k, p_k) \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad (6.151)$$

$$\beta_n = \beta_n(q_k, p_k, t). \quad (6.152)$$

Hemendik higidura-soluzioak lortzen ditugu:

$$q_j = q_j(\beta_k, \alpha_k, t) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.153)$$

$$p_j = p_j(\beta_k, \alpha_k, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (6.154)$$

Lehen bezala, α_k eta β_k integrazio-konstanteak, hasierako baldintzek ematen dizkigute.

B.- Momentutzat α_k konstanteen n funtzio independente aukeratzen baditugu,

$$P_j = \gamma_j = \gamma_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.155)$$

$$W'(q_k, p_k) = W'(q_k, \gamma_k) = W(q_k, \alpha_k), \quad (6.156)$$

hauexek dira transformazio-ekuazioak:

$$p_j = \frac{\partial W'}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.157)$$

$$Q_j = \frac{\partial W'}{\partial p_j} = \frac{\partial W'}{\partial \gamma_j} \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.158)$$

$$K = H = E = \alpha_n (\gamma_1, \dots, \gamma_n) . \quad (6.159)$$

Azken batez, berau ez da, (6.135) adierazpeneko E funtzioa beste era batetara aukeratzea baino.

Beraz, ondokoak dira higidura-ekuazioak:

$$\dot{P}_j = - \frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.160)$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j} = \frac{\partial K}{\partial \gamma_j} = \omega_j (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (6.161)$$

Lehenbizikoez, dakigunez, koordenatu berri guztiak ziklikoak direnez gero, momentu guztiak konstanteak direla dioskute:

$$P_j = \gamma_j \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (6.162)$$

Bigarrenetik, aldiz, higidura-soluzioak ematen dizkigute koordenatu berrietan:

$$Q_j = \omega_j t + \beta_j \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.163)$$

ω_j eta β_j direlakoak konstante direlarik. Hasierako koordenatueta higidura-soluzioak kausitzeko, (6.157) adierazpenetik hauexek lorturik,

$$\gamma_j = \gamma_j (q_k, p_k) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.164)$$

eta (6.163) direlakoetatik honako hauek erabilirik,

$$\beta_j = \beta_j (q_k, p_j, t) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.165)$$

zera egin daiteke:

$$q_j = q_j (\gamma_k, \beta_k, t) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.166)$$

$$p_j = p_j (\gamma_k, \beta_k, t) \quad (j = 1, \dots, n) . \quad (6.167)$$

Bestaldetik, agerikoa denez,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_j p_j \dot{q}_j = L + H = L + E = \\ &= \frac{dS}{dt} + \frac{d(tE)}{dt} , \end{aligned} \quad (6.168)$$

eta konstante gehigarri batez ahantzirik,

$$W = \int \sum_j p_j \dot{q}_j dt = \int \sum_j p_j dq_j . \quad (6.169)$$

Integral hau ezaguna zaigu, ikus 5.5. atala, baina ez du W aurkitzeko balio, aldez aurretik arazo mekanikoa ebatzi gabe.

6.6 ALDAGAIEN BANAKETA

Aurreko atalean ikusi dugunez, hamiltondarrean denbora explizituki agertzen ez denean, aldagai-banaketa bat egin dezakegu, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioaren ebazketa erraztuz.

Hamiltondarrean q_1 koordenatua agertzen ez bada, antzeko zerbait egin daiteke, zeren p_1 momentua higidura-konstantea denez gero, (6.93) gogoraturuz, zera betetzen baita,

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \alpha_1 , \quad (6.172)$$

eta hemendik aldagai-banaketa lortzen baita:

$$S = F(q_2, q_3, \dots, q_n, t) + \alpha_1 q_1 , \quad (6.171)$$

Hamilton-Jacobi-ren ekuazioak, $n + 1$ aldagai izan beharrea, n baititu,

$$H(q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (6.172)$$

Azkena izan ezik, koordenatu guztiak ziklikoak badira, eta hamiltondarra higidura-konstantea bada, aurreko metodoak errepikaturik, aldagai-banaketa osoa lortzen da. (6.93) eta (6.144) adierazpenetatik,

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = \alpha_j; \quad p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.173)$$

eta, integraturik,

$$S = W_n(q_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j q_j - Et; \\ W = W_n(q_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j q_j, \quad (6.174)$$

Hortaz, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa,

$$H(q_n, \frac{dW_n}{dq_n}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = E. \quad (6.175)$$

q_n aldagaiaren dependentzia baino ez duenez gero, beti ipin daiteke koadratura bezala; hots, (6.175) ekuaziotik, dW_n/dq_n askaturik, W_n funtzioa integral baten bidez adieraz daiteke. Integral honetan beronetan agertuko zaigu arbuiatu ohi den konstante gehigarria.

Beste era batetara ere egin daiteke arrazonamendua. Koordenatu berri guztiak ziklikoak izatea nahi dugu; baina $n-1$ jadanik ziklikoak direnez gero, berauek ez dute zertan aldatu behar eta, berauekiko, W funtzio sortzailea identitatea izango da, hots,

$$W = W_n(q_n) + \sum_{j=1}^{n-1} P_j q_j, \quad (6.176)$$

eta zera kontutan harturik,

$$P_j = p_j = \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad (6.177)$$

berriro lortzen dugu (6.174) emaitza (Ikus 2. adibidea)

Puntu honetan zehar berriro ikusi dugu, ezen denbora $n+1$ garren koordenatu orokortzat har dezakegula, berorren momentu kanoniko orokortua $-H$ delarik. Eta halatan, adibidez, denbora "ziklikoa" bada, hamiltondarra higidura-konstantea dateke.

Hamiltondarra higidura-konstantea delarik, aldagaiak banagarriak direla diogu, baldin ondokoaren moduko Hamilton-en funtzio karakteristikoak,

$$W = \sum_{j=1}^n W_j(q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (6.178)$$

Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa, aldagai baten dependentzia baino ez duten n ekuaziotan deskonposatzen badu,

$$H_j(q_j, \frac{dW_j}{dq_j}, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.179)$$

Honelako kasuetan, arazoaren ebazketa nabaria da, zeren (6.179) ekuazioak koadraturetara eraman baitaitezke. Oroit gaitezen, α_n konstantea, hamiltondarraren E zenbakizko balioa dela.

Agerikoa denez, honelako kasuak dirateke, Hamilton-Jacobi-ren teoria Mekanika Analitikoan sartzeko benetako interesa eta arrazoia, zeren, bestela, zer-nolako abantaila edukiko ote luke, Hamilton-en $2n$ ekuazio diferentzial arrunten orde, Hamilton-Jacobi-ren deribatu partzialen ekuazioa erabiltzeak?

Orduan, beste galdera honetara laburtzen dugu arazoa: Noiz dira

banagarriak, Hamilton-Jacobi-ren ekuazioko aldagaiak? Ez dugu ezagutzen arazo hau argitzeko lege sinplerik, eta, gainera, erantzuna ezberdina izango da, darabiltzagun koordenatu orokortuak zeintzu diren arau.

Adibidez, derragun, ezen hiru gorputzen arazo famatua ez dela honelakoa. Haatik, Mekanika Analitikoari buruzko oinarrizko textuliburuetan aztertu ohi diren problema gehienek aldagai banagarriak dituzte, koordenatu egokiak erabiliz gero, noski.

Jakina, lehenengo aztertu dugun kasua ere honelako da, eta hauxe dugu:

$$W_j = \alpha_j q_j \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (6.180)$$

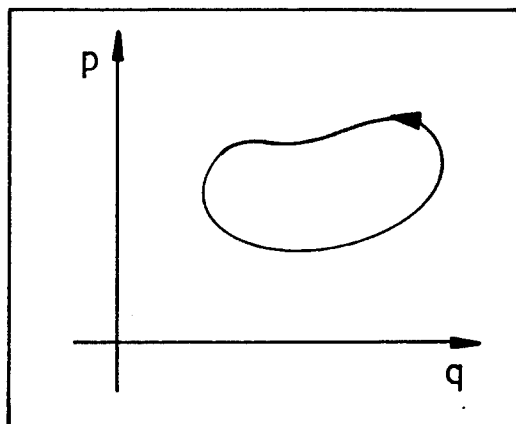
$$W_n = W_n(q_n) \quad (6.181)$$

6.7. EKINTZA-ALDAGAIK ETA ANGELU-ALDAGAIK

Ezer baino lehen, derragun zeri deritzogun higidura periodikoa. Lehenik eta behin, demagun higidurak askatasun-gradu bakar bat duela. Fase-espazioa, beraz, bi dimentsiotako plano izango da. Higidura periodikoa dela diogu, baldin ondokoetariko bat bada:

a) **Librazioa** (edo, batzuren aburuz, bibrazioa).

Honelako higidura, q koordenatua eta p momentua, periodo berbera duten denboraren funtzio periodikoak direneko kasuari dago-kiona da. Fase-espazioan, puntu errepresentagarria ibilbide itxi batetan dabil etengabe, bira oso bat egitean ematen duen denbora-tartea periodoa delarik



b) Errotazioa

Kasu honetan $p(q)$ funtzioa kurba itxia izan beharrean, funtzio periodikoa da. Gehienetan, q koordenatua biraketa-angelua da eta T periodoak 2π balio du.

Ohar berezi gisa, aipa dezagun, q koordenatua ziklikoa deneko kasua. Fase-espazioan ibilbidea zuzen bat da, hots, edozein periodo onartzen duen funtzioa da. Lehenago esan dugunaren arauera, kasu honen periodoa ere 2π dela esango dugu.

Adibide modura, azter dezagun pendulu sinplea. Sistemaren energia higidura-konstantea da,

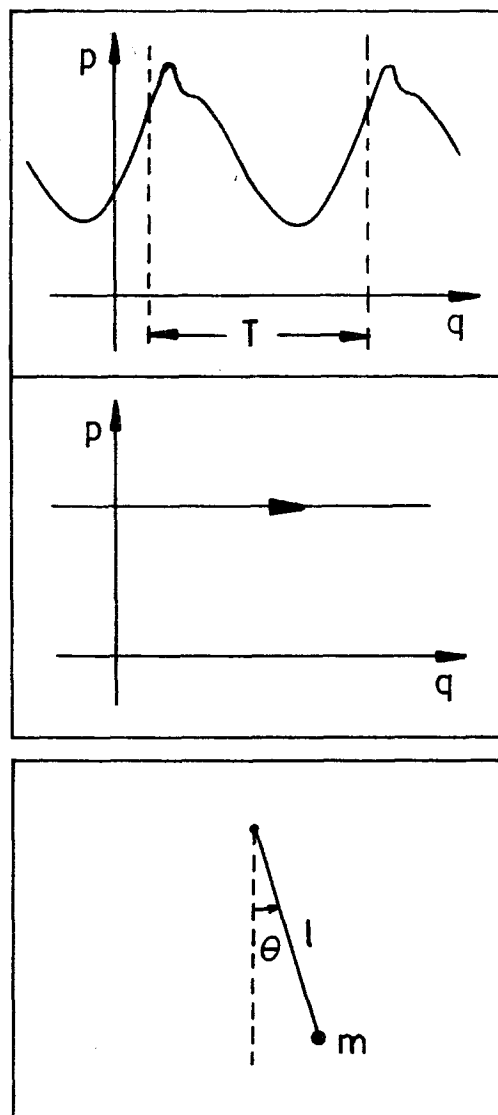
$$E = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl \cos \theta, \quad (6.182)$$

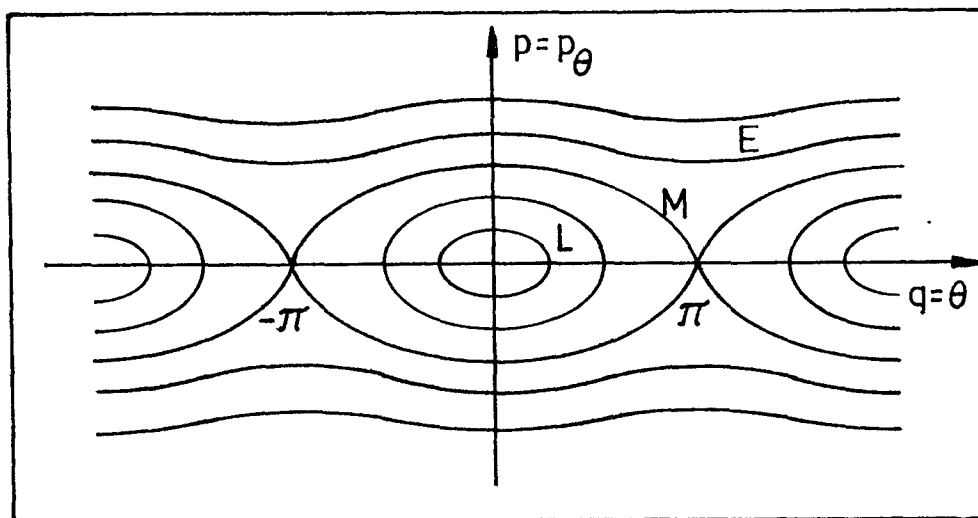
eta beraz,

$$p_\theta = \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \theta)}. \quad (6.183)$$

Energiaren balioaren arauera, higidura bi eratakoa izan daiteke:

1.- $E < mgl$ baldin bada, libraziazkoa izanen da eta, $|\theta| \leq \arccos(-E/mgl)$ beteko da. Fase-espazioko ibilbideak, hurrengo orrialdeko irudiko L kurbaren antza edukiko du.





2.- $E > m g l$ baldin bada, ordea, higidura errotazioa izango da, eta fase-espazioko ibilbidea, E kurba bezalakoa. Kasu honetan, penduluak, posizio bertikalera iristeko adinako energia duenez gero, biraka iraungo du.

$E = m g l$ baldintza, bi kasuon arteko muga matematikoari dagokio eta, kasu honetan, M kurba izanen da, fase-espazioan ibilbideari dagokiona.

Askatasun-gradu bat baino gehiago badago, aldagai banagarriak dituen kasua baino ez dugu aztertuko. Orduan, zera dugu,

$$W_j = \sum_{j=1}^n W_j (q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (6.184)$$

eta ondoko funtzioetariko bakoitzak,

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \frac{dW_j}{dq_j} = p_j (q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.185)$$

(q_j, p_j) faseen planoan puntu errepresentagarriaren ibilbideak duen projekzioaren ekuazioa da. Projekzio hauek guztiok, itxiak edo periodikoak badira, hots, lehen aipaturiko kasuetariko bati badagozkio, higidura *anizki periodikoa* dela diogu. Honek ez du esan nahi, $2n$ dimentsiotako fase-espazioan puntu errepresentagarriak duen ibilbidea

itxia edo periodikoa denik, zeren eta, hau betetzeko, fase-plano bakoitzarekiko higiduren periodoek, baldintza egokiak bete behar baitituzte. Ikus, J. M. Iñiguez eta R. Cid, 272. or.; E. J. Saletan eta A. H. Cromer, 240.or.; H. Goldstein, 562. or.

Honelako arazo periodikoak ebazteko, eroso gertatzen da 6.5.B puntuko metodoari jarraitzea, momentutzat, hots, $\gamma_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ funtziotzat, ondokoak erabiltzen direlarik:

$$J_k = \oint p_k dq_k \quad (k = 1, \dots, n) , \quad (6.186)$$

non integrala librazio edo errotazioaren periodo batetan zehar egiten den. Definituriko J_k horiei *ekintza-aldagaiak* deritze, ekintzaren unitateak baitituzte, hots, energiarenak deborarenekin biderkatuz lortzen direnak, edo, gauza berbera dena, momentu angeluarrarenak. Ekintza-aldagaiak α_j konstanteen funtzioak direla ikusteko, erabil dezagun (6.186) adierazpena,

$$J_k = \oint \frac{dW_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{dq_k} dq_k \quad (k = 1, \dots, n) , \quad (6.187)$$

eta kontura gaitezen, q_k integrazio-aldagaia denez gero, integrazio mugatuan desagertu egiten dela, honako funtzioak emateko:

$$J_k = J_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (6.188)$$

Berauek independenteak direnez gero, (ikus E. J. Saletan eta A. H. Cromer, 237. or.) alderantziz jar ditzakegu,

$$\alpha_j = \alpha_j(J_1, \dots, J_n) \quad (j = 1, \dots, n) , \quad (6.189)$$

(6.156) eta (6.159) adierazpenen bidez zera lortzeko:

$$W'(q_k, J_k) = W(q_k, \alpha_k(J_r)) , \quad (6.190)$$

$$H = E = H (J_1, \dots, J_n) . \quad (6.191)$$

Koordenatu berriei, *angelu-aldagaiak* deritze eta (6.158) direlakoez lortzen dira:

$$\omega_k = \frac{\partial W'}{\partial J_k} \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (6.192)$$

Argi denez, angeluaren dimentsioak dauzkate, edo, hobeto esan, ez daukate dimentsiorik. Berorien higidura-ekuazioak, (6.161) dira:

$$\dot{\omega}_k = \frac{\partial H}{\partial J_k} = v_k (J_1, \dots, J_n) \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (6.193)$$

Higidura-soluzioak, beraz, hauxek ditugu:

$$\omega_k = v_k t + \beta_k \quad (k = 1, \dots, n) , \quad (6.194)$$

v_k eta β_k direlakoak konstanteak direlarik. Dakigunez, hemendik q_k eta p_k aldagaiekiko higidura-soluzioak lor daitezke. Baina, askotan, arazoa osoki ebazteke, (q_k, p_k) plano bakoitzean egiten den higiduraren periodoa, τ_k , erdiestea nahikoa da eta, horretarako, ezin egokiagoa da oraingo metodoa, zeren (6.192) adierazpenen v_k konstanteak, aipaturiko higiduren maiztasunak baitira, hots,

$$v_k = \frac{1}{\tau_k} \quad (k = 1, \dots, n) . \quad (6.195)$$

Emaitza hau frogatzeko, dakusagun nola aldatzen den ω_k angelu-aldagaia, q_j koordenatuak, periodo oso bat egiten duenean, beste koordenatuak aldatu gabe,

$$\Delta_j \omega_k = \oint \frac{\partial \omega_k}{\partial q_j} dq_j . \quad (6.196)$$

(6.192) kontutan harturik,

$$\begin{aligned} \Delta_j \omega_k &= \oint \frac{\partial^2 W'}{\partial q_j \partial J_k} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint \frac{\partial W'}{\partial q_j} dq_j = \\ &= \frac{\partial}{\partial J_k} \oint p_j dq_j = \frac{\partial J_j}{\partial J_k} = \delta_{jk} , \end{aligned} \quad (6.197)$$

non δ_{jk} delakoa Kronecker-en delta den. Deribatua integraletik kanpora ateratzeko posibilitateaz, ikus E. J. Saletan eta H. A. Cromer, 264 or. Bestaldetik, (6.194) delakotik, zera dugu:

$$\Delta_k \omega_k = \omega_k(t + \tau_k) - \omega_k(t) = \nu_k \tau_k , \quad (6.198)$$

eta, beraz, (6.197) adierazpenak gonbaratuz, (6.195) emaitza lortzen dugu.

Hemen gehiagorik ikusiko ez badugu ere, oraingo metodoa oso garrantzi handikoa izan da bai Mekanika Zerutiarraren azterketak errazten dituelako eta bai, Kuantuen Teoria Zaharraren bidez, Mekanika Kuantikoaren eraiketan zeregin historiko ahanztezina bete duelako ere.

Honi guztioni buruz gehiago jakiteko, bibliografiara jo daiteke. Ikus, adibidez, J. M. Iñiguez eta R. Cid, XXVI. eta XXVII. kapituluak; H. Goldstein, 597. orrialdea eta hurrengoak.

Amaitzeko eta ohar gisa, derragun ezen esana dugunez, q_k koordenatu ziklikoren bati dagokion ekintza-aldagaia hauxe dela:

$$J_k = \oint p_k dq_k = p_k \oint dq_k = 2\pi p_k , \quad (6.199)$$

zeren p_k momentuak konstante baitirau higiduran eta q_k koordenatuaren periodotzat 2π hartzen baita.

1. Adibidea

Azter bedi ondoko transformazioa:

$$Q = q ,$$

$$P = p + q ,$$

$$K (Q , P , t) = H (q , p , t) .$$

Kanonikoa dela zuzenki frogatu daiteke:

$$q = Q ,$$

$$p = P - Q ,$$

$$\frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = \dot{Q} ,$$

$$-\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{p} + \dot{q} = \dot{P} .$$

Zein motatako transformazio kanonikoa den jakiteko, kontura gaitezen ezen q eta Q aldagaiak ezin daitezkeela independenteak izan eta, beraz, transformazioa ez dela lehen motakoa. Ba da, ordea, bigarren, hirugarren eta laugarren motatakoa, dagozkien funtzio sortzaileak aurkituko baititugu.

Hasteko, saia gaitezen bigarren motakoa aurkitzen:

$$F_2 = F_2 (q , P , t) ,$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P - q \Rightarrow F_2 = q P - \frac{1}{2} q^2 + f (P , t) ,$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q \Rightarrow f (P , t) = g (t) ,$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \Rightarrow g (t) = \text{ktea} .$$

Beraz, garrantzirik gabeko konstantea arbuiaurik,

$$F_2 = qP - \frac{1}{2}q^2.$$

Aurreko metodoari jarraituz edo eta Legendre-ren transformazioa erabiliz, hirugarren eta laugarren motakoak lortzen dira:

$$\left. \begin{array}{l} F_3 = -pQ - \frac{1}{2}Q^2 \\ q = Q \\ P = p + Q \\ K = H \end{array} \right| \begin{array}{l} F_4 = \frac{1}{2}(p - P)^2 \\ q = P - p \\ Q = P - p \\ K = H \end{array}$$

2. Adibidea: Identitate-transformazioa

Aurreko adibidearen metodoaz erraz ikus daiteke identitate-transformazioa, hots,

$$\begin{aligned} Q_j &= q_j, \\ P_j &= p_j, \\ K(Q_j, P_j, t) &= H(q_j, p_j, t) \end{aligned}$$

delakoa, kanonikoa dela, bigarren eta hirugarren motakoa hain zuzen ere:

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = \sum_j q_j P_j \\ p_j = P_j \\ Q_j = q_j \\ K = H \end{array} \right| \begin{array}{l} F_3 = - \sum_j p_j Q_j \\ q_j = Q_j \\ P_j = p_j \\ K = H \end{array}$$

3. Adibidea: Oszilagailu harmonikoa

Biz dimentsio bakar batetan higitzen den oszilagailu harmonikoa, ondoko hamiltondarra duena prezeski:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 .$$

Hamiltondarra higidura-konstantea denez gero, bi eratara ipin dezakegu Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 ,$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E .$$

Berorien soluzio osoak hauexek dira, konstante gehigarria arbuaturik:

$$S = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx - Et ,$$

$$W = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx .$$

Transformazio-ekuazioak:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{mk} \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} ,$$

$$Q_s = \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} - t =$$

$$= Q_w - t = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - t .$$

Beraz,

$$\beta = - \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left[\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right] - t .$$

eta $\omega = \sqrt{k/m}$ eginik,

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \omega (t + \beta) ,$$

$$p = \sqrt{2mE} \sin \omega (t + \beta) .$$

Hasierako baldintzak ondokoak baldin badira,

$$t_0 = 0 , \quad p(t_0) = 0 , \quad x(t_0) = A ,$$

integrazio-konstanteak hauexek dira:

$$\beta = 0 ,$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} .$$

Beraz, hauxe dugu higidura-soluzioa,

$$x = A \cos \omega t , \quad \text{non } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ den , eta}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 ,$$

lehen ere ba genekienez, energia osoa da.

4. Adibidea: Indar zentralaren peko higidura launa

Demagun, plano batetan indar zentralaren eraginpean higitzen den partikula bat. Beronen hamiltondarra, koordenatu polarretan,

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

higidura-konstantea da. Horrez gainera, ϕ koordenatua ziklikoa denez gero, aldagaiak banagarriak dira,

$$W = W_1(r) + l\phi, \quad l = \alpha_\phi,$$

non l delakoa p_ϕ momentu angeluarraren balio konstantea den. Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa, hauxe da:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} \right] + V(r) = E.$$

Hortik,

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dr} &= \sqrt{2m(E - V) - \frac{l^2}{r^2}}, \\ W &= \int \sqrt{2m(E - V) - \frac{l^2}{r^2}} dr + l\phi. \end{aligned}$$

(6.148) eta (6.149) erabilirik,

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial l} = - \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V) - \frac{l^2}{r^2}}} + \phi,$$

$$t + \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{l^2}{r^2}}} .$$

Lehenak, $\phi(r)$ orbitaren ekuazioa ematen digu. Bigarrenak, berriz, $r(t)$ funtzioa aurkitzea permititzen du. Bi funtzio hauetatik, $\phi(t)$ ere lor daiteke. Hasierako baldintzarekiko erlazioak honelaxe lortzen dira:

$$\beta_2 = -t_0, \quad \beta_1 = \phi_0 = \phi(t_0), \quad r_0 = r(t_0) .$$

5. Adibidea: Oszilagailu harmonikoaren maiztasuna

3. adibidean ikusi dugunez, hauxe dugu Hamilton-en funtzio karakteristikoa:

$$W = \sqrt{mk} \int \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx .$$

Beraz, ekintza-aldakaria ondokoa da:

$$J = \oint p dx = \oint \frac{dW}{dq} dq = \oint dW = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2} dx .$$

Energiaren kontserbazioagatik, hauexek dira periodo batetan zehar x koordenatuak hartzen dituen balio batzu:

$$0 \longrightarrow \frac{2E}{k} \longrightarrow 0 \longrightarrow -\frac{2E}{k} \longrightarrow 0$$

Integrala egiteko, egin dezagun ondoko aldagai-aldaketa:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta ,$$

non θ aldagaiari dagozkion balioak hauexek ditugun:

$$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi \longrightarrow \frac{3\pi}{2} \longrightarrow 2\pi .$$

Beraz,

$$J = 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Hortik,

$$H = E = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

eta lortu nahi genuen maiztasuna hauxe da:

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

ARIKETAK

- 1.-Froga bedi, ondoko transformazioa, kanonikoa bada ere, ez dela azterturiko motetakoa:

$$Q_1 = q_1 ; Q_2 = p_2 ; P_1 = p_1 ; P_2 = -q_2 ; K = H .$$

Eraitza: $F(q_1, q_2, Q_2, P_2) = q_1 P_1 + q_2 Q_2 ,$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} , \quad Q_1 = \frac{\partial F}{\partial P_1} ,$$

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} , \quad P_2 = -\frac{\partial F}{\partial Q_2} .$$

- 2.- Froga bedi, koordenatu orokortuen eta momentu orokortuen arteko aldageta, hots,

$$Q_j = p_j , \quad P_j = -q_j , \quad K = H \quad (j = 1, \dots, n)$$

delakoa, transformazio kanonikoa dela. Zein(tzu) d(ir)a berorren funtzio sortaileak(k)?

Eraitza: $F_1 = \sum_k q_k Q_k \quad \text{eta} \quad F_4 = \sum_k p_k P_k .$

- 3.-Ebatz bedi dimentsio batetako oszilagailu harmonikoaren higidura-ekuazioa, ondoko funtzioak sortzen duen transformazio kanonikoaren bidez,

$$F_1 = \frac{1}{2} m \omega x^2 \cotg Q .$$

Eraitza: Ikus H. Goldstein, 474. or.

- 4.- Ondoko transformazioa kanonikoa al da?

$$Q_j = k q_j , \quad P_j = k p_j , \quad K = H , \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Eman bedi k delakoa konstante ez nulua dela.

Eraitza: Bai, baina ez aztertutiko motatakoa, $k \neq 1$ bada.

5.- Froga bedi ezen hamiltondarra eta $F(q_k, p_k, t)$ funtzioa higidura-konstanteak baldin badira, $\partial F / \partial t$ ere higidura-konstantea dela.

6.- Froga bedi, transformazio puntual guztiak kanonikoak direla:

$$Q_j = f_j(q_k, t) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Eraitza:
$$F_2 = \sum_j f_j(q_k, t) P_j + A(q_k, t)$$

funtzio sortzailetikoa da, $A(q_k, t)$ delakoa funtzio egokia delarik.

7.- Zein da ondoko transformazio kanonikoaren funtzio sortzailea?

$$P = \frac{1}{m} p t - q, \quad Q = p.$$

Zein da beraren hamiltondar berria?

Eraitza:
$$F_1 = q Q - \frac{1}{2m} Q^2 t + f(t),$$

$$K = H - \frac{Q^2}{2m} + f'(t),$$

non $f(t)$ edozein funtzio den.

8.- Ondoko transformazioa kanonikoa al da?

$$P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p,$$

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p), \quad K = H.$$

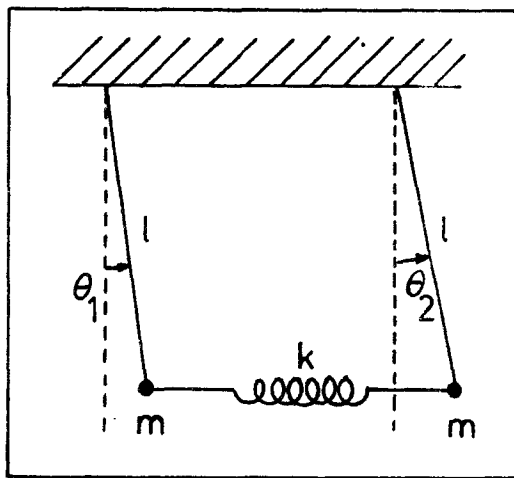
Eraitza: Bai, $F_3 = -(e^Q - 1)^2 \operatorname{tg} p$ funtzio sortzailetikoa.

9.- Aurki bitez, hiru dimentsiotako oszilagailu harmoniko anisotropoaren maiztasunak. Zeintzu dira higidura-ekuazioak? Nolako baldintzak bete behar dira higidura sinpleki periodikoa izateko, hots, fase-espazioan puntu errepresentagarriak duen ibilbidea itxia izateko?

$$\text{Eraitza: } v_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_i}{m}}, \quad x_i = A_i \cos(\omega_i t + \beta_i),$$

$$\omega_i = 2\pi v_i, \quad \frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3},$$

non hiru n_i zenbakiak osoak diren.



10.- Irudiko bi pendulu matematikoak berdinak dira eta k konstantea duen erresorte batez loturik daude. Aurki bitez bi maiztasunak, oszilazio txikien kasuan eta ondoko koordenatuak erabiliz,

$$q_1 = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2), \quad q_2 = \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2).$$

Higidura launa dela eman daiteke.

$$\text{Eraitza: } v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad v_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m}}.$$

BIBLIOGRAFIA

- R. ABRAHAM, J. E. MARSDEN. *Foundations of Mechanics*. 2nd. Ed. Benjamin/Cummings. Reading (Mass.) (1978).
- V. I. ARNOLD. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir. Moscú (1976).
- J. M. BASTERO, J. CASELLAS. *Curso de Mecánica*. Ediciones Universidad de Navarra, S.A. Pamplona (1976).
- E. BELDA. *Mecánica Teórica*. Bilbao (1968).
- H. C. CORBEN, STEHLE. *Classical Mechanics*. Wiley. New York (1960).
- R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I*. Interscience Publishers. New York (1966).
- A. CHAMORRO. Am. J. Phys., **37**, 610 (1969).
- E. A. DESLOGE, R. I. KARCH. Am. J. Phys., **45**, 253 (1951).
- F. GANTMACHER. *Lectures in Analytical Mechanics*. Mir. Moscow (1970).
- H. GOLDSTEIN. *Mecánica Clásica*. (Segunda edición). Ed.Reverté. Barcelona (1987).
- HANDBUCH DER PHYSIK (ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS). Band III/1*. Springer-Verlag. Berlin (1962).
- HANDBUCH DER PHYSIK (ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS). Band IV*. Springer-Verlag. Berlin (1962).
- E. L. HILL. Rev. Mod. Phys., **23**, 253 (1951).
- J. M. IÑIGUEZ, R. CID. *Mecánica Teórica. Tomos 1 y 2*. Dossat. Madrid (1965).

- TH. KAHAN. *Théories des groupes en Physique classique et quantique. Tome 2.* Dunod. Paris (1971)
- G.L. KOTKIN, V.G. SERVO. *Collection of Problems in Classical Mechanics.* Pergamon. Oxford (1971).
- L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ. *Mecánica.* Reverté. Barcelona (1970).
- D. LOVELOCK, H. RUND. *Tensors, Differential Forms and Variational Principles.* Wiley . New York (1975).
- L. LUR'E. *Mécanique Analytique. Tome 1.* Masson. Paris (1968).
- R. A. MANN. *The Classical Dynamics of Particles.* Academic Press. New York (1974).
- J.B. MARION. *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas.* Reverté. Barcelona (1975).
- A. MERCIER. *Analytical and Canonical Formalism in Physics.* Dover. New York (1963).
- L. A. PARS. *Analytical Dynamics.* Heinemann. London (1965).
- P. ROHRLICH. *Classical Charged Particles.* Addison Wesley. Reading (Mass.) (1965).
- E. J. SALETAN, A. H. CROMER. *Theoretical Mechanics.* Wiley. New York (1971).
- E.C.G. SUDARSHAN, N. MUKUNDA. *Classical Dynamics; a modern perspective.* Wiley. New York (1974).
- A. SOMMERFELD. *Mechanics.* Academic Press. New York (1952).
- M. R. SPIEGEL. *Mecánica Teórica.* Schaum. Mc. Graw-Hill. Mexico (1976).
- J. L. SYNGE, B. A. GRIFFITH. *Principles of Mechanics.* Mc. Graw-Hill. New York (1959).
- B. M. YAVORSKI, A. A. DETLAF. *Manual de Física.* Mir. Moscú (1977).
- U.Z.E.I. *Fisika.Hiztegia.* Ed. Vascas, Elkar eta Hordago editorialak. Donostia (1979).

D. A. WELLS. *Dinámica de Lagrange*. Schaum. Mc. Graw-Hill. Mexico (1972).

E. T. WHITTAKER. *Analytical Dynamics*. Cambridge University Press. (1965).

AURKIBIDE ALFABETIKOA

- abiadura angeluarra* 66, 71
abiadura orokortuak 39, 43, 48, 157
akzioa 91, 160
akzio laburtua 164
akzio minimoaren
 printzipioa 160, 166
akzio-erreakzioaren
 printzipioa 132
aldagai dinamikoak 168
aldagaien banaketa 215
aldaketa alderantzkarria 189
angelu-aldagaiak 218
antisimetrikotasuna 168
ardatzen biraketa 141
ardatzen translazioa 139
askatasun-graduak 3, 39
azalera 106
- bariazioak* 83
bariazioen kalkulua 79, 90, 160
bariazioen kalkuluaren
 notazio klasikoa 85
Bernouilli, J. 108
bibrazioa 218
bigarren motako transformazio
 kanonikoak 192
bilar txinoa 60
binormala 104
biraketa 127
biraketa-angelua 219
biraketa-ardatza 127
biraketa-koordinatu
 ziklikoa 129, 141
brakistokrona 108
- Coriolis-en indarra* 68
- D'Alembert-en printzipioa* 37, 55
denborarekiko deribatua 167
- denboraren homogenotasuna*
 131, 134, 142
denboraren jatorriaren
 translazioa 142
denboraren translazioa 129
desplazamendu birtuala 4
desplazamendu birtual
 infinitesimala 4, 13, 84
desplazamendu erreal
 infinitesimala 98
diferentzial osoa 152, 157
dimentsioak 57
dinamika 35
dinamika inpulsiiboarentzako
 D'Alembert-en printzipioa 55
- eboluzio-eragilea* 199
ekintza 91, 160
ekintza-aldagaiak 218
ekuazio kanonikoak 154, 172
energia 129, 159, 165
energia zinetikoa 40
energiaren kontserbazioa 129, 201
eragileak 85
eremu elektromagnetikoa 146
eremu kontserbakorrak 15, 42
erregularutasun-baldintzak 40
errotazioa 219
eskala transformazioa 146
espazioaren homogenotasuna
 127, 131, 134
espazioaren isotropia
 129, 131, 134, 142
estatika analitikoa 1, 11
Euler-Lagrange-ren
 ekuazioak 39, 80, 84, 89
- Euler-en teorema funtzio*
 homogenoetarako 138

extremala 80
exzentrikotasuna 145

fase-espazioa 155, 163, 199, 218
formalismo hamiltondarra 149, 189
formalismo lagrangearra 149, 189
Frenet-en formulak 104
funtzio potentziala 15, 42
funtzio sortzailea 191, 192, 195
funtzio sortzaile infinitesimala 196
funtzionala 80

gainazala 91, 101
Galileo-ren erlatibitate
 printzipioa 134, 141, 142
Galileo-ren transformazioa 132
gauge transformazioa 146
geodesikoak 101
grabitatearen eremua 16
grabitate-zentrua 16

Hamilton-en ekuazio
 kanonikoak 155
Hamilton-en formalismoa 149, 190
Hamilton-en funtzio
 karakteristikoa 209
Hamilton-en funtzio
 nagusia 202
Hamilton-en printzipioa 77, 89, 160
Hamilton-Jacobi-ren ekuazioa 202
Hamilton-Jacobi-ren metodoa 187
hamiltondarra 123, 130, 137, 153
Helmholtz 58
hessiarra 123
higidura anizki periodikoa 220
higidura inpulsihoa 53
higidura-ekuazioak 3, 52, 56,
 155, 158, 171
higidura-konstanteak 58, 113,
 122, 126, 128, 172, 199
higidura-integralak 114
higidura-transformazioa 132
higidura-soluzioak 114, 205
higiduraren lehen integralak 173
hirugarren motako transformazio
 kanonikoak 192

identitate transformazioa 225

inbariantzi transformazioa
 124, 126, 128, 130
indar elektromagnetikoa 45
indar erresultantea 38
indar ez-kontserbakorrak 92
indar inpulsihoak 53, 70
indar iraungikorrak 45
indar iraungikor orokortuak 46
indar iraungikorrean lana 47
indar kontserbakorrak 42, 45, 132
indar orokortuak 13
indar zentralak 69
indar zentralaren eraginpeko
 higidura launa 228
indar zentripetoa 68
indar-momentua 129
inertzi indarrak 38, 66
inpulsiua 53
inpulsiu orokortua 55, 72
integrazio-konstanteak 114
integral osoa 204
iraungipen-funtzioa 46

Jacobiarra 190
Jacobi-ren berdintza 169

kanpo-indarra 9, 38
karga elektrikoa 45
Kepler-en problema 143
kobariantzia formala 56
konfigurazioa 3
konfigurazio-espazioa 11, 160
kontserbazio-legeak 113, 122, 201
kontserbazio-printzipioak 111
koordinatu ahanzkarria 58
koordinatu kartesiarak 57, 179
koordinatu esferikoak 57, 64, 178
koordinatu higigarriak 154
koordinatu intrintsekoak 104
koordinatu orokortuak 9
koordinatu zilindrikoak 179
Kronecker-en delta 223
kurba abaildua 104
kurba-familia 81
kurbadura 104
kurbadura-erradioa 104

Lagrange-ren biderkatzaileak 23, 47

- Lagrange-ren biderkatzaileen
 metodoa 19, 98
Lagrange-ren dinamika 35
Lagrange-ren ekuazioak 39, 42, 52
Lagrange-ren formalismoa 151
lagrangearra 42, 44
lan birtuala 6
lan birtualen printzipioa 11
laugarren motako transformazio
 kanonikoak 192
Legendre-ren transformazio
 duala 151, 193
lehen integralak 173
lehen motako transformazio
 kanonikoak 190
Leibnitz-en erregela 169
lerro geodesikoak 101
librazioa 218
linealtasuna 168
Lorentz-en indar
 elektromagnetikoa 45
loturak 3
lotura bilateralak 5, 48
lotura diferentzialak 5
lotura erreonomoak 6, 154
lotura egonkorak 6
lotura eskleronomoak 6
lotura ez-holonomoak 5, 47, 98
lotura ez-idealak 6
lotura finituak 5
lotura geometrikoak 5
lotura higikorak 6
lotura idealak 6,
lotura holonomoak 5, 19, 39
lotura leunak 7
lotura mekanikoak 4
lotura unilateralak 4, 61
lotura zinematikoak 5
(errodadurazko) lotura 7
lotura-baldintza 4
lotura-ekuazioak 5, 51, 97
lotura-indarrak 6, 9, 38
lotura-indar orokortuak 19
lotura-indarren balioa 50
lotura-indarren kalkulua 23, 50
loturadun extremalak 95
loturen sailkapena 4
maiztasuna 222, 229
marruskadura 46
masa-zentruaren abiadura 134
masa-zentruaren
 posizio-bektorea 134
masa-zentruaren teorema 131
Maupertius-en printzipioa 163
momentu angeluarra 57, 127, 144
momentu angeluarraren
 kontserbazioa 127
momentu kanoniko konjokatuak 56
momentu kanoniko konjokatuaren
 kontserbazioa 127
momentu lineala 57
momentu linealaren
 kontserbazioa 125
momentu linealaren
 osagai kartesiarrek 57
momentu orokortuak 56
momentu-aldagaiak 181
Newton-en printzipioak 79, 89
Noether-en teorema 121
normal nagusia 104
osagai kartesiarrek 57
osagai zilindrikoak 75
oszilagailu harmoniko
 unidimentsionala 146, 184, 226
oszilagailu harmoniko
 anisotropoa 233
parametroak 21, 81, 100, 153
pendulu esferikoa 76
periodoa 218, 219, 223
Poisson-en kortxeteak
 167, 171, 172, 194
Poisson-en teorema 173
posizio-bektorea 3, 42, 125, 127
potentziala 15, 42
potentzial bektorial 45, 74
potentzial eskalarra 45, 74
potentzial orokortuak 43
Rayleigh-en funtzioa 45
Routh-en funtzioa 59, 157
Routh-en metodoa 56, 69, 156
routhiarra 157

Runge-Lenz-en bektorea 143

simetri transformazioak 118

simetri transformazio

infinitesimalak 118, 121

simetriak 111, 199

sistema ez-inertzialak 66

sistema ez-kontserbakorrak 91

sistema holonomoak 9,

sistema kontserbakorrak 126

sistema mekanikoak 3

sistemaren lagrangearra 42

soluzio orokorra 203

soluzio osoa 203

sortzaile infinitesimala 196

tangentea 104

Taylor-en seriea 196

Torricelli-ren teorema 16

transformazio duala 151

transformazio infinitesimalak 116

transformazio kanonikoak 187, 189

transformazio kanoniko

infinitesimalak 194

transformazio puntualak 190

transformazio-ekuazioak

10, 192, 195

translazioa 125

translazio denborala 129, 131

translazio denboral explizitua 198

translazio denboral

implizitua 147, 198

translazio infinitesimala 201

translazio-koordinatu

ziklikoa 126, 139

Weber-en indar

elektromagnetikoa 45

zikloidea 108

