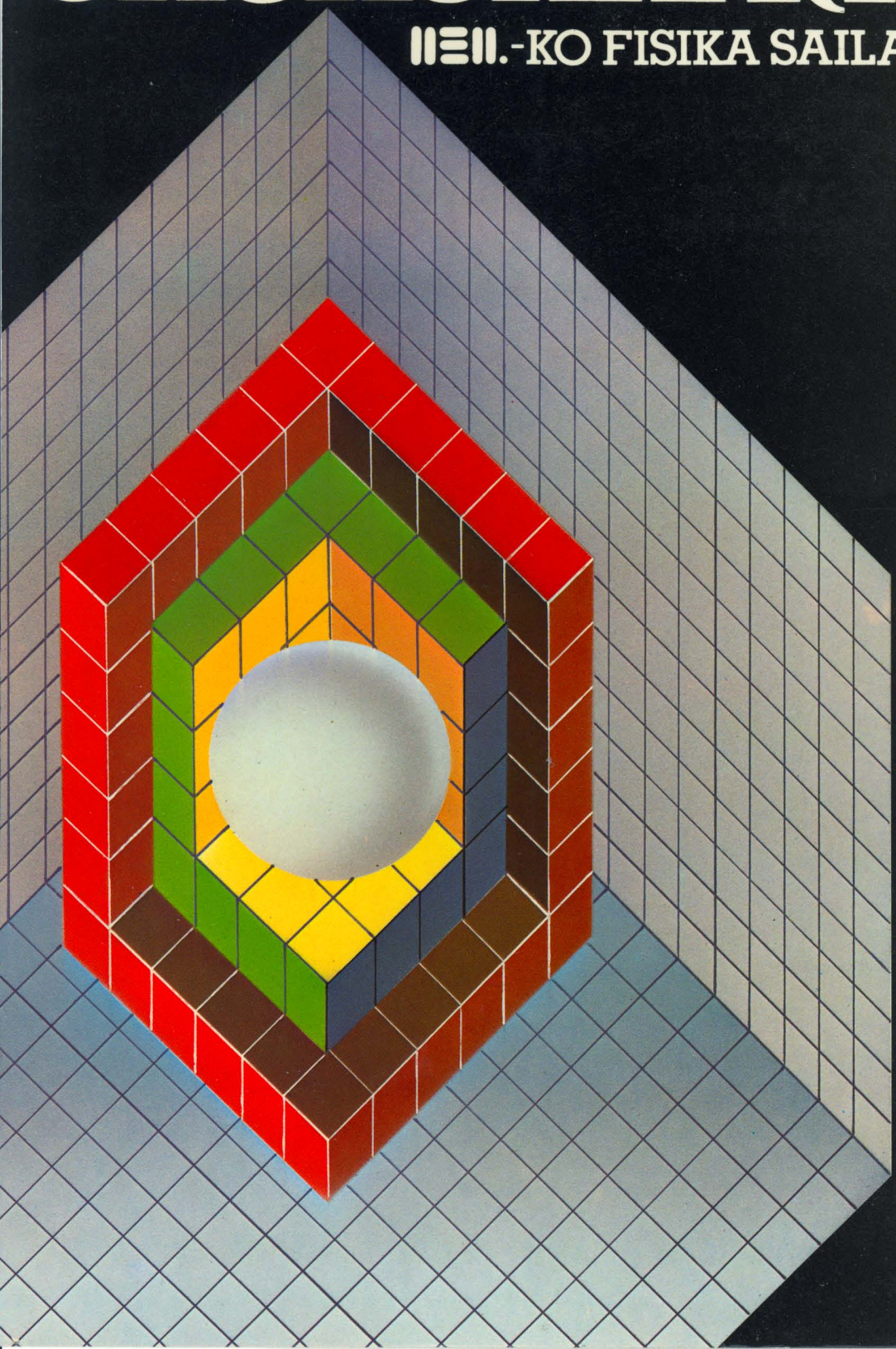
# FISIKA OROKORRA (II)

## II.-KO FISIKA SAILA



# FISIKA OROKORRA (II)

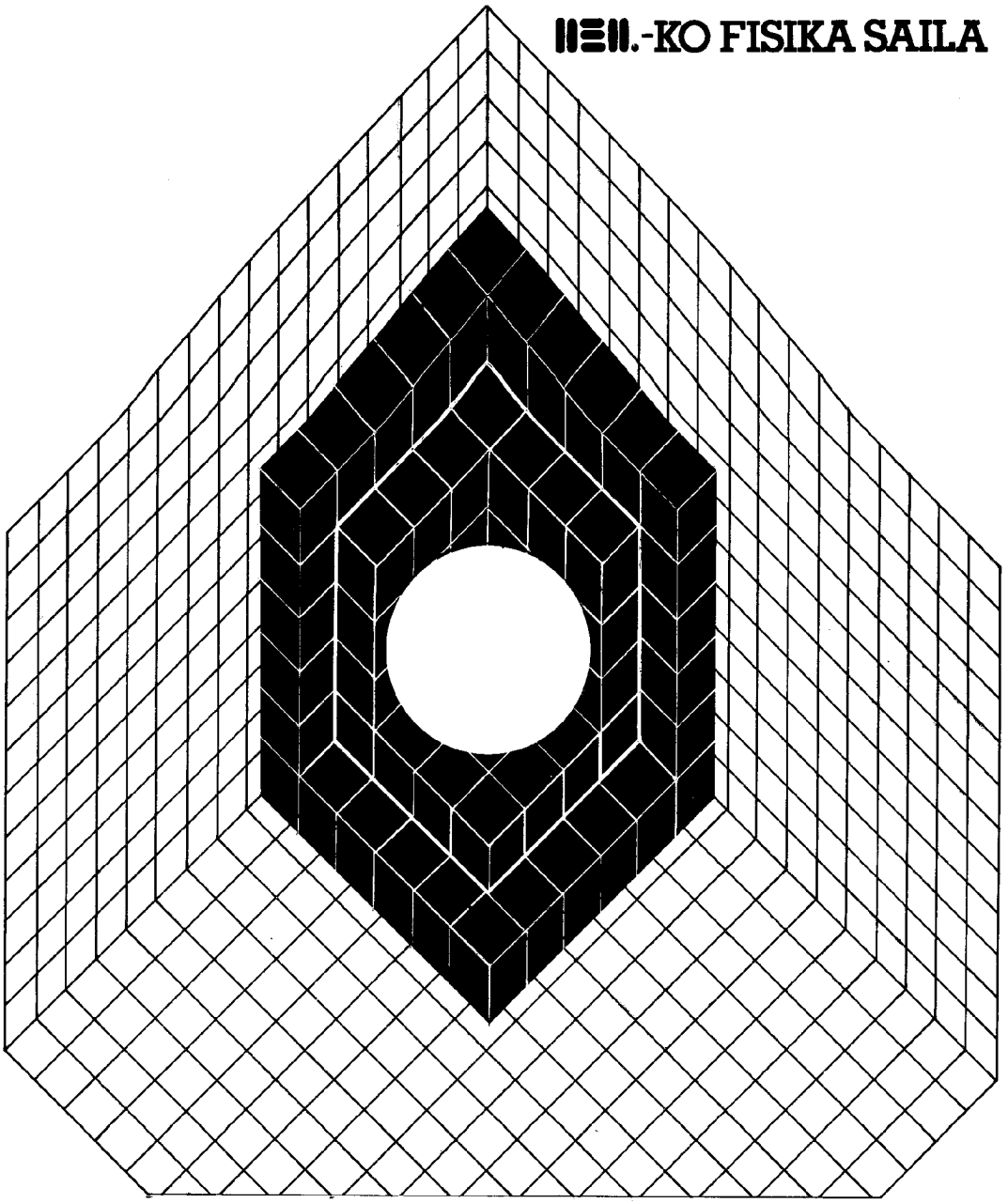
## III.-KO FISIKA SAILA

EUSKO JAURLARITZAREN LAGUNTZAZ

Jabegoa: U.E.U.ko FISIKA Saila
Lege-gordailua: BI-141-86
ISBN.: 84-398-5987-2
Inprimategia: BOAN, S.A.

# FISIKA OROKORRA (II)

II.-KO FISIKA SAILA



# F I S I K A  O R O K O R R A (II)

UEU.KO FISIKA SAILA

J.M. Agirregabiria
A. Duoandikoetxea
M. Ensunza
J.R. Etxebarria
O. Ezenarro
J.M. Pitarke
A. Trancho
P. Ugalde

*AURKIBIDEA*

*HITZAURREA* . . . . . XVII

*11. GAIA: INTERAKZIO GRABITATORIOA*

*11.1. Grabitazioaren lege unibertsala* . . . . . 3

*11.1.1. Kepler-en legeak*
*11.1.2. Grabitazioaren lege unibertsala*
*11.1.3. Cavendish-en tortsio balantza*

*11.2. Masa inertziala eta grabitazionala. Baliokidetasun-printzipioa* . . . . . 9

*11.3. Eremu grabitatorioa* . . . . . 12

*11.3.1. Eremu grabitatorioa*
*11.3.2. Gauss-en teorema*

*11.4. Energia potentzial grabitatorioa eta potentzial grabitatorioa* . . . . . 20

*11.4.1. Energia potentzial grabitatorioa*
*11.4.2. Potentzial grabitatorioa*

*11.5. Indar zentral kontserbakorren peko higidura. Kepler-en problema.* . . . . . 23

*11.5.1. Indar zentral kontserbakorren peko higidura*
*11.5.2. Kleper-en problema*

*11.6. Zenbait adibide* . . . . . 32

## 12. GAIA: ELASTIKOTASUNA

12.1. Solidoaren barneko esfortzuak . . . . . 38

12.2. Deformazio unitarioak . . . . . 42

12.3. Materialen konportamoldea . . . . . 44

12.4. Hooke-ren legea. Elastikotasun-moduluak . . . . . 46

12.5. Poisson-en koefizientea . . . . . 48

12.6. Malgukiak . . . . . 50

12.7. Esfortzuen tentsorea. . . . . 51

## 13. GAIA : FLUIDOEN MEKANIKA

### I. FLuidoen propietateak

13.1. Fluidoen definizioa eta sailkapena. . . . . 59

13.2. Biskositatea. . . . . 63

### II. Fluidoen dinamika

13.3. Presio hidrostatikoa. Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa. . . . . 67

13.4. Flotazioaren arazoa . . . . . 72

### III. Fluidoen mekanika

13.5. Fluxu-motak . . . . . 75

13.6. Reynolds-en zenbakia. . . . . 78

13.7. Kontinuitatearen ekuazioa . . . . . 81

13.8. Higiduraren ekuazioa korronte-lerro batetan. Bernouilli-ren ekuazioa. Energiaren ekuazioa. . . 82

13.9. Energiaren ekuazioaren orokorpena . . . . . 85

13.10. Momentu linealaren ekuazioa. . . . . 87

13.11. Solidoen higidura fluido baten barnean . . . . . 88

14. GAIA: LIKIDOEN GAINAZALEN BEREZITASUNAK. GAINAZAL-TENTSIOA

14.1. Gainazal-tentsioa . . . . . 96

14.2. Gainazal-unitateko energia. . . . . 100

14.3. Xafla likido baten kurbaturari dagokion presio-desberdintasuna. Laplace-ren legea. . . . . 101

14.4. Gainazalen azalera minimoa. . . . . 104

14.5. Tanten sorkuntza. . . . . 106

14.6. Kontaktu-angelua. Gainazalen gaineko tantak . . . 106

14.7. Kapilartasuna. Jurin-en legea . . . . . 110

15. GAIA: HIGIDURA OSZILAKORRA

15.1. Oszilazio harmonikoak . . . . . 115

15.2. Oszilazio harmonikoaren zinematika eta dinamika. . . . . 118

15.3. Energia oszilazio harmonikoetan . . . . . 124

15.4. Oszilazio harmonikoen konposaketa . . . . . 127

15.5. Bilakide oszilakorrak. Osziladore indargetua. . . 133

15.6. Oszilazio bortxatuak. Erresonantzia . . . . . 138

15.7. Osziladorearen inpedantzia. . . . . 141

16. GAIA: UHINAK

16.1. Uhinen adierazpena. . . . . 147

16.2. Uhin unidimentsional harmonikoa . . . . . 150

16.3. Uhin-motak. . . . . 153

16.4. Zenbait adibide . . . . . 157

16.4.1. Luzetarako uhin elastikoak hagaska batetan barrena

16.4.2. Zeharkako uhinak soka batetan zehar

16.5. Momentu linealaren eta energiaren hedapena uhinen kasuan . . . . . 163

17. GAIA: UHINEN PROPIETATE OROKORRAK

17.1. Interferentziak . . . . . 169

17.2. Huygens-en printzipia . . . . . 172

17.3. Malus-en teorema. . . . . 174

17.4. Uhinen isladapena eta errefrakzioa. . . . . 175

17.5. Uhin geldikorrak. . . . . 181

17.6. Uhin-en difrakzioa. . . . . 184

17.7. Doppler efektua . . . . . 187

18. GAIA: INTERAKZIO ELEKTROSTATIKOA

18.1. Karga elektrikoa. . . . . 196

18.1.1. Karga elektrikoaren definizio operazionala

18.1.2. Kargaren kontserbazio-printzipioa

18.2. Coulomb-en legea. . . . . 199

18.3. Eremu elektrikoa. . . . . 204

18.3.1. Zenbait kargak sorturiko eremu elektrikoa

18.3.2. Eremu-lerroak

18.3.3. Kargaren kuantizazioa

18.3.4. Partikula kargatuaren higidura eremu elektriko uniforme batetan

18.4. Potentzial elektrikoa . . . . . 216

18.4.1. Potentzial-diferentzia

18.4.2. Potentzial elektrikoa

18.4.3. V-ren eta E-ren arteko erlazioa

18.5. Partikula kargatuaren erlazio energetikoak, eremu elektrikoan zehar higitzen denean. Potentzial elektrikoaren unitateak . . . . . 225

18.6. Dipolo elektrikoa . . . . . 226

18.6.1. Momentu dipolarra. Dipoloaren potentzial eta eremua

18.6.2. Dipoloaren gainean eremu elektrikoak duen eragina

19. GAIA: KORRONTE ELEKTRIKO JARRAIA

19.1. Korronte elektriko jarraia. . . . . 233

19.2. Korrontearen intentsitatea eta dentsitatea. . . . 235

19.3. Kontinuitatearen ekuazioa. . . . . 238

19.4. Ohm-en legea eroaleen kasuan. . . . . 239

19.4.1. Eroankortasun elektrikoa. Erresistibitate elektrikoa. Material-motak

19.4.2. Energiaren galera erresistentzia elektrikoa

19.4.3. Energiaren galera erresistentzia elektrikoetan. Joule-ren legea

19.5. Indar elektroeragile. . . . . 245

19.5.1. Sorgailu elektrikoa

19.5.2. Hargailu elektrikoa. Indar kontra-elektroeragilea

19.5.3. Ohm-en legearen orokorpena

19.6. Korronte jarraiko zirkuitu anizkoitzak. . . . . 250

19.6.1. Erresistentzia elektrikoen konbinazioen erresistentzia baliokidea

19.6.2. Kirchhoff-en legeak

20. GAIA: INTERAKZIO MAGNETIKOA

20.1. Partikula kargatu higikorren gaineko indarrak . . 261

20.2. Eremu magnetikoa zeharkatzen duen partikula kargatuaren higidura. Adibideak . . . . . 263

20.3. Korronte elektrikoaren gaineko indar magnetikoa . . . . . 270

20.4. Korronte elektrikoaren gaineko indar-momentu magnetikoa. . . . . 272

20.5. Korronte elektrikoak sortutako eremu magnetikoa . . . . . 275

20.6. Biot-Savart-en legearen erabilpenaren adibide bi. . . . . 277

20.7. Korronteen arteko indarrak. . . . . 280

20.8. Partikula kargatu higikorrek sortutako eremu magnetikoa. . . . . 282

21. GAIA: EREMU ELEKTROMAGNETIKO ESTATIKOAK

21.1. Eremu elektrostatikoaren zirkulazioa. . . . . 287

21.2. Gauss-en legea. . . . . 289

21.3. Kondentsadoreak eta energia elektrostatika. . . . 293

21.4. Eremu magnetikoaren fluxua. . . . . 296

21.5. Ampère-ren legea. . . . . 298

21.6. Laburpena . . . . . 305

22. GAIA: EREMU ELEKTROMAGNETIKO ALDAKORRAK

22.1. Higidurak sorturiko indukzio elektromagnetikoa. . 310

22.2. Faraday-Henry-ren legea . . . . . 313

22.3. Autoindukzioa . . . . . 316

22.4. Eremu magnetikoaren energia . . . . . 319

22.5. Kargaren iraupen-printzipioa. . . . . 320

22.6. Ampère-Maxwell-en legea. Desplazamendu--korrontea. . . . . 322

22.7. Maxwell-en ekuazioak. . . . . 327

23. GAIA: KORRONTE ALTERNOA

23.1. Korronte alternoaren sorkuntza. . . . . 332

23.2. Batezbesteko balioa eta balio efikaza . . . . . 334

23.3. Korronte alternoaren efektuak eta ezaugarriak . . . . . 336

23.4. Korronte alternoko hargailuak . . . . . 338

- Erresistentzia hutsa
- Autoindukzio hutsa
- Kapazitate hutsa

23.5. Korronte alternoko zirkuituak . . . . . 342

- R-L serie-zirkuitua
- R-C serie-zirkuitua
- R-L-C serie-zirkuitua
- Paralelo-zirkuitua

23.6. Potentzia . . . . . 349

23.7. Erresonantzia . . . . . 357

23.8. Transformadorea . . . . . 359

24. GAIA: UHIN ELEKTROMAGNETIKOAK

24.1. Uhin elektromagnetiko launak. . . . . 367

24.2. Uhin elektromagnetikoen energia eta momentua. Poynting-en bektorea. . . . . 373

24.3. Erradiazio elektromagnetikoen sorkuntza . . . . . 375

24.3.1. Karga azeleratuaren erradiazioa
24.3.2. Dipolo elektriko oszilakorren erradiazioa
24.3.3. Antena baten bidez sorturiko erradiazio elektromagnetikoa

24.4. Compton efektua. Fotoiak . . . . . 379

24.5. Erradiazio elektromagnetikoaren espektroa. . . . 381

25. GAIA: TERMODINAMIKAREN LEHEN PRINTZIPIOA

25.1. Sistema termodinamikoak. Oreka termodinamikoa . . . . . 388

25.2. Oreka termikoa. Tenperatura. Termometroak . . . . 389

25.3. Lan termodinamikoa. . . . . 394

25.4. Beroa. Bero-ahalmena. . . . . 397

25.5. Termodinamikaren lehen printzipioa. Barne--energia. . . . . 400

26. GAIA: GAS IDEALAK

26.1. Egoera-ekuazioa . . . . . 406

26.2. Barne-energia. Joule-ren experimentua . . . . . 409

26.3. Bero-ahalmen espezifikoak. Mayer-en erlazioa. . . 412

26.4. Gas ideal baten gaineko prozesu adiabatiko itzulgarriak. Lerro adiabatikoak. . . . . 417

26.5. Gasen teoria zinètikoa. . . . . 421

26.5.1. Sarrera gisa

26.5.2. Materia nolakoa den

26.5.3. Higidura browndarra eta batezbesteko abiadura koadratikoa

26.5.4. Presioaren lorbide berria

27. GAIA: TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIPIOA

27.1. Kelvin-Planck-en eta Clausius-en enuntziatuak . . 441

27.2. Prozesu itzulgarri eta itzulezinak. . . . . 449

27.3. Carnot-en zikloa. . . . . 451

27.4. Tenperaturaren eskala termodinamikoa. . . . . 455

27.5. Clausius-en teorema . . . . . 458

27.6. Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren formulazio matematikoa. . . . . 459

27.7. Entropia eta itzulezintasuna. . . . . 461

27.8. Entropiaren gehikuntzaren printzipioa . . . . . 463

28. GAIA: OPTIKA GEOMETRIKOA

28.1. Argia eta optika. . . . . 469

28.2. Argiaren ereduak. . . . . 470

28.3. Argi-izpiak. Optika geometrikoa. Argiaren abiadura eta errefrakzio-indizea. . . . . 472

28.4. Bide optikoa eta Fermat-en printzipioa. . . . . 474

28.5. Optika Geometrikoaren legeak. Isladapenaren eta errefrakzioaren legeak. . . . . 476

28.6. Isladapen osoa. . . . . 479

28.7. Sistema optikoak. Dioptrioak eta katoptrioak. . . 480

28.8. Objektuak eta irudiak. Sistema estigmatikoak. . . 481

28.9. Notazioa eta hitzarmenak Optika Geometrikoan. . . 483

28.10. Optika Paraxiala (edo Gauss-en hurbilketa) . . . 486

28.11. Dioptrio esferikoa. Abbe-ren inbariantea . . . . 487

28.12. Lagrange-Helmoltz-en inbariantea . . . . . 489

28.13. Handipenak . . . . . 491

28.14. Fokuak. Distantzia fokalak. Sistema baten ahalmen optikoa. . . . . 494

28.15. Ispilu esferikoak. Eraiketa grafikoak. . . . . 499

28.16. Dioptrio esferikoak. Eraiketa grafikoak. . . . . 501

28.17. Sistema zentratu baten elementu kardinalak . . . 503

28.18. Sistema baten distantzia fokalak eta beraien arteko erlazioak . . . . . 506

28.19. Ekuazio orokorrak sistema laburtuetan. . . . . 507

28.20. Lenteak. . . . . 511

28.21. Lente meheak . . . . . 516

28.22. Lente meheen sailkapena. . . . . 517

28.23. Eraiketa grafikoak lente meheetan. . . . . 518

28.24. Tresna optikoak. . . . . 520

A ERANSKINA

ANALISI BEKTORIALA

A.1. Eremu eskalarrak eta bektorialak . . . . . 533

A.2. Lerro-integrala eta zirkulazioa. . . . . 539

A.3. Gainazal-integrala eta fluxua. . . . . 544

BIBLIOGRAFIA. . . . . 551

KONTZEPTUEN AURKIBIDE ALFABETIKOA . . . . . 557

# *H I T Z A U R R E A*

*Fisika Orokorra (I) liburuaren hirugarren argitarapena prestatu ondoren, 1984-85 ikasturtearen hasieran, UEUko Fisika Taldeko partaideok liburu horren jarraipen berria egiteko premia ikusi genuen.*

*Alde batetik, lehenago eginiko Fisika Generala (II) liburua berriztu beharra zegoen, eta bestetik, zabaldu beharra ere bai, han ageri ez ziren gai batzu sartuz. Liburu hura, bere garaian Zientzi Fakultateko lehenengo ikasmailako premia batzuri begira zegoen eginda; hain zuzen, kimikarigaientzako programari loturik zegoen estu-estu. Oraingoan, euskarazko irakaskuntzak izan duen zabalkuntza ikusirik, bide batez, textuliburu zabalagoa prestatuz, fisikari izan nahi dutenei ere erantzun nahi izan diegu. Erantzungura horrek, beraz, liburuaren berriztearekin batera, beraren hedadura zabaltzera eraman gaitu, eta hona hemen ondorioa.*

*Prestaketakoa, amankomuneko lana izan da, bertan honako zortzi irakasle hauek parte hartu izan dugularik: Juan Mari Agirregabiria, Andoni Duoandikoetxea, Martxel Ensunza, Jose Ramon Etxebarria, Oskar Ezenarro, Jose Mari Pitarke, Alberto Trancho eta Patxi Ugalde. Bakoitzak gai bat edo batzuren ardura izan du, gero, guztion arteko mintegietan, oharrak eta bateraketa egin ditugularik. Gaietako egileak desberdinak izatean, agian gorabeherak soma daitezke idazkeran, nahiz eta hitzen aukeraketarako erizpideak mintegian erabaki ditugun eta, ondorioz, bakarrak izan diren. Dena dela, uste dugu, gure taldelanaren berezitasun hori aberasgarri izango dela, gorabeherak eta guzti, bertan gerorako erabilkerarako hainbat puntu eztabaidatu eta finkatu bait ditugu.*

*Aipamen berezia merezi dute, gure eskuzkribuak mekanografiatu dituzten idazkariek, agertu duten jarreragatik prezeski, gure zuzenketak behin eta berriro papereratzeko prest. Hasierako gai batzuren lehenengo makinaratzean Maite Atxikallende-k lagungu zigun eta gai guztien azken idazketa Mari Karmen Menika eta Nekane Intxaurza-rena izan da. Eskerrik beroenak hiruroi.*

*Marrazkiek ere lan ederra eman digute. Martxel Ensunza, Jose Ramon Etxebarria eta Patxi Ugalde-ren artean egin ditugu guztiak. Azalaren diseinua Fernando Garcia-rena da.*

*Besterik gabe, onuragarri izango delakoan, eta gure lanak jarraitzaile hoberik edukiko duelakoan aurkezten dugu liburua.*

*Leioan, 1986.eko Urtarrilaren 22an*

## 11. GAIA: INTERAKZIO GRABITATORIOA


11.1. Grabitazioaren lege unibertsala

11.1.1. Kepler-en legeak

11.1.2. Grabitazioaren lege unibertsala

11.1.3. Cavendish-en tortsio balantza

11.2. Masa inertziala eta grabitazionala. Baliokidetasun-printzipioa

11.3. Eremu grabitatorioa

11.3.1. Eremu grabitatorioa

11.3.2. Gauss-en teorema

11.4. Energia potentzial grabitatorioa eta potentzial grabitatorioa

11.4.1. Energia potentzial grabitatorioa

11.4.2. Potentzial grabitatorioa

11.5. Indar zentral kontserbakorren peko higidura. Kepler-en problema

11.5.1. Indar zentral kontserbakorren peko higidura

11.5.2. Kepler-en problema

11.6. Zenbait adibide

## 11.1. GRABITAZIOAREN LEGE UNIBERTSALA

Liburu honen 1. tomoan, zenbait printzipio orokor emanak izan ziren, Newton-en Mekanikaren legeak deritzenak, hain zuzen ere. Beraietan, indarrak azaldu ziren gorputzen arteko higiduraren aldaketen kausa. Beraz, Fisikaren helburu nagusienetarikoa, prezeski, indar horien ikerketa da. Eskala makroskopikoan, eta kontaktu-indarrak alde batetara utzirik, indar bi nabarmen ditzakegu soilik: interakzio grabitatorioa eta elektromagnetikoa. Eskala mikroskopikoan, aldiz, beste bi daude: interakzio ahula eta interakzio bortitza.

Gaur egun dakigunez, interakzio grabitatorioa, Lurretik hurbil dauden gorputzen higiduran, itsasgora-beheretan eta planeten mugimenduan igartzen da batik bat. Interpretazio zuzena Newton-ek eman zuen, mendeetan zeharreko eztabaida argiturik. Beronek frogatu zuenez, gorputz guztien artean erakarpen-indarrak sortzen dira, eta horrela, gorputz baten pisua, gorputz horren eta Lurraren artean dagoen erakarpen-indarraren neurria da. Kontzeptu honek, errotik irauli zituen ordurarte Lurraz eta izarren higiduraz zeuden eritziak, Fisikaren historian aro berri bat sortu zelarik. Horregatik, oso interesgarri dateke, Newton-en ebazpenera heldu arte historian zeharreko arlo honetan emaniko pausoak ikustea, laburki bada ere.

Antzinadanik arreta handienaz aztertua izan da Astronomia. Gizona, unibertsoaren zentru gisa kontsideratzen zuten grekoek eta, Lurrean bizi zenez gero, unibertsoko erdigunea Lurra zela uste zuten. Beste planetak eta eguzkia bera ere, Lurraren inguruan biraka, zirkulu zentrukideak eginez higitzen ziren, ustez. Hala ere, teoria hau ez zetorren bat behaketa experimentalekin. Kristo ondoko II. mendean, Ptolomeok beste teoria bat proposatu zuen: Lurra geldi zegoen, baina planeten ibilbideak ez ziren zirkunferentziak, askoz ere era korapilatsuagoak baizik. Egungo hitzetan, Lurrean kokatzen den inertzi

sistema batetik deskribaturiko higidura planetarioaren azterketa hurbildua, besterik ez zen Ptolomeok egin zuena.

XVI. menderarte teoria hau izan zen nagusi. Honetan, Nicolas Copernico poloniarrak beste teoria hau azaldu zuen: planeta guztiak (Lurra barne egonik) eguzkiaren inguruan biratzen dira. Teoria honi heliozentrikoa deritzo, eta jadanik Kristoren aurreko III. mendean izan zen Samos-ko Aristarkok proposatua. Copernico-ren teorian, eta Tycho Brahe-ren neurketetan finkatuz, planeten higiduran erregulartasun batzu aurkitu zituen Johanes Kepler germaniarrak, beronen izenaz ezagutzen diren hiru legeetan bildu zituelarik.

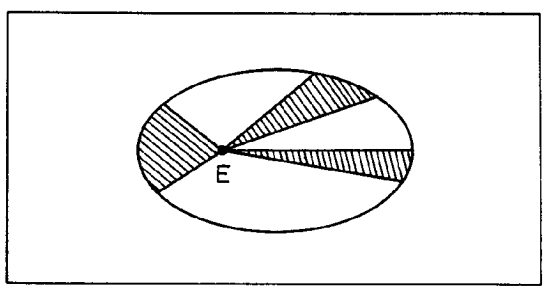
### 11.1.1. Kepler-en legeak.

Planetek eguzkiaren inguruan duten higidurari buruzko neurketa experimentaleetan finkatuz, Kepler-ek honako hiru lege famatuok eman zituen:

1. Planetak orbita eliptikoetan higitzen dira eguzkiaren inguruan, eguzkia foku batetan egonik.

2. Edozein planetaren eguzkiarekiko posizio-bektoreak elipsearen azalera berdinak estaltzen ditu denbora-tarte berdinetan. Edo gauza bera dena, planetek beren orbitan duten eguzkiarekiko abiadura areolarra konstantea da.

3. Orbita osotzeko behar duten periodoaren karratua eguzkirainoko batezbesteko distantziaren kuboaren proportzionala da.



### 11.1.2. Grabitazioaren lege unibertsala.

XVII. mendean Newton-ek, Kepler-en lege enpirikoak oinarritzat hartuz, ondokoa ondorioztatu zuen: "Planetek eguzkiarekiko duten higidura, eguzkiaren eta planeten arteko indar baten ondorioa da".

Ondorio honetara heltzeko arrazonamendua zein izan omen zen ikus dezagun:

1. Lehenengo Kepler-en legeak dioskunez, planetek eguzkiarekiko duten higidura launa denez gero, planeten gainean eragiten duen indar-eremua zentrala da.

2. Bigarren legetik, planetaren ibilbidea zirkularra deneko kasu partikularrean, ondokoa dugu:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{kte} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \ ,$$

non A abiadura areolarra deritzona den.

Azelerazioaren adierazpena hauxe da koordenatu esferikoetan:

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} \ ,$$

non $a_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -r\,\omega^2$ ,

eta $a_\theta = 2 \dfrac{dr}{dt} \dfrac{d\theta}{dt} + r \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ diren.

Beraz, $\vec{a} = -\omega^2 r \hat{r}$ .

Copernico-ren erreferentzi sistema inertzialtzat har baldin badezagu, hauxe dugu:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \ ,$$

non $\vec{F}$ eguzkiak planetaren gainean eragiten duen indarra, $m_i$ planetaren masa inertziala (geroxeago definituko dugu honen esannahia modu zehatzean) eta $\vec{a}$, Copernico-ren erreferentzialarekiko planetaren azelerazioa diren.

Hau horrela izanik,

$$\vec{F} = - m_i \, \omega^2 \, r \, \hat{r} = - m_i \, \frac{(2\pi)^2}{T^2} \, r \, \hat{r} \, .$$

(Ikus Fisika Orokorra (I), 5.8. puntua).

3. Orbitaren periodoaren karratua Eguzkiaren eta planetaren arteko batezbesteko distantziaren kuboaren proportzionala da:

$$T^2 \propto r^3 \, .$$

Beraz, azkenengo formulan sartuz, ondokoa lortzen dugu:

$$\vec{F} \propto - \frac{m_i}{r^3} \, . \, r \, . \, \hat{r} = - \frac{m_i}{r^2} \, \hat{r} \, .$$

Azkenez, honela geratzen zaigu indarraren adierazpena:

$$\vec{F} = - \frac{k \, m_i}{r^2} \, \hat{r} \, .$$

Hau da, planetaren ibilbidea zirkularra deneko kasuetan, planetaren higiduraren sortzailea eguzkiak horren gainean eragiten duen ondoko motako indarra dugu:

. Indar zentrala.
. Indar erakarlea.
. Planetaren masaren proportzionala, eta eguzkitiko distantziaren karratuaren alderantziz proportzionala.

Planeten higidura zirkularra baino, eliptikoa denean ere, Kepler-en legeak oinarritzat hartuz, eguzkiak planeten gainean eragiten duen indarra, planetaren higiduraren sortzailea alegia, hauxe izanen dugu:

$$\vec{F} = - k \frac{m_i}{r^2} \hat{r} .$$

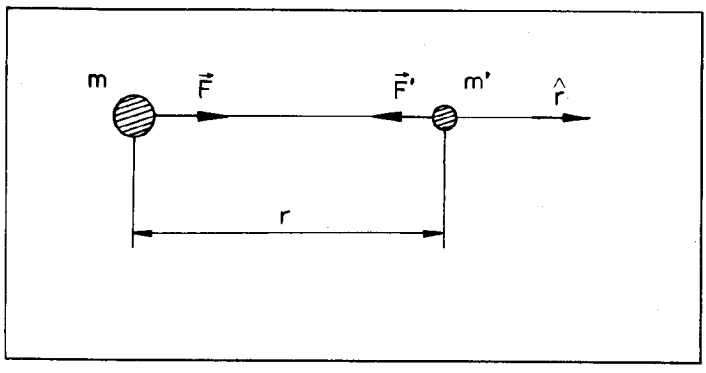
Newton-ek emaitza hau edozein gorputz biren kasurako orokortu zuen. Hau da, edozein gorputz biren artean elkarrakzio bat dago, eta honi, elkarrakzio grabitatorioa deritzo. Beraz, A eta B gorputzak baldin baditugu, akzio-erreakzioaren printzipioaren arauera, A gorputzak B delakoaren gainean eta B gorputzak A gorputzaren gainean indar grabitatorio bana eragiten dute, indar bi hauek balore bereko modulua, norabide berbera, baina aurkako norantza dutelarik.

Horrela, bada, Newton-ek gorputz guztien arteko elkarrekintza mota berekoa zela adieraziz, grabitazioaren lege unibertsala postulatu zuen: "Gorputz biren artean sortzen den elkarrekintza grabitatorioa, beraien masen zuzenki proportzionalak eta bien arteko distantziaren karratuaren alderantziz proportzionalak diren bi indar erakarle berdinen bidez adierazten da".

Berau, formula batean adierazirik, honela geratzen da:

$$\vec{F}' = - \gamma \frac{m\, m'}{r^2} \hat{r} = - \vec{F} ,$$

non m eta m' partikula bien masak eta r beraien arteko distantzia diren; bestalde, $\hat{r}$ bektorea, bi partikulak lotzen dituen zuzenaren norabideko bektore unitarioa da, beheko irudian argi ikusten denez:



Horrez gain, emandako erlazioan agertzen den $\gamma$ delakoa, grabitazioaren konstante unibertsala deritzona da, zeinari buruz gerotxoago mintzatuko garen.

Ohar gaitezen halaber, ezen elkarrekintza grabitatorioa deskribatzen duten indarrak erakarleak direla beti. Aldiz, indar elektromagnetikoak erakarleak edo aldaratzaileak izan daitezke.

### 11.1.3. Cavendish-en tortsio-balantza.

Aurreko lege unibertsalaren zuzentasuna experimentalki dago frogatuta. Honelaxe finka daiteke $\gamma$ konstanterako ondoko balore hurbildua:

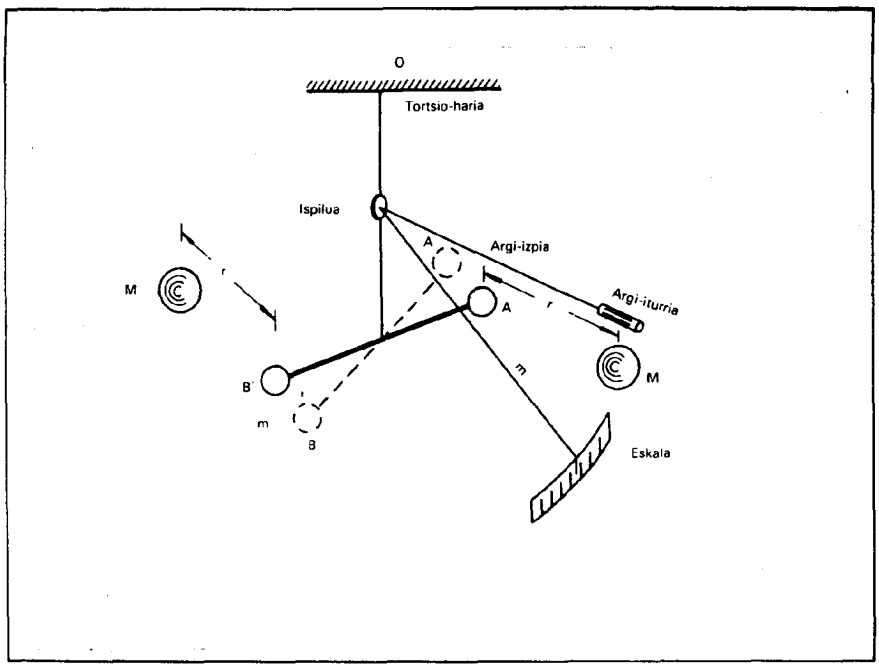
$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \quad m^3 \, kg^{-1} \, s^{-2}$$

Nabaria denez, interakzio grabitatorioa ahula da oso, eta indartsu ager dadin, masa handiek interakzionatu behar dute (esaterako, planeta eta izarren masek).

Interesgarri datekeenez, Cavendish-ek $\gamma$ delakoaren balorea nola neurtu zuen ikusiko dugu, berau izan bait zen $\gamma$ konstanterako lehenengo neurketa zehatza egin zuena, Cavendish-en tortsio balantza zeritzon tresna sentikorraren bidez.

Tresna honek ziri horizontal baten muturretan m masako platinozko edo urrezko esfera bi ditu, ziria erditik hari fin batetatik zintzilik dagoelarik. Hari honi helduta, ispilu txiki bat dago, zeinak argi-izpi bat isladatzen duen eskala batetara. Balantza erabiltzeko, m masako bi esferen ondoan M masako esfera bi ipintzen ditugu. A eta B puntuetan masak orekan daude, egoera horretan hariak ez duelarik tortsiorik pairatzen. Baina behin M masako esferak ipiniz gero, eta grabitate-indarren eraginez, indar-bikote bat sortzen da, haria eta ispilua honekin batera biraerazten dituelarik. Beraz, ispiluan isladatzen den izpia eskalan neurtuz, grabitate-indarraren balioa ezagut dezakegu, eta Newton-en formula erabiliz, $\gamma$ delakoarena.

Haria bihurtu eta tortsionatu egiten denez, tortsio-balantza dela esaten da.




## 11.2. MASA INERTZIALA ETA GRABITAZIONALA BALIOKIDETASUN-PRINTZIPIOA.

Gorputz baten masa inertziala gorputzaren gainean eragiten duen indar erresultantearen eta gorputzak hartzen duen azelerazioaren arteko erlazio konstanteari deritzo. Honela, erlazio konstante honetan eta Kepler-en lege enpirikoetan oinarrituz, Newton-ek, eguzkiak planeten gainean eragiten duen indarraren adierazpena aurkitu zuen, ondoren, edozein gorputz biren kasurako generalizaturik.

Bestalde, edozein bi gorputzen artean eragiten duen indar grabitatorioa neurtzen baldin badugu (experimentu hau tortsio-balantza baten bidez egin daiteke: Cavendish-en balantzaren bidez, esaterako) eta experimentua mota bereko esfera desberdinez errepikatuz, bien arteko indar grabitatorioa esferen bolumenaren proportzionala dela ondorioztatzen da.

Hau dela eta, gorputz bakoitzaren masa grabitazionala definitzen dugu, zeinarekiko erakarpena indar grabitatorioaren proportzionala den. Beraz, ondoko erlazio hau idatz dezakegu:

$$\vec{F}_{12} = - m_{g1} \cdot m_{g2} \cdot \vec{f}_{12} (r_{12}),$$

non $m_{g1}$ eta $m_{g2}$ gorputz bien masa grabitazionalak diren, eta $\vec{f}_{12}(r_{12})$, gorputz bien arteko distantziaren funtzio bat.

Experimentu honetan ere, masa berdinak erabiliz, indar grabitatorioa zentrala eta bi gorputzen arteko distantziaren karratuarekiko alderantziz proportzionala dela ondoriozta dezakegu:

$$\vec{F}_{12} = - \gamma' \frac{m_{g1} \cdot m_{g2}}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = - \vec{F}_{21} ,$$

non $\gamma'$ proportzionaltasun-konstantea den.

Honela eginez, gorputz baten masa inertziala eta masa grabitazionala modu desberdinetan definitu ditugu.

Newton-ek postulatu zuenez, eguzkiaren eta planeten arteko elkarrekintza eta edozein bi gorputzen artekoa izaera berekoak direla onartzen badugu, honako erlazio honetara ailegatzen gara:

$$\frac{m_g}{m_i} = k .$$

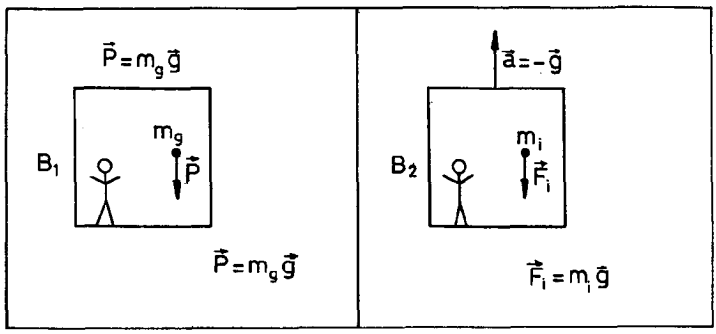
Hau da, edozein gorputzetarako, beraren masa grabitazionalaren eta masa inertzialaren arteko erlazioak balio berekoa izan behar du.

Bertan jarri dugun k delakoa 1 egin dezakegu, beste magnitude fisikoen unitateak era egokian hautatuz gero. Beraz, beste hitzez adierazita, masa inertziala eta grabitazionala balore berekoak direla postulatu egiten dugu:

$$m_i = m_g = m .$$

Ohar gisa, diogun ezen lehen aipatu dugun $\gamma$ konstantearen balorea, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$, hain zuzen, soilik eta soilik baldin eta baliokidetasun-printzipioa onartzen badugu, k = 1 eginez, finka daitekeela.

Bide batez, esan beharrekoa da ezen aintzinako Mekanikak, egia esan, onartu egin zuela printzipio hau, baina ez zuela interpretatu. Horrexegatik, printzipio honi interpretazio baliagarria eman diezaiogun, jar dezagun adibide bat, bi igongailuei buruzkoa, hain zuzen ere.




Demagun bi behatzaile desberdin igongailu itxi bitan daudela. Lehenengoa, $B_1$ izendatuko duguna, Lurraren erakarpen grabitatorioaren pean dago. Bigarrena, $B_2$, ostera, grabitaterik ez dagoeneko espazioalde batetan dago, baina bere sistemak $-\vec{g}$ azelerazioa pairatzen du.

Biek partikula berberaren higidura aztertzen dute. $B_1$ behatzailea sistema inertzial batetan dago; beraz, honako indar hau neurtzen du (pisua):

$$\vec{P} = m_g \cdot \vec{g} \ .$$

$B_2$ delakoak, sistema ez-inertzial batetan dagoenez gero, inertzi indar hau neurtuko du:

$$\vec{F}_i = - m_i . \vec{a} = m_i . \vec{g} \ .$$

Eta, baliokidetasun-printzipioaren arauera:

$$\vec{P} = m_g \vec{g} = \vec{F}_i = m_i \vec{g} = m\vec{g} \ .$$

Emaitza honetatik abiatuz, ondorio honetara irits gaitezke: "Behatzaile batek ezin dezake igarri bere laborategia eremu grabitatorio uniforme baten barruan ala azeleraturik dagoen erreferentzi sistema baten barruan dagoenentz". Eta, aurreko hau orokortuz, "Naturaren lege fisikoak, grabitate-eremu uniformearen eta sistema azeleratuen arteko desberdintasun dinamikoa ez igartzeko modukoa izan dadin idatzi behar dira". Hauexek biok dira, hain zuzen, baliokidetasun-printzipioaren enuntziatuak.

## 11.3. EREMU GRABITATORIOA

### 11.3.1. Eremu grabitatorioa

Esan dugunez, M masa espazioko puntu batetan jartzen bada, bere eragina espazio osora hedatzen da, eta honela, beste puntu batetan m masa jartzen bada, indar hau jasanen du, M masa dela kausa:

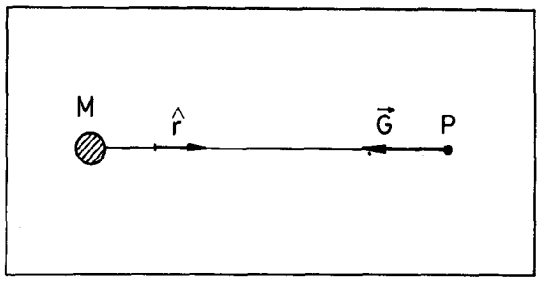
$$\vec{F} = - \gamma \frac{M\,m}{r^2} \hat{r} \ .$$

Hau honela izanik, ondoko moduan definitzen da eremu grabitatorioaren intentsitatea: "Espazioko puntu batetan eremu grabitatorioak duen $\vec{G}$ intentsitatea, puntu horretan jarritako masa-unitateak pairatzen duen indarra da".

Kontutan hartzekoa da $\vec{G}$ eremu grabitatorio hau eremu bektoriala dela, eta, definizioak berak dioskunez:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = - \gamma \frac{M}{r^2} \hat{r} \qquad \text{(m dagoen puntuan).}$$

Erraz nabari daitekeenez, $\vec{G}$ eta $\hat{r}$ bektoreak norabide




berekoak baina norantza kontrakoak dira (ikus 5. irudia). Bestalde, demagun $m_1$, $m_2$,... masa batzu ditugula, eremu bana sortzen dutelarik. Jakina, gainezarmen-printzipioa erabiliz, P puntuan legokeen m masak, ondoko $\vec{F}$ indarra pairatuko luke:

$$\vec{F} = \vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots = -\gamma \frac{m\, m_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \left(-\gamma \frac{m\, m_2}{r_2^2}\hat{r}_2\right) + \ldots =$$
$$= -m\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2}\hat{r}_i ,$$

non $r_i$ m partikularen eta $m_i$ delakoaren arteko distantzia, eta $\hat{r}_i$ partikula biak lotzen dituen zuzenaren bektore unitarioa diren.

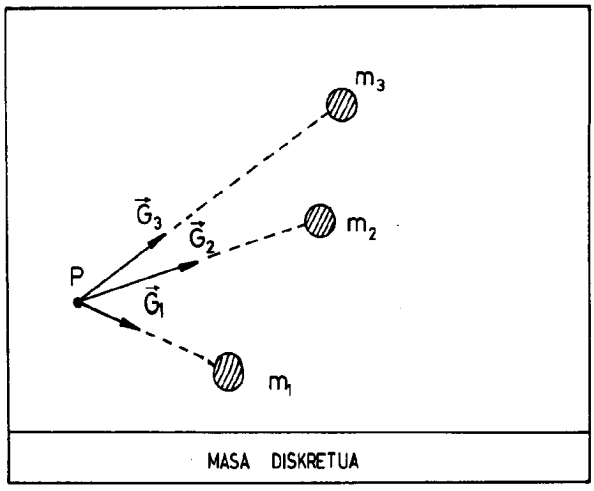
Beraz, P puntuan dagoen eremua, beronen definizioa erabiliz, hauxe izanen da:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2}\hat{r}_i = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \ldots = \sum_i \vec{G}_i .$$

Hots, ondorio honetara iristen gara: $\vec{G}$ eremua masa guztiek sortzen duten eremuen batura da, eta berori lortzeko, eremuen kasurako ere, gainezarmen-printzipioaz balia gaitezke, hain zuzen.

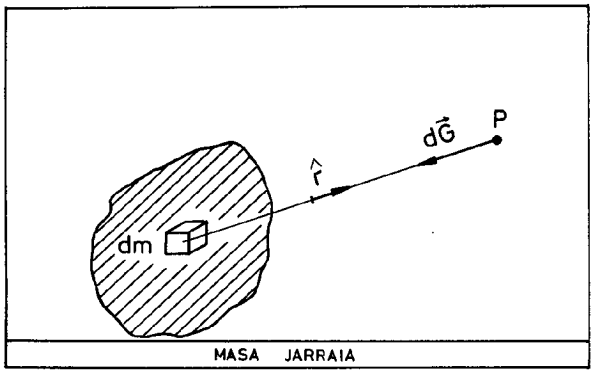
Modu berean, eremua sortzen duen masa jarraia deneko kasuan,

$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2}\hat{r} ,$$



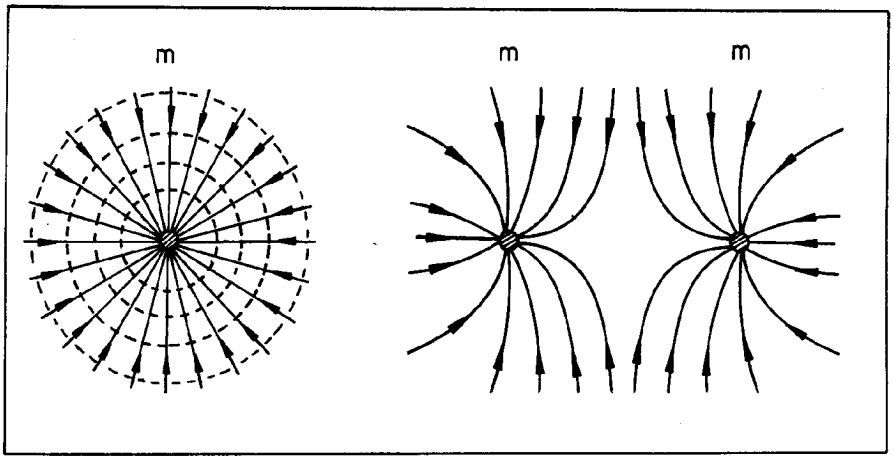

eta intentsitate osoa, aurreko adierazpenaren bolumen osorako integrazioaren bidez lor dezakegu:

$$\vec{G} = \int d\vec{G} = -\gamma \int \frac{dm}{r^2}\,\hat{r}$$




Eranskinean aipatzen den legez, eremu grabitatorioa espazioan suposatzen diren lerro orientatuak ditugun indar-lerroen bidez adieraz daiteke irudikorki, puntu bakoitzean eremu grabitatorioaren intentsitatearen tangenteak izanik. (Ikus hurrengo irudiak). Espazioko puntu bakoitzetik lerro bakar bat pasatzen da, eta eremu grabitatorioaren intentsitatea handiagoa deneko lekuetan, lerroen kontzentrazio handiagoa ere agertzen da. Ohar gisa, diogun ezen hitzarmen berberaz baliatzen garela eremu elektriko eta magnetikoen kasuetan; baina grabitazioaren kasuan sortzen diren indarrak erakarleak direnez gero, eremu gra

bitatorioari dagozkion indar-lerroen norantza beti eremua sortzen duen masarantz doa.

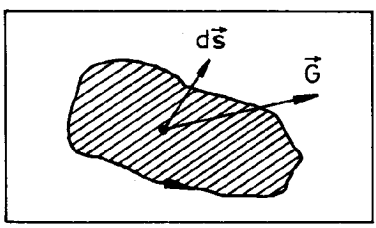



11.3.2. Gauss-en teorema.

Aurreko puntuarekin loturik, atal honetan Gauss-en teorema aztertuko dugu eremu grabitatorioaren kasurako. Kasu orokorra sakonkiago ulertzeko, eta ondoriora ailegatzeko emanen ditugun urratsak hobeki konprenitu ahal izateko, ikus eranskina.

Demagun, gainazal laun infinitesimal bat. Gainazal honen puntu batetan eremu grabitatorioak $\vec{G}$ balorea badu, $d\vec{s}$ azalera-elementua izanik, gainazal infinitesimala zeharkatzen duen $\vec{G}$ eremuaren $d\phi$ fluxua hauxe da:

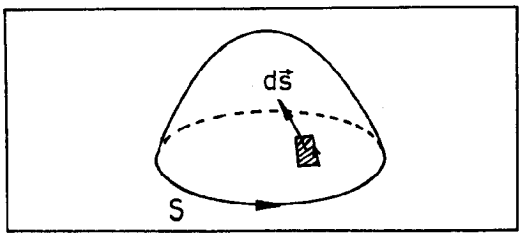
$$d\phi = \vec{G} \cdot d\vec{s} \ .$$




Gainazal finitua denean, integratu egin behar da aurreko adierazpena, fluxu osoa lortzeko:

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} \ ,$$

non erizpide bat hautatu behar den, $d\vec{s}$ bektorearen norantza finkatzeko (ikus eranskina).

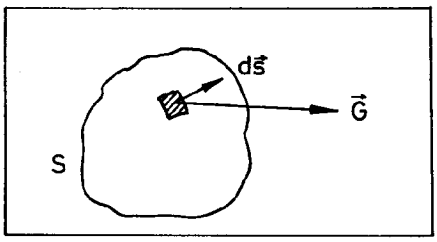



Gainazal itxietan, Gauss-en teorema aplika dezakegu. Beraz,

$$\oiint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r^3} = 4\pi$$

betetzen dela kontutan hartuz, S gainazal barruan dagoen m partikula puntual batek sorturiko eremu grabitatorioaren fluxua ondokoa da:

$$\oiint \vec{G} \cdot d\vec{s} = -4\pi\gamma m .$$




Eta gainezarmen-printzipioaren ondorio bezala,

$$\emptyset = \oiint \vec{G} \cdot d\vec{s} = -4\pi\gamma m_s ,$$

$m_s$, gainazalak bere barnean gordetzen duen masa osoa izanik.

Emaitza hau baliagarria dugu oso, simetria esferikoa duten zenbait kasutarako, adibidez. Esandakoa baieztatzearren, ondoko adibidea aztertuko dugu:

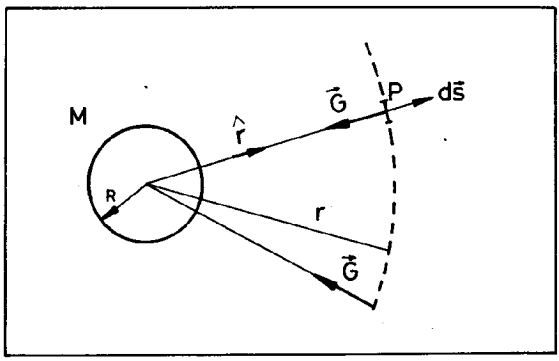
Adibidea: Demagun R erradioa eta M masa dituen esfera solido eta homogenoa, eta lor ditzagun:

a) esferaz kanpoko puntu batetan sortzen den eremu grabi-

tatorioa eta

b) esfera barneko puntu batetan sortzen dena.

a) Ondoko irudian nabaria denez, simetria dela eta, $\vec{G}$ bektoreak erradioaren norabidea izango du, eta, noski, lehenago ikusi dugun bezalaxe, bere norantza masaranzkoa izanen da. Bestalde, simetriak hauxe ere halabehartzen du: r erradioko esfera zentrukideko puntu guztietan eremuak modulu berbera eduki behar du.




Beraz, esfera horretan zeharreko fluxua honelaxe lor daiteke:

$$\vec{G} = - G.\hat{r}$$

$$d\vec{s} = ds.\hat{r}$$

direla kontutan harturik,

$$\emptyset = \oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = - \oiint_S G \cdot ds = - G \oiint_S ds =$$

$$= - G\, 4\, \pi\, r^2 ,$$

S azalaren balorea $4\,\pi\, r^2$ bait da.

Bestalde, Gauss-en teorema erabiliz,

$$\emptyset = - 4\, \pi\, \gamma\, M ,$$

non M, R erradioko esferaren masa osoa den.

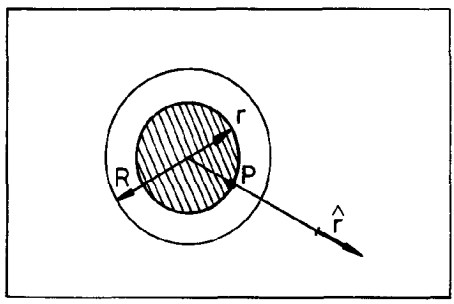
Azken emaitza bi hauek kontrajarriz, ondorio honetara irits gaitezke:

$$G = \frac{\gamma M}{r^2} ,$$

eta beraz,

$$\vec{G} = - \frac{\gamma M}{r^2} \hat{r} .$$

b) Esferaren barruko puntuen kasurako ere, simetriari buruz esandako ohar guztiek modu berean balio dute, irudian ikus daitekeenez:




Beraz, r erradioko esferako puntu guztietan $\vec{G}$ eremuak modulu berbera du, eta lehen egin dugun bezalaxe, esfera horren azaleran zeharreko fluxu osoa hauxe izanen da:

$$\emptyset = \oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = - G \cdot 4 \pi r^2 .$$

Bestalde, Gauss-en teorema aplikatuz,

$$\emptyset = - 4 \pi \gamma m .$$

non m, r erradioko esferaren masa osoa den.

R erradioko esfera homogenoa denez, m masaren balorea honelaxe lortzen dugu:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \\ m &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = \frac{r^3}{R^3} M .$$

$\rho$ masa-dentsitatea konstantea bait da.

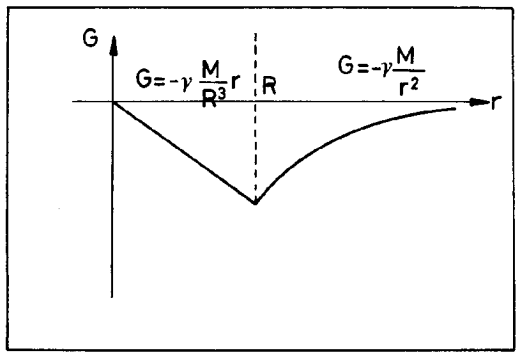
Aurreko balore hau kontutan hartuz, eta fluxu osorako lorturiko emaitza biak konparaturik,

$$G = \frac{\gamma M}{R^3} r .$$

Hots, P puntuan dagoen eremua hauxe da:

$$\vec{G} = - \frac{\gamma M}{R^3} r \ \hat{r} .$$

Azkenez, honela adieraz dezakegu esfera homogenoak barnean eta kanpoan sortzen duen eremu grabitatorioaren tankera:




Dakusagunez, Gauss-en teorema erabiliz, erraz kalkulatu dugu esfera batek sortzen duen eremu grabitatorioaren intentsitatea, espazioko edozein puntutarako. Honez gain, aurreko emaitzak direla medio, berriro ere ailega gintezke Newton-en legearen adierazpenera.

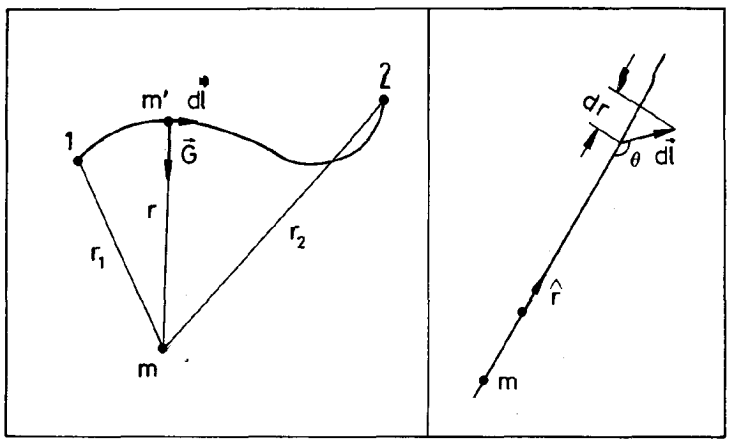
Honetan datza, batik bat, Gauss-en teoremaren garrantzi handia.

## 11.4. ENERGIA POTENTZIAL GRABITATORIOA ETA POTENTZIAL GRABITATORIOA.

Atal honetan, izenburuan aipatzen diren magnitude fisiko bi horiek aztertuko ditugu, berauen ezagupenak beste problema interesgarri batzu ikertzeko posibilitateak ematen bait dizkigu.

### 11.4.1. Energia potentzial grabitatorioa

Demagun m' masako partikula m partikulak sortzen duen eremuan higitzen dela. Ikus dezagun, bada, zenbateko lana egiten duen eremuak m' masako partikula 1 puntutik 2 puntura iragatean (ikus ondoko irudia):




Eremuak egiten duen lan infinitesimala hauxe da:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m' \cdot \vec{G} \cdot d\vec{l} = m' G \, dl \cos\theta =$$

$$= - m' G \, dr \, .$$

Beraz, G eremuaren adierazpena erabiliz,

$$dW = - \gamma \frac{m \, m'}{r^2} dr \, .$$

Honetan finkatuz, eremuak bide osoan egiten duen lana:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} - \gamma \frac{m\,m'}{r^2}\,dr = \gamma\, m\, m' \left.\frac{1}{r}\right|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \gamma\, m\, m' \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right].$$

Ongi dakigunez, eremu kontserbakorren ezaugarri garrantzitsuenetarikoa atzeman dezakegu aurreko emaitzan: lanak ez du 1 puntutik 2 delakorako bidearen menpekotasunik; ordea, hasierako eta amaierako puntuen menpekoa da soilik.

Honetara heldu garelarik, honelaxe definitzen da <u>energia potentziala</u>:

$$E_p = - \gamma \frac{m\,m'}{r} + K ,$$

non K delakoa konstantea den.

Beti bezala, energia potentziala konstante batez indeterminaturik dago, lana, energia potentzialen kendura gisa agertzen bait da. Hala ere, ohituraz, partikula biren arteko elkarrakzio grabitatorioa aztertzean (eta beste kasu batzutan ere bai; ez guztietan, baina) batetik besterako distantzia handituz doanean, $E_p$ energia zerorantz doala onartzen da, edo hizkera matematikoan:

$$r \to \infty \text{ doanean, } E_p \to 0 .$$

Beraz,

$$E_{p_{r \to \infty}} = 0 = K \text{ , eta}$$

$$E_p = - \gamma \frac{m\,m'}{r} .$$

11.4.2. <u>Potentzial grabitatorioa</u>

Aurreko atalean frogatu dugunez, eremu grabitatorioa kontserbakorra da, eta beraz, eremu potentzial baten gradiente gi-

sa adieraz daiteke (ikus Fisika Orokorra (1), 6. ikasgaia).

$$\vec{G} = - \text{grad } V ,$$

non V eremu eskalarra potentzial grabitatorioa deritzona den.

m masa baten r distantziarako potentzial grabitatorioa, formula honen bidez lortzen da:

$$V = -\gamma \frac{m}{r} ,$$

non beti ere agertzen zaigun konstante gehigarria, infinituan potentzial nulua izateko aukeratu dugun.

Masa bat baino gehiago ditugunean, gainezarmen-printzipioa aplika dezakegu, honelako adierazpen honetara iristen garelarik:

$$V = -\gamma\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots\right) = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i}$$

Modu berean, dagoen masa jarraia deneko kasurako,

$$V = -\gamma \int \frac{dm}{r} .$$

Bestalde, behin potentzial grabitatorioak balore berbera dueneko puntuak lotuz gero, gainazal ekipotentzialak lor ditzakegu. Partikula puntual bakarraren kasurako, esferak dira gainazalak, partikula puntuala esferen zentrua izanik (ikus 15. orrialdeko irudia).

Honez gain, eremu kontserbakor guztietan gertatzen den legez, eremu grabitatorioaren norabidea gainazal ekipotentzialen perpendikularra da.

V eta $E_p$ eremu eskalarren arteko erlazio sinplea erraz atera dezakegu, bien adierazpenak kontrajarriz:

$$V = \frac{E_p}{m'} .$$

Beraz, $\vec{G}$ delakoa masa-unitateko indarra den moduan, potentzial grabitatorioa, masa-unitateko energia potentziala da.

## 11.5. INDAR ZENTRAL KONTSERBAKORREN PEKO HIGIDURA. KEPLER-EN PROBLEMA.

Atal honetan, indar zentral kontserbakorren pean mugitzen den partikula baten abiadura aztertuko dugu. Honez gero, distantziaren karratuaren proportzionala den indar batetarako partikularizatzeari ekinen diogu, berau bait da grabitazioari dagokion kasua. Honela eginez, planetek eguzkiarekiko duten higidura, edo satelite artifizialek Lurraren inguruan dutena ezagut ditzakegu, adibidez.

Ikerketa erraztearren, bi gorputzez osoturiko sistema aztertzera mugatuko gara. (Honek esan gura du, ezen planetek eguzkiarekiko duten higiduraren kasuan, espazioan dauden beste planeta edo izar guztien eragina arbuiagarritzat jotzen dugula, esaterako).

Fisika Orokorra (I) liburuaren 7.ikasgaian azaltzen denez, bi gorputzen higidura erlatiboa, lehenengo gorputza inertzi sistema batetan finko bailegoen eta bigarrena masa laburbildua deritzona elkarrakziozko indarraren eragin pean mugitzen denean azter daiteke.

Oroit dezagun zein den masa laburbilduaren adierazpena, gorputz biren masak m eta m' badira:

$$\mu = \frac{m \cdot m'}{m + m'} \quad .$$

Orain, $m' >> m$ baldintza betetzen dela suposatuko dugu. Hauxe da, hain zuzen ere, eguzkia-planeta edo eta Lurra-satelite artifiziala sistemetan gertatzen dena. Honelatan, $\mu \simeq m$ dela jar dezakegu.

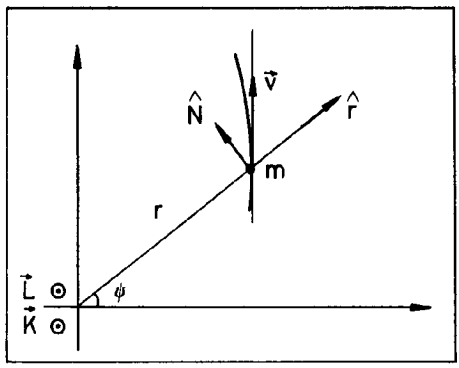
## 11.5.1. Indar zentral kontserbakorren peko higidura.

Suposa dezagun behatzaile bat, masa handiarekin batera doan inertzi sistemaren koordenatu-zentruan kokatuta dagoelarik, m masako gorputzaren higidura aztertzen ari dela. Koordenatu-zentruarekiko indar-momentua nulua denez (indar zentrala bait da),

$$\vec{L} = \text{kte} ,$$

non $\vec{L}$ zentruarekiko momentu angeluarra den.

Hau honela bada, Fisika Orokorra (I) liburuaren 5. ikasgaian frogatzen denez, higidura launa eta abiadura areolarra konstantea delako ondoriora heltzen gara.




$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\psi}{dt} = \text{kte} .$$

Beraz,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} ,$$

zeren $\vec{L} = m\, r^2 \frac{d\psi}{dt} \hat{k}$ bait da.

Bestalde, eta aurreko irudian erraz nabari dezakegunez, $\vec{r}$ posizio-bektorea duen m masako gorputzaren abiadura hauxe izango da:

$$v = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\psi}{dt}\hat{N}$$

Honelatan, $\hat{r}$ eta $\hat{N}$ bektore unitarioak elkarren perpendikularrak direla kontutan hartuz,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Orain, $\frac{d\psi}{dt}$ delakoaren eta L momentu angeluarraren moduluaren arteko erlazioa erabiliz,

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Eta, azkenez, gorputz biren arteko indarra V(r) potentzialetik eratorria bada, hauxe dugu higitzen den gorputzaren energia osoa:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + V(r) ,$$

zeinak konstante dirauen, energiarako iraupen-legeak dioskunez.

Beraz, ondoko ekuazio diferentzial bi hauexek atera ditugu:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \left(V(r) + \frac{L^2}{2 m r^2}\right)\right]}$$

eta

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{m r^2} .$$

Ekuazio bi hauetan oinarriturik, eta orbitaren ekuazio diferentziala lortzeko, aski da r eta $\psi$ koordenatuak erlazionatzea, denborarekiko menpekotasuna alde batetara utzirik:

$$d\psi = \frac{L\, dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2 m r^2}\right)}}$$

non E eta L, lehen esan dugun bezala, konstanteak diren.

Behin honen integrazioa egin ondoren,

$$\psi = \int \frac{L\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} + \psi'$$

$\psi'$ konstantea izanik.

Komenigarria izaten zaigunez, $u = \frac{1}{r}$ aldagai-aldaketa burutuko dugu. Beraz,

$$\psi = \psi' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2mV(u)}{L^2} - u^2}}$$

Jakina, hauxe da orbitaren ekuazioa V(r) potentzial zentralerako, $L \neq 0$ deneko kasuetarako. Erraz froga daitekeenez, $L = 0$ denean ibilbide zuzena izango da, polotik iragaten delarik.

Newtondar moduko indarretarako, $V = -K r^{-1}$ antzeko potentziala sartu behar da aurreko emaitzan, indar grabitatorioen pean mugitzen diren gorputzen higidura ezagutzeko. Problema honi Kepler-en problema deritzo, eta hurrengo atalean aztertuko dugu.

### 11.5.2. Kepler-en problema

Gorputz baten masa bestearena baino askoz handiagoa delako hurbilketari jarraituz ($M >> m$), Kepler-en problemari dagokion indarra honelaxekoa izanen da:

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,,$$

$V = -Kr^{-1}$ potentzial batetik eratorria, hain zuzen.

Problema honetan ere, prezeski, K horren balore konstantea ondokoa da:

$$K = \gamma\, m\, M\,.$$

Bestalde, lehen egin dugun aldagai-aldaketa erabiliz, honelaxe geratzen da potentzialerako adierazpena:

$$V = -ku .$$

Eta, orbitaren ekuazioan sartuz,

$$\psi = \psi' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2} u - u^2}}$$

Integrazio hau ebazteko, Matematikak eskaintzen digu bidea: a, b eta c konstanteak izanik,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left( - \frac{b + 2cx}{\sqrt{q}} \right),$$

non $q = b^2 - 4ac$ den,

eta $c < 0$ , $b^2 - 4ac > 0$ .

Gure problemari aplikatzeko, hauxe egin beharko dugu:

$$a = \frac{2mE}{L^2}$$

$$b = \frac{2mk}{L^2}$$

$$c = -1$$

Beraz,

$$q = \left( \frac{2mk}{L^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \right)$$

Eta, ateratzen zaigun emaitza:

$$\psi = \psi' - \arccos \frac{\frac{L^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}}$$

Finean, $u \equiv \frac{1}{r}$ askatuz, orbitaren ekuazioa lortzen da:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}\cos(\psi - \psi')\right],$$

edo

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\psi - \psi')},$$

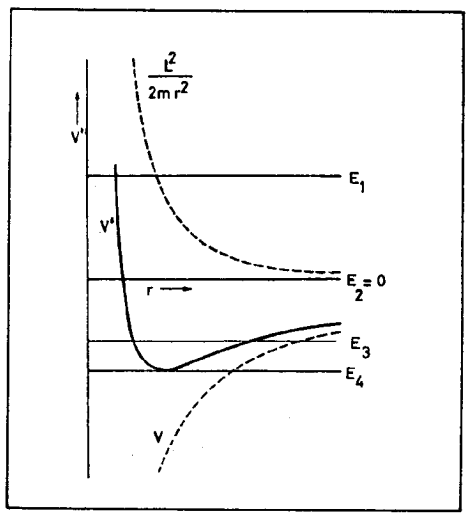
non $p = \frac{L^2}{mk}$ eta $\varepsilon = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2}$ diren.

Beraz, jatorrian kokaturiko foku batekiko konikaren adierazpena erdietsi dugu, $\varepsilon$ delakoa <u>exzentrizitatea</u> izanik.

Honaino heldu garelarik, derragun ezen orbitaren tankera $\varepsilon$ magnitudearen menpekoa dela, ondoko eskemaren arauerakoa:

| | | |
|---|---|---|
| $\varepsilon > 1$, | $E > 0$ | : hiperbola |
| $\varepsilon = 1$, | $E = 0$ | : parabola |
| $\varepsilon < 1$, | $E < 0$ | : elipse |
| $\varepsilon = 0$, | $E = -\frac{mk^2}{2L^2}$ | : zirkunferentzia |

Eredu honetatik atera ditugun ondorioak bat datoz ondoko iruditik atera ditzakegunekin:

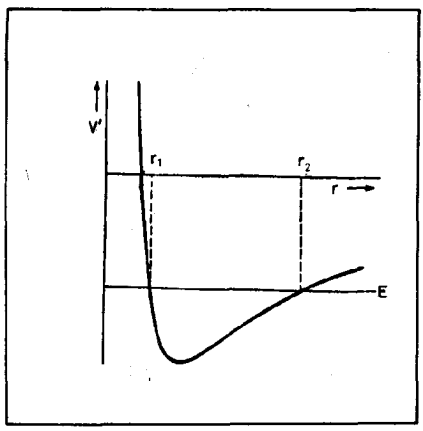


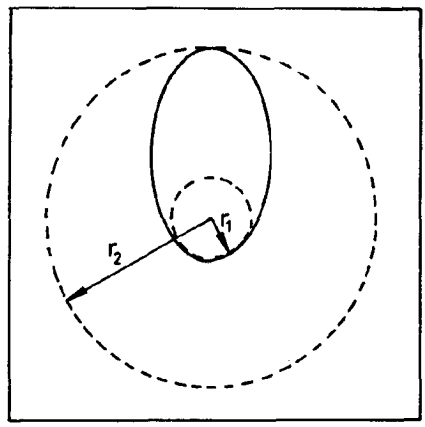
Irudi honetan, $V = -\frac{k}{r}$ eta $V' = V + \frac{1}{2}\frac{L}{m r^2}$, potentzial birtuala deritzona, dira hain zuzen ere.

Modu honetan,

$$E = V' + \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 ,$$

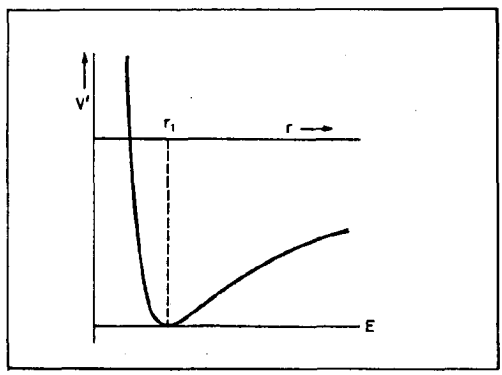
i) $E < 0$ (orbita eliptikoak eta zirkularrak).




Irudietan dakusagun bezala, eta energia zinetikoak positiboa izan behar duenez, bi distantziaren artean mugaturik geratzen da higidura.

Kasu berezi gisa, $E = -\frac{m k^2}{2 L^2}$ denean, orbitak zirkularra izan behar du derrigorrez. (ikus ondoko irudia).




Orbita zirkular hauetan, masen arteko distantziak konstante

iraun ahal izateko, indar zentrifugoak eta grabitatorioak balore berekoak izan behar dute; hau da:

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{m\,M}{r^2}$$

Hots, $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{m\,M}{r}$

Eta energia osoa,

$$E = \frac{1}{2} \gamma \frac{m\,M}{r} - \gamma \frac{m\,M}{r} = -\gamma \frac{m\,M}{2r} < 0 ,$$

energia osoak har dezakeen balorerik txikiena delarik.

ii) $E > 0$ (orbita hiperbolikoak)

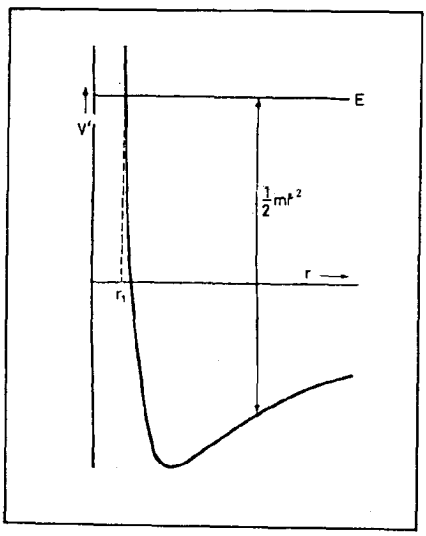
Ostera, energia positiboa denean, orbita irekia da, eta planeta infinituraino urrun daiteke, oraindik ere, abiadura ez-nulua duelarik:

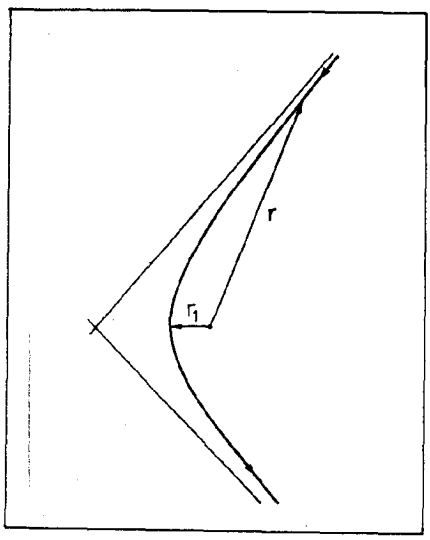
$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m\,M}{r} > 0 .$$

$r \to \infty$ kasurako limitea buruturik,

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 > 0 ,$$

$v_\infty = \sqrt{\frac{2\,E}{m}}$ izanik.



iii) E = 0 (orbita parabolikoak)

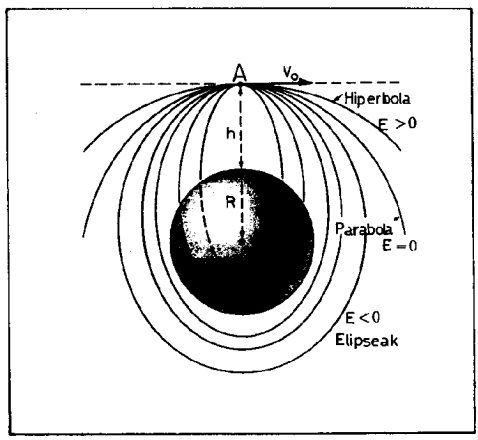
Hauetan ere, orbita irekia da, eta infinituraino hel daiteke planeta, infinituan duen abiadura, ordea, nulua izanik.

$$E = 0 = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m M}{r} .$$

$r \to \infty$ kasurako limitea buruturik,

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = 0 \Longrightarrow v_\infty = 0$$

Modu berean azter daiteke Lurretik jaurtikitzen diren satelite artifizialekin gertatzen dena:



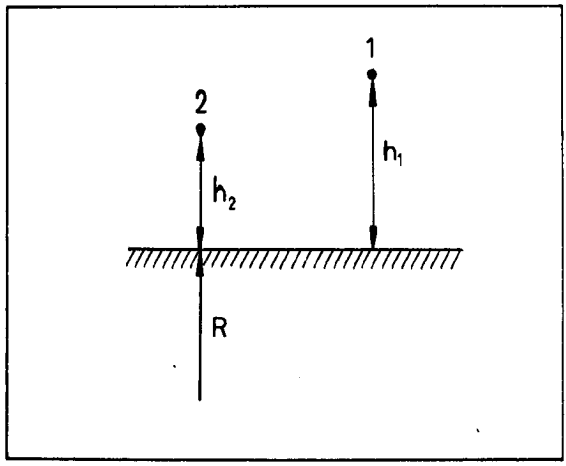

Demagun, punturik altuenean (h altueran) $v_o$ abiadura horizontala duela. Energia osoa hauxe izanen da:

$$E = \frac{1}{2} m v_o^2 - \gamma \frac{m M}{R+h}$$

Eta lehentxoago esandakoaren arauera, E delakoa positiboa, nulua eta negatiboa izan arau, ibilbidea hiperbolikoa, parabolikoa edo eliptikoa izanen da. Projektilen higidura ere, honen barnean azterturik geratzen da, irudian ikus daitekeenez.

## 11.6. ZENBAIT ADIBIDE

1) Lurraren gainazaleko potentzial grabitatorioa.




Lehen ikusi dugun bezalaxe, Lurrak sortzen duen eremu grabitatorioaren energia potentziala, masa osoa zentruan kontzentraturik bailegoen kalkula daiteke:

$$E_p = - \gamma \frac{M\ m}{r}$$

Eta $r = R + h$ denez,

$$E_p = - \gamma \frac{M\ m}{R+h}$$

Beraz, 1 puntutik 2 puntura iragatean burutzen den lana:

$$W = E_{p_1} - E_{p_2} = - \gamma \frac{M\ m}{R+h_1} + \gamma \frac{M\ m}{R+h_2} =$$

$$= \gamma M\ m \left[ \frac{1}{R+h_2} - \frac{1}{R+h_1} \right] = \gamma M\ m \frac{h_1 - h_2}{(R+h_2)\ (R+h_1)}$$

Bestaldetik, $h_1$ zein $h_2 << R$ direla kontutan harturik,

$$W \simeq \gamma \frac{M}{R^2} (h_1 - h_2)\ m$$

Baina, $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ Lurraren azalean gorputz askeek pairatzen duten azelerazioa da, grabitazioa dela kausa. Horrexegatik, era honetan idatzi ohi da energia potentzial grabitatorioa, Lurraren azaletik larregi aldentzen ez diren masetarako:

$$E_p = m.g.h$$

2) Lurretik jaurtikitako gorputzen iheste-abiadura.

Iheste-abiadura, infinituraino heltzeko behar den abiadura minimoa da. Minimoa izateko, energia osoak nulua izan behar du:

$$E = \frac{1}{2} m v_i^2 - \gamma \frac{m M}{R} = 0$$

non R Lurraren erradioa eta $v_i$ delakoa, iheste-abiadura diren.

Beraz,

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{R}} = 1{,}13 \cdot 10^4 \text{ m/s} .$$

Ikusten denez, iheste-abiadurak ez du gorputzaren masaren menpekotasunik.

3) Abiadurarik gabe askatutako eta Lurraren zentrutik r distantziara dagoen gorputzaren lurrazalera heltzen deneko abiadura.

Indar grabitatorioa kontserbakorra denez gero,

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \gamma \frac{m M}{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \gamma \frac{m M}{R} .$$

Hasierako abiadura nulua izanik, $v_1 = 0$ eta

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) .$$

Beraz, $v_2 = \left[ 2 \gamma M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ .

Kasu berezi gisa, infinitutik datorkigun gorputzaren heltze-abiadura azter dezagun:

$r \to \infty$ limitea aurreko emaitzan sartuz,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{R}} = 1{,}13 \cdot 10^4 \text{ m/s} ,$$

prezeski, eta kontserbakortasunak agintzen duen legez, iheste--abiaduraren balore berekoa, hain zuzen.

# 12. GAIA: ELASTIKOTASUNA

12.1. Solidoaren barneko esfortzuak

12.2. Deformazio unitarioak

12.3. Materialen konportamoldea

12.4. Hooke-ren legea. Elastikotasun-moduluak

12.5. Poisson-en koefizientea

12.6. Malgukiak

12.7. Esfortzuen tentsorea

Hamargarren gaian solidoaren estatika aztertzean, puntu desberdinetan eginiko indarren arteko oreka zen aztergai nagusia. Orohar, indarrak kurtsoretzat harturik, berek sorturiko kurtsore-sistema aztertzen genuen bere osotasunean. Hala ere, bertan ez genuen aztertzen solidoaren zati edo parte batetan eragiten duten indarrak zeintzu diren, ez eta indar horiek gorputzaren forman duten eragina ere.

Izatez, han zurruntzat hartzen genuen solidoa, alegia, indarren eraginpean ezer deformatuko ez bailitzen, eta hori lehenengo hurbilketan soilik da egokia, hots, indarrak txikiak direnean. Hala ere, gorputz errealak ez dira zurrunak, deformagarriak baizik.

Lehenengo mailan, gorputz errealak solido (deformagarriak) eta fluidoetan banatzen dira, nahiz eta bien arteko banaketa erabat zehatza ez den. Nolabait esateko, solido deformagarriek eite aski definitua dute, kanpo-indarren eraginez eite hori aldatu egin daitekeen arren, denboralki bederen. Solido erreal hauen konportamoldea da, hain zuzen, gai honetan aztertuko duguna. Ostera, fluidoek ez dute eite definiturik eta oso indar txikiz, ia lanik gabe, eite hori aldatu egiten da, daudeneko ontziarena hartzeraino. Fluidoen ezaugarriak eta propietateak hurrengo gaian aztertuko ditugu.

Solidoen kasura itzuliz, diogun ezen orain arte erabilitako "solido zurrun" kontzeptua eredu matematiko erabilgarria baino ez dela zeren, azken batez, materia erreala, gehiago edo gutxiago, deformatu egiten bait da kanpo-indarren eraginpean. Deformazioa solidoaren barneko molekulen arteko indarrekin erlazionaturik dago, noski. Dena den, gai honetan ez gara konportamolde molekularraz arituko, magnitude neurgarriak aztertzeaz baizik.

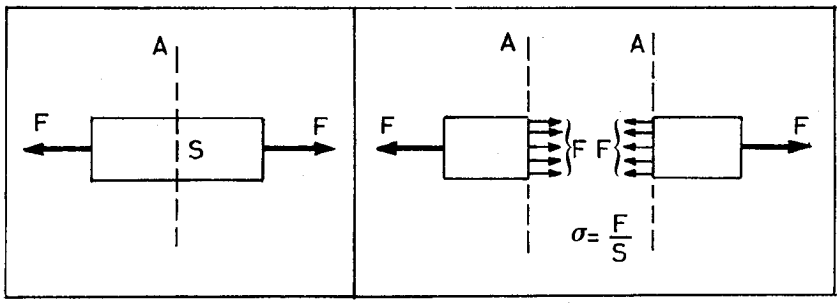
## 12.1. SOLIDOAREN BARNEKO ESFORTZUAK

Ingurune jarraietan (bai solidoetan zein fluidoetan) bi eratako indarrak eduki behar ditugu kontutan: bolumen-indarrak eta gainazal-indarrak.

Bolumen-indarrak bolumen edo masaren arauerakoak dira, kanpoko eremu batek sortuak. Adibide gisa, pisua aipa dezakegu. Gorputzean zehar hedaturiko indar hauek adierazteko, ingurune jarraien kasuan magnitude intentsibo bat erabiltzen da: bolumen-unitateko indarra edo bestela masa-unitateko indarra, aurrekoarekin dentsitateaz erlazionatzen dena. Hain zuzen ere, pisuaren kasuan masa-unitateko indarra $\vec{f}=-g\hat{k}$ da, g delakoa grabitatearen azelerazioa izanik. Era honetako indarrak eremuak aztertzen direnean ikusiko ditugu.

Bestetik gainazal-indarrak ingurune jarraiaren barne-tentsioen adierazleak dira eta bertako elementu bat hartzean beraren gainazalean eragiten dutenak dira. Azken hauek dira gai honetan aztertuko ditugunak, eta ikusiko dugunez, kasu honetan ere magnitude intentsiboak erabiliko ditugu, gainazal-unitateko indarrak alegia, esfortzu edo neke izenez ere ezagutzen direnak.

Adibide baten laguntzaz abiatuko gara, orekan dagoen solido baten barnean eragiten dute gainazal-indarrak aztertzera.



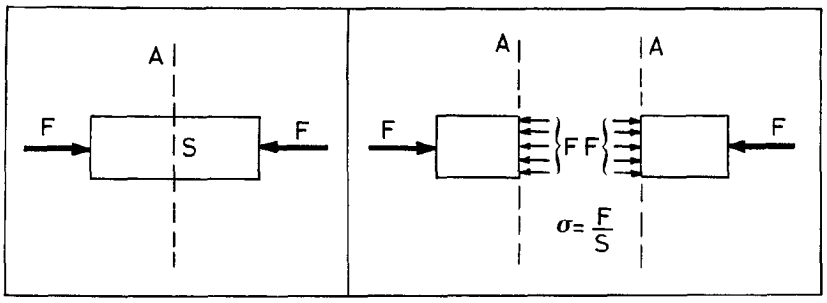

Demagun barra bat, S sekzio uniformeduna, F indarren bidez tentsio-egoeran dugula. Azter dezagun sekzio normal bati dagokion plano baten tentsio-egoera. Planoa muturretatik hurbilegi ez badago, tentsioa uniformeki banatuta dagoela jo dezakegu.

Baldintza horietan, honela definitzen da gainazal horretako tentsio-egoera edo nekea:

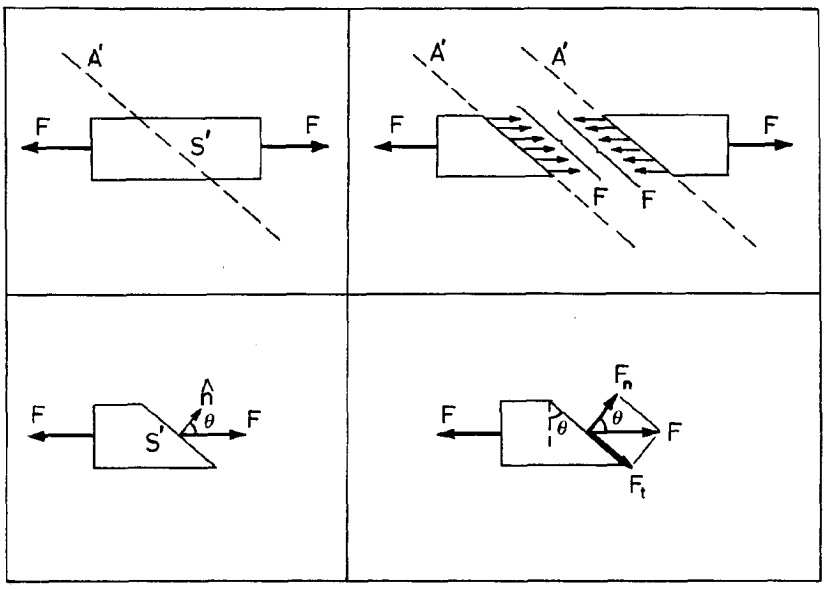
$$\sigma = \frac{F}{S} .$$

Kasu honetan neke hori tentsiozkoa da eta gainera normala, indarraren norabidea gainazalaren perpendikularra bait da.

Hurrengo irudian konpresio-egoeran dagoen barra bat adierazten da. Bertako nekea lehengo modu berean definitzen da eta, noski, hau ere normala da, nahiz konpresiozkoa izan.




Dena den, hasierako kasura itzuliz, ikus dezagun zer gertatzen den, bestelako plano batetako tentsio-egoera aztertzean.



Oraingoan indarraren norabidea ez da gainazalaren perpendikularra eta, kalkuluen erraztasunerako, norabide normal eta tangentean deskonposa dezakegu:

$$\begin{cases} F_n = F \cos\theta \\ F_t = F \sin\theta . \end{cases}$$

Indar hauek S' azalera duen A' gainazalean eragiten dute eta horrela neke normala ($\sigma$) eta neke tangentziala ($\tau$), azken hau ebakidura-tentsioa ere deitua, defini ditzakegu sekzio horretan:

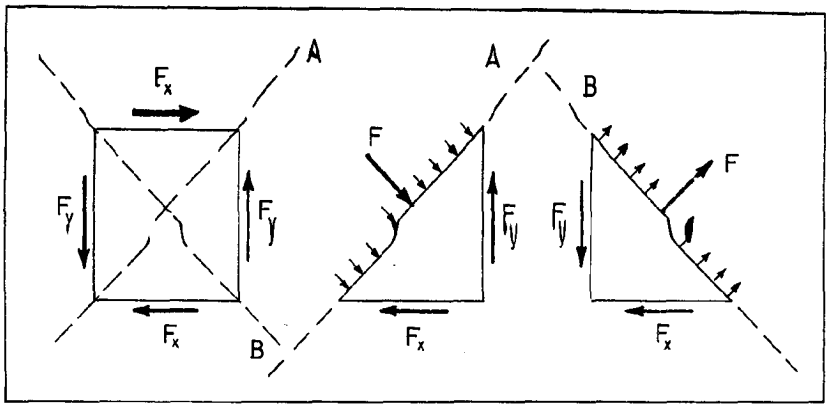
$$\sigma = \frac{F_n}{S'}$$

$$\tau = \frac{F_t}{S'} .$$

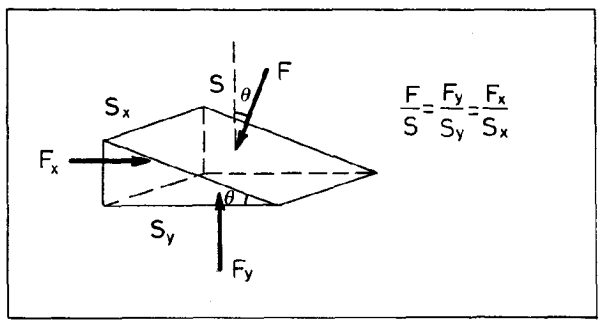
Ikusten denez, horrela definituriko nekea ez da magnitude bektoriala, zerbait korapilatsuago baizik, eta sekzio horretako nekea definitzeko, indar erresultanteaz gain ($\vec{F}$) gainazal-elementuaren bektore unitarioa ($\hat{n}$) ere ezagutu behar da. Izatez, nekea bigarren ordenako tentsorea da, eta solido baten barneko neke-egoera adierazteko, neke-tentsorea (edo esfortzu-tentsorea) eman behar da.

Ingurune jarrai baten barneko esfortzuak nolakoak diren ikusteko, bestelako adibide batzu jar ditzakegu. Kasurako, demagun kubo baten gainean bi indar-bikotek eragiten dutela gainazalen norabidean, hurrengo irudian adierazten den bezala. Solido hau orekan dago eta halaber bertako elementu guztiak. Oreka horretan oinarrituz, solidoaren barneko plano desberdinetako nekeak azter ditzakegu eta horrela A planoan konpresioa dagoela eta B planoan tentsioa dagoela ikus dezakegu.

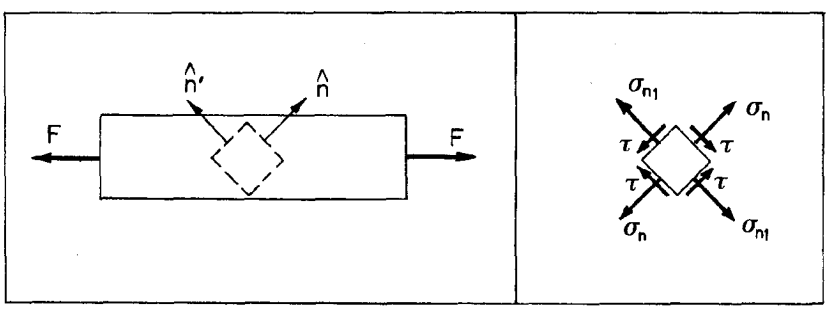
Hurrengo gaian ikusiko dugunez, orekan dauden fluidoek ez dute inolako ebakidura-tentsiorik, zeren bestela planoak elkarrekiko labaintzen hasiko bait lirateke. Hori dela eta, hidrostatikan, fluidoen orekan alegia, gainazal-indar guztiak kon




presiozkoak dira eta, hain zuzen, neke normalari presio hidrostatikoa deritzo eta balio berbera du puntu bateko norabide guztietan, hurrengo irudian adierazten den bezala.



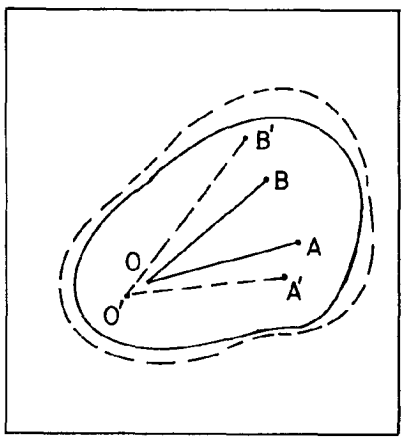

Bukatzeko, hurrengo adibidean, tentsio egoeran haga baten barneko elementu baten neke-egoera adieraziko dugu. Irudian ikusten denez, orokorki gainazal guztietan neke normala eta neke tangentziala ageri dira.

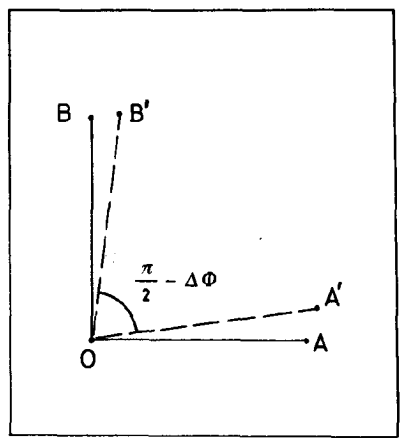


## 12.2. DEFORMAZIO UNITARIOAK

Solido errealak ez dira guztiz zurrunak eta ondorioz, indarren eraginpean aldatu egiten dira solidoaren barneko puntuen arteko posizio erlatiboak. Hain zuzen ere, erlazio bat dago solidoaren deformazioen eta neke-egoeraren artean eta horixe da atal honetan axola diguna.

Orohar, bi eratako deformazioak azter ditzakegu: luzetarakoak eta angeluarrak. Lehenengo pausoan, modu orokorrean definituko ditugu. Alboko irudian adierazten den bezala, demagun solidoaren barneko hiru puntu, A, O eta B, lerro berekoak ez direnak. Indarren eraginpean A', O' eta B' posizioetara pasatzen dira. Solido hori deformatu egin dela esango dugu, baldin OA edo OB distantzietariko bat aldatu bada (luzetarako deformazioa) edo AOB angelua aldatu bada (deformazio angeluarra).




Azterketarako, deformazio unitarioak (edo intentsiboak) hartzea komeni zaigu, hau da, luzera- edo angelu-unitateari dagozkionak. Honela, hasieran $l_0$ luzera duen elementua deformazioaren eraginez $(l_0 + \Delta l)$ edukitzera pasatzen bada, luzetarako deformazio unitarioa modu honetan definitzen da:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} .$$

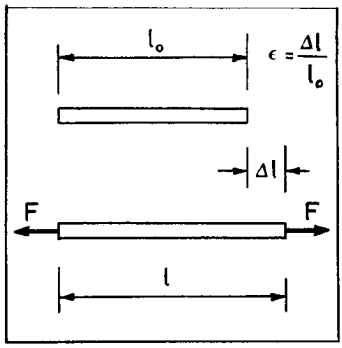
Era berean, hasieran $\frac{\pi}{2}$ angelua osotzen duten OA eta OB zu

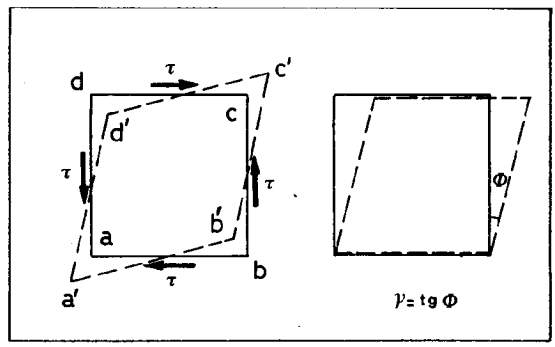
zenkiek deformazioaren ostean ( $\frac{\pi}{2} - \Delta\phi$ ) angelua osotzen badute, deformazio angeluar unitarioa honela definitzen da:

$$\gamma = tg\,\Delta\phi$$

(kontutan eduki, angelu txikietan $tg\,\Delta\phi \simeq \sin\Delta\phi \simeq \Delta\phi$ dela).

Orain erraz ikus dezakegu, nola aurreko atalean aipaturiko neke-mota bakoitzari deformazio unitarioa berezia dogokion.



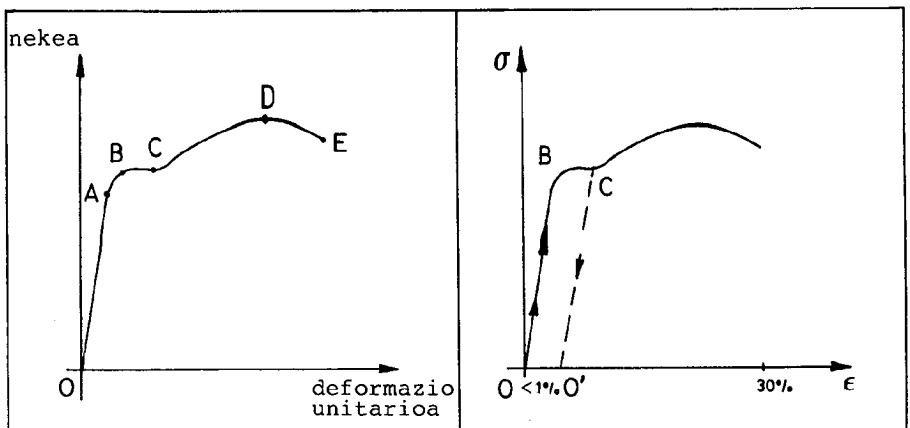

Lehenengo irudian tentsioan dagoen makila bat adierazten da; argi dagoenez, luzetarako deformazioa izango du. Tentsiopean egon ordez konpresioan egonez, gauza bera egingo genuke, baina makila luzatu beharrean laburtu egingo litzateke, hots, $\Delta l$ negatiboa izango litzateke. Bigarren irudian ebakidura-tentsioen eraginpean dagoen elementu bat adierazten da ; bertan deformazio angeluarra agertzen da soilik, lehenengo hurbilketan aldeen luzera konstantetzat harturik.

Aurreko atalean adierazitako kasuei bukaera emateko, presio hidrostatikoz sorturiko deformazio berezia aipatuko dugu. Kasu honetan bolumen-unitateko deformazioa aztertzen da; alegia, $V_o$ hasierako bolumena presioaren eraginez $\Delta V$ aldatzen bada, bolumen-unitateko deformazioa ondokoa da:

$$\frac{\Delta V}{V_o}$$

## 12.3. MATERIALEN KONPORTAMOLDEA

Orain arte, gorputz solidoen barneko esfortzuak alde batetik eta deformazioak bestetik aztertu ditugu, elkarrekin zerikusirik ez bailuten. Hala ere, material bakoitzaren kasuan lotura estua dago horien artean, experimentalki froga daitekeenez. Dena den, material guztiek ez dute konportamolde berdinik ez eta hurrik eman ere. Adibide gisa hiru material-mota berezi aipatuko ditugu: metal harikorra, metal ez-harikorra eta kautxua. Kasu guztiotan tentsio hutsean dauden materialen konportamoldea kontsideratuko dugu, erraztasunaren izenean, nekearen eta deformazioaren arteko erlazioa adierazten duten kurbak aztertuko ditugularik.




Metal harikorraren deformazioaren kurba

Metal harikorraren kasuan, kurba horrek zenbait parte desberdin dauzka. OA tartean nekea eta deformazioa proportzionalak dira, OA tartea zuzena delarik, eta A puntua proportzionaltasun-muga.

A eta B puntuen tartean ez da proportzionaltasunik gordetzen baina hala ere, eragiten diharduen tentsioa edo nekea desagertzean, materialak hasieran zeukan luzera berreskuratzen du, nolabait esateko OB kurba atzeranzko norantzan eginez, hots, Btik Ora. Gauzak horrela, OB tartean materiala elastikoa dela esaten da, B puntua elastikotasun-muga izanik.

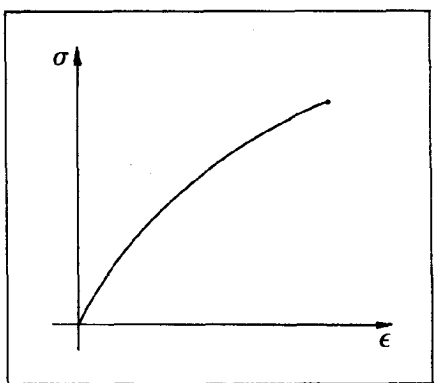
Hortik gorako nekeak eragitean, deformazio unitarioa askoz

arinago handitzen da eta, elastikotasunari dagokionez, oso konportamolde desberdina dauka. Hain zuzen, demagun C puntura heltzean kendu egiten dugula tentsioa gradualki; orduan ez da C puntutik O puntura berriz kurba berberean zehar itzultzen, CO' kurbatik baizik, hau da, esfortzua kentzean hasierakoa baino handiagoa den luzera geratzen da, edo bestela esanda, deformazio iraunkorra lortzen da. BC tartea ia horizontala da eta makila asko luzatzen da nekea kasik handitu gabe. Fenomeno horri fluentzia deritzo eta B puntuari dagokion nekea, fluentzi nekea.

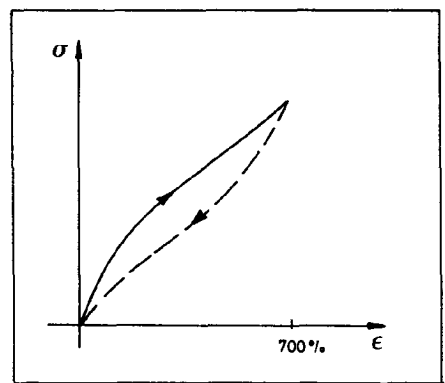
C puntutik aurrera, berriro handitu behar da nekea, eta D puntura heldu arte konportamolde elastikoan baino askoz deformazio handiagoa lortzen da. Ostera, D eta E puntuen artean, nekea moteldu arren ere deformatuz irauten du materialak, harik eta E puntuan apurtu egiten den arte. B eta E puntuen artean materialak konportamolde ez-elastikoa edo plastikoa duela esaten da.

Elastikotasun-mugaren eta etendura-puntuaren artean deformazio handia badago, materiala harikorra dela esan ohi da. Prezeski, metal askoren kasuan (urrea, kobrea,...) harikortasuna oso praktikoa gertatzen da. Ostera, muga horien arteko deformazioa txikia bada, materiala hauskorra dela esaten da.

Hurrengo bi irudietan, fundizioari (metal ez-harikorra) eta kautxuari dagozkien konportamoldeak adierazten dira.




Fundizioaren diagrama




Kautxuaren diagrama

Fundizioaren kasuan, alde batetik proportzionaltasuna ia berehala desagertzen da, eta bestetik ez da fluentziarik agertzen. Apurturaren prozesua ere modu hauskorrean gertatzen da.

Kautxuaren kasuan deformazio unitarioak askoz ere handiagoak dira, nahiz eta proportzionaltasunik agertzen ez den. Bestetik material hau elastikoa da, zeren esfortzua desagertzean hasierako luzera berreskuratzen bait du. Hala ere, fenomeno interesgarria gertatzen da tentsioa desagertzean. Irudian adierazten den legez, beste bide batetik itzultzen da hasierako puntura. Neke hazkorreko eta beherakorreko kurben desberdintasun horren kausaz, histeresi elastikoa gertatzen da, histeresi magnetikoaren antzekoa. Proportzionaltasuna dago histeresi zikloaren azaleraren (kurba bien arteko azalera) eta materialaren barnean galduriko energia elastikoaren artean. Energi hori bero gisa agertzen da, noski. Horrelako kautxu edo goma batzuren histeresi handia oso baliagarria izaten da bibrazioak absorbitzeko, makina batzuren oinarrietan adibidez.

## 12.4. HOOKE-REN LEGEA. ELASTIKOTASUN-MODULUAK

Material harikorrak aztertzean ikusitako proportzinaltasun-aldeak, garrantzi handia du fisikan eta ingeniaritzan. Alde horretan Hooke-ren legea betetzen da, nekearen eta deformazio unitarioaren arteko proportzionaltasun zuzena adierazten duena hain zuzen ere. Newton-en garaian bizi izan zen Robert Hooke (1635-1703) jakintsu ingelesak aztertu zuen lehen aldiz aipaturiko konportamoldea eta beraren ohorean izen hori eman zaio legeari. Bestelako hitzez esanda, nekearen eta deformazio unitarioaren arteko erlazioa konstantea da (proportzionaltasunaren mugen barnean, noski) eta konstante horri elastikotasun-modulua deritzo. Edozertara, esfortzu-mota desberdinak daudenez, modulu desberdinak definitzen dira kasu bakoitzean.

Lehenengo eta behin, luzetarako neke eta deformazioak aztertuko ditugu. Experimentuak eginez ikusten denez, luzetarako nekeak maila bereko deformazio unitarioak sortzen ditu tentsioan zein konpresioan. Hain zuzen ere bi magnitude horien arteko

erlazio konstanteari Young-en modulua deritzo eta Y letraz adierazten da:

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_n/S}{\Delta l/l_o} .$$

Deformazio unitarioa dimentsiorik gabeko magnitudea izanik, nekeak eta Young-en moduluak dimentsio berberak dituzte eta, beraz, "indarra azalera unitateko" magnitudea da. Ingeniaritzan $Kg/mm^2$ unitatetan eman ohi da.

Ebakidura-nekeei dagokien deformazio unitarioa aztertzean lortzen den moduluari, zurruntasun-modulua edo tortsio-modulua deritzo eta G letraz adierazten da:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_t/S}{tg\ \phi} .$$

Unitateei dagokienez, aurreko moduluari buruz esandakoa errepika dezakegu. Bestetik, material gehienetan zurruntasun-modulua Young-en moduluaren erdiaren eta herenaren tartekoa ohi da, geroago ematen den taulan ikus daitekeenez.

Bukatzeko, presio hidrostatikoa bolumenaren txikiagotzearekin lotzen duen modulua emango dugu, konprimagarritasun-modulua deritzona hain zuzen:

$$B = - \frac{p}{\Delta V/V_o} ,$$

hemen zeinu negatiboa presioa gehitzearekin bolumena txikiagotu egiten dela kontutan hartuz jarri delarik, hots, gehikuntza negatiboa izanik modulua positiboa izan dadin. Modulu honen alderantzizkoari konprimagarritasun-koefizientea deritzo:

$$k = \frac{1}{B} = - \frac{\Delta V/V_o}{p} .$$

Hurrengo taulan zenbait materialen elastikotasun-modulu desberdinen baloreak ematen dira.

ELASTIKOTASUN-MODULUEN TAULA

| Materiala | Young-en modulua | Zurruntasun--modulua | Konprimigarritasun -modulua |
|---|---|---|---|
| Altzairua | 2,0 | 0,84 | 1,6 |
| Aluminioa | 0,70 | 0,24 | 0,70 |
| Kobrea | 1,1 | 0,42 | 1,4 |
| Burdina | 0,91 | 0,70 | 1,0 |
| Letoia | 0,91 | 0,36 | 0,61 |
| Nikela | 2,1 | 0,77 | 2,6 |
| Beruna | 0,16 | 0,056 | 0,077 |
| Beira | 0,55 | 0,23 | 0,37 |
| Wolformia | 3,6 | 1,5 | 2,0 |

(Unitateak : $10^4$ $Kg/mm^2$)

## 12.5. POISSON-EN KOEFIZIENTEA

Experimentalki ikusten denez, makila bat tentsiozko esfortzu baten eraginpean luzatzean, zeharkako sekzioa txikiagotu egiten da; eta, alderantziz, konpresiozko esfortzuaren eraginpean laburtzean, zeharkako sekzioa handiagotu egiten da. Halaber, denetara jota, trakziopean bolumena handiagotu eta konpresiopean txikiagotu egiten dela neurtzen da. Experimentu askoren bidez frogatu ahal izan denez, makila zirkularraren kasuan, erradioaren deformazio unitarioaren ($\frac{\Delta r}{r}$) eta luzearen deformazio unitarioaren ($\frac{\Delta l}{l}$) arteko erlazioa konstantea da material bakoitzerako. Konstante hori Poisson-en koefizientea izenaz ezagutzen da, honela adierazten delarik:

$$\mu = - \frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} .$$

Koefiziente hau zenbaki adimentsionala da. Adierazpeneko mi

nus zeinua, koefizientea positiboa izan dadin jartzen da, erradioaren eta luzeraren gehikuntzak aurkako zeinukoak bait dira.

Azter dezagun konportamolde horrek dakarren bolumen-aldaketa. Makilaren luzera era honetara handiagotzen da:

$$\frac{l + \Delta l}{l} = 1 + \frac{\Delta l}{l} = 1 + \varepsilon .$$

Poisson-en koefizientea erabiliz, honela laburtuko dira zeharkako luzerak:

$$\frac{r + \Delta r}{r} = 1 - \mu\varepsilon ,$$

eta zeharkako azalera:

$$\frac{S + \Delta S}{S} = (1 - \mu\varepsilon)^2 .$$

Beraz, makilaren bolumena erlazio honen arauera handiagotuko da:

$$\frac{V + \Delta V}{V} = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2 \simeq 1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon ,$$

azken adierazpen honetan $\varepsilon$ oso txikia dela kontutan hartu dugularik eta, ondorioz, $\varepsilon^2$ arbuiatuz. Hots, bolumenaren gehikuntza unitarioa hauxe izango da:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon - 2\mu\varepsilon = \varepsilon(1 - 2\mu) .$$

Ikus dezagun adierazpen honetatik atera daitekeen ondorio bat. Trakzioz eragitean $\varepsilon>0$ denez gero, $\mu>0,5$ balitz, bolumena txikiagotu egingo litzateke, gauza guztiz bitxia berau. Bestetik $\mu = 0,5$ izanik ez litzateke bolumen-aldaketarik gertatuko.

Experimentalki neurtzen denez, goma eta parafinaren kasuetan $\mu$ koefizienteak ia 0,5 balio du, eta horrela trakzioz luzatzean ez da ia bolumena aldatzen.

Bere garaian Poisson-ek modu analitiko batez, materialen eraketarako hipotesi gisa teoria molekularra hartuz, eta material isotropoen kasurako, $\mu = 0,25$ balioa kalkulatu zuen. Experimentalki, metaletarako antzerako balioak neurtu izan dira, altzairuaren kasuan $\mu = 0,3$ delarik adibidez. Hormigoiaren kasuan $\mu$ oso txikia da ( $\frac{1}{8} \div \frac{1}{12}$), eta kortxoaren kasuan ia nulua.

## 12.6. MALGUKIAK

Teknologian era desberdinetako mekanismotan erabiltzen den tresna da malgukia. Fisikaren arloan ere oso interesgarria da, zeren malgukiek sorturiko indarren eraginez higidura oszilakor harmonikoa sortzen bait da.

Hemen malguki idealak aztertuko ditugu. Izen honekin materialaren proportzionaltasun-mugaren barnean lan egiten dutenak adierazi nahi ditugu, Hooke-ren legea betez alegia. Beraz, Young-en modulurako erabilitako definiziotik:

$$Y = \frac{F/S}{\Delta l/l_o}$$

$$F = \frac{Y}{S l_o} \Delta l \ ;$$

Y, S eta $l_0$ konstanteak direla gogora eraziz, hirurak k konstante bakar batez bil ditzakegu. Bestetik l luzera-gehikuntza x koordenatuaren bidez adieraziz, honela geratzen zaigu:

$$F = k\,x \ ,$$

hots, luzapena indarraren proportzionala da. Izatez, Hooke-ren legea modu honetara proposatu izan zen hasieran; eta hauxe da indar elastikoen eragina adierazteko era arrunta.

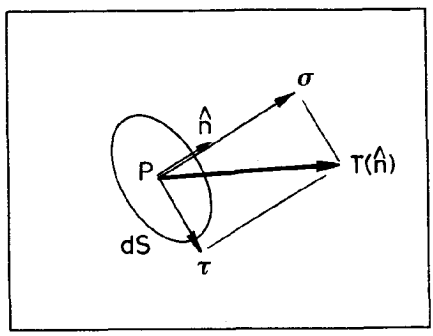
Dena den, gehienetan malgukiak helize modura jarritako burdinariak dira. Kasu honetan, izatez, kontutan hartu behar dena ebakidura-esfortzua da, baina edozertara, muga batzuren barnean,

magulki osoaren luzapena indarraren proportzionala da, eta orain dik ere aplikagarria da F = kx indarra.

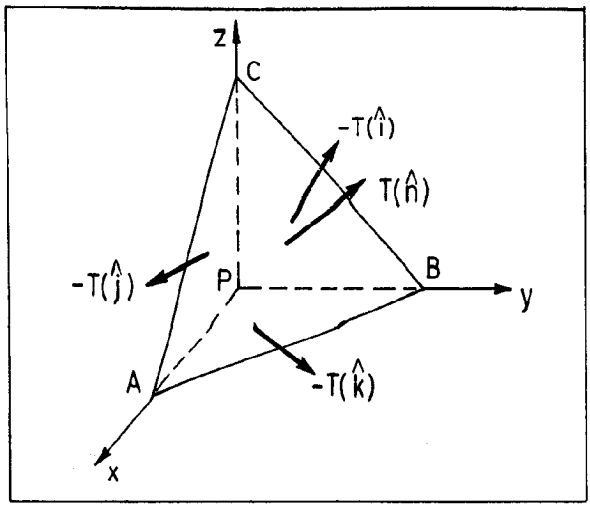
k konstanteari malgukiaren konstante errekuperatzailea edo zurruntasun-konstantea deritzo. Dimentsioei dagokienez, indarra/luzera da, sistema internazionalean N/m unitatetan ematen delarik.

## 12.7. ESFORTZUEN TENTSOREA

Ingurune jarrai bateko puntu baten neke-egoera adierazteko, bektore bat baino zerbait gehiago behar da, zeren puntu bakoitzean infinitu esfortzu defini bait daitezke, puntu hori daukan gainazal-elementu bakoitzerako bat hain zuzen. Adierazpen egokia neke edo esfortzuen tentsorearen bidez ematen da, eta segidan ikusiko dugunez, puntu horretatik pasatzen diren hiru gainazal ortogonaletako neke-egoera ezagutuz, puntu horretatik pasatzen den beste edozein gainazaletakoa ezagut dezakegu.




Demagun ingurune jarraiko P puntutik pasatzen den dS gainazal laun infinitesimala, zeinaren bektore unitario normala $\hat{n}$ den. Dakigunez, gainazal horri dagokion nekea, $\sigma$ (esfortzu normala) eta $\tau$ (esfortzu tangentziala) nekeen bidez adieraz daiteke, edo bestela bien osaketaz lortzen den $\vec{T}$ bektorearen bidez. Denetara, dS gainazalean egiten den indarra $\vec{T}$ dS da, eta $\vec{T}$ hori $\hat{n}$ bektorearen funtzioa da, $\vec{T}$ ($\hat{n}$) adieraz dezakegularik. Ikus dezagun nola idatz dezakegun hiru gainazal ortogonaletako nekeen bidez.




Demagun ingurune jarraiaren barnean PABC tetraedroaren dinamika aztertzen ari garela, beronen PA, PB eta PC ertzak ardatz koordenatuen paraleloak izanik. ABC gainazalaren bektore normala $\hat{n}$ da, beronen kosinu zuzentzaileak $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ direlarik, hots, $\hat{n} = \cos\alpha\ \hat{i} + \cos\beta\ \hat{j} + \cos\gamma\ \hat{k}$. Beste aurpegietako bektore unitariak $-\hat{i}$, $-\hat{j}$, $-\hat{k}$ dira. Hona hemen tetraedroaren gainean eragiten duten bolumen-indarrak eta gainazal-indarrak:

- Bolumen-indarrak honela adieraziko ditugu:

$$\Delta m \cdot \vec{f} = \rho\ \Delta V\ \vec{f}\ ,$$

non $\rho$ dentsitatea eta $\Delta V$ tetraedroaren bolumena diren

- Bestalde aurpegi desberdinetako gainazal-indarrak ondokoak dira:

$$\left|\begin{array}{l} \vec{T}\ (\hat{n})\ \Delta S \\ \vec{T}\ (-\hat{i})\ \Delta S_x = -\vec{T}\ (\hat{i})\ \Delta S_x \\ \vec{T}\ (-\hat{j})\ \Delta S_y = -\vec{T}\ (\hat{j})\ \Delta S_y \\ \vec{T}\ (-\hat{k})\ \Delta S_z = -\vec{T}\ (\hat{k})\ \Delta S_z\ ; \end{array}\right.$$

eta bestalde:

$$\begin{cases} \Delta S_x = \Delta S \cos\alpha \\ \Delta S_y = \Delta S \cos\beta \\ \Delta S_z = \Delta S \cos\gamma \, . \end{cases}$$

Beraz, dinamikaren bigarren legearen arauera,

$$\rho\Delta V\vec{f} + \Delta S\left[\vec{T}(\hat{n}) - \cos\alpha\vec{T}(\hat{i}) - \cos\beta\vec{T}(\hat{j}) - \cos\gamma\vec{T}(\hat{k})\right] = \rho\Delta V\vec{a} \, ,$$

non $\vec{a}$ elementuaren azelerazioa den. Gaien berrordenaketa eginez eta $\Delta S$ azaleraz zatituz:

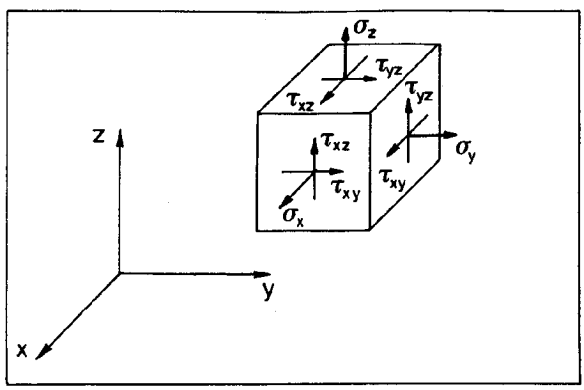
$$\vec{T}(\hat{n}) - \cos\alpha\vec{T}(\hat{i}) - \cos\beta\vec{T}(\hat{j}) - \cos\gamma\vec{T}(\hat{k}) = \rho\frac{\Delta V}{\Delta S}(\vec{a}-\vec{f}) \, ;$$

eta tetraedroa gero eta txikiagoa eginez, limitèan $\frac{\Delta V}{\Delta S} \longrightarrow 0$ dela kontutan hartuz, azkenean P puntuaren ondoko erlazioa lortzen dugu:

$$\vec{T}\,(\hat{n}) = \vec{T}\,(\hat{i})\cos\alpha + \vec{T}\,(\hat{j})\cos\beta + \vec{T}\,(\hat{k})\cos\gamma \, ,$$

hots, hiru gainazal ortogonaletako neke-egoera zein den jakinik, beste edozein gainazaletakoa jakin daiteke.

Aurreko adierazpenaz baliatuz bestelako erara idatziko ditugu nekeak, osagai normal eta tangentzialen bidez. Horretarako kontsidera dezagun ingurune jarraiko elementu kubiko ideal bat, alboko irudian bezala.



Ondoko erara idatz ditzakegu $\vec{T}(\hat{\imath})$, $\vec{T}(\hat{\jmath})$ eta $\vec{T}(\hat{k})$ bektoreak:

$$\begin{cases} \vec{T}(\hat{\imath}) = \sigma_x \hat{\imath} + \tau_{xy}\hat{\jmath} + \tau_{xz}\hat{k} \\ \vec{T}(\hat{\jmath}) = \tau_{yx}\hat{\imath} + \sigma_y \hat{\jmath} + \tau_{yz}\hat{k} \\ \vec{T}(\hat{k}) = \tau_{zx}\hat{\imath} + \tau_{zy}\hat{\jmath} + \sigma_z \hat{k} \end{cases}$$

Momentu angeluarraren iraupena erabiliz froga daitekeenez, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ , $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Bestalde adierazpen hauek $\vec{T}(\hat{n})$-ra eramanik, honela geratzen dira $\vec{T}$ bektorearen osagaiak:

$$\begin{cases} T_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{xz} \cos\gamma \\ T_y = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma \\ T_z = \tau_{yx} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma \end{cases}$$

eta emaitza hau honela adieraz daiteke matrizialki:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \mathbf{T}\,\hat{n}$$

Honela definituriko $\mathbf{T}$ magnitudeari <u>esfortzuen tentsorea</u> deritzo eta beraren bidez edozein gainazal hartuta, hots, $\hat{n}$ bektore unitarioa ezagututa, gainazal horren gaineko neke-egoera zein den jakin daiteke. Ikusten denez, bektorea baino korapilatsuago den zerbaitez —bigarren ordeneko tentsore batez— adierazten da P puntuko neke-egoera. Izan ere, diogun ezen historikoki tentsore hitza adibide honetatik datorrela. Bestalde, lorturiko adierazpena 8.4. atalean inertzi tentsorea aztertzean lorturikoaren oso antzekoa da. Orduko kasuan bezala, oraingo tentsore hau ere bigarren ordenako tentsore simetrikoa da. Orduan egiten genuenaren antzera, simetrikotasun hori dela eta, hemen ere <u>norabide nagusiak</u> defini daitezke. Hauek zer diren

azaltzea erraza da. Orokorki $\vec{T}$ ($\hat{n}$) eta $\hat{n}$ bektoreek norabide desberdinak dute. Hain zuzen, norabide nagusiak bi bektore hoiek norabide berekoak egiten dituztenak dira, hots, norabide nagusiei dagozkien gainazaletako nekeak normal hutsak dira.

Emandako erlazio tentsorialen bitartez ingurune jarraiko P puntuko neke-egoera definitzen bada ere, egoera elastikoa zein den jakiteko zerbait gehiago behar da. Bide beretik abiatuz, deformazio-egoera adierazteko deformazioen tentsorea defini daiteke, gero emandako Hooke-ren legearen orokorpenez, bi tentsoreen arteko erlazioa adierazten delarik. Dena den, ez gara azterketa horretan gehiago sartuko eta eginiko aipamenarekin geratuko gara.

## 13. GAIA: FLUIDOEN MEKANIKA

I. Fluidoen propietateak

13.1. Fluidoen definizioa eta sailkapena

13.2. Biskositatea

II. Fluidoen estatika

13.3. Presio hidrostatikoa. Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa

13.4. Flotazioaren arazoa

III. Fluidoen dinamika

13.5. Fluxu-motak

13.6. Reynolds-en zenbakia

13.7. Kontinuitatearen ekuazioa

13.8. Higiduraren ekuazioa korronte-lerro batetan. Bernouilli-ren ekuazioa. Energiaren ekuazioa

13.9. Energiaren ekuazioaren orokorpena

13.10. Momentu linealaren ekuazioa

13.11. Solidoen higidura fluido baten barnean

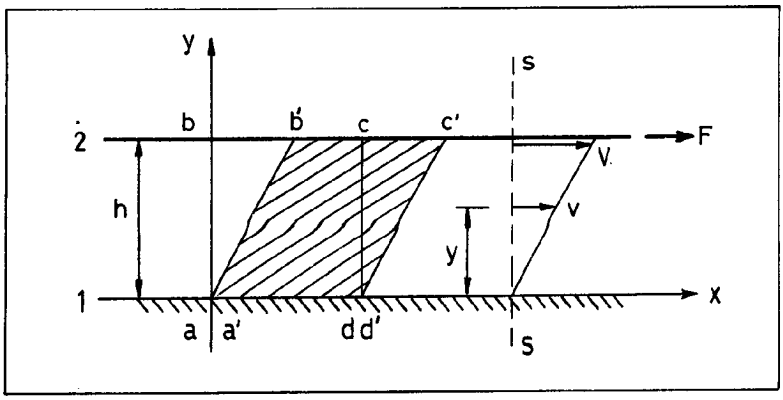
Fisika Orokorra (I) liburuko zazpigarren gaian partikula sistemen dinamika aztertu genuen. Ez genuen zehazten, ordea, zer eratako sistema zen, edo hobeki esateko, han azaldutako printzipioak edozein sistema-motarekin erabiltzeko modukoak ziren.

Hurrengo gai bietan sistema konkretu eta berezia aztertu genuen, solido zurruna hain zuzen. Sistema hau bere partikulen arteko loturaren bidez definitzen genuen, partikula-bikoteen arteko distantziek konstante irauten dutelarik. Aurreko gaian distantzia horien aldaketak aipatu ditugu elastikotasuna aztertzean, hala ere, solido-egitura mantenduz. Gai honetan beste sistema-mota berezi bat aztertuko dugu, fluidoek osotzen dutena prezeski. Noski, lehenik eta behin fluido-kontzeptuaren esangura definitu beharko dugu, denbora berean fluidoen ezaugarriak adierazten dituzten magnitudeak definituz, hala nola, biskositatea eta beste. Ondoren, fluidoen estatikaren eta dinamikaren funtsezko lege eta ekuazioak azalduko ditugu, dena Fisika Orokorreko textu bati dagozkion mailan, hau da, kasu sinpleenak aztertuz.

## I.- FLUIDOEN PROPIETATEAK

### 13.1. FLUIDOEN DEFINIZIOA ETA SAILKAPENA

Fluidoak, orohar, ebakidura-tentsioen eraginpean etengabe deformatzen diren substantziak dira, ebakidura-tentsioak nahi bezain txikiak direlarik ere. Aurreko gaian ikusi dugun bezala, ebakidura-tentsioa gainazal baten gainean egiten den indarraren osagai tangentearen eta azaleraren arteko erlazioa da, hau da, ebakidura-indarraren eta beronek eragiten dueneko azaleraren arteko erlazioa.




Emaniko definizioa hobeki ulertzeko, adibide berezi batetatik abiatuko gara. Alboko irudian adierazten den modura, bi xafla paralelo laun ditugu. 1 delakoa geldi dago eta 2 xaflaren gainean F indarrak eragiten du, xaflaren norabidean. Xafla bien artean substantzia bat dago. Xaflak nahiko luze eta zabalak dira bien arteko distantziarekin konparatuz, hegaletako efektuak arbuia daitezkeelarik.

F indarrak ebakidura-tentsioa sortzen du xaflen arteko substantzian. Xaflen azalera S baldin bada, ebakidura-tentsio horren balioa $\frac{F}{S}$ izango da.

F indarra nahi bezain txikia izanik, goiko xafla abiadura konstantez higi erazten badu, xaflen arteko substantzia fluidoa dela esaten da. Hauxe da, beraz, fluido kontzeptuaren definizioa.

Fluidoen sailkapenera pasatu aurretik, praktikan, zenbait fluidok muga batzuren barnean nahiko ongi betetzen duten lege bat aipatuko dugu. Aurreko irudian abcd prismak fluido-elementu bat adierazten du t = 0 aldiunean, hau da, deformatu gabe kontsideratzen denean. Indarraren eraginez, dt aldiunean elementu horrek a'b'c'd' forma du gutxi gorabehera. Deformazio horrek agertzen digunez, y koordenatuaren arauera partikulen abiadura linealki hazten da, b puntuak v abiadura duelarik (goiko xaflarena) eta a puntua geldi dagoelarik (beheko xafla bezala).

Experimentuetan ikusten denez, ondoko erlazioa betetzen da aipaturiko magnitudeen artean:

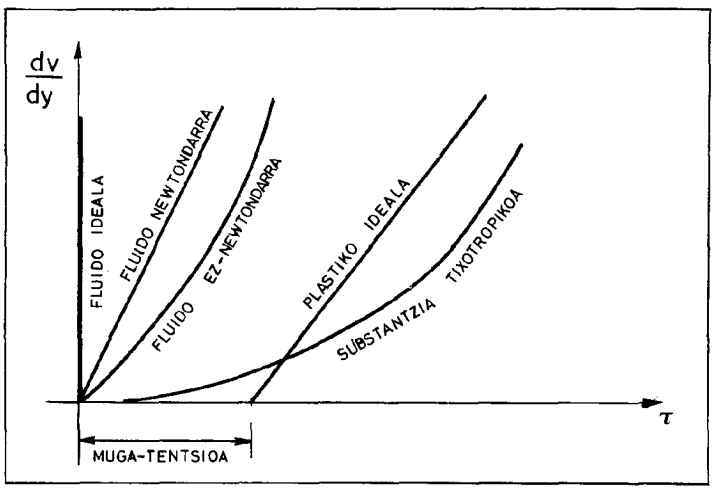
$$\frac{F}{S} = \mu \frac{v}{h} ,$$

non $\mu$ delakoa konstantea den. Ikusten denez, proportzionaltasun zuzena dago ebakidura-tentsioaren ($\frac{F}{A}$) eta fluidoaren deformazioaren abiadura angeluarraren artean.

Fluidoen konportamoldea definitzen eta zehazten duen lege hau, erraz orokor daiteke edozein fluidoren puntu batetarako. Hori egiteko, fluido-elementu diferentziala hartu behar da puntu horren inguruan. Bertan, ebakidura-tentsioa $\tau$ bada eta deformazioaren abiadura angeluarra $\frac{dv}{dy}$ bada, honela geratzen zaigu legea:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} .$$

Lege honi Newton-en biskositatearen legea deritzo eta $\mu$ konstanteari, biskositate-koefizientea. Lege hau betetzen duten ala ez kontutan edukiz, substantzien sailkapena egin dezakegu. Hain zuzen ere, horixe da hurrengo irudian adierazten dena.



Irudi honetan ebakidura-tentsioaren eta deformazioaren abiadura angeluarraren arteko erlazioa agertzen da grafikoki. Ikusten denez, hiru eratako fluidoak aipatzen dira:

- Fluido newtondarrak. Hauek zehazki betetzen dute Newton-en legea, eta biskositate-koefizientea konstantea da, hots, koefiziente horrek ez du ebakidura-tentsioaren menpekotasunik.

- Fluido idealak. Berez, fluido newtondarren kasu bereziak dira, zeintzuetan biskositate-koefizientea nulua den: $\mu = 0$. Hau da, barne-marruskadurarik gabekoak dira.

- Fluido ez-newtondarrak. Hauen kasuan ez dago erlazio linealik $\tau$ eta $\frac{dV}{dy}$ direlakoen artean.

Hauetaz gainera, plastikoen jokabidea ere adierazten da irudian. Ikusten denez, muga-tentsiotik gora fluidoen antzera jokatzen dute. Substantzia tixotropikoak oso bereziak dira, eta berauen kasuan, biskositateak aurreko deformazio angeluarraren dependentzia du (inprimatzeko tintak era honetakoak ohi dira).

Biskositatearen arauera emaniko definizioaz gain bestelako sailkapenik ere egin daiteke fluidoen artean. Arruntena, konprimagarritasunaren arauerakoa da. Labur esanda, alde batetik likidoak ditugu, ia-ia konprimaezinak, eta bestetik gasak, presioarekin dentsitatea nabarmenki aldatzen dutenak. Arruntki, likidoek berezko bolumena dutela esan ohi da, gasek daudeneko ontziarena hartzen duten bitartean.

Dena den, aurreko sailkapenera itzuliz, orohar, gas arruntak eta lar lodi ez diren likidoak fluido newtondartzat har daitezke lehenengo hurbilketan. Ostera, likido lodiak eta puntu kritikoen inguruko gasak ez-newtondartzat hartu behar izaten dira.

Atal honi amaiera emateko, interesgarri gerta daiteke, lehengo bi xaflen kasuan substantzi mota desberdinekin zer

gertatzen den ikustea:

. Fluidoen kasuan, goiko xafla abiadura konstantez higi erazteko, nahikoa da etengabeko indar infinitesimala egitea.

. Tartean plastikoa ipiniz gero, eta berau xaflei itsatsirik egonik, goiko xafla mugikorra ez litzateke higituko muga-tentsiora heldu arte, eta hortik gainerako indar-gehikuntzek fluidoen kasuan bezalako eragina edukiko lukete, abiadura konstantea sortuz.

. Solido elastikoen kasuan (xaflei itsatsirik egonik) deformazioak muga bat du, eta gero, sistema geldi geratzen da orekan. Deformazioaren eta tentsioaren artean proportzionaltasuna dago, aurreko gaian ikusi dugunez.

. Xaflen artean hutsa balego (xaflak elkarretik bereizturik mantenduz), goiko xafla ez litzateke abiadura konstantez higituko, azelerazio konstantez baizik.

. Xaflen artean solido ez-itsatsia badago, solidoen arteko marruskadura agertzen da, eta goiko xafla abiadura konstantez higi erazteko, indar finitua (ez-infinitesimala) behar da.

## 13.2. BISKOSITATEA

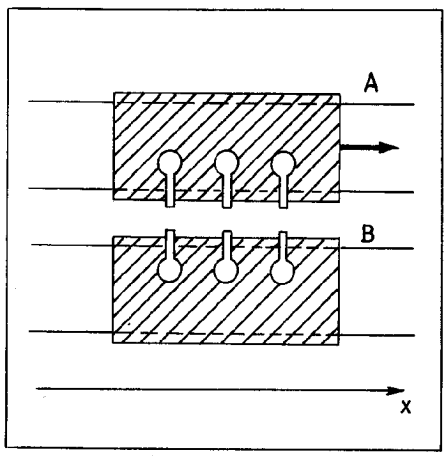
Biskositatea fluidoen ezaugarria da. Beraren kausaz, fluidoek erresistentzia oposatzen diete ebakidura-tentsioei. Izan ere, biskositate izeneko magnitudea aurreko puntuan aipaturiko Newtonen legean agertzen da, ebakidura-tentsioa eta beronen kausaz sortzen den deformazio angeluarraren abiadura erlazionatuz:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}.$$

Biskositate-koefizientea fluido-mota bakoitzaren ezaugarria da. Zenbait kasutan oso handia da, alkitranaren kasuan adibidez; likido arruntetan, askoz txikiagoa da (uretan adibidez), eta gasetan (airean, nitrogenoan,...) aurrekoekin konparatuz, guztiz arbuiagarria.

Experimentalki ikusi izan denez, muga batzuren barnean, fluidoen biskositate-koefizienteak ez du ia presioaren dependentziarik. Ostera, tenperaturaren dependentzia du.

Bi dira, batez ere, fluidoen biskositatearen kausak: molekulen arteko kohesio-indarrak eta molekulen artean gertatzen den momentu linealaren transferentzia. Azken kausa hau, solidoetan ez bezala, fluidoen ezaugarria da, zeren, dakigunez, fluidoaren barneko plano finko bat harturik, alde batetik besterako molekulen transferentzia gertatzen ari baita etengabe.




Molekulen transferentziak ebakidura-tentsioan duen efektua ulertzeko, Streeter liburutik hartutako adibide bat jarriko dugu. Demagun bi bagoi ditugula bi trenbide paralelotan, alboko irudian adierazten den bezala. Bagoiek belakiak dituzte ura gordetzeko, eta gainera ponpa batzu ura beste bagoira perpendikularki jaurtikitzeko. Ponpak etengabe funtzionatzen ari dira, bagoi bakoitzaren masak (urkantitateak) konstante irauten duelarik.

Demagun A bagoia eskuinetarantz higitzen dela hasierako aldiunean eta B bagoia geldi dagoela. Heltzen zaion uraren momentu linealak x norabidean osagaia duenez, B bagoia higitzen hasiko da poliki, eta, alderantziz, A bagoia balaztatzen.

Momentu linealaren transferentzia gertatu da eta ebakidura-tentsio birtual baten funtzioa betetzen du. Modu berean, fluidoaren barnean plano finko bat kontsideraturik, antzerako efektua gertatzen da molekulen transferentziari dagokionez, eta horrek zerikusia du biskositate-koefizientearekin.

Biskositatearen kausa nagusiak zeintzu diren aipatu ondoren, ikus dezagun tenperaturaren arauera nola aldatzen den, fluido-mota desberdinen kasuan. Hain zuzen, experimentalki neurtu denez, likidoen biskositatea txikiagotu egiten da tenperatura goratzean. Gasena, ostera, handiagotu. Zer dela eta konportamolde desberdin horiek?

Likidoetan, kohesio-indarrek askoz ere eragin handiagoa dute biskositatean, momentu linealaren transferentziak baino. Tenperatura goratzean, bibrazio-maila handiagoa denez, kohesioa txikiagotu egiten da; momentu linealaren transferentzia, berriz, handiagotu. Erlatiboki lehenengoak garrantzi handiagoa duenez, biskositatea txikiagotu egiten da.

Gasetan, ostera, alderantziz gertatzen da. Hauetan momentu linealaren transferentzia eduki behar da kontutan, eta horregatik, biskositatea handitu egiten da tenperaturarekin.

Esandakoa osotzeko, biskositate-kontzeptuari buruz ohar bat egin behar dugu. Orohar, fluidoen dinamikan erabili behar den kontzeptua da. Estatikaren kasuan deformazio angeluarraren abiadura nulua denez, hots, fluido-geruzen arteko higidurarik ez dagoenez, $\frac{dv}{dy} = 0$ da, eta ondorioz ez da ebakidura-tentsiorik eta ez biskositaterik ere kontsideratu behar.

## Biskositatearen unitateak

Azter dezagun lehenik, biskositate-koefizientearen dimentsioak zeintzu diren.

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{dv/dy}\right] = \frac{[F/S]}{L\ T^{-1}\ L^{-1}} = \frac{M\ L\ T^{-2} L^{-2}}{T^{-1}} = M\ L^{-1} T^{-1}$$

c.g.s. sisteman, biskositatearen unitatea poise deitzen da (P), Poiseuille (1799-1869) mediku eta filosofo frantsesaren ohoretan ipinitako izena berau, eta honela adieraz daiteke:

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ dina.s.cm}^{-2} = 1 \text{ g.cm}^{-1}.\text{s}^{-1} .$$

Oso erabilia da zentipoise izeneko unitatea: 1 zentipoise= $= 10^{-2}$ poise; hain zuzen, urak 20°C-tako tenperaturan 1,0 zentipoise-tako biskositate-koefizientea du.

MKS sisteman biskositate unitateari poiseuille deritzo (Pl):

$$\text{Pl} = \text{kg} . \text{m}^{-1} . \text{s}^{-1} = \text{N} . \text{s} . \text{m}^{-2}$$

$$1 \text{ Pl} = 10 \text{ poise.}$$

$\mu$ koefizientea biskositate absolutua edo biskositate dinamikoa izenez ere ezagutzen da. Hurrengo taulan biskositate dinamikoaren zenbait balio ematen dira, eta tenperaturarekiko aldaketa ere.

Biskositate-koefizienteak ($\mu$)

| Tenperatura (°C) | Errizinolioa (Poise) | Ura (zentipoise) | Airea (mikropoise) |
|---|---|---|---|
| 0 | 53 | 1,792 | 171 |
| 20 | 9,86 | 1,005 | 181 |
| 40 | 2,31 | 0,656 | 190 |
| 60 | 0,80 | 0,469 | 200 |
| 80 | 0,30 | 0,357 | 209 |
| 100 | 0,17 | 0,284 | 218 |

Zenbait kasutan beste koefiziente bat erabiltzen da:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} ,$$

$\nu$ delako honi biskositate zinematikoa deritzo eta biskositate dinamikoa dentsitatez zatituz lortzen da. cgs sisteman bisko-

sitate zinematikoaren unitateari stokes deritzo (St):

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\rho}\right] = \frac{M\,L^{-1}T^{-1}}{M\,L^{-3}} = L^2\,T^{-1}\,,$$

$$1 \text{ stokes} = 1 \text{ cm}^2 \,.\, \text{s}^{-1}\,.$$

Hemen sakonki aztertuko ez badugu ere, diogun ezen biskositate zinematikoak garrantzizko papera jokatzen duela fluidoen garraioaren azterketan, karga-galera deritzona kalkulatzean (ikus 13.9). Azken batez, garraiatzen den fluidoaren masa-unitateko galera adierazten da beraren bidez, eta fluidoen banaketarako hodien diseinuan oso kontutan hartzekoa da.

## II.- FLUIDOEN ESTATIKA

### 13.3. PRESIO HIDROSTATIKOA. HIDROSTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA

Fluidoen Estatikaren azterketan abiatzeko, kontzeptu berezi bat definitu behar dugu lehenik eta behin: presio hidrostatikoa, edo laburrago esanik, presioa.

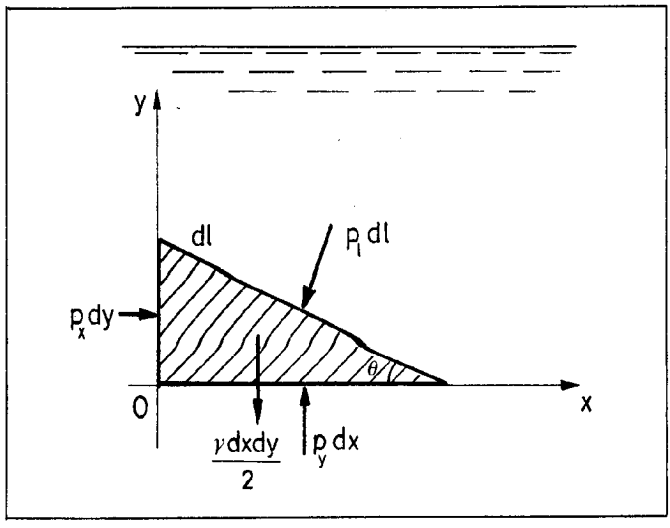
Gainazal laun batetan eragiten duen batezbesteko presioa, gainazal horren gainean perpendikularki eragiten duen indarra beraren azaleraren baloreaz zatitzean lortzen da. Beraz:

$$p = \frac{F}{S}\,.$$

Zatiketa hau limitera eramanik, S azalera geroago eta txikiagoa eginik, puntu batetako norabide batetan (azaleraren perpendikularraren norabidean) dagoen presioa definitzen dugu. Segidan ikusiko dugunez, geldirik dagoen fluido ideal batetan, puntu batetako presioa kontsideratzean, presioak balio berbera du norabide guztietan.

Hurrengo azalpena errazteko, bi dimentsiotan aztertuko dugu problema, baina erraz orokor daiteke hiru dimentsiotako

kasurako. Demagun ziri formako fluido-elementu prismatiko bat (altuera unitatekoa), geldirik dagoen fluido batetan. Ez dago, beraz, ebakidura-tentsiorik, bestela desplazamenduak egongo bailirateke. Gainazalen norabide perpendikularrean eragiten dute soilik indarrek (presioek alegia).




Irudian, elementu diferentzial horretan eragiten duten indarrak adierazten dira, non

$p_x$ : 1 . dy aurpegiko batezbesteko presioa

$p_y$ : 1 . dx " " "

$p_l$ : 1 . dl " " "

$\gamma$ : pisu espezifikoa (batezbestekoa)

diren.

x eta y norabideetan hauexek dira oreka-ekuazioak:

$$p_x \, dy - p_l \, dl \sin\theta = 0$$

$$p_y \, dx - p_l \, dl \cos\theta - \frac{\gamma \, dx \, dy}{2} = 0 \quad ,$$

non, geometrikoki ikusten den bezala,

$$\sin\theta \; dl = dy$$

$$\cos\theta \; dl = dx$$

diren.

Beraz, lehengo ekuazioak honela geratzen zaizkigu:

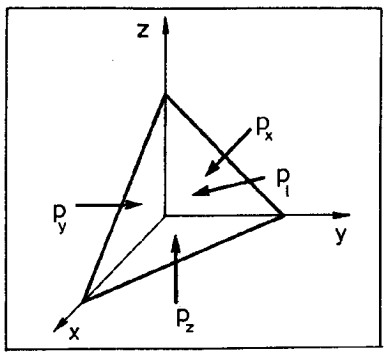
$$p_x \, dy - p_l \, dy = 0$$

$$p_y \, dx - p_l \, dx - \gamma \frac{dx \, dy}{2} = 0.$$

Bigarren ordenako direfentzialak arbuiatuz, limitean, 0 puntuan norabide guztietan dagoen presioa berbera dela ikusten da:

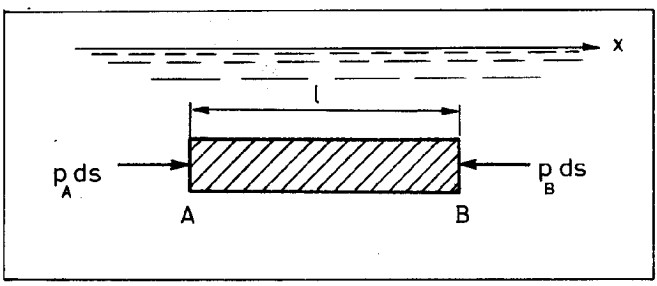
$$p_x = p_y = p_l.$$

Arazo hau hiru dimentsiotan frogatu nahi bagenu, alboko irudiko elementua aztertuko genuke eta emaitza berbera lortuko genuke.




Puntu ber batetan norabide desberdinetan dagoen presioa berbera dela ikusi ondoren, goazen orain puntutik puntura dagoen presio-aldaketa aztertzera.

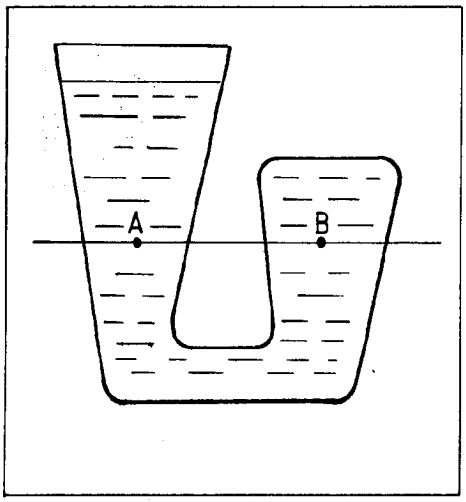
Lehen pauso batetan, horizontal bereko puntuetan presio berbera dagoela ikusiko dugu.




Demagun irudian agertzen den fluido-elementu prismatikoa-

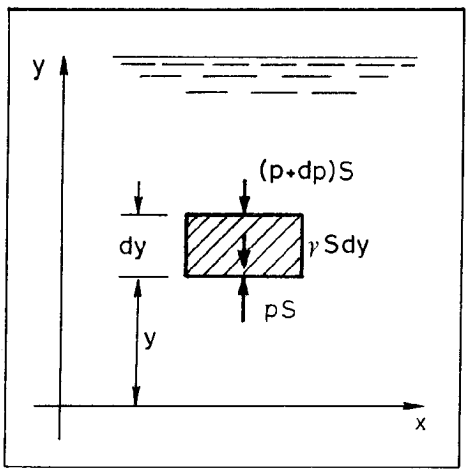
ren oreka aztertzen ari garela. x ardatzaren norabidean eragiten duten indar bakarrak, $p_A \cdot ds$ eta $-p_B \cdot ds$ dira. Argi ikusten denez:

$$p_A = p_B \cdot$$




Emaitza hau erraz orokor daiteke horizontal bereko puntu guztietara, eta, horrela, alboko irudian, presio berbera dago A eta B puntuetan, A eta B puntuak fluidoaren barneko lerro horizontal batez lot baitaitezke.

Eman dezagun orain bigarren pausoa, bertikalaren norabidean dagoen presio-aldaketa ikusteko.




Demagun alboko prisma bertikala. Beraren oinarriaren azalerak S balio du, eta altuera infinitesimala du, dy. Alboko irudian, orekan, y norabidean eragiten duten indarrak adierazi dira. Orekan daudenez, erresultanteak nulua izan beharko du, noski:

$$pS - (p+dp)S - \gamma S\, dy = 0,$$

hots:

$$dp = -\gamma\, dy \,.$$

Ekuazio diferentzial hau Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa da. Bertan, presioaren aldakuntza altueraren aldakuntzarekin erlazionatzen da. Pixka bat aztertuz ikusten denez, presioa

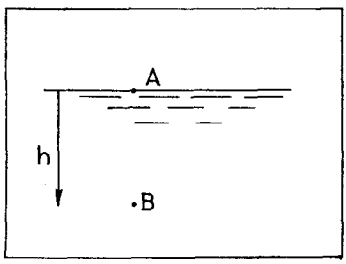
ren aldaketa fluido-elementuaren pisuaren ondorio zuzena da.

Aurreko ekuazio diferentziala guztiz orokorra da eta fluido konprimagarri zein konprimaezinen kasurako balio du. Dena den, fluido konprimaezinen kasuan erraz integra daiteke ekuazio hori, zeren, $\gamma = k^{te}$ eginez, hauxe geratzen baita:

$$\int dp = -\gamma \int dy \ ,$$

$$p = -\gamma\, y + K \ ,$$

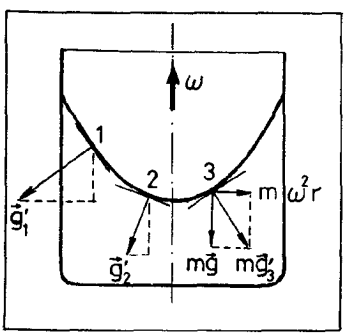
non K konstantea y koordenatuaren jatorriaren aukeraren arauera koa den.




Puntu honekin bukatzeko zenbait ohar egingo ditugu:

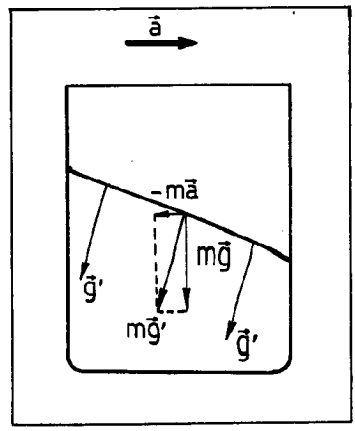
1.- Batzutan ohitura dago, presioaren gehipena sakoneraren arauera emateko. Hots, h koordenatua gainazaletik beherantz neurtzen da. Kasu horretan era honetara kalkulatzen da gainpresioa:

$$p_B - p_A = \Delta p = \gamma h \ .$$




2.- Fluidoen Estatika erlatiboa aztertzean, azeleraziorik badago, inertzi indarrak ere kontutan hartu behar dira eta grabitate "efektiboak" (irudietako $\vec{g}'$ delakoak) ez du bertikalaren norabiderik; eta ez gainazalak horizontalarenik ere, $\vec{g}'$ delakoaren perpendikularrarena baizik, eta hau puntu bakoitzean gertatzen da.

Alboko irudietan horrelako bi adibide adierazten dira. Lehenean, fluido biskotsua biraka jarri da ontzi batetan $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz. Biraka ari den sistema ez-inertzialean fluidoa orekan dago. Indar zentrifugoaren eraginez, gainazalak paraboloide baten forma hartzen du. Bigarrenean, ontziak azelerazio konstantea jasaten du eta sistema ez-inertzial horretako oreka erlatiboan gainazala planoa da baina aldatzarekin, hots, ez da horizontala.



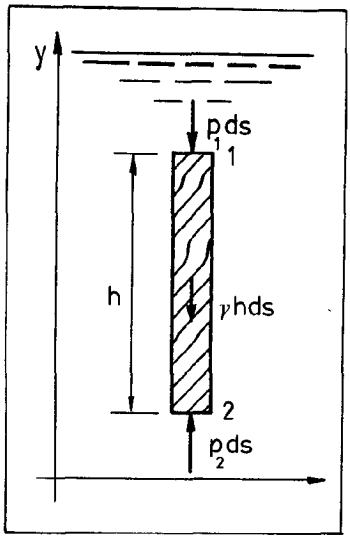

3.- Zer esanik ez, hemen ez ditugu gainazal-tentsiozko problemak kontsideratu, fluidoaren barneko arazoak baizik. Horiek hurrengo gaian aztertuko ditugu.

4.- Pascal-en printzipioa ere gehi daiteke, esanez, likido guztiz konprimaezinen kasuan edozein puntutan eginiko presio-aldaketa likidoko beste puntu guztietara hedatzen dela bapatean. Dena den, arazo hau uhin mekanikoen hedapenean aztertuko da zehatzago, uhinen hedatze-abiadura kontutan hartuz.

## 13.4. FLOTAZIOAREN ARAZOA

Flotazioaren funtsa ulertzeko, Hidrostatikaren ekuazioan oinarrituko gara, kalkuluak eta azalpenak errazteko, fluido konprimaezinen kasua aztertuko dugularik.

Demagun prisma bertikal bat, zeinaren oinarriaren azalera ds den.




Alboko irudian y norabidean prisma horren gainean eragiten duten indarrak adierazten dira. Fluidoa konprimaezina denez, prismaren pisua $\gamma h\ ds$ da. Orekan:

$$-p_1\ ds - \gamma h\ ds + p_2\ ds = 0$$

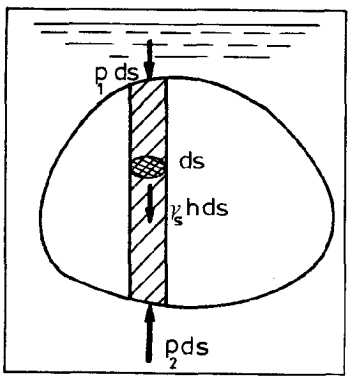
$$(p_2 - p_1)ds = \gamma h\ ds\ .$$

Hau da, 1 eta 2 puntuen arteko presio-diferentzia, azalera-unitateko prismaren pisua da.

$$p_2 - p_1 = \gamma h\ .$$

Izatez, ondorio hau zuzenki lor dezakegu Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa aplikatuz ere.

Dena den, presio-aldaketa nolakoa den ikusi ondoren, kontsidera dezagun orain fluidoaren barnean jartzen den solido bat eta ikus dezagun nolakoak diren solido horretan eragiten duten indarrak.




Demagun solidoaren prisma bertikal bat eta azter ditzagun bertan eragiten duten indarren osagai bertikalak, prismaren sekzio zuzena ds izanik.

- Beheranzko indarra, solidoaren pisuaren kausaz: $\gamma_s\ h\ ds$
- Goranzko indarra, presio-desberdintasunaren kausaz:

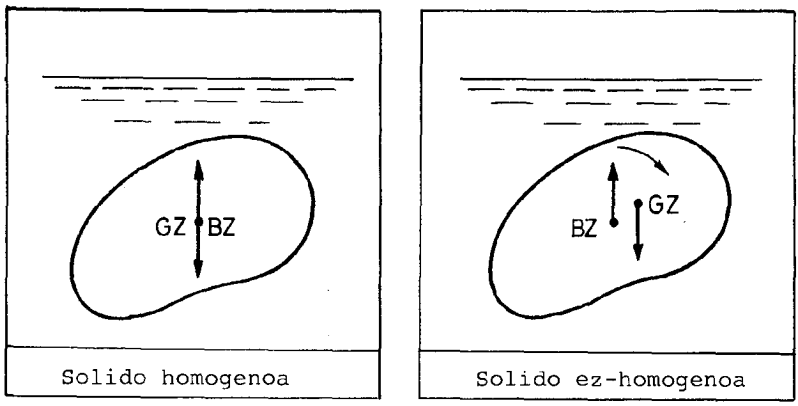
$$(p_2 - p_1)ds = \gamma_f\ h\ ds\ .$$

Hemen $\gamma_f$ eta $\gamma_s$ fluidoaren eta solidoaren pisu espezifikoak dira. Ikusten denez, $\gamma_f > \gamma_s$ bada, solidoak gorantz egin

go du eta flotatu egingo du. $\gamma_f < \gamma_s$ bada, ostera, hondora joango da.

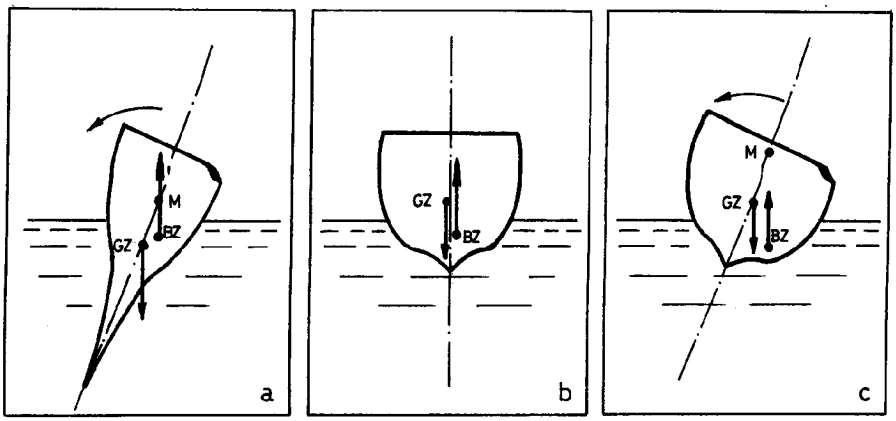
Prisma diferentzial horrekin egin duguna solidoa osotzen duten prisma guztiekin egitean, erraz lortzen da Arkhimedes-en printzipioa: "Fluido (konprimaezin) baten barnean dagoen solidoak goranzko indar edo bultzada bat jasaten du, bultzada horrek solidoak desplazaturiko fluidoaren pisuaren balorea duelarik". Bultzadaren aplikazio-zentrua, fluido desplazatuaren grabitate-zentruan jarri behar da.

Aipaturiko zehaztasun honen ondorioz, uretan dauden gorputzen orekari buruzko zenbait irazkin egin ditzakegu. Esan bezala, gorputz solido bat urpean sartzean bultzadaren zentrua (BZ) eta solidoaren grabitate-zentrua (GZ) puntu berean daude. Ostera, solidoa homogenoa ez bada, bultzadaren eta pisuaren arteko momentua azaltzen da, gorputza jarrera berezian jartzeko joera agertuz, irudian adierazten den legez.




Dena dela, aurreko irudietan uretan erabat murgildurik dauden gorputzen kasuak aipatu ditugun arren, interesgarriagoak gerta daitezke praktikan, uraren gainazalean flotatzen ari diren untzien arazoak. Kasu honetan, oreka egonkorra izan dadin, nahikoa da, untziaren grabitate-zentrua bultzadaren zentrua baino beherago eta bertikal berean egotea. Izan ere, grabitate-zentrua zenbat eta beherago egon, hobe; horregatik belauntzien kasuan berunez lastratzen da behekaldea, grabitate-zentrua beheratzeko (ikus a irudia). Hala ere, baldintza hori ez da beharrezkoa eta gehienetan ez da horrela izaten; zer esa

nik ez, horretan garrantzi handia du untziaren formak.




Azter dezagun b eta c irudietan agertzen den kasua. Grabitate-zentrua gorago dago bultzada-zentrua baino. Untzia okertzean, grabitate-zentrua toki berean geratzen da, baina bultzaren zentrua beste puntu batetara pasatzen da, untziaren formaren kausaz, urpeko bolumena berbera izan arren. Baina BZren bertikalak untziaren "ardatza" GZ puntua baino gorago ebakitzen badu (M puntuan hain zuzen), untzia zutitzera daraman indar-momentua sortzen da, untziari egonkortasuna emanik. M puntu horri metazentrua deritzo.

## III.- FLUIDOEN DINAMIKA

### 13.5. FLUXU-MOTAK

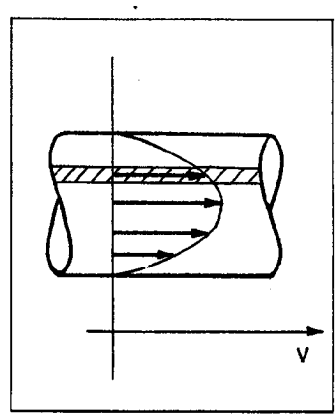
Fluidoen Estatikatik Dinamikara pasatzeko, fluidoen higiduren sailkapen bat egingo dugu lehenik eta behin.

Orohar, fluidoa higitzen denean, fluidoaren fluxua dagoela esaten da, nahiz eta fluxu hitza sekzio batetan zehar denbora-unitatean pasatzen den fluido-kantitatea adierazteko ere erabili. Sailkapenean ikusiko denez, fluidoen higidura-motak adierazteko, oso erizpide desberdinak erabiltzen dira, erizpide bakoitzaren arauera sailkatze-modu bat agertzen delarik.

A.- Biskositatearen eragina kontutan edukirik

A.1. Fluxu turbulentua. Partikulek oso ibilbide irregularrak dituzte. Ebakidura-tentsio handiak sortzen dira. Ezin daiteke Newton-en biskositate legea zuzenki erabil. Energia zinetikoaren galera handia dago (gutxi gorabehera, abiaduraren karratuaren arauerakoa).

A.2. Fluxu laminarra. Partikulen higidura lamina edo xafla antzeko batzutan gertatzen da, lamina bakoitza albokoekiko labaintzen delarik. Newton-en legea betetzen da. Alboko irudian sekzio bateko laminetako abiaduren banaketa adierazten da.




B.- Marruskadura eta konprimagarritasunaren arauera.

B.1. Fluxu ideala. Marruskadurarik ez duena eta denbora berean konprimaezina dena. Marruskadurarik ez edukitzean, biskositate-koefizientea nulua da.

B.2. Fluxu erreala. Fluxu idealaren baldintzak betetzen ez dituena.

C.- Tenperatura eta beroarekiko konportamoldearen arauera.

C.1. Fluxu isotermoa. Kasu honetan ez dago tenperaturaren aldaketarik.

C.2. Fluxu adiabatikoa. Fluidora ez da berorik sartzen eta ez bertatik ateratzen ere. Fluxu adiabatiko itzulgarria (hau da, marruskadurarik gabea) isoentropikoa deitzen da.

D.- Denborarekiko aldakuntza kontutan edukiz.

D.1. Fluxu iraunkorra. Puntu ber batetan fluidoaren propietateak eta higidura bera ere, denbora osoan berberak direnean, fluxua iraunkorra dela esaten da. Horrelakoetan, $\rho$ dentsitatea, p presioa, T tenperatura eta $\vec{v}$ fluidoaren abiadura izanik, edozein puntutan:

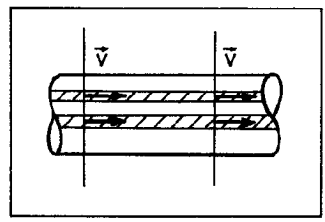
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 .$$

D.2. Fluxu ez-iraunkorra edo denborarekiko aldakorra. Aurreko baldintzak betetzen ez direnean, hots, puntu berean denborarekin $\rho$ , p, T edota $\vec{v}$ aldatuz doazenean.

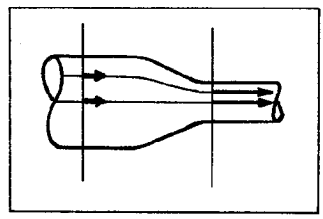
E.- Espazioarekiko aldakuntzaren arauera.

E.1. Fluxu uniformea. Puntu guztietan abiadura berbera:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0 .$$



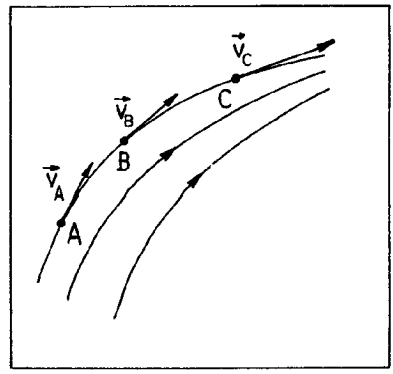

E.2. Fluxu ez-uniformea. Abiadura desberdina puntu desberdinetan. Zer esanik ez, fluxua ez-uniformea izan arren, iraunkorra izan daiteke.



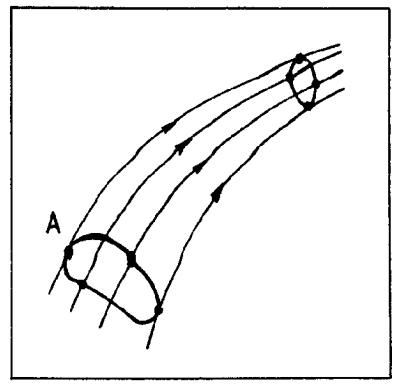
Fluxuen sailkapenarekin bukatzeko, oso praktiko gertatuko zaizkigun bi definizio emango ditugu. Fluxu laminarraren kasurako emanak izango dira, eta gero Dinamika osoan erabiltzekoak.

Korronte-lerroa. Puntu guztietan abiaduraren tangentea da. Erregimen iraunkorrean partikula batek egiten duen bidea adierazten du. Fluxu laminarrean korronte-lerroek ez dute el-

kar ebakitzen, erregimena iraunkorra bada.




Ageri denez, honela definituriko korronte-lerroak, fluidoaren partikulen abiadurek osoturiko eremu bektorialaren (abiadura-eremua deiturikoaren) eremu-lerroak ditugu prezeski (ikus A eranskina).




Korronte-hodia. Kurba itxi batetatik (A) pasatzen diren korronte-lerro guztiek, korronte-hodi bat osotzen dute. Fluxua iraunkorra denean, korronte-hodiak fixuak dira eta berauetan ez da fluidorik sartzen ez irten.

## 13.6. REYNOLDS-EN ZENBAKIA

Biskositatea kontutan edukirik fluidoaren higiduraren ekuazioak aztertzean, oso ekuazio-sistema korapilatsua lortzen dugu. Hain zuzen ere, deribatu partzialak dituzten ekuazio diferentzial batzu lortzen dira, Navier-Stokes izenaz ezagutzen direnak; eta ekuazio hauen soluzioa aztertzea oso gauza zaila izaten da.

Zailtasun hori gainditu asmoz, fluidoen fenomeno mekanikoak aztertzeko geratzen diren bideetariko praktikoena, antzeko ereduen azterketa experimentala da. Beste eskala batetan (txikiagoa gehienetan) eredu bat prestatzen da, eta gero analogiaz orokortu egiten dira ondorioak. Ereduen teoriaren barnean gaude, beraz.

Eredu-teorian, bi fluido dinamikoki antzekoak izan daite-

zen, ondoko baldintzak bete behar dira:

a) Sistemek edo muntaiek geometrikoki antzekoak izan behar dute.

b) Korronte-lerroek ere antzekoak izan behar dute.

Baldintza hauek betetzen dituzten eredu desberdinen arteko erlazioak, zenbaki adimentsional batzuren bidez adierazten dira. Horrela, experimentuetan ereduen bidez lorturiko datuez, eredu errealean lortuko diren emaitzak kalkula daitezke.

Parametro edo zenbaki adimentsional horietariko bat, Reynolds-en zenbakia da. Beste gauza batzuren artean, zenbaki honen laguntzaz fluxu laminarraren eta fluxu turbulentuaren arteko mugak ezagut daitezkeela azpimarratu behar da. Guk adibide gisa aipatuko dugu hemen, nahiz eta beste era askotako zenbaki praktikoagoak ere ba diren.

Fluxu konkretu baten kasuan, honela defini daiteke Reynolds-en zenbakia:

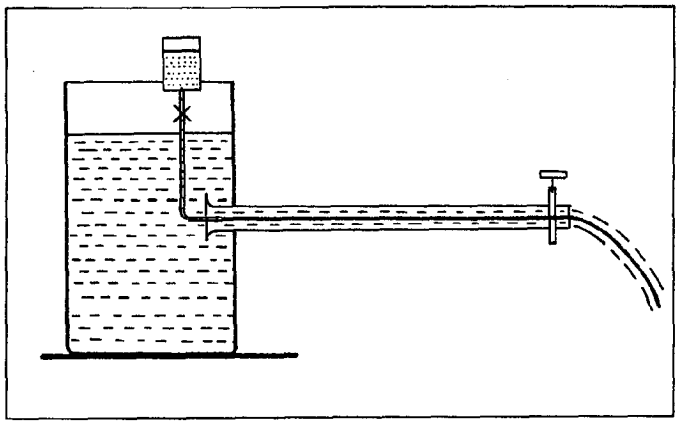
$$R = \frac{v\, l\, \rho}{\mu} ,$$

non $v$ : fluxuaren abiadura berezi bat
$l$ : luzera berezia
$\rho$ : fluidoaren dentsitatea
$\mu$ : fluidoaren biskositate-koefizientea.

Erraz froga daitekeenez, magnitude adimentsionala da:

$$[R] = L^0\, M^0\, T^0 .$$

Zenbaki honen azterketarako, ondoko irudian adierazten den experimentua egin zuen Reynolds-ek.



Muntaian ikusten den bezala, uraren hodiaren barrutik tindakari-haria sorterazten da. Fluxu laminar iraunkorrean, hari edo txorro fin hori ez da apurtzen eta zuzen bat bezala ageri da hodi garden horizontalean, urarekin nahastu gabe. Ostera, erregimena turbulentu bihurtzean, txorroa apurtu egiten da eta tindakaria laster nahasten da urarekin.

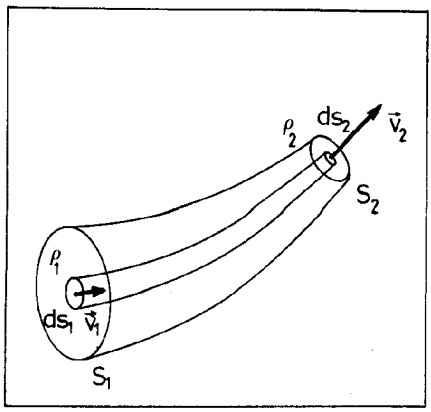
Reynolds-ek abiadura berezitzat batezbesteko abiadura (V) hartu zuen eta luzera berezitzat hodiaren diametroa (D):

$$R = \frac{V\,D\,\rho}{\mu}\,.$$

Baldintza hauetan, beirazko hodietan eta bibrazioak ekiditeko oso neurketa arduratsuak eginez, $R < 12.000$ mugaraino fluxu laminarra egon zitekeela frogatu zuen. Gaur egun tresna modernoekin eta perturbazioak ekidinez, $R < 40.000$ mugaraino ere altxatu da fluxu laminarraren Reynolds-en zenbakia. Hortik gora fluxua beti da turbulentua. Horregatik zenbaki hori fluxu laminarraren goiko zenbaki kritikotzat hartzen da.

Dena den, hodi arruntetan askoz ere akats eta perturbazio gehiago daudenez, askoz lehenago hasten da turbulentzia, Reynolds-ek zenbakiak 2.000÷4.000 balio duelarik. Horregatik behe ko zenbaki kritikotzat $R = 2.000$ hartzen da. Hortik behera, fluxua laminarra da.

## 13.7. KONTINUITATEAREN EKUAZIOA




Gauzak gehiegirik ez korapilatzeko, fluxu laminar eta iraunkorra aztertuko dugu. Demagun, ba, korronte-hodi bat eta beronetan $S_1$ eta $S_2$ sekzio normalak (kalkuluak errazteko).

Kontsidera dezagun barneko korronte-hodi infinitesimal bat. Fluxua iraunkorra bada, $ds_1$ sekziotik denbora-unitatean sartzen den masa eta denbora-unitate berean $ds_2$ sekziotik irten den dena, berdinak dira. Matematikoki idatzirik:

$$\rho_1 \, v_1 \, ds_1 = \rho_2 \, v_2 \, ds_2 \quad ,$$

non $\rho_1$ eta $\rho_2$ sekzio bakoitzeko dentsitateak diren eta $v_1$ eta $v_2$ abiadurak.

Idatzitako ekuazioa, kontinuitatearen ekuazio diferentziala da, fluxu laminar eta iraunkorraren kasuan. Izatez, masaren kontserbazioaren printzipioaren ondorio zuzena da. Bestalde, korronte-hodi osorako integratuz:

$$\int_{S_1} \rho_1 \, v_1 \, ds_1 = \int_{S_2} \rho_2 \, v_2 \, ds_2 \quad .$$

Ekuazio honetako atalek <u>kaudal masikoa</u> izeneko magnitudea definitzen dute, Fisikaren arloan sarri erabiltzen den kontzeptua berau. Orohar, S sekzioan zeharreko kaudal masikoa (Q) honela definitzen da:

$$Q = \int_S \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad ,$$

non $d\vec{s}$, sekzioaren gainazal-elementu diferentzialari dagokion

bektorea den. Hau da, kaudal masikoa $\rho\,\vec{v}$ eremu bektorialaren fluxua da (ikus A eranskina). Fluxu laminar eta iraunkorraren kasuan, kontinuitatearen ekuazioa kaudalaren kontserbazioaren ekuazioa da.

Horretaz gainera, fluidoa konprimaezina bada, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ denez, honela geratzen zaigu:

$$\int_{S_1} v_1\, ds_1 = \int_{S_2} v_2\, ds_2 \quad .$$

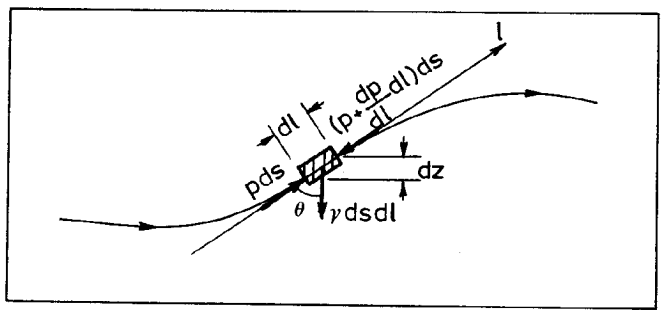
Adierazpen honetan kaudal bolumetrikoa ematen da. Batezbesteko abiaduren funtzioan jarriz:

$$V_1\, S_1 = V_2\, S_2 \quad ,$$

non $V_1$ eta $V_2$ fluidoak $S_1$ eta $S_2$ sekzioetan dituen batezbesteko abiadurak diren, hurrenez hurren. Bukatzeko, ohar gisa diogun ezen kaudal hitza fluxu hitzaren sinonimotzat hartzen dela sarri.

## 13.8. HIGIDURAREN EKUAZIOA KORRONTE-LERRO BATETAN. BERNOUILLI-REN EKUAZIOA. ENERGIAREN EKUAZIOA.

Puntu honetan ere, kalkuluak errazteko, fluxua laminar eta iraunkorra dela kontsideratuko dugu eta, halaber, marruskadurarik ez dagoela (fluido ideala). Korronte-lerro bat harturik, Mekanikako Newton-en bigarren legea ($\vec{F} = m\,\vec{a}$ alegia) aplikatuko dugu.



Demagun l korronte-lerroa dugula eta bertan kontsidera dezagun fluidozko prisma diferentzial bat (beronen oinarria ds da eta altuera, dl). Korronte-lerroaren tangentearen norabidean Newton-en legea erabiliz eta bigarren ordenako infinitesimoak arbuiatuz, hauxe lortzen dugu:

$$p\ ds - (p + \frac{dp}{dl}\ dl)\ ds - \gamma ds\ dl \cos\theta = \frac{\gamma}{g}\ ds\ dl\ a_l .$$

Hemen $p$ : presioa

$\gamma$ : pisu espezifikoa

$a_l$: l norabidean azelerazioak duen osagaia.

Ez dugu ebakidura-tentsiorik kontsideratu zeren, fluido ideala hartuz, barne-marruskadurarik ez dagoela esan baitugu, biskositaterik ez dagoela alegia.

Eragiketak eginez, hauxe geratzen zaigu:

$$\frac{dp}{dl}\ ds\ dl + \gamma ds\ dl \cos\theta + \frac{\gamma}{g}\ ds\ dl\ a_s = 0 ,$$

eta $\gamma ds\ dl$ delakoaz sinplifikaturik:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dl} + \cos\theta + \frac{a_l}{g} = 0 .$$

Hemen ondoko aldaketak egin ditzakegu:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{dz}{dl} \\ a_l = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dl}\dfrac{dl}{dt} = v\dfrac{dv}{dl} \end{cases}$$

Honelatan, ba, azkenean ondokoa daukagu:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dl} + \frac{dz}{dl} + \frac{v}{g}\frac{dv}{dl} = 0 .$$

Hauxe da, berez, energiaren oinarrizko ekuazioa modu diferentzialean idatzirik. Aurreko ekuazioko gaiak ds faktoreaz biderkatuz,

zera geratzen zaigu:

$$\frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{1}{g} v\, dv = 0 .$$

Ekuazio hau korronte-lerro batetan barrena integratuz:

$$\int \frac{dp}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = K ;$$

K delakoa integrazio-konstante bat da eta korronte-lerro konkretu bakoitzaren kasuan balio bat du. Ekuazio hori erabat integratzeko, $\gamma = \gamma(p)$ ezagutu behar dugu fluido konprimagarrien kasuan.

Fluido konprimaezina kontsideratzen badugu, $\gamma$ = ktea hartu ko dugu, eta orduan:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = K .$$

Azter dezagun adierazpen honetako gaien esangura:

. $z = \frac{m\, g\, z}{m\, g}$ — Ikusten denez, pisu-unitateko energia potentzial grabitatorioa da.

. $\frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{1}{2} m\, v^2}{m\, g}$ — Gai honek pisu-unitateko energia zinetikoa adierazten du.

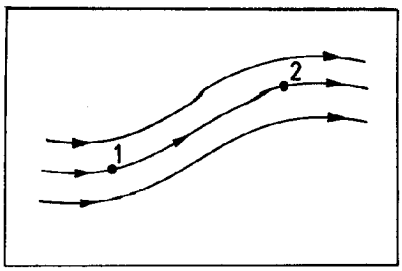
. $\frac{p}{\gamma}$. — Aurreko bi gaien analogiagatik, pisu-unitateko presio-energia dela esan dezakegu. Gai hau fluidoen kasuan agertzen da soilik, solido elastikoen energia potentzial elastikoaren antzekoa delarik. Berez, barne-energia potentzialaren parte bat da.

Beraz, aurreko ekuazioa korronte-lerro batetan barrenako energiaren kontserbazioaren ekuazioa da. Zenbait liburutan g gaiaz biderkaturik ageri ohi da, Bernouilli-ren ekuazioa izenaz ezagutzen delarik. Honako hau, prezeski:

$$\frac{p}{\gamma} + gz + \frac{v^2}{g} = \text{ktea.}$$

Bistan denez, masa-unitateko energiaren ekuazioa da.

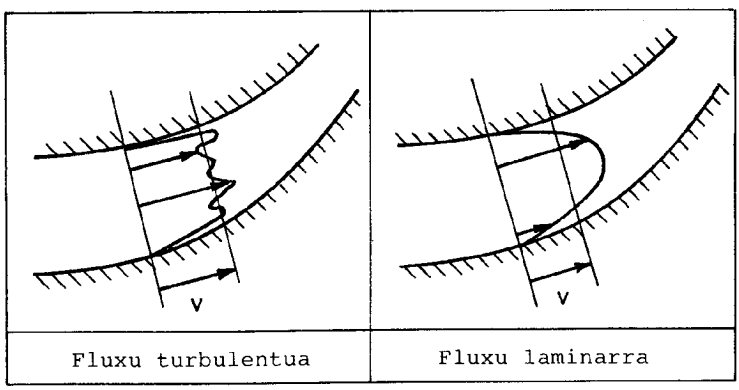
Honelatan, ba, korronte--lerro bereko bi puntu kontsideratuz, honela aplikatzen da energiaren ekuazioa (fluido konprimaezinen kasuan, noski):




$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} .$$

## 13.9. ENERGIAREN EKUAZIOAREN OROKORPENA

Praktikan ez ohi da korronte-lerro bakar bat kontutan hartzen, korronte-hodi bat baizik, hots, korronte osoa. Horregatik zenbait zuzenketa egin behar izaten dira energiaren ekuazioan, korronte errealak kontsideratzean.




Lehenengo zuzenketa energia zinetikoa adierazten duten gaiari buruzkoa da. Alboko irudietan, hodiaren zeharkako sekzioetan dagoen abiaduren banaketa adierazten da. Biskositatearen kausaz, korronte-lerroen arteko marruskadura agertzen da. Hodiaren hormak ukitzen dauden puntuetan, abiadura nulua izango da, eta hodiaren erdialdean, handiena. Fluxu turbulentuan abia

duren banaketa oso irregularra izango da eta fluxu laminarrean, ordea erregularra (hodi zirkularretan abiadurak aldaketa parabolikoa izango du). Dena den, normalean korronte osoaren adierazle bezala batezbesteko abiadura hartzen da, baina gero, aipaturiko efektua kontutan hartzeko, korrekzio-faktore bat jarri behar izaten da. Energia zinetikoaren gaia honela geratzen da:

$$\frac{v^2}{2g} \longrightarrow \alpha \frac{v^2}{2g} .$$

Fluxu laminarraren kasuan $\alpha = 2$ da eta fluxu turbulentuan $\alpha = 1{,}01 \div 1{,}10$ tartean dago.

Bestalde, fluido errealek biskositatea dute eta beronen kausaz, energia mekanikoa galduz doa, bero-energia sortuz. Zer esanik ez, beraz, fluidoen mekanika ongi aztertzeko, ikuspegi termodinamikoa oso kontutan eduki behar da.

Barne-marruskadurarekin lotuta doan energi galeraren kausaz, hodi horizontaletan hedatzean, fluidoaren presioa motelduz doa distantziarekin. Honen zergatikoa azaltzea oso erraza da. Hodiak sekzio konstantea badu, eta fluidoak erabat betetzen badu, konprimaezina bada (uraren kasuan adibidez) batezbesteko abiadura berbera eduki behar du sekzio guztietan. Eta Bernouilli-ren ekuazioan energiaren galera egonik, efektu horien ondorioz, presioaren beherapena dugu, sarri karga-galera deitua. Karga-galera hau oso kontutan hartu behar izaten da, adibidez, hirietako ur-banaketarako sareak antolatzean, biltegitiko distantziarekin presioa motelduz baitoa.

Dena den, problema sinplifikatuz, korronte-lerroetan energiaren galera dagoela esan dezakegu. Lerro bereko 1 eta 2 puntuen arteko galera hori adierazteko hauxe idatz dezakegu:

$$E_1 = E_2 + G_{12} ,$$

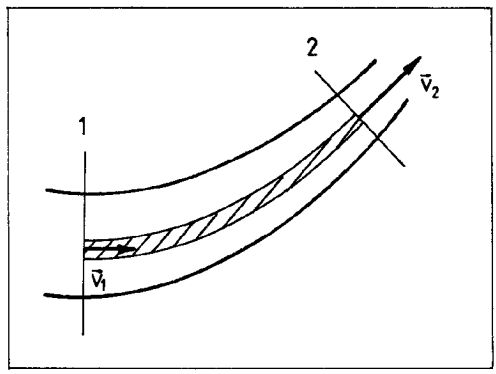
non $G_{12}$, 1 eta 2 puntuen artean galduriko energia den (pisu-unitateko).

Bestalde, korronte barruan energia ematen duten tresnak edo aparatuak ere egon daitezke, hala nola, ponpak, motoreak, helizeak eta abar. Hauen eragina ere kontutan hartuz ($E_m$), honela idazten da energiaren ekuazio orokorra, korronte batetako bi sekzioren artean:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + E_m = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + G_{12}.$$

## 13.10. MOMENTU LINEALAREN EKUAZIOA

Fluidoen azterketa labur hau osotzeko, momentu linealaren ekuazioa azalduko dugu. Orain arte egin dugunaren antzera, arazoa errazteko, fluxu iraunkor, laminar eta konprimaezina kontsideratuko dugu.




Demagun korronte bat eta kontsidera dezagun korronte-hodi infinitesimal bat 1 eta 2 sekzioen artean. 13.7. atalean ikusi dugunez, kaudal masiko infinitesimala ondokoa izango da:

$$dQ = \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} ,$$

eta fluxua iraunkorra izanik, kontinuitatearen ekuazioaren arauera, dQ hori berbera da 1 eta 2 sekzioetan.

Beraz, dt denboran pasatzen den masa infinitesimala hauxe da:

$$dm = dQ\, dt ,$$

eta masa honekin bulkadaren ekuazioa idatziz:

$$\vec{v}_2\ dm - \vec{v}_1\ dm = d\vec{F}\ dt\ ,$$

non $d\vec{F}$ fluidozko korronte-hodi infinitesimalaren gainean 1 eta 2 sekzioen artean egiten den indar erresultantea den. Eragiketak burutuz:

$$(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\ dQ\ dt = d\vec{F}\ dt\ ,$$

$$d\vec{F} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\ dQ\ .$$

Sekzio osorako integratuz, batezbesteko abiadurak $\vec{V}_1$ eta $\vec{V}_2$ izanik, eta korrekzio-faktoreak $\beta_1$ eta $\beta_2$ izanik, honela geratzen da adierazpen hori:

$$\vec{F} = Q(\beta_2\ \vec{V}_2 - \beta_1\ \vec{V}_1)\ .$$

Ikusten denez, ekuazio bektoriala da, eta beraz, hiru osagai eskalarrak kontsideratu beharko dira. Adierazpen honen bidez, korronte batek bera doaneko hodian egiten duen indarra kalkula daiteke ($-\vec{F}$, akzio-erreakzioaren printzipioaren arauera).

## 13.11. SOLIDOEN HIGIDURA FLUIDO BATEN BARNEAN

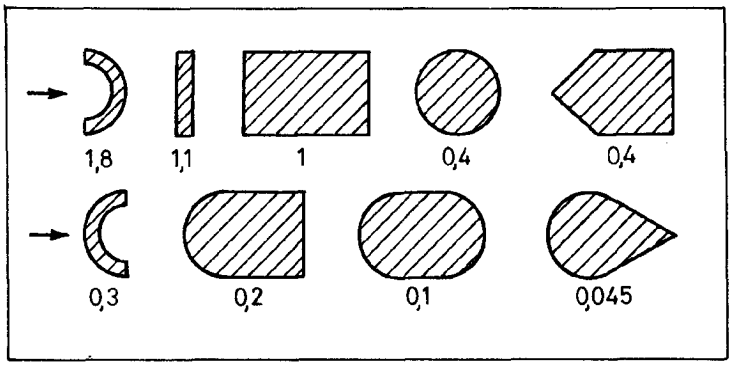
Flotazioaren arazoa aztertzean, geldi dagoen gorputz solido batek fluidoaren barnean pairatzen dituen indarrak aztertu ditugu. Orain, Dinamikaren arloan egonik, higitzean indar haietaz gainera pairatzen dituenak aztertuko ditugu.

Bi ikuspuntu baliokideren arauera azter dezakegu higidura hori. Edo fluidoa geldi egonik eta solidoa beraren barnean higituz edo, alderantziz, gorputz solidoa fluidoaren korronte baten barnean geldi dagoela jorik. Zer esanik ez, bigarren ikuspuntua aukeratuz gero, oso kontutan hartu beharko dugu fluidoaren fluxu-mota, hau da, laminarra edo turbulentua den.

. Marruskadura-indarra eta forma-koefizientea

Dudarik ere ez, higidura aztertzean lehenengo mailan kontutan eduki behar den faktorea, marruskadurarena da. Aurreko ataletan fluidoaren barneko marruskadura biskositate-koefizientearen bidez aztertu dugu nahiko era errazean. Fluidoaren barnean solidoa sartzean, arazoa korapilatu egiten da, beste zenbait faktore eduki behar baitira kontutan, hala nola eite-koefizientea.

Gorputz solidoaren eiteak zerikusi handia du korronte lerroek beraren inguruan hartzen duten itxurari dagokionez. Ondorioz, tankeraren arauera, marruskadura handiagoa edo txikiagoa izan daiteke, edo zurrunbilo gehiago edo gutxiago sor daitezke, hots, horrek zerikusia du sortuko den fluxu-motarekin ere. Solidoaren tankerak duen eragina eite-koefizientea deritzon koefiziente adimentsional baten bidez adierazten da. Hurrengo irudian zenbait profilen eite-koefizienteak adierazten dira.




Marruskadura-indarrak moteldu nahi direnean, gorputzari eite aerodinamikoa ematen zaio, koefiziente txikiak lortuz. Ostera, fluidoak egiten duen indarra handia izatea nahi dugunean -turbina baten abarretan adibidez-, guztiz alderantziz jokatzen da.

Orohar, solidoak fluidoaren barnean jasaten duen indarra zehazki kalkulatzea ez da erraza, baina, hala ere, ba dira bi formula berezi, bi kasu berezitarako balio dutenak. Lehenengoa, Stokes-en formula da, higidura erlatiboa laminarra izanik esfera bat fluidoaren barnean higitzen denean erabiltzen delarik.

Jasaten duen marruskadura-indarra hauxe da:

$$F = 6 \pi r \mu v ,$$

non r esferaren erradioa, $\mu$ biskositate-koefizientea eta v abiadura diren.

Fluxua turbulentua denean beste hurbilketa bat erabiltzen da, Newton-en formula deiturikoa hain zuzen:

$$F = \frac{1}{2} k \rho S v^2 ,$$

non k eite-koefizientea, $\rho$ dentsitatea, S abiadurarekiko perpendikularra den sekzioa eta v abiadura diren. Formula hau abiadurak handiegiak ez direnean erabil daiteke soilik, holakoetan bestelako formula batzu erabili behar baitira. Ikusten denez, fluxu turbulentuaren kasuan marruskadura-indarra abiaduraren karratuaren arauerakoa da, fluxu laminarrean abiaduraren lehenengo berreduraren arauerakoa den bitartean.

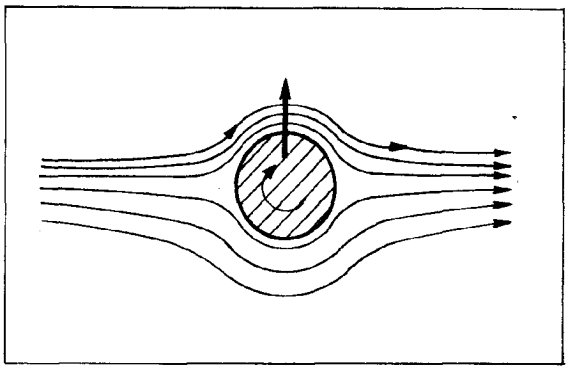
. Antzekotasuna eta ereduak

Fluidoen kasuan higidura zehazki aztertzea oso zail gertatzen den arren, experimentalki ikusi denez, geometrikoki antzekoak diren bi gorputz solidok antzeko baldintzetan pairatzen dituzten indarrak arau zehatzen bidez dira konparagarriak. Honela, bi gorputz antzekoak fluxu turbulentuan fluido baten barruan pairatzen dituzten indarrak, antzekotasun-erlazioaren karratuaren proportzionalak dira. Lege honek garrantzi handia dauka, zeren horrela izanik, eredu txikietan egindako experimentuetan oinarrizta baitaiteke tamainu handiko tresnen konportamoldearen azterketa (auto, hegazkin edo untziena, adibidez).

. Magnus efektua

Orain arteko kasuetan ez dugu biraketazko higidura kontsideratu gorputz solidoari dagokionez. Hori gertatzen denean, solidoaren higidura ez da plano batetan jazotzen. Arruntki esa

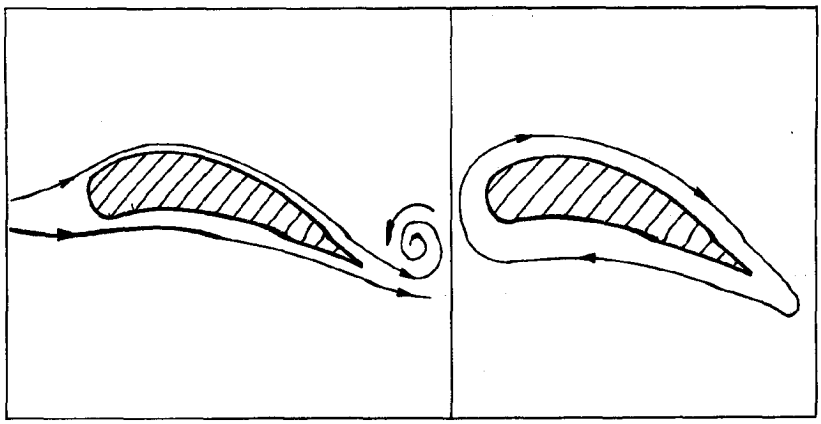
ten denez, futbolean adibidez, baloiak efektua hartzen duenean gertatzen dena, Magnus efektua izenaz ezagutzen da. Efektu horren zergatikoa ulertzeko, demagun bere ardatzaren inguruan biraka dabilen zilindro bat dugula, higitzen ari den fluido baten korronte-lerroen artean.



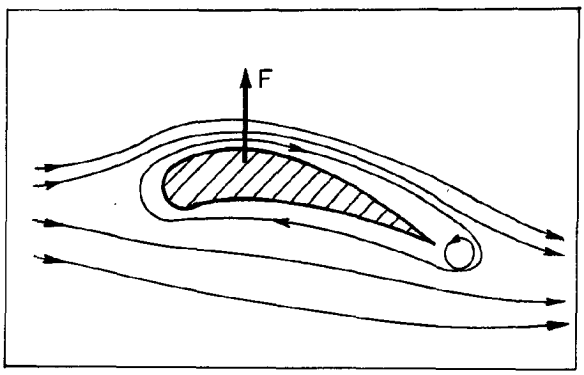
Irudian adierazten den bezala, goikaldetik doazen korronte-lerroak, zilindroaren higiduraren norantza berbera dutenez, azeleraturik gertatzen dira, fluidoaren biskositatearen kausaz; alderantziz, behekaldekoak dezeleraturik. Bi aldeen artean abiaduren desberdintasuna egotean, presio-desberdintasuna ere agertuko da Bernouilli-ren ekuazioaren arauera eta, ondorioz, goikalderanzko indar bat agertuko da, zilindroa harantz higitzera eramango duena.

. Bultzada aerodinamikoa

Hegazkinen hegoen kasuan, goranzko bultzada lortzeko, Magnus efektuaren antzeko zerbaitez baliatzen da. Fluidoaren biskositatearen eta hegoaren asimetriaren kausaz, zurrunbilo bat sortzen da hegoaren atzekaldean. Baina "hegazkina/airea" sisteman inolako kanpo-indarrik eragiten ez duenez, momentu angeluarrak hasieran bezala mantendu behar du. Hori dela eta, hegoaren inguruan aurkako norantzako aire-zirkulazio bat sortzen da, alboko irudietan adierazten den bezala.



Ondorioz, hegoaren goikaldetik airearen abiadura handiagoa da behekaldetik baino, eta horrek esan nahi du, behekaldeko presioa goikaldekoa baino handiagoa dela, horrela goranzko bultzada agertzen delarik.




Bultzada aerodinamiko horrek berdin antzera jokatzen du belauntzietan edo untzien lemetan.

## 14. GAIA: LIKIDOEN GAINAZALEN BEREZITASUNAK. GAINAZAL-TENTSIOA

14.1. Gainazal-tentsioa

14.2. Gainazal-unitateko energia

14.3. Xafla likido baten kurbaturari dagokion presio-desberdintasuna. Laplace-ren legea

14.4. Gainazalen azalera minimoa

14.5. Tanten sorkuntza

14.6. Kontaktu-angelua. Gainazalen gaineko tantak

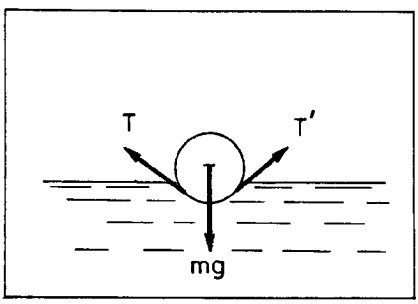
14.7. Kapilartasuna. Jurin-en legea

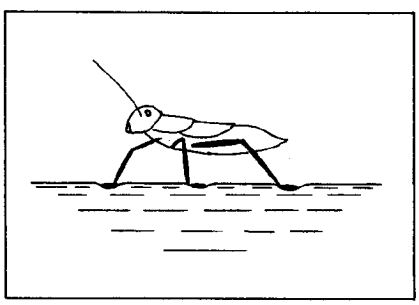
Aurreko gaian fluidoen mekanika aztertzean, fluidoaren barneko korronte-lerroak eta korronte-hodiak hartzen genituen abiapuntutzat. Hala ere, experimentu askotan ikusten denez, fluidoak mugatzen dituzten gainazaletan fenomeno bereziak gertatzen dira, aurreko gaian adierazitako legeen arauera azaltzen ez direnak eta gai honetan aztertuko ditugunak.

Aipa ditzagun horrelako fenomeno batzu:

- Uraren gainazalean orratz bat arduraz jarriz gero, orratza bertan gera daiteke uretan murgildu eta hondora joan gabe, orratzaren dentsitatea urarena baino askoz handiagoa izanda ere, hots, bultzada hidrostatikoa orratzaren pisua baino txikiagoa izan arren. Fenomeno hau ere nabarmenago agertzen da, aldez aurretik orratza koipez igurtziz.

- Aurreko fenomenoaren bide beretik, guztiok dakigunez, zapatariak deritzen intsektuak (gerris lacustris) uraren gainean ibiltzeko gai dira.



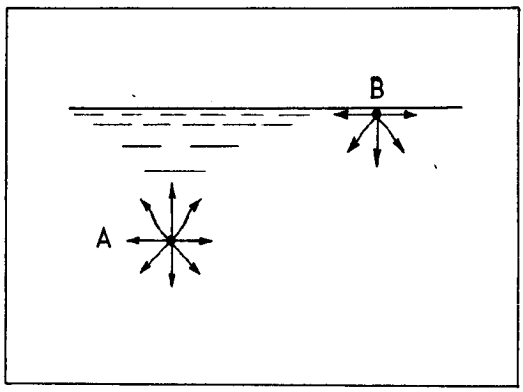
- Badakigu, halaber, likidoak hodi kapilarretan gora egiteko gai direla (edo behera).

- Xaboi-ponpen sorkuntza edo xaboiztaturiko uretan sortzen diren xaflak, fluidoen mekanikan ikusiriko propietateez kanpo azaldu behar dira.

Hauek guztiok, eta beste batzu, gainazal-fenomenoak dira eta, funtsean, gainazal-tentsioa deituriko propietatearen bidez azaltzen dira.

## 14.1. GAINAZAL-TENTSIOA

Likidoen molekulen arteko kohesio-indarrak, Van der Waals--en indarrak deritzenak, likido-egitura posible egiten dutenak hain zuzen, oso handiak dira distantzia txikietara, tarte batzutan $r^{-7}$ delakoaren arauera aldatzen direlarik .

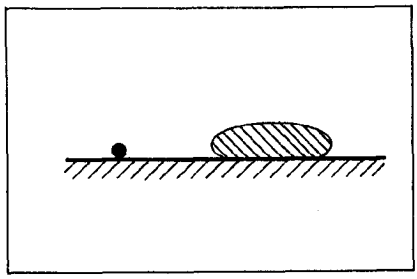


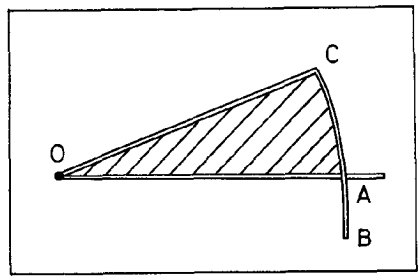

Hori dela eta, desberdintasun nabarmena dago, likidoaren barnean (A) edo likidoaren gainazalaren inguruan (B) dauden molekulen egoeren artean (ikus irudia). Likidoaren barneko molekuluak (A), norabide guztietan indar berdinez erakarria delarik, denetara, erresultante nulua du. Ostera, gainazaletik hurbil dagoen molekularen kasuan (B), inguruko molekulen erakarpenaren erresultanteak, likidoaren barnerantz orientaturik dagoen indar bat sortzen du. Hots, kohesio-indarrek barnerantz erakartzen dituzte gainazaleko molekulak, eta berez, berek bakarrik eragingo balute, likidoari ahalik eta azalerik txikiena emango liokete. Gainazalaren forman eragiten duten kohesio-indar hauek gainazal-indarrak ere deitzen dira.

Dena den, likidoaren kantitatea oso txikia ez denean, gehienetan gainazal-indar horiek ez dute ia eragin nabarmenik pisuarekin konparatuz (bolumen-indarra); eta likidoaren bolumen ber batetarako zenbat eta likido horren mugako gainazala handiagoa izan, hainbat eta hobeto nabarmentzen dira. Ikus de-

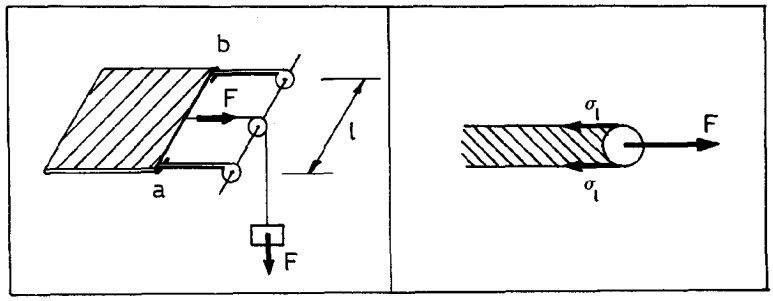
zagun hau zehaztasun handiagoz.

Pisu-indarrak bolumenaren proportzionalak dira eta, gainazalakoek ez bezala, azalera handitzera jotzen dute. Demagun, ba, tanta esferikoak ditugula. r' erradioa txikiagoa hartzean, tanten azalera ($4\pi r^2$) bolumena ($\frac{4}{3}\pi r^3$) baino astiroago egiten da txiki. Beraz, erradioa txikiagoa den arauera, erlatiboki, gainazal-indarrek bolumen-indarrek baino garrantzi handiagoa dute. Hori da alboko lehenengo irudian adierazten dena: Merkuriozko tanta txikia ia erabat esferikoa da, tanta handiaren kasuan pisuaren nagusitasunaren kausaz txapalduta agertzen den bitartean.






Likidozko xafla meheek baldintza onak dituzte gainazal-fenomenoak agertzeko, pisu txikia eta azalera handia baitute, adibidez, ur xaboiztatuarekin presta daitezkeen xafla finek. Alboko irudian O puntuan giltzaturik dagoen burdinarizko triangelu bat dugu. Ur xaboiztatuan sarturik, triangeluari xafla bat itsasten zaio, OAC gainazala sortuz. Experimentua egitean argi ikusten da, OA eta OC hurbildu egiten direla. Hots, gainazal-indarrek xafla likidoaren gainazala ahalik eta txikien bihurtzera jotzen dute eta gainazal horren planoan eragiten dute.



Aurreko experimentuaren bidetik, neurketa berezia egingo dugu. Oraingoan, irudian ikusten den modura, marko errektangeluarra hartuko dugu ab burdinari higikorrarekin eta likidozko xafla markoaren eta ab burdinariaren artean jartzen delarik. Besterik gabe, ab higitu egiten da, xafla likidoa txikituz bait doa. Baina pisu txiki bat jarriz, oreka lor dezakegu. Oreka honi dagokionez, zerbait bitxi gertatzen da hala ere: ab burdinaria batera edo bestera mugitu arren, oreka mantendu egiten da. Gertaera horrek zera adierazi nahi du, alegia, oreka gordetzeko egin behar den indarra ab burdinariaren luzeraren arauerakoa dela.

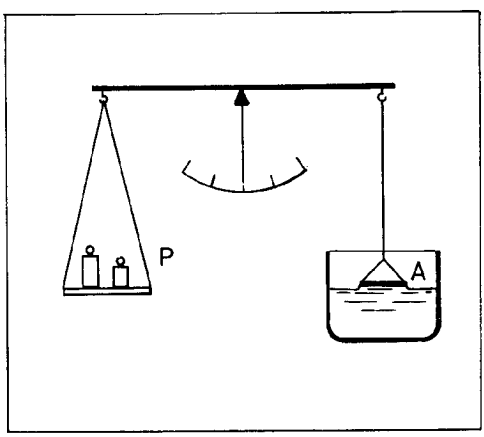
Hain zuzen, experimentu asko eginez, F indarraren eta gainazalarekiko kontaktuaren luzeraren arteko proportzionaltasuna dagoela ikusten da. Proportzionaltasun-konstanteari gainazal-tentsioa deritzo eta likidoaren ezaugarria da. Aurreko burdinariaren kasuan izatez bi gainazal daudenez, 21 luzera eduki behar dugu kontutan eta honela definitzen da gainazal-tentsioa:

$$\sigma = \frac{F}{21} \quad .$$

Dimentsionalki $F.L^{-1}$ edo $M.T^{-2}$ izanik, unitateak $N.m^{-1}$ dira. Bestalde, esan bezala, gainazal-tentsioa likido bakoitzaren ezaugarria da, baina experimentalki neurtzen denez, tenperaturarekin aldatu egiten da, orohar tenperatura goratzean beheratu edo moteldu egiten delarik, hurrengo taulan uraren kasurako ematen diren baloreetan ikus daitekeenez.

## GAINAZAL-TENTSIOAREN BALORE EXPERIMENTALAK

| Airearekin kontaktuan dagoen likidoa | Tenperatura ºC | Gainazal-tentsioa $N.m^{-1}$ |
|---|---|---|
| Ura | 0 | 0,0756 |
| Ura | 20 | 0,0728 |
| Ura | 60 | 0,0662 |
| Ura | 100 | 0,0589 |
| Oliba-olioa | 20 | 0,0320 |
| Alkohol etilikoa | 20 | 0,0223 |
| Bentzenoa | 20 | 0,0289 |
| Glizerina | 20 | 0,0631 |
| Merkurioa | 20 | 0,4650 |
| Karbono tetrakloruroa | 20 | 0,0268 |
| Oxigenoa | -193 | 0,0157 |
| Neona | -247 | 0,00515 |
| Helioa | -269 | 0,00012 |

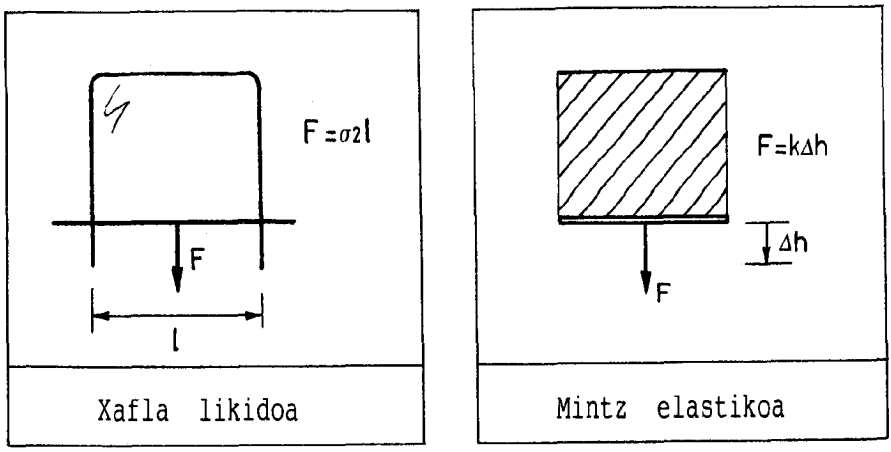



Normalean gainazal-tentsioak neurtzeko erabiltzen tzen den tresna, tentsimetroa deritzona da. Honetan, budinarizko A zirkunferentzia bat (r erradiokoa) jartzen da likidoaren gainazalean, balantzaz orekatuz. Gero pisua gehituz doa, likidotik askatu arte eta orduan

$$\sigma = \frac{P}{2.2\,\pi r}$$

eginez lortzen da gainazal-tentsioa.

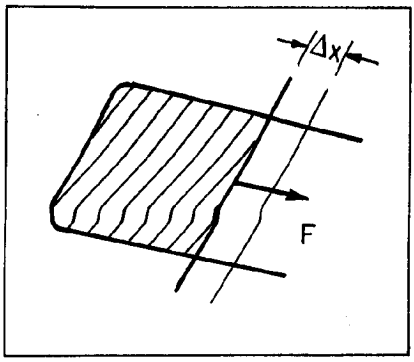
Bukatzeko, ohar bat egingo dugu gainazalen konportamoldeari dagokionez. Lehenengo begirada batez, mintz elastikoek dutenaren berdina dela pentsa daiteke, baina ba da bien arteko desberdintasun funtsezkorik, orain azalduko dugun bezala.




Azalpenerako, lehenago ikusitako marko errektangeluarreko xafla likidoa eite bereko mintz elastiko fin batekin konparatuko dugu. Marko errektangeluarrean egindako experimentuan, oreka edozein puntutan lortzen da, indarra gainazalarekiko kontaktu--luzeraren proportzionala delarik. Mintz elastikoaren kasuan ostera, indar bakoitzerako oreka-posizio bakarra dago eta indarra luzapenaren (deformazio unitarioaren) proportzionala da. Oso konportamolde desberdinak, beraz.

## 14.2. GAINAZAL-UNITATEKO ENERGIA

Hasierako gaira itzuliz, likidoaren gainazaleko molekulek barneranzko indarra jasaten dutela ikusi dugu. Alderantziz, likidoaren barneko molekula bat gainazalera eramateko, aipaturiko indar hori gainditu beharko da eta, azken batez, lana egin beharko da indar horren aurka, eta lan hori "pilaturik" egongo da gainazalean energia potentzial eran. Zer esanik ez, hori egitean handiagotu egin dugu likidoaren gainazala, bertara molekula gehiago eramanez. Hots, gainazal-tentsioak gainazalaren handitzearen aurka jokatzen du, horrek energia potentzialaren handipena bait dakar, eta horregatik likidoek energia hori minimoa egitera jotzen dute.




Azter dezagun gainazala handitzean azalera-unitatea gehitzeko egin behar den lana. Demagun lehengo marko errektan geluar berbera dugula eta $\Delta x$ luzatzen dugula xafla likidoa.

F indarrak egiten duen lana hauxe da:

$$\Delta W = F . \Delta x \quad ,$$

eta bestetik, gainazalaren azaleraren gehipena ondokoa izango da, xaflak bi alde dauzkala kontutan hartuz:

$$\Delta S = 2 . l . \Delta x \quad .$$

Beraz, gehipenerako azalera-unitateko egin behar den lana:

$$\frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F . \Delta x}{2 . l . \Delta x} = \sigma \quad ,$$

hau da, gainazal-tentsioa. Alderantziz esanik, gainazal-tentsioa likidoaren gainazala azalera-unitatez handiagotzeko behar den energia da.

Azken adierazpenetik, gainazal-tentsiorako unitate gisa $Joule.m^{-2}$ ere har dezakegula ikusten dugu, aurretik emandako unitate-motarekin bat datorrena:

$$1 \frac{Joule}{m^2} = 1 \frac{N.m}{m^2} = 1 \; N.m^{-1} \quad .$$

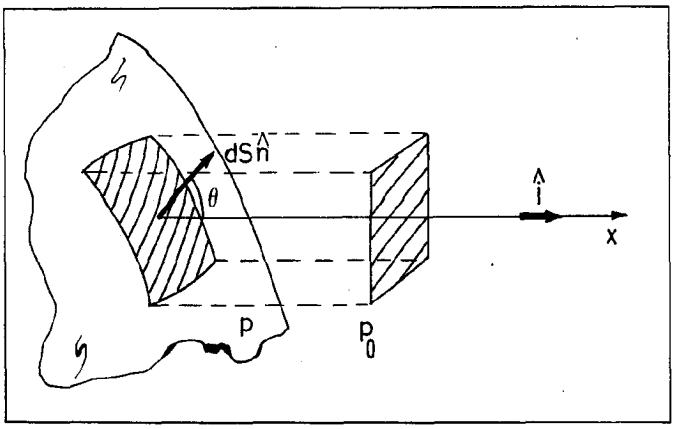
## 14.3. XAFLA LIKIDOAREN KURBATURARI DAGOKION PRESIO-DESBERDINTASUNA. LAPLACE-REN LEGEA

Gainazal-tentsioaren kausaz, likido baten gainazalak kur-

batura edukitzean, tentsio bereziak ageri dira, eta ondorioz orekan presio desberdinak daude kanpo eta barne aldeetan. Dena den, desberdintasun txiki bat dago xafla likidoen eta likidoen mugen artean eta horregatik bizpahiru kasu aztertuko ditugu.

### 14.3.1. Xafla likido diferentziala

Demagun likidozko burbuila baten elementu diferentzial bat, dS, alboko irudian adierazten den modukoa.




Burbuilaren barneko presioa p da eta kanpokoa $p_0$. Azalera--elementua $dS\hat{n}$ izanik, presio-desberdintasunaren kausaz elementu horrek jasaten duen indarra hauxe da:

$$(p-p_0)\ dS\ \hat{n}\ ,$$

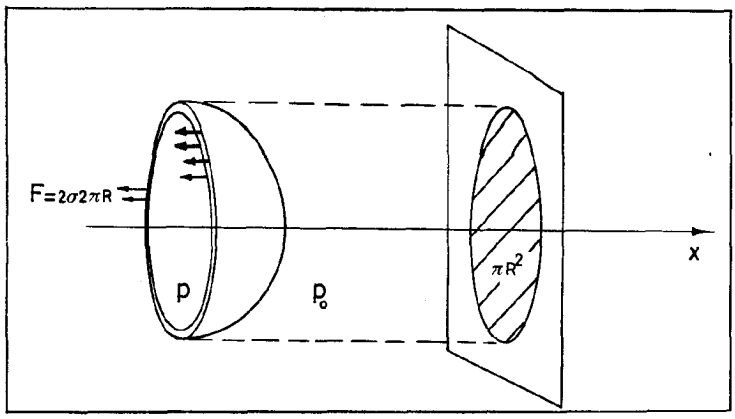
eta x norabidean duen projekzioa:

$$(p-p_0)\ dS\ \hat{n}.\hat{\imath} \ = \ (p-p_0)\ dS\ \cos\theta\ ,$$

hau da, x ardatzaren plano perpendikularrean projektaturiko azaleraren eta barne eta kanpoko presio-diferentzialaren arteko biderkadura.

### 14.3.2. Burbuila esferikoa

Demagun orain xafla likidozko burbuila osoa daukagula, ur xaboiztatuzkoa, adibidez. Azal dezagun holako gainazal esferikoaren erdiaren oreka.




Bi indar-moten arteko eragina aztertu behar da edozein norabidetan (adibidez x norabidean)

- Presio-desberdintasunari dagokiona: $(p-p_0)\ R^2$, zeren projektaturiko azalera $\pi R^2$ bait da.

- Gainazal-tentsioari dagokiona: $2.2\pi R.\sigma$. Hemen bi aldiz kontsideratu dugu burbuila-erdiaren ebakiduraren perimetroa, berez xaflak bi gainazal bait ditu, kanpokoa eta barnekoa.

Beraz:

$$(p-p_0)\ \pi R^2 = 4\pi R\sigma$$

$$(p-p_0) = \frac{4\sigma}{R} .$$

Hots, presio-desberdintasuna erradioaren alderantziz proportzionala da. Hori dela eta gauza bitxiak gertatzen dira. Adibidez, hodi baten bi muturretan erradio desberdineko bi burbuila batera puzten badira, erradio txikikoak behartu egingo du airea erradio handikora sartzen, hau da, burbuila txikia txikiagotu eta handia handiagotu egingo dira.

14.3.3. Tanta likidoa

Tanta likidoen kasuan, gainazal bakarra dago eta orduan, aurreko kasuan ez bezala, perimetro bakarra hartu behar da kon-

tutan. Horregatik tanta esferikoaren kasuan likidoaren barneko presioaren eta kanpoko airearen presioaren artean dagoen desberdintasuna, ondokoa da:

$$p-p_0 = \frac{2\sigma}{R} .$$

14.3.4. Laplace-ren legea

Tanta likidoaren eitea esferikoa ez bada, kurbatura-erradio nagusien —$R_1$ eta $R_2$— bidez eman daiteke orduan barne eta kanpoko presioen arteko desberdintasuna, honela hain zuzen:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) .$$

Lege honi Laplace-ren legea deritzo eta, bistakoa denez, esferaren kasuan $R_1 = R_2 = R$ izanik aurreko emaitza berbera lortzen da.

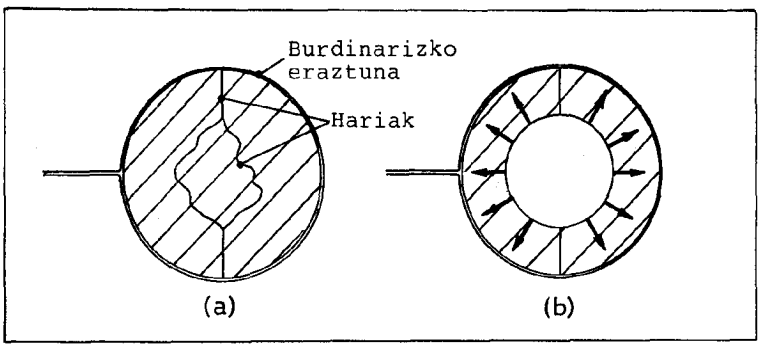
Emandako formula honetaz ohar bat egin behar da. Gainazalak konbexoak edo konkaboak diren arauera, zeinu desberdinez hartzen dira erradioak; prezeski kurbatura-zentrua likidoaren barnealderantz dagoenean —tantaren kasua— erradio positiboa hartzen da eta orduan gainpresioa dago. Ostera, kanpoalderantz dagoenean —hodi kapilarretako kasua, geroago ikusiko dugunez—, erradio negatiboa hartzen da eta, izatez, kasu honetan depresioa dago.

## 14.4. LIKIDOEN GAINAZALEN AZALERA MINIMOA

Likidoen gainazalak, tentsioaren eraginpean dagoenez gero, txikiagotzera jotzen du, presioen desberdintasunarekin orekan jartzeko moduko azalerarik txikiena lortu arte. Horrela, adibidez, olio astunezko bolumen txiki bat dentsitate bereko ur-alkohol nahaste batetan xiringatzean, elkarrekin nahasten ez direlarik, azkenean olioak barnean flotatzen duen tanta esferikoaren forma hartzen du, hots, azalera txikieneko eitea. Dentsitateen berdinketa hori pisuaren efektuak ekiditeko egiten

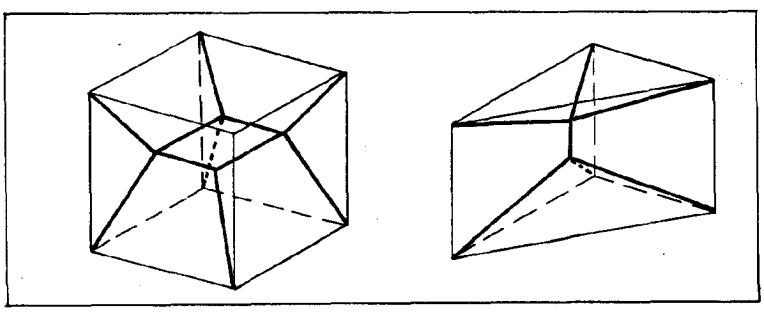
da, horrela Arkimedesen bultzadak pisua orekatzen bait du.

Beste experimentu erraz bat ere aipa dezakegu, esandakoa adierazteko. Hari-inguru bat burdinarizko eraztun batetan lotzen dugu (a) irudian bezala eta ur xaboiztaturiko ontzi batetan



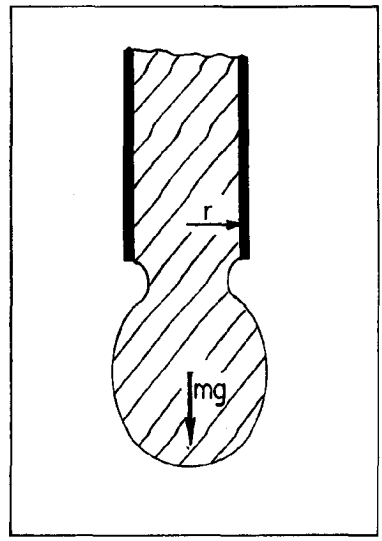

sartu-atereaz, likido-xafla bat lortzen dugu eraztunaren barnean, haria xafla horretan nolabait flotatzen dagoelarik (ikus (a) irudia). Baina hariaren barnealdeko xafla orratz batez ziztatzean, hari-inguruak zirkunferentzi forma hartzen du laster gainazal-tentsioaren eraginez, era horretara azalerarik txikiena lortuz.

Xafla likidoen jokabide horrek, bestela analitikoki oso nekez ebatz daitezkeen zenbait problema matematikoren ebazketan lagun diezaguke. Demagun, esate baterako, burdinarizko egitura batek mugatzen duen azalera minimozko gainazala lortu nahi dela. Xafla likidoen propietateetan finkatuz, oso erraz ebatz daiteke problema. Burdinarizko egitura ur xaboiztatutan sartuz eta xafla likidoa orekara iritsi arte pixka batean itxaronez, xaflaren formak berak emango digu ebazpena.



Alboko irudian, forma kubiko eta prismatikoekin lortzen diren bi ebazpen adierazten dira.

## 14.5. TANTEN SORKUNTZA




Tantakontailuaren muturrean tanta sortzean, lehenengo hurbilketan bederen, kontsideratu egin daiteke, ezen tanta hori bere pisua hodiaren zirkunferentziari dagokion gainazal-tentsioak sorturiko indarraren berdina denean hasten dela erortzen, hau da, ondoko berdintza betetzen denean:

$$mg = 2\pi r\sigma \quad .$$

Arazoa zehaztasun handiagoz aztertzean, ordea, esandakoa oker dagoela ikusten da, eta zenbait zuzenketa egin behar dira, korrekzio-faktore batez adieraz daitezkeenak. Dena den, zuzenketa egokiak eginez, metodo horrek gainazal-tentsioak neurtzeko balio dezake.

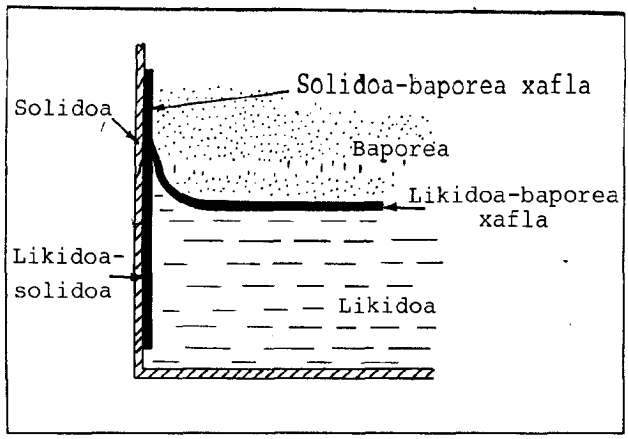
Emandako azalpen kualitatiboan agertzen denez, gainazalean dagoen likido-geruzak erresistentzia azaltzen du, barneko likidoa eror ez dadin, eta zorro gisakoa da likido hori gorderik.

Bestalde, tantakontailu berean bi likido desberdinez sortzen diren tanten pisuak, beren gainazal-tentsioen proportzionalak direla ikusten da. Hori dela eta metodo hau egokienetarikoa gertatzen da gainazal-tentsioak neurtzeko.

## 14.6. KONTAKTU-ANGELUA. GAINAZAL SOLIDOEN GAINEKO TANTAK.

Orain arte, likidoaren eta gasaren (airearen) arteko banaketako gainazaletan agertzen diren tentsioak aztertu ditugu soilik. Hala ere, gehienetan likidoak ontzi solidoetan gorde-

tzen dira eta orduan bestelako gainazalak eduki behar dira kontutan.




Zehazkiago mintzatuz, alboko irudian adierazten den bezala, hiru banaketa-mota daude, hiru kontaktuzko gainazal, hauetariko bakoitzari gainazal-tentsio berezia dagokiolarik. Xafla bakoitzak zenbait molekulatako lodiera du. Ondokoak dira hiru xaflak, zein bere gainazal-tentsioarekin:

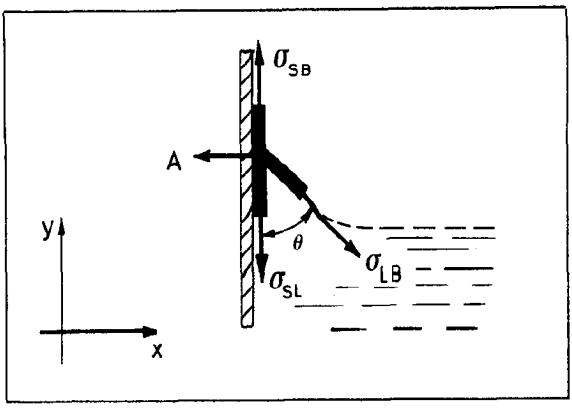
- Solidoa-likidoa xafla, zeinaren gainazal-tentsioa $\sigma_{SL}$ den .

- Solidoa-baporea xafla, $\sigma_{SB}$ gainazal-tentsioaz.

- Likido-baporea xafla, $\sigma_{LB}$ gainazal-tentsioaz. Izatez, azken hau orain arte $\sigma$ deitutakoa da.

Solidoaren alboan likidoak hartzen duen kurbatura, aipaturiko hiru gainazal-tentsioen funtzioa da. Arazoa aztertzeko, kasu konkretu batetatik abiatuko gara.

Lehenago aipaturiko hiru xafletako elementu txikiak hartuko ditugu, launak bailiren hurrengo irudian adierazten den bezala, eta diagramaren norabide perpendikularrean luzera-unitatekoak direnak. Lau indarren arteko oreka aztertu beharko dugu: Batetik hiru gainazal-tentsioak eta bestetik solidoak isolaturiko xafla-zatiari egiten dion atxekidurazko edo erakarpenezko indarra, A deituko duguna (solidoaren perpendikularra).




Oreka baldintzak hauexek dira:

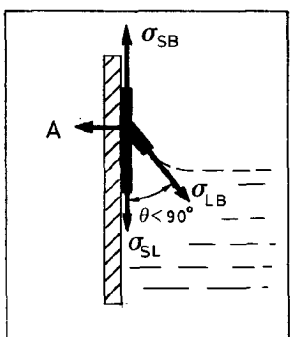
$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \left\{ \sigma_{LB} \sin\theta - A = 0 \right.$$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow \left\{ \sigma_{SB} - \sigma_{LB} \cos\theta - \sigma_{Sl} = 0 \right. ,$$

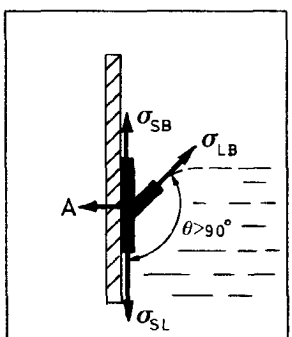
eta hortik

$$\begin{cases} A = \sigma_{LB} \sin\theta \\ \cos\theta = \dfrac{\sigma_{SB} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LB}} \end{cases} .$$

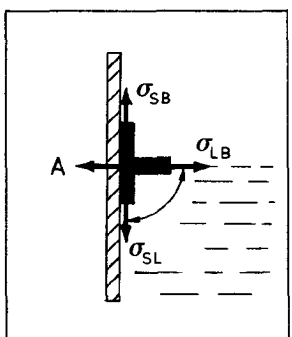
Ikusten denez, hasieran emandako hiru gainazal-tentsioen bidez $\theta$ angelua kalkula daiteke, eta halaber atxekidura-indarra. $\theta$ angeluari <u>kontaktu-angelua</u> deritzo,




Likidoak busti egiten du solidoa

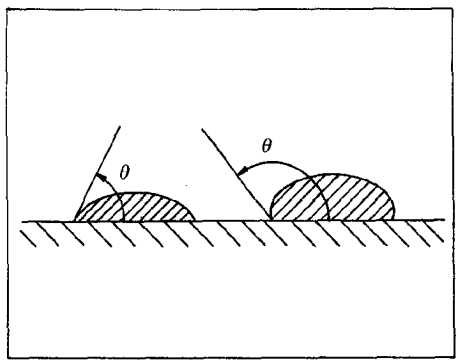



Likidoak ez du solidoa bustitzen




Mugako kasua
$\theta = 90°$

Kontaktu-angelua $\sigma_{SB}$ eta $\sigma_{SL}$ gainazal-tentsioen arauerakoa da, hots, solidoaren eta likidoaren (honekin batera doa baporea) izaeraren arauerako. Hiru kasu desberdin ager daitezke. Kasu batzutan $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ da, (a) irudian bezala eta orduan likidoak busti egiten du solidoa. Beste batzutan $\theta > 90^{\circ}$ da ($\sigma_{SB} < \sigma_{SL}$) eta orduan likidoak ez du solidoa bustitzen. Adibidez, merkurioaren eta beiraren arteko angelua 145° ingurukoa da eta, beraz, merkurioak ez du beira bustitzen. Bukatzeko $\sigma_{SB} = \sigma_{SL}$ denean, $\theta = 90^{\circ}$. Horixe da uraren eta zilarrezko ontzien artean gertatzen dena.




Kontaktu-angeluaz esandakoak zerikusi handia du, tantek solidoen gainean duten formarekin, solidoa bustitzen den ala ez arauera. Alboko irudian bi tanta-mota desberdin adierazten dira. Lehenengoan $\theta < 90^{\circ}$ da eta tanta horrek busti egiten du; bigarrenean, ostera, $\theta > 90^{\circ}$ izanik ez du zolua bustitzen.

Bukatzeko, kontaktu-angeluaren aldaketan zenbait gaik duten eragina aipatuko dugu, detergenteek dutena esate baterako. Hauen bidez $\theta > 90^{\circ}$ izatetik $\theta < 90^{\circ}$ izatera pasa daiteke eta hori oso interesgarria da urarekin ongi bustitzeko eta garbitzeko. Beste gai batzuk alderantzizko efektua lortzeko balio dute. Gai iragazkaizleak dira, hau da, iragazkaiztu egiten dutenak, horretarako urarekiko kontaktu-angelua 90° baino handiagokoa sortzen dutelarik.

Likido batzuk kontaktu-angelu ia nulua dute beira arruntarekin, berunezko beirarekin, pyrex-ekin eta koartzo urtuzko beirarekin. Hauxe da, adibidez, uraren, alkoholaren, eterearen

eta azido azetikoaren kasua, besteren artean. Beste likido batzuren kontaktu-angeluak asko aldatzen dira solidoaren arauera, hurrengo taulan ikus daitekeen bezala.

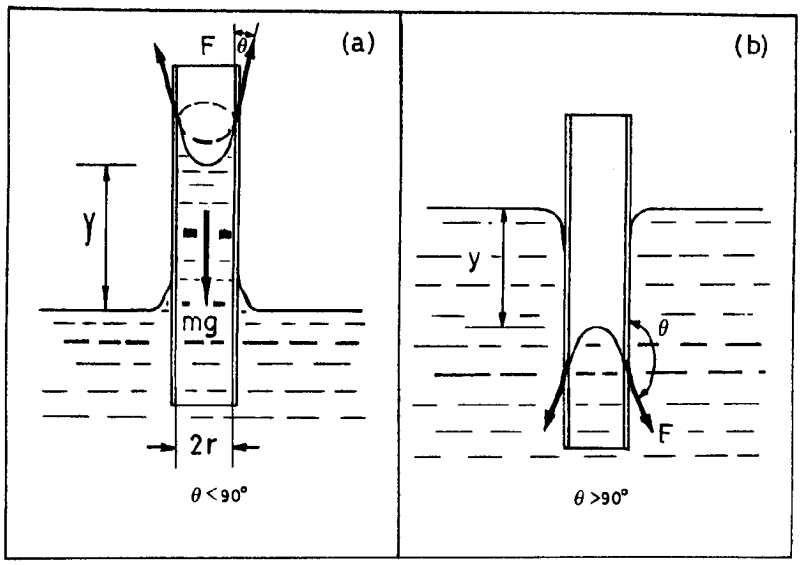
KONTAKTU-ANGELUAK

| Likidoa | Horma | Kontaktu-angelua |
|---|---|---|
| α-bromonaftaleno ($C_{10}H_7B_r$) | Beira arrunta | 5° |
| | Berunezko beira | 6°45' |
| | Pyrex | 20°30' |
| | Koartzo urtuzko beira | 21° |
| ($C\ H_2I_2$) | Beira arrunta | 29° |
| | Berunezko beira | 30° |
| | Pyrex | 29° |
| | Koartzo urtuzko beira | 33° |
| Ura | Parafina | 107° |
| Merkurioa | Beira arrunta | 140° |

## 14.7. KAPILARTASUNA. JURIN-EN LEGEA

Kontaktu-angelua dela eta, likidoaren gainazalean bi solido elkarretik oso hurbil jartzean, likidoak portaera berezia eduki dezake, gorantz edo beherantz eginez. Efektu hau argi ikusten da hodi oso finetan, hodi kapilar deritzenetan (ile-hodiak alegia).

Kontaktu-angelua $\theta < 90°$ bada, likidoa hodian gora igoten da oreka-altueraraino. Ostera, $\theta > 90°$ denean, beherantz egiten du. Hodiaren barnean gainazalak hartzen duen eite kurbatuari meniskoa deritzo eta alboko irudietan adierazten den erakoa izan daiteke.




Kalkula dezagun likidoa igoten deneko altuera, $\theta < 90°$ denean. Hodiaren barne-erradioa r izanik, kontaktu-luzera $2\pi r$ da. Kalkuluetarako hurbilketa eginez, hodi kapilarreko Y altuerako eta r erradioko likidozko zilindroa bere likido-baporea geruzarekin isolatuki kontsideratuko dugu, beraren gainean eragiten duten indarren arteko oreka aztertzeko. Goranzko indarra ondokoa da:

$$F = 2\pi r\ \sigma_{LB} \cos\theta \ .$$

Beheranzko indarra, likidozko zutabearena da (menisko ingurua arbuiatuz):

$$mg = \rho\ \pi\ r^2\ y\ g \ .$$

Eta orekan:

$$\rho g\ \pi\ r^2\ y = 2\pi r\ \sigma_{LB} \cos\theta$$

$$y = \frac{2\sigma_{LB} \cos\theta}{\rho g} \ \frac{1}{r} \ .$$

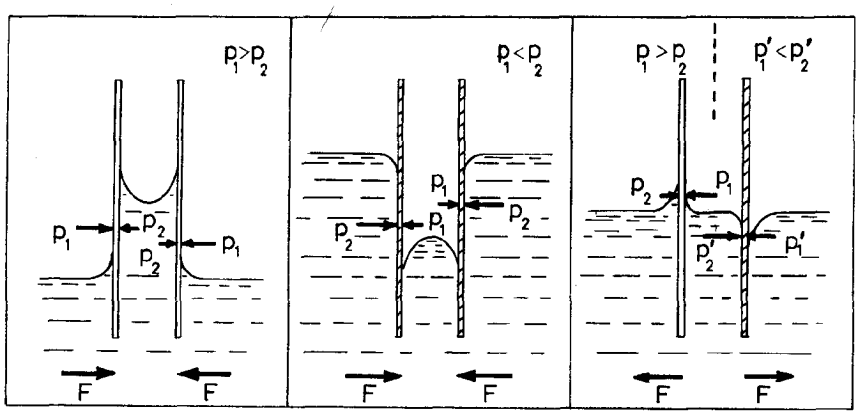
Hain zuzen ere, horixe da kapilartasunari buruzko Jurin-en legea. Labur esanda, likidoa hodi kapilarrean gora igoten deneko

altuera, hodiaren erradioaren alderantziz proportzionala da. Kasurako, urarekin eta 0,01 mm-tako rayon-ezko hodi kapilarrean y = 1,5 m lor daiteke.

Beheraketa kapilarraren kasuan adierazpen berbera erabil daiteke, kasu honetan cos θ < 0 izanik. Beherapena solidoa bustitzen ez deneko kasuetan gertatuko da, hala nola merkurioa beirazko ontzian dagoenean, orduan meniskoa beheranzkoa bait da, bigarren irudian bezala. Hain zuzen, 1 mm-tako erradioa duen beirazko hodi batetan y = 5 mm-tako beherakada lortzen da merkurioan.

Kapilartasunaz azaltzen dira bizitza arrunteko hainbat fenomeno ezagun, adibidez tinta paper lehortzaileetara nola pasatzen den, edo kafea azukre-koskoetan gora nola doan, edo eta txiskeroko metxan gora alkoholak edo gasolinak nola egiten duen.

Bestalde, kapilartasunaren kausaz, bi xafla solido laun eta leunak likido baten gainazalaren inguruan eta likidoarekin kontaktuan elkarren ondoan jartzean, erakarpenezko indarra agertzen da xaflen artean biak era berekoak direnean, alegia biak busti edo batik ere bustitzen ez bada, alboko lehenengo bi irudietan ikusten den bezala.




Ostera, mota desberdineko xaflen artean —bata busti eta bestea bustitzen ez dena — indar aldaratzailea sortzen da.

## 15. GAIA: HIGIDURA OSZILAKORRA

15.1. Oszilazio harmonikoak

15.2. Oszilazio harmonikoaren zinematika eta dinamika

15.3. Energia oszilazio harmonikoetan

15.4. Oszilazio harmonikoen konposaketa

15.5. Bilakabide oszilakorrak. Osziladore indargetua

15.6. Oszilazio bortxatuak. Erresonantzia

15.7. Osziladorearen inpedantzia

Gure ausartzia ez litzateke lar handia izango higidura mota hau beste guztien artean garrantzizkoena dela esango bagenu, izan ere berau hain bat da lagungarri gertatzen Fisikaren arlo asko eta askotako fenomenoak aztertzeko orduan. Mekanika Klasikotik hasita, Elektrizitatera pasatuz, hortik uhin-fenomenoen esparrura, Fisika Kuantikora iritsi arte, jokamolde oszilakorra naturaren baitan dagoela baiezta dezakegu.

Esan barik doa, kapitulu honetan barrena ikusiko duguna higidura oszilakorrari gainbegirada baino ez dela, oszilazioak beren konplexutasun osoan aztertzeko behar den lehen-lehenbiziko urratsa alegia. Bi dira horretara mugaerazten gaituzten zioak:

- geure helburuetarako sakontasun handiagorik ez dugula behar,

- eta sakonkiago aztertzen saiatuko bagina ere, berehala era gotziko liguketeela matematika aldetiko zailtasunek.

Beraz, aipatutako arrazoietara makurtuz, funtsezkoak diren ereduak azalduko ditugu soilik, beraien azterketan ahalik eta pauso matematiko gutxien erabiliz, xehetasun eta ñabardura zenbait hurrengo ikasturte batetarako geratzen delarik.

## 15.1. OSZILAZIO HARMONIKOAK

Hauxe da higidura oszilakorrik oinarrizkoena, zeren beste edozein higidura oszilakor oszilazio harmonikoetan deskonposa bait daiteke, Fourier-en formularen bidez buruturiko azterketa matematikoak argi frogatzen duenez. Beraz, nahitaezkoa da oszilazio harmonikoak ondo ikertzea, eta horretan ihardungo dugu lehenbiziko hiru ataletan.

Dimentsio bakarreko kasuan, oszilazio harmonikoak egiten dituen partikularen higiduraren ekuazioa, honela adieraz deza-

kegu:

$$x = A \sin (\omega t + \varphi)$$

Hona hemen idatzitako sinboloen izen eta esangura:

x : elongazioa deitzen da, eta partikularen posizioa adierazten du.

A : anplitudea deitzen da, eta bistakoa denez elongazioaren balore maximoa ematen digu. Anplitudearen unitateak elongazioari ere dagozkio, funtzio trigonometrikoak dimentsio gabekoak dira eta.

$\omega t + \varphi$ : aldiuneko fasea deitzen da, radianetan neurtzen delarik.

$\omega$ : maiztasun angeluarra edo pultsazioa deitzen da, eta radian segundoko unitatetan neurtzen da, t denbora segundotan ipintzen denean.

$\varphi$ : hasierako fasea deitzen da, eta fasearen balorea adierazten du t = 0 aldiunean. Zer esanik ez, faseari berari dagozkion unitateetan neurtzen da, radianetan alegia.

Pultsazioarekin zuzenki erlazionaturik dauden beste magnitude bi ere erabiliak izaten dira; hara:

f : maiztasuna edo frekuentzia, zeinak denbora-unitatean burutzen den oszilazio-kopurua adierazten duen. Ziklo, oszilazio edo bibrazio segundoko delako unitatean neurtzen da, edo, laburkiago, hertzetan (1 hz = 1 $s^{-1}$).
$\omega$ eta f-ren arteko erlazioa ondoko hau da:

$$\omega = 2 \pi f .$$

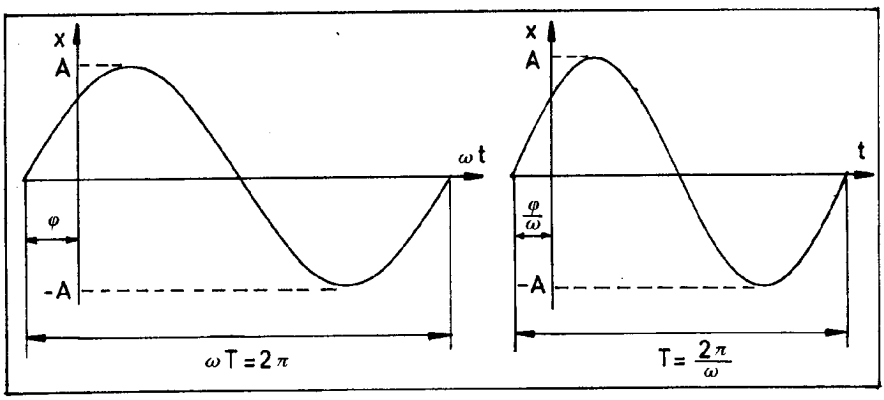
T : periodoa, hots, oszilazio oso bat burutua izan dadin igaro behar duen denbora. Eskuarki segundotan neurtu ohi da, definiziotik beretik erraz atera daitekeenez

maiztasunaren inbertsua delarik; hau da:

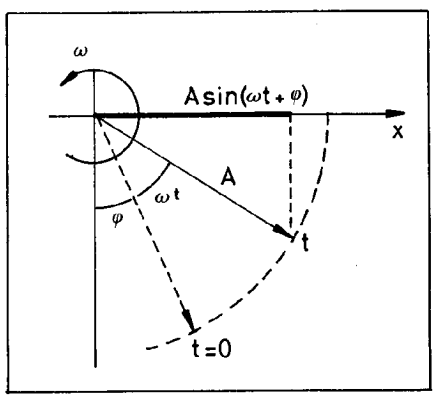
$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Oszilazio harmonikoa irudikatzeko, hurrengo adierazpide bi hauetaz balia gaitezke:

- $x(\omega t)$ edo $x(t)$ direlako grafikoen bidez. Azken batez, sinu funtzioaren adierazpen grafikoa baizik ez dira, eskalaz aldaturik. Eskala aldaketa honek inongo zailtasunik ez dakarrenez, irudiak ematera mugatuko gara.




- bektore biratzaile edo fasorearen bidez. Demagun A modulua duen bektore bat, zeina ardatzen jatorriaren inguruan $\omega$ abiadura angeluarraz biraka ari den, erlojuaren orratzen alderantzizko norantzan. Hasierako aldiunean bektoreak eta ardatz bertikalaren beheko adarrak $\varphi$ angelua osotzen dute. Aipaturiko bektoreak x ardatzean edozein aldiunetan ematen duen projekzioa kalkulatzen badugu, ondoko balorea lortuko dugu (ikus bedi irudia):




$$A \sin(\omega t + \varphi) ,$$

azken hau oszilazio harmonikoaren elongazioari dagokion adierazpena delarik.

Bigarren metodo hau lehenengoa baino emankorragoa da, oszilazio bi edo gehiago gainezartzen behar direneko kasuei begira batez ere (15.4. atala).

## 15.2. OSZILAZIO HARMONIKOAREN ZINEMATIKA ETA DINAMIKA

Lehenengo eta behin zera argitu behar dugu, alegia, fenomeno oszilakor guztiak ez direla Mekanikaren arlora mugatzen. Beraz litekeena da solido baten tenperatura-aldaketa era oszilakorrean bilakatzea; edota zilindro batetan sortutako gasaren presioak, pistoi batek eraginda esaterako, gorabehera harmonikoak pairatzea; edota beste hainbeste adibide. Horrelako kasuetan ere, segidan azalduko ditugun kontzeptuak erabilgarriak dira, kasu bakoitzari bere interpretazio egokia emanez, jakina.

Behin aurrekoa finkaturik, partikula baten dimentsio bakarreko higidura harmonikoa aztertzeari ekingo diogu, zinematikaren ikuspuntutik. Lehenbizi dakusagun partikularen abiadura zein den. Horretarako denborarekiko elongazioaren deribatua egingo dugu, hau da:

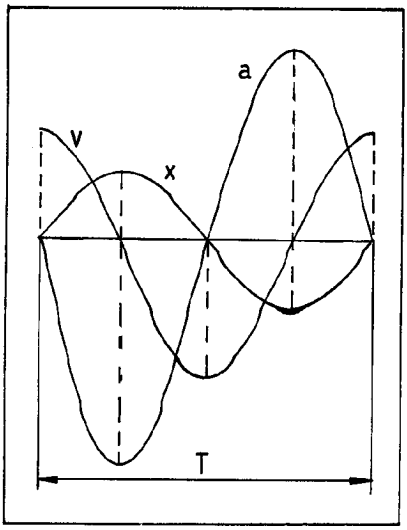
$$v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega\,\cos(\omega t + \varphi) = A\omega\,\sin[\omega t + (\varphi + \tfrac{\pi}{2})] \ .$$

Argi dagoenez, abiaduraren bilakaera harmonikoa da, balore maximoa $A\omega$, maiztasun angeluarra $\omega$, eta hasierako fasea $(\varphi + \frac{\pi}{2})$ direlarik.

Ondoren, lortutako abiadura denborarekiko deribatuz, azelerazioa erdietsiko dugu. Hara:

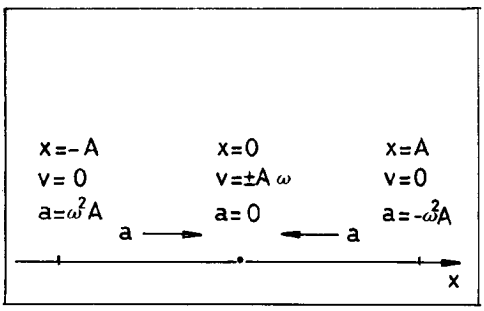
$$a = \frac{dv}{dt} = -A\,\omega^2\,\sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2\,\sin[\omega t + (\varphi + \pi)] \ .$$

Erraz kontura gaitezkeenez, abiadura ez ezik azelerazioa ere era harmonikoan bilakatzen da, balore maximoa, maiztasun angeluarra eta hasierako fasea, $A\omega^2$, $\omega$ eta $(\varphi + \pi)$ izanik, hurrenez hurren.




Ondoko irudian elongazioaren denborarekiko bilakaera, abiadurarena eta azelerazioarena batera ikus daitezke. Bereziki interesgarria da aipaturiko magnitudeen balore minimo, nulu eta maximoek agertzen duten aldiberekotasunaz ohartzea.

Lortutako adierazpenetik eta elongazioari dagokionetik, erraz atera ditzakegu v eta x-ren arteko erlazioa, zein a eta x-ren artekoa, horretarako t denbora ezabatu besterik behar ez delarik. Beraz, hona hemen erlazioak, beraiei osagarri zaien irudi batek lagundurik:




$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad ,$$

$$a = -\omega^2 x \quad .$$

Higidura harmonikoaren azterketa dinamikoari gagozkiolarik, demagun partikula higikorraren masa m dela, eta aplika dezagun Newton-en bigarren legea. Hara:

$$F = m\,a = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad .$$

Kontutan har bedi zertasun bektorialik ez dugula erabili behar, gure aztergaia norabide bakarreko higidura da eta.

Bestaldetik, oraintxe arestian atera dugunez, higidura harmonikoan ondoko erlazioa betetzen da:

$$a = -\omega^2 x \quad .$$

Azkenengo erlazio biotatik hauxe gertatzen zaigu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad .$$

Ekuazio honi higidura harmonikoaren ekuazio diferentziala deritzo, beronen interesgarritasuna Mekanikaren arloa ez eze, Fisikaren beste hainbeste arlotara hedatzen delarik. Izan ere, demagun zirkuito elektriko baten azterketan ari garela, eta egindako ikerketen ondorioz, i korronte-intentsitateari dagokion ekuazio diferentziala lortu dugula, zeina tankera honetakoa den:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \beta i = 0 \quad (\beta > 0 \text{ eta konstantea izanik}).$$

Begi bistan dagoenez, ekuazio hau eta lehentxoago ikusi duguna erabat antzekoak dira, hots, tankera matematiko berberekoak behinik behin. Antzekotasun horretan finkaturik, zera baiezta dezakegu:

- zirkuitoak daroan korrontea era harmonikoan bilakatzen dela, hau da, denbora-epe finko eta erregularretan korrontearen norantza aldatzen dela, aldiune zehatz batzutan anulatzen dela (hain zuzen ere, norantzaz aldatzera doanean), har ditzakeen baloreak maximoa den batek mugaturik daudelarik;

- korrontearen aldaketen maiztasun angeluarra, hauxe dela:

  $$\omega = \sqrt{\beta} \ ,$$

  hemendik, T periodoa eta f maiztasuna erraz atera ditzakegularik.

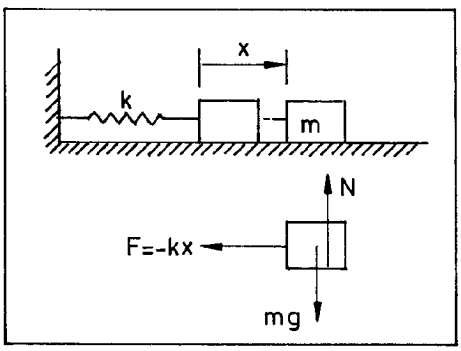
Berriro ere Mekanikara itzuliz, azter ditzagun, adibide gisa, higidura harmonikora, edo ikusiko dugun legez, ia-ia harmonikora, moldatzen diren zenbait kasu.

## 1. Adibidea: Malguki bati loturiko partikula.

Jakina denez, malguki bat luzatzean edota laburtzean, beraren elastikotasunaren kausaz, deformazioarekin nolabait erlazionaturik dagoen indar bat sortzen du malgukiak. Erlazio hau mota desberdin askotakoa izan daiteke, guztion arteko sinpleena "linealak" deritzen malgukiei dagokiena delarik. Beraz, honelako malguki bat erabiltzean, ondokoa da malgukiak sortutako indarra, deformazioaren funtzioan:

$$F = - k x \quad .$$

Erlazio honetan, k delakoa malgukiaren ezaugarria da, konstante elastikoa deritzona, beraren dimentsioak $[F L^{-1}]$ edo $[MT^{-2}]$ direlarik. Bestaldetik, x malgukiak pairatzen duen deformazioa da, nahiz luzapena dela, nahiz laburpena dela. Bistakoa denez, malgukiak pairatutako deformazioa eta sortutako indarra, aurrako norantzazkoak dira.




Honelako malguki bati m masako partikula bat lotzen badiogu, eta hau bere oreka-posiziotik aldendu eta gero askatzen badugu, partikularen gainean eragiten duten indarrak, irudian agertzen direnak dira (diogun, bide batez, inolako marruskadurarik ez dagoela suposatu dugula, eta halaber, malgukiaren masa arbuiagarria dela kontsideratuko dugula). Beraz, partikularen higidurari dagozkion ekuazioak, ondokoak izango dira:

$$\begin{cases} F = - k x = m a \\ N - mg = 0 \quad . \end{cases}$$

Hauetariko lehenengotik, ondokoa atera dezakegu:

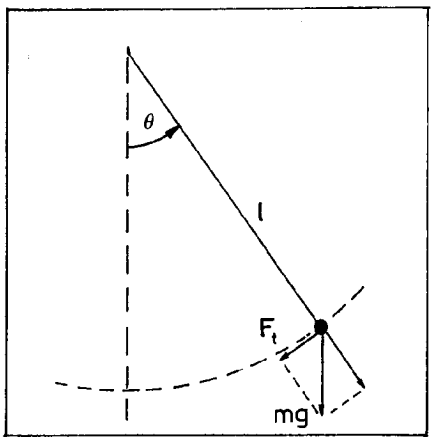
$$- k x = m \frac{d^2x}{dt^2} \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad .$$

Azken ekuazioa ikusita, zera ondorioztatzen dugu, alegia, partikulak oszilazio harmonikoak egingo dituela, berauen maiztasun angeluarra $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ delarik.

2. Adibidea: Pendulu sinplea.

Labur esanda, m masa duen partikula bat, zeina l luzerako hari batetik zintzilik dagoen, horixe da pendulu sinplea. Lehenengo adibidean bezala, oraingoan ere ez dugu marruskadurarik kontutan hartuko, eta hariaren masa arbuiatu egingo da.

Behin oreka-posiziotik aterata eta aske lagata, pendulua etengabeko tiki-taka hasten da, ondoko ekuazioen arauera (ikus bedi irudia):




$$\begin{cases} F_t = -\, mg \sin\theta = m\, a_t \\ a_t = l\, \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

Ekuazio bi hauetatik, beste hau gertatzen zaigu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \ .$$

Azkenez lortu duguna, pendulu sinplearen higidura-ekuazioa alegia, oszilazio harmonikoen ekuazio diferentzialaren tankera beretsukoa da, bere-berekoa ez bada ere. Dena den, angelu txikietarako betetzen den $\sin\theta \to \theta$ baliokidetza aplikatuz, aise konpon dezakegu ñabardura hori. Hara:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l} \sin\theta = 0 \\ \sin\theta \to \theta \end{array}\right\} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \ .$$

Eta hemendik zera ondorioztatzen dugu, hots, pendulu sin-

plearen oszilazioak, anplitude txikikoak direnean, ia-ia harmonikoak direla, beraien periodoa ondokoa delarik:

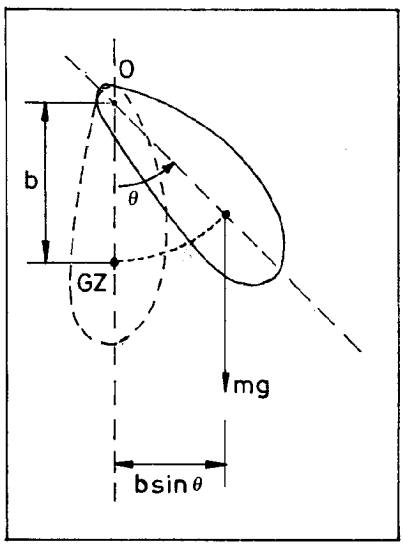
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ .$$

OHARRA : Higidura ikertzean, norabide tangentzialean eragiten duen $F_t$ indarra besterik ez dugu kontutan hartu, norabide normalean eragiten dutenek, hariaren tentsioak eta pisuaren osagai erradialak alegia, gure helburuetarako ezelako garrantzirik ez dutelako. Anplitude angeluarra txikia ez denean, periodoa honela gertatzen da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{2!}\sin^2\theta_o + \frac{1}{2!}\frac{3!}{4!}\sin^4\theta_o + \ldots\right),$$

non $\theta_o$ anplitude angeluarra den.

3. Adibidea: Pendulu fisikoa.




Demagun irudiko solidoa, zeina 0 ardatz finkotik esekita dagoen, beraren masa m, eta GZ grabitate-zentrutik bira-ardatzerako distantzia b direlarik. Solidoaren higidura aztertzean, aurreko adibideetan egin dugun legez, inongo marruskadurik ez dagoela suposatuko da.

9. gaian ikusi genuenez, gure solidoaren bira-higidura ondoko ekuazioaren arauerakoa da:

$$\tau = I\,\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \ .$$

Irudian erakutsitako posizioan, hauxe da 0 ardatzarekiko momentua:

$$\tau = -\,mg\,b\,\sin\theta \ .$$

Azken ekuazio biok bateratuz, beste hau ateratzen zaigu:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m\ g\ b}{I} \sin\theta = 0 \ .$$

2. adibidean gertatu zaigun era berean, pendulu fisikoaren higidura-ekuazioa ez da zehazki oszilazio harmonikoei dagokiena. Hala eta guztiz ere, pendulu sinplearen kasuan erabilitako ildo berberari jarraituz, anplitude txikiko oszilazioak ia-ia harmonikoak direla esan dezakegu. Hurbilketa hori onartuta, hona hemen pendulu fisikoaren higiduraren periodoa:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ g\ b}{I}} \ .$$

## 15.3. ENERGIA OSZILAZIO HARMONIKOETAN

Berriro ere eredu mekanikoaz baliatuko gara energiaren gorabeherak ikertzeko, lortuko ditugun emaitzak Fisikaren beste arlo askotara hedagarriak direla aldez aurretik jakineraziz. Beraz, $F = -kx$ indar elastikoaren eraginpean higitzen den partikula hartuko dugu aztergai.

15.2. ataleko 1. adibidean ikusi den legez, hauxe da oszilazioen maiztasun angeluarra:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

Geroxeago frogatuko dugunez, planteaturiko indar elastikoa kontserbakorra da eta, energia osoari gagozkiolarik, zati bitan banatuta kontsideratuko dugu, alegia, energia zinetikoa eta energia potentziala.

- Energia zinetikoa. Higidura harmonikoan abiaduraren eta posizioaren arteko erlazioan oinarriturik (15.2. atala), honela idatz dezakegu energia zinetikoa:

$$E_k = \frac{1}{2}\ m\ v^2 = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ (A^2 - x^2).$$

Bestaldetik, atal honetako hasieran $\omega$, k eta m magnitudeak lotzen dituen adierazpena gogoratu dugu; orain, adierazpen hori erabiliz, honela gertatzen zaigu energia zinetikoa:

$$E_k = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) .$$

- Energia potentziala. Indar kontserbakorrak aztertzean ( 7. kapitulua), ondoko erlaziora heldu ginen:

$$\vec{F} = - \nabla E_p .$$

Dimentsio bakarreko kasuan, aurreko erlazioak oso tankera sinplifikatua hartzen du; hauxe, hain zuzen ere:

$$F = - \frac{dE_p}{dx} .$$

Aurreko adierazpena planteatu dugun indarrari aplikatuz gero, hona hemen gertatzen zaigun energia potentzial elastikoa:

$$- \frac{dE_p}{dx} = - k x$$

$$dE_p = k x dx$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + k' .$$

Integraziotik sorturiko k' konstantea baztertzeko asmoz, zera onartuko dugu usadioari amore emanez, alegia, x = 0 denean energia potentziala ere nulua dela ($E_p = 0$). Beraz, energia potentzialaren adierazpena x elongazioaren edozein baloretarako, hauxe da:

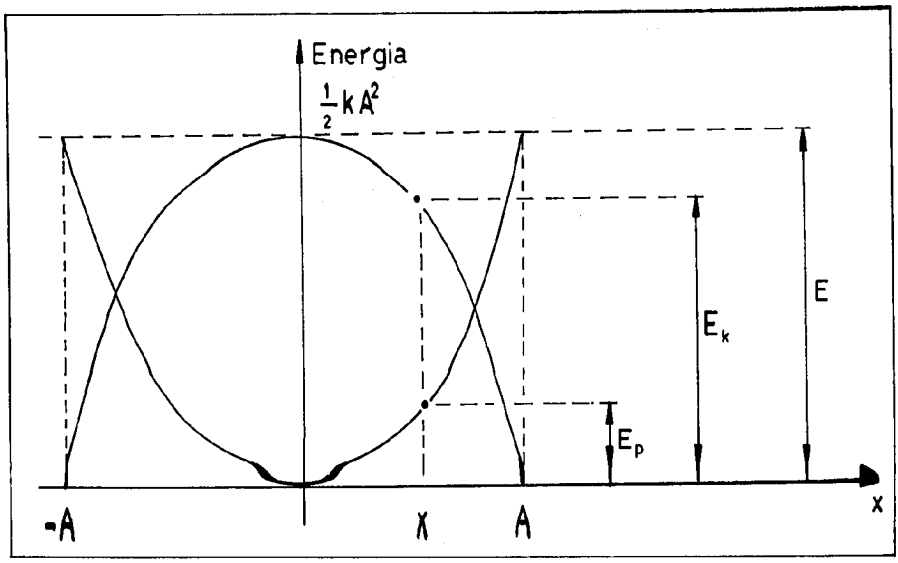
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 .$$

Azkenez higidura harmonikoari dagokion energia osoa, edo bibrazio-energia ere deitutakoa, lortzeko, berau osotzen duten zati biak, zinetikoa eta potentziala alegia, batu besterik ez dugu egin behar. Hara:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k (A^2-x^2) + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 = k^{te} .$$

Aurreko guztia laburbilduz, higidura harmonikoan, eta antzekoak diren beste fenomeno oszilakor askotan ere, energia osoa kontserbatu egiten da, energia zinetikoa eta potentziala etengabe aldatuz doazen bitartean.

Energiari eskainitako atalari bukaera emateko, ondoko iru-




dia aztertuko dugu, non energia zinetikoaren (goranzko parabola) eta potentzialaren (beheranzko parabola) bilakaera grafikoki ematen den, beraien baturak, hots, energia osoak, beti ere konstante irauten duelarik.

Ageri denez, oreka-posizioan ($x = 0$) energia osoa era zinetikoan dago, honela energia zinetikoa maximoa delarik, lehenago ikusi dugun legez, oreka-posizioan abiaduraren balorea absolutua maximoa da eta. Ibilbidearen muturretan ($x = \pm A$), berriz, energia zinetikoa anulatu egiten da, puntuotan partikula higikorra, bat batean bada ere, gelditu egiten bait da.

Energia potentzialari dagokionez, beraren bilakaera aztertzeko nahikoa da 7. gaian azaldutakoa hemengo kasu honi aplikatzea.

## 15.4. OSZILAZIO HARMONIKOEN KONPOSAKETA

Berriro ere eredu mekanikoari loturik, aldiberean oszilazio biren eraginpean ari den partikula baten higidura erresultantea arakatzeari ekingo diogu atal honetan, ondoko kasu berezietan finkatuko garelarik:

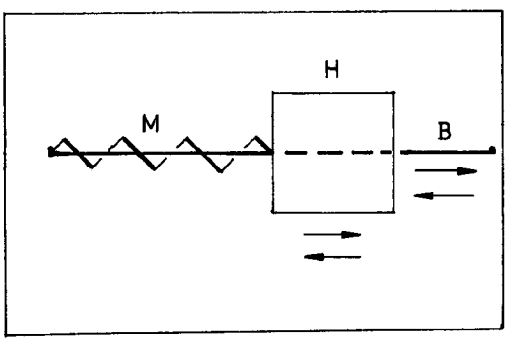
1. Norabide eta maiztasun bereko oszilazio biren konposaketa.

2. Norabide bereko baina maiztasun desberdineko oszilazio biren konposaketa.

3. Norabide perpendikularretan eta maiztasun berberarekin gertatzen diren oszilazio biren konposaketa.

Hiru kasuetan gainezarmenaren printzipioan oinarrituko gara higidura erresultantea lortzeko. Has gaitezen, ba, kasuok banan banan aztertzen.

1.-Pentsa dezagun irudiak erakusten digun muntaia darabilgula, non H higikaria, M malgukiak eraginik, B barrarekiko oszilatzen ari den. Aldiberean, B barra ere, kanpoko eraginen baten pean, oszilatzen ari da norabide horizontalean, aipatutako oszilazio biak maiztasun berekoak izanik.




Gure helburua zera da, hots, higidura erresultantea zein den erdiestea, sistematik kanpo dagoen edozein behatzailerekiko. Demagun oszilazioen adierazpen matematikoak ondoko hauek direla:

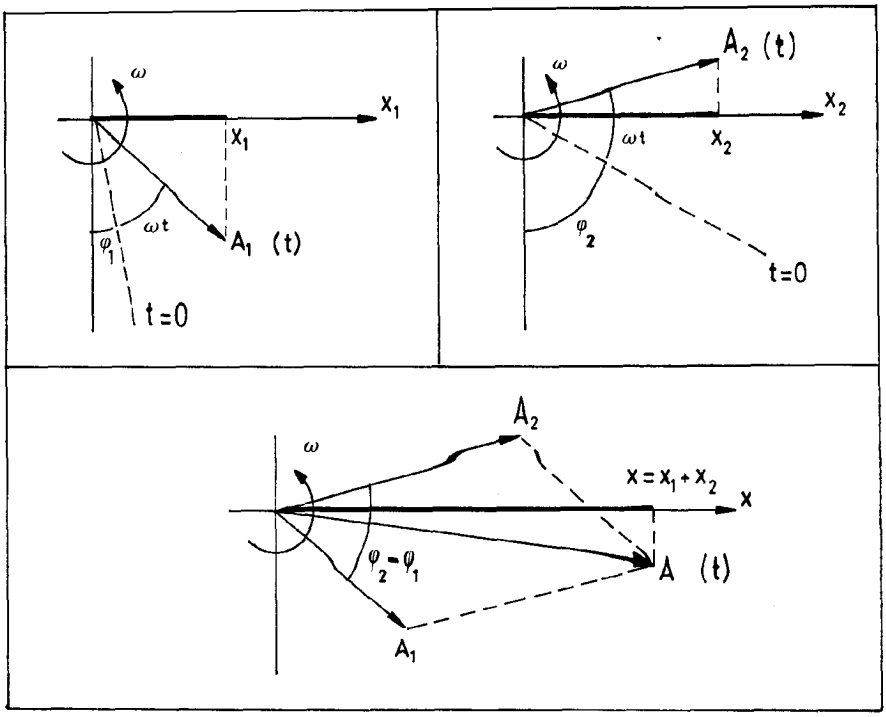
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Gainezarmenaren printzipioaren arauera, hauxe izango da bi

la ari garen higidura erresultantearen ekuazioa:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \ .$$

$x_1(t)$, $x_2(t)$ eta $x(t)$ adierazpenek emandako higidurak, honela irudikatzen dira, zein bere bektore biratzailearen eskemaren bitartez.




$x_1$ eta $x_2$ higidurak maiztasun berekoak direnez, $\vec{A}_1$ eta $\vec{A}_2$ bektoreek pausagunean diraute elkarrekiko, irudian biek osotutako paralelogramoa bloke bezala biraka ari delarik. Horrela paralelogramoaren diagonalak, $\vec{A}$ bektoreak alegia, higidura erresultantea adierazten digu. Beronen anplitudea, hots, $\vec{A}$ bektorearen modulua, eta $\varphi$ hasierako fasea kosinuaren teoremaren bidez erraz atera daitezke, emaitzak hauexek direlarik:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \operatorname{artg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_2 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \ .$$

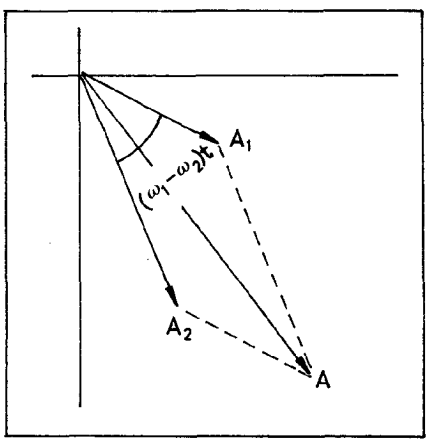
Azkenez zera ondoriozta dezakegu, alegia, norabide eta maiztasun bereko oszilazio harmoniko biren bilketaz, harmonikoa den beste oszilazio harmoniko bat sortzen dela, zeinaren maiztasuna lehenengo biei dagokien berbera den, anplitudea eta hasierako fasea goiko adierazpenetan emandakoak direlarik.

2.-Aurreko kasuan erakutsi dugun muntaiari berriro ere heldu z, kontsidera dezagun oraingo honetan, H higikariak B barrarekiko egiten dituen oszilazioen maiztasuna eta barraren higidurari dagokiona desberdinak direla, hau da, era matematikoaz adierazita:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \\ x_2 = A_2 \sin \omega_2 t \end{cases} .$$

Hemen $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ dela suposatu dugu, halako suposizioak emaitzari ez bait dio orokortasunik kentzen, bide batez kalkuluak nabarmenki errazten dituelarik.

Lehenengo kasuan urratutako arrazoibide berbera erabiliz, berriro ere bektore biratzailearen eskemaz baliatuko gara bigarren hau ebazteko, eta gainezarmenaren printzipioa aplikatuz, hauxe izango da higidura erresultantea:




$$x = x_1+x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t.$$

Kontutan hartu beharreko ñabardura garrantzizkoena zera da, hots, $x_1$ eta $x_2$ oszilazioen maiztasun desberdinak direla kausa, irudiko paralelogramoa ez dela bloke bezala biraka aritzen eta, beraz, $\vec{A}$ bektorearen modulua, higidura erresultantearen "anplitudea" nonbait, konstante iraun barik aldatzen doala aldiunez aldiune.

Kalkula dezagun, ba, sasianplitude horren balorea t edozein aldiunetan. Irudian ikus daitekeen legez:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \ .$$

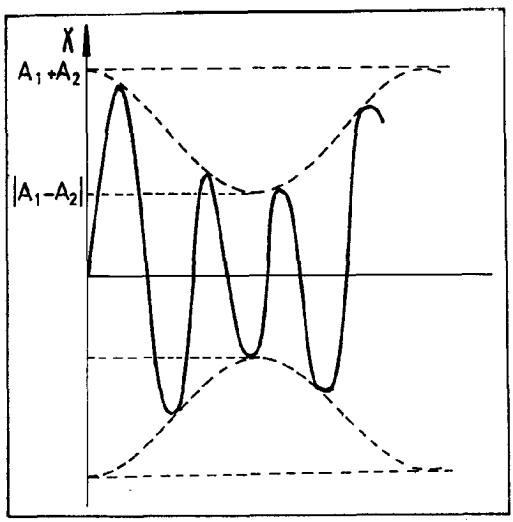
Kosinu funtzioaren baloreak (-1)-etik 1-era doan tartekoak direla gogoraeraziz, sasianplitudearen muga absolutuak hauxek izango dira:

$A_{max} = A_1+A_2 \longrightarrow \cos(\omega_1-\omega_2)t = 1$, edo $(\omega_1-\omega_2)t = 2n\pi$ denean;

$A_{min} = |A_1-A_2| \longrightarrow \cos(\omega_1-\omega_2)t = -1$, edo $(\omega_1-\omega_2)t = (2n+1)\pi$ denean.

Bestalde, A-ren aldaketen maiztasun angeluarra eta periodoa ondokoak ditugu:

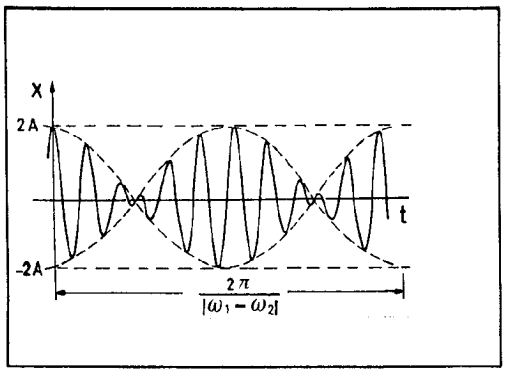
$$\omega_A = |\omega_1 - \omega_2| \ , \quad T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \ .$$




Alboko irudian x(t) grafikoa erakusten da, bide batez bertan A-ren bilakaera puntuka emanez. Anplitude aldakorrei, era honetakoei zein beste eratakoei ere, "anplitude modulatuak" deitu ohi zaie hizkera teknikoan.

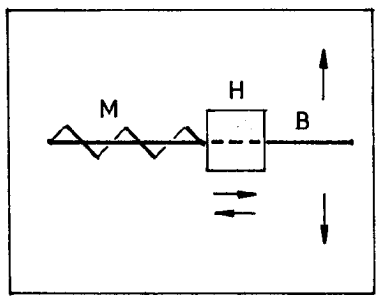
$x_1$ eta $x_2$ oszilazioak anplitude berekoak direnean, konposaketa aski sinplifikaturik gertatzen da matematikaren ikuspuntutik, ondoren ikus dezakegunez:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A \sin \omega_1 t \\ x_2 = A \sin \omega_2 t \end{array}\right\} x = x_1+x_2 = \left[2A \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)\right] \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) .$$




Emaitza honi dagokion grafikoa aldameneko irudian agertzen dena da, non, bistakoa denez, sasianplitudearen muga-balore absolutuak $A_{min} = 0$ eta $A_{max} = 2A$ diren.

3.- Azkenez, 1. eta 2. kasuetan ideiak finkatzeko asmatu dugun tramankulua, beste modu batez erabiliko dugu 3. kasu honetan. Beraz, higikaria barraren alde batetik bestera ari den bitartean, barrak berekiko norabide perpendikularrean ihardungo du oszilatzen, higidura bion maiztasuna berbera izanki. Hauen anplitudeak A eta B letren bidez adieraziko ditugu, norabideak bereizteko x eta y ardatzak erabiliz. Hona hemen, ba, oszilazio biak matematikoki idatzita:




$$x = A \sin \omega t$$

$$y = B \sin (\omega t + \delta) .$$

Argi dagoenez, lehenengo oszilazioari hasierako fase nulua egokitu zaio, jokabide honek eragiketak nabarmenki errazten dituela eta, bestaldetik, ondorioei ezelako orokortasunik kentzen ez dielako.

Has gaitezen goiko ekuazioetatik t denbora ebazten. Hara:

$$x = A \sin \omega t \rightarrow \sin \omega t = \frac{x}{A} \rightarrow \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} ,$$

$$y = B(\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta); \frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \delta + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \delta ,$$

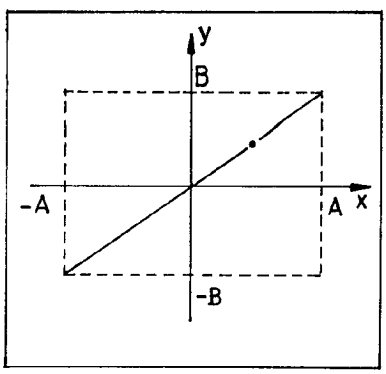
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2 \cos \delta}{AB} xy = \sin^2 \delta .$$

Hauxe da higikariaren ibilbidearen ekuazio kartesiarra, zeina elipse-tankerakoa den, hain zuzen ere. Hortik, era orokorrean zera esan dezakegu, alegia, maiztasun berarekin eta norabide perpendikularretan gertatzen diren oszilazio harmoniko bi konposatzean higidura eliptiko bat sortzen dela.

Ondoren, kasu berezi batzuren azterketa egingo dugu, $\delta$ angeluaren zenbait baloretarako.

- $\delta = 0$ . Oszilazioak elkarrekiko fasean, edo fase berekoak. Aurreko balorea emaitza orokorrera eramanda, hau honela geratzen zaigu:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2xy = 0 \longrightarrow y = \frac{B}{A}x .$$




Hitz gutxitan, elkarrekin fasean dauden oszilazio perpendikularren konposaketatik, beraien fase berekoa den beste oszilazio zuzena lortzen da.

$\delta = 0$ izan barik, $\delta = \pi$ balitz (fase-aurkako oszilazioak), ondorioak oraintsu atera ditugunen antzerakoak lirateke, ibilbidearen norabideari dagokionez salbu, zeina irudiko paralelogramoaren beste diagonalarena litzatekeen.

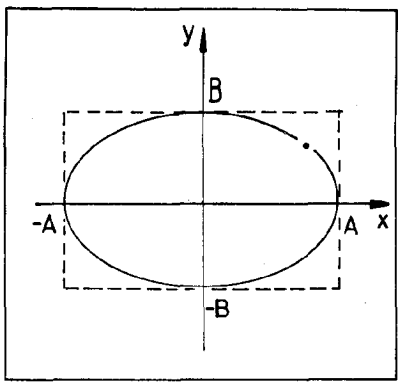
Edozein kasutan ere, higidura erresultantearen anplitudea $\sqrt{A^2+B^2}$ da, jatorritik higikarirako distantzia, t denbora-unetan, hauxe dugularik:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2}\ \sin \omega t .$$

- $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Kasu honetan ere, aurrekoan erabilitako jokabide berberari jarraituz, emaitza orokorrera eramango dugu $\delta = \frac{\pi}{2}$ balorea, ondokoa ateratzen zaigularik:

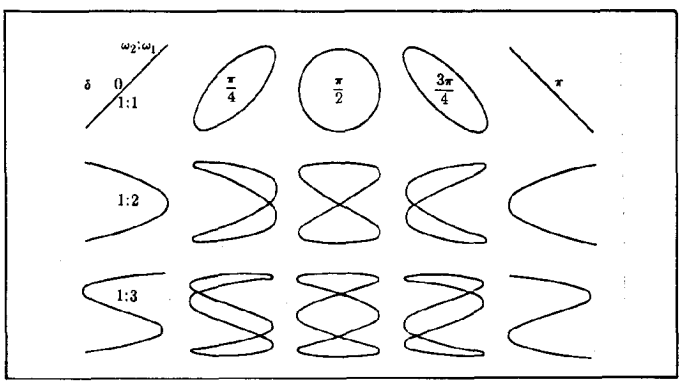
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 .$$

Ekuazio hau irudiko elipseari dagokio, zeina higikariak erlojuaren orratzen norantzan korritzen duen. Hasierako higiduren anplitudeak, hots, A eta B, balore berekoak suertatuz gero, elipsea zirkunferentzia bihurtzen da, aise uler daitekeen legez.




$\delta = \frac{3\pi}{2}$ balitz, ondorioak agertu zaizkigun bezalatsukoak lirateke, higiduraren norantza izan ezik, alderantzizkoa litzateke eta.

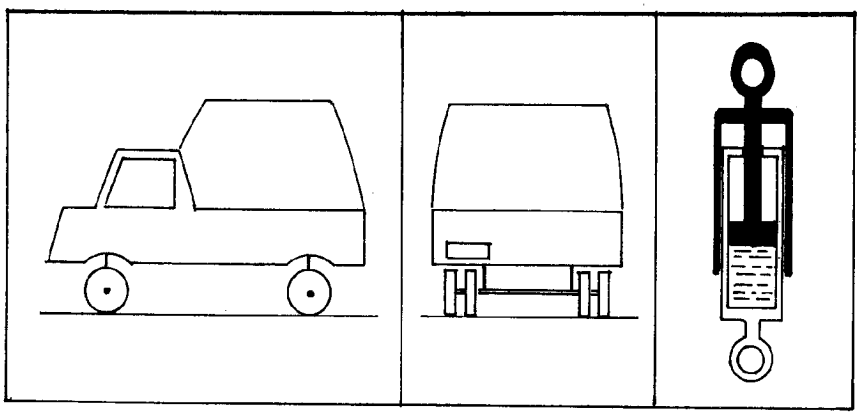
Azkenez, oszilazio perpendikularren konposaketari bukaera emanez, aipa dezagun, azaleko aipamena besterik ez bada ere, batu beharreko higidurak maiztasun berekoak ez direnean gertatzen dena. Horrelako kasuetan ibilbide erresultanteak eite askotakoak izan daitezke, beti ere harrigarri samarrak diren eitekoak egia esan, oro har Lissajous-en kurbak deitzen direnak, eta zenbait liburuk bitxikeria moduan agertzen dituztenak. Ohiturari jarraikiz, guk ere horietako kurba batzu eskeintzen ditugu, hasierako $\delta$ fase-diferentziaren zenbait baloretarako, maiztasunen arteko zatidura 1:1, 1:2 eta 1:3 izanik.




## 15.5. BILAKABIDE DISIPAKORRAK. OSZILADORE INDARGETUA

Orain arte oszilazio harmonikoak ikertzen aritu gara, prozesu-mota horiek zeharo teorikoak direla aldez aurretik adieraziz. Izan ere, 15.3. atalean oszilazio harmonikoen energia osoak

konstante dirauela ikusi dugu. Haatik, errealitatean besterik gertatzen da bibrazio-fenomenoetan, hots, zenbait bilakabide direla kausa, osziladoreak darabilen energia txikituz doa, eta honekin batera oszilazioen anplitudea. Adibide gisa, kotxeetako indargetzaileena ipin dezakegu. Jakina denez, txasis eta gurpilen ardatzen arteko lotura malguki bidez egiten da (kasu batzutan, malgukien ordez baleztak erabiltzen dira, gure arrazonamenduari berdintsu dio baina). Hori besterik erabiliko ez balitz, errepideko zulogune bakoitzetik pasatzean, kotxea etengabeko oszilaketan hasiko litzateke, gora eta behera, behera eta gora, egonkortasun-egoerari ezin eutsiz eta bidaiarien erosotasuna erabat hautsiz. Batere atsegina ez den efektu hori motel dadin, malgukiez gainera beste pieza batzu kokatzen dira txasis eta ardatzen artean, indargetzaileak hain zuzen ere. Indargetzailearen mutur bat txasisean ezartzen da, bestea ardatzari



tinkatzen zaiolarik. Txasisa ardatzarekiko goranzko eta beheranzko higidura erlatiboan hastean, indargetzaileak daukan enboloa biskositate handiko fluido baten barnean higitzera behartu rik aurkitzen da, fluidoak egiten dion erresistentzia dela medio oszilazioen energia galduz doalarik, bide batez higiduraren anplitudea gero eta txikiagoa gertatuz. Zer esanik ez, moteltze-prozesua laburragoa edota luzeagoa izan daiteke, erabilitako indargetzaile-motaren arauera. Hortaz, ba dira esekidura gogorreko ibilgailuak, Land-Rover direlakoak esaterako, eta beste lakoak, hala nola Citroën bi zalditakoak (2 cv).

Oszilazio indargetuen gaiari heltzeko, aipatu dugun adibi-

dea baino egokiagorik nekez topa genezake eta, berau abiapuntutzat harturik arituko gara. Izan ere, ibilgailuen esekidura-sisteman indar-mota bik dihardute: kontserbakorra bata, malgukiak sorturikoa; eta disipakorra bestea, indargetzaileen barneko marruskadurari zor zaiona. Lehenengoa, enboloaren bere oreka-posiziotiko x desplazamenduaren arauerakoa da; bigarrena, ostera, enboloaren fluidoarekiko v abiadura erlatiboaren arauerakoa. Hona hemen indar bakoitzari dagokion adierazpen matematikoa:

$$F_k = - k\ x \text{ (indar elastikoa; kontserbakorra)}$$

$$F_d = - \lambda\ v \text{ (marruskadura-indarra; disipakorra).}$$

Aurreko adierazpenetan, ibilgailuak bere esekidura-sisteman darabiltzan malguki guztien konstante elastikoak k koefizienteak batzen ditu nolabait, bestaldetik $\lambda$ koefizientea indargetzaileen barneko fluidoaren biskositatearen menpekoa delarik.

Masa oszilakorra, ibilgailuarena berarena alegia, m dela suposaturik, bibrazioei dagokien ekuazioa hauxe izango da:

$$F = F_k + F_d = m\ a$$

$$- k\ x - \lambda\ v = m\ \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$- k\ x - \lambda \frac{dx}{dt} = m\ \frac{d^2x}{dt^2}\ .$$

Bistakoa denez, ekuazio hau, zeinari "oszilazio indargetuen ekuazio diferentziala" deritzon, ez da oszilazio harmonikoei dagokiena (ikus bedi 15.2 atala). Bien arteko desberdintasuna $-\lambda \frac{dx}{dt}$ gaian datza, espero izatekoa zenez, bera bait da oszilazioak motelerazten dituena. Gai berri honen agerpenak dexente korapilatzen digu arazoa, matematikaren ikuspuntutik bestetik ez bada ere, eta, eragiketa matematikoak sakonki bilakatzea helburutzat ez dugun legez, emaitza fisikoak erakustera mugatuko gara.

Lehenbizi, emaitza fisikoen azalpena ahalik eta era labu-

rrenean gerta dakigun, lortu dugun ekuazioan aldaketa zenbait zertzea komeni zaigu. Hara:

$$\frac{\lambda}{m} = 2\gamma \qquad \text{eta} \qquad \frac{k}{m} = \omega_o^2 \quad ,$$

ipiniko dugu, ekuazioak honako itxura hau hartuko duelarik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0 \quad .$$

Aurrera jo baino lehen, diogun, ezen arestian sartu ditugun koefiziente berrietako bat, $\omega_o$ delakoa hain zuzen, koefiziente matematiko hutsa ez dela, esangura fisikoa ere ba du eta. Izan ere, 12.2. ataleko 1. adibidean ikusi genuenez, $\sqrt{\frac{k}{m}}$ balorea indargetzerik gabeko oszilazioen maiztasun angeluarra da, eta horrexegatik $\omega_o$ delakoari "osziladorearen oinarrizko maiztasun angeluarra" deitu ohi zaio.

Berriro ere hariari gagozkiolarik, tarteko eragiketa guztien gainetik jauzi eginda, nagusiak diren kasu biak aipatu eta kualitatiboki aztertuko ditugu, ondorio fisikoak zer nolakoak diren azaltzeko asmotan:

1.- $\gamma < \omega_o$ denean, ekuazio diferentzialaren emaitza honela gertatzen zaigu:

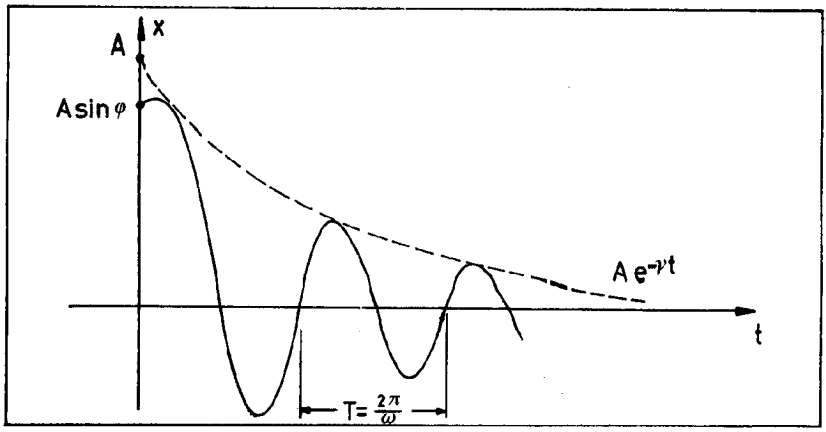
$$x = A\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ,$$

non A-ren eta $\varphi$-ren baloreak, hasierako baldintzen menpekoak diren. Bestaldetik, $\omega$-ren balorea ondokoa da:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \quad .$$

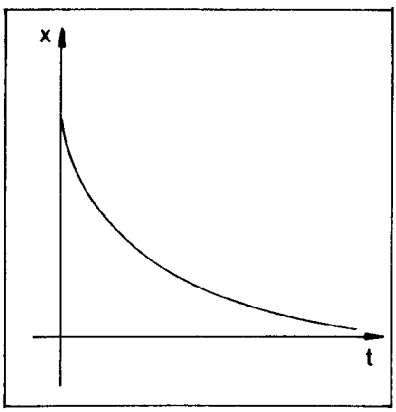
Alboko irudian kasu honi dagokion grafika erakusten da. Bertan nabarmen daitekeenez, oszilazioen sasianplitudea, konstante iraun barik, denboran zehar txikiagotuz doa (puntuka adierazitako kurba), txikiagotze hori indargetze-prozesuaren

ondorio zuzena delarik.




2.- $\gamma > \omega_o$ denean. Kasu honetan ez dugu ekuazio diferentzialaren emaitza idatziko, nahiz eta eduki ba daukan, noski, beraren grafikaren erakuspena aintzakotzat jotzen dugularik.

Agerian dagoenez, hemen oszilazioez mintzatzeak ere bere esangura galtzen du erabat, indar disipakorraren eragina hain bait da handia, ezen oszilazio soil bat ere burutzea galerazten duela. Beraz, behin osziladorea bere oreka-posiziotik desplazatu eta askatu ondoren, bertara abiatzen da, hortik bestalderantz sekula pasatu gabe. Kasu honen adibiderik ezagunena, zenbat bulegotako ateetan erabiltzen diren indargetzaileetan aurki dezakegu.




Atal honetan barrena ikusitakoaren laburpena:

- indargetze-prozesuak osziladorerari dagokion energiaren galera dakar, hots, higitzen diharduen bitartean osziladorea bere energia galduz doa, inguruneari emanez, horren ondorioz bibrazioaren anplitudea gero eta txikiagoa gertatzen delarik, higidura erabat amaitu arte.

## 15.6. OSZILAZIO BORTXATUAK. ERRESONANTZIA

Demagun, bibratzen ari den osziladore indargetu bati kanpoko indar batek eragiten diola. Izan bedi:

$$F_e = F_0 \cos \omega_e t$$

aipaturiko indar eragilearen adierazpena. Beraz, 15.5 ataleko $F_k$ indar kontserbakorraz eta $F_d$ indar disipakorraz gainera, $F_e$ indar eragilea lanean ari denean, hauxe da higiduraren ekuazioa:

$$F = F_k + F_d + F_e = m\,a$$

$$-k\,x - \lambda\,v + F_0 \cos \omega_e t = m\,a \quad .$$

Aurreko atalean sartutako $\gamma$ eta $\omega_0$ koefizienteak berriro erabiliz, eta urrats matematiko sinple batzu emanez, ekuazioa era honetara geratzen zaigu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_e t \ .$$

Ekuazio honi "oszilazio bortxatuen ekuazio diferentziala" deritzo. Beraren ebazpena luzeegia denez gero, beste barik emaitza idatzi eta aztertu egingo dugu.

Emaitza orokorra osotzen duten gaiak, honako hauek dira:

a) Egoera iragankorrari dagokiona, zeina oszilazio indargetuetan azaldu dugunaren antzerakoa den. Hasikeran, bibrazioaren lehenengo aldiuneetan batik bat, gai honek bere garrantzia badu ere, laster bihurtzen da arbuiagarri, ondoren aipatuko dugun bigarren gaiarekin alderaturik. Hortik datorkio "iragankor" izena eta horrexegatik guk hemen ez dugu kontutan hartuko.

b) Egoera iraunkorrari dagokiona. Izenak berak dioskun legez, hauxe da iraun egiten duen gaia eta, beraz, beronen azterketari ekingo diogu. Hona hemen, ba, emaitza orokorraren gai iraunkorra, oszilazio bortxatuak sorte-

razten dituena, alegia:

$$x = A \sin (\omega_e t - \varphi) .$$

Ikusten denez, oszilazio bortxatuen maiztasun angeluarra indar eragilearen berbera da. A anplitudea eta $\varphi$ hasierako fasea dagokienez, bilakatuko ez ditugun eragiketa astun batzu burutu ondoren, hauexek dira ateratzen diren baloreak:

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{artg} \frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{2\gamma\omega_e} .$$

Aurreko guztia ikusirik, orain ba gaude prestik oszilazio bortxatuen mamiari heltzeko. Has gaitezen, ba, osziladorearen abiadura erdiesten. Hara:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{F_o\omega_e}{m}}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \cos(\omega_e t - \varphi) = v_m \cos(\omega_e t - \varphi)$$

Aurreko adierazpena laburtzeko asmotan, abiaduraren anplitudea $v_m$ deitu dugu, beronek hainbeste parametroren menpekotasuna erakusten duelarik, hara nola: $F_o$, $\omega_e$, m ... parametroena. Bereziki interesgarria da, menpekotasun guzti horien artean, $\omega_e$ maiztasun angeluarrarekikoa, eta bera aztertzen ihardungo dugu hurrengo lerrokadetan.

Lehenengo eta behin $v_m = f(\omega_e)$ funtzioaren grafika lortzen arituko gara. Beraz, $v_m$-ren adierazpenetik erraz atera daitekeenez:

$$\omega_e \to 0 \quad \text{doanean,} \quad v_m \simeq \omega_e \frac{F}{m\,\omega_o^2} \quad \text{da.}$$

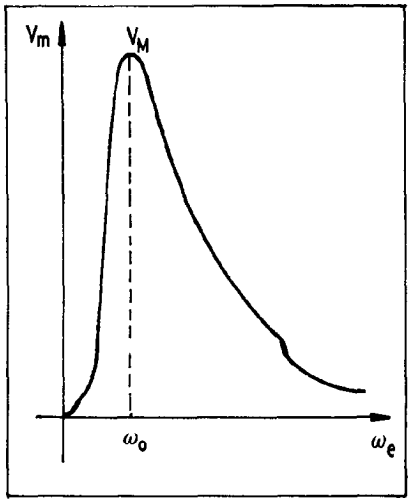
Hitz gutxitan, $\omega_e = 0$ denean, $v_m = 0$ da; eta $\omega_e$-ren balore txikietarako, $v_m$ eta $\omega_e$ lotzen dituen erlazioa lineala da, lehen

biziko hurbilketan behintzat.

Bestaldetik, ondoko hau ere argi ikusten da:

$$\omega_e \rightarrow \infty \quad \text{doanean,} \quad v_m \rightarrow 0 \quad \text{doa .}$$

Azkenez, $v_m$-ren balore maximoa ateratzeko, beraren deribatua $\omega_e$-rekiko egin beharko genuke. Ez dugu, ordea, halakorik egingo, luzeegi joko luke eta, berriro ere emaitza zuzenki ematera mugatuko garelarik. Alboko irudian ageri denez, abiaduraren anplitudearen balore maximoa ($v_M$) $\omega_e = \omega_o$ denean gertatzen da.




Ebazpide matematiko laburrari eskainitako azpiatal hau bukatzeko, diogun, ezen $\omega_e = \omega_o$ denean, $\varphi = 0$ dela ( ikus bedi lehenago emandako $\varphi$-ren adierazpena).

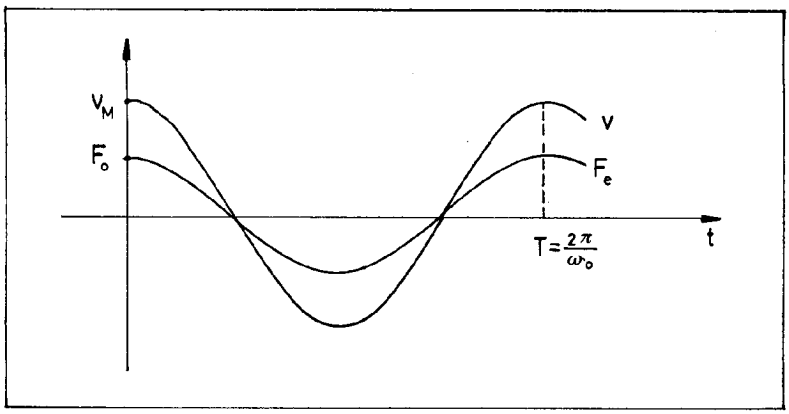
Orain, eman diezaiegun ateratako emaitza matematikoei beren esangura fisikoa. Hara:

- abiaduraren anplitudea maximoa denean, osziladorearen energia zinetikoa ere maximoa da;

- egoera hori suerta dadin, indar eragilearen maiztasunak osziladorearen oinarrizko maiztasunaren balore berbera behar du ($\omega_e = \omega_o$), eta orduan osziladorearen abiadura eta indar eragilea fasean ari dira ($\varphi = 0$).

Beste era batera esanda, baldintza horiek gertatuz gero, alegia $\omega_e = \omega_o$ eta, beraz, $\varphi = 0$ direnean, kanpoko iturri eragiletik osziladorerako energi igorpena ezin hobea da. Hori dela eta aipatutako baldintzak betetzen direnean "energi erresonantzia" dagoela esaten da.

Ondoko irudian, osziladorearen abiaduraren eta indar eragilearen bilakaera erakusten da, energi erresonantziaren kasuan. Bertan ikus daitekeenez, bata maximoa denean, bestea ere bai; bata anulatzen deneko unean, bestea ere anulatu egiten da; batak norantzaz aldatzean, besteak ere aldatu egiten du; etab. Hitz batez, zeharo fasean ari dira denboran zehar.




Gogotik ahaleginduko bagina ere, nekez lortuko genuke, erresonantziaren fenomenoari eman diogun gainbegirada honetan, beraren garrantzia behar den moduan azpimarratzea. Izan ere, teknikaren arloan, eraikuntzan konkretuki, nahiz zientziaren arloan, Fisika atomikoan batik bat, ugari jazotzen dira era bateko edo besteko erresonantziak. Dena den, esandako eremuak darabilgun mailatik at gelditzen direnez, diogun liburu honetan bertan erresonantziaren adibide ezagunenetako bat ikertzeko aukera izango dugula, korronte alternoari eskeinitako gaian hain zuzen ere.

## 15.7. OSZILADOREAREN INPEDANTZIA

Aurreko lerroetan aipaturiko korronte alternoaren gaian ikusiko dugun legez, korronte alternoa daroaten zirkuitoak aztertzean, magnitude berri batzu erabili beharko ditugu eta, berauek Elektrizitatean soil-soilik ez ezik, baizik eta Fisikaren beste zenbait arlotan ere lagungarri gerta daitezkeela kontutan izanik, oraingo atal honetan haien lehenbiziko azalpena egingo dugu.

Magnitudeon sorrera zirkuitu elektrikoen teoriari irmoki estekaturik dagoenez, egokitu zaizkien izenei elektrizitate-kutsua darie argi eta garbi; halarik ere, esan bezala, korronte alternoaren esparruaz gainera, beste zenbaitetan ere haietaz baliatzeko aukera egon ba dago.

Aurkeztu nahi ditugun magnitudeen nondik norakoa hobeki uler dadin, 15.6. atalean atera dugun oziladore bortxatuaren abiaduraren anplitudea berrartuko dugu. Hona hemen:

$$v_m = \frac{\dfrac{F_o\,\omega_e}{m}}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_o^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\omega_e^2}} \; .$$

Orain, 15.5. atalean egindako ordezketak desegitea komeni zaigu, goiko azalpenari beste itxura bat emateari ren. Hara:

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \quad \text{eta} \quad \frac{k}{m} = \omega_o^2 \; ,$$

beraz:

$$v_m = \frac{\dfrac{F_o\,\omega_e}{m}}{\sqrt{(\omega_e^2 - \frac{k}{m})^2 + (\frac{\lambda}{m})^2\omega_e^2}} = \frac{F_o}{\sqrt{(m\,\omega_e - \frac{k}{\omega_e})^2 + \lambda^2}}$$

Adierazpen honetatik abiatuta, zorioneko magnitude berriak definitzen hasiko gara:

- erreaktantzia: $X = m\,\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e}$ ;

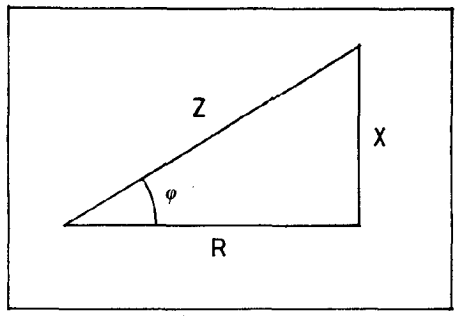
- erresistentzia: $R = \lambda$ ;

- inpedantzia: $Z = \sqrt{(m\,\omega_e - \dfrac{k}{\omega_e})^2 + \lambda^2} = \sqrt{X^2 + R^2}$ .

Esan beharrik ez dago, X, R eta Z magnitudeok lotzen dituen erlazioa, ondoko triangelu zuzenaren bitartez irudika daitekeela. Areago, triangeluan markatutako angelua, 15.6. atalean agertzen

den $\varphi$ angelu berbera dela aise froga dezakegu honela:

$$\varphi = \text{artg}\,\frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{2\gamma\,\omega_e} = \text{artg}\,\frac{\omega_e^2 - \frac{k}{m}}{\frac{\lambda}{m}\,\omega_e} = \text{artg}\,\frac{m\,\omega_e - \frac{k}{\omega_e}}{\lambda} = \text{artg}\,\frac{X}{R}\,.$$




Ondorioz, goiko triangeluan, zeinari "inpedantzien triangelua" deitu ohi zaion, R-k eta Z-k osotzen duten angeluak, indar eragilearen eta oziladorearen abiaduraren arteko desfasea adierazten du. Bukatzeko, $\varphi$ angelu honek har ditzakeen baloreez zenbait kontsiderazio:

- $\varphi > 0$ denean. Kasu honetan $X > 0$ da (edo $m\,\omega_e > \frac{k}{\omega_e}$), eta v atzeraturik doa $F_e$-rekiko bektore biratzaileen eskeman.

- $\varphi < 0$ denean. Kasu honetan $X < 0$ da (edo $m\,\omega_e < \frac{k}{\omega_e}$), eta v aurreraturik doa $F_e$-rekiko.

- $\varphi = 0$ denean. Kasu honetan $X = 0$ (edo $m\,\omega_e = \frac{k}{\omega_e}$), v eta $F_e$ fase berean doazelarik. Hauxe da, hain zuzen ere, 15.6. atalean aztertu dugun energi erresonantziaren fenomenoan betetzen den baldintza.

# 16. GAIA: UHINAK

16.1. Uhinen adierazpen matematikoa

16.2. Uhin unidimentsional harmonikoa

16.3. Uhin-motak

16.4. Zenbait adibide

16.4.1. Luzetarako uhin elastikoak hagaska batetan barrena

16.4.2. Zeharkako uhinak soka batetan zehar

16.5. Momentu linealaren eta energiaren hedapena uhinen kasuan

Fisikaren oinarrian dauden bi kontzeptu, partikularena eta uhinarena dira. Partikulatzat materia-kantitate txikia hartzen dugu eta, orain arte egin dugun bezala, ba dakigu beraren higidura aztertzen. Uhina zerbait desberdina da. Uhin-kontzeptua olatuen higidurarekin lotù ohi dugu eta, izatez, olatuek uhin--fenomenoak zer diren adierazten digute.

Uhin hitzarekin, toki batetan sorturiko perturbazioa inguruko puntuetan hedatzean gertatzen den fenomeno fisikoa adierazi nahi dugu. Eta uhin-kontzeptuaren barnean lehenengo begiradan oso desberdintzat hartzen diren gertakariak biltzen dira, hala nola, itsasoko olatuak, soinua edo eta uhin elektromagnetikoak. Uhinei esker, azken batez, seinaleak bidal daitezke puntu batetik bestera, nolabait esateko materia bera bidali gabe. Erraz ulertzekoa da, beraz, uhinen azterketak duen garrantzia.

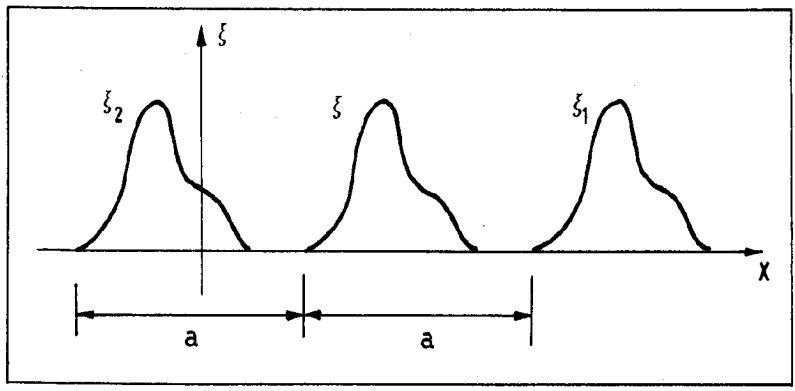
Gai honetan uhinen adierazpen orokorraz arituko gara, zer diren definituz, matematikoki nola adieraz daitezkeen ikusiz eta zenbait adibide aztertuz. Dena den, uhinen propietate orokorren azterketa hurrengo gaian egingo dugu, eta uhin elektromagnetikoak eremu elektromagnetikoa aztertu ondorako utziko ditugu.

## 16.1. UHINEN ADIERAZPEN MATEMATIKOA

Lehenik eta behin, uhina zertan datzan azalduko dugu. Hara. Espazioko puntu batetan, gertaera fisiko baten kausaz magnitude fisiko baten perturbazioa jazotzen da; ondoren perturbazio hori inguruko puntuetara hedatzen da espazioan zehar, eta puntu horietan magnitude fisiko berberaren perturbazioa gertatzen da. Horrelako kasuetan uhin-fenomeno baten aurrean gaudela esaten da. Beraz, bi faktore nagusik definitzen dituzte uhinak, magnitude fisiko batek puntu batetan duen aldakuntzak eta alda-

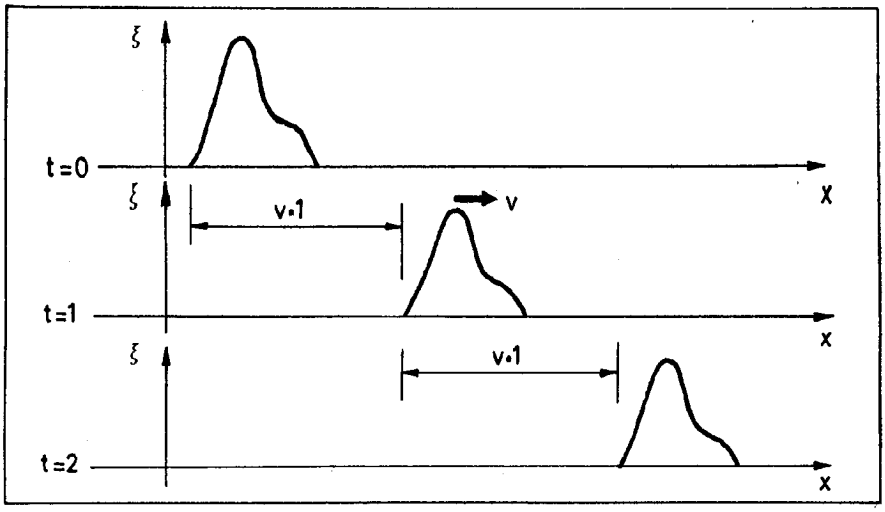
kuntza horren hedapenak. Ikus dezagun, ba, nola adieraz dezakegun hori matematikoki:

Demagun $\xi = f(x)$ funtzioa, non f delakoa edozein funtzio den. Hurrengo irudian, horrelako $\xi = f(x)$ funtzio batekin batera, $\xi_1 = f(x-a)$ eta $\xi_2 = f(x+a)$ funtzioak adierazi ditugu.




Argi ikusten denez, $\xi_1 = f(x-a)$ funtzioak $\xi$-ren eite berbera du, baina a distantziaz desplazaturik dago eskuin alderantz. Bestalde, $\xi_2 = f(x+a)$ funtzioak ere $\xi$-ren eite berbera du, baina ezker alderantz desplazaturik dago, hau ere a distantziaz.

Funtzio desplazatuen eraiketa horretan finkaturik, $a = vt$ eginez, $\xi = f(x-vt)$ alegia, denborarekin eskuin alderantz desplazatzen den funtzio bat lortuko da. Hain zuzen, hurrengo hiru irudietan funtzio horrek hiru aldiune desberdinetan duen eitea eta kokapena adierazten da. Bertan ikus daitezkeenez, desplazamenduaren —hau da, hedapenaren— abiadura, v da.




Orain hasieran emandako definiziora itzuliz,

$$\xi(x,t) = f(x-vt)$$

funtzioak, eite berbera gorderik eskuin alderantz v abiaduraz hedatzen den uhin baten adierazpen matematikoa dela ikusten dugu. Prezeski, v delakoari hedatze-abiadura edo fase-abiadura deritzo. Bestalde, uhin hori distortsiorik gabe —hots, beti eite berberaz— eta norantza bakarrean hedatzen dela azpimarratu behar da. Modu berean eginez, honela adieraziko da ezkerrerantz hedatzen den uhina:

$$\xi(x,t) = f(x+vt) \ .$$

Ohar gisa diogun, ezen dimentsio bakarreko uhinak aztertzen ari garela, orokorpena geroago etorriko delarik.

Dena den, orain arte uhinaren adierazpen zuzenaz ihardun dugu, baina ez dugu galdetu ea matematikoki nondik datorren ebazpen hori edo, bestela esanda, uhin-fenomenoa zer ekuazio diferentzialen ebazpena den. Besterik gabe, uhin unidimentsionalari dagokion ekuazio diferentziala idatziko dugu, ondoren lehentxoago emaniko funtzioek ekuazio hori betetzen dutenentz aztertuz.

Uhinak deskribatzen dituen ekuazioa, ondokoa da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ,$$

bertan v delakoa fase-abiadura delarik. Ekuazio honek berdin balio du +x zein -x norantzarekin hedatzen diren uhinetarako.

Ekuazio horren ebazpen orokorra hauxe da:

$$\xi(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt).$$

Izatez, ebazpen honetan bi uhin agertzen dira, bakoitza norantza batean hedatzen delarik. Kasu konkretu batzutan uhin batekin nahikoa izango da eta beste batzutan —isladapenaren edo uhin gerakorren kasuan, adibidez— biak erabili beharko ditugu.

Ikus dezagun, ebazpen horrek goiko ekuazioa betetzen duela. Ondoko aldagaiak erabiliz,

$$u_1 = x-vt \qquad \text{eta} \qquad u_2 = x+vt,$$

era honetara idatz ditzakegu deribatuak:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial u_2^2} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = -v\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} + v\dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} + v^2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial u_2^2} \end{array} \right.$$

eta, ikusten denez, ebazpen horrek ongi betetzen du uhinen ekuazio diferentziala.

## 16.2. UHIN UNIDIMENTSIONAL HARMONIKOA.

Orain arte esanikoan, uhina adierazteko erabili dugun f delakoa edozein funtzio izan da. Hemen, adibide gisa, kasu berezi bat aztertuko dugu: uhin sinusoidal edo harmonikoaren kasua. Bestalde, kasu hau oinarrizkoena da, zeren eta, uhin-funtzioaren Fourier-en analisia eginez, edozein uhin periodiko

uhin harmonikoen batuketa erara ipin bait daiteke.

Uhin harmonikoaren adierazpen matematikoa hauxe da:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x-vt)$$

non k, uhin zenbakia deritzon konstantea den.

Azter ditzagun beronen bereizitasunak. Sinu funtzioa periodikoa izanik, eta emandako uhina espazio eta denboraren funtzioa denez, uhinak bi eratako periodikotasunak ditu: espaziala eta denborala.

- Periodikotasun espaziala. Demagun t aldiunea eta bila ditzagun aldiune horretan perturbazio-egoera berean dauden bi puntu, sinu funtzioa angelua $2\pi$ handitzean errepikatu egiten dela kontutan hartuz:

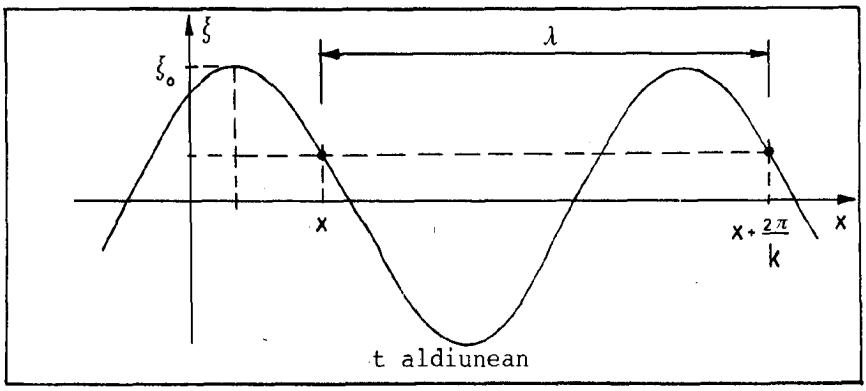
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x-vt) = \xi_0 \sin [k(x-vt) + 2\pi] =$$

$$= \xi_0 \sin k[(x+\frac{2\pi}{k})-vt] = \xi\ (x + \frac{2\pi}{k}, t) .$$

Beraz, aldiune batetan perturbazioa modu berean ageri da x eta $x + \frac{2\pi}{k}$ puntuetan edo, bestela esanda, egoera fisikoa errepikatu egiten da espazioan, $\frac{2\pi}{k}$ luzera bakoitzeko. Uhin harmonikoak periodikotasun espaziala duela esaten da eta periodo espazialari uhin-luzera deritzo, $\lambda$ ikurraz adierazten delarik,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} .$$

Hain zuen ere, hurrengo irudian t aldiunean uhinaren adierazpide grafikoa dago, uhin-luzeraren esangura agertuz.




- Periodikotasun denborala. Kontsidera dezagun, bestetik, espazioko x puntua, eta bila ditzagun puntu horretan perturbazio-egoera bereko bi aldiune:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x-vt) = \xi_0 \sin[k(x-vt) + 2\pi] =$$

$$= \xi_0 \sin k\left[x-v\left(t-\frac{2\pi}{kv}\right)\right] = \xi\left(x,t-\frac{2\pi}{kv}\right) .$$

Honelatan, ba, x puntuan perturbazioa modu berean ageri da t eta $t-\frac{2\pi}{kv}$ aldiuneetan, hots, egoera fisikoa errepikatu egiten da $\frac{2\pi}{kv}$ denbora-tarte bakoitzeko. Uhinak periodikotasun denborala duela esaten da eta $\frac{2\pi}{kv}$ tarteari periodoa deritzo eta P ikurraz adierazten da. Periodoaren inbertsua aldakuntzaren edo uhinaren maiztasuna da, λ letraz adierazten delarik:

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{kv}{2\pi} .$$

Azken magnitude honekin batera, maiztasun angeluarra definitzen da

$$\omega = 2\pi\nu = kv .$$

Bi periodikotasunak erlazionaturik daude fase-abiadurarekin

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ P &= \frac{2\pi}{kv} \end{aligned}\right| \qquad v = \frac{\lambda}{P} ,$$

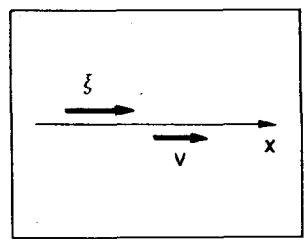
edo beste modu batetara esateko, periodo batetan fase-abiadura dela eta, uhina uhin-luzera batez hedatzen da.

## 16.3. UHIN-MOTAK

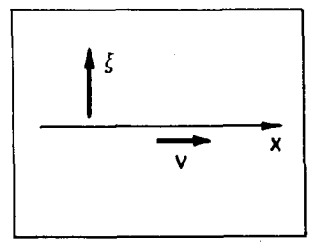
Aurreko puntuetan uhinen adierazpen matematiko orokorra egin dugu, baina ez gara aritu uhinen sailkapena egiten. Horixe da, hain zuzen, orain egingo duguna.

Sailkapen desberdinak egin ditzakegu, sailkatzeko erabiltzen dugun erizpidearen arauera. Lehenengo sailkapena perturbazioa pairatzen duen magnitudeari begira egin daiteke, hots, magnitude hori eskalarra denean ( airearen presioa, uraren dentsitatea, etab.), uhin eskalarra dela diogu; ordea, magnitudea mota bektorialekoa denean (indarra, eremu elektrikoa, etab.), uhin bektoriala dela diogu. Uhin bektorialei gagozkielarik, hainbat kasu aipa ditzakegu, hala nola:

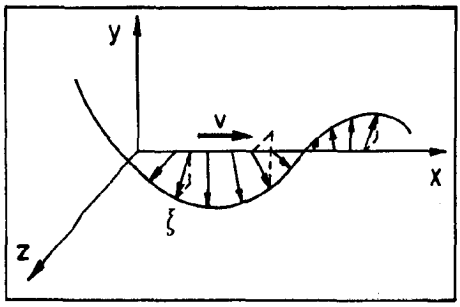
- Luzetarako uhinak. Kasu honetan bektore aldakorraren norabidea eta hedapenarena berberak dira, hau da, $\xi$ magnitude perturbatua eta v abiadura norabidekideak dira. Esate baterako, gorputz solidoetan hedatzen diren uhin elastikoetan sortutako konpresio eta expantsio-indarren kasua mota honetakoa da.



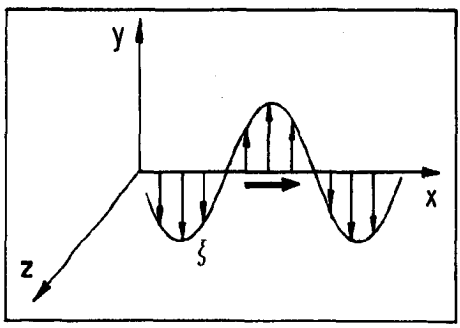

- Zeharkako uhinak. Kasu honetan perturbazioaren norabidea eta hedapenarena elkarren perpendikularrak dira. Adibidez, soka batetako zeharkako uhinak ditugu; halaber itsasoko gainazaleko olatuak eta uhin elektromagnetikoak ere zeharkako uhinak dira.



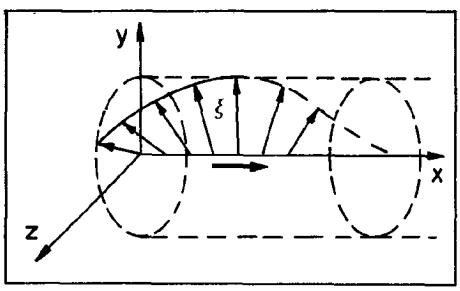

Zeharkako uhinaren kasuan polarizazioa gerta daiteke. Uhinen polarizazioaren funtsa hurrengo irudien bidez azalduko dugu.




Perturbazioa pairatzen duen ξ magnitudea x ardatzaren inguruko edozein norabideetan jazotzen denean, uhina polarizatu gabe dagoela esaten da.




Magnitude perturbatua beti plano eta norabide berean gertatzen denean, uhina linealki polarizaturik dagoela esaten da.




ξ magnitude perturbatuak modulu konstantea badu, baina norabidez aldatuz badoa, zirkularki polarizaturik dagoela esaten da.

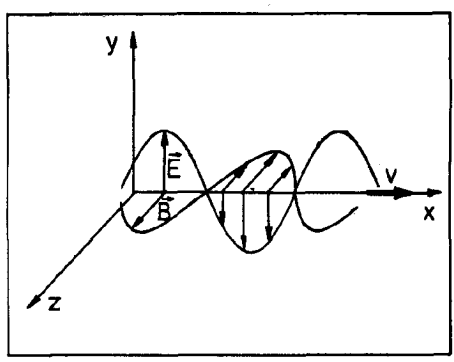
Bestelako sailkapenik ere egin daiteke, beren hedapenerako ingurune materialik behar dutenentz kontutan hartuz. Erizpide honen arauera, bi eratako uhinak daude:

- Uhin mekanikoak. Ingurune materiala behar dute hedatzeko. Uhin elastikoak eta presiozkoak ditugu sail honetakoak. Perturbazioa espazioko puntu batetan gertatzen da eta materiaren barneko loturaren bidez (elastikotasuna, presioa...) alboko puntuetara hedatzen da. Zer esanik ez, honelako uhinak ez dira hutsean hedatzen. Uhin mekanikoen artean, soinua, solidoetako uhin elastikoak, uretako olatuak eta beste ditugu. Uhin mekanikoen ulerpena intuitiboa izanik, mende honen hasierararte uhin guztiek horrelakoak izan behar zutela uste zen, argia eta uhin elektromagnetikoak barne, eta horregatik argia hedatzen zeneko ustezko ingurunearen bila aritu ziren fisikariak, eterearen bi-

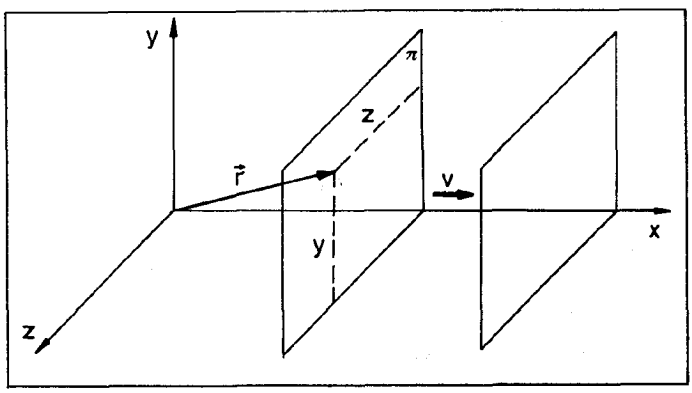
la hai zuzen. Geroago uste hori okerra zela ikusi zen eta uhin elektromagnetikoek ingurune materialaren premiarik ez zutela.

- Uhin elektromagnetikoak

Hauek hutsean hedatzen dira, argiaren abiaduraz. Beraz ez dute etere edo bestelako inguruneren beharrik. Izatez bi plano perpendikularretan gertatzen diren eremu elektriko eta magnetikoaren aldakuntzak dira. Uhin elektromagnetikoak 24 . gaian aztertuko ditugu.




Orain arte aztertu dugun $\xi = f\ (x-vt)$ funtzioak, +x norabidean hedatzen den uhin bat adierazten digu; hala ere, ez dugu zertan pentsatu behar, uhin hori x ardatzean baino ez dagoenik.

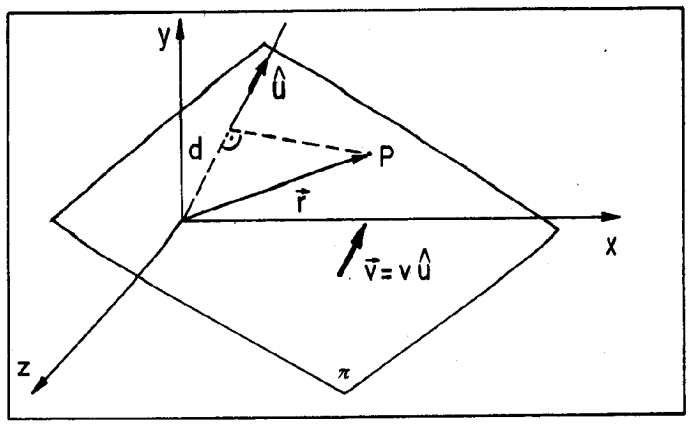



Demagun $\xi$ funtzioa (eta beronek adierazten duen perturbazioa) espazio osoko puntuetan gertatzen dela, eta t aldiunean x koordenatu bereko puntuetan (hots, $\pi$ planoko puntuetan) $\xi$ funtzioak balio berbera duela. Puntu horiek guztiok uhin-fronte berekoak dira. Orohar, uhin-fronteak fase berberaz oszilatzen duten (edo perturbaturik dauden) puntuen leku geometrikoak dira. Kasu honetan, noski, uhin-fronteak x ardatzaren plano perpendikularrak dira.

Esandakoa kontutan harturik, hiru dimentsiotan interpretaturik, $\xi = f\ (x-vt)$ funtzioak x ardatzaren norabidean v abiaduraz hedatzen den uhin laun bat adierazten du. Eta $x = \vec{r}.\hat{i}$ denez, $\hat{i}$ hedapenaren norabidea izanik:

$$\xi = f\ (\vec{r}.\hat{i}-vt) \quad .$$

Arrazoibide berbera erabiliz, $\hat{u}$ norabidez hedatzen den hiru dimentsiotako uhin launaren ekuazioa jarriko dugu.



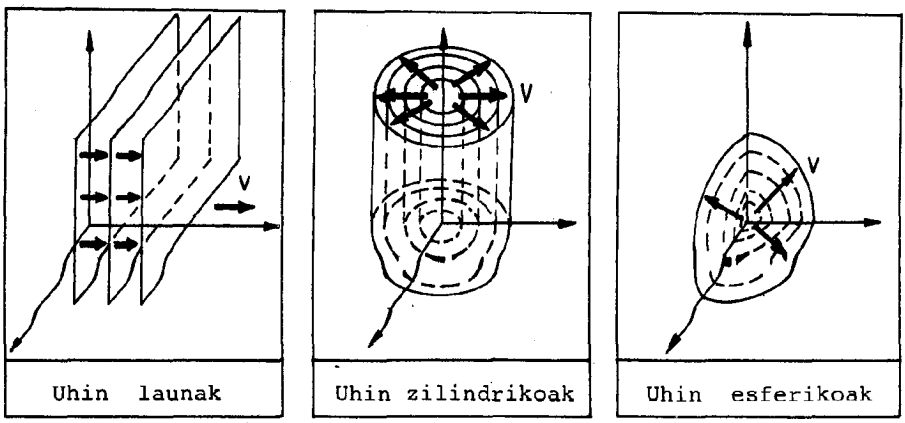

Jatorritik P puntutik iragaten den uhin-fronte launerainoko distantzia d izanik,

$$d = \vec{r}.\hat{u} \quad ,$$

uhinaren adierazpen matematikoa ondoko hau izango da:

$$\xi = f\ (\vec{r}.\hat{u}-vt)\ .$$

Dena den, hiru dimentsiotako uhinen kasuan uhin-fronteek planoaz bestelako forma geometrikorik ere har dezakete eta kasu orokorrean edozein itxuratakoak izan daitezke. Hurrengo irudietan horrelako hiru kasu ageri dira.




Ohar gisa diogun ezen, uhinak iturritik urrun daudenean eta aztertutako uhin-frontearen zatiaren dimentsioak bertatik iturrirako distantziarekin alderaturik arbuiagarriak direnean, kalkuluetarako lehenengo hurbilketan uhin zilindrikoak eta esferikoak launtzat har daitezkeela, sarri horrela egiten delarik.

Bukatzeko, hiru dimentsiotako uhinei dagokien ekuazioa emango dugu:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = v^2 \Delta \xi \ .$$

Ikusten denez, dimentsio bakarrekoaren orokorpena da. $\Delta\xi$ edo $\nabla^2 \xi$ ikurraz adierazten den eragileari, laplacearra deritzo.

## 16.4. ZENBAIT ADIBIDE

Adibide batzuren bitartez, uhinen ekuazio diferentziala problema batzutako baldintza fisikoetatik nola lortzen den ikusiko dugu, bide batez, fase-abiadurak ingurunearen propietateekin duen zerikusia agerian jarririk.

### 16.4.1. Luzetarako uhin elastikoak hagaska batetan barrena.

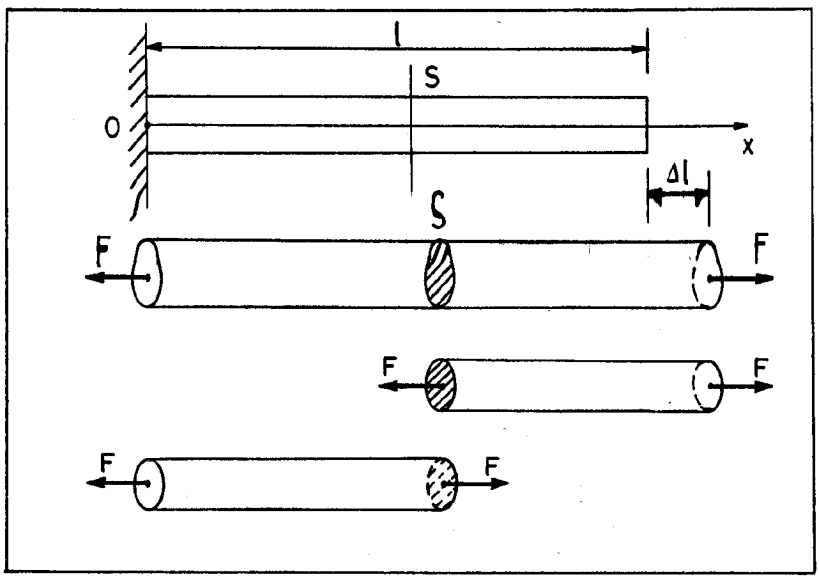
Luzetarako uhinen kasu berezi bat aztertuko dugu, hagaska elastiko batetan barrena ardatzaren norabidean gertatzen diren uhinak hain zuzen. Pisuaren ondorioak alde batetara uzte-

ko, hagaska horizontalki jarrita dagoela joko dugu. Bestalde, hagaskaren mutur bat finkoa dela kontsideratuko dugu eta beste muturra aske dagoela, bertan indar egiteko moduan.

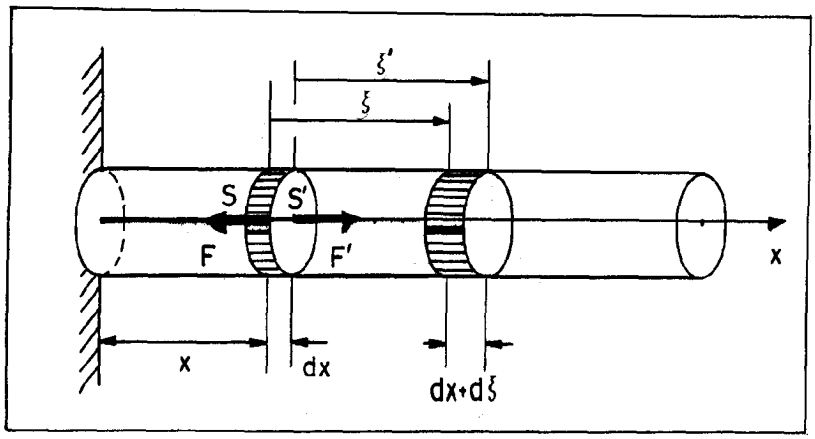
Dakigunez, hagaskaren muturrean F indar konstantea etengabe egitean, elastikotasuna dela eta, luzatu egingo da, Hooke-ren legea betetzen delarik (ikus 12. gaia). Dena den, luzapena gorabehera, orekan, azkenean sekzio normal guztietan eragiten duen indarrak balio berbera du, eta luzapena ondokoa da:

$$\Delta l = \frac{F}{YS} l \quad ,$$

Y delakoa Young-en modulua izanik.




Baina muturrean F indar aldakorra egitean, F(t), sekzio normaletan aldiune bakoitzean eragiten duen indarra x aldagaiaren funtzio ere izango da, indarraren aldaketa ez bait da bapatean beste muturrera hedatuko, hots, denetara F(x,t) izango dugu. Hauxe da presezki uhinen azterketarako interesatzen zaigun kasua. Zer esanik ez, indarraren aldakortasuna kontutan izanik, elementu diferentzial bakoitzaren konportamoldea aztertu beharko dugu.




S eta S' sekzioen artean dagoen zati diferentziala aztertuko dugu. S sekzioan F indarrak eragiten du eta S' sekzioan F' indarrak. Dena den, aldiune horretan sekzio horien desplazamenduak $\xi$ eta $\xi'$ dira hurrenez hurren. Azter dezagun, ba, bi sekzio horien arteko materialaren konportamoldea eta hori bi ikuspegi desberdinez.

a) Ikuspegi elastikoa. Zati diferentzial horren deformazio unitarioa ondokoa da:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad .$$

Kontutan hartu behar da $\xi = \xi(x,t)$ dela, noski. Bestalde, F eta F' indarren artean dF desberdintasuna dagoela kontutan edukiz eta diferentzia hori arbuiatuz, ondoko eran jar dezakegu elementu diferentzialari dagokion Hooke-ren legea:

$$F = YS\epsilon = YS \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad . \qquad (1)$$

b) Ikuspegi mekanikoa. Zati horretan eragiten duen indar netoa hauxe da:

$$F' - F = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad .$$

Bestalde, zatiaren masa:

$$dm = \rho \, S \, dx \quad ,$$

$\rho$ dentsitatea izanik. Argi dagoenez, hemen $d\xi << dx$ dela kontsiderratu dugu, ondorioz $\rho$ dentsitatea konstantetzat jo dugularik.

Azelerazioa

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

denez, era honetan idatz dezakegu Newton-en bigarren legea:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = \rho S dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} ,$$

hots, ikuspegi mekanikotik hauxe lortzen dugu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \qquad (2)$$

Orain ikuspegi biak konbinatuz, (1) adierazpenetik zera dugu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

eta (2) adierazpenera eramanez:

$$YS \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} .$$

Azkenean honela idatz dezakegu sekzio baten desplazamenduaren, $\xi(x,t)$ delakoaren, eboluzioa deskribitzen duen ekuazio diferentziala:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} .$$

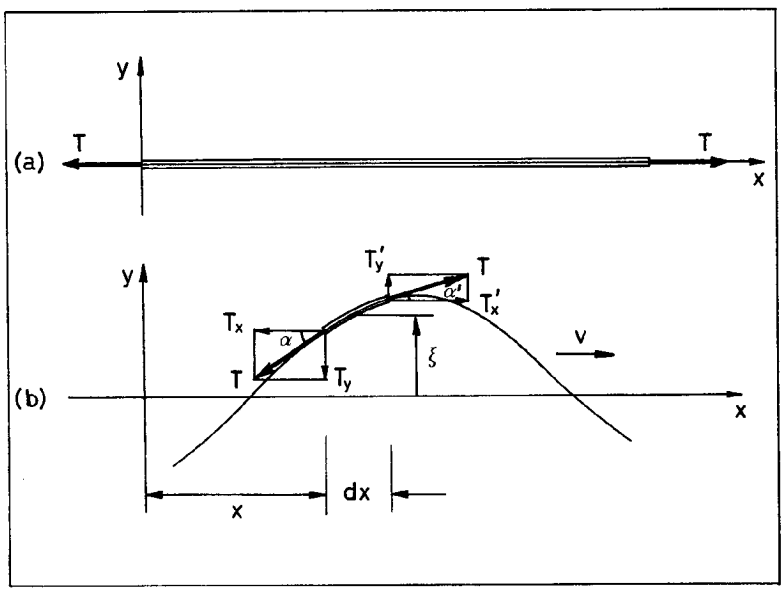
Ikusten denez, ekuazio hau uhin baten ekuazio diferentziala da. Zer esan nahi du horrek? Sekzioen desplazamenduek uhin-higidurara ren propietateak dituztela, hain zuzen ere ondoko fase-abiaduraz:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} .$$

Fase-abiadurak materialaren ezaugarrien dependentzia du, prezeski, beraren Young-en moduluarena eta dentsitatearena. Bestalde, kasu honetan bai desplazamenduek eta bai hedapenaren abiadurak x ardatzaren norabidea dutenez, luzetarako uhinak dira. Azken ohar gisa diogun ezen egindako kalkulu teorikoetan zenbait hurbilketa egin ditugula; hala ere, experimentalki neurtu da, aurreko kalkuluak ongi egokitzen zaizkiola errealitateari.

16.4.2. Zeharkako uhinak soka batetan zehar

Zeharkako uhinen azterketa teorikoa egiteko, adibide konkretua jarriko dugu. Demagun, soka bat T tentsioaren eraginpean orekan dagoela horizontalki. Zenbait hurbilketa egingo ditugu azterketa errazteko, hala nola, sokak pisua eduki arren pisu hori oso txikia dela eta horrela T tentsioaren eraginpean orekan erabat horizontalki dagoela.




Demagun, oreka egoeran gaudela, sokaren puntu bat desplazatu egiten dugula norabide perpendikularrean eta ondoren soka bere kasa uzten dugula. Zer gertatzen da hortik aurrera? b irudian sokaren zati baten egoera adierazten da aldiune batez (des

plazamendua oso handiturik, noski).

Hasteko, zenbait hurbilketa egingo ditugu kalkuluak erraztearren. Batetik, zeharkako bibrapenaz kanpo soka higitzen ez denez, tentsio berbera kontsidera dezakegu puntu guztietan; bestetik, desplazamendu txikien kasuan tentsio hori orekakoa dela jo dezakegu.

Azter dezagun, y norabidean sokaren elementu diferentzialak duen higidura. Norabide horretako indar erresultantea hauxe da:

$$\left.\begin{aligned} T'_y &= T \sin \alpha' \\ T_y &= T \sin \alpha \end{aligned}\right\} \qquad F_y = T\,(\sin \alpha' - \sin \alpha)\,,$$

eta desplazamendua txikia delarik $\alpha$ ere txikia denez, $\sin \alpha \simeq$ tg $\alpha$ hurbiketa eginez,

$$F_y = T\,(\mathrm{tg}\,\alpha' - \mathrm{tg}\,\alpha) = T\,d(\mathrm{tg}\,\alpha)\,,$$

eta izatez $\mathrm{tg}\,\alpha = f\,(x,t)$ denez,

$$F_y = T\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\mathrm{tg}\,\alpha)\,dx \quad .$$

Bestalde, tg $\alpha$ hori sokaren malda da, hots,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad .$$

Azkenean honela geratzen zaigu y norabideko indarra:

$$F_y = T\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx \quad .$$

Ondoren, Newton-en bigarren legea aplikatzeko, soka-elementuaren masa eta y norabidean duen azelerazioa idatzi behar ditugu. Luzera-unitateko masa $\rho$ izanik,

$$dm = \rho\,dx \qquad \text{(hurbilketan } \cos\alpha \simeq 1 \text{ eginez)}$$

$$a_y = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad ,$$

eta Newton-en bigarren legeaz baliaturik:

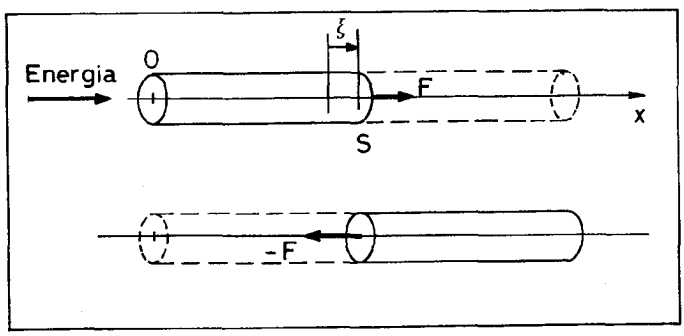
$$\rho \, dx \, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_y = T \, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \, dx$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \, \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad .$$

Berriro ere uhinen ekuazio diferentziala ageri zaigu, bertako fase-abiadura $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ delarik eta, bistakoa denez, $\xi$--ren eta v-ren norabideak elkarren perpendikularrak izanik, zeharkako uhinak hedatzen dira sokan.

## 16.5. MOMENTU LINEALAREN ETA ENERGIAREN HEDAPENA UHINEN KASUAN

Uhin mekanikoen kasuan uhin-higidurarekin perturbazioa espazioan zehar hedatzen da. Baina zer da perturbazio hori? Aurreko adibideetan ikusi dugunez, perturbazioa $\xi$ koordenatuaren aldakuntza da, eta $\xi$ hori denborarekin aldatuz doanez, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ , materiaren abiadura dugu eta, ondorioz, momentu lineala eta energia zinetikoa. Bestalde, perturbazioa hedatu egiten denez, uhin-higiduran momentu lineala eta energia ere hedatu egiten direla esan dezakegu. Beraz, Fisikaren ikuspuntutik, horixe da uhin-higiduraren esangura: momentu linealaren eta energiaren hedapena.



Hedapen hori nolakoa den ikusteko, aurreko atalean aztertu riko hagaska elastikoaren kasua hartuko dugu abiapuntu modura.

Demagun S sekzioa. Beraren desplazamendua $\xi$ da eta abiadura $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ . Ezkerreko parteak eskuinekoari egiten dion indarra, -F da. Beraz, denbora unitateko ezkerreko parteak eskuinekoari ematen dion energia, hots, aldiuneko potentzia, ondokoa da:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - F \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Energiaren fluxua ezkerreko muturretik eskuinekorantz baldin badoa, ezkerreko muturrean energia eman beharko da. Energia une labur batez soilik ematen bada, pultsu bat dugula esango dugu, eta perturbazioa mugaturik egongo da denboran. Ostera, energia etengabe ematen bada, uhin-multzo iraunkorra sortuko da, uhin-tren jarraia alegia. Hemen bigarren kasua aztertuko dugu, uhin elastiko harmonikoaren kasua hain zuzen ere.

Desplazamendua honela adieraziko dugu:

$$\xi = \xi_0 \sin k(x-vt) = \xi_0 \sin(kx-\omega t),$$

eta honen bidez aldiuneko potentzia lor dezakegu:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \omega \xi_0 \cos(kx-\omega t)$$

$$F = YS \frac{\partial \xi}{\partial x} = YS\, k\, \xi_0 \cos(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = YS\, \omega k\, \xi_0^2 \cos^2(kx-\omega t) .$$

$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ eta $kv = \omega$ direla kontutan hartuz:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v\, S\, [\rho\, \omega^2\, \xi_0^2 \cos^2(kx-\omega t)] .$$

Adierazpen hau aztertuz, bi ondorio atera ditzakegu:

$- \cos^2(kx-\omega t) \geqslant 0$ denez, $\frac{\partial W}{\partial t} \geqslant 0$ da. Beraz etengabe ari gara

energia eskuinerantz bidaltzen 0 sekzioan.

- Bestalde $\frac{\partial W}{\partial t} = f(kx-\omega t)$, eta hori uhinen adierazpena da. Hots, potentziaren hedapenak ere uhinaren ekuazioa betetzen du, eta hain zuzen <u>energi uhina</u> deritzo.

Aldiuneko potentziaren azken adierazpenean ikusten denez, potentzia aldatuz doa denborarekin. Arrazoi horregatik, interesgarria da, denborarekiko batezbesteko potentzia kalkulatzea:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = v\ S\ [\rho\ \omega^2\ \xi_o^2\ \overline{\cos^2(kx-\omega t)}]\ .$$

Bestalde, periodikotasun denborala kontutan hartuz,

$$\overline{\cos^2(kx-\omega t)} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\cos^2(kx-\omega t)]\ dt = \frac{1}{2}\ ,$$

azkenean emaitza hau lortzen dugu:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = \frac{1}{2}\ v\ S\ \rho\ \omega^2\ \xi_o^2$$

Emaitza honen esangura hobeto ulertzeko, konparatu egingo dugu higidura oszilakorrean lorturiko beste batekin. Bertan ikusi genuenez, oszilagailuaren energia ondokoa da:

$$E = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ A^2$$

Beraz, makilaren bolumen-unitatearen oszilazioa aztertzean ondoko ordezkapenak erabiliz,

$A \longrightarrow \xi_o$ (oszilazioaren anplitudea)

$m \longrightarrow \rho$ (dentsitatea edo bolumen-unitatearen masa)

uhin elastikoak sorturiko bibrazioaren kausaz bolumen-unitateko energia honela adieraz dezakegu:

$$U = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 ,$$

eta energi dentsitatea deritzogu.

Horren arauera, ezkerreko muturretik denbora-unitateko bidaltzen den batezbesteko energi fluxua edo batezbesteko potentzia, ondokoa da:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = v\ S\ U .$$

Bestetik, S delakoa hagaskaren sekzioa denez, vU azalera--unitateko eta denbora-unitateko energi fluxua da eta uhinaren intentsitatea deritzo:

$$I = \frac{1}{S} \overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = vU$$

Hagaskaren kasurako emaitza hauek erraz orokor daitezke bestelako uhinetarako. Azken batez, guztietan uhinarekin energiaren hedapena izango dugu eta energiaren fluxua adierazteko, intentsitate kontzeptua erabiliko dugu.

## 17. GAIA: UHINEN PROPIETATE OROKORRAK

17.1. Interferentziak

17.2. Huygens-en printzipioa

17.3. Malus-en teorema

17.4. Uhinen isladapena eta errefrakzioa

17.5. Uhin geldikorrak

17.6. Uhin-en difrakzioa

17.7. Doppler efektua

Beren hedapenean, uhinek zenbait propietate berezi dituzte, hala nola interferentziak, isladapena, errefrakzioa eta difrakzioa, eta propietate orokorhoriek dira gai honetan aztertuko ditugunak.

Interferentziak ingurune berean bi uhin desberdin hedatzean gertatzen dira, eta puntu bakoitzean gainezarmenaren printzipioa erabiliz aztertu beharko ditugu. Isladapena eta errefrakzioa bi ingurune desberdinen arteko banaketa-gainazalean gertatzen dira, isladapena hasierako ingurunerantz itzultzen den uhinari dagokiolarik eta errefrakzioa bigarren ingurunerantz beste abiadura batez hedatzen den uhinari. Eta difrakzioa, oztopoekin (edo zuloekin) aurkitzean uhinek duten konportamoldeari dagokio.

## 17.1. INTERFERENTZIAK

Demagun ingurune batetan bi uhin-iturri desberdin ditugula. Puntu batetara iturri bietatik datozen uhinak heltzean, bien eraginak gainezarri egiten dira, horregatik uhin-izaera galdu gabe, eta interferentziak sortuz. Interferentzien ezaugarri orokorrak ulertzeko, kasu konkretu bat aztertuko dugu, bertako ondorio kualitatiboak beste kasuetara ere zabal daitezkeelarik.

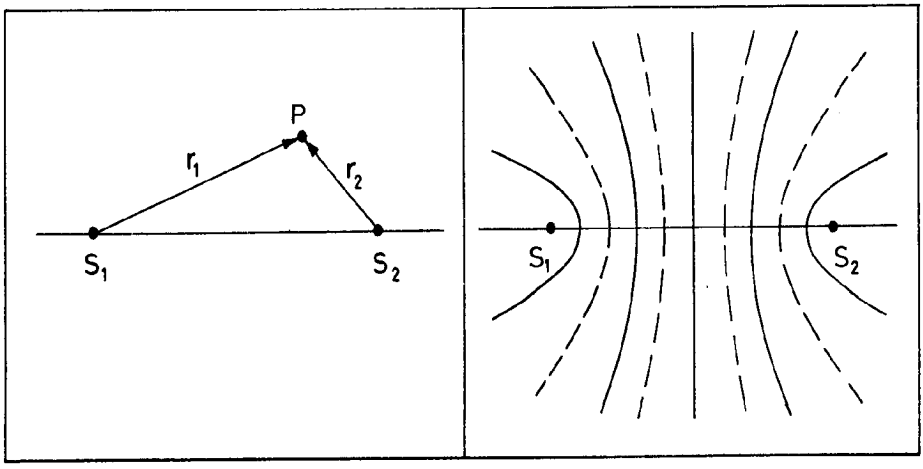
Azter ditzagun, adibidez, bi uhin-iturri puntual sinkronikoek, $S_1$ eta $S_2$ izenekoek, sortzen dituzten interferentziak. Iturrietatik hedatzen diren uhin esferikoen adierazpen matematikoak ondokoak dira:

$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1) \quad *$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2) \quad ,$$

* Oharra: Zeinua aldaturik dago, geroko eragiketak errazagoak gerta daitezen

$r_1$ eta $r_2$ edozein P puntutik $S_1$ eta $S_2$ iturrietarako distantziak izanik, hurrengo irudian adierazten den bezala. $\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v = 2\pi\nu$ delakoa maiztasun angeluarra da eta k uhin-zenbakia.




$\xi$ magnitudea eskalarra dela joko dugu, kalkuluak erraztako. Ohar gisa esan behar da ezen uhin esferikoak izanik, $\xi_{oi}$ anplitudeak txikiagotuz doazela $\frac{1}{r_i}$ legearen arauera. Dena dela, P puntuan anplitudeak batu egiten dira maiztasun bereko higidura oszilakorrak batzen ziren modu berean (ikus 15.4.) kontutan izanik, puntuaren arauera fase desberdina dagoela, fase-diferentzia honako hau delarik:

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) .$$

Hori dela eta, P puntu bakoitzean honela adieraziko da anplitude erresultantea:

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\,\xi_{02}\cos\delta} .$$

Azken adierazpen hau aztertuz, puntu batzutan anplitudeak gehitu egiten dira, hain zuzen $\cos\delta = 1$ denean,

$$\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2\pi n$$

hots, $r_1 - r_2 = n\lambda$ denean. Holako puntuen leku geometrikoak lerro bentralak (planoan) edo gainazal bentralak (espazioan) dira, eta alboko puntuekin konparatuz, bertan anplitudea maximoa da. Ostera, $\cos\delta = -1$ denean,

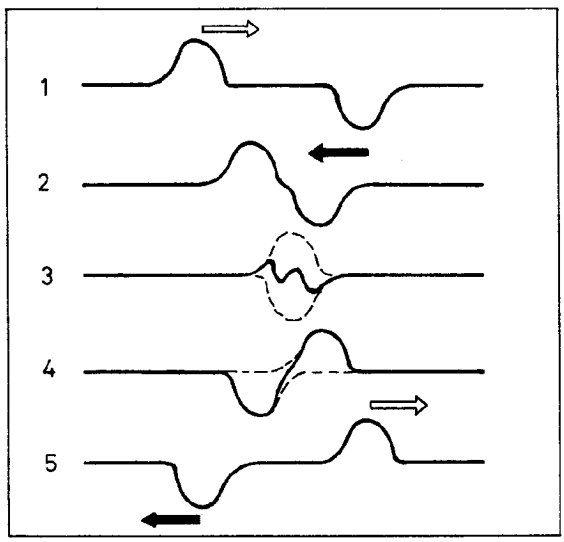
$$\xi_0 = \xi_{01} - \xi_{02} \quad \text{(edo alderantziz } \xi_{02} > \xi_{01} \text{ bada)}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \pi(2n + 1)$$

$$r_1 - r_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2},$$

eta puntu hauetan anplitudeak minimoak dira. Holako puntuen leku geometrikoak gainazal nodalak dira espazioan (planoan, lerroak).

Bestalde, $r_1 - r_2 = \text{kte}$ baldintzak fokoak $S_1$ eta $S_2$ puntuetan dituen hiperbola bat definitzen du planoan, edo nahiago bada, biraketa-hiperboloidea espazioan. Gainazal hiperboliko horiek dira aurreko irudian adierazten direnak.



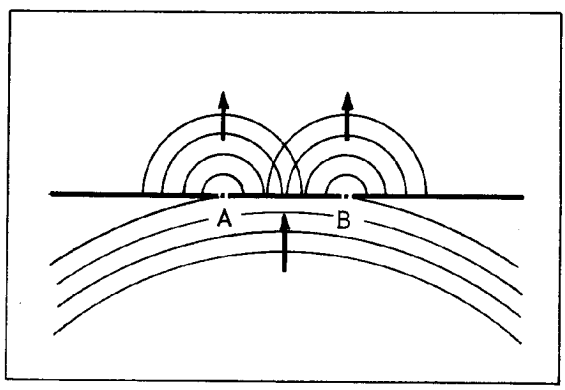

Interferentziei buruzko atal honi bukaera emateko, beste adibide bat aipatuko dugu. Demagun soka baten bi muturretatik bi perturbazio hedatzen direla aurkako norantza dutelarik. El-

karrekin topo egin arte, bakoitza bere kasa hedatzen da. Bi uhinak toki berera heltzean, gainezarri egiten dira, hots, interferentzia gertatzen da eta ondoren zeinek bere hedapena du, energia kontserbatuz, aldez aurretik interferentziarik ez bailegoen. Prosezu osoa alboko irudian adierazten da.

## 17.2. HUYGENS-EN PRINTZIPIOA

Hamazazpigarren mendearen azken partean, Christian Huygens (1629-1695) izeneko fisikari dinamarkarrak uhin mekanikoen hedapena ongi ulertzeko prozesu bat adierazi zuen, ondoren oso erabilgarria gertatu dena.

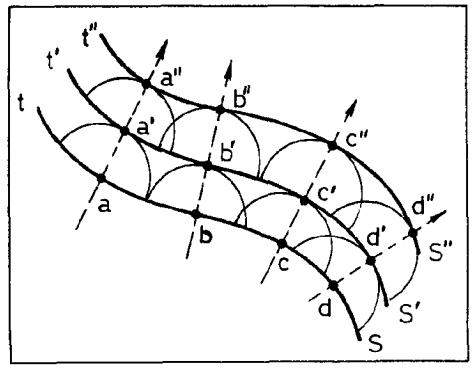
Uhina ingurune mekanikoko puntu batetara heltzean, puntu hori bibratzen hasten da eta, beraz, uhin esferikoen iturri sortzaile bihurtzen da (noski, uhin esferikoak baldin ingurunea isotropoa bada). Horrela, bada, uhin-higiduraren hedapena adierazteko, nahikoa da uhina heltzen deneko puntuak oinarrizko uhin berrien zentru edo iturritzat hartzea. Horixe da hain zuzen ere Huygens-en printzipioa, alegia, oinarrizko uhinek inguratzailerik badute, guztien efektua uhin bakarrenaren baliokidea da, inguratzailearekin hedatzen dena.




Baldintza berezietan behatu egin daitezke aipaturiko oinarrizko uhinak. Adibidez, alboko irudian uretan sorturiko gainazal-uhinen hedapena adierazten da. Bi zulo txiki (A eta B) dituen horma edo traba bat jarriz, bertatik uhina beste aldera

pasatzen dela ikusten da, bi zuloek iturri berrien lana eginez.

Azal dezagun poliki prozesua. Dakigunez, uhin-gainazala edo uhin-frontea, aldiune batetan uhinaren perturbazioa fase berean dauden puntu guztien leku geometrikoa da. Demagun, ba, t aldiunean uhin-frontea irudiko S gainazalean dagoela. Gainazal horretako puntu bakoitzak uhin sekundarioak emititzen ditu, t' aldiunean zirkunferentzierdi txikien bidez adierazten direnak. Hauen interferentziaz, t' aldiunean guztien inguratzailea den S' uhin-gainazala lortzen dugu eta bertan berriro errepikatzen da prozesua, t'' aldiunean S" gainazala eratuz. Eta horrela, etengabe hedatuz doa uhina.




Huygens-en printzipioaren aplikaziorako jartzen diren zenbait traba azalduko ditugu. Lehenik eta behin konturatu egiten gara ezen uhin-gainazal bakoitzeko puntuen inguruko oinarrizko uhinak aipatzean eta grafikoki adieraztean, zirkunferentzierdiak jarri ditugula, nahiz eta, puntu horiek benetako iturriak balira, zirkunferentzia osoak (hots, esferak hirudimentsionalki) jarri beharko genituzkeen. Dena den, uhinen hedapena adierazten ari gara eta kasu honetan norantza bakarrean hedatzen da uhina.

Beste oztopo bat, uhin-gainazalen arteko konportamoldeari dagokiona da. Arazo hau ebatzi egiten da, uhinen interferentziaz uhin-fronteei dagokien emaitza berbera lortzen dela frogatuz.

Hirugarren objekzio bat jar daiteke uhin elektromagnetikoen kasuan, oraingoan ez bait dugu bibratzen duen partikula edo ingurunerik. Hau dela eta, uhin mekanikoen kasurako hain

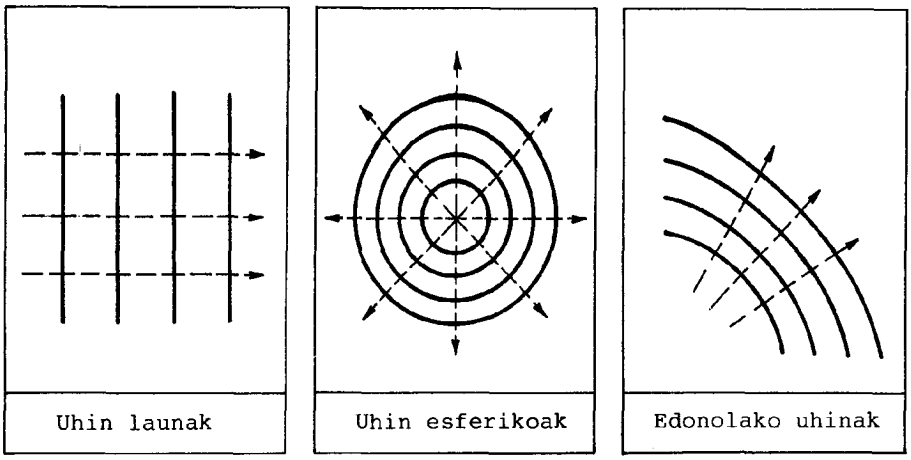
egoki ikusten zen Huygens-en printzipioa berraztertu beharra egon zen. Pasa den mendearen azken aldera Kirchoff-ek era matematikoan adierazi zuen, Huygens-ek intuitiboki emandako printzipioa. Beraz, hemen frogapenik emango ez dugun arren, gainditutzat joko dugu oztopo hori ere.

## 17.3. MALUS-EN TEOREMA

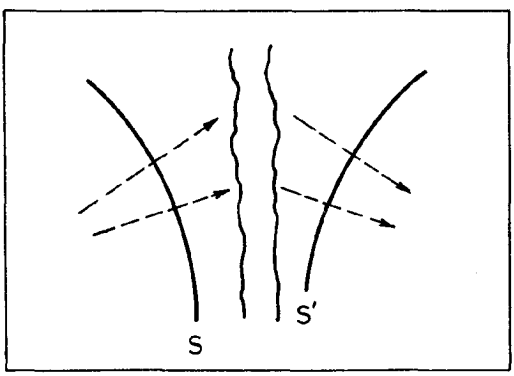
Uhinen hedapena nola gertatzen den ondo ulertzeko, aurreko printzipioarekin batera Malus-en teorema ematea ere komeni da.

Puntu bakoitzean, uhin-gainazalen perpendikularrei izpi deritzegu eta uhinen hedapenaren norabidea adierazten dute. Izpi berberaren bidez uhin-gainazal desberdinetan lotzen diren puntuei, puntu izpikideak edo korrespondenteak deritze; adibidez, aurreko orrialdeko irudian a, a' eta a'' elkarren puntu izpikideak dira, eta berdin b, b' eta b''. Bestalde uhin-gainazaleko puntuetan perturbazioaren fasea berbera denez, uhinak gainazal batetik hurrengora hedatzeko darabilen denborak berbera izan beharko du, neurtzeko hartzen den izpia edozein delarik. Horrela adieraz dezakegu, ba, teorema: « Bi uhin-gainazaletako puntu korrespondenteen artean uhinak hedatzeko behar duen denbora, berbera da puntuen bikotea edozein izanik ».

Gauzak horrela, aa', bb', cc' distantziak, uhinak puntu bakoitzean duen hedatze-abiaduraren arauerakoak dira. Ingurune isotropo eta homogenoetan, puntu guztietan eta norabide guztietan abiadura berbera denez, bi uhin-gainazaletako puntu izpikideen bikoteen arteko distantzia ere berbera izango da. Gainera, horrelako inguruneetan izpiak lerro zuzenak dira, ez bait dago arrazoirik desbidera daitezen. Hurrengo irudian zenbait uhinen hedapeneko gainazalak eta izpiak adierazten dira, ingurune isotropo eta homogeno batetan.




Bestalde, ingurune isotropo eta homogeno batetatik beste batetara hedatzen den uhina ere kontsidera dezakegu. Kasu horretan, batetik bestera iragatean izpien norabidea aldatu egin daiteke, baina ingurune bakoitzean izpiak lerro zuzenak dira eta, zer esanik ez, uhin-gainazalen perpendikularrak.

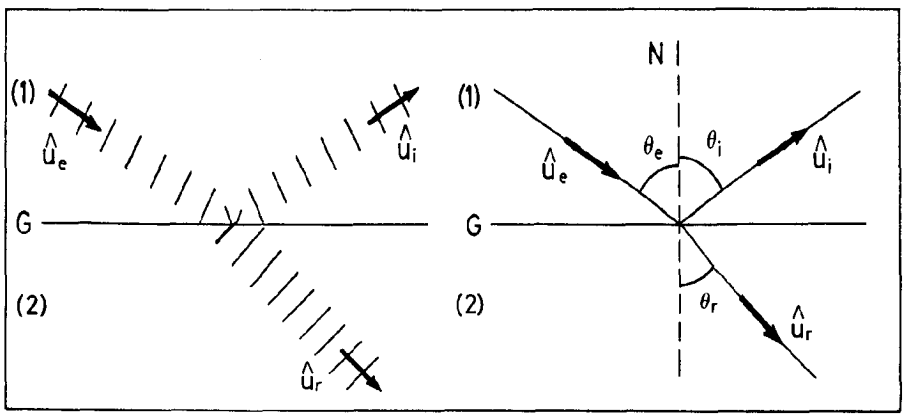



Beraz izpien eta uhin-gainazalen arteko ortogonaltasuna kontserbatu egiten da uhinaren hedapenean zehar.

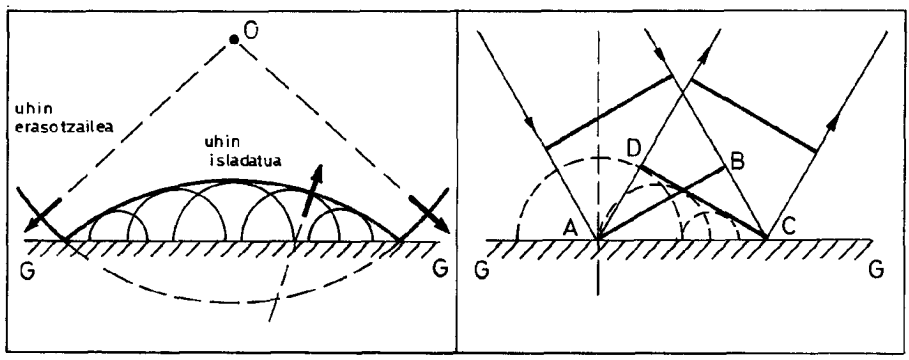
## 17.4. UHINEN ISLADAPENA ETA ERREFRAKZIOA

Uhina ingurune batetan hedatuz doala beste ingurune baten mugara heltzean, banaketazko gainazalean jokamolde berezia du, orokorki isladatuz eta errefraktatuz, experimentalki ikus daitekeenez.

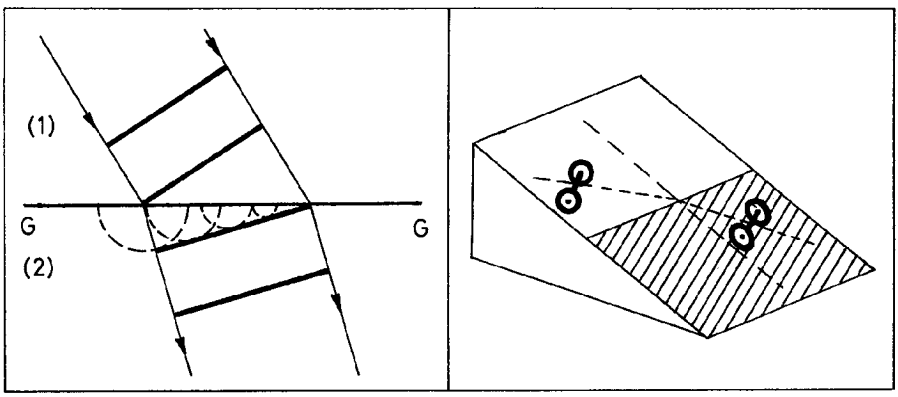
Arazo hau azaltzeko, demagun uhin laun bat, 1 ingurune isotropo eta homogenoan $\hat{u}_e$ bektorearen norabidean hedatzen dena. Demagun, halaber, beste ingurune isotropo eta homogeno desberdina dugula, 2, eta bien arteko banaketazko gainazala, G, launa dela. Experimentalki ikusten denez, uhina G gainazalera heldu ondoren bi eratara hedatzen da. Batetik 1 ingurunean hedatzen da, uhin isladatua, $\hat{u}_i$ norabidea duena; eta bestetik 2 ingurunean, uhin errefraktatua, $\hat{u}_r$ norabidea duena, irudietan adierazten den bezala.




Izatez, jokamolde hau uhinen hedapenaren abiadura ingurunearen propietateen menpekoa delako gertatzen da, eta oso erraz azal daiteke kualitatiboki Huygens-en printzipioaren bidez. Hurrengo bi irudietan, isladapenari dagokion azalpena adierazten da. Lehenengoan uhin erasotzaile esferikoaren kasua dugu. G gainazaleko puntuak uhin sekundarioen iturritzat harturik daude (une desberdinetan), eta uhin-fronte erasotzailearen eta uhin--fronte isladatuaren parte bi adierazten dira. Bigarrenean uhin launaren isladapena aztertzen da era berean.



Antzerako zerbait egin dezakegu errefrakzioaren azalpenerako, beti ere ingurune desberdinetan hedapen-abiadurak desberdinak direla kontsideratuz, $v_1$ eta $v_2$ prezeski. Hori dela eta, errefrakzioaren analogia mekanikoa presta dezakegu, Tyndall-en experientzia izenaz ezagutzen dena: Plano aldapatsu baten erdia hareaz estalita dago eta gainetik bi gurpildun ardatza jaisten ari da oblikuoki. Lehenengo gurpila harearen gainera heltzen denetik, balaztatu egiten da pixka bat marruskaduraren kausaz eta ondorioz ibilbidearen norabidearen aldaketa gertatzen da. Bai Huygens-en printzipioaren errefrakzioaren azalpena eta bai beraren analogia mekanikoa alboko irudietan adierazten da.




Azalpen kualitatiboak eman ondoren, fenomeno hauetan experimentalki agertzen diren legeak aipatuko ditugu. Uhin launen kasuan eta $\hat{u}_e$ , $\hat{u}_i$ eta $\hat{u}_r$ bektoreen norabideak kontutan hartuz, hiru lege hauek betetzen dira:

1) Izpi erasotzailea, isladatua eta errefraktatua plano berean daude, plano hori banaketazko gainazalaren perpendikularra delarik eta, beraz, N normala ere plano horretan dagoelarik.

2) Eraso-angelua eta isladapen-angelua berdinak dira:

$$\theta_e = \theta_i \ .$$

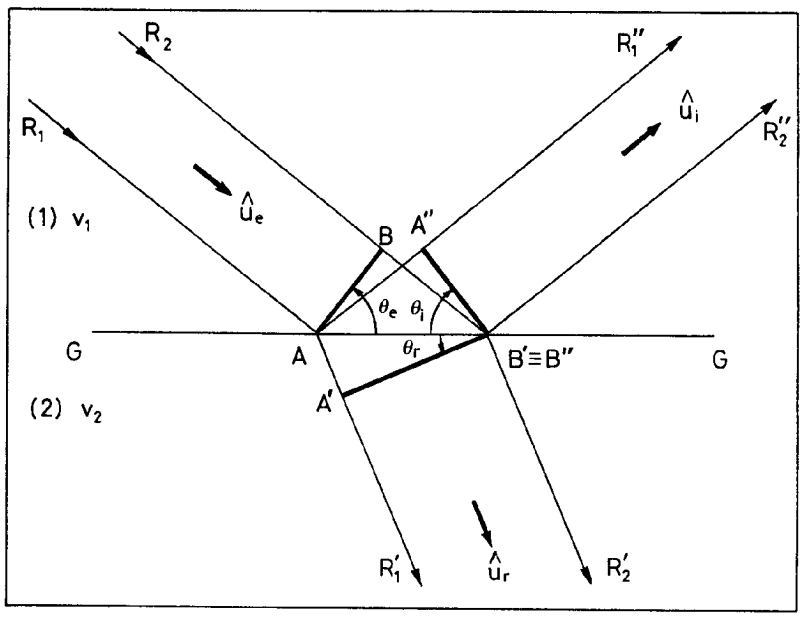
3) Eraso-angeluaren eta errefrakzio-angeluaren sinuen arteko zatidura konstantea da:

$$\frac{\sin\theta_e}{\sin\theta_r} = n_{21} .$$

Lege honi Snell-en legea deritzo eta, $n_{21}$ konstanteari 2 ingurunearen 1 ingurunearekiko errefrakzioaren indizea. Beraren balorea ingurune bien propietateen menpekoa da eta bai halaber uhinaren izaerarena ere.

Aurreko lege experimentalak teorikoki ere froga daitezke, uhinen hedapenaren oinarrizko printzipioak erabiliz. Horrela eginik, lehenengo legea simetri arrazoiengatik azal daiteke, zeren, izpi erasotzaileak eta N normalak plano bat osotzen dutelarik, ez bait dago arrazoirik izpi isladatua eta izpi errefraktatua plano horretatik atera daitezen.

Beste bi legeak frogatzeko, bi izpi erasotzaile paraleloren jokamoldea aztertuko dugu, uhin launaren kasuan noski. Alboko irudian ikusten denez, $R_1$ eta $R_2$ izpi paraleloak 1 ingu-




runean hedatzen ari dira $v_1$ abiaduraz. Malusen teoremaren ondorioz bai izpi isladatuak ($R_1''$ eta $R_2''$) zein izpi errefraktatuak

($R_1'$ eta $R_2'$) binaka paraleloak dira, eta uhin-fronteak izpien perpendikularrak, uhin launekin ari bait gara. t = 0 aldiunean AB gainazala kontsideratuko dugu eta t = t aldiunean A'B' eta A''B'' gainazalak, uhin errefraktatuarena eta uhin isladatuarena hurrunez hurren. Ondoko erlazioak ditugu:

$$\overline{BB'} = v_1 t$$

$$\overline{AA'} = v_2 t \qquad \text{(2 ingurunean hedatzen bait da)}$$

$$\overline{AA''} = v_1 t = \overline{BB'} \ .$$

Bestalde, irudiaren geometria kontutan hartuz,

$$\sin \theta_e = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$$

$$\sin \theta_i = \frac{\overline{AA''}}{\overline{AB'}}$$

$$\sin \theta_r = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}}$$

Beraz, erraz ondorioztatzen dugu:

$$\sin \theta_e = \sin \theta_i \Longrightarrow \theta_e = \theta_i$$

hots, bigarren legea, eta:

$$\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

hau da, hirugarren legea. Hain zuzen, errefrakzio-indizea uhinak bi inguruneetan dituen hedapen-abiadura desberdinen ondorioa da. Hori dela eta, sarri erreferentziazko ingurune bat hartzen da —argiaren kasuan, hutsa— eta "ingurune txantiloi" horrekiko <u>errefrakzio-indize absolutua</u> definitzen da:

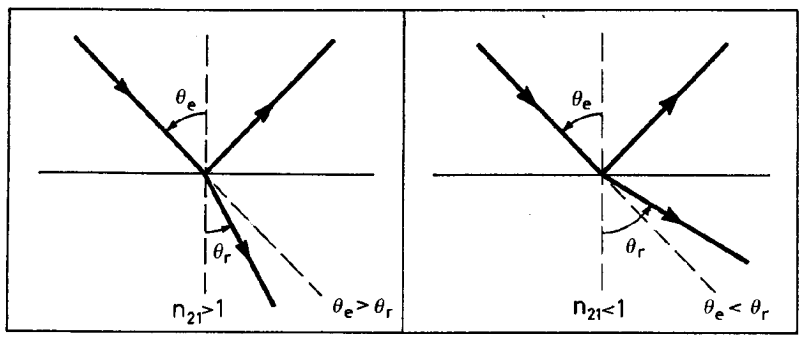
$$n = \frac{c}{v} \ .$$

Alegia, ingurunearen errefrakzio-indize absolutua uhinak ingurune txantiloian duen hedapen-abiaduraren eta ingurunean daukanaren arteko erlazioa da. Indize honen bidez era simetrikoagoan idatz daiteke Snell-en legea:

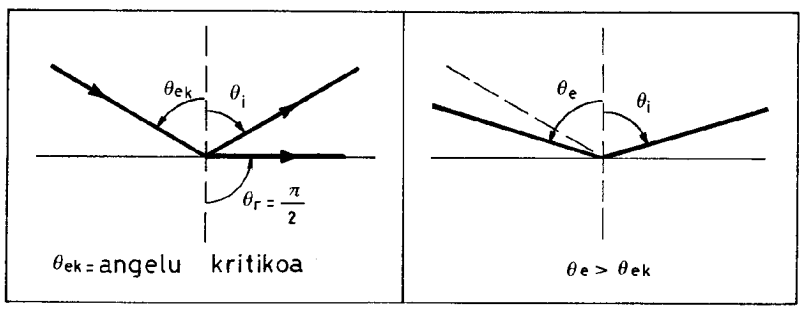
$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin \theta_e}{\sin \theta_r} = n_{21} \Longrightarrow n_1 \sin \theta_e = n_2 \sin \theta_r$$

Interesgarria da ikustea, $n_{21}$ indizearen baloreen arauera ($n_{21} > 1$ edo $n_{21} < 1$) izpi errefraktatua normalerantz hurbildu edo normaletik urrundu egiten dela, hurrengo bi irudietan adierazten den bezala.



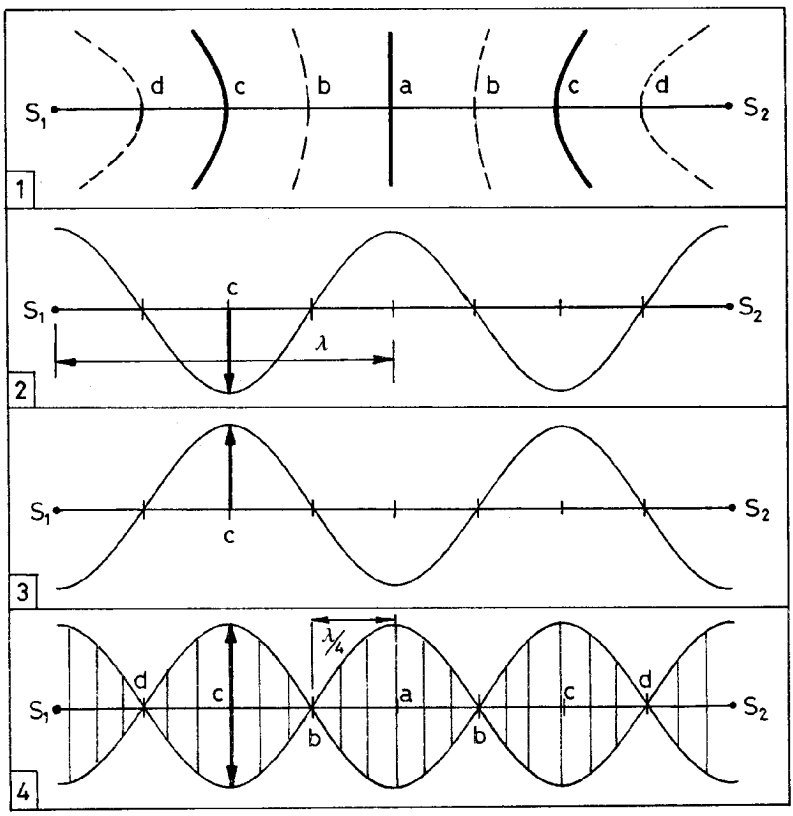

Bigarren kasuan, $n_{21} < 1$ denean, jokamolde berezia gertatzen da izpi erasotzailearen angelu batetik aurrera. Demagun $\sin \theta_r = 1$ egiten dugula ($\theta_r = \frac{\pi}{2}$). Errefrakzio-indizea $n_{21} < 1$ denez, $\theta_r$ horri angelu erasotzaile bat dagokio ($\sin \theta_{ek} < 1$), angelu kritikoa deituko duguna.



Angelu hori baino handiagoetarako, Snell-en legearen arauera $\sin \theta_r > 1$ eduki beharko genuke, baina hori ez da posiblea. Fisikoki, horrek esan nahi du, baldintza horietan errefrakziorik ez dagoela, eta isladapen osoa gertatzen dela.

## 17.5. UHIN GELDIKORRAK

Uhin geldikorrak etengabe hedatzen ari diren uhinen interferentziaz sortzen dira. Garrantzi handia dute, adibidez, musika-tresna batzuren funtzionamendurako, hala nola organo-hodien kasuan, eta ikusiko dugunez, zerikusi handia dute arazo honetan, uhinak hedatzen direneko ingurunearen muga-baldintzek. Dena den, uhin geldikorrak zer diren azaltzeko, bi adibide berezitatik abiatuko gara.



Lehenengo kasuan, ingurune batetan bi uhin-iturri puntual eta sinkroniko ditugula kontsideratuko dugu ($S_1$ eta $S_2$), bertatik etengabe uhin-tren harmonikoak sortzen ari direlarik. Azalpena errazteko, biek uhi-luzera eta anplitude berbera dutela joko dugu, eta $\overline{S_1S_2}$ distantzia uhin-luzera horren anizkoitza dela. 17.1. atalean ikusi dugunez, interferentziaren kausaz, puntu batzutan bibrazio-egoera maximoa izango da eta bestetan nulua eta puntu horien leku geometrikoak hiperboloideak izango dira, fokoak $S_1$ eta $S_2$ puntuetan egonik. Nolanahi ere, $S_1$ $S_2$ lerroko puntuak aztertuko ditugu, norabide bakarreko uhina bailitzen. Uhinak etengabe sortuz dabiltzala, maximoak a, c puntuetan dira; eta, interferentziaz, perturbazioa nulua da b, d puntuetan.

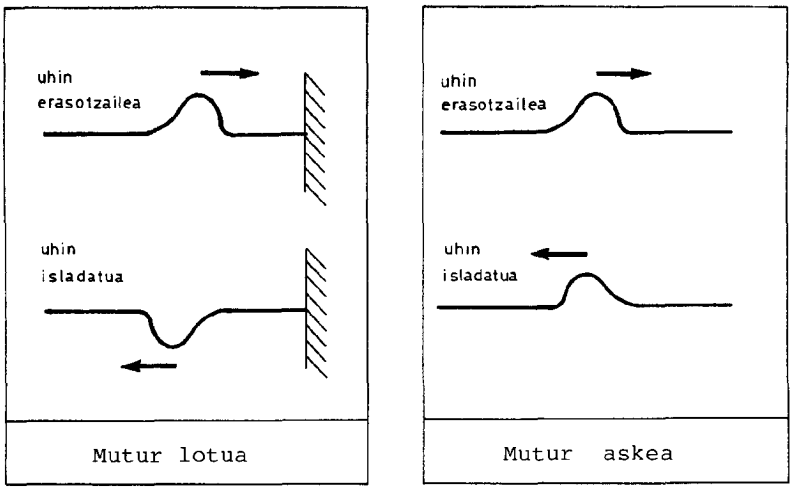
Irudiaren 2 partean, $S_1$ eta $S_2$ iturrietan perturbazio positibo maximoko aldiune batetan, tarteko puntuen perturbazio-egoera adierazten da. 3 partean gauza bera baina aurkako fasean. Ikusten denez, denetara, $S_1S_2$ tarteko puntuen perturbazioak iturriek duten periodo berberaz aldatzen dira, nahiz eta puntu bakoitzean anplitudea desberdina den. Hori dela eta uhinaren forma ez da hedatzen, eta horregatik uhin geldikorra deitzen da. Horixe da 4 irudian adierazten dena.

Puntu batzuren bibrazioaren anplitudea nulua da, hots, perturbaziorik gabekoak dira, hala nola b eta d puntuak: nodoak deitzen dira. Besteetan ordea, perturbazioaren anplitudea maximoa da, a eta c puntuetan adibidez: sabelak deritze. Irudietan ikusten denez, elkarren ondoan dauden nodo eta sabelen arteko distantziak $\lambda/4$ balio du.

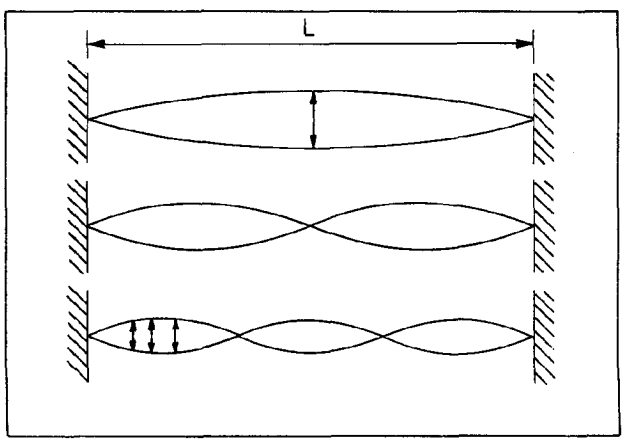
Aurreko kasua aztertu ondoren, pasa gaitezen soka batetan sor daitezkeen uhin geldikorrak aztertzera. Kasu honetan uhin geldikorrak soken muturretan gertatzen diren isladapenen ondorioz sortzen dira. Has gaitezen, ba, muturretako isladapenak nolakoak diren ikusten.

Experimentalki ikusten denez, era desberdinez gertatzen da isladapena, sokaren muturraren egoeraren arauera, hots, muga-baldintzen arauera. Sokaren muturra finko lotuta dagoenean,

uhin isladatua aurkako fasean hedatzen da; ostera, muturra aske dagoenean, uhin isladatuak fase berberarekin segitzen du. Bi kasuen arteko desberdintasuna hurrengo irudietan adierazten da eskematikoki.




Aipaturiko jokamoldea kontutan edukiz, bi muturrak loturik dituen sokaren kasuan sortzen diren uhin geldikorrak azter ditzakegu. Etengabeko uhin-tren harmonikoa sortzen bada, muturrera heltzean isladatu egiten da, eta ondorioz, uhin-luzeraren eta sokaren luzeraren proportzio egokien kasuan uhin geldikorrak sortzen dira. Maiztasuna handi samarra izanik, begiek ezin dute higidura segitu eta soka parte berezitan banaturik ikusten da, hurrengo irudietan bezala.



Argi dagoenez, muturretan nodoak agertzen dira, finko lotuta bait daude. Horrela, sokaren luzera L izanik, ondoko uhin-luzeretan sor daitezke uhin geldikorrak: $\frac{2L}{1}$, $\frac{2L}{2}$, $\frac{2L}{3}$, ....

Demagun tresna musikal baten soka dela. Uhinaren hedapenaren abiadura v izanik, uhin geldikorretako maiztasunak ondokoak izango dira:

$$\nu = \frac{V}{\lambda} \qquad \text{denez,}$$

$$\frac{V}{2L},\ 2\frac{V}{2L},\ 3\frac{V}{2L},\ldots\ldots$$

Maiztasunik txikienari, $\nu_1 = \frac{V}{2L}$, <u>oinarrizko maiztasuna</u> deritzo; besteak beraren anizkoitzak dira, $2\nu_1$, $3\nu_1$,... eta harmonikoak deritze.

Bukatzeko, diogun ezen musikarako soka-tresnen kasuan, hiru oinarri fisiko hartzen direla kontutan nota afinatzerakoan, hots, uhin geldikorren oinarrizko maiztasuna definitzerakoan. Aurreko gaiko emaitza erabiliz (ikus 16.4.), honela adieraz dezakegu maiztasun hori:

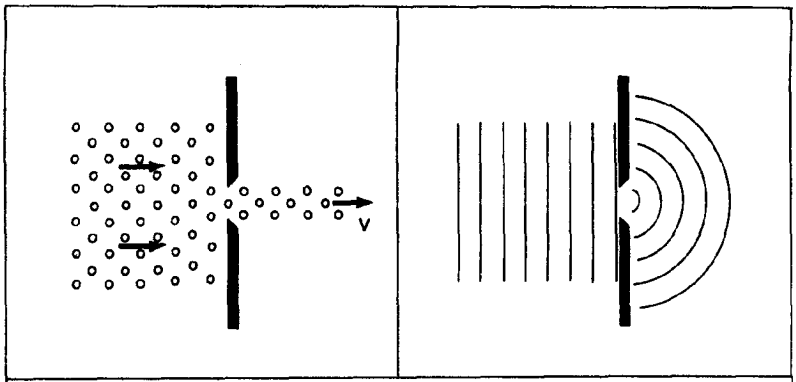
$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Adierazpen honetan ageri den bezala, $\nu_1$ maiztasunak L, T eta $\rho$ parametroen dependentzia du. Zenbat eta soka luzeagoa maiztasun txikiagoa, hots, tonu baxuagoa, pianoen soketan ikus daitekeenez. Gitarraren sokek luzera berbera dutelarik, izatez luze-laburtu egin daitezke hatzamarrez zapalduz, eta afinatu nahi denean tentsioa aldatuz jotzen da. Bestalde, tonu baxuetarako sokak, lodiagoak izateaz gain, burdinariz inguraturik ohi daude, luzera-unitateko masa, $\rho$, handiagotzeko.

## 17.6. <u>UHINEN DIFRAKZIOA</u>

Difrakzio izenarekin, hedapen lerrozuzenaz ezin azal daitezkeen fenomeno batzu adierazten dira. Bere uhin-luzerarekin

konparagarri den oztopo batekin aurkitzean gertatzen den distortsioari deritzo difrakzioa. Oztopo hori zulo txikia duen pantaila bat izan daiteke, adibidez, eta orduan argi ikusten da partikulek eta uhinek duten jokamolde desberdina. Demagun, kasurako, alde batetik v abiaduraz higitzen den partikula-sorta bat dugula eta bestetik uhina. Experientziak frogatzen duenez,




Partikulek eta uhinek zuloarekin oztopatzean duten jokamolde desberdina.

partikulen kasuan, zulora heltzen direnak aurrera pasatzen dira trabarik gabe, norabide berean, eta hormarekin topo egiten dutenak ez dira pasatzen. Ostera, uhinen kasuan, zuloaren bestekaldean norabide desberdinetan hedatzen dira, lehenago Huygens--en printzipioa azaltzean esan dugun bezala.

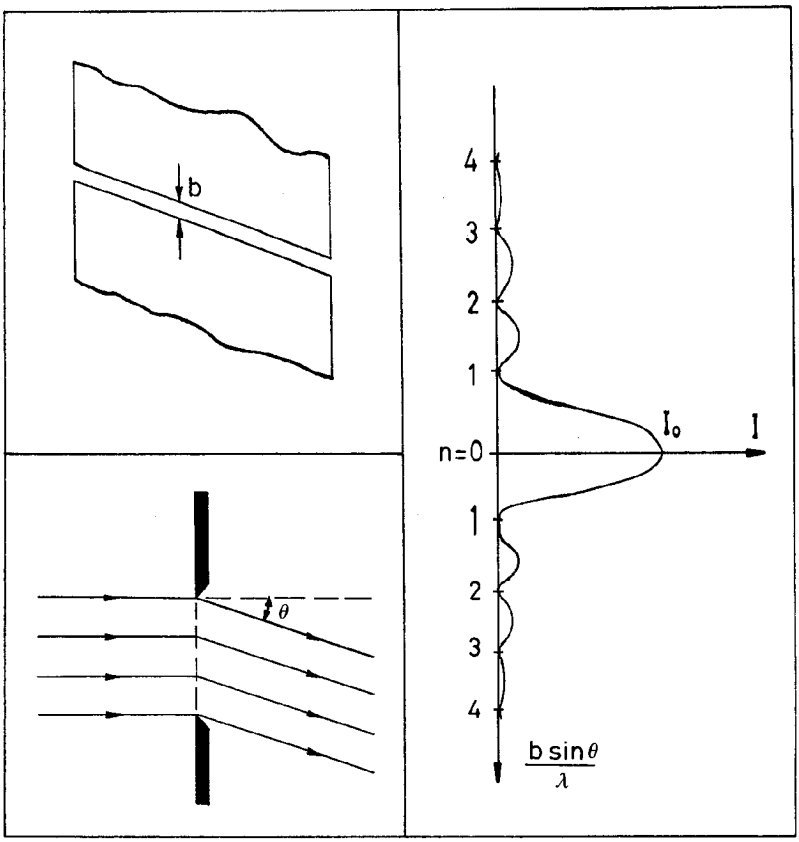
Difrakzioa pixka bat gehiago azaltzeko, kasu berezia aztertuko dugu, hain zuzen zulo errektangeluar batetan izpi paraleloen kasuan gertatzen den difrakzioa, Fraunhofer-en difrakzioa izenaz ezagutua.

Pantaila batetan zulo errektangeluar oso estu eta luzea kontsideratuko dugu, muturretako efektuak ahanzteko modukoa. Izpi erasotzaileak zuloaren planoaren perpendikularrak direla kontsideratuko dugu. Huygens-en printzipioaren arauera, zuloaren planoko puntuak uhin sekundarioen iturri bihurtzen dira. Horren bidez, angelu desberdinetan hedatzen diren izpi difraktatuak experimentalki aztertzean, norabide batzutan intentsitatea nulua dela ikusten da. Norabide horiek ondoko erlazioaren araue-

ra ematen dira:

$$b \sin\theta = n\lambda \quad ,$$

b zuloaren zabalera eta n zenbaki osoa izanik. n = 0 balorean intentsitate maximoa dago. Intentsitatearen banaketa alboko irudian adierazten da, $n = \frac{b}{\lambda} \sin\theta$ delakoaren arauera.




Intentsitatearen banaketa angeluar hau, uhin sekundarioen interferentziaz azaltzen da, θ = 0 denean interferentzia hau biltzailea delarik eta, ordea, n parametroen balio osoetarako, deuseztailea. Ez dugu egingo arazoaren azterketa matematikoa, baina intentsitatearen banaketaren azken adierazpena emango dugu:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad ,$$

non $u = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$ den. Adierazpen honetatik argi ikusten da, in-

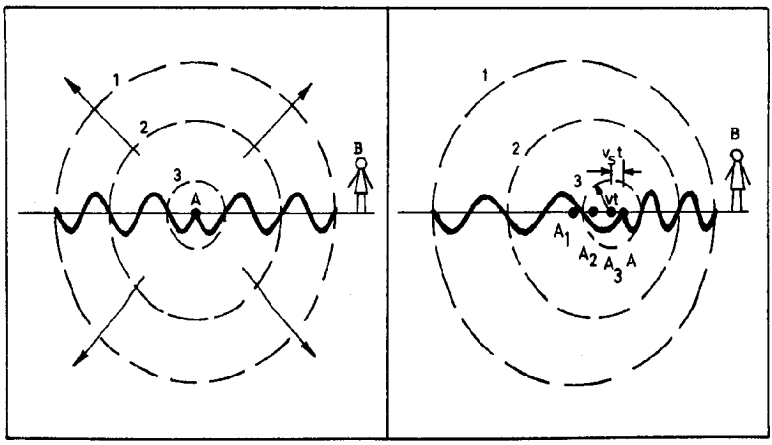
tentsitate nuluko angeluak $u = n\pi$ egiten dutenak direla, hots, $b\sin\theta = n\lambda$ egiten dutenak. Salbuespena $n = 0$ denean gertatzen da, orduan $I = I_0$ geratzen bait da, lehen esan dugun bezala.

## 17.7. DOPPLER EFEKTUA

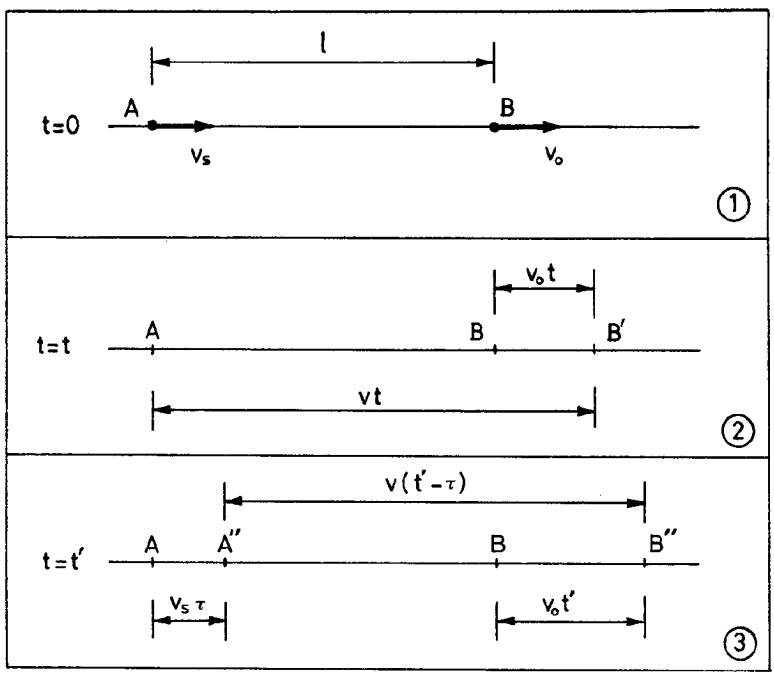
Aurreko gaian uhin mekanikoen adibideak aztertzean, ingurunearen baldintzek duten garrantziaz konturatu gara. Behin iturritik abiatu ondoren, uhin mekanikoak ingurunean zehar eta ingurunearen bidez hedatzen dira, eta ingurunea isotropoa baldin bada, hedapen-abiadurak balio berbera du norabide guztietan. Bestalde, lehenago ikusi dugunez, abiadura horrek ingurunearen propietateen menpekotasuna du. Baina uhin-fronteak esferikoak dira.

Hala ere, uhin-iturria edo behatzailea ingurunearekiko higitzen direnean —edo, hobeki esateko, elkarrekiko abiadura erlatiboa dutenean—, behatzen diren uhin-fronteen maiztasunak (behatzaileak neurtuak) desberdinak dira. Efektu honi Doppler efektua deritzo.

Hurrengo bi irudiek efektuaren sorrera adierazi nahi dute grafikoki. Bietan, iturriak uhin harmoniko jarraia sortzen du. Lehenengoan, uhin-iturria (A) geldi dago ingurunearekiko eta 1, 2 eta 3 esfera zentrukideek hiru unetan sorturiko uhin-fronteen egoera adierazten dute aldiune berean. Horrekin batera, uhinak iturriaren ezker eta eskuinaldean duen forma erakusten da. Bigarren irudian eskuinalderantz higitzen ari den uhin-iturriaren kasua agertzen da, hiru aldiunetan $A_1$, $A_2$ eta $A_3$ puntuetan dagoelarik. 1, 2 eta 3 esferek, iturria $A_1$, $A_2$ eta $A_3$ puntuetan zegoenean sorturiko uhin-fronteak adierazten dituzte. Grafikoki ikusten denez, behatzaileak maiztasun desberdinak neurtuko ditu iturriaren eskuin ala ezkerraldean egonik, edo bestela esanik, iturria berarenganantz hurbiltzean ala berarengandik urruntzean.




Doppler efektua matematikoki ere azter daiteke. Hemen kasu konkretu bat aztertuko dugu soilik, kalkuluak gehiegi korapila ez daitezen. Hurrengo irudietan adierazten dugu kasu hori.




Demagun ingurunea geldi dagoela inertzi sistema batekiko; prozesua sistema horretan aztertuko dugu. A uhin-iturria izanik, x ardatzaren norabidean $v_s$ abiaduraz higitzen dela kontsideratuko dugu. Modu berean B behatzailea $v_o$ abiaduraz higituko da, hau ere x ardatzaren norabidean; hots, x norabidean aztertuko

dugu soilik Doppler efektua. Uhin-iturriak $\nu$ maiztasunaz bidaltzen ditu etengabe uhinak. Arazoa, B behatzaileak zein maiztasunez neurtzen dituen aztertzea da.

1. irudian hasierako egoera ($t = 0$) adierazten da. $l$ delakoa aldiune horretan iturriaren eta behatzailearen artean dagoen distantzia da. Demagun $t = 0$ unean A-tik B-rantz irteten den uhina; $v$ abiaduraz higitzen da ingurunearekiko eta $t = t$ unean heltzen da B behatzailea dagoen punturaino, hots, B' punturaino (ikus 2. irudia). Ondoko erlazio geometrikoak betetzen dira:

$$\overline{AB'} = vt \qquad \overline{BB'} = v_0 t ,$$

eta beraz: $vt = l + v_0 t$

$$t = \frac{l}{v-v_0} .$$

Azter dezagun orain $\tau$ aldiunean iturritik bidaltzen den uhina. Aldiune horretan iturria A'' puntuan dago, $\overline{AA''} = v_s \tau$ izanik. Uhin-fronte hori $t'$ aldiunean helduko da behatzailea dagoen punturaino, B''-raino, $\overline{BB''} = v_0 t'$ izanik (ikus 3. irudia). Beraz, uhinak A''-tik B''-ra joateko behar izan duen denbora, $(t'-\tau)$ izan da, hots, $\overline{A''B''} = v(t'-\tau)$. Eta hirugarren irudiko erlazio geometrikoetan finkatuz:

$$v\,(t'-\tau) = l - v_s \tau + v_0 t'$$

$$t' = \frac{l + (v - v_s)\tau}{v - v_0} .$$

Behatzaileak A eta A'' puntuetan sorturiko uhin-fronteen artean neurtzen duen denbora-tartea ondokoa da:

$$\tau' = t' - t = \frac{v - v_s}{v - v_0}\tau .$$

Demagun iturriak emititzen duen maiztasuna $\nu$ dela. Horrela bada, $\tau$ bitartean sorturiko uhin-kopurua $n = \tau\nu$ da. Behatzai-

leak n uhinok $\tau'$ bitartean ikusten ditu pasatzen eta, beraz, $n = \tau' \nu'$. Gauzak horrela izanik, behatzaileak neurtzen duen maiztasuna ($\nu'$ alegia) modu honetan kalkulatzen da:

$$\nu' = \frac{\tau \nu}{\tau'} \longrightarrow \nu' = \frac{v - v_0}{v - v_s} \nu .$$

Aurrekoa da, prezeski, Doppler efektuaren adierazpen matematikoa. Argi ikusten denez, $v_0 \neq v_s$ baldin bada, $\nu \neq \nu'$ da. Hots, higidura erlatiboaren kausaz, uhin-iturriak emititzen duen maiztasuna eta behatzaileak neurtzen duena desberdinak dira.

Iturriaren eta behatzailearen arteko higidura erlatiboaren garrantzia hobeki agertzeko, $v_0$ eta $v_s$ abiadurak v-rekin konparatuz txikiak direneko kasuan, hurbilketa bat egingo dugu aurreko adierazpenean. Hain zuzen, $v_0 \ll v$ eta $v_s \ll v$ direla jorik:

$$\nu' = \frac{v - v_0}{v - v_s} \nu = \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{1 - \frac{v_s}{v}} \nu \cong \left(1 - \frac{v_0}{v}\right)\left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \nu$$

$$\nu' \cong \left(1 - \frac{v_0}{v} + \frac{v_s}{v} - \frac{v_0 v_s}{v^2}\right) \nu ,$$

eta $\frac{v_0 v_s}{v^2}$ arbuiatuz:

$$\nu' \cong \left(1 - \frac{v_0}{v} + \frac{v_s}{v}\right) \nu = \left(1 - \frac{v_0 - v_s}{v}\right) \nu = \left(1 - \frac{v_{0s}}{v}\right) \nu ,$$

non $v_{0s} \equiv v_0 - v_s$ behatzaileak iturriarekiko duen abiadura den. Azken adierazpenean oinarrituz, hiru kasu aipa ditzakegu:

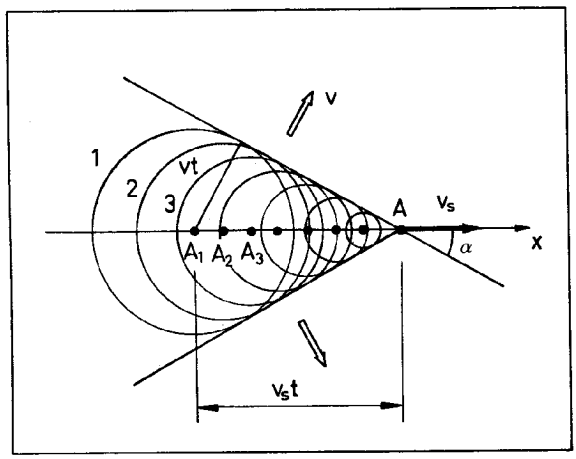
- $v_{0s} > 0$ denean, behatzailea iturritik urruntzen ari da. Kasu honetan $\nu' < \nu$ da, hots, iturrikoa baino maiztasun txikiagoa neurtzen du behatzaileak.

- $v_{0s} < 0$ denean, behatzailea iturrira hurbiltzen ari da, eta neurtzen duen maiztasuna, iturriak bialtzen duena baino handiagoa da.

- $v_{0S} = 0$ denean, $v_0 = v_S$, maiztasun berbera neurtzen da iturrian zein behatzailea dagoeneko puntuan.

Ohar bat egin behar dugu orain arte esan dugunari buruz. Behin eta berriro aipatu ditugu uhin mekanikoak eta hedatzen direneko ingurunea. Dena den, zenbait ñabardurarekin, Doppler efektua uhin elektromagnetikoen kasuan ere gertatzen da. Hain zuzen, izarretatik datorren argiaren Doppler efektua aztertuz kalkula daitezke izarrek Lurrarekiko dituzten hurbiltze- edo urruntze-abiadurak.

Bukatzeko, Doppler efektuarekin zerikusi handia duen kasu berezi bat aztertuko dugu. Zer gertatzen da, iturria v baino handiagoa den abiaduraz higitzen denean?.



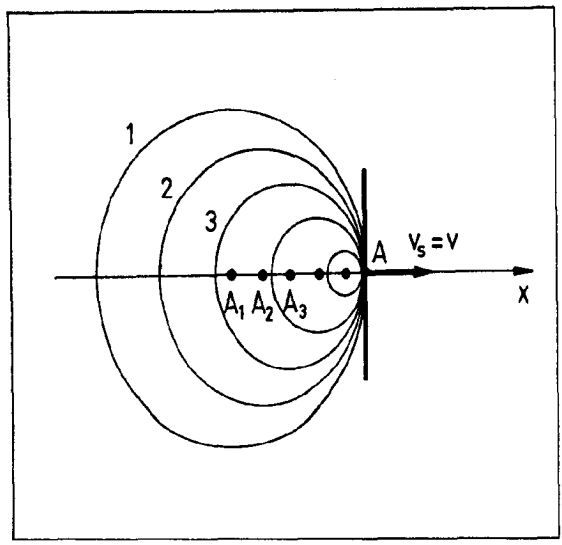

Uhin-fronte guztien tangentea den konoaren zabaldura-angelua hauxe da:

$$\sin \alpha = \frac{v\,t}{v_s t} = \frac{v}{v_s} .$$

Denetara, fronte koniko bat gertatzen da. Horrelako kasuetan sortzen diren uhin konikoei, Mach-en uhinak edo talka-uhinak deritze. Hauxe da, prezeski, hegazkinak abiadura supertsonikoz higitzen direnean gertatzen dena. Antzeko zerbait sortzen da itsasuntziak ur baretan higitzen direnean. Uraren gainazalean

uhinek dutena baino abiadura handiagoaz higitzean, angeluaren forma duten talka-uhinak sortzen dira.

Egoera berezi gisa, soinuaren horma izenekoaren azalpen grafikoa egiten da azken irudian, hots, $v_s = v$ denean sortzen den egoera.




Irudiak erakusten duenez, iturriaren aurrekaldean berak sorturiko uhinak gainezarri egiten dira fasean, ondorioz perturbazio erresultantearen anplitudea nabarmenki gehitzen delarik. Adibidez, ingurunea eguratsa bada, iturriaren aurrekaldean (hegazkinaren muturrean, kasu) airearen presioa askoz ere handiagoa da alboko puntuetan baino eta, beraz, hegazkineko gidariak azeleratu nahi badu, presiozko "hormaren" kontra jo behar du. Horixe bada, hain zuzen ere, "soinuaren hormaren apurketa" delako prozesua, zeina itzelezko zaratatsua izateaz gain, hegazkinaren egiturarako arriskugarria ere ba den.

# 18. GAIA: INTERAKZIO ELEKTROSTATIKOA

18.1. Karga elektrikoa

18.1.1. Karga elektrikoaren definizio operazionala

18.1.2. Kargaren kontserbazio-printzipioa

18.2. Coulomb-en legea

18.3. Eremu elektrikoa

18.3.1. Zenbait kargak sorturiko eremu elektrikoa

18.3.2. Eremu-lerroak

18.3.3. Kargaren kuantizazioa

18.3.4. Partikula kargatuaren higidura eremu elektriko uniformean

18.4. Potentzial elektrikoa

18.4.1. Potentzial-diferentzia

18.4.2. Potentzial elektrikoa

18.4.3. V-ren eta E-ren arteko erlazioa

18.5. Partikula kargatuaren erlazio energetikoak, eremu elektrikoan zehar higitzen denean. Potentzial elektrikoaren unitateak

18.6. Dipolo elektrikoa

18.6.1. Momentu dipolarra. Dipoloaren potentzial eta eremua

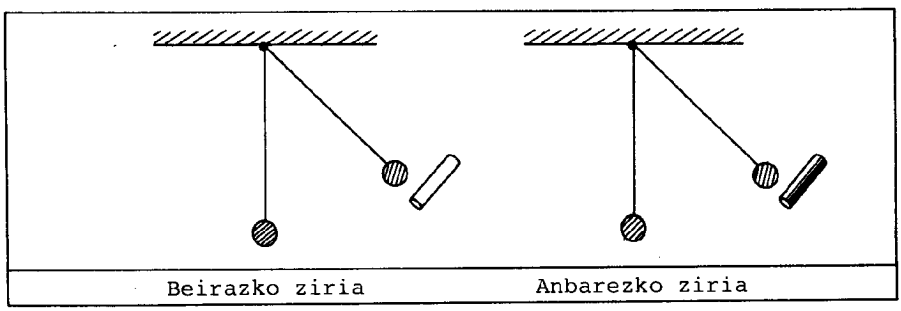
18.6.2. Dipoloaren gainean eremu elektrikoak duen eragina

Interakzio elektrostatikoa aspaldidanik ezagututako gauza da. Historian zehar, honi buruzko lehen ikerketak aintzinako greziarrek Kristo aurretiko seigarren mendean zenbait material larruz igurtziz egin zituztenak dira. Berauek, igurtziak izan ondoren, propietate berezi bat hartzen zutela ikusi zuten: zenbait gorputz txiki erakar zitzatekeela, hain zuzen ere.

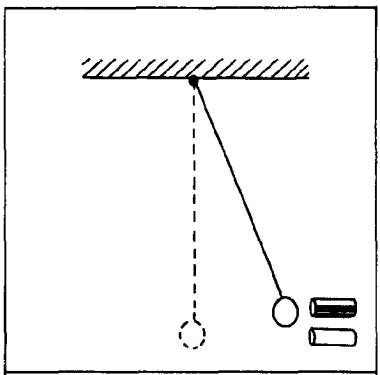
Dena den, ikerketa hauen interpretazioan ez zen aurrerapen nabaririk egin, harik eta 1.600. urtean Ingalaterrako erreginaren osagilea zen William Gilbert-ek "De Magnete" izeneko lana argitaratu zuen arte, bertan beraren lehenengo experientziak azaltzen zituelarik.

Demagun, igurzketaren bidez elektrizaturiko beirazko ziri bat, kortxozko esfera baten aurrean jartzen dugula. Beiraren elektrizazioa dela medio, kortxozko esfera beirari hurbiltzen zaio. Experientzia hau, era berdinez elektrizaturiko anbarezko ziri batekin errepikatzen badugu, beirarekin gertatutako erakarpen-fenomeno bera azaltzen dela ohartzen gara.

Experientzia hauetan oinarritu zelarik, Gilbert-ek bi materiale-mota zeudela agertu zuen; alde batetik, anbareak eta beirak bezalako jokabidea zeukatenak, zeintzuei "elektrikoak" deitu zien, eta bestetik inolako indar erakarlerik eragiten ez zutenak, azken hauei "ez-elektrikoak" izena jarri zielarik. Gaur egun, ongi jakina denez, material hauek "eroalea" eta "dielektrikoa" izenen bidez ezagutzen ditugu.



Hurrengo garrantzizko ekarpena ehun bat urte geroago etorri zen, Du Fay-ek material elektrikoen artean elektrizazio desberdin bi zeudela frogatu zuenean. Honetaz jabetzeko, jar dezagun oraingoan anbarezko eta beirazko ziriak kortxozko esferaren aurrean. Hau egin orduko, Du Fay-ek erakarpena handitu beharrean, moteldu edo erabat desagertu zela ikusi zuen. Mota honetako experimentuei jarraituz, Du Fay-ek zenbait sustantzia igurtziz gero, batzuk aldaratu eta beste batzuk elkar erakartzen zutela ikusi zuen halaber. Guzti hau kontutan hartu zuelarik, elektrizazioa bi motatakoa zela ondorioztatu zuen: alde batetik beirak sortzen duena, zeinari "positiboa" deituko diogun; eta bestetik anbareak sorturikoa, "negatiboa" deritzona, hain zuzen ere. Definizio hau, esan beharrik ez dago, guztiz arbitrarioa da, izenak alderantziz ere ipini ahal genituelarik.



Anbare eta beirazko ziriak

Hau izan da, hitz gutxitan, elektrostatikaren arloan emandako lehenengo pausoen deskribapena. Guk gai honetan kargak geldiunean daudela joko dugu; alegia, abiadurarik eta azeleraziorik gabeko kargak eta beraiek sorturiko efektuak aztertuko ditugu, hain zuzen ere.

## 18.1. KARGA ELEKTRIKOA

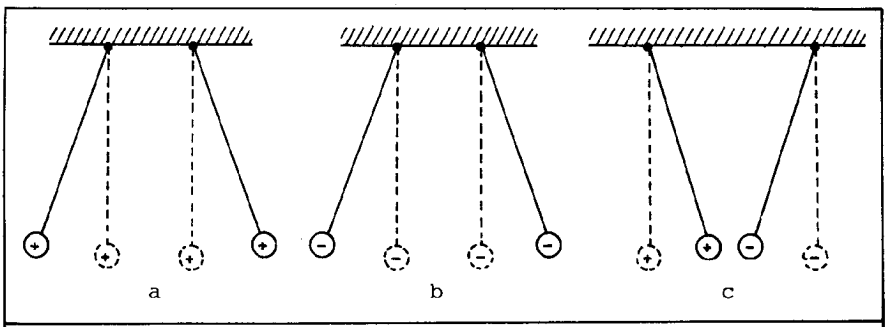
Aurreko atalean ikusi dugunez, elektrizazioa bi motatan sailkatu ahal dugu: positiboa eta negatiboa. Honen ondorioa zein den jakiteko, segidan azalduriko experimentu honetan arituko gara.

Har ditzagun kortxozko esfera bana duten bi pendulu, eta lehenik, beirazko ziri elektrizatuz ukituko ditugu biak. Ukipenaren kausaz, elektrizatu egingo dira bolak eta, zer esanik ez, biek mota bereko elektrizazioa izango dute.

Penduluak elkarren ondoan ipini bezain laster, bolek elkar aldaratu egiten dutela jabetuko gara. Anbarezko ziri elektrizatuarekin berdin egiten badugu, gauza berbera gertatzen dela ikusiko dugu.

Zer ondorio atera dezakegu experimentu honetatik? Aurrekoan oinarriturik, ondoko hau ondorioztatzen dugu:

"Elektrizazio-mota berdina duten gorputzek, elkar aldaratu egiten dute, eta, alderantziz, elektrizazio-mota desberdina dutenek, elkar erakarri".




Mota berdineko elektrizitatea duten gorputzek elkar aldaratu egiten dute (a eta b).
Mota desberdinekoek, ordea, elkar erakartzen dute (c)

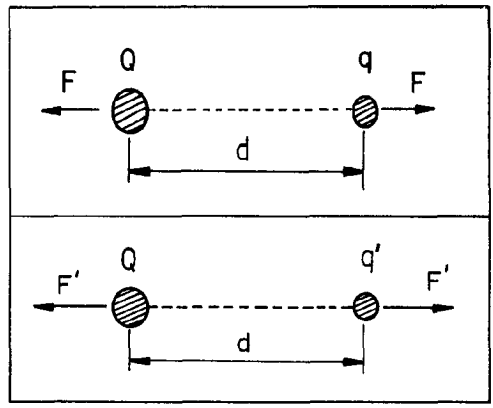
Interakzio grabitazionalaren intentsitatea, gorputz bakoitzari masa grabitazional bat egokituz arautu genuen era berean, gorputz baten elektrizazioa "masa elektrikoa" definituz arautuko dugu. Masa elektriko delako honi, karga elektrikoa deitu ohi zaio, q sinboloaz adierazten dugularik. Beraz, edozein gorputz edo partikula, oinarrizko bi propietate independentek araututa dago: masak eta kargak.

Elektrizazio positiboa azaltzen duen edozein gorputzek karga elektrikoa positiboa du, eta elektrizazio negatiboa azaltzen duen beste edozeinek karga elektriko negatiboa. Gorputz baten elektrizazio positiboaren eta negatiboaren kantitateak berdinak badira (hots, beraren karga osoa zero bada), neutroa deitzen diogu. Beste era batera esanda, materiaren ezaugarri hau, karga elektrikoa alegia, magnitude eskalartzat jo behar dugu, praktikak halakoxea dela erakusten digu eta.

### 18.1.1. Karga elektrikoaren definizio operazionala.

Karga elektrikoa operazionalki definitzeko ondoko prozedura erabiliko dugu. q karga duen gorputz bat, Q karga duen beste batetik, d distantziara jartzen dugu, q kargaren gainean sorturiko F indarra neurturik. Bestalde, Q kargatik d distantzia berdinera beste q' karga bat jartzen dugu, honen gaineko F' indarra neurtzen dugularik. q eta q' kargen baloreak, F eta F' indarren proportzionalak direla jotzen dugu definizioz. Hau da:

$$\frac{q}{q'} = \frac{F}{F'} \quad .$$




Beraz, q' kargari balore bat ematen badiogu, q kargaren balorea atera dezakegu, aurreko erlazioaren bidez. Kontutan hartzekoa da, definizio hau egitean hauxe supòsatu dugula, alegia, interakzio elektrikoak sorturiko indarra kargaren proportzionala dela. Beste hitz batzutan esanda, aipaturiko zatidurak ez dauka Q eta d direlakoen menpekotasunik. Azken hau, experimentuetatik ateratako ondorioa da.

### 18.1.2. Kargaren kontserbazio-printzipioa.

"Isolaturik dagoen sistema batetan karga osoa ez da inolako prozesutan aldatzen". Hau kargaren "kontserbazio-printzipioa" izenaz ezagutzen dugu. Karga positiboei zeinu positiboa egokitzen diegu eta negatiboei negatiboa, lehen aipatu denez karga magnitude eskalarra bait da, karga osoa hauen batura bezala defi

nitzen dugularik. Experientziak frogatu duenez, experimentu guztietan kontserbatu egiten da karga.

Bestalde, geroago ikusiko dugunez, karga ez da edozein kantitatetan agertzen, oinarrizko kargaren anizkoitzetan baizik, hots, kuantizaturik, eta gainera, oinarrizko karga positiboa eta negatiboa neurri berekoak izango dira.

## 18.2. COULOMB-EN LEGEA

Elektrostatikan, partikula bik elkarri egiten dioten indarra Coulomb-en legearen bidez adierazten da. Izen hau Charles A. de Coulomb-en (1736-1806) oroimenez jarri zen, zeinak anitz ikerketa eta neurketa egin ondoren, lege hau proposatu zuen: "Bi partikula kargaturen arteko interakzio elektrostatikoa, partikula horien karga-kantitateen proportzionala da eta distantziaren karratuaren alderantzizko proportzionala, interakzionaren norabidea karga biek osotzen duten zuzenarena izanik".

Izatez, kargaren definizio operazionala ematean egindako hipotesiaz definitu dugu halaber lege hau, kargaren proportzionaltasunari dagokionez. Ez, ordea, distantziari dagokionez.

Analitikoki, honela adierazten da lege hau:

$$\vec{F}' = K_e \frac{q\,q'}{r^2}\,\hat{r} \quad , \qquad (1)$$

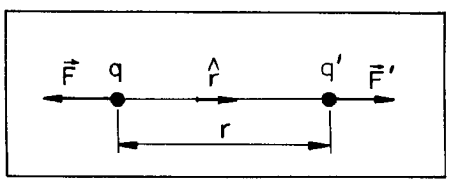
non $q,q'$ karga-kantitateak

$r$ partikula biren arteko distantzia

$\hat{r}$ karga biek osotzen duten zuzenaren norabideko bektore unitarioa

$K_e$ konstantea

diren, alboko irudian ikusten den modura:



Lege honen formulazioari buruz, zenbait ohar egin behar ditugu:

a) Izatez, $\vec{F}'$ indarra q kargak q' kargaren gainean egiten duena da. Eta alderantziz, $\vec{F}$ indarra q' kargak q kargaren gainekoa.
$\vec{F}'$ indarrak analitikoki adieraztean, q kargatik q' kargarako norantza duen bektore unitarioa hartzen dugu. Orduan, formulako q eta q' kargak, bakoitza, dagokion zeinuarekin idazten dugu. Biak zeinu berekoak direnean, biderkadura positiboa da eta $\vec{F}'$ bektoreak $\hat{r}$ bektorearen norantza berbera dauka, hots, indar aldaratzailea da. Ostera, zeinu desberdinekoak badira, biderkadura negatiboa da eta $\vec{F}'$ bektoreak $\hat{r}$ bektorearen aurkako norantza dauka, hots, indar erakarlea da. Zeinuen erizpide honen arauera, argi betetzen da akzio-erreakzioaren printzipioa, hau da, $\vec{F} = -\vec{F}'$ .

b) Coulomb-en legearen balioa, elektrostatikan kokatzen da; hau da, kargek geldiunean egon behar dute behatzailearen erreferentzi sistemarekiko, edo lehen-lehenengo hurbilketaz, higitzekotan, oso abiadura txikiaz egin beharko lukete argiarenarekin alderaturik.

c) Coulomb-en legea erabat zuzena izan dadin, kargek puntualak izan behar dute.

Begi bistakoa denez, lege hau interakzio grabitazionalaren gaian aurkitu genuenaren antzekoa da. Han, ondoko hau aurkitu genuen:

$$\vec{F}' = -\gamma \frac{m\,m'}{r^2} \hat{r} \quad .$$

Sakonkiago aztertuko ez badugu ere, guztiz argi agertzen zaigu bi lege hauen arteko paralelismoa.

Coulomb-en legearen adierazpenean, $K_e$ eta q direlakoak determinatzeke geratu zaizkigu. Honetaz baliaturik, bietariko bati balore bat ematen badiogu, bestea zuzen aurki dezakegu, alegia, bata finkatuta bestea erabat determinaturik geratzen da. Azken batez, honek unitate-modu bat definitzera garamatza.

Arrazoi historikoengatik, $K_e$ konstanteari $10^{-7} c^2$ balorea ematen zaio, non c delakoa argiak hutsean duen abiadura den.

Guzti hau dela eta, hauxe idatz dezakegu:

$$K_e = 10^{-7} c^2 = 8'9874 \,.\, 10^9 \simeq 9 \,.\, 10^9 \text{ Nw m}^2 \text{ C}^{-2} ,$$

non C delakoa karga-unitatea adierazteko darabilgun ikurra den. $K_e$-ren dimentsioak hauexek dira Nazioarteko Sisteman:

$$[K_e] = m^3 \text{ kg } s^{-2} \text{ C}^{-2} \,.\, (\text{hots, } M\, L^3\, T^{-2}\, Q^{-2}) \,.$$

Lehentxoago aipatu dugunez, behin $K_e$ finkatuta dagoela, q ere finkatuta geratzen da. Honetaz, q delakoaren balore unitatea definitzeko balia gaitezke, berau Coulomb izenaz ezagutzen dugularik, eta C letraren bidez adierazten dugu. Hauxe da, hain zuzen, Coulomb unitatearen definizioa:

"Coulomb karga-unitatea, hutsean beste karga berdin batetik metro batetara jarrita, elkarren artean $8'9874.10^9$ Nw-etako aldaratze-indarra sortzen duena da".

Arrazoi praktikoak direla kausa, formuletan komenigarriagoa izaten da $K_e$ era honetan adieraztea:

$$K_e = \frac{1}{4\pi \varepsilon_o} ,$$

non $\varepsilon_o$ delakoa, <u>hutsaren permitibitatea</u> deritzon magnitudea den. $K_e$-ri dagokion balorearen arauera, $\varepsilon_o$ hau izango da:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi K_e} = 8'854 \,.\, 10^{-12} \text{ Nw}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 ,$$

eta beraren dimentsioak Nazioarteko Sisteman:

$$[\varepsilon_o] = m^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2 \,.\, (\text{hots, } M^{-1}\, L^{-3}\, T^2\, Q^2) .$$

Azkenean, Coulomb-en legearen itxura horrelaxekoa da:

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi \varepsilon_o} \frac{q\, q'}{r^2} \hat{r} \,.$$

Ikus dezagun orain, q karga baten gainean karga-multzo batek, $q_1$, $q_2$,... $q_n$ kargek osoturiko multzoak esaterako, eragiten duen indarra zein den. Gainezarmenaren printzipioa erabiliz, hauxe ipin dezakegu:

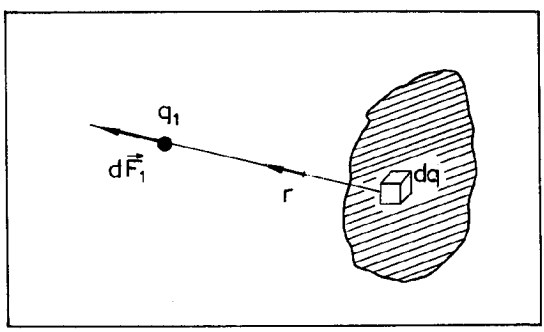
$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{n} \frac{q\, q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad , \qquad (2)$$

non $r_i$, q eta $q_i$ kargen arteko distantzia den, eta $\hat{r}_i$, q eta $q_i$ kargek osoturiko zuzenaren bektore unitarioa, $q_i$-tik q-ra orientaturik egonik, hain zuzen ere. Izatez , gainezarmenaren printzipioa erabiltzean ondoko hipotesi hau egiten dugu: alegia, $q_i$ eta q kargeen arteko interakzioak ez du ezelako aldaketarik pairatzen, inguruetan beste edozein karga egoteagatik.

Orain arte, karga zenbait puntutan kokatuta zegoela suposatu dugun arren, honen ordez espazioaren zonalde batetara hedaturik balego, dq karga txikiek sorturiko indarren batuketa bektoriala egin beharko genuke. Beraz honela idatziko dugu:

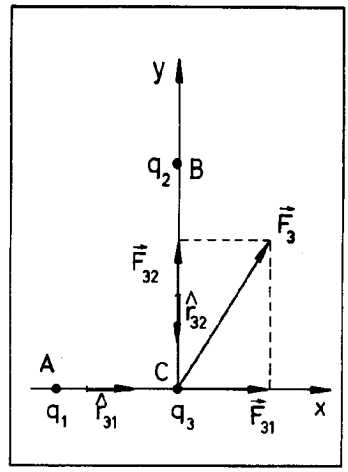
$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{q_1\, dq}{r^2} \hat{r} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad , \qquad (3)$$

non $\hat{r}$, dq eta $q_1$ kargek osoturiko norabide aldakorreko zuzenaren bektore unitarioa den, lehen esan den bezalako orientazioa daukalarik.



ADIBIDEA

Demagun, $q_1$, $q_2$, $q_3$ kargak ditugula, irudian agertzen diren moduan.




$q_1 = 1'5 \cdot 10^{-3}$ C .

$q_2 = -0'5 \cdot 10^{-3}$ C .

$q_3 = 0'20 \cdot 10^{-3}$ C .

$\overline{AC} = 1'2$ m eta $\overline{BC} = 0'50$ izanik.

Lor bedi, $q_3$ kargak jasaten duen indar erresultantea.

$$\vec{F}_{31} = \frac{q_1 \, q_3}{4\pi\varepsilon_o \, r_1^2} \, \hat{r}_{31} = 1'9 \cdot 10^3 \, \hat{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{q_2 \, q_3}{4\pi\varepsilon_o \, r_2^2} \, \hat{r}_{32} = 3'6 \cdot 10^3 \, \hat{j} \text{ N} .$$

$\vec{F}_{ij}$ sinboloen bidez, j partikulak i partikularen gainean eragiten duen indarra adierazten dugu.

Beraz,

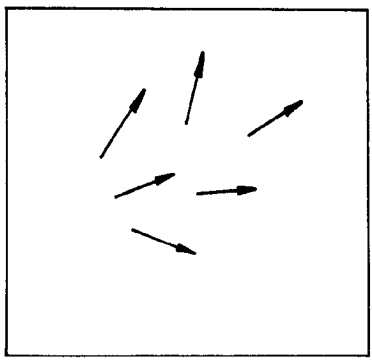
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 1'9 \cdot 10^3 \, \hat{i} + 3'6 \cdot 10^3 \, \hat{j} \quad \text{N} ,$$

eta beronen modulua hauxe da:

$$F_3 = \sqrt{F_{31}^2 + F_{32}^2} = 4'06 \cdot 10^3 \quad \text{N} .$$

## 18.3. EREMU ELEKTRIKOA

Coulomb-en legearen arauera, karga baten eragina espazio osora hedatzen da. Espazioko edozein puntutan beste karga bat jarriz gero, azken honek indar bat pairatzen du. Beraz, espazioan eremu bektorial bat definiturik dugula esan dezakegu. Hau dela eta, eremu elektrikoa era honetan defini genezake: Puntu batetako eremu elektrikoa, puntu horretan legokeen karga positiboaren unitateak jasango lukeen indarra da. Nolabait, eremu elektrikoak indar elektrikoaren neurketa suposatzen duenez, magnitude bektoriala izango da, eta $\vec{E}$ letraren bidez adieraziko dugu.



Eremu elektrikoa, eremu bektoriala da, espazioaren puntu bakoitzari bektore bat dagokiolarik.

Analitikoki, eremu elektrikoa honelaxe adieraz dezakegu:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad (4)$$

Adierazpen honetan, $\vec{F}$ indarra q lekuko karga duen partikulari eragiten dioten indar elektriko guztien erresultantea da.

Nazioarteko Sisteman, eremu elektrikoa $NC^{-1}$ unitateetan neurtzen da, eta bai $Vm^{-1}$-tan ere (ikus 18.4.3. atala), beraren laborategiko balore normalak $10^4 \div 10^6$ $Vm^{-1}$ izanik. (4) formula sakonkiegi aztertzen ez badugu ere, begi bistako ondorio hau atera dezakegu, alegia, q karga positiboa denean $\vec{E}$ eta $\vec{F}$ direlakoek norabide eta norantza berbera dute; ostera, q negatiboa deneko kasuan, aurkako norabidea dute.

Aurreko atalean ikusitako Coulomb-en legean oinarritzen garelarik, karga puntual batek sorturiko $\vec{E}$ eremu elektrostati-

koa honelaxe idatz dezakegu:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} , \qquad (5)$$

oraingoan, $\hat{r}$ bektoreak direkzio erradiala du, q dagoeneko puntutik E aztertzen duguneko punturantz orientatuta dagoelarik.

18.3.1. Zenbait kargak sorturiko eremu elektrikoa

Lehenago ikusitako gainezarmenaren printzipioan oinarriturik, n kargek osoturiko sistema bat duguneko kasuan, hauxe izango da karga-sistema honek sortzen duen eremu elektrikoa:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i . \qquad (6)$$

Fisikaren ikuspuntutiko honen esangura, hauxe da: puntu batetan karga batzuk sorterazten dituzten eremu elektrikoak biltzen direnean, eremu bakarra soilik bailitzen kontsidera daiteke, beronen intentsitatea (6) adierazpenaren bidez emanda datorkigularik. Bestela esanda, azken hau eremu elektrostatikoak gainezarmenaren printzipioa betetzen duelako frogapena da:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_A \frac{dq}{r^2}\hat{r} , \qquad (7)$$

non, A integrazio-barrutia, kargak daudeneko espazioaldera hedaturik dagoen.

Dakusagun orain, eremu elektrikoari buruzko xehetasun bat. Eremu elektrostatikoa zehazkiago definitu nahi izango bagenu, honelaxe egin beharko genuke:

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta q} \quad \text{edo} \quad \vec{E} = \frac{d\vec{F}}{dq} \qquad (8)$$

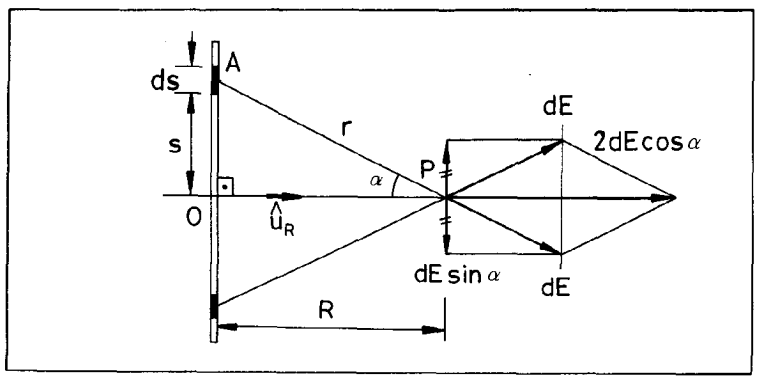
Hau da, froga-kargaren balioa zerorantz doanean, indarrak hartzen duen balorea da eremua, alegia, karga unitateko indarra.

Xehetasun hau beharrezkoa da, zeren zenbait kasutan froga--kargaren presentzia hutsa, eremu elektrikoa sortzen duen karga-banaketa aldatzeko aski bait da, eta beraz, eremu elektrikoaren balorea ez da berbera froga-karga sartu aurretik edo sartu ondoren, aipaturiko kargak, halaber, eremu elektrostatiko bat sortzen bait du.

Dena den, (6) eta (7) adierazpenek garrantzi handia dute, eremua kalkulatzeko prozedura egokia ematen digute eta.

## ADIBIDEA

Lor bedi, luzera unitateko $\lambda$ karga-dentsitatea duen hari batek sortzen duen R distantziarako eremu elektrikoaren intentsitatea.




Haria ds zatitan bana dezakegu, eta ds zati bakoitzari dagokion karga hauxe da:

$$dq = \lambda \, ds.$$

Dakigunez,

$$E = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_o r^2} ,$$

eta $dE = \dfrac{dq}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2} = \dfrac{\lambda\,ds}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2}$ izango da, $\vec{AP}$ norabidean orientaturik dagoelarik. dE delakoaren bidez modulua adierazten dugu.

Dena den, problema nabariro errazten zaigu bere barnean dagoen simetriaz jabetzen bagara. dE . sin$\alpha$ osagaia, beste ds batek duen -dE . sin$\alpha$ simetrikoarekin anulatu egingo da, eta honela, denetara, 2dE . cos$\alpha$ soilik geratuko da OP norabidean. Honetaz, eremu elektrikoa OP norabidean hauxe izango dugu:

$$E = \int_0^{\pi/2} 2d\,E\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_0^{\pi/2}\frac{2\,ds}{r^2}\cos\alpha \quad .$$

Integral honen ebazpena, $\alpha$ parametroaren bidez burutzen dugu:

$$r = \frac{R}{\cos\alpha} \quad ,$$

eta irudian ikusten den bezala, $s = R\,tg\alpha$ . Beraz,

$$ds = \frac{R\,d\alpha}{\cos^2\alpha} \quad . \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$$

Azkenean, E honela geratzen zaigu:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o R}\int_0^{\pi/2} 2\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o R} \quad .$$

Eta era bektorialean:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o R}\,\hat{u}_R \quad .$$

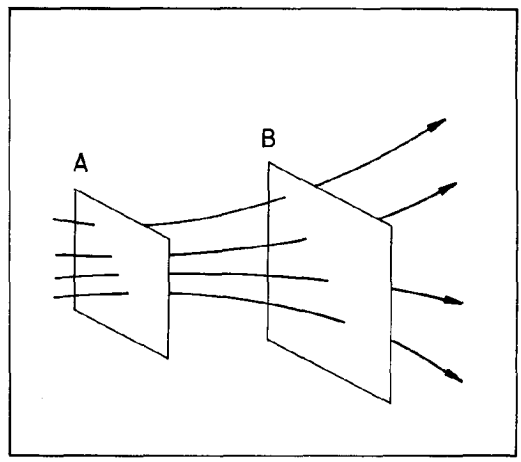
Adierazpen honetan, $\hat{u}_R$ bektore unitarioak OP zuzenaren direkzioa du, eta haritik $\vec{E}$ aztertzen deneko punturantz orientaturik dago.

## 18.3.2. Eremu-lerroak.

Eremu elektrikoa nolabaiteko era grafikoan adierazteko, eremu lerroak erabiltzen dira. Berauek karga positiboetan sortu edo hasten dira, karga negatiboetan bukatzen direlarik. Lerro jarraiak dira, beraien "iturri" (karga positiboak) edo "hobietan" (karga negatiboak) izan ezik.

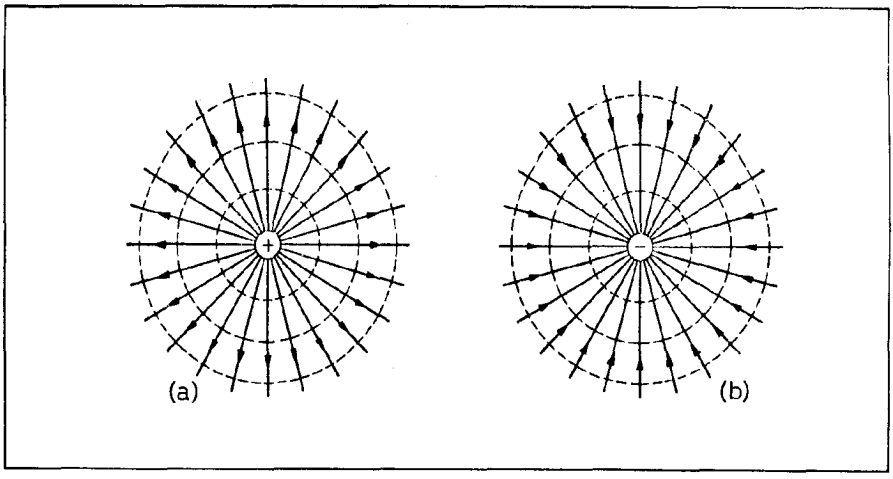
Karga gainean sortzen edo amaitzen den lerro-kopurua, karga horren balorearen proportzionala da. Lerro hauen norabidea, eremu elektrikoak puntu bakoitzean duen berbera da, lerro-dentsitatea eremu elektrikoaren intentsitatearen arauerakoa delarik. Lerro-dentsitatearen bidez, eremu-lerroen perpendikularra den gainazal bat zeharkatzen duen gainazal-unitateko lerro-kopurua adierazi nahi dugu.

Eremu-lerroak gainazal bi (A eta B) zeharkatzen. Lerro-dentsitatea, eta beraz eremuaren intentsitatea handiagoa da A gainazalean B delakoan baino.

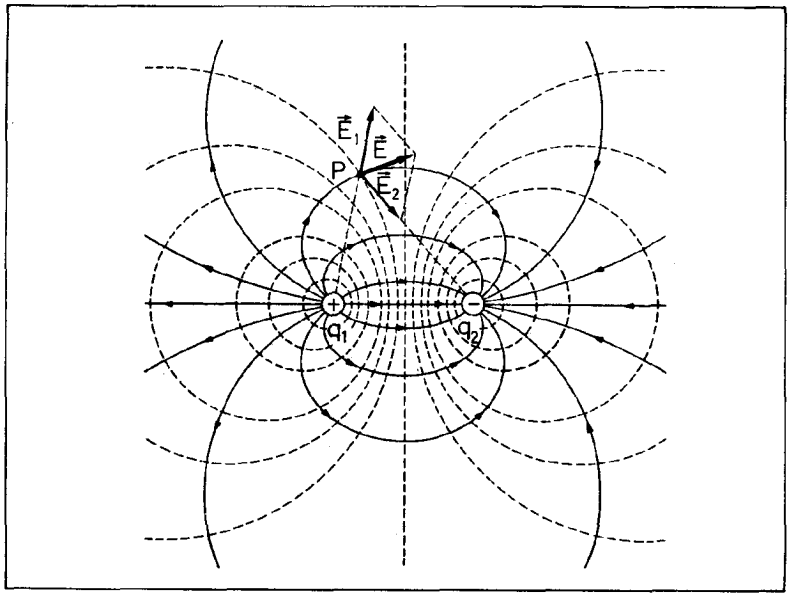



Eremu-lerroak, indar-lerroak izenaz ere ezagutzen dira.

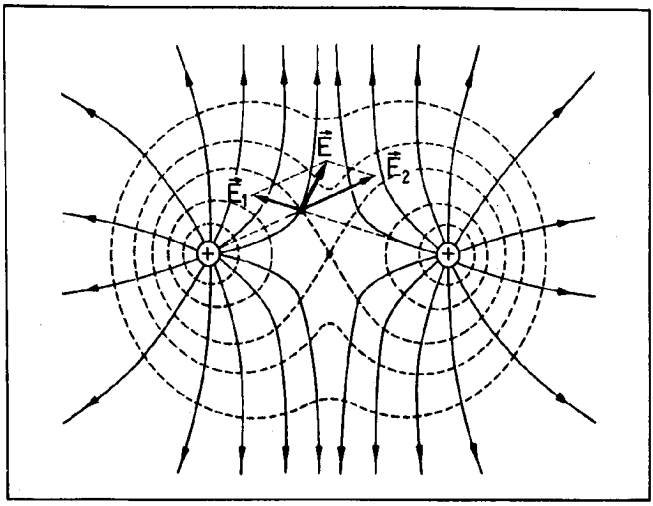
Eremu-lerroekin batera gainazal ekipotentzialak ere irudikatu ohi dira. Azken hauek lerroen perpendikularrak dira, eta potentzial berbereko puntuak biltzen dituzte. Esandakoaren azalpen eta justifikazioa 18.4.3. puntuan emango da. Halaber, eranskinean sakonago aztertuko da arazoa. Hurrengo irudietan zenbait adibideri dagozkien eremu-lerroak (lerro jarraiak) eta gainazal ekipotentzialak (lerro ez-jarraiak) adierazten dira.




karga positibo (a) eta karga negatibo (b) baten eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.



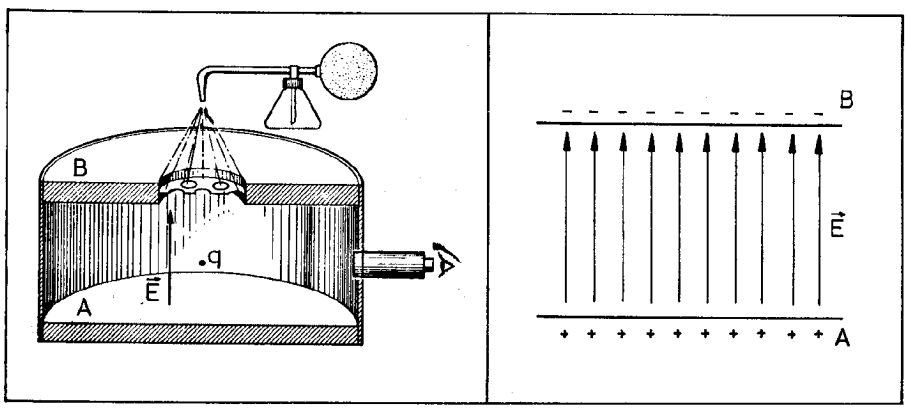

+q eta -q kargak sorturiko eremu elektrikoaren eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.




Bi karga berdinek sorturiko eremu elektrikoaren eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak.

### 18.3.3. Kargaren kuantizazioa

Behin eremu elektrikoa zer den jakin ondoren, atzeko puntu batetara itzul gaitezke, kargaren kontserbazioaren aipamenari jarraipena emanez, kargaren kuantizazioa adierazten duen experimentu bat aztertuko dugularik. Experimentu honen bidez, esan bezala, karga kuantizatuta dagoela ikusiko dugu, alegia, karga ez dela edozein kantitatetan agertzen, oinarrizko kargaren anizkoitzetan baizik. Berau frogatu nahian, Millikan-ek egindako experimentuan oinarrituko gara, eta beraz, segidan experimentu hau zertan datzan ikusiko dugu.




Millikan-ek plaka bi, A eta B, paraleloki jarri zituen, eta goiko plakan (B delakoan hain zuzen) eginiko zulo batzuta-

tik, olio lainoztatua bota zuen. Olio-tanta txikiak zuloetatik pasatzean, zuloenhormak igurtziz kargatu egiten dira elektrikoki. Jaisten den bitartean, olio-tantaren gainean eragiten duten indarrak hauexek dira:

- grabitatearena ..... $m\vec{g}$
- kutxa barruan dagoen gasarekiko marruskadura: $-6\pi\mu r\vec{v}$

Hau Stokes-en formula da. (ikus 5.6 puntua).

- goranzko bultzadaren indarra: ..... $-m_\rho\vec{g}$

non, $\mu$ biskositatea
$r$ tantaren erradioa
$v$ abiadura
$m_\rho$ fluidoaren masa desplazatua(Arkhimedes.Ikus 13.4)

diren.

Orain arte ez dugu $\vec{E}$ eremu elektrikoa kontutan hartu, orain dik berau sisteman sartu ez bait dugu. Hau horrela izanik, tantaren erorketa-higidura ematen digun ekuazioa hauxe da:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_\rho\vec{g} - 6\pi\mu r\vec{v} .$$

Dena den, hau oso denbora txikian gertatzen da, alegia, ekuazioa betetzen deneko denbora oso laburra da, zeren goranzko eta beheranzko indarrak berehalaxe orekatzen bait dira. Azelerazioa zero denean, $\vec{v}$ abiadurak hartzen duen balore konstanteari ($v_l$) "muga-abiadura" deritzo, beraren balorea hauxe delarik:

$$v_l = \frac{(m - m_\rho)}{6\pi\mu r} g \quad . \qquad (9)$$

Behin hau ikusi ondoren, hurrengo pauso bezala $\vec{E}$ eremu elektrikoa sartuko dugu, partikularen gaineko beste indar bat sorteraziz. Honen ondorioz, higidura-ekuazioa honelaxe geratzen zaigu:

$$m\vec{a} = q\vec{E} + m\vec{g} - m_\rho\vec{g} - 6\pi\mu r\vec{v} .$$

Lehen gertatzen zen bezalaxe, oso denbora laburrean $\vec{a} = 0$ egiten da, oraingo muga-abiadurari $v_2$ deitzen diogularik:

$$0 = q\vec{E} + m\vec{g} - m_p\vec{g} - 6\pi\mu r\vec{v}_2,$$

eta hemendik $v_2$ aska dezakegu:

$$v_2 = \frac{qE + (m_p - m)g}{6\pi\mu r} .$$

Beraz, karga hauxe izango da:

$$q = \frac{(m - m_p)g + 6\pi\mu r v_2}{E} , \qquad (10)$$

eta (9) delakoa (10) adierazpenean sartuz, ondoko hau aurkitzen dugu:

$$q = \frac{6\pi\mu r (v_1 + v_2)}{E} . \qquad (11)$$

Aurrera segitu baino lehen, zenbait irazkin egitea behar--beharrezkoa dugu:

1.- Higidura-ekuazioan agertzen diren bektore guztiek norabide berbera dute, eta hauxe da hain zuzen ere, aztertzerakoan magnitude eskalarrak bailiren konsideratzearen arrazoia.

2.- Stokes-en gaia, marruskadura-indarra denez gero, beti higiduraren aurkakoa da, eta horregatik higidura gertatzen denekoaren aurkako norantza du.

Teorikoki, (11) adierazpenetik q aurki dezakegu, $v_1$, $v_2$, r, $\mu$ eta E direlakoen funtzioan. Hala ere, praktikan q-ren aldaketak $v_2$-ren aldaketen funtzioan neurtzea askoz errezagoa izaten da (kontutan izan, $v_1$ konstantea dela beti). Hau dela eta, ondoko erlazio hau lortzen dugu:

$$\Delta q = \frac{6\pi\mu r}{E} \Delta v_2 .$$

Millikan-en experimentu honetan ikusi zenez, $\Delta q$ kalkulatzean ateratako baloreak, beti suertatzen ziren karga elemental baten anizkoitzak. Karga elemental honi e deitu zitzaion, eta beraren balorea hauxe da Nazioarteko Unitate-Sisteman:

$$e = 1'6021 \cdot 10^{-19}\ C$$

Orain arte, inolako experimentuk ez du hau ukatu, eta beraz funtsezko legetzat onar dezakegu, hau da: "Naturan agertzen diren karga guztiak, e oinarrizko kargaren anizkoitzak dira; hots, karga elektrikoa kuantifikaturik dago".

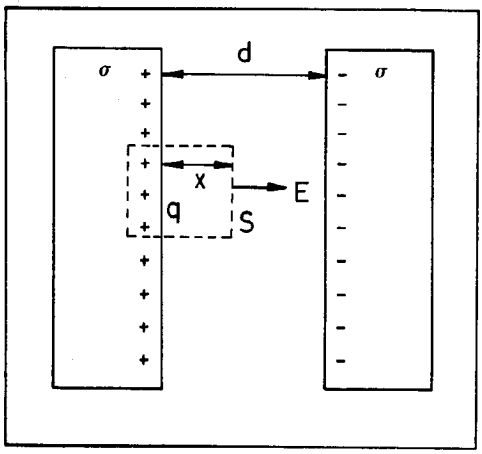
e delakoari oinarrizko karga deritzogu, eta beti m masa bati datxekio, oinarrizko partikula bezala ezagutzen duguna ostuz: elektroia, protoia.....

Sakonkiago aztertuko ez badugu ere, aipatu beharra daukagu, gaur egungo azken teoriak ez datozela batera azken parrafoan aipatutako ideia honekin. Gaur egun unibertsoaren oinarrizko osagaiak beste batzu direla pentsatzen dugu, alegia, leptoiak, quark eta bitarteko bosoiak, quark batzuen karga $\frac{2}{3}$ e, eta beste batzuena $-\frac{1}{3}$ e izanik. Dena den, teoriak azken hau aurresaten duen arren, oraindik ez da experimentuek baieztatua izan.

### 18.3.4. Partikula kargatuaren higidura, eremu elektriko uniformean

Lehenik, eremu elektriko uniformea zein den argituko dugu. Eremu elektriko uniformeak, definizioz, puntu guztietan intentsitate eta norabide berbera du, beraren indar-lerroak paraleloak dira, distantzia berdinetara daudelarik.

Atal honetako gaian murgildu baino lehen, kalkula dezagun, bi xafla kargatu eta paralelok sorteraziriko eremu elektrikoa zein den. Honetarako, eranskinean aipatzen den Gauss-en teoremaz baliatuko gara, ertzetako arazoak arbuiagarriak direla jotzen dugularik. Beste aldetik ere, demagun, azalera-unitateko karga-dentsitatea $\sigma$ dela.




Gauss-en teorema erabiliz:

$$\emptyset = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\ S = \frac{q}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma\ S}{\varepsilon_o}.$$

Beraz, hauxe ondorioztatzen dugu:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \text{kte, alegia,}$$

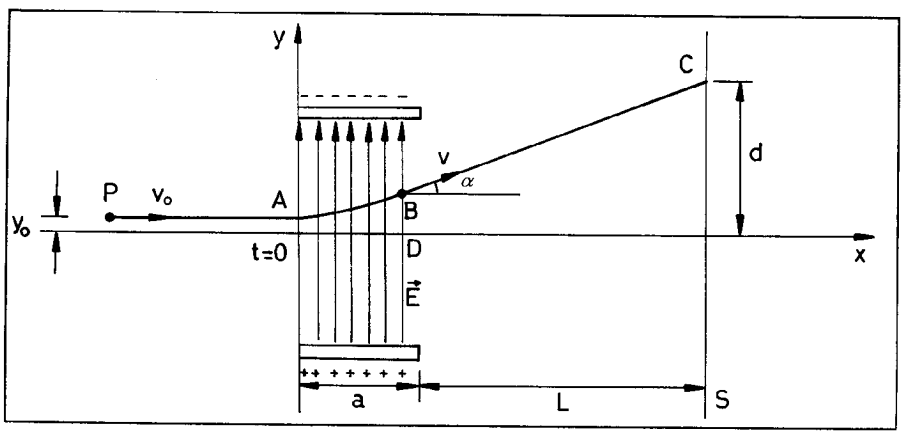
$\vec{E}$ eremu elektrikoa, uniformea da xaflen artean.

Azter dezagun orain, nolakoa den partikula kargatu batek eremu horretan duen higidura. $\vec{F} = m\vec{a}$ Newton-en legetik abiatuz $m\vec{a} = q\ \vec{E}$ dugu, eta hemendik,

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \text{kte,}$$

eremu elektriko uniformean.

Ikus dezagun orain, partikula kargatua eremu elektriko uniforme batetik pasatzerakoan nola higitzen den. Azelerazioa konstantea denez, AB ibilbide-zatia parabolikoa dela ikusiko dugu.




P partikula eremura sartu baino lehen, $\vec{E}$ delakoaren perpendikularra den norabide batetan higitzen da, $\vec{v}$ abiadura duela

eremutik irtetean. Beraz, nabaria denez, $\vec{E}$ eremuak P partikularen higidura aldatu du (ikus irudia).

Ardatz nagusiak, irudian agertzen diren bezala kontsideratzen baditugu, eremuan zehar higitzen ari den bitartean, partikularen koordenatuak hauexek dira:

$$x = v_o\, t,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m} E\right) t^2 , \qquad (y_o \text{ arbuiaturik})$$

zeren, lehen ikusi dugunaren arauera, eremu elektriko uniforme batetarako, $a_y = \frac{q}{m} E$ bait da.

Aurreko bi ekuazioetatik t ezabatuz, hauxe lortzen dugu:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{E}{v_o^2}\right) x^2 ,$$

eta hau parabola baten ekuazioa baino ez da (A B tartean, noski). Zer esanik ez, PA eta BC zuzenak dira, hor inolako indarrik ez bait dago, edo zehazkiago esanda, beste edozein indarren eragina, arbuiagarritzat jotzen bait dugu indar elektrikoarenarekin alderaturik.

$\alpha$ delako angeluaren tangentea hauxe da:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{q\,Ea}{m\,v_o^2} ,$$

eta L distantziara S pantaila jartzen badugu, $\overline{BD}$ d distantziarekin konparatuta oso txikia denez, L handia bait da, ondoko hau idatz dezakegu:

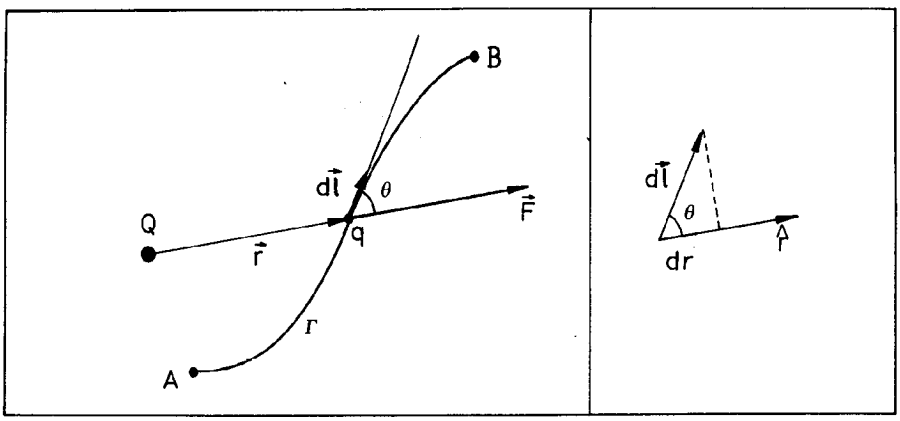
$$\frac{q\,Ea}{mv_o^2} = \operatorname{tg}\alpha \simeq \frac{d}{L} ,$$ non d deflexioa deritzona den.

Ekuazio honetan E, a, d, L jakinik, eta $\frac{q}{m}$ finkatuta dugunekо kasuan, $v_o$ lortzen dugu. Alderantzizko prozedura segitzen badugu, behin $v_o$ finkatu ondoren, $\frac{q}{m}$ zatidura erdiets dezakegu.

Ondorio bezala, hauxe atera daiteke: $\frac{q}{m}$ zatidura berdineko partikula-sorta bat eremu elektriko batetik iragatean, deflexioa, $v_o$-ren edo energiaren funtzioa izango da. Beraz, irudian agertzen dena, energiaren aztertzaile bezala erabil genezake.

## 18.4. POTENTZIAL ELEKTRIKOA

Aurreko atalean, karga batek zonalde batetan eragiten du en perturbazioa deskribatzeko, eremu elektrikoa definitu dugu. Orain perturbazio hau magnitude eskalar baten bidez adierazten saiatuko gara. Horretarako, dakusagun lehenik, Coulomb-en legeak eremu kontserbakor bat definitzera garamatzala.




Demagun, Q karga puntu ezagun batetan geldiunean dugula. A puntutik B-ra q beste karga bat eramatean, bigarren karga honen gaineko indar elektrikoak egindako lana $\Gamma$ kurba batetan zehar hauxe da:

$$W_{AB} = \int_{\Gamma}^{B}_{A} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma}^{B}_{A} F \cos\theta \, |d\vec{l}| \ .$$

Baina, eskuineko irudian ikusten denez, $\cos\theta \, |d\vec{l}| = dr$ da, hots, karga bien arteko distantziaren aldakuntza infinitesimala. F adierazteko Coulomb-en legea erabiltzen baldin badugu, ondoko hau dugu:

$$W_{AB} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_o} \int_{A}^{B} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_o} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

eta ondorioz, hauxe esan dezakegu: lanak ez dauka karga eramateko aukeratu den ibilbidearen menpekotasunik; beraz, eremua kontserbakorra da.

$$W_{AB} = q \int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = f(A,B) \Longrightarrow$$

$$\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = g(A) - g(B) \ ,$$

eta B puntua A bihurtzekotan, garrantzi handiko adierazpen hau lortzen dugu:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \ . \qquad (12)$$

Kalkulu hauek laburki egin baditugu ere, zehaztasun gehiagorako, liburu honen amaierako eranskinean ikus daiteke. Halaber, ohar gaitezen, hemen eta eremu grabitazionala ikusi genuenean egindako kalkuluak oso antzekoak direla, desberdintasuna konstanteetan datzalarik soil-soilik.

Frogatu berri dugunez, karga batek sorturiko eremua kontserbakorra da, eta gainezarmenaren printzipioaren arauera, berdin gertatuko da edozein karga banaketak sorturiko eremurako.

Eremua kontserbakorra denez, defini dezagun eremu bektorial horri dagokion eremu eskalarra, eta halaber, beronen funtzio eskalarra, energia potentziala hain zuzen ere.

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} q\, \vec{E}\cdot d\vec{l} = E_{p_A} - E_{p_B} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_o} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) .$$

Beraz, energia potentziala era honetan idatz dezakegu:

$$E_p = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_o} \ \frac{1}{r} + k \ .$$

Askotan, infinituango energia potentziala zerotzat hartzen

da; hau da, k = 0. Hau egiten duguneko kasuan $E_p$-ren adierazpena honelaxe geratzen zaigu:

$$E_p(r) = \frac{q\,Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{1}{r} \quad . \qquad (13)$$

Dena den, beste kasu batzutan ez da horrelaxe egiten, geroago ikusiko dugunez. Jakina denez, $E_p$ Joule-tan neurtzen da M.K.S.C. sisteman.

Behin goikoa ikusi ondoren, perturbazio elektrostatikoa ere magnitude eskalar baten bidez deskriba dezakegu. Hau egiteko asmoz, potentzial elektrikoa eta potentzial-diferentzia definituko ditugu.

### 18.4.1. Potentzial-diferentzia

Karga bat puntu batetik bestera eramateko behar den karga-unitateko energia, potentzial diferentzia deitzen dugu. Definizio honen arauera:

$$V_{AB} = \frac{E_{pA} - E_{pB}}{q} \quad ,$$

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \quad . \qquad (14)$$

### 18.4.2. Potentzial elektrikoa

Puntu batetarako V potentziala, definizioz, karga bat infinitutik aipaturiko puntu honetara eramateko behar den karga-unitateko energia da. Beraz:

$$V = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{1}{r} \quad . \qquad (15)$$

Definizio honetan zera onartu dugu inplizituki: karga batek sortutako eremu elektrikoaren kasuan, kargatik oso urrun dauden puntuei (infinituan daudenei, hizkera matematikoaz) da

gokien potentziala nulua dela, lehen azaldu dugun bezala. Suposamendu hori teoria mailako ariketa gehienetan egokia gertatzen bada ere, guztietan ez da horrela gertatzen, eta zenbait kasutan aldatu beharra dago, haren ordez beste suposamendu bat eginez, ondorio bitxi xamarrik, absurdorik ez esatearren, ager ez dadin. Arlo praktikoan planteatzen diren problemetan, bestalde, potentzialaren balore nulua infinituko puntuei egokitu barik, lurrari ("masa"-ri hizkera teknikoaz) egokitu ohi zaio.

Orain arte egin dugun guztia, karga batetarako izan da, eta ohi denez, karga asko daudeneko kasuan, gainezarmenaren printzipioaren laguntzaz hau guztiau orokortu ahal dugu:

$$V = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_2} + \ldots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_o r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_i \frac{q_i}{r_i} , \quad (16)$$

eta karga-banaketa jarraia baldin badugu:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_A \frac{dq}{r} , \quad (17)$$

non, A, integrazio-barrutia, karga-banaketa gordetzen duen espazioldea den.

### 18.4.3. V-ren eta $\vec{E}$-ren arteko erlazioa

V eremu eskalarra eta $\vec{E}$ eremu bektoriala elkarrekin erlazionaturik daude (ikus Fisika Orokorra 6.7 atala eta eranskina). Ikusi genuenez, indar kontserbakorren kasuan hauxe betetzen da:

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, E_p .$$

Erlazio hau q'kargaz zatitzen badugu, hauxe geratzen zaigu:

$$\frac{\vec{F}}{q'} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{E_p}{q'} .$$

Baina hau, begi bistan dagoenez, beste hau bikalatzen da zuzen-zuzenki:

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, V . \quad (18)$$

Gradiente delakoari dagozkion propietateak eta gainontzeko zehaztasunak lehenengo liburuan ikertuak izan direnez, ez ditugu berriro ere hemen errepikatuko. Dena dela, gradiente bektorearen eta gainazal ekipotentzialen arteko elkarren perpendikulartasunaz oroitzea ez da soberan egongo, 18.3.2. atalean ezelako justifikazio barik aipatu genuen eta. Bide batez, geroxeago erabili beharko denez, gogora dezagun ezen edozein direkziotako eremu kontserbakorren projekzioa, potentzialaren deribatu direktzionalak neurtzen duela, zeinuak aldaturik, hau da, labur esanda:

$$E_s = - \lim_{\Delta l_s \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta l_s} ,$$

non s azpiindizeak edozein direkzio adierazten duen.

V eremuaren funtzioan jar dezakegu:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

eta koordenatu cartesiarretan,

$$V = -\left[\int E_x \, dx + \int E_y dy + \int E_z dz\right]$$

Kasu berezi batetan, $\vec{E}$ eremua x ardatzaren norabidean badago eta uniformea bada, hots $\vec{E} = E\uparrow$ non E = kte den, hauxe geratzen zaigu:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int E \, dx ,$$

eta E konstantea denez,

$$V = - E \int dx = - E x + K .$$

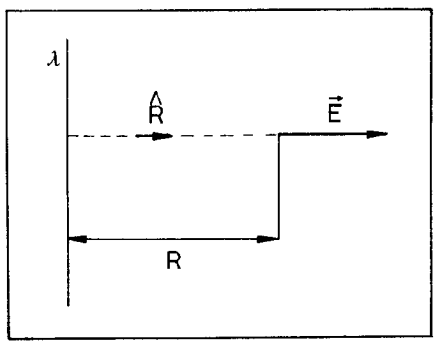
Lehen oharterazi den legez (ikus 18.4.2.), zenbait ariketa teorikotan ez da egokia gertatzen infinituango potentziala nulua dela suposatzea, hemengo kasu honetan argi eta garbi ikus daitekeenez. Ariketa honi hoberen moldatzen zaion suposamendua bestelakoa da, alegia, V = 0 egitea x = o denean, hain zu

zen ere. Hori onartuz gero:

$$0 = -E \cdot 0 + K \Rightarrow K = 0 \Rightarrow V = -Ex \ .$$

## ADIBIDEAK

1.- Eremu elektrikoa ikusi genuen atalean, hari infinitu batek sorturiko eremua aurkitu genuen. Orain, adierazpen hura abiapuntutzat hartzen dugularik, hariak sortzen duen potentziala lortuko dugu.




Ikusi genuenez,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\,R}\,\hat{R}$$

da, eta V lortzeko aurreko atalean ikusitako erlazioaz baliatuko gara:

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = -E_R\,dR \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{dR}{R} = -dV \ .$$

Ekuazio hau integratuz, V potentziala lortzen dugu:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\,\ln R + K \ .$$

Eremu elektriko uniformearen kasuan jaso zaigun antzera, hemengo honetan ere erabat desegokia ematen du, $R \to \infty$ doanean,

V = 0 dela suposatzeak. Suposamendu hori bazterturik, hurrengo hau onartuko dugu:

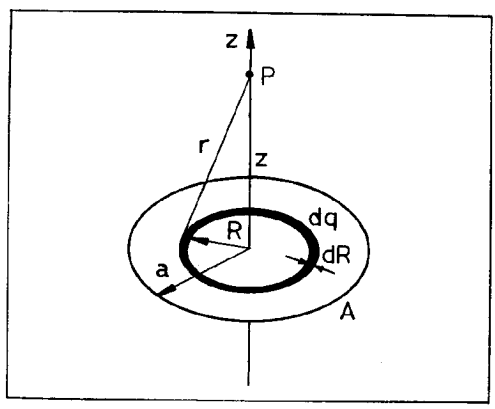
$$R = 1 \rightarrow V = 0 \Longrightarrow 0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \ln 1 + K = 0 + K \Longrightarrow K = 0 .$$

Eta beraz, honela idatz dezakegu hariak sorturiko potentziala:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \ln R .$$

Hau honela egin dezakegu, konstantearen balorea aukerakorra dela eta; zilegia da egin duguna eta, noski, kasu bakoitzean gehien komeni zaiguna aukeratzen dugu.

2.- Kalkula dezagun karga uniformea duen disko batek sortzen dituen eremueta potentzial elektrikoa, bere ardatzeko puntuetan. Diskoaren erradioa a da, eta $\sigma$ beraren gainazaleko karga-dentsitatea. Ikus bedi halaber, distantzia handi eta txikietarako zer gertatzen den.




Aurreko adibidean, lehenago $\vec{E}$ eremua kalkulatu dugu, eta gero V potentziala. Oraingoan berriz, alderantzizko prozedurari jarraituko gatzaizkio, lehenago potentziala eta geroago eremua kalkulatuko ditugularik.

R erradioko zirkuluaren azalera, dakigunez, hauxe da:

$$S = \pi R^2 ,$$

beraz,

$$dS = 2\pi R\, dR .$$

Eta $dq = \sigma\, ds$ denez, ondoko hau idatz dezakegu:

$$dq = 2\pi\sigma R\, dR .$$

Potentzialaren formula aplikatuz:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_A \frac{dq}{r} ,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_o^a \frac{2\pi\sigma R\, dR}{r} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\int_o^a \frac{R\, dR}{r} .$$

Baina $r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ denez,

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_o^a \frac{R\, dR}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_o^a =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}[(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}} - z] .$$

Adibide honetan, konstante gehigarria nulutzat hartu dugu:

Distantzia handietarako:

$$a << z \Longrightarrow (a^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \simeq z(1 + \frac{a^2}{2z^2}) ,$$

eta beraz, $V = \dfrac{\sigma a^2}{4\varepsilon_o z}$ .

. Distantzia txikietarako:

$$a >> z \Longrightarrow (a^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \simeq a \ ,$$

eta orduan, $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(a-z)$ .

$\vec{E}$ eremu elektrikoa kalkulatzerakoan, funtsezko papera jokatzen du problemak daukan simetria kontutan hartzeak. Problemaren simetriagatik, eremù elektrikoaren osagai bakarra, z ardatzekoa izango da. Beraz,

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - z\right] ;$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(-\frac{2}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} + 1\right) .$$

Lehen bezalaxe eginez, hauxe daukagu:

. Distantzia handietarako:

$$z >> a \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{a^2}{z^2})^{\frac{1}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - (1+\frac{a^2}{z^2})^{-\frac{1}{2}}\right] \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2})\right] .$$

$$E(z >> a) = \frac{\sigma a^2}{4\varepsilon_o z^2} .$$

Diskoaren zentruan legokeen karga batek sortuko lukeenaren berdina da, non jarritako karga disko osoarena den:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma\pi a^2}{z^2} = \frac{\sigma a^2}{4\varepsilon_o z^2} .$$

· Distantzia txikietarako:

$$a >> z \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} .$$

## 18.5. PARTIKULA KARGATUAREN ERLAZIO ENERGETIKOAK, EREMU ELEKTRIKOAN ZEHAR HIGITZEN DENEAN. POTENTZIAL ELEKTRIKOAREN UNITATEAK

Eremu elektriko batetan higitzen ari den partikula kargatu baten energia osoa segidan aipatuko dena da, baldin eta eremu grabitatorioaren eragina kontutan hartzen ez badugu, zeren eta eremu elektrikoarenarekin alderaturik beronen energiarako ekarpena guztiz arbuiagarria bait da:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + q V .$$

Partikula kargatu hau $P_1$-etik $P_2$-ra higitzen denean, bertako potentzialak $V_1$ eta $V_2$ izanik hurrenez hurren, energiaren kontserbazioaren teorema honela idatzi beharko dugu:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + q V_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + q V_2 ,$$

eta 7.5. atalean ikusi genuen bezala:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = q(V_1 - V_2). \qquad (19)$$

Emaitza honetan oinarriturik, VOLTA-ren definizioa eman dezakegu: "Coulomb bateko kargak, joule bateko energia irabazteko behar duen potentzial-diferentzia, volta da".*

(19) ekuazioan bi kasu bereiztu behar ditugu batipat:

i) $q > o$ denean, $V_1 > V_2$ izatea behar dugu, partikulak energia zinetikoa irabaz dezan; hots, potentzial elektriko handiagoko eskualdeetara joan behar du.

ii) $q < o$ denean, ostera, $V_1 < V_2$ izatea behar dugu, partikulak energia zinetikoa irabazteko; potentzial elektriko txikiagoko eskualdeetara joan behar du, alegia.

eV letren bidez adierazten den elektronvoltak garrantzi handia hartzen du Fisika Atomikoaren arloan, bertan askotan

* Beraz, unitateei dagokienez:

$$1V = 1\ JC^{-1} = 1\ kg\ m^2\ s^{-2}\ C^{-1}$$

agertzen bait da elektroiaren karga. Begi bistakoa denez, eV energi unitatearen balorea aurkitzeko, elektroiaren karga volta batez biderkatu besterik ez dugu egin behar:

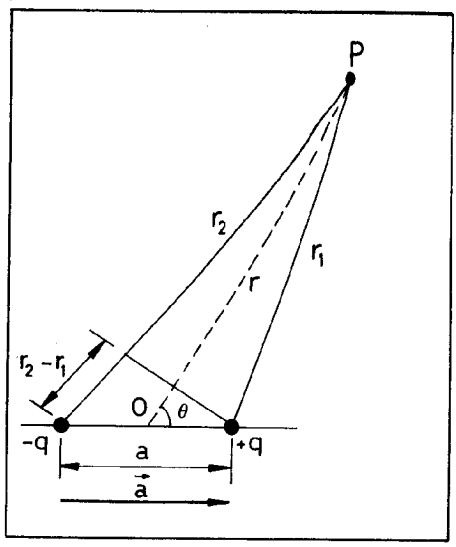
$$1\,\text{eV} = (1'6021 \times 10^{-19}\,\text{C})\,(1\text{V}) = 1'6021 \times 10^{-19}\,\text{J}.$$

Halaber, elektrovoltaren anizkoitzak ere oso erabiliak izaten dira:

Kiloelektronvolta : $1\,\text{keV} = 10^3\,\text{eV}$

Megaelektronvolta : $1\,\text{MeV} = 10^6\,\text{eV}$ .

## 18.6. DIPOLO ELEKTRIKOA




Atal honetan karga banaketa interesgarri batetaz arituko gara. Berau balore bereko eta aurkako zeinuko karga biz osotuta dago, beraien arteko distantzia oso txikia izanik.

Begi bistakoa denez, multzo osoaren karga elektrikoa nulua da; baina hau horrela delarik ere, zenbait fenomeno interesgarri agertzen direla ikusiko dugu.

### 18.6.1. Momentu dipolarra. Dipoloaren potentzial eta eremua

Momentu dipolar elektrikoa era honetan definitzen dugu:

$$\vec{p} = q\,\vec{a} \qquad (20)$$

non $\vec{a}$ karga negatibotik karga positibora doan bektorea den, eta q dipoloaren karga positiboa.

Hau ikusita, hurrengo pausoa dipoloak sorterazten duen potentzial elektrikoa kalkulatzea izango da, honetarako hain zuzen ere,(15) formula erabiliko dugularik. Haren arauera,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q(r_2-r_1)}{r_1\,r_2}\,.$$

Dena den, kasu guztietan ondoko hau gertatzen da, alegia, a distantzia oso txikia dela r distantziarekin alderaturik. Hau betetzen dela jotzen badugu, ondoko r-rekiko hurbilketa bi hauek egin ditzakegu:

$$r_2 - r_1 \simeq a\cos\theta$$

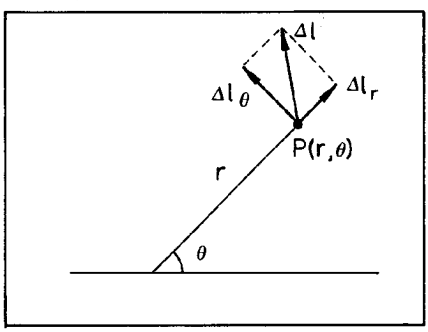
eta

$$r_1\,r_2 = r^2\ ;$$

beraz, hauxe lortzen dugu:

$$V = \frac{q\,a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o\,r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o\,r^2} \qquad (21)$$

Ekuazio hau, koordenatu polarretatik koordenatu cartesiarretarako transformazio-ekuazioen bidez transforma genezake, eremu elektrikoa, (18) ekuazioaren bidez, koordenatu errektangeluarretan lortuz. Dena den, hau horrela izaten delakoan, koordenatu polarretan adieraziko dugu eremua.




$\theta$ = kte denean:

$$\Delta l_r = \Delta r\ ,$$

r = kte denean:

$$\Delta l_\theta = r\Delta\theta\ ,$$

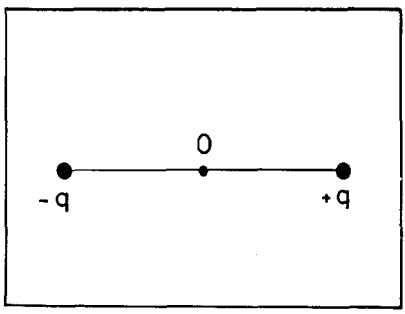
beti ere, $\Delta r$ nahiz $\Delta\theta$, biak zerorantz doazela suposatuz.

Lehen esan dugun bezala, eremu elektrikoa lortzeko potentzial elektrikoaren atalean ikusitako (18) ekuazioaz baliatu beharra dugu:

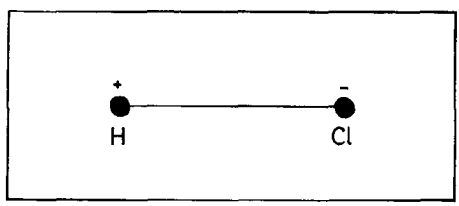
$$E_r = -\lim_{\Delta l_r \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta l_r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\,p\cos\theta}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^3} \qquad (22)$$

$$E_\theta = -\lim_{\Delta l_\theta \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta l_\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\,\sin\theta}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^3}\,. \qquad (23)$$

Arestian esandakoaren arauera, sistema osoaren karga anulatu egiten den arren, kargek duten desplazamenduaren kausaz, eremu elektrikoa sortzen da.



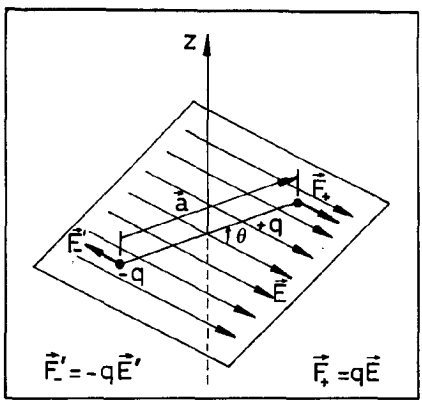

Atomoetan, elektroien masa-zentrua eta nukleoaren masa-zentrua leku berean daude, eta beraz, atomoaren batezbesteko momentu dipolar elektrikoa zero da. Hala ere, eta geroago ikusiko dugunez, eremu elektrikoa sartzen badugu, aldatu egiten da elektroien higidura, zeinak elektroien masa-zentruaren desplazamendua eragiten duen nukleoaren masa-zentruarekiko, eta ondorioz, atomoa dipolo elektriko bilakatzenda. Atomoa polarizatu egin dela esan ohi da, $\vec{p}$ momentuko dipolo bihurtuz. Logikoa denez, momentu hau kanpo-eremu elektrikoaren proportzionala da. Bestalde, zenbait molekulak momentu dipolar iraunkorra izan dezakete. Molekula hauei "polarrak" deritzegu, HCl molekula, esate baterako, itxura honetakoa delarik.



## 18.6.2. Dipoloaren gaineko eremu elektrikoaren eragina.

Dipolo elektrikoa eremu elektrikoan ezartzen denean, dipoloaren karga bakoitzaren gainean indar bat sortzen da, berauen erresultantea ondoko hau izanik:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\,\vec{E} - q\,\vec{E}' = q\,(\vec{E} - \vec{E}'). \qquad (24)$$




Begi bistakoa denez, eremua uniformea deneko kasuan, hots, $\vec{E} = \vec{E}'$, indarra nulua da; hau da $\vec{F} = 0$ .

Dakusagun orain kasu berezi hau: eremu elektrikoa eta dipoloa paraleloki orientaturik daude, eta demagun norabide hau x ardatzarena dela, hain zuzen.

Hortaz,

$$E - E' = E(x+a) - E(x) = \frac{dE}{dx}\,a\ ,$$

eta beraz:

$$F = p\,\frac{dE}{dx}\ .$$

Hemendik hauxe ondoriozta dezakegu: eremu elektrikoaren paraleloa den dipolo elektrikoa, eremua handitzen deneko norantzan higitzen da.

Alderantzizko emaitza lortzen da, baldin eta dipoloa eremuarekiko antiparaleloki ezartzen bada.

Dipoloaren energia potentziala hauxe da:

$$E_p = -q\,V\,(\vec{r}) + q\,V\,(\vec{r} + \vec{a})\ ,$$

non karga negatiboa $\vec{r}$ puntuan dagoela eta karga positiboa $(\vec{r} + \vec{a})$-n dagoela suposatu dugun. a kargen arteko distantzia r distantziarekin alderaturik oso txikia dela jotzekotan, ondoko hau lortzen dugu, goiko adierazpenaren bigarren gaia seriez garatuz:

$$E_p = -q\, V(\vec{r}) + q\, [V(\vec{r}) + \frac{dV}{d\vec{r}} \vec{a}\,] =$$

$$= -q\, V(\vec{r}) + q\, [V(\vec{r}) + \text{grad}\, V.\vec{a}\,] \;,$$

eta (18) erlazioa erabiliz:

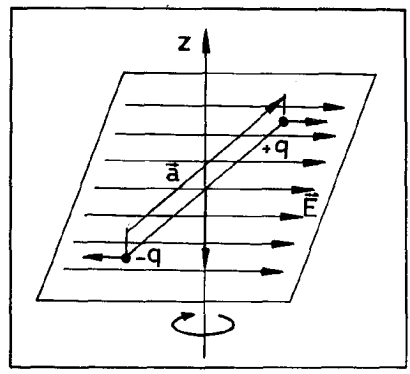
$$E_p = -\vec{E}\,.\,q\vec{a} = -\vec{p}.\vec{E} = -p\, E \cos\theta \;. \qquad (25)$$

Energiaren balore minimoa $\theta = 0$ denean gertatzen da. Hau da: dipoloa orekan dago eremuarekiko paraleloki orientatzen denean.

Bestalde, dipoloa osatzen duten kargek indar-momentua sortzen dute. Ondorengo irudian ikusten den bezala, honela adieraz dezakegu momentu hori:

$$\vec{M} = \vec{a} \wedge q\, \vec{E} = q\, \vec{a} \wedge \vec{E}$$

$$M = \vec{p} \wedge \vec{E} \qquad (26)$$




Argi dagoenez, indar-momentu elektrikoak dipoloa eremuarekiko paraleloki jartzera jotzen du, $\theta = 0$ denean orekan bait dago.

## 19. GAIA: KORRONTE ELEKTRIKO JARRAIA

19.1. Korronte elektriko jarraia

19.2. Korrontearen intentsitatea eta dentsitatea

19.3. Kontinuitatearen ekuazioa

19.4. Ohm-en legea eroaleen kasuan

- 19.4.1. Eroankortasun elektrikoa. Erresistibitate elektrikoa. Material-motak
- 19.4.2. Hari eroale baten erresistentzia elektrikoa
- 19.4.3. Energiaren galera erresistentzia elektrikoetan. Joule-ren legea

19.5. Indar elektroeragilea

- 19.5.1. Sorgailu elektrikoa
- 19.5.2. Hargailu elektrikoa. Indar kontra-elektroeragilea
- 19.5.3. Ohm-en legearen orokorpena

19.6. Korronte jarraiko zirkuitu anizkoitzak

- 19.6.1. Erresistentzia elektrikoen konbinazioen erresistentzia baliokidea
- 19.6.2. Kirchhoff-en legeak

Aurreko gaian interakzio elektrikoa estatikoki aztertu dugu soilik. Guztiok dakigunez, ordea, elektrizitatearen inguruko fenomeno gehienak dinamikoak dira. Hor ditugu, adibide gisa, etxean bertan darabilgun sare elektrikoa, edozein tresna elektrikok dauzkan zirkuituak, eta abar.

Elektrizitatea ikuspuntu dinamikotik aztertzean, oinarrizko kontzeptu bat agertzen zaigu hasieratik: korronte elektrikoa. Zertan datza berau? Labur esanda, edozein gainazaletan zehar karga elektrikoen fluxua dagoenean, korronte elektriko batek gainazal hori zeharkatzen duela esaten da. Hots, azken batez, korronte elektriko hitzak kargen higidura edo garraioa adierazi nahi du, eta higidura hori eremu elektrikoaren eraginpean sortzen da.

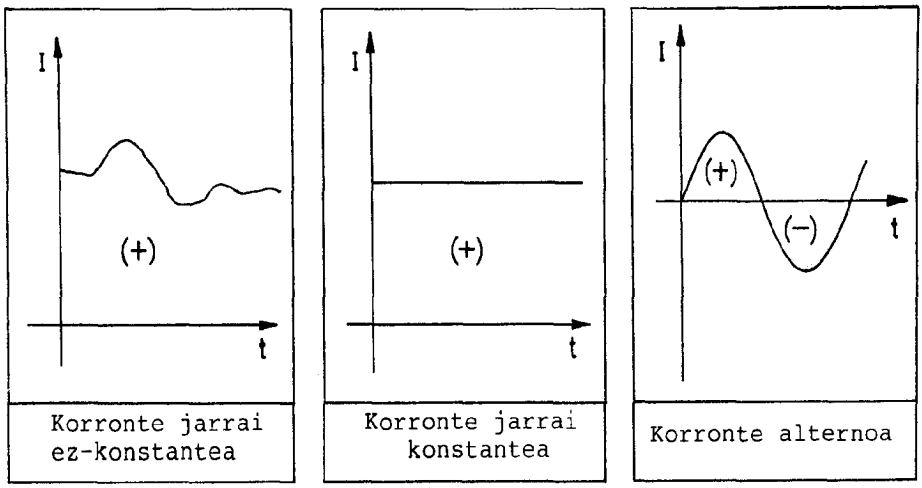
Kargen garraioa mota desberdinetako materialetan gerta daitekeenez, oso kontutan hartzekoak izango dira material bakoitzaren ezaugarriak, eroankortasun elektrikoa aztertzean ikusiko dugun bezala. Halaber, beharrezkoa izango da korrontea sortzeko tresnaren bat, sorgailu elektrikoa izenaz ezagutuko duguna, nolabait korronte elektrikoa modu iraunkorrean mantentzeko eremu elektriko egokia sortuko duena, hain zuzen ere.

## 19.1. KORRONTE ELEKTRIKO JARRAIA

Korronte elektrikoari berari gagozkiolarik, lehenengo mailako sailkapenean, bi motatakoa izan daitekeela esan dezakegu: norantza aldatzen ez denekoa, korronte jarraia deritzona, eta etengabe norantza ziklikoki aldatuz doanekoa, korronte alternoa. Gai honetan korronte jarraiaren azterketari lotuko gatzaizkio eta 23. gaian korronte alternoarenari.

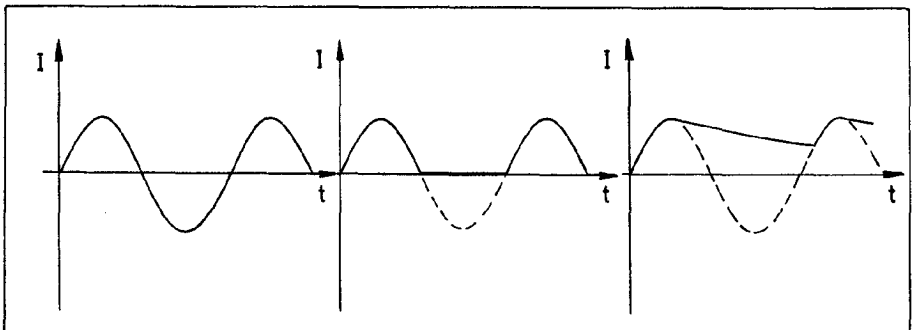
Hurrengo irudietan horrelako korronteek denborarekin duten aldaketa adierazten da eskematikoki, beti ere jakinik, beste-

lako edozein aldaketa-mota ere gerta daitekeela, noski.




Korronte jarrai ez-konstantea | Korronte jarrai konstantea | Korronte alternoa

Korronte elektriko jarraiaren iturri edo sorgailuak mota askotakoak izan daitezke. Pila eta metagailu elektrikoetan, indar elektroeragilea eta potentzial-diferentzia prozesu kimikoen bidez lortzen da. Dinamoetan, ordea, energia mekanikoa da energia elektriko bihurtzen dena. Aipaturiko bi bide arrunt horiez gain, korronte jarraia erdiesteko beste bide bat ere ba dago, korronte alternoaren artezketan datzana hain zuzen. Bertan, artezgailuei esker (diodo erdieroaleak esaterako) norantza bakarreko korrontea lortzen dugu, kontrako norantzakoa ezabatuz. Ondoren, iragazki elektrikoen bidez, leundu egin daiteke tentsioaren aldaketa, prozesuaren amaieran erdietsitako korrontea ia erabat leuna eta konstantea delarik, hurrengo irudietan adierazten den bezala.




a) Korronte alternoa | b) Korronte artez-tua (jarraia) | c) Korronte arteztu eta iragazia (jarraia)

Edozelan ere, gai honetan korronte jarrai konstanteaz arituko gara nagusiki, izatez korrontearen atal egonkorra soilik aztertuz. Eta ezer baino lehen, korrontearen norantza adierazteko onartzen den hitzarmena karga positiboena dela esango dugu, nahiz eta, eroaleen kasuan gertatzen den bezala, gehienetan benetan higitzen direnak karga negatiboak izan, hots, elektroiak.

Korronte elektrikoaren aurkezpen orokor honi amaiera emateko, materian sortzen dituen efektu batzu aipatuko ditugu. Efektu nagusiak ondoko hiru motetan taldeka ditzakegu:

- Efektu termikoak: Eroaleak berotu egiten dira korronte elektrikoa iragatean.

- Efektu kimikoak: Likido ionizatuak deskonposatu egiten dira korronte elektrikoaren eraginez.

- Efektu magnetikoak: Eroalearen alboan kokaturiko iparrorratzak eremu magnetikoaren agerpena erakusten du, korronteak irauten duen bitartean. Efektu magnetiko hauek motore elektrikoen funtsa diren fenomeno mekanikoak sorterazten dituzte, interakzio magnetikoari buruzko gaia aztertzean ikusiko dugunez.

Bestelako efektuak ere egon ba daude, baina gehienak aipaturiko hiruren artean sar daitezke. Adibidez, bonbiletako argia efektu termikoak sorturiko goritasunaren ondorioa dugu izatez; edo eta gorputzean shock edo zartada elektrikoa jasotzean azaltzen diren efektu fisiologikoak, efektu termiko eta kimikoen arteko bateraketaren ondorioak dira.

## 19.2. KORRONTEAREN INTENTSITATEA ETA DENTSITATEA

Korronte elektrikoa kuantitatiboki zehazteko, magnitude berezia definitzen da. Horrela, korrontearen barneko S zeharkako gainazala denbora-unitatean zeharkatzen duen karga elek-

trikoari korrontearen intentsitatea deritzo:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} .$$

Korrontearen intentsitatea magnitude eskalarra da eta beraren unitateari ampère deritzo, André Marie Ampère (1775-1836) fisikari frantsesaren ohorez:

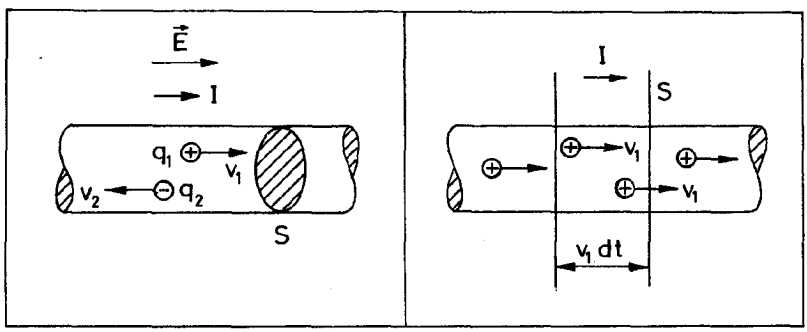
$$[I] = Q \cdot T^{-1}$$

$$\text{Ampère} = \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}} \quad , \; 1\ A = 1\ C \cdot s^{-1} \; ;$$

dena den, zenbait zirkuitutan ampère unitatea oso handia denez, sarritan miliampèrea ($1\ mA = 10^{-3}\ A$) eta mikroampèrea ($1\ \mu A = 10^{-6}\ A$) erabiltzen dira. Bestetik magnitude eskalarra izan arren, intentsitatearen norantzaz mintzatuko gara, aurreko hitzarmenaren arauera karga positiboak S gainazala iragaten duteneko norantza adierazi nahirik.

Intentsitatea S gainazal finituari dagokio eta horrekin batera gainazal-unitateko intentsitatea ere definitzen da, korrontearen dentsitatea deritzona. Baina magnitude hau definitu aurretik, korrontearen izaera mikroskopikotik abiatuko gara.

Intentsitatea S gainazala zeharkatzen duten karga higikorren abiaduraren funtzioan jarriko dugu eta horretarako kasu konkretu bat hartuz, S sekziodun eroale baten barneko higidura aztertuko dugu, eroale hori $\vec{E}$ eremuaren eraginpean dagoelarik.



Demagun bi eratako partikula kargatuak ditugula: positiboak, $q_1$ kargadunak, eta negatiboak, $q_2$ kargadunak. Eremu elektrikoaren eraginez, karga positiboak eremuaren norantza berberaz higitzen dira $v_1$ abiaduraz, eta karga negatiboak aurkako norantzaz $v_2$ abiaduraz, ezkerreko irudian adierazten den bezala. Eskuinekoan karga positiboak jarri dira soilik. Demagun horrelako $n_1$ daudela bolumen-unitateko. dt denbora-tartean $v_1 dt$ altuerako zilindroan dauden kargek soilik zeharkatuko dute S gainazala; beraz, honela adierazi ahal izango dugu intentsitatea:

$$dQ_1 = n_1 \, q_1 \, S \, v_1 \, dt$$

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt} = n_1 \, q_1 \, v_1 \, S \, .$$

Modu berean, karga negatiboen intentsitatea ondokoa izango da:

$$I_2 = n_2 \, q_2 \, v_2 \, S \, .$$

Denetara, intentsitate osoa bien arteko batura izango da, zeren eta karga negatiboak aurkako norantzaz higitu arren, karga negatiboen gutxipena karga positiboen gehipenaren baliokidea bait da. Hots, intentsitate osoa hauxe da:

$$I = I_1 + I_2 = S \sum_i n_i \, q_i \, v_i \, .$$

Azkenez, korrontearen sekzio normalean gainazal-unitateko intentsitateari <u>korrontearen dentsitatea</u> deritzo:

$$j = \frac{I}{S} = \sum_i n_i \, q_i \, v_i \quad ,$$

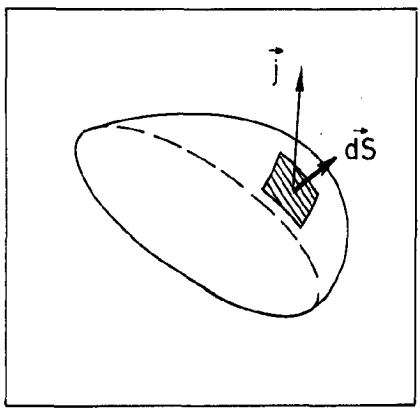
eta higiduraren norabidea kontutan hartuz, korrontearen dentsitatea izeneko bektorea definitzen da:

$$\vec{j} = \sum_i n_i \, q_i \, \vec{v}_i \quad ,$$

bertan partikula kargatuen mota guztiak kontsideratuz. Hain zuzen, kargen dentsitatea ($\rho$) erabiliz, honela adierazten da puntu bakoitzeko korrontearen dentsitatea:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} .$$

Azken definizioaren arauera, honela adieraziko dugu edozein eite duen gainazala zeharkatzen duen korrontearen intentsitatea:

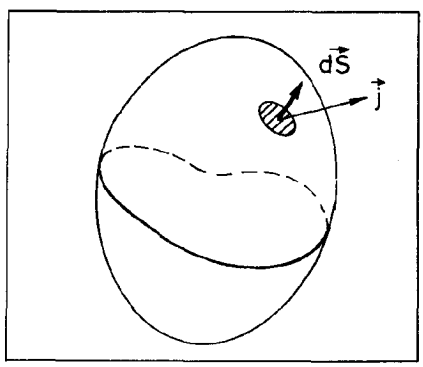



$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} .$$

## 19.3. KONTINUITATEAREN EKUAZIOA

Interakzio elektrostatikoa aztertzean kargaren kontserbazioaren printzipioa aipatu genuen; orain kuantitatiboki aztertuko dugu printzipio hori.




Demagun S gainazal itxia dugula eta izan bedi q, t aldiunean gainazal horren barnean dagoen karga. Oro har, egoera dinamikoan:

$$q = q\ (t).$$

Kargaren kontserbazioaren printzipioaren arauera, denbora--unitateko kargaren galera kanporanzko intentsitatea izango da, hots, denbora-unitatean kanporantz irteten den karga:

$$-\frac{dq}{dt} = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Bestalde, honela adieraz dezakegu barneko karga puntu bakoitzeko kargaren dentsitatearen funtzioan:

$$q = \iiint_V \rho \, dV \quad .$$

Beraz, azkenean era honetara eman dezakegu kargaren kontserbazioaren printzipioa, <u>kontinuitatearen ekuazioa</u> ere deitua:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho \, dV + \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

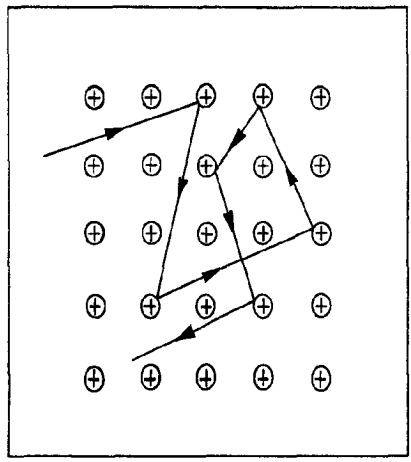
Ohar gisa diogun, ezen egoera dinamikoan $\rho = \rho(\vec{r},t)$ eta $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$ direla. Dena den, hemendik aurrera gai honetan korronte egonkorrak aztertuko ditugu soilik, hots, denborarekiko aldatzen ez direnak, eta orduan $\rho = \rho(\vec{r})$ eta $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ izango ditugu.

## 19.4. <u>OHM-EN LEGEA EROALEEN KASUAN</u>

Korronte elektrikoaren ikuspuntutik bi multzotan bana ditzakegu materialak: eroaleak eta dielektrikoak. Hemen eroaleak interesatzen zaizkigu batez ere, korronterako bide egokia bait dira.

Dielektrikoek ez dute karga askerik eta ez dute korronte iraunkorrik onartzen kanpo-eremu baten eraginpean, nahiz eta horren eraginez polarizatu egiten diren. Ostera, karga askeak daudeneko espazioaldean eremu elektrikoak eragiten badu, korronte elektrikoa sortuko da; hauxe da, izatez, eroaleen kasua.

Demagun metal baten barneko korrontea aztertzen ari garela. Kristal-sare metalikoan karga positiboak finko daude eta beraien inguruan, elektroi lotuez gainera, elektroi askeen hodeia dago. Elektroi horiek batera eta bestera higitzen dira, atomoekiko talkak eginez. Nahiz eta higidura desordenatu hau abiadura handiz gertatu, batezbesteko abiadura (bektoriala) nulua da eta, denetara, korronte makroskopiko netoa nulua da.



Eroalea eremu elektrikoaren eraginpean ipintzean, nolanahiko higidura honi beste higidura ordenatu bat gainezartzen zaio, eta honen abiadura elektroien abiadura baino askoz era txikiagoa den arren, garrantzi handiagoa du, zeren kargen fluxu netoa sortzen bait du, korronte elektrikoa alegia.

### 19.4.1. Eroankortasun elektrikoa. Erresistibitate elektrikoa. Material- motak.

Beraz, dirudienez, erlazioren bat dago eremu elektrikoaren intentsitatearen eta korronte elektrikoaren artean eta erlazio hori metalaren barne-egituraren ondorioa da.

Hain zuzen ere, erlazio horri Ohm-en legea deritzo eta eroale bakoitzaren kasuan eremu elektrikoaren intentsitatearen eta korrontearen dentsitatearen arteko proportzionaltasuna adierazten du:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} .$$

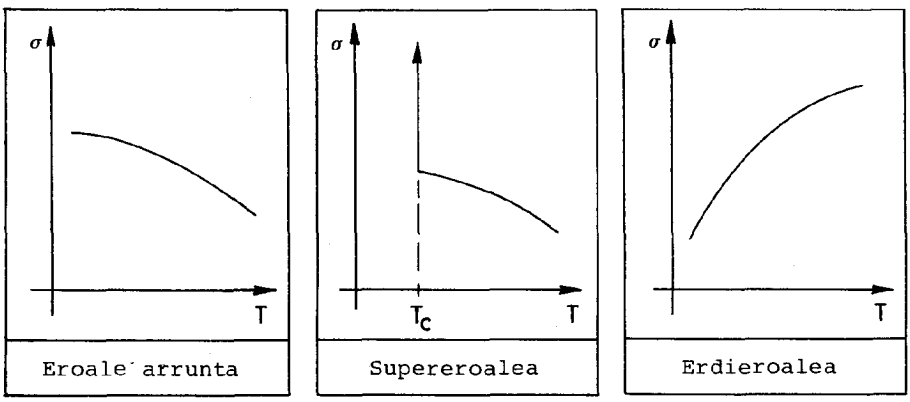
Adierazpen honetako $\sigma$ proportzionaltasun-faktoreari eroalearen eroankortasun elektrikoa deritzo eta material-mota bakoitzaren ezaugarria da. Dimentsionalki:

$$[\sigma] = L^{-3}\ M^{-1}\ T\ Q^{2} \quad .$$

Izatez, emandakoa legea baino areago eroaleen propietate baten zehazpenerako ekuazioa da. Baldintza horietan definituz, gero experimentalki ikusten denez, beste dependentzia batzuez gain, eroankortasuna aldatu egiten da tenperaturaz:

$$\sigma = \sigma(T) \quad .$$

Orohar, eroale metaliko arrunten kasuan eroankortasuna txikiagotu egiten da tenperatura igotean. Supereroaleen portaera metal arruntena bezalakoa da tenperatura oso baxuetan izan ezik; tenperatura beheratuz goazenean, tenperatura kritikora heltzen gara eta horretatik behera pasatzean, eroankortasuna izugarri handia gertatzen da, $\sigma \to \infty$. Ostera, erdieroaleen eroankortasuna txikiagotu egiten da tenperatura beheratzean, eta tenperatura oso baxuetan ia isolatzaile modura jokatzen dute. Hiru material-mota hauen portaera alboko hiru irudietan adierazten da.




Askotan materialen erresistibitate elektrikoa definitzen da. Izatez, eroankortasunaren alderantzizko magnitudea da:

$$\rho_e = \frac{1}{\sigma} \quad ,$$

eta ageri denez, eroale arrunten kasuan handiagotu egiten da tenperaturaz.

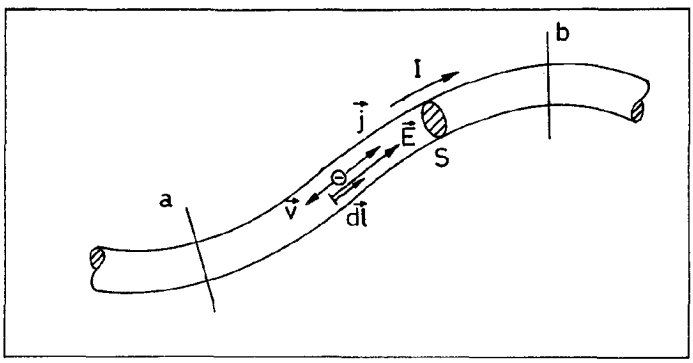
Azken ohar gisa, diogun ezen eroankortasun elektrikoa eskarlartzat hartu dugula eta hori soilik dela egokia eroale isotropoen kasuan. Eroale anisotropoetan, oro har $\vec{j}$ eta $\vec{E}$ bektoreek norabide desberdina eduki dezakete eta beraien arteko erlazioa antzera idatz daiteke:

$$\vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma}\,\vec{E}$$

nahiz eta hemen $\overleftrightarrow{\sigma}$ bigarren ordenako tentsorea den eta ondorioz $\vec{j}$-k ez du zertan $\vec{E}$ bektorearen norabiderik eduki behar. Dena den, gai honetan eroale isotropoez arituko gara eta eroankortasun elektrikoa konstantetzat hartuko dugu.

### 19.4.2. Hari eroale baten erresistentzia elektrikoa

Zirkuituetako eroaleek hari-forma izaten dute edo, bestela esanda, oso meheak ohi dira. Eroale meheen kasuan kalkulu errazak egin ahal izango ditugu.




Hari eroalearen barneko puntu batetan erlazio hau izango dugu eremu elektrikoaren intentsitatearen eta korrontearen dentsitatearen artean:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\,\vec{j}\,.$$

Haria mehea delarik, sekzio normaleko puntu guztietan $\vec{j}$ dentsitatea dagoela joko dugu, hurbilketa eginez. Aurreko adierazpeneko atal biek hariaren norabideko $\vec{dl}$ luzera-elementuz eskalarki biderkatuz, eta $\vec{j}$ eta $\vec{dl}$ norabide berekoak direla kontutan hartuz:

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{\sigma} j \, dl = \frac{I}{\sigma S} dl \quad ,$$

eta korronte egonkorraren kasuan kontinuitatearen ekuazioaren arauera sekzio guztietatik intentsitate berbera pasatzen dela kontutan hartuz, eta a eta b sekzioen artean integratuz:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} = I \int_a^b \frac{1}{\sigma S} dl \quad .$$

Lehenengo ataleko integralak a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia adierazten du, $V_{ab}$. Bigarren atalekoak a eta b puntuen arteko <u>erresistentzia elektrikoa</u> ematen digu eta R ikurraz adierazten da:

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma S} dl \quad .$$

Sekzio uniformeko harien kasuan honela lortzen da erresistentzia elektrikoa:

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad .$$

Definitu berria den erresistentzia elektrikoaren arauera, honela geratzen zaigu potentzial-direfentziaren, intentsitatearen eta erresistentziaren arteko erlazioa:

$$V_{ab} = R \, I \quad ,$$

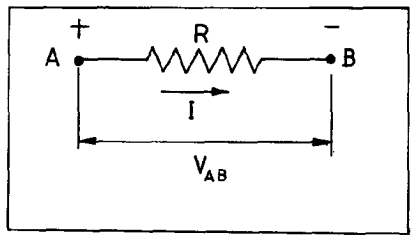
eta hauxe dugu Ohm-en legearen itxurarik arruntena. Azken adierazpen honetan agertzen denez, korrontearen kausa sortzailea

eremu elektrostatikoa soilik denean, hari eroalearen muturren arteko potentzial-diferentzia erresistentzia eta intentsitatearen arteko biderkadura dela ikusten da.

Erresistentzia elektrikoaren unitateari ohm deritzo; emandako legearen aurkitzailearen ohorez jarria, G.S. Ohm (1789-1854). Izatez unitate eratorria da, volta/ampère, eta Ω ikurraz adierazten da. Erresistentzia handiak adierazteko, kiloohm ($1 k\Omega = 10^3 \Omega$) eta megaohm ($1 M\Omega = 10^6 \Omega$) unitateak erabili ohi dira. Normalean, zirkuituak eraikitzeko balore finkodun erresistentziak fabrikatzen dira. Eskematikoki, -ᴡᴡ- ikurraz adierazi ohi dira.

### 19.4.3. Energiaren galera erresistentzia elektrikoetan. Joule-ren legea.

Partikula kargatuak sare metalikoan zehar mugi eraztean sortzen diren gehiegizko talken kausaz, energiaren galera dago eroalean korronte elektriko iraunkorra mantentzean, eta, kanpotik ikusita, galera hori bero itxuraz ageri da. Ikus dezagun zer nolakoa den energiaren galera erresistentzia elektrikoetan.




Dakigunez, potentzial-diferentzia dago hariaren bi muturren artean,

$$V_{AB} = V_A - V_B = R\ I \quad ;$$

eta hau karga-unitateko egiten den lana da. Denetara, t denbora-tartean korronte jarrai konstantez garraiatzen den karga

$$Q = I\ t$$

denez gero, tarte horretan erresistentzian galtzen den energia,

$$W = V_{AB} \cdot Q = R\ I^2\ t$$

da. Emaitza honi Joule-ren legea deritzo, eta batzutan kaloriatan ere ematen da:

$$W = 0{,}24\ R\ I^2\ t \qquad \text{(kaloria)}.$$

Bestalde, denbora-unitateko energiaren galera, hots, erresistentzian galtzen den potentzia, ondokoa da:

$$P = \frac{W}{t} = RI^2$$

## 19.5. INDAR ELEKTROERAGILEA

Atal honetan erresistentzia soilak ez diren elementuek zirkuituetan duten portaera aztertuko dugu.

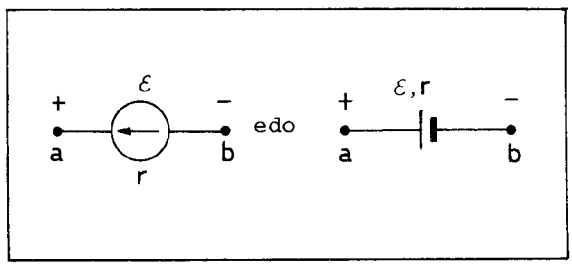
### 19.5.1. Sorgailu elektrikoa

Sorgailu elektrikoa, energia kimikoa —pilen kasuan adibidez— edo mekanikoa —dinamoak— edo beste energi motaren bat energia elektriko bihurtzen duen tresna da.

Sorturiko korronte elektrikoaren potentzia P izanik eta zirkuituan zehar bidaltzen den korrontearen intentsitatea I, honela definitzen da sorgailuaren indar elektroeragilea:

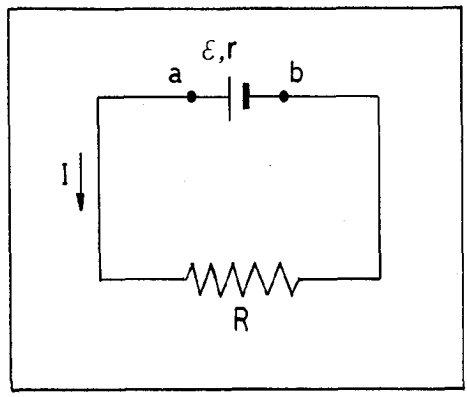
$$\mathcal{E} = \frac{P}{I} \quad .$$

Unitateei dagokienez, P watt-etan datorrenez eta I ampère-tan, indar elektroeragilea volta-tan neurtzen da, potentzial-diferentziaren modura. Grafikoki honela adierazi ohi da korronte jarraiaren sorgailua:



Irudietan jarri den r delakoak, sorgailuaren barneko erresistentzia elektrikoa adierazten du.

Interesgarria gerta daiteke, sorgailua eta erresistentzia dituen zirkuituaren azterketa egitea eta, bereziki, bertako energiaren balantzea.




Ematen den potentzia bakarra, sorgailuarena da; eta gastatzeko, r eta R erresistentziak daude:

$$P = \mathcal{E}\, I = rI^2 + RI^2 = (R+r)\, I^2 \quad ,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad .$$

Bestalde, sorgailuaren muturren arteko potentzial-diferentzia ondokoa izango da:

$$V_{ab} = R\, I = \mathcal{E} - r\, I \quad .$$

Azken adierazpena aztertuz, galdera hau egin dezakegu: Zer gertatzen da zirkuitua irekirik dagoenean, hau da, intentsitatea nulua denean? Orduan,

$$V_{ab} = \mathcal{E} \ ,$$

eta emaitza hau interpretatuz, zirkuitua ixtean, barne-erresistentziaren kausaz sorgailuaren muturren artean potentzial-diferentziaren rI beherapena gertatzen dela esango dugu.

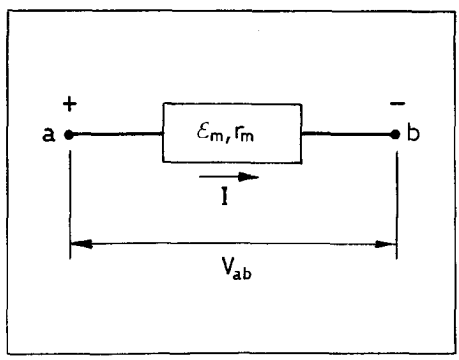
Indar elektroeragileari buruzko zenbait ohar egitea komeni da. Lehenik eta behin, azpimarratu egin behar da, ezen "indar" izena ematen bazaio ere, ez dela Fisikan indar hitzarekin arruntki adierazten dena, beste zerbait baino. Izatez, sorgailuaren barruan, karga-unitateko, sorgailuak egiten duen lana da indar elektroeragilea:

$$\mathcal{E} = \frac{P}{I} = \frac{W/t}{Q/t} = \frac{W}{Q} .$$

Bestetik, nahiz eta indar elektroeragilea eta potentzial-diferentzia unitate berberetan ematen diren, ez dira gauza berbera. N labait esateko, indar elektroeragileak potentzial-diferentzia sorterazten du sorgailuaren muturren artean, eta horretarako beste energi mota bat erabiltzen da, energia kimikoa (metagailuetan) edo energia mekanikoa (dinamoetan) adibidez.

19.5.2. Hargailu elektrikoa. Indar kontraelektroeragilea.

Izen orokor modura, energia elektrikoa bero ez den beste energi mota bat ere bihurtzen duen tresnari, hargailu elektrikoa deritzo. Adibide gisa, motore elektrikoen kasua aipa dezakegu, zeintzuetan korronte elektrikoaren eraginez energia mekanikoa sortzen den.




Demagun a eta b puntuen artean $V_{ab}$ potentzial-diferentzia konstantea dagoela eta bi puntu horietara $r_m$ barne-erresistentzia duen hargailu elektrikoa konektatzen dugula, ondorioz a-tik b-ra I intentsitatea pasatzen delarik. Egin dezagun ener-

giaren balantzea.

- ab puntuen artean ematen den potentzia $V_{ab} \cdot I$ da.

- Hargailua, energiari dagokionez, elementu pasiboa da nolabait esateko, hots, hartu egiten du. Baina hartzen duen energia bi eratara gastatzen du:

  - Barne-erresistenzian $r_m I^2$ galera dago denbora-unitateko.

  - Bestetik P potentzia beste energi mota bilakatzen du.

Denetara, energiaren kontserbazioaren arauera:

$$V_{ab}\ I = r_m\ I^2 + P \quad .$$

Beraz, $P = V_{ab}\ I - r_m I^2$ beste zerbait bilakatzen den potentzia da, motore elektrikoen kasuan, adibidez, energia mekaniko bihurtzen dena.

Ondoko eran definituriko magnitudeari,

$$\mathcal{E}_m = \frac{P}{I} \quad ,$$

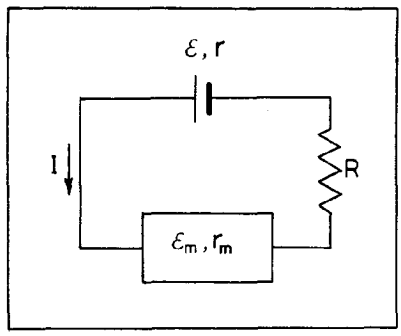
hargailuaren <u>indar kontraelektroeragilea</u> deritzo eta beraren ezaugarria da, barne erresistentziarekin batera. Indar elektroeragilea bezala, hau ere volta-tan neurtzen da. Bestalde, indar kontraelektroeragileari buruz, aurreko atalean indar elektroeragileaz eginiko oharren antzerakoak egin ditzakegu, alegia, ez dela "indarra" , hargailuan beroaz gain karga-unitateko kontsumitzen den energia baizik, eta bestetik, volta-tan neurtu arren, ez dela potentzial-diferentziarekin nahastu behar.

Indar kontraelektroeragilea erabiliz, honela geratzen zaigu hargailuaren muturren arteko potentzial-diferentziaren adierazpena:

$$V_{ab} = \mathcal{E}_m + r_m I$$

### 19.5.3. Ohm-en legearen orokorpena

Zirkuitu berean sorgailua, hargailua eta erresistentzia batera agertzen direnean, modu berean egin dezakegu energiaren balantzea.




Azken batez, sorgailuaren potentzia zirkuituan I intentsitateko korrontea mantentzeko erabiltzen da:

$$\mathcal{E}I = \mathcal{E}_m I + rI^2 + r_m I^2 + RI^2$$

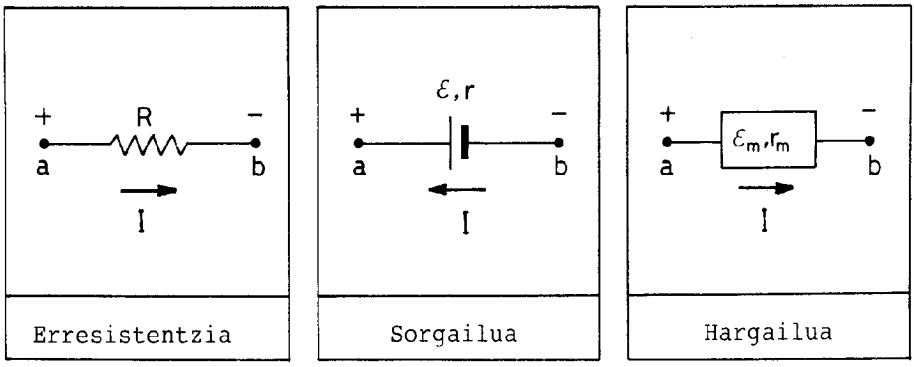
$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_m = (r + r_m + R)\ I = (\sum_i r_i)\ I \quad .$$

Eta kasu orokorrean korronte jarraiko zirkuitu berean zenbait sorgailu, hargailu eta erresistentzia ditugunean:

$$\sum_i \mathcal{E}_i - \sum_j \mathcal{E}_{mj} = (\sum_k r_k)\ I \quad .$$

Hauxe da, hain zuzen, Ohm-en legearen orokorpena zirkuitu bakarraren kasuan.

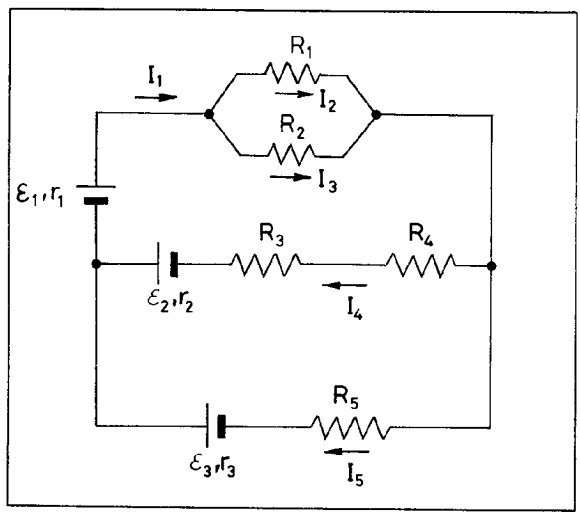
Bukatzeko, intentsitatearen norantzaren eta muturretako potentzial-diferentziaren arteko erlazioa grafikoki adieraziko dugu, aipaturiko hiru elementu-moten kasuan.




Ohar gisa diogun ezen hargailuek beren mutur edo borneak alderantziz konektaturik dituzten sorgailuen modura jokatzen dutela.

## 19.6. KORRONTE JARRAIKO ZIRKUITU ANIZKOITZAK

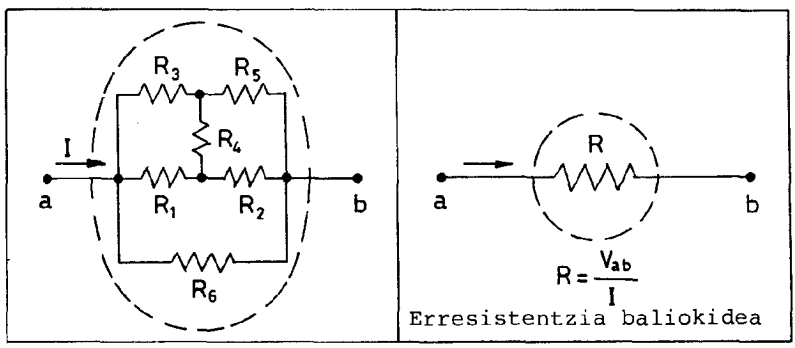
Orain arte aztertu ditugun zirkuituetan, bide bakarra egon da eta, ondorioz, korrontearen intentsitatea berbera zen zirkuituko puntu guztietan, horrela kalkuluak erraztu egiten zirelarik. Baina gehienetan zirkuituak ez dira bakunak anizkoitzak baizik, hau da, bide desberdinak daude zein bere intentsitatearekin, eta horrelako kasuetan bestelako teknikak erabili behar izaten dira korronteak ongi ezagutzeko.



Adibide gisa irudiko zirkuitu anizkoitza har dezakegu. Zirkuitu osoari sare elektrikoa deritzo. Bertan ikusten denez, bertako elementuak modu desberdinez konekta daitezke elkarrekin. Bide berean eta elkarren ondoan bata bestearen atzetik jarririk konektatzen direnean, serie-konexioa dugu, $R_3$ eta $R_4$ erresistentzien kasuan bezala. Kasu honetan intentsitate berbera iragaten da bi erresistentzietan barrena. Ostera, bi punturen arteko bi bide desberdinetan daudenean, paralelo-konexioa dugu, $R_1$ eta $R_2$ erresistentzien kasuan bezala. Kasu honetan potentzial-diferentzia berbera dago bi erresistentzien muturren artean, baina intentsitatea desberdina izango da, bi erresistentziak berdinak direnean izan ezik.

### 19.6.1. Erresistentzia elektrikoen konbinazioen erresistentzia baliokidea

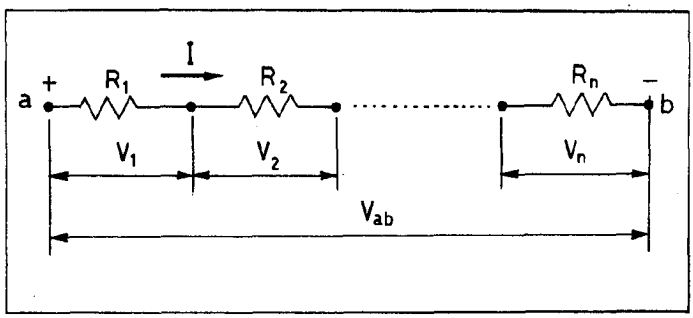
Aurreko konbinazioetan, multzoaren erresistentzia baliokidea lor dezakegu. Erresistentzia baliokidea, erresistentzi multzoaren ordez jarriz, sare elektrikoaren beste elementuak korronte berberaz eta baldintza beretan iraun erazten dituena da, alboko irudian ikusten den legez.




Ikus dezagun, adibidez, lehenago aipaturiko serie- eta paralelo-konexiotako erresistentzia baliokideak zeintzu diren.

a) Serie-konexioa

Kasu honetan erresistentzia guztiak zeharkatzen dituen intentsitatea, I, berbera da.




Erresistenzia bakoitzarekin Ohm-en legea erabiliz:

$$V_1 = R_1 \, I$$

$$V_2 = R_2 \, I$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_n = R_n \, I \quad ,$$

eta bestetik:

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_n = \sum_i V_i \quad .$$

Azkenean:

$$\frac{V_1}{I} + \frac{V_2}{I} + \cdots\cdots + \frac{V_n}{I} = R_1 + R_2 + \cdots\cdots + R_n$$

$$\sum_i \frac{V_i}{I} = \frac{\sum_i V_i}{I} = \frac{V_{ab}}{I} = R \qquad \text{definizioz.}$$

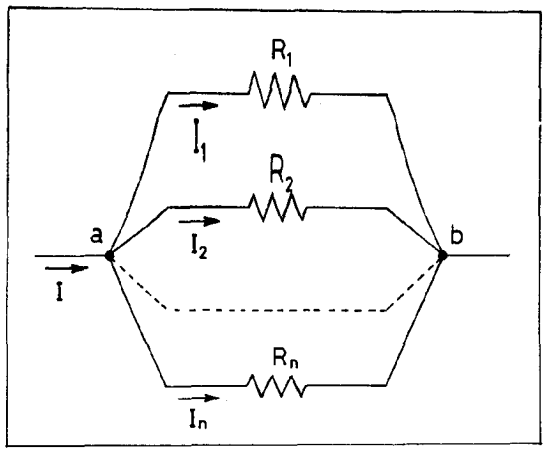
Beraz, erresistentzia baliokidea honela adieraziko da:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots\cdots + R_n = \sum_i R_i \quad ,$$

hots, serie-konexioan, erresistentzia baliokidea erresistentzien batura da.

b) <u>Paralelo-konexioa</u>

Hemen a eta b puntuen arteko potentzial-diferentzia bide guztietan berbera dela dakusagu.




Bestetik, a puntura heltzen den intentsitatea, bide guztietatik banatzen da. Beraz:

$$V_{ab} = R_1 \; I_1$$

$$V_{ab} = R_2 \; I_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{ab} = R_n \; I_n \; ,$$

eta kontinuitatearen ekuazioak dioskunez:

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \sum_i I_i$$

$$I = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \cdots + \frac{V_{ab}}{R_n} = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) ,$$

eta definizioz $I = \frac{V_{ab}}{R}$ denez, hauxe geratzen zaigu:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_i \frac{1}{R_i} \; .$$

Ondorioz, paralelo-konexioan erresistentzia baliokidearen

inbertsua, erresitentzien inbertsuen arteko batura da. Bi erresistentzia paraleloz elkarturik ditugunean:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \longrightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} .$$

19.6.2. Kirchhoff-en legeak

Zirkuitu anizkoitzak korapilatsuagoak direnean, eta erresistentziekin batera hargailu eta sorgailuak ditugunean, ezin ditugu erresistentzia baliokideak arestian azaldu dugun modura lortu. Kasu honetan erabiltzen den metodoa, G.R. Kirchhoff (1824-1887) ikerlariari zor zaio eta horregatik Kirchhoff-en legeak izenaz ezagutzen da.

Legeak eman baino lehen, sare elektrikoaren egiturari dagozkion bi osagairen definizioak ikusiko ditugu. Sare elektrikoan, korapiloa bi eroale baino eroale gehiago batzen direneko puntua da. Maila, berriz, sare elektrikoan dagoen edozein ibilbide itxi. Definizio horiek agertu ostean, Kirchhoff-en legeak emateko prest gaude:

1.- Korapiloen legea. Edozein korapilotarantz doazen intentsitateen arteko batura zero da:

$$\sum_i I_i = 0$$

2.- Mailen legea. Edozein mailatan dauden indar elektroeragileen arteko batura, maila horretako I.R baturen berdina da, hots, potentzial-erorketa guztien arteko baturaren berdina:

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j R_j I_j \quad .$$

Zenbait ohar egingo ditugu bi lege hauen esangurari buruz. Lehenegoak, azken batez, korapiloetan kargarik metatzen ez dela esaten digu, hots, kontinuitatearen ekuazioa besterik ez da. Batura ongi egiteko, korapilorantz doazen intentsitateei zeinu

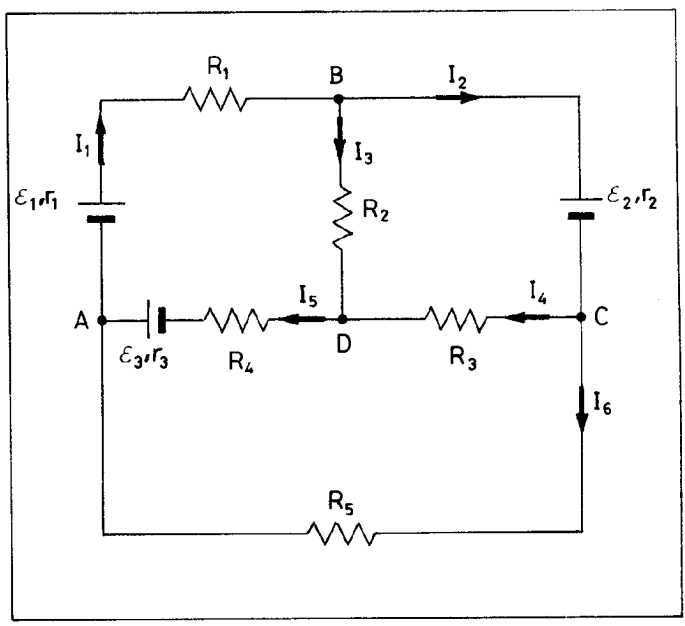
positiboa egokitzen zaie eta korapilotik irteten direnei, zeinu negatiboa (edo alderantziz).

Mailen legea Ohm-en legearen orokorpenaren ondorio zuzena da. Indar kontraelektroeragileek alderantziz jarririko indar elektroeragileen antzera jokatzen dute. Horrela eginik, ibilbide itxian barrena hauxe dugu:

$$\sum_i \mathcal{E}_i - \sum_j \mathcal{E}_{mj} = \sum_k R_k I_k \quad .$$

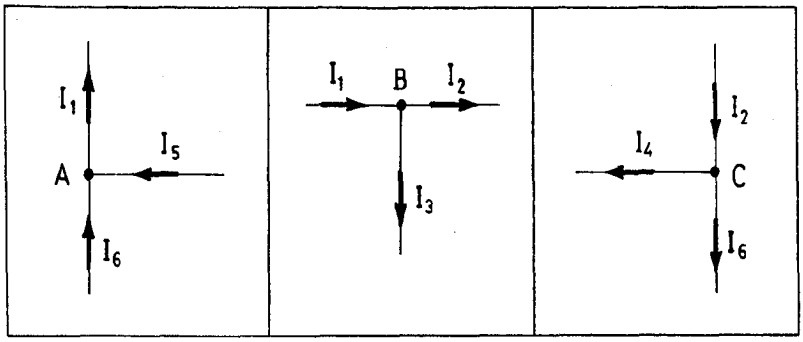
Hemen kontuz ibili behar da zeren, sarearen abartzeak direla eta, hari desberdinetan intentsitate desberdinak bait daude.

Kirchhoff-en legeak praktikan nola erabiltzen diren ikusteko, adibide bat jarriko dugu.




Demagun irudiko sare elektrikoa dugula, indar elektroeragile eta erresistentzia guztiak ezagutzen ditugula, eta bide guztietatik doazen korronteen intentsitateak kalkulatu nahi ditugula.

Lehenengo, korapiloen legea erabiliko dugu. Denetara lau korapilo ditugu: A, B, C eta D. Dena dela, hauetariko hiru erabili ahalko ditugu soilik, laugarrenarekin lortzen den ekuazioa beste hiruren konbinazio lineala bait da. Hauexek dira korapiloak:

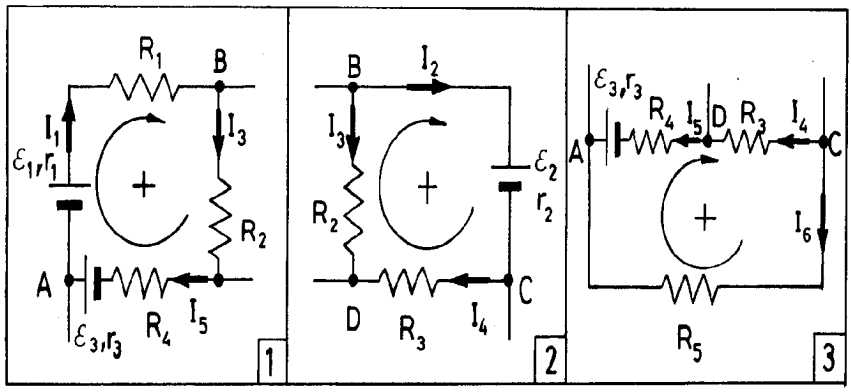



Hartutako zeinu-erizpidearen arauera

$$\begin{array}{ll} A: & \left\{ \begin{array}{l} -I_1 + I_5 + I_6 = 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 - I_4 - I_6 = 0 \end{array} \right. \\ \hline D: & I_3 + I_4 - I_5 = 0 \end{array}$$

Ikusten denez D korapiloko ekuazioa besteen konbinazioa da. Hots, korapiloen legea erabiltzean, korapilo guztiak hartu behar dira bat izan ezik.

Goazen orain mailen legea erabiltzera. Hemen ere kontuz ibili beharko dugu konbinazio linealik ez egiteko, aukera posible desberdinak egon bait daitezke. Arrisku hori ekiditeko, maila bakoitzak gutxienez bide desberdin bat eduki beharko du. Hona hemen aukera posible bat:




Irudian adierazten denez, maila bakoitzean norantza bat aukeratu dugu ibilbide itxia egiteko. Zeinu-hitzarmen horrekin, indar elektroeragileak positiboak edo negatiboak dira, zeinu horretako intentsitateak sorterazten dituzten ala ez arau. Honako ekuazio hauek lortzen ditugu:

$$
\begin{array}{ll}
1: & \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = r_1 I_1 + R_1 I_1 + R_2 I_3 + R_4 I_5 + R_3 I_5 \\
2: & -\mathcal{E}_2 = r_2 I_2 + R_3 I_4 - R_2 I_3 \\
3: & -\mathcal{E}_3 = -r_3 I_5 - R_4 I_5 - R_3 I_4 + R_5 I_6 \ .
\end{array}
$$

Honelatan, ba, denetara sei ekuazio ditugu eta sei ezezagun (intentsitateak). Horiek askatuz, ebatzita geratzen da arazoa. Zer esanik ez, emaitzetako baten bat negatiboa suertatuko balitz, horrek hauxe adieraziko liguke, alegia, intentsitate horri aldez aurretik egokitu zaion norantza ez, baizik eta aurkakoa dagokiola.

## 20. GAIA: INTERAKZIO MAGNETIKOA

20.1. Partikula kargatu higikorren gaineko indarrak

20.2. Eremu magnetikoa zeharkatzen duen partikula kargatuaren higidura. Adibideak

20.3. Korronte elektrikoaren gaineko indar magnetikoa

20.4. Korronte elektrikoaren gaineko indar-momentu magnetikoa

20.5. Korronte elektrikoak sortutako eremu magnetikoa

20.6. Biot-Savart-en legearen erabilpenaren adibide bi

20.7. Korronteen arteko indarrak

20.8. Partikula kargatu higikorrek sortutako eremu magnetikoa.

Aintzinean marinelek ba zekiten itsasoan norabideà finkatzen, iparrorratza deitutako tresnaz baliatuz. Izan ere, burdin-minerala den magnetitazko orratzek, hari batez esekita edo ardatz bertikal batez eutsita daudenean, joera berezia erakusten dute: ipar-hegoko norabidean jartzen dira. Joera hori dela eta, iparralderantz begira kokatzen den muturrari, orratzaren "ipar-poloa" deritzo, eta besteari "hego-poloa". Hortaz, halako orratz bi bata bestearen aurrean ipintzean, izen bereko muturrak elkarretik aldentzen direla eta, berriz, izen desberdinekoak hurbiltzen direla ikusten denez gero, hauxe ondorioztatzen da: Lurra oso iman handia da, "ipar-polo magnetikoa" daukalarik "hego-polo geografikoan", eta alderantziz.

Polo magnetikoei buruzko teoria aski garatua izan zen, eta beraren azalbidea nolabait oinarritzeko asmotan, materiari beste ezaugarri berri bat egokitu zitzaion, "propietate magnetikoa" delakoa alegia, zeina ordurarteko ezaugarri jakinei (inertzi-propietatea edo masa, eta propietate elektrikoa edo karga) erantsi zitzaien. Hala ere, igaro den mendearen erdialdean Oersted, Faraday, Henry eta beste ikertzaile batzuk burutu zituzten azterlanak zirela medio, lehengo teoria baztertu eta gure egunetararte iraun duena onartu zen. Teoria honen arauera, interakzio magnetikoa higitzen diren kargek elkarri egiten dioten eragina baizik ez da, eta beraz, interakzio hori aztertzeko nahikoa da partikulen karga eta abiadura jakitea, materiaren ezaugarri berririk zertan sartu beharrik ez izanik.

## 20.1. PARTIKULA KARGATU HIGIKORREN GAINEKO INDARRAK

Partikula kargatu higikorrei eragiten dieten interakzioak aztertzean, behin jatorri grabitatorioa edota elektrostatikoa dutenak kenduta, askotan beste indar bat aurkitzen dugu. Hori da, hain zuzen ere, indar magnetikoa. Hemen, aipaturiko indarraren adierazpen matematikoa aurkeztera mugatuko gara, nork eta nola

eriden zuen, aurreragoko beste ikasturte batetarako lagatuz. Hara:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} \quad , \text{ non}$$

q = partikularen karga,

$\vec{v}$ = partikularen abiadura, eta

$\vec{B}$ = eremu magnetikoaren intentsitate-bektorea den.

Ikus daitekeenez, grabitazioari eta elektrizitateari eskainitako gaietan ez bezala, oraingo honetan eremu-kontzeptua hasiera hasieratik sartzen dugu interakzio magnetikoa azaltzeko, zeren eta, Fisikaren hainbeste arlotan gertatzen den antzera, magnetismoan ere eremu-kontzeptua aparteko baliabidea bait da. Beraz, $\vec{B}$ eremu magnetikoaren intentsitate-bektorea, edo izen laburragoaz, eremu magnetikoa onartu eta erabili egingo dugu, interakzio magnetikoa adierazteko lagungarri zaigu eta.

Eremu magnetikoa higitzen diren kargek sortzen dute eta, antzeman dezakegunez, eremua eta bera sortarazten duten partikulen arteko elkarloturak ba daude egon. Haatik, ez dugu oraingoz horren ardurarik hartuko, baizik eta 20.5 eta beronen hurrengo ataletan.

Hildoari berriro helduta, goazen aurreko adierazpena aztertzera. Has gaitezen eremu magnetikoaren dimentsioak erdiesten:

$$[B] = [\frac{F}{q.v}] = \frac{M\ L\ T^{-2}}{Q\ L\ T^{-1}} = M\ T^{-1}Q^{-1} = M\ T^{-2}I^{-1} \quad .$$

Hortaz, Nazioarteko Unitate-Sisteman eremu magnetikaoren unitatea, hots Tesla (T) delakoa, ondokoa dugu:

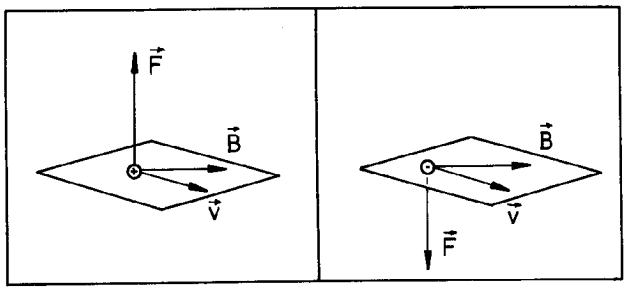
$$1\ T = 1\ (Kg\ s^{-2}\ A^{-1}) \quad .$$

Orain, kalkula dezagun indar magnetikoaren modulua:

$$|\vec{F}| = q\ .\ |\vec{v}|\ .\ |\vec{B}|\ \sin\theta \quad .$$

Zer esanik ez, $\theta$ angelua, $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ bektoreek osotutakoa da.

Indarraren norabideari gagozkiolarik, alboko irudian erakusten da karga positiboko partikularen kasua zein negatibokoarena, biak ere biderkaketa bektorialaren aplikazio zuzenak direlarik.




Azkenez, datorren atalari begira garrantzi handiko ohar bat egin behar dugu, eremu magnetikoa besterik ez dagoeneko espazioaldea zeharkatzen duen partikula kargatuari buruz. Hona hemen oharra, bi era bitara adierazita:

- $\vec{F}$ bektorea $\vec{v}$ bektorearen perpendikularra denez, partikularen azelerazioa normala da oso osorik, eta beraz abiaduraren moduluak konstante dirau, norabidez etengabe aldatuz doan bitartean.

- indar magnetikoak ez du inoiz ere lanik burutzen, ibilbidearen perpendikularra bait da, eta beraz partikularen energiak konstantedirau.

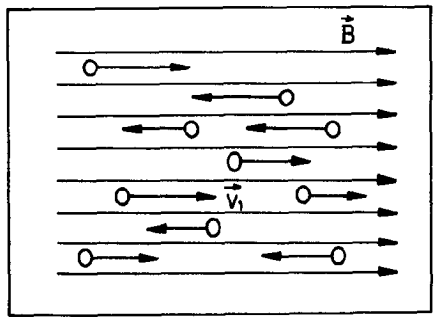
## 20.2 EREMU MAGNETIKOA ZEHARKATZEN DUEN PARTIKULAREN HIGIDURA. ADIBIDEAK

Lehenik eta behin diogun, ezen eremu magnetiko uniformea soilik kontutan hartuko dugula, halakoak izaten bait dira laborategiko aparatu garrantzitsuenetan erabiltzen direnak, hala nola masen espektrogafo eta espektrometroetan, ziklotroietan, etabarretan.

Arazoa ahalik eta errazkien aztertzekotan, hiru kasutan

banatuko dugu.

20.2.1 $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ paraleloak dira.




Kalkula dezagun irudiko edozein partikulak jasaten duen indar magnetikoa, $\vec{v}_1$ abiadura daraman partikulak jasaten duena, adibidez, beraren karga-mota zeinnahi izanik. Hara:

$$\vec{F}_1 = q\,\vec{v}_1 \wedge \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{F}_1 = 0$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} \longrightarrow \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \longrightarrow \vec{v}_1 = \text{kte.}$$

Hots, abiaduraren modulua ez ezik, norabidea ere ez da aldatzen. Labur esanda, partikularen abiadura eremuaren paraleloa denean, haren higidura zuzena eta uniformea da.

20.2.2 $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ perpendikularrak dira. Oraingo kasu honetan ondokoa dugu:

$$\vec{F}_2 = q\,\vec{v}_2 \wedge \vec{B} \neq 0 \longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}_2}{dt} \neq 0 \quad ,$$

eta beraz, abiaduraren norabidea aldatuz joango da (dakigunez, modulua ez). Haatik, abiaduraren norabide berriak, $\vec{v}_2$ eta $\vec{a}$ (edo $\vec{F}_2$) bektoreek osatzen duten planoan datzanez gero, eremuaren perpendikularra izaten iraungo du. Unez une arrazoibide berbera errepikatuz, partikularen ibilbidea eremuaren perpendikularra den plano batetan gertatzen dela ondorioztatzen dugu, eta hortik:

$$|\vec{F}_2| = |q|.|\vec{v}_2|.|\vec{B}| = \text{kte.}$$

Bestalde, indarra eta abiadura elkarren perpendikularrak direnez:

$$\vec{F}_2 = m \cdot \frac{v_2^2}{r} \hat{n} \longrightarrow r = \frac{m.|\vec{v}_2|}{|q|.|\vec{B}|} = \text{kte.}$$

Kurbatura-erradio konstantea duen higidura laun bakarra dago, hots, higidura zirkularra, eta horixe izango da partikulak deskribatuko duena. Kalkula ditzagun higidurari dagozkion periodoa, maiztasuna eta abiadura angeluarra. Hara:

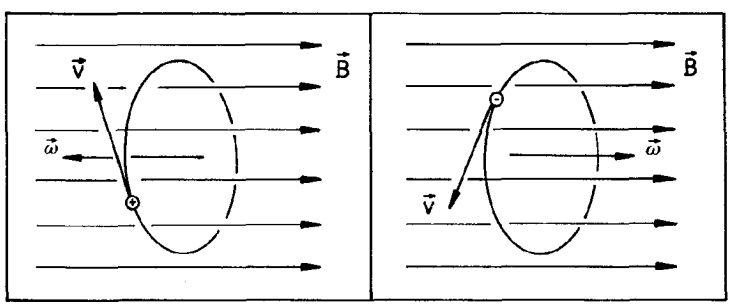
$$T = \frac{2\pi.r}{|\vec{v}_2|} = \frac{2\pi.m}{|q|.|\vec{B}|} \quad ;$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|q|.|\vec{B}|}{2\pi m} \quad ;$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{|q|}{m} |\vec{B}| \quad .$$

Bistakoa denez, hiru magnitudeok ez dute abiaduraren menpekotasunik.

Alboko irudian partikula positiboaren eta negatiboaren ibilbideak erakusten dira. Bertan ikus daitekeenez, partikula positiboaren kasuan $\vec{\omega}$ eta $\vec{B}$ bektoreen norantzak elkarren aurkakoak dira; partikula nagatiboaren kasuan, aldiz, norantza berekoak.




Laburki esanda, abiadura eremuaren perpendikularra duen

partikularen higidura zirkularra da, zirkunferentziaren erradoia abiaduraren arauerakoa delarik. Periodoak, eta hortaz, maiztasunak eta abiadura angeluarrak, ordea, ez dute abiadura linealaren menpekotasunik. Abiadura angeluarra honela adierazten da bektorialki:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B} \quad .$$

20.2.3 <u>$\vec{v}$ eta $\vec{B}$ bektoreek edozein angelua osotzen dute</u>. Esan barik doa oraingo hau kasurik orokorrena dugula, eta aurreko bien batura, nonbait. Eremuaren eta abiaduraren arteko angelua $\theta$ dela jorik, deskonposa dezagun abiadura eremuaren norabide paraleloan eta perpendikularrean:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad \begin{cases} |\vec{v}_1| = v \,.\, \cos\theta \\ |\vec{v}_2| = v \,.\, \sin\theta \,. \end{cases}$$

Orain, goazen indarraren adierazpenera:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\wedge\vec{B} = \vec{F}_1+\vec{F}_2 \qquad \begin{cases} \vec{F}_1 = q\,\vec{v}_1\wedge\vec{B} \\ \vec{F}_2 = q\,\vec{v}_2\wedge\vec{B} \,. \end{cases}$$

Berehala konturatzen gara horiexek direla 20.2.1 eta 20.2.2 azpiataletan, hurrunez hurren, agertu zaizkigun indarrak. Hortaz, Gainezarmenaren Printzipioan oinarriturik, aipaturiko kasu biak batera hartuz, oraingo kasu honi dagokion ibilbidea helizea dela ondorioztatzen dugu. Areago, helizearen ardatza eremuaren paraleloa da, eta erradioa ondoko hau:

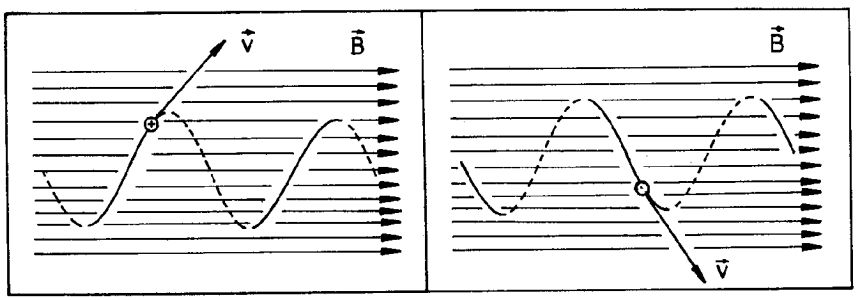
$$r = \frac{m \,.\, v \,.\, \sin\theta}{|q| \,.\, |\vec{B}|} \quad .$$

Abiadura angeluarrari, periodoari eta maiztasunari gagozkielarik, berauek abiadura linealaren menpekotasunik ez dutenez, 20.2.2 azpiatalean aurkitutako emaitza berberek kasu honetarako ere balio dute.

Azkenez diogun, ezen helizea zehazki eta egokiro definituri **gera** dadin, **beraren ezaugarri** bat falta zaigula, "**pausoa**" **delakoa** alegia. Pausoa ondoko era honetan definitzen da: bira oso bat burutzean igarotako denboran, ardatzaren norabidean korritzen den distantzia. Hortik, pausoa ($\delta$) kalkulatzeko, ardatzaren, hots, eremuaren norabidean abiadurak duen osagaia ($v_1$), eta bira oso bakoitzean ematen den denbora (T), biderkatu behar ditugu:

$$\delta = v_1 \cdot T = \frac{2\pi . m . v . \cos\theta}{|q| \cdot |\vec{B}|} .$$

Beraz, kasu orokorrean, eremu magnetikoan zehar doan partikula kargatuaren ibilbidea, helize-tankerakoa da, beronen erradioa eta pausoa oraingo azpiatal honetan agertutakoak direlarik, eta higiduraren ezaugarriak, T, $\nu$ eta $\omega$, alegia, 20.2.2 azpiatalekoak.




Goiko irudian partikula positiboaren kasurako helizea, zein partikula negatiboaren kasurakoa ikus daitezke.

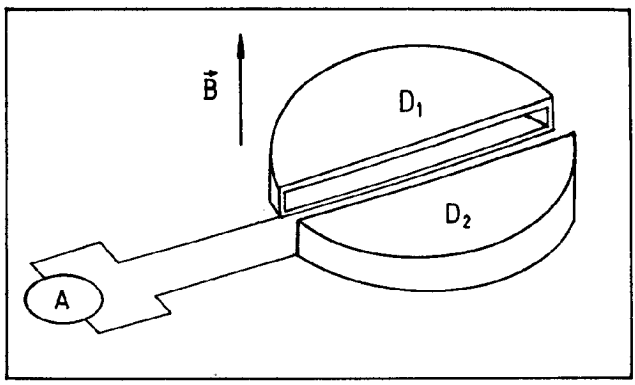
20.2.4 Adibideak

- Masen espektrometroa. Masen espektrometroak mota askotakoak badira ere, guztiek funtsa eta helburu berberak dituzte. Hona hemen bata eta bestearen berri laburra:

Aldez aurretik eremu elektrikoak azeleratu dituen atomo ionizatuak, beren abiaduraren perpendikularra den eremu magnetikoan zehar pasaerazten dira, bertan zirkunferentzia erdia bu-

rutzen dutelarik, pantailarekin topo egin arte.
Pantailan, ibilbidearen erradioa neurtzen da, eta abiadura eremu elektrikoan erabilitako potentzial-diferentziaren bitartez jakin daitekeenez, 20.2.2 azpiataleko lehenengo adierazpenetik $\frac{q}{m}$, hau da, ioien kargaren eta masaren arteko zatidura lortzen da. Bestalde, era desberdinez, partikulen karga lor daiteke, eta ondorioz beraien masak ere. Horrela, masen espektrometroak oso aparatu egokiak gertatzen dira elementu kimikoen isotopoak ikertzeko.

- Ziklotroia. Bigarren eta azken adibide bezala, partikulen azeleragailu-mota bat erakutsiko dugu: "ziklotroia" delakoa.

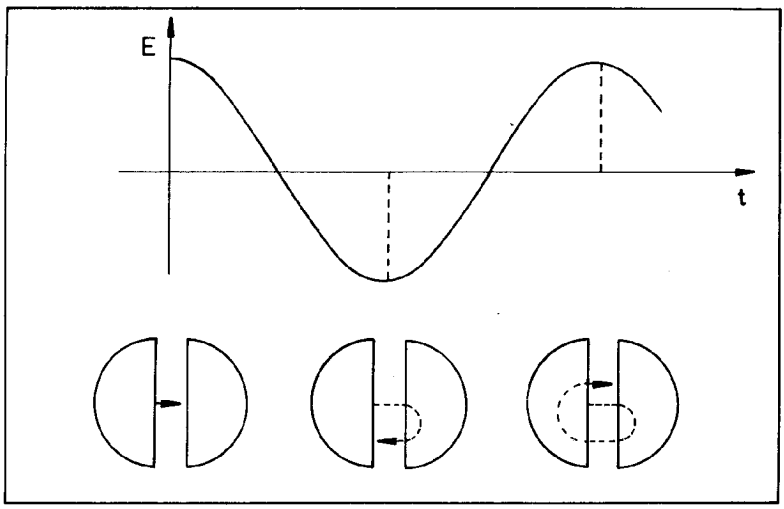



Ziklotroia, irudiko $D_1$ eta $D_2$ pieza erdizilindrikoek osotzen dute. Piezok, uniforme eta beraien oinarrien perpendikularra den $\vec{B}$ eremu magnetikoak zeharkatuta daude. $D_1$ eta $D_2$, beren erradioarekin alderaturik oso txikia den distantziaz banandurik daude, ertz bien arteko espazioaldean, A alternadoreak sortutako eremu elektrikoa dagoelarik (geroxeago ikusiko dugunez, eremu elektrikoak konstante iraun barik alternoa izan behar du). $D_1$ eta $D_2$-ren erdialdean, irudian agertzen ez den "ioi-kanoia" ezarrita dago, ziklotroian azeleratuak izango diren partikulak jaurti ditzan.

Ioi bat askatzen den bezain laster, eremu elektrikoak pieza baten barrura bidaltzen du (eremu elektrikoa maximoa denean askatzen da partikula). Pieza barruan eremu elektrikoa nulua denez gero, eremu magnetikoak soilik eragiten dio ioiari, beronek zirkunferentzierdiko ibilbidea betetzen duelarik, abiadura-

ren balorea batere aldatu gabe. Pieza baten barnetik bestearenera pasatzen deneko uneetan, hots, "jauzi" bakoitzean, eremu elektrikoak bultzatu egiten du partikula, beronen energia jauziz jauzi handituz doalarik.

Abiadura handituz doan heinean, zirkunferentzierdien erradioa ere gero eta luzeagoa gertatzen da, partikula ia piezen hegaleraino heldu arte. Bertako eremu magnetikoa ahuldu, eta ezabatu egiten da zeharo, eta ondorioz, behin haren eraginetik aske geratzean, ioia ziklotroitik ihesi doa, egokiro prestatutako zirrikitu batetan zehar.




Ziklotroiaren ihardurarren koxka ondoko ñabardura honetan datza: irudian ikus daitekeen legez, eremu elektrikoaren norantza-aldaketek eta ioiaren higidurak aldiberekoak izan behar dute, zeren bestela jauzi batzutan partikulak energia irabazi beharrean, galdu egingo bait luke, edo beste era batera esanda, eremu elektrikoak bultzatua gertatu barik, balaztatua izango bait litzateke. Zorionez, 20.2.2 azpi-atalean erakutsitakoaren arauera, eremu magnetikoaren eraginpeko higidura zirkularraren maiztasunak ez du abiaduraren menpekotasunik eta, horri esker, nahiz eta gero eta arinago joan, ioiak beti erabiltzen du denbora berbera biraerdi bakoitza betetzeko. Beraz, hasieran eremu elektrikoa eta partikularen higi-

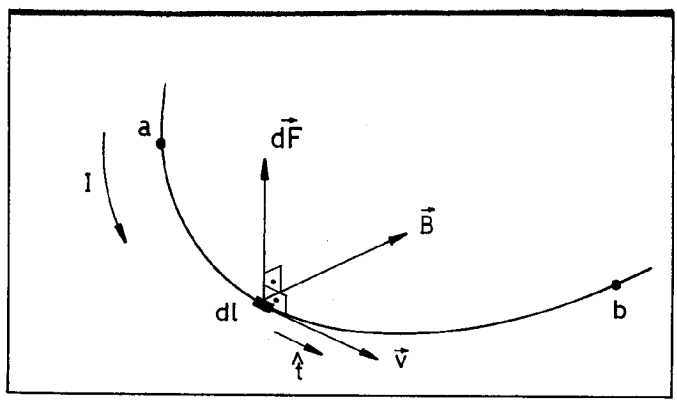
dura sinkronizatuak badira, horrelaxe iraungo dute bilakabide osoan barrena (partikularen abiadura argiarenera gehiegi hurbiltzen ez bada, behintzat).

## 20.3 KORRONTE ELEKTRIKOAREN GAINEKO INDAR MAGNETIKOA

Azaldu izan denez (ikus 19.gaia), korronte elektrikoa higituz doazen elektroi-multzoak besterik ez da. Ondorioz, korronte elektrikoak eremu magnetikoaren zelanbaiteko eragina pairatu behar du, eta horixe da orain aztertzera goazena. Azalpena kasu bitan zatituko dugu, arazoa hobeto ulertzekotan.

### 20.3.1 Korronte lineala

Errealitatean benetako korronte linealik ez badago ere, kasu hau oso hurbiltze ona gerta daiteke zenbait egoeratan, korronteak hari mehetxoetan barrena doazenean, behinik behin.




Irudiko hariaren dl zati txikia hartuta, eta beraren barruan dq karga-kopurua $\vec{v}$ abiaduraz higitzen dela kontsideratuta, $\vec{B}$ eremuak egiten dion indarra hauxe da:

$$d\vec{F} = dq\ \vec{v} \wedge \vec{B} \quad .$$

Ondoren, hariaren norabidean eta korrontearen norantzan $\hat{t}$ bektore unitarioa erabilita, eta aldi berean, abiaduraren eta intentsitatearen definizioak aplikatuta, honela geratzen zaigu:

$$d\vec{F} = dq \cdot \frac{dl}{dt} \hat{t} \wedge \vec{B} = \frac{dq}{dt} \cdot dl\, \hat{t} \wedge \vec{B} = I\, \hat{t} \wedge \vec{B}\, dl.$$

Adierazpen horretatik abiaturik, harriaren edozein zati finituren gaineko indarra kalkula dezakegu. Adibidez, a puntutik b punturainoko zatiak jasaten duena, hauxe izango da:

$$\vec{F} = I \int_a^b \hat{t} \wedge \vec{B}\, dl \quad .$$

Zer esanik ez, integrala ebazteko orduan, beraren barneko funtzioaren zertasun bektoriala kontutan hartu behar da. Haria zuzena eta eremua uniformea baldin badira, emaitza oso era errazean lor daiteke. Hara:

$$\hat{t} \wedge \vec{B} = \text{Kte.} \qquad \vec{F} = I \cdot l_{ab}\, \hat{t} \wedge \vec{B} \quad ,$$

non $l_{ab}$, a eta b puntuen arteko zatiaren luzera den.

20.3.2 Karga-multzo higikorrak

Multzoaren edozein q karga-kopuru txikiren bolumena $\Delta V$ eta berorren abiadura $\vec{v}$ izanik, bolumen-unitateko $\vec{f}$ indarra honela gertatzen da:

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \vec{v} \wedge \vec{B} = \rho\, \vec{v} \wedge \vec{B} \quad ,$$

non $\rho$ delakoak, karga higikorraren dentsitatea adierazten duen.

Bestalde, karga higikorren multzoak aztertzean (19.2 atala), korronte-dentsitatea deitutako bektorea, ondoko era honetara definitu genuen:

$$\vec{j} = n.q\, \vec{v} \qquad \text{edo } \vec{j} = \rho \vec{v} \qquad (\rho = n.q) \quad ,$$

eta hortik, bolumen-unitateko indarrari dagokion adierazpena honela labur dezakegu:

$$\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

Behin bolumen-unitateko indarra lortuta, karga higikorren multzoaren zati finitu baten gainekoa kalkulatzekotan, integratu besterik ez dugu egin behar; hau da:

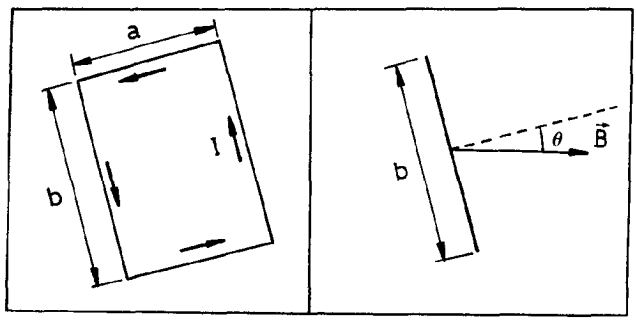
$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \wedge \vec{B}\, dV \quad ,$$

non V, hautatutako zatiaren bolumena den.

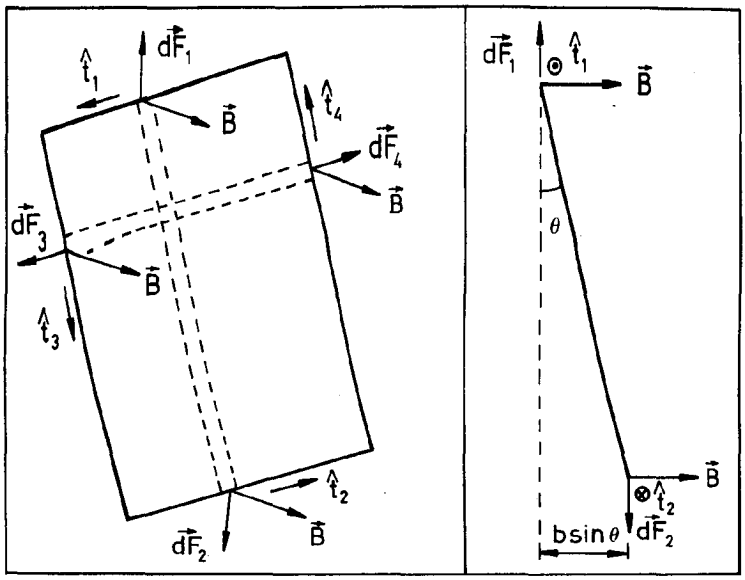
Aurreko azpiatalaren azkenaldean esandakoari berriro helduz, oraingo honetan ere, integralaren barneko funtzioa bektoriala dela azpimarratu behar dugu.

## 20.4 KORRONTE ELEKTRIKOAREN GAINEKO INDAR-MOMENTU MAGNETIKOA

Eremu magnetikoak korronte elektrikoei eragindako indar--momentuen azterketa aski korapilatsua bada ere, hemen errazena eta halaber ohizkoena den kasua erakustera mugatuko gara.




Beraz, irudiko espira errektangeluarrak jasaten duen indar--momentuan finkatuko gara, zeina $\vec{B}$ eremu uniformeak sortua den. I korrontea daroan espiraren planoaren norabide perpendikularrak θ angelua betetzen du eremuarekin, eta aldeen luzerak a eta b dira, a luzerakoak eremuaren perpendikularrak direlarik.




Lau aldeetan zati diferentzial bana kontsideraturik, eta bakoitzean eremuak sortzen duen indarra kalkulaturik, ondoko emaitzetara heltzen gara (ikus irudia):

$$|d\vec{F}_1| = |d\vec{F}_2| = I.B.dl$$

$$|d\vec{F}_3| = |d\vec{F}_4| = I.B.dl.\cos\theta \quad .$$

$d\vec{F}_3$ eta $d\vec{F}_4$ indarrei dagokienez, indar erresultante nulua emateaz gain, beraien indar-momentu erresultantea ere nulua da, aplikazio-lerro berbera dute eta. Hortaz, b luzerako aldeen gainean agertzen diren indarrak ahantz egin ditzakegu, materialaren elastikotasuna itxuragabetzerik ez gertatzeko adinakoa dela jorik.

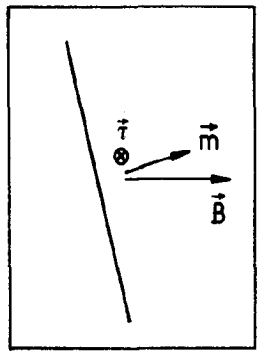
$d\vec{F}_1$ eta $d\vec{F}_2$ indarrei gagozkielarik, ordea, indar erresultante nulua ematen badute ere, beraien aplikazio-lerroak desberdinak direnez gero, indar-bikotea osotzen dute, beronen momentua hauxe delarik:

$$d\tau = dF_1 \ . \ b \ . \ \sin\theta = I.B.b.dl.\sin\theta \quad .$$

Hortik, integrazio-bidez, espira osoaren gaineko indar-momentua segituan lor dezakegu. Hara:

$$\tau = I.B.b.\sin\theta \int_0^a dl = I.B.b.a.\sin\theta = I.S.B.\sin\theta \ ,$$

non S letraz, espiraren aldeek mugatzen duten gainazal launaren azalera adierazten dugun.




Ikusi dugunez, indar elemental guztien erresultantea nulua denez gero, eremu magnetikoak espirari egiten dion efektu bakarra $\vec{\tau}$ indar momentua da, eta beronen balorea eta norabidea adierazpen bakar baten bitartez eman ahal izateko, espiraren "momentu dipolar magnetikoa" delako bektorea definituko dugu. Bektore horren modulua I.S biderkadura da, eta norabidea espiraren planoaren perpendikularra, torlojuaren erregelaren arauera. Beraren dimentsioak $[IL^2]$ dira, eta unitatea (Nazioarteko Unitate--Sisteman) A $m^2$. Aurreko guztia laburbilduz, hona hemen momentu dipolar magnetikoaren adierazpena:

$$\vec{m} = I.S\ \hat{n} \ .$$

Esan bazala, espiraren momentu dipolar magnetikoa erabiliz, lehen kalkulatu dugun indar-momentua oso era trinkoaz idatz dezakegu; honela hain zuzen (ikus irudia):

$$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B} \ .$$

Irakurleak egiazta dezakeenez, biderketa bektoriala garatuz, $\vec{\tau}$-ren modulua eta norabidea erdiesten dira.

Bukatzeko ohar bi:

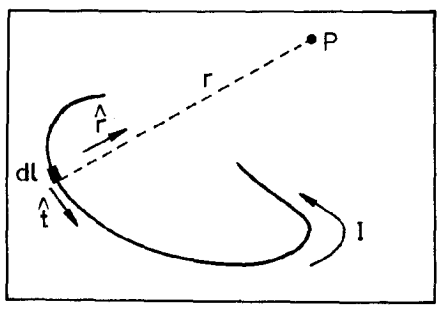
- eremu elektrikoak dipolo elektrikoaren gainean sortzen

duen indar-momentuak (ikus 18. gaia), eta eremu magnetikoak espiraren gainean sortzen duenak duten antzekotasuna dela eta, espirei "dipolo magnetikoak" deitu ohi zaie.

- momentu dipolar magnetikoa definitzeko orduan, espira errektangeluarraren kasuan oinarritu garen arren, diogun, ezen aipaturiko bektorearen erabilpenaren arloa askoz ere zabalagoa dela. Egia esan, korronte itxi guztiei, hots, zirkuitu elektriko guztiei $\vec{m}$ bektorea atxeki dakieke, zirkuitoaren tankera edonolakoa izanda ere. Areago, ibilbide itxia korritzen duen edozein partikula kargatuk bere momentu dipolar magnetikoa du; adibidez, atomoaren erdigunearen inguruan biraka ari den elektroi bakoitzari bere $\vec{m}$ bektorea dagokio.

## 20.5 KORRONTE ELEKTRIKOAK SORTUTAKO EREMU MAGNETIKOA

20.1 atalean ohartu dugunez, higitzen diren partikula kargatuek sortzen dituzte eremu magnetikoak, eta korronte elektrikoa karga higikorren multzoa denez gero, eremu magnetikoa sortu behar du. Horregatio, korrontea eta berari dagokion eremua elkarlotzen dituen harremana ez da erraza, nolabait esatearren, eta XIX. mendearen hasierako fisikari entzutetsuenak jo eta ke aritu ziren arazo hori ikertzen. Garai hartan garatutako lanei esker Biot-Savart-en legea lortu zen, zeina makina bat ikerketen emaitza den. Hona hemen guk postulatu modura dakargun lege ospetsu hori:




$$\vec{B} = K_m \, I \oint \frac{\hat{t} \wedge \hat{r}}{r^2} \, dl \quad .$$

Formula honen erabilbidea azaltzera pasatu baino lehenago, ñabarduna batzu argitzea komeni da.

- Formulak, P bezalako edozein puntutako eremu magnetikoa, hots, zirkuituak daroan korronteak sortutakoa, kalkulatzeko balio du. Horixe da, hain zuzen ere, $\oint$ sinboloak adierazten duena, alegia, "dl" elementuak dauzkan lerroak itxia izan behar duela. Beraz, aurreko adierazpen finitutik, ondoko era infinitesimalera pasatzean:

$$d\vec{B} = K_m \, I \, \frac{\hat{t} \wedge \hat{r}}{r^2} \, dl$$

egiten den urratsa, urrats matematiko hutsa da. Hitz desberdinez esanda, ezin dezakegu era zuzenean baiezta $d\vec{B}$ hori zirkuituaren dl zatiaren emaria denik. Izan ere, ez dago zirkuitutik dl bezalako zatirik bakartzeko modu experimentalik, eta ondorioz, ez dugu zirkuituak daukan dl zati bakoitzak sortzen duen efektua neurtzerik.

- Aurreko beste integral batzutan gertatu zaigun legez, oraingo honetan ere barneko funtzioa bektoriala dela kontutan hartu behar da.

- $K_m$ koefizientea araukortasunerako faktorea besterik ez da, eta beraren balorea 20.7 atalean ikusiko dugu. Dagozkion dimentsio eta unitateak, ordea, Biot-Savart-en legetik atera ditzakegu. Hara:

dimentsioak : $[K_m] = [B \, I^{-1} L] = M \, L \, T^{-2} I^{-2}$ ;

unitatea (Nazioarteko Sistema): $Kg \, m \, s^{-2} A^{-2}$ edo $NA^{-2}$.

Bestalde, Coulomb-en legean $K_e$ koefizientea $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ zatiduraz ordezkatzean azaldu genuen arrazoi berberagatik, hemen ere $K_m = \frac{\mu_o}{4\pi}$ egingo dugu. Zer esanik ez, $K_m$ eta $\mu_o$ dimentsio- eta unitatekide ditugu.

Sartu berri dugun ordezkaketaren ondorioz, Biot-Savart-en

legea honela geratzen zaigu:

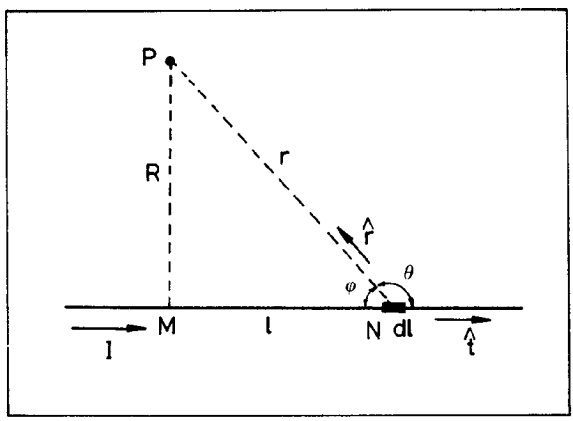
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\hat{t} \wedge \hat{r}}{r^2} \, dl \quad .$$

- Bukatzeko, zera aitortu beharra dago, alegia, Biot-Savart-en legeak maila teorikoan garrantzi handia eduki arren, praktikari begira oso erabilgarritasun murriztua erakusten duela, integralaren ebazpena zailegia gertatzen bait da, eite errazako zirkuituen kasuetan izan ezik.

## 20.6 BIOT-SAVART-EN LEGEAREN ERABILPENAREN ADIBIDE BI

### 20.6.1 Korronte zuzen eta mugagabeak sortutako eremu magnetikoa.

Bihoa aldez aurretik, oraingo kasu hau erabat teorikoa dela, errealitatean ez bait dago mugagabeko eroalerik. Dena den, Biot-Savart-en legea azaltzekotan egokia izateaz gain, eroale zuzenek, beren luzerarekin alderatuta hurbil dauden puntuetan, sortzen duten eremu magnetikoaren hurbilketa ona da.




Haritik R distantziara dagoen edozein puntutan, P puntuan adibidez, eremua kalkulatzean, $\hat{t} \wedge \hat{r}$ biderkadura bektoriala beti ere plano ber baten perpendikularra dela ikusten dugu. Plano hori, hariak eta P puntuak osoturikoa da, eta beraz, $\vec{B}$ bektoreak plano horren perpendikularra izan behar du. Hortaz, ere-

muaren norabidea finkatuta dagoenez gero, beraren modulua lortu beharko dugu soilik:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\sin\theta}{r^2} dl \quad .$$

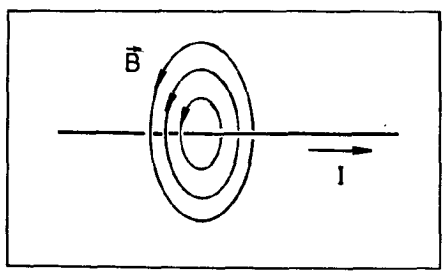
Integrala ebazteko, PNM triangeluan oinarritzen gara. Hara:

$$\sin\varphi = \frac{R}{r} = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \longrightarrow r = \frac{R}{\sin\theta}$$

$$tg\,\varphi = \frac{R}{l} = tg\,(\pi-\theta) = -tg\theta \longrightarrow dl = \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta \ .$$

Orain integralera eramanez, eremuaren balorea honela geratzen zaigu:

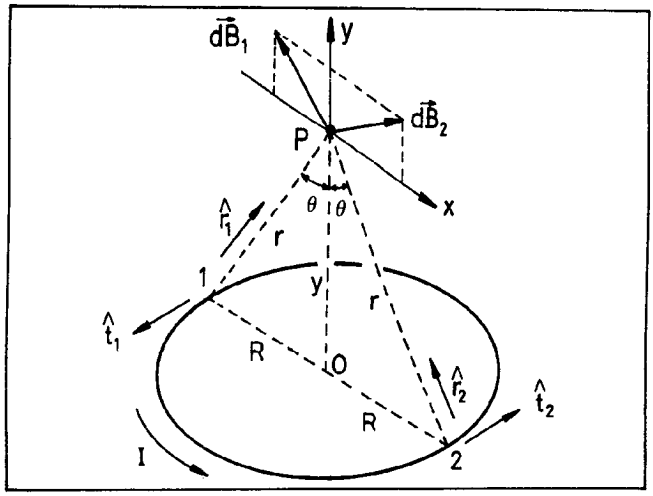
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{R^2/\sin^2\theta} \cdot \frac{R}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{\mu_0 . I}{2\pi . R} \quad .$$




Irudiak eremu-lerroak erakusten dizkigu. Lerroak, hariarekiko plano perpendikularretan dauden zirkunferentziak dira, beraien zentruak harian bertan dituztelarik.

20.6.2 Korronte zirkularrak sortutako eremu magnetikoa.

Kasu honetan, espiraren ardatzeko puntuetara mugatuko gara, espazioko beste edozein puntuetan eremua aztertzen saiatuko baldin bagina, ebatzi beharreko integrala korapilatsuegi gertatuko litzaiguke eta.




Demagun, espiraren ardatzean, 0 zentrutik y distantziara dagoen P puntua, eta zentruarekiko simetrikoak diren (1) eta (2) espiraren zati elementalak hartzen ditugula:

$$|d\vec{B}_1| = |d\vec{B}_2| = dB = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} . \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{r^2} dl = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^2} dl .$$

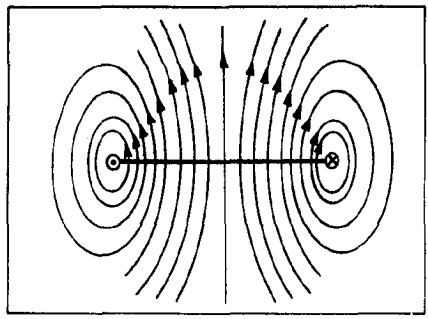
$$\begin{cases} -dB_{1x} = dB_{2x} = dB . \cos\theta \\ dB_{1y} = dB_{2y} = dB . \sin\theta = \dfrac{\mu_0 . I}{4\pi . r^2} \sin\theta . dl \end{cases} .$$

Irudian ikus dezakegunez, $dB_{1x}$ eta $dB_{2x}$ osagaiek elkar anulatu egiten dute, $dB_{1y}$ eta $dB_{2y}$, berriz, elkarrekin batzen diren bitartean. Hortaz, ardatzaren puntuetako eremua beraren norabidekoa da. Kalkula dezagun, ba, eremuaren balorea:

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi . r^2} \sin\theta \oint dl = \frac{\mu_0 . I . R}{2r^2} \sin\theta .$$

Adierazpen horretan bi parametro daude: r eta θ . Haatik, bistakoa denez, parametro bakar bat nahiko da P puntuaren posizioa finkatzeko. Beraz, espiraren zentrutik P punturainoko y altuera aukeratuz, eremuaren balorea honela geratzen zaigu:

$$B = \frac{\mu_0 . I . R^2}{2} (R^2 + y^2)^{-3/2} .$$

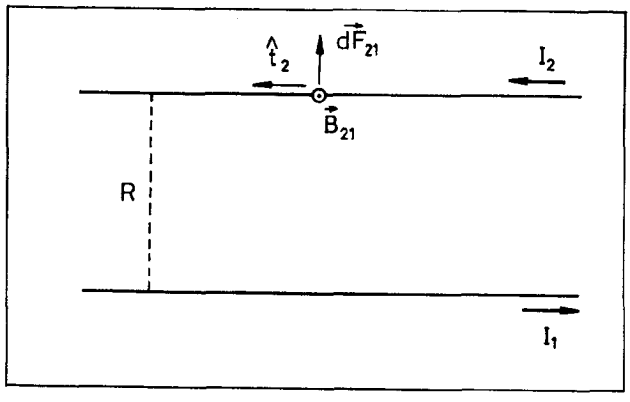


Azkenez, espirak espazio osoan sortzen duen eremuaren lerroak erakusten ditugu. Eremu-lerroak, espiraren ardatzetik pasatzen den plano bati dagozkionak dira, halako plano guztietan berdin berdinak direlarik.

## 20.7 KORRONTEEN ARTEKO INDARRAK

Orain arte ikusi duguna laburbilduz, batetik korronte elektrikoak eremu magnetikoaren sorburuak dira, eta bestetik eremu magnetikoek korronte elektrikoaren gaineko indarrak sortzen dituzte. Hortaz, berehalako ondorioa zera da, hots, korronte bi hartuz, elkarri eragin behar diotela. Ondorio honek edozein korronte-multzotarako balio badu ere, guk hemen kasurik errazena baizik ez dugu aztertuko, alegia, zuzenak, paraleloak eta luzera infinitukoak diren bi korrenteen arteko interakzio magnetikoa.

Beraz, har ditzagun eroale zuzen eta paralelo bi, R distantziaz bereiziak. Batak $I_1$ korrontea daroa, eta besteak $I_2$.



Lehenbizi, 1 korronteak beretik R distantziara sortzen duen eremuaren balorea idatziko dugu:

$$B_{21} = \frac{\mu_0 . I_1}{2\pi . R} \quad .$$

Ondoren, eremu honek 2 eroalearen dl zatiaren gaineko indarra hauxe da:

$$\vec{dF}_{21} = I_2 \hat{t}_2 \wedge \vec{B}_{21}\, dl \longrightarrow dF_{21} = I_2 \frac{\mu_0 . I_1}{2\pi . R}\, dl \; .$$

Beraz, luzera-unitateko indarra ondokoa dugu:

$$\frac{dF_{21}}{dl} = \frac{\mu_0 . I_1 . I_2}{2\pi . R} \quad .$$

Bistakoa den simetrian oinarriturik, zera egiazta dezakegu, alegia, 2 korronteak 1 korronteari egiten dion indarra lortu izan bagenu, emaitza berberera helduko ginatekeela. Haatik, diogun, ezen esandakoa ez dela Akzio-Erreakzioaren Printzipioaren ondoriorik, indar magnetikoek ez bait dute aipaturiko Printzipioa zertan bete beharrik.

Harira itzuliz, aurreko adierazpena abiapuntutzat hartuta, $\mu_0$ koefizientearen balorea emango dugu. Horretarako, 1948. urtean Pisuei eta Neurriei buruzko Hamaikagarren Bilera Orokorrean emaniko korronte elektrikoaren unitatearen definizioa erabili beharko dugu. Hona hemen definizioa:

«Ampere unitatea, luzera infinituko bi eroale paralelo artezean mantenduak direnean, eroaleen ebakidura-sekzioa arbuiagarria delarik, eta hutsetan bata bestetik 1 metrotara jarrita daudelarik, bi eroaleen artean $2.10^{-7}$ newton metro luzerako indarra sortzen duen korronte jarraiaren intentsitatea da ».

Definizio hau aurreko emaitzara eramanez gero, hauxe ateratzen zaigu:

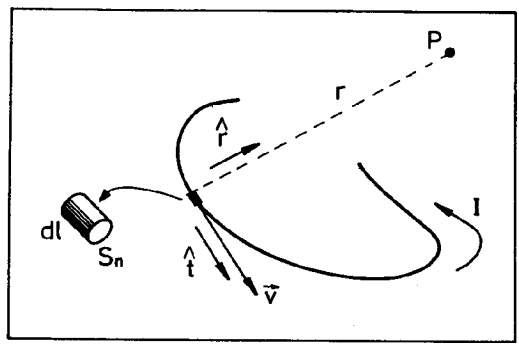
$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_2 = 1\ A. \\ R = 1\ m. \\ \dfrac{dF_{21}}{dl} = 2.10^{-7} N\ m^{-1}. \end{array}\right\} \mu_0 = 4n.10^{-7}\ NA^{-2} \text{ edo } Kg\ m\ s^{-2}\ A^{-2}..$$

$\mu_0$ koefizienteari "hutsaren permeabilitate magnetikoa" deritzo.

## 20.8 PARTIKULA KARGATU HIGIKORREK SORTUTAKO EREMU MAGNETIKOA

Gai honen sarreran genioenez, eremu magnetikoak partikula kargatuen higiduraren ondorioa dira. Orain arte, ostera, ez dugu erakutsi eremuaren eta partikula higikorren arteko harremanik, ez era zuzenean bederen. Partikula kargatu bakar batek sortzen duen eremu magnetikoa, oraingo atal honetan azaltzen ihardungo dugu, horren xedez, 20.5 atalean atera genuen $d\vec{B}$ bektoreaz baliatuko garelarik. Hara:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\hat{t} \wedge \hat{r}}{r^2} dl \quad .$$




Demagun, irudiko dl zati txikiaren barneko karga higikorren dentsitatea eta abiadura $\rho$ eta $\vec{v}$ direla, hurrenez hurren. Hortaz, bertako $\vec{j}$ korronte-dentsitatea ondokoa dugu:

$$\vec{j} = \rho\ \vec{v} \quad ,$$

eta beraz:

$$I.dl\,\hat{t} = j.S_n.dl\,\hat{t} = \vec{j}\,dV = \rho\,\vec{v}\,dV \quad .$$

Ondoren, aipatutako zati txikiak daukan karga-kopuruak P puntuan sortzen duen eremua, honela idatz dezakegu:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\rho\,.\,dV\,\frac{\vec{v}\wedge\hat{r}}{r^2} \quad .$$

Hemendik, partikula kargatu bakoitzak eremua eratzeko egiten duen emaria, berehala lor daiteke:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,q\,\frac{\vec{v}\wedge\hat{r}}{r^2} \quad .$$

Bestaldetik, partikula bakar baten $\vec{E}$ eremu elektrikoaren adierazpena (ikus 18. gaia) erabiliz, $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ bektoreen arteko elkarlotura estua, ondoko era honetan adieraz dezakegu:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}}{r^2} \longrightarrow \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{v}\wedge\vec{E} \quad .$$

Behin honaino heldurik, atalari, eta oro har, gaiari bukaera emanez, zera aitortu behar dugu, alegia, karga higikorrek sortutako eremu magnetikoa erdiesteko erabili dugun arrazoibidea ez dela erabatekoa. Gauzak ondo egitekotan, oraindik ikusi ez ditugun garapen teoriko batzuren premian gaude; baina dena delarik ere, aurreko emaitza hurbilpen onargarria dela ondo frogatuta dago.

# 21. GAIA: EREMU ELEKTROMAGNETIKO ESTATIKOAK

21.1. Eremu elektrostatikoaren zirkulazioa

21.2. Gauss-en legea

21.3. Kondentsadoreak eta energia elektrostatikoa

21.4. Eremu magnetikoaren fluxua

21.5. Ampère-ren legea

21.6. Laburpena

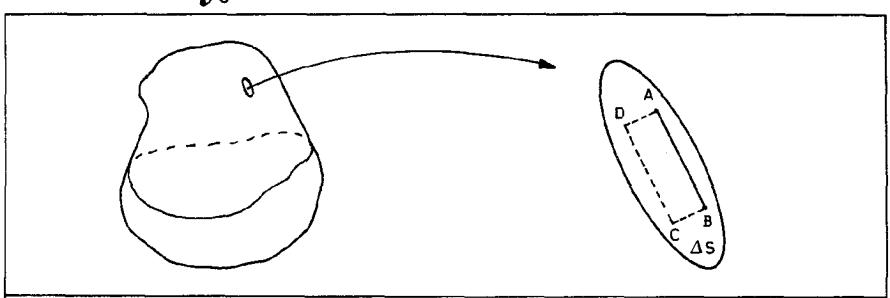
Aurreko gaietan Elektromagnetika estatikoa aztertzean, eremu elektrikoa eta magnetikoa definitu ondoren, funtsezko bi lege experimentalak eman ditugu. Azkeneko hauek, Coulomb eta Biot-Savart-Laplace izenez ezaguturikoak alegia, eremu estatikoak kalkulatzeko lehenbizi aurkitu ziren legeak ditugu eta oso praktikoak izaten dira kasu batzutan. Baina ba daude beste kasu askotan erosoago gertatzen diren lege orokorragoak, gai honetan ikusiko ditugunak hain zuzen ere.

Izan ere, aipaturiko lege bakoitza bi lege integralen eran ipin daiteke, eta horrela lortzen diren lau legeak egokiagoak izango dira hurrengo gaian Elektromagnetika ez-estatikoa aztertzen hasteko.

## 21.1. EREMU ELEKTROSTATIKOAREN ZIRKULAZIOA

Jakina dugunez, eremu elektrostatikoa kontserbakorra da eta, beraz, edozein kurba itxiren kasuan zera dugu:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \ ,$$




OREKAN DAGOEN EROALEA

hau da, eremu elektrostatikoaren zirkulazioa nulua da.

Adibide moduan, orekan dagoen eroale bat kontsideratuko dugu. Har dezagun eroalearen gainazalaren oso zati txikia, iru-

dian ikusten den bezalaxe. Limitean $\Delta S$ delakoa launa dela suposa dezakegu eta bai marrazturiko ABCD paralelogramoaren AD eta BC aldeak $\Delta S$ gainazalaren elkartzutak direla ere. Eremu elektrostatikoa kontserbakorra denez gero, hauxe betetzen da:

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} + \int_B^C \vec{E}.d\vec{r} + \int_C^D \vec{E}.d\vec{r} + \int_D^A \vec{E}.d\vec{r} = 0 \ .$$

Baina eroalean kargak higitzen ez direnez gero, bertan eremua nulua da eta, ondorioz,

$$\int_C^D \vec{E}.d\vec{r} = 0 \ .$$

Har ditzagun orain BC, DA eta AB aldeak hurrengo baldintzak betetzeko bezain txikiak:

$$\int_B^C \vec{E}.d\vec{r} = \int_A^D \vec{E}.d\vec{r} = 0 \ , \qquad \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = \vec{E}(A).\vec{AB} \ ,$$

(horretarako $|\vec{DA}|$, $|\vec{BC}| << |\vec{AB}|$ izan behar dugu). Orain arte ikusitako adierazpenak bilduz, nahi bezain zehatza den hurbilketa honetan ondoko emaitza hau betetzen da:

$$\vec{E}(A) \ . \ \vec{AB} = 0 \ ,$$

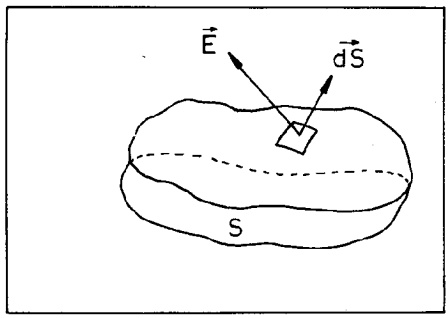
eta $\vec{AB}$ bektorea $\vec{\Delta S}$ delakoaren paraleloa denez gero, "orekan dagoen eroale baten gainazalean (kanpoko aldean, noski) eremu elektrostatikoa aipaturiko gainazalaren elkartzuta dela" frogatu dugu.

Gauza bera ikusteko beste modu bat ondokoa dugu. Eroalearen eremu elektrostatikoa nulua denez gero, eroale osoa eta, bereziki, bere gainazala ekipotentzialak dira. Korronte-lerroak eta sestra-gainazalak (kasu honetan, eremu-lerroak eta gainazal ekipotentzialak) elkarren perpendikularrak dira, ondorioz, eremu-lerroen eta eroalearen gainazalaren artean gauza bera gertatzen delarik.

## 21.2. GAUSS-EN LEGEA

Har ditzagun S gainazal itxia eta jatorrian kokaturik dagoen q karga elektrikoa. Karga honek sortutako eremu elektrostatikoak aipaturiko gainazalean zehar duen fluxua hauxe dugu:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \oiint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} ,$$




eta integral hau kalkulatzeko A.3. puntuan esandakoaz balia gaitezke. Horrela ba, q karga gainazaletik kanpo baldin badago fluxu hau nulua izango da. Barruan badago, ordea, zera izango dugu:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} q .$$

Eremu elektrostatikoa $\vec{r}_k$ puntuetan dauden n karga puntualek sortutakoa bada,

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} ,$$

beraren fluxua ezagutzeko aski da aurreko emaitza eta gainazal-integralen linealtasuna erabiltzea. Ageri denez, zera lortzen da:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_k{}' q_k ,$$

batuketa hau S gainazal barruan dauden kargetara hedatzen delarik. Era berean, eremu elektrostatikoaren iturria $\rho$ dentsitateko karga-banaketa jarraia baldin bada,

$$\vec{E} = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' ,$$

hauxe dugu dagokion emaitza:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \iiint_V \rho \, dV ,$$

non V ikurrak S gainazalak mugatzen duen bolumena adierazten duen.

Nolanahi ere, honela adieraz dezakegu lortutako emaitza: "Eremu elektrostatikoaren fluxua, erabilitako gainazalaren barruan dagoen karga elektriko osoaren proportzionala da, proportzionaltasun-faktorea $1/\varepsilon_o$ delakoa delarik". Hortaz, barruko karga Q hizkiaz adierazten badugu, hurrengo eran idatz dezakegu teorema hau:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} Q .$$

"Gauss-en legea" deritzo honi.

Azpimarka dezagun, ezen gainazaletik at dauden kargen ekarpenak nuluak direla, beraiei dagozkien eremu-lerroek bi (edota lau, sei ...) aldiz ebakitzen bait dute gainazala, hau da, sartu eta gero irten egiten bait dira.

Emaitza honen baliagarritasuna ikusteko, kontsidera dezagun, berriro ere, orekan dagoen eroalea. Lehenago ikusi dugunez, barruko eremu elektrostatikoa nulua da. Beraz, eroale barnean dagoen edozein gainazal itxi aukeratuz gero, $\oiint_S \vec{E}.d\vec{s}$ fluxua nulua izango da eta, ondorioz, aipaturiko gainazalaren barruan ez dago karga elektrikorik. Hortaz, Gauss-en legearen ondorioz, "orekan dagoen eroalearen karga osoa beronen gainazalean egongo da, halabeharrez".

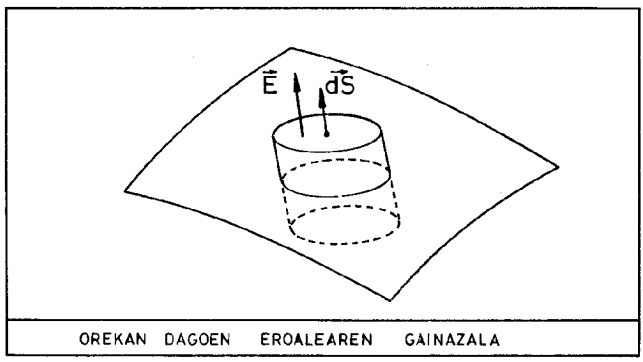
Hori dela eta, eroaleen kasuan bolumen-dentsitatea erabili beharrean, gainazal dentsitatea (hau da, azalera-unitateko karga) dugu kontzepturik naturalena. Demagun $\Delta S$ azalera duen zatian $\Delta q$ karga elektrikoa dagoela. Definizioz hauxe dugu, ba,

gainazal-dentsitatea:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} .$$

Arestian ikusi dugu eroaleraren gainazalean zein den eremu elektrostatikoaren norabidea; kalkula ditzagun orain beraren modulua eta norantza. Horretarako ere Gauss-en legeaz baliatuko gara. Har dezagun gainazalaren elkartzuta den zilindro txiki bat, irudian ikusten den bezala. Gainazal honetan zehar, $\vec{E}$ eremuaren fluxua nulua izango da, $\vec{E}$ delakoa eta azalera-elementua ematen duen bektorea elkarren elkartzutak bait dira. Barruan dagoen zilindroaren oinarrian eremua eta, ondorioz, fluxua nuluak izango direnez gero, zilindroak eta bere oinarriek osotzen duten gainazal itxian zehar kalkulaturiko fluxua hurrengo adierazpenak emandakoa izango da:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \, dS .$$




Gainazal honen barruan $\sigma$ dS karga dago eta, beraz, zera dugu:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma .$$

Ia esan gabe, eremua kanporanzkoa dela suposatuko dugu. Azken batez, hipotesi hau egia denentz lorturiko emaitzak diosku. Izan ere, aurreko lerroetan E ez da derrigorrez E eremuaren modulua eta $\sigma$ negatiboa denean zeinu berekoa izango da E magnitudea ere, eremuaren norantza barruranzkoa dela adierazten digularik.

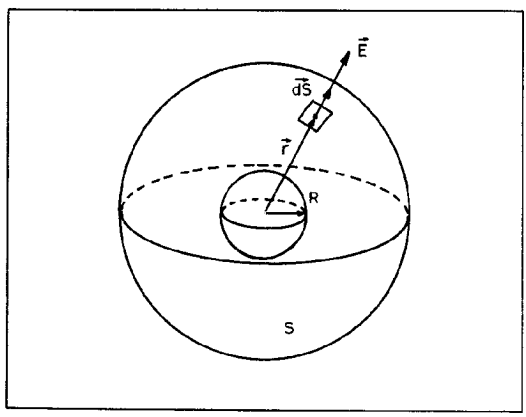
Orain arte esandakoa bilduz, zera frogatu dugu: "orekan dagoen eroalearen gainazaleko eremu elektrikoa aipaturiko gainazalaren elkartzuta eta kanporanzkoa (barruranzkoa) da, $\sigma$ dentsitatea positiboa (negatiboa) bada, eta $|\sigma|/\varepsilon_0$ baloreko modulua du".

Hurrengo adibidean R erradioko esferan dagoen eta simetria eskerikoa duen karga-banaketa jarraia kontsideratuko dugu. Simetria esferikoa dela eta, eremu elektrikoak ere esferikoa izan behar du,

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}\ ,$$

koordenatuen jatorria esferaren zentruan aukeratzen dugularik. S gainazalak zentru berbera eta R baino erradio handiagoa baditu (ik. irudia), hauxe izango dugu:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\,q = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E\,dS = E(r)\,4\pi r^2\ ,$$




non q aipaturiko banaketaren karga osoa den. Beraz, esferatik kanpo ondokoa da eremu elektrostatikoa:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\ ,$$

hau da zentruan kokaturiko q karga puntual hipotetiko batek sorturikoaren berdina.

Gainera, $R \longrightarrow 0$ limitean karga puntuala eta beronen eremu coulombiarra berrezkuratzen ditugu. Hortaz, guk erabili dugun bidean Gauss-en legea teorema izan arren, Elektrostatikaren funtsezko legetzat ere har daiteke eta hauxe dugu legea deitzearen zergatikoa. Lege honetatik abiaturik aski da simetria kontutan hartzea Coulomb-en legea teorema moduan lortzeko. Egia esan, kasurik orokorrenean eremu bektorial bat era unibokoan zehazteko, beraren zirkulazioa eta fluxua (eta bai infinituan bete behar diren baldintza batzu ere) ezagutu behar ditugu, azaldu berri dugun adibidean, simetria esferikoaren ondorioz, fluxua ezagutzea aski zaigu baina.

## 21.3. KONDENTSADOREAK ETA ENERGIA ELEKTROSTATIKOA

Aurkako zeinuko karga elektrikoak, q eta -q, dituzten bi eroalek osoturiko sistema kontsideratuko dugu hemen. Orekan sistemaren osagai bakoitzari potentzial elektrikoaren balore bat dagokio, eroaleak ekipotentzialak bait dira. Balore bakoitzak aukeraturiko erreferentzi mailaren dependentzia badu ere, bien arteko kendura, $\Delta V$, era unibokoan dugu definiturik eta ondoko zatidura kalkula dezakegu:

$$C = \frac{q}{\Delta V} .$$

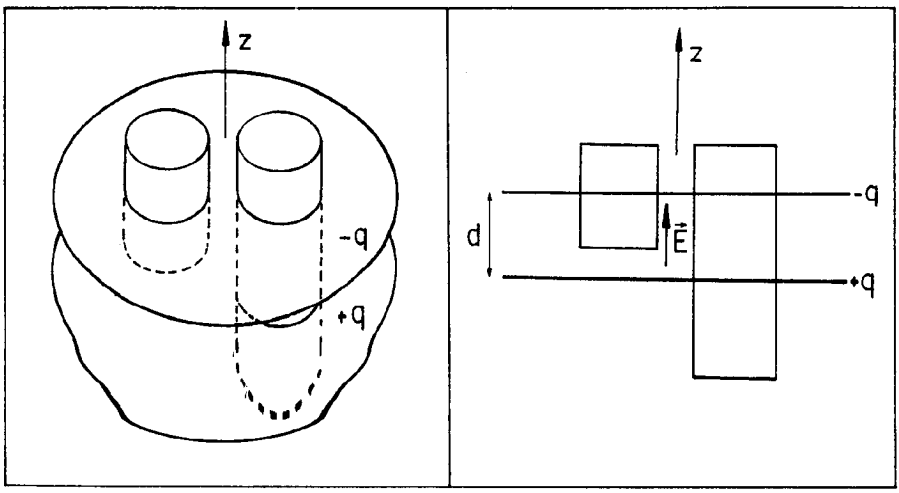
Kasurik interesgarrienetan (sisteman beste eroalerik ez badago, esaterako) zatidura honek sistemaren geometriaren menpekotasun hutsa du eta, beraz, q eta $\Delta V$ magnitudeen arteko proportsionaltasun-konstantea da. Horrela gertatzen bada, sistemaren C "kapazitate elektrikoa" duen "kondentsadorea" dela esan ohi da. Unitate-Sistema Internazionalean kapazitatearen unitateari "faraday" deritzo eta F hizkiaz adierazten da. Hortaz, hauxe dugu:

$$1\ F = 1\ C\ V^{-1} = 1\ m^{-2}\ kg^{-1}\ s^{4}\ A^{2} .$$

Adibide moduan har dezagun "kondentsadore launa", hau da, elkarren berdinak eta paraleloak diren bi eroale launek osoturiko sistema. Plaken S azaleraren aldean haien arteko d distantzia oso txikia dela suposatuko dugu, hau da $d^2 << S$ betetzen de

la. Hipotesi hau dela eta, simetria zilindrikoa dugula eta eremu elektrikoa $\vec{E} = E(z)\,\hat{k}$ dela suposa dezakegu (ik. irudia). Arrazoi berberagatik gainazal-dentsitatea uniformetzat hartuko dugu, $\sigma = \pm q/S$. Marraztu ditugun zilindroei Gauss-en legea aplikatuz gero, zera ikusten da: kondentsadoretik kanpo eremu elektrikoa nulua da eta plaken artean konstantea eta ondoko balorekoa:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} .$$



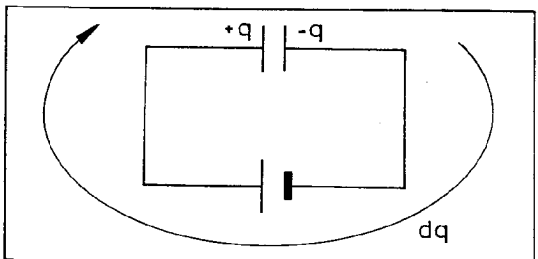

Bestaldetik, potentzial elektrostatikoaren definizioaren bidez, hauxe dugu:

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = E\,d = \frac{q\,d}{\varepsilon_0 S} ,$$

eta kapazitatearen definizioaren arauera:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} .$$

Lortutako emaitza, oso erabilgarria izanik ere, lehen hurbilketa baino ez da. Egiatan, ertz-efektuak agertzen dira, eta eremua kondentsadorearen zentruan soilik da uniformea, kanpoan txikia baina ez-nulua delarik.



Azter dezagun orain kondentsadorearen karga-prozesua. Une batetan kondentsadorearen (hau da, plaka positiboaren) karga q baldin bada, plaken arteko potentzial-diferentzia $\Delta V = q/C$ izango da eta, beraz, plaka negatibotik positibora dq karga infinitesimala eramateko, ondoko lana egin behar du energia elektroeragilearen iturriak:

$$dW = dq\ \Delta V = \frac{1}{C}\ q\ dq\ .$$

Hortaz, prozesu osoan emandako lana hauxe dugu:

$$W = \int_0^q dW = \frac{1}{C} \int_0^q q\ dq = \frac{q^2}{2\ C}\ ,$$

hau da,

$$W = \frac{1}{2}\ \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\ q\ \Delta V\ .$$

Kondentsadore launaren kasu berezian, aurreko emaitzaren bidez honako hau lor daiteke:

$$W = \frac{1}{2}\ \varepsilon_o\ E^2\ S\ d\ .$$

Baina S d biderkadura kondentsadorearen bolumena denez gero, honela ere idatz dezakegu emaitza hau:

$$W = \iiint \left(\frac{1}{2}\ \varepsilon_o\ E^2\right)\ dV\ ,$$

kondentsadorean eremu uniformea integralarekiko konstantea bait da.

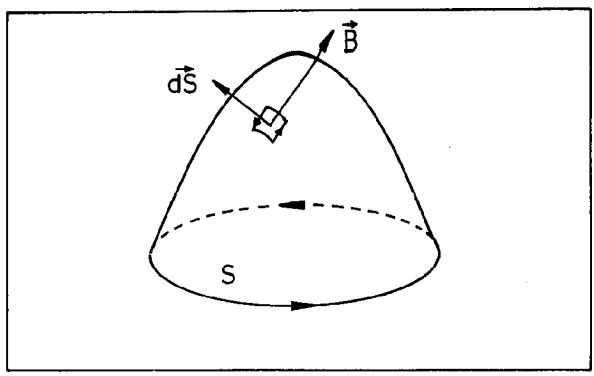
Aurrekoak ez bezala, azken adierazpen honek edozein kondentsadoreren kasurako balio du, oso interpretazio fisiko garrantzitsua duelarik. Hara! Egindako lana kondentsadorean dagoen eremu elektrostatikoa eraikitzean izan da erabilia eta, ondorioz, nahiko naturala da aipaturiko eremuan energia elektrostatikoaren moduan metatua izan dela esatea. Hemen arrazoi sakonagorik emango ez badugu ere, esan dezagun ezen ikuspuntu honek aparteko garrantzia izan duela, Fisikan oso emankorra izan den pentsamolde baten lehenengo adierazpena izan delarik. Ideia ho-

nen arauera, edozein eremu eraikitzeko erabilitako lana bertan geratzen da energia moduan metatuta. Eremu elektrikoaren energiaren dentsitatea, beraz, $\frac{1}{2}\,\varepsilon_o\,E^2$ magnitudeak emandakoa izango da.

## 21.4. EREMU MAGNETIKOAREN FLUXUA

Demagun indukzio magnetikoaren eremu bat dagoeneko espazioko eskualde batetan S gainazal orientatua aukeratzen dugula. Gainazal honetan kalkulaturiko indukzio magnetikoaren fluxuari "fluxu magnetikoa" deituko diogu:

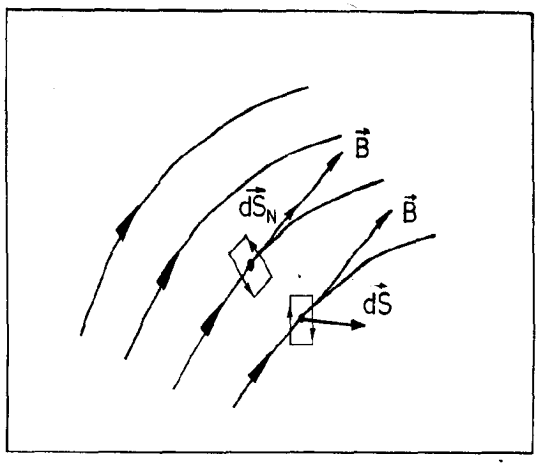
$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \ .$$




Sistema internazionalean, fluxu magnetikoaren unitateak "weber" izena du eta Wb ikurraren bidez adierazten da. Ageri denez, $1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T\ m^2} = 1\ \mathrm{m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}}$ dugu.

Aukera dezagun espazioko puntu bakoitzean eremuaren perpendikularra den gainazal infinitesimala, $d\vec{S}_N$ eta $\vec{B}$ bektoreak paraleloak eta norantza berekoak izateko moduan. Egoera honi dagokion fluxu infinitesimala honako hau dugu:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}_N = B\ dS_N \ ,$$




eta, beraz, indukzio magnetikoaren modulua gainazal normalaren azalera-unitateko fluxu magnetikoaren berdina dela frogatu dugu:

$$B = \frac{d\phi}{d\,S_N} \quad .$$

Bestaldetik eta erraz ikus daitekeenez, $\vec{B}$ eremuaren norabidea eta norantza, $d\,\phi = \vec{B}.d\vec{s}$ fluxu infinitesimala positibo eta maximoa egiten duen $d\vec{S}$ bektorearenak dira. Ikusi berri dugun emaitza hau indukzio eremuaren berdifiniziotzat ere kontsidera dezakegu, eta ikuspuntu honen garrantzia adierazteko esan dezagun gaur egun ere tesla baino maizago weber/$m^2$ esaten zaiola eremu magnetikoaren unitateari.

Indukzio magnetikoaren eremu-lerroak ("indukzio-lerroak" deitzen ditugunak) marrazteko, eremu elektrikoaren kasuan egindako hitzarmen berberaz baliatuko gara eta gainazal normalaren azaleraren unitateko lerroen kopurua eta eremu magnetikoaren modulua berdinak izango dira. Horrela, bada, indukzio-lerro bakoitzak weber bat adierazten du eta fluxu magnetikoa neurtzeko aski da gainazala zeharkatzen duten lerroak zenbatzea.

Orain arte ikusi ditugun eremu magnetiko guztien kasuan (hau da, korronte elektrikoak edota kargen higidurak sorturiko eremuen kasuan), "edozein gainazal itxitan zehar neurtutako fluxu magnetikoa nulua da",

$$\oiint_S \vec{B} \,.\, d\vec{S} = 0 \quad .$$

Teorema hau frogatzeko beharrezkoak diren tresna matematikoak ezagutzen ez ditugunez gero, hemen beste bide bat, emankorrago gertatzen dena, aukeratuko dugu: aipaturiko emaitza Naturaren funtsezko lege experimentaltzat kontsideratuko dugu eta duen esangura ikusteko beraren parekoa den Gauss-en legeaz baliatuko gara.

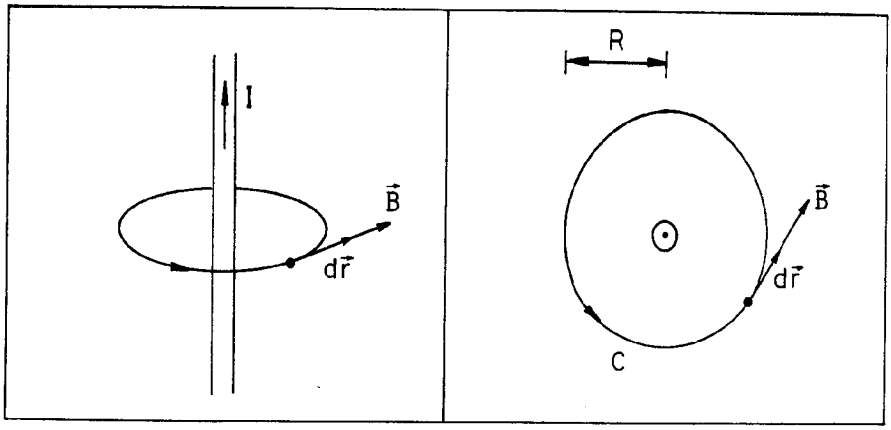
Eremu elektrikoen kasuan eremu-lerroak karga elektrikoetan sortzen eta hiltzen dira. Kasu magnetikoan, ostera, gainazal itxietan zeharko fluxua nulua denez gero, barrura sartzen diren indukzio-lerro guztiak irten ere egiten dira; hau da, indukzio-lerroak itxiak dira. Beraz, indukzio-lerroek ez dute ez iturririk ez eta hobirik ere. Bestela esanda, eremu magnetikoak karga elektrikoen higidurak sortzen ditu eta ez karga magnetiko hipotetiko batzuk.

Azkeneko hauek, "monopolo magnetikoak" alegia, ez direla existitzen suposatuko dugu guk. Egia esan, teoria modernoenek monopolo magnetikoen existentzia aurresaten dute, haien barruan oso zeregin garrantzitsua bete behar bait dute aipaturiko monopoloek. Hala ere, hau idazten dugunean posibilitate teoriko honek ez du oraindik baieztapen experimental sendorik aurkitu eta hemendik aurrera ikusiko dugunak ez du monopoloen beharrik teoria interesgarria eta emankorra (eta, guzti-guztiak bezalaxe, partziala) izateko.

## 21.5. AMPERE-REN LEGEA

Kontsidera ditzagun eroale lerrozuzen infinitu batek sorturiko eremu magnetikoa eta eroalearen elkartzuta den zirkunferentzia (ikus irudia). Aurreko gai batetan ikusi genuenez, zirkunferentziaren puntuetan $\vec{B}$ indukzioak tangentearen norabidea eta ondoko modulua ditu:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} \quad .$$




Beraz, zirkunferentzia irudian ikusten den bezala orientatuz gero, hauxe dugu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint B \, |d\vec{r}| = \frac{\mu_o \, I}{2 \pi R} \oint ds = \mu_o \, I \, .$$

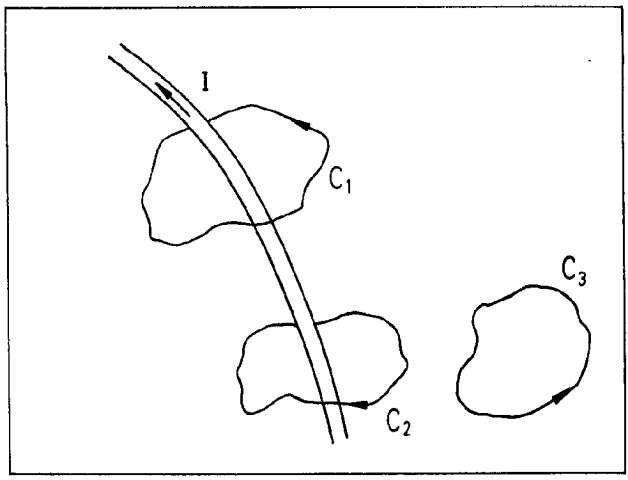
Hemen $d\vec{r}$ bektorearen modulua ds arku-luzeraren berdina dela hartuko dugu kontutan. Argi dago zirkunferentziaren orientazioa korrontearen norantzaren arauera aukeratu dugula, eskuineko eskuaren arauaz baliatuz alegia. Aipaturiko orientazioa kontrakoa izan balitz, emaitzaren zeinua aldatu behar izan genukeen, noski.

Lortu dugun emaitza azpimarkatzekoa da, ez bait du erradioaren menpekotasunik. Izan ere, guk frogatu gabe ontzat emango dugun emaitza orokor baten oso kasu berezia baino ez da. Horrela, hurrengo irudiko eroale eta lerro itxien kasuetan lortzen diren zirkulazioak honako hauek ditugu:

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o \, I \, ,$$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = -\mu_o \, I \, ,$$

$$\oint_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \, .$$

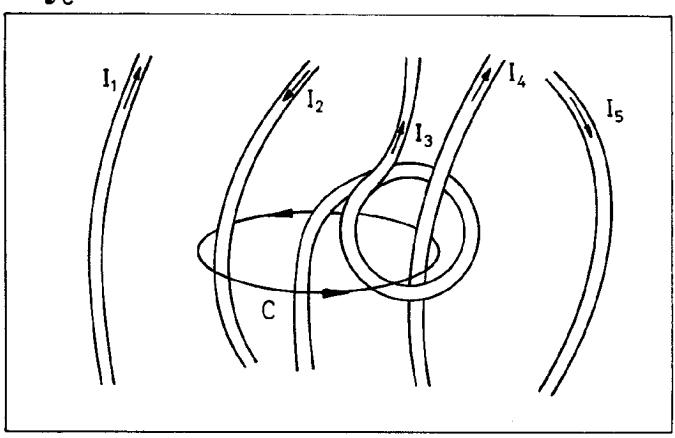



Gainerzamenaren printzipioa eremu magnetikoaren kasuan ere betetzen denez gero, korronte batzuk sorturiko eremuaren kasuari dagokion emaitza orokorra, "Ampère-ren legea" hain zuzen, hauxe dugu:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o \sum_k{}' I_k \quad ,$$

Hemen batzen diren intentsitateak C lerro itxiak "lotzen" dituenak dira prezeski eta bakoitzak eskuineko eskuaren arauak emandako zeinua du. Adibidez, hurrengo irudiaren kasuan ondokoa dugu:

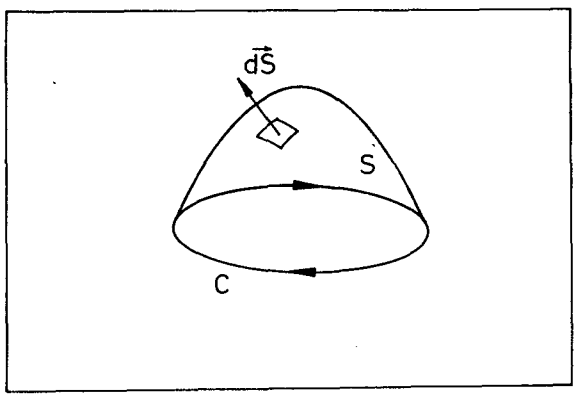
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o \, (-I_2 + I_3 + I_3 + I_4) \quad ,$$



Ohar gaitezen hirugarren hariaren ekarpen bikoitzaz. Horrelako ekarpen anizkoitzak eta eskuineko eskuaren araua aplikatzeko modua argiago ikusten dira batzutan, harien intentsitateak erabili beharrean orokorragoa den korronte-dentsitatearen kontzeptuaz baliatzen bagara. Izan ere, C kurba itxiak "lotzen" duen intentsitatearen definizio zehatza honako hau dugu:

$$I = \left(\sum_k{}' I_k\right) = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ ,$$

non S delakoa C muga orientatua duen edozein gainazal orientatu den.




Hortaz, Ampère-ren legearen adierazpen orokorragoa, kasu jarraietan ere balio duena, hauxe dugu:

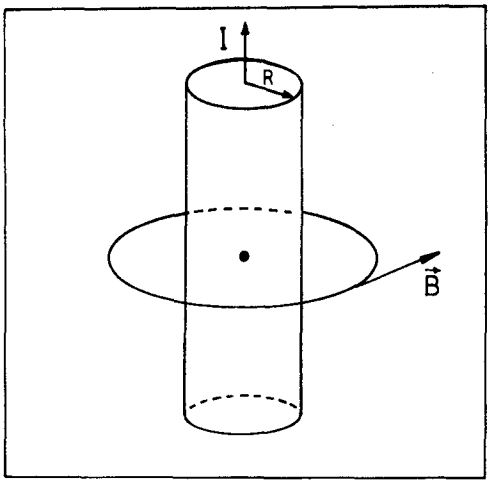
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ ,$$

S gainazal orientatuaren muga C lerro itxia delarik. Beraz, "C lerro itxian barrena kalkulatutako eremu magnetikoaren zirkulazioa, aipaturiko lerroak lotzen duen intentsitatearen proportzionala da".

Honaino heldurik, Elektrostatikaren kasuan egin zenaren antzera, hemen ere ikusi berri ditugun bi legeak (hau da, Ampère-rena eta monopolo magnetikorik ez dagoela dioskuna) Magnetostatikaren oinarrizko legetzat har ditzakegu, eta hemendik abiaturik lehen ikusitako beste emaitzak (hala nola Biot-Savart-Laplace-ren legea) berreskura daitezke.

Adibide moduan, kontsidera dezagun R erradioa eta simetria zilindrikoa dituen irudiko korronte jarrai infinitua. Simetria zilindrikoa kontutan harturik, indukzio-lerroek itxiak izateko, marraztu ditugunen modukoak izan behar dute. Ondorioz, eremu magnetikoaren norabidea eta norantza irudikoak dira (azkenekoa zehazteko eskuineko eskuaren arauaz baliatu gara) eta modulua erdiesteko aski da simetria eta Ampère-ren legea erabiltzea. Horretarako, har dezagun integrazio-lerrotzat indukzio-lerroa bera eta, B moduluak erradioaren dependentzia hutsa duenez gero, zera lortzen da:

$$\mu_o I = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_C B \, |d\vec{r}| = B \oint_C ds = 2\pi r B ,$$

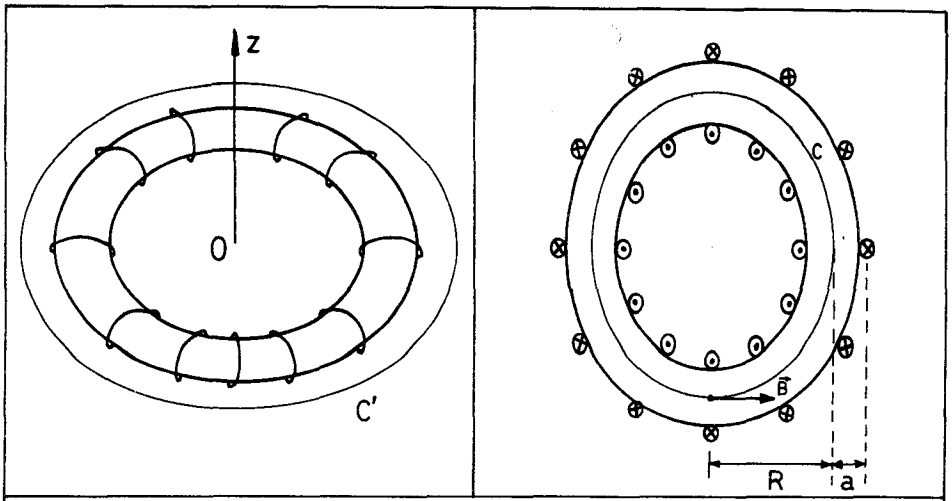



eta, azkenik,

$$B = \frac{\mu_o I}{2 \pi r} \qquad (r \geq R) .$$

Hurrengo adibidea toru-itxura duen irudiko solenoidearena izango da. Ageri denez, arazoak OZ ardatzarekiko simetria du, espirak oso hesturik baldin badaude behintzat. Hortaz indukzio-lerroak simetria berbera duten zirkunferentziak (hala nola irudietako C eta C' direlakoak) dira eta bakoitzean B modulua konstantea da. Beraz, integrazio-lerrotzat L luzerako indukzio-lerroa aukeratuz gero, zera dugu:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \oint_C ds = B L .$$



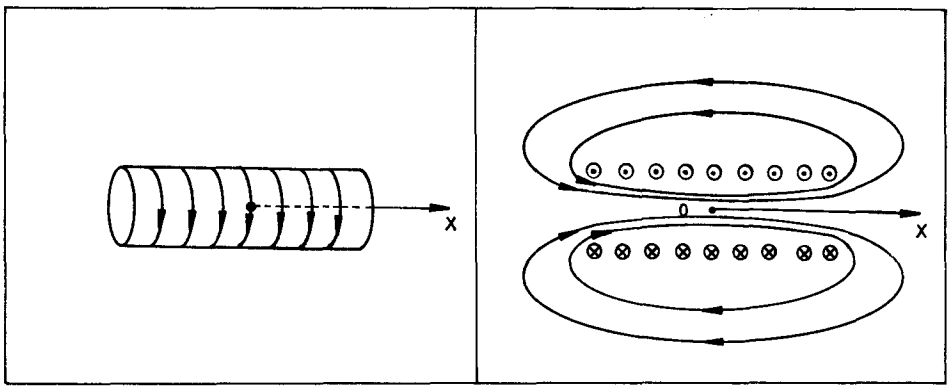

TORU ITXURAKO SOLENOIDEA

Ampère legearen ondorioz, torutik kanpoko $\vec{B}$ eremua nulua da, C' zirkunferentziak ez bait du intentsitaterik lotzen. Barruan, ostera, hauxe dugu:

$$B = \mu_o \frac{N}{L} I \quad ,$$

solenoideak N espira baditu. Barruko erradioa kanpokoaren aldean arbuiatzen badugu (hau da, $a << R$ dela onartzen badugu), $n = N/L$ luzera-unitateko espiren kopurua solenoidearen konstante karakteristikoa da eta, azkenik, barruan $B = \mu_o n I$ dugu.

Azkeneko adibidea solenoide luzearena izango da. Indukziolerroen itxura irudikoa denez gero, solenoidearen erdiko eskualdean gertatzen dena aztertzera mugatzen bagara, arazoak OX ardatzarekiko simetria duela suposa dezakegu.

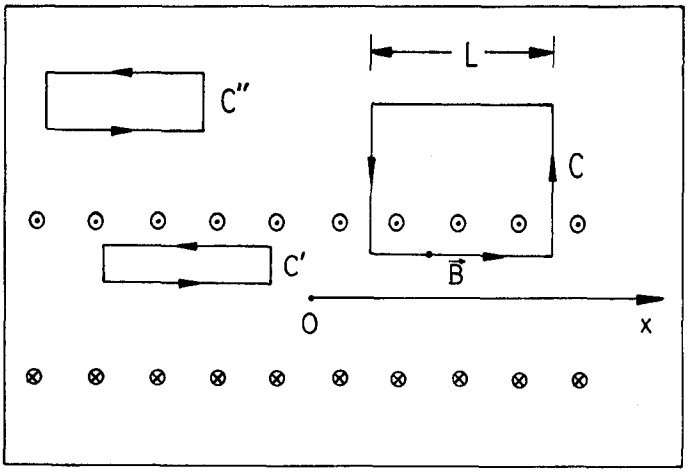


Hurbilketa honetan $\vec{B} = B\,\hat{i}$ dugula erabiliz eta C' eta C" lerroei Ampère-ren legea aplikatuz, $\vec{B}$ eremuak kanpoan eta barruan konstante irauten duela ikusten da. Ondorioz, kanpoan indukzio magnetikoa nulua (egiatan oso txikia) dela onartu behar dugu eta barruan duen modulua kalkulatzeko aski da C lerroari Ampère-ren legea aplikatzea. Izan ere, solenoideak luzera-unitatean n espira baldin baditu, honako hau lortzen da:

$$B\,L = \mu_o\, n\, L\, I\ ,$$

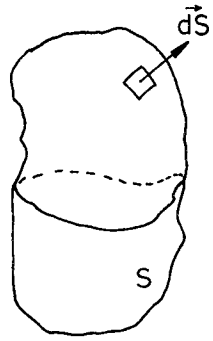
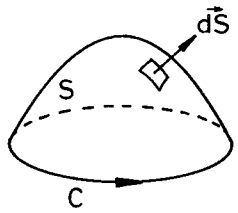
eta azkenik,

$$B = \mu_o\, n\, I\ .$$



## 21.6. LABURPENA

Elektromagnetika estatikoaren funtsezko legeak honako hauek ditugu:

| ELEKTROSTATIKA | | MAGNETOSTATIKA |
|---|---|---|
| $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$ |  | $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ |
| $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ |  | $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{i}\cdot d\vec{S}$ |

eta, hurrengo gaian ikusiko dugunez, Elektromagnetikaren lege orokorrak diren Maxwell-en legeen kasu berezia osotzen dute, eremu estatikoei dagokiena alegia.

## 22. GAIA: EREMU ELEKTROMAGNETIKÓ ALDAKORRAK

22.1. Higidurak sorturiko indukzio elektromagnetikoa

22.2. Faraday-Henry-ren legea

22.3. Autoindukzioa

22.4. Eremu magnetikoaren energia

22.5. Kargaren iraupen-printzipioa

22.6. Ampère-Maxwell-en legea. Desplazamendu-korrontea

22.7. Maxwell-en ekuazioak

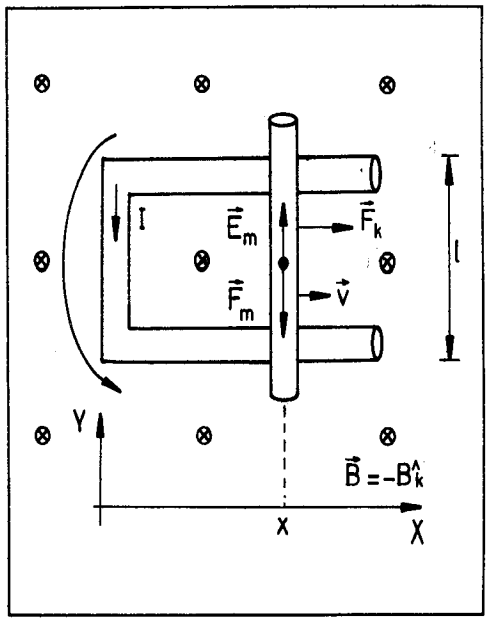
Aurreko gaian ikusi dugunez, Elektrostatika eta Magnetostatikaren funtsezko legeak era integralean ere adieraz daitezke. Esan bezala, formulazio hau aurrekoaren baliokidea izan arren, lagungarri gertatzen da ikuspuntu teorikotik.

Gai honetan, berriro ere, lege integral batzu aztertuko ditugu, baina aurrekoak ez bezala, hemengoak ez dira izango orain arte ezagutu ditugun beste legeen baliokideak, ez eta ondorioak ere, zeren, aldez behintzat, eduki berria izango bait dute. Legeok integralak direla esatean, ez dugu baieztatu nahi adierazpen diferentzialik ez dutenik, hemen erabiliko ditugun moduan era integralean agertuko zaizkigula baizik.

Gai honetan ikusiko duguna, funtsean Michael Faraday eta James Clerk Maxwell zientzilari ospetsuen lanen ondorioa dugu. Lehena XIX. mendeko fisikalari experimental nagusiena izan zen, eta bigarrena teoriko argitsuena. Azterketa guzti hauen laburpena "Maxwell-en ekuazioak" izenaz ezagutzen dira gaur.

Ezin azter ditzakegu lege hauek behar bezala. Baina, Boltzmann-ek, Gibbs-ek eta Maxwell-ek berak Teoria Zinetikoari buruz egindako lanak arbuiatu gabe, aurreko mendeko Fisikaren gailurren gorena Maxwell-en lege hauek osoturikoa dela esan daiteke, dudarik ez. Fisikan egin diren bateratasun handienetarikoa, eta gaur ere paradigmatikoa gertatzen dena, dugu lan hau. Eta Newton-en legeak ez bezala, haiek Erlatibitatearen teorian ere zilegiak dira. Izan ere, ez dira Galileo-ren erlatibitate-printzipioarekiko elkargarriak, eta, hemen antzematen zen oztopoa gainditzeko, eterraren hipotesia egin zen, XIX. mendeko ikusputu mekanizistari amore emateko edo. Einstein izan zen, Maxwell-en legeak nolabait Newton-enak baino funtsezkoagoak direla konturatu zena eta haietan finkatu zen Erlatibitate Bereziaren oinarriak ezartzeko.

## 22.1. HIGIDURAK SORTURIKO INDUKZIO ELEKTROMAGNETIKOA




Demagun, espazioko eskualde batetan eremu magnetiko uniforme eta konstantea dagoela. Plano elkartzut batetan bi eroalek osoturiko zirkuitua dago, irudian ikusten den geometria duelarik.

Aukeratutako erreferentzi sisteman, eroale txikia $\vec{v} = v\,\hat{i}$ abiadura konstantez eta bigarren eroalearekin kontaktua gordez higitzen da. Eroale honetan dauden elektroiak ere $\vec{B}$ eremuarekiko $\vec{v}$ (batezbesteko) abiaduraz higitzen direnez gero, beraien gainean jatorri elektromagnetikotiko $\vec{F}_m$ indarrak eragiten du. Honela, -e karga duen elektroi baten kasuan zera dugu:

$$\vec{F}_m = -e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \quad ,$$

eta jatorri ez-elektrostatikoa duen karga-unitateko indarra hauxe izango da:

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad ,$$

eta, beraz,

$$\vec{E}_m = v\,B\,\hat{j} \quad .$$

Une bakoitzean, zirkuitua C kurba itxi bat izango da eta $\vec{E}_m$ bektoreak marrazturiko norantzan duen zirkulazioa ez da nulua izango, hau da, aipaturiko zirkuituan indar elektroeragile bat agertzen da, hauxe prezeski:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = E_m\,l = v\,B\,l \quad . \qquad (1)$$

Higidurak (edota zirkuituaren deformazioak) sorturiko in-

dar elektroeragile hau induzitua dela esaten da eta prozesuari indukzioa deitzen zaio.

Bestalde, aipaturiko indar elektroeragile induzitua kalkulatzeko, arrazonamendu energetikoez ere balia gaitezke. Horretarako, azter dezagun korrontea egoteko behar den energi hornidura nondik datorren. Galdera honi erantzuna emateko, zirkuituan eragiten duten kanpoko indarrak aztertu behar ditugu, noski. Alde batetik, indar magnetikoak daude, baina, jakina dugunez, berauek ez dute lanik egiten. U itxurazko eroalea pausagunean eta duen tankeraz gordetzeko, indar elastikoak, eta agian bestelakoak ere, egon behar dira; baina, higidurarik ezari esker, ez dute inolako lanik egingo. Hagaxka, ordea, higitu egiten da eta ondoko indar magnetikoaren eragina jasotzen du:

$$I \int d\vec{r} \wedge \vec{B} = - I\, l\, B\, \hat{i} \; .$$

Beraz, abiadura konstantez higitzeko, hurrengo balorea duen $\vec{F}_n$ kanpo-indar bat ezarri behar zaio:

$$\vec{F}_k = I\, l\, B\, \hat{i} \; .$$

Hemendik, kanpo-indarraren potentzia:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}_k \cdot \vec{v} = I\, l\, v\, B \; ;$$

eta eroalearen sekzioa zeharkatzen duen karga unitateko lana, hau da indar elektroeragilea, lor daiteke:

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} = \frac{1}{dq} I\, dt\, l\, v\, B = l\, v\, B \; .$$

Hortaz, aurreko emaitza berreskuratu dugu bai eta energia nondik datorren jakitea lortu ere.

Irudian adierazi den bezala, aldiune bakoitzean, zirkuitua lerro itxi orientatua da eta, beraz, infinitu gainazal orientatuaren mugatzat kontsidera dezakegu. Har dezagun, adibidez, zirkuituak eraturiko S laukizuzena, $d\vec{S} = dS\, \hat{k}$ azalera-elementua

duena alegia. Beroni dagokion fluxu magnetikoa hauxe dugu:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} = - B \iint_S dS = - B\, l\, x \quad ,$$

eta abiaduraren definizioa (v = dx/dt kasu honetan) erabiliz:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - B\, l\, v \quad .$$

Adierazpen honen eta (1) delakoaren arauera, indar elektroeragile induzitua eta fluxu magnetikoaren deribatuaren artean ondoko erlazioa betetzen da:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad ,$$

edota

$$\oint_C \vec{E}_m.d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}.d\vec{S} \quad ,$$

C hizkiak zirkuitua adierazten duelarik.

Hemen oso kasu berezian ikusi badugu ere, azkeneko emaitza hau guztiz orokorra dela froga daiteke. Izan ere, hauxe betetzen da: "Eremu magnetiko estatiko batetan higitzen edota deformatzen den zirkuituan, indar elektroeragile induzitua sortzen da, zirkuituak eratutako edozein gainazal orientatu zeharkatzen duen fluxu magnetikoaren deribatuaren kontrako balorea duena, hain zuzen ere".

Baieztapen honen frogapen orokorra eman beharrean, hurrengo irudiko adibidearen azterketa proposatzen diogu irakurleari.

$$\vec{F}_m = - e\, \vec{v} \wedge \vec{B} = e\, v\, B\, \hat{j} \quad ,$$

$$\vec{E}_m = - v\, B\, \hat{j} \quad ,$$

$$\vec{F}_k = - I \oint_C d\vec{r} \wedge \vec{B} = I\, l\, B\, \hat{i} \quad ,$$

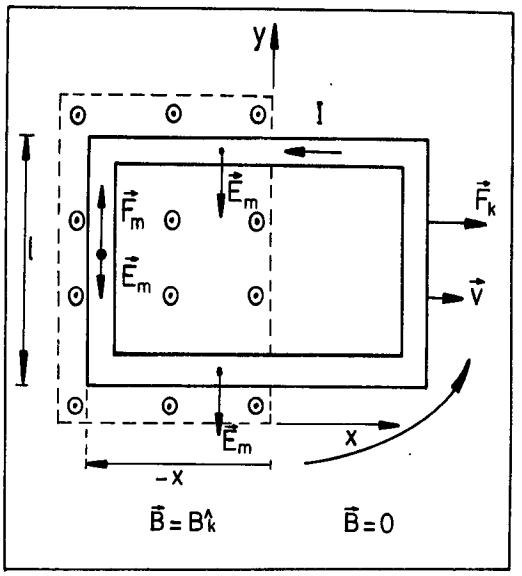
$$dW = dq\ B\ l\ v \quad ,$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} = B\ l\ (-x)$$

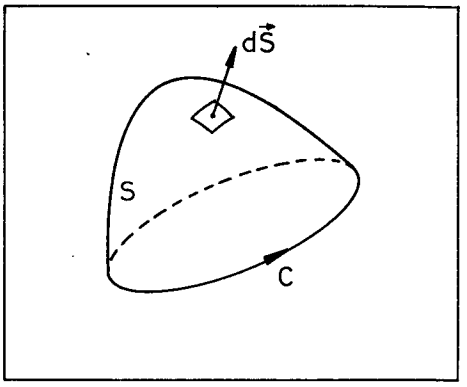
$$\frac{d\Phi}{dt} = -\ B\ l\ v \quad ,$$

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} = \oint_C \vec{E}_m.d\vec{r} =$$

$$= -\frac{d\Phi}{dt} = B\ l\ v.$$




## 22.2. FARADAY-HENRY-REN LEGEA



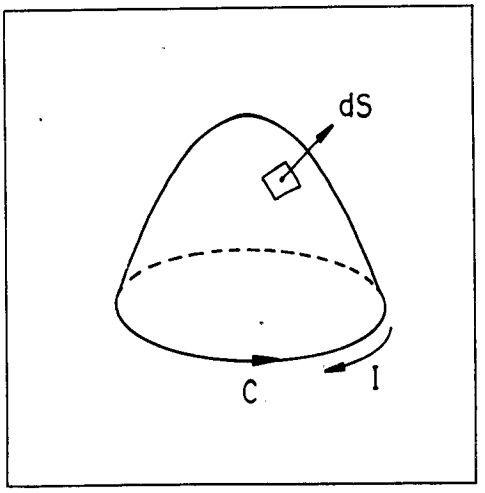

Aurreko atalean ikusi dugunaren arauera, kanpoko eremu magnetiko estatikoan zirkuitu bat deformatzen baldin bada, aipatutako zirkuituan indar elektroeragile induzitua agertzen da. Eta emaitza hau lehenagoko gaietan ikusitako elektromagnetikaren ondorio hutsa da. Baina, zer gertatzen da, zirkuitua pausagunean dagoelarik kanpoko eremu magnetikoa aldakorra baldin bada?

Ageri denez, orain arte ikusitakoak ezer jazoko ez dela diosku. Hala ere, Faraday eta Henry zientzilariek eriden zuten bezala, kasu honetan ere eremu magnetikoaren fluxuaren aldaketak indar elektroeragile induzitua sorterazten du zirkuituan, eta beronen balorea ondoko adierazpenak emandakoa dugu:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad .$$

Emaitza hau kasu experimental berezi batzutan ikusi zen lehendabizi eta kasu guztietan beteko zela postulatu zen geroago. Beraz, funtsezko emaitza experimental berritzat onartu behar

dugu eremu aldakorrek sortutako indukzio hau. Geroago ikusiko dugunez, eguneroko bizitzan oso fenomeno praktikoa dugu hau.




Goiko adierazpeneko zeinu negatiboa dela eta, zirkuituan induzitutako korronte-intentsitateak alboko irudian adierazitako norantza izango du, S gainazal orientatua zeharkatzen duen fluxua handitu egiten bada behintzat. Baina Biot--Savart-Laplace-ren legearen arauera, intentsitate honek eremu magnetiko berri bat sortuko du eta azken honen fluxua hasierakoaren kontrakoa izango da. Emaitza hau Lenz-en legearen izenaz ezagutzen da eta honela adieraz dezakegu: "korronte induzituaren norantza, bere kausari kontra egiteko modukoa da". Ageri denez, lege hau Faraday-Henry-renaren ondorio hutsa dugu. Baina ez da horrelakoa izan Fisikaren historian, azkeneko lege hau baino lehenago ezaguna bait zen. Bestalde, kuantitatiboa izan ez arren, nahiko praktikoa gertatzen da kasu askotan.

Aurreko gai batetan ikusi dugunez, indar elektroeragilea eremu ez-elektrostatiko baten zirkulazioa da. Hortaz, eremu magnetiko aldakorrak $\vec{E}$ eremu elektriko (ez-elektrostatiko) bat ager erazten du zirkuituan, ondoko lege hau betetzen duena hain zuzen:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.d\vec{S} \quad , \qquad (2)$$

S ikurrak C zirkuituak eratutako edozein gainazal adierazten dularik.

Antza denez, eremu elektriko honen kausa ez da zirkuitua, eremu magnetiko aldakorra baizik. Beraz, zer gertatzen da zirkuitua kentzen badugu? Hau da, C lerroa zirkuitu elektrikoa izan beharrean, edozein kurba geometriko itxi baldin bada, berak mugatutako gainazal batetan zehar neurtzen den fluxu magne-

tikoa aldatu egiten da. Hau dela eta, egia ote da, C lerroan ere eremu elektriko bat agertzen dela, (2) emaitza betetzeko moduan?

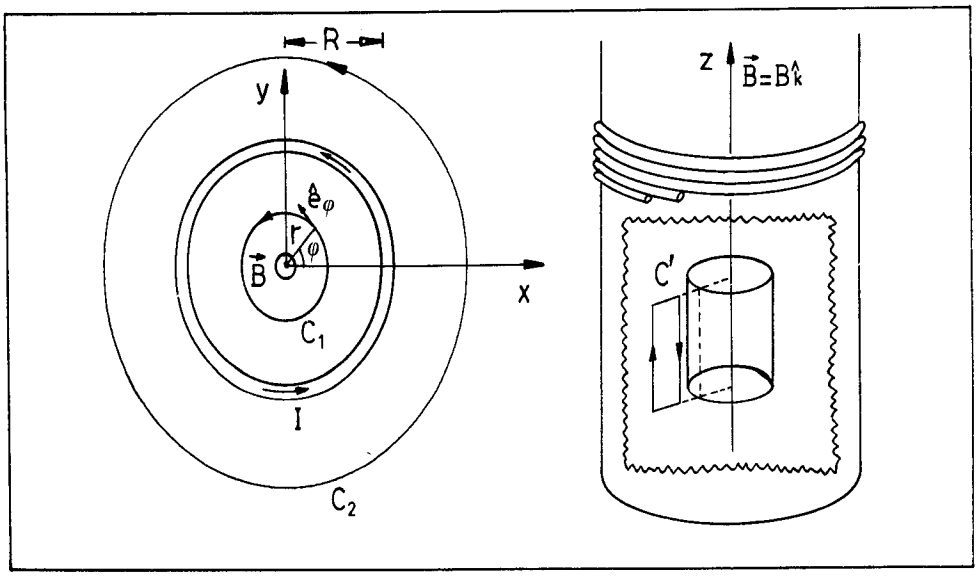
Erantzuna lortzeko, ezin balia gaitezke orain arte ikusitakoaz. Baina (2) emaitza kasu guzti-guztietan betetzen dela behin eta berriro diosku experientziak eta, ondorioz, Naturaren legetzat onartzera behartzen gaitu. Hauxe dugu, ba, Elektromagnetikaren funtsezko lege berria, gaur egunean Faraday-Henry-ren legea deitzen dena: "Eremu magnetiko aldakorrak, eremu elektriko bat sortzen du bere inguruan, edonolako C kurba mugatzat duen edozein S gainazalen kasuan (2) adierazpena betetzen delarik".

Beharbada, ez da guztiz argi geratu zer den (2) ekuazioko $\vec{E}$ magnitudea. "Eremu elektriko" deitu diogu, espazioko puntu bakoitzean pausagunean legokeen karga unitateak pairatuko lukeen indarra bait da. Hori izan da orain arte erabili dugun definizioa eta bidezko eta komenigarria da horrela egiten jarraitzea. $\vec{E}$ eremuaren osagai bat elektrostatika izan daiteke, baina beronek ez dio ekarpenik egingo zirkulazio elektrikoari, noski.

Bestaldetik, egoera fisikoa estatikoa bada, eremu magnetikoak eta, beraz, bere fluxuak ez dute denboraren menpekotasunik izango. Ondorioz, kasu berezi honetan, Faraday-Henry-ren legea emaitza ezagun bihurtzen zaigu, eremu elektrostatiko kontserbakorra dela hain zuzen.

Atal honi amaiera emateko, adibide bat ikusiko dugu. Kontsidera dezagun bere ardatza OZ delakoan duen solenoide infinitua. Eman dezagun solenoideko intentsitatea eta, beraz, eremu magnetikoa denborarekiko aldatuz doazela. Simetria zilindrikoa kontutan harturik, eremu elektriko induzituak r koordenatuaren menpekotasun hutsa izango du, eta C kurba irudiko $C_1$ zein $C_2$ baldin bada, hauxe beteko da:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = E_\varphi \oint_C dr = 2\pi r E_\varphi$$




Bestaldetik, solenoidearen barruan, eremu magnetikoa uniformea da eta, beraz, integrazio gainazaltzat $C_1$ zirkunferentzia duen zirkulua harturik,

$$\iint_{S_1} \vec{B}.d\vec{S} = B\,\pi\,r^2 \qquad (r \leq R) \quad .$$

Kanpoan, ostera, $\vec{B}$ eremua nulua denez,

$$\iint_{S_2} \vec{B}.d\vec{S} = B\,\pi\,R^2 \qquad (r \geq R) \quad .$$

Lortutako emaitzak bildurik, honako hau izango dugu:

$$E_\varphi = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\,r\,\dfrac{dB}{dt} & (r \leq R) \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{R^2}{r}\,\dfrac{dB}{dt} & (r \geq R) \end{cases} \quad .$$

Bestaldetik, OZ ardatza duen zilindro bati Gauss-en teorema aplikatuz $E_r$ nulua dela ikusten da eta, azkenik, Faraday-Henry-ren legea irudiko C' lerroaren kasuan erabiltzeak, $E_z$ delakoa ere zero dela diosku. Baieztapen hauen frogapen erraza irakurleari uzten diogu.

## 22.3. AUTOINDUKZIOA

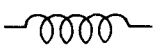
Demagun, zirkuitu batetako I intentsitate elektrikoa alda-

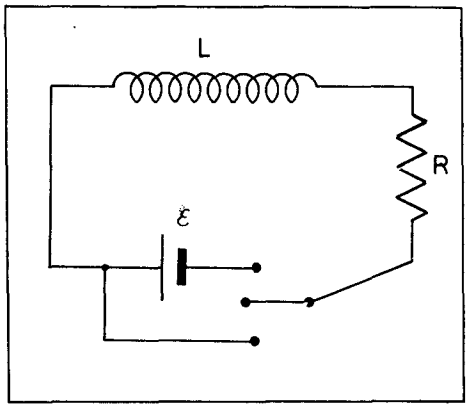
tzen dela. Intentsitate honek sorturiko eremu magnetikoa eta, ondorio bezala, bere fluxu magnetikoa, $\Phi$ , aldakorrak izango dira. Egoera honetan, ikusi berri dugun legearen arauera, zirkuituko indar elektroeragileak osagai induzitu bat izango du, ondokoa presezki:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI}\,\frac{dI}{dt} \quad .$$

$L \equiv d\Phi/dI$ magnitudea, zirkuituaren autoindukzio-koefizientea deitzen da eta geometriaren menpekotasun hutsa duen konstante karakteristikoa dela froga daiteke. Definizio honen arauera, honela adieraz dezakegu indar elektroeragile autoinduzitua:

$$\mathcal{E}_L = -L\,\frac{dI}{dt} \quad .$$

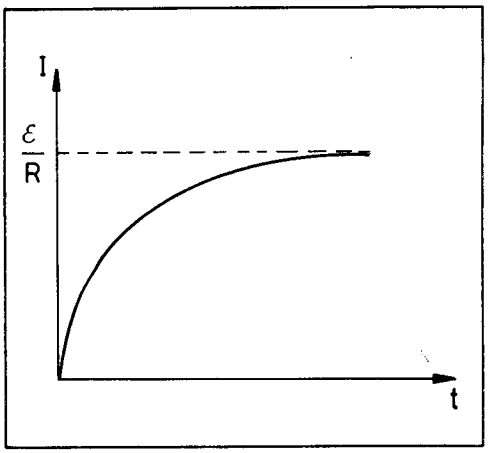
Sistema internazionalean, autoindukzioaren unitateari henry deritzo eta 1 H = 1 Wb/A = 1 $m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$ dugu. Esan bezala, autoindukzio-koefizientea zirkuitu osoari dagokion magnitudea da, baina eskuarki zirkuituaren zati batzuk (solenoideek eta abarrek) bestek baino ekarpen handiagoa egiten ohi diote balore honi. Hau dela eta, autoindukzioa kontzentraturik bailegoen eta  ikurraren bidez irudikatu ohi da (ik. hurrengo irudia). Gainera hitzarmen hau erresistentziaren kasuan eginikoaren parekoa dugu eta eroso gertatuko da geroago korronte alternoa aztertzerakoan. Ondorioz, beheko irudian erakutsitako zirkuitua, "R-L zirkuitua" dela esan ohi da.




Adibide moduan, eman dezagun ondoko zirkuituan t = 0 aldiunean $\varepsilon$ indar elektroeragilea duen pila konektatzen dugula. Hasieran nulua zen korrentea handitzen hasiko da eta indar elektroeragile autoinduzitua ematen digun azkeneko emaitza kontutan hartzen badugu, honela geratzen zaigu Ohm-en

legea:

$$\mathcal{E} - L\,\frac{dI}{dt} = I\,R \quad ,$$

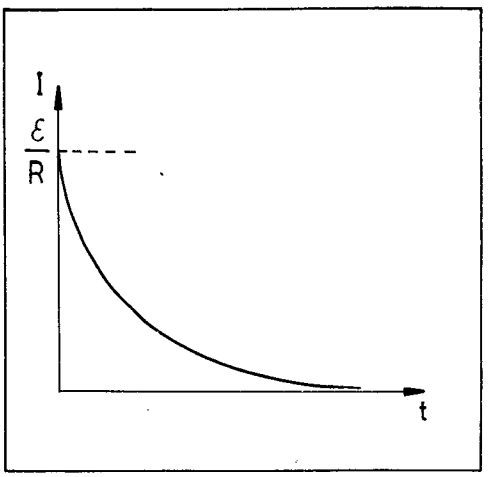



edota, t = 0 zenean I = 0 genuela erabiliz:

$$\int_0^I \frac{d\,I}{I - \frac{\mathcal{E}}{R}} = -\,\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

eta, integralok ebatzi eta gero,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\,(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t}).$$




Irudian ikusten den legez, I intentsitatea 0 izatetik $\mathcal{E}/R$ baliora pasatuko da. Ikuspuntu matematikotik, ez da inoiz iritsiko azkeneko egoera egonkor honetaraino, baina ikuspuntu praktikotik, $\tau \equiv L/R$ erlajazio-denboraren aldean handia den denbora-tartea pasatu ondoren I intentsitateak duen balorea $\mathcal{E}/R$ bailitzen kontsidera dezakegu.

Amaierako egoera honetatik abiatuta, pila zirkuitutik deskonektatu egiten badugu, ordea,

$$-\,L\,\frac{dI}{dt} = I\,R \quad ,$$

hau da,

$$\int_{\frac{\mathcal{E}}{R}}^{I} \frac{dI}{I} = -\,\frac{R}{L}\int_{o}^{t} dt$$

eta, beraz, intentsitatearen adierazpena honako hau izango da:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\;e^{-\frac{R}{L}\,t}$$

eta, irudian adierazi dugun bezala, berriro ere $\tau$ delakoarekiko handia den denbora-tartea pasatu ondoren, efektu praktiko guztietarako egoera egonkorrera heltzen da, kasu honetan $I = 0$ baldintza betetzen delarik.

Hurrengo adibidea, aurreko gaian aztertu genuen solenoide toroidalarena izango da. Bertan ikusi genuenez, barruko a erradioa kanpoko R delakoa baino askoz txikiagoa baldin bada, eremu magnetikoaren modulua $B = \mu_0 N/l\ I$ dugu. Hemen l luzera $2\pi R$ da. Barruko azalera $A = \pi r^2$ baldin bada, hauxe izango da zirkuituko N espiretan neurtutako fluxu magnetikoa:

$$\Phi = B N A = \mu_0 N^2 A I/l \quad ,$$

eta, autoindukzio-koefizientearen definizioa gogoratuz, hauxe geratuko zaigu:

$$L = \mu_0 N^2 A/l \quad .$$

## 22.4. EREMU MAGNETIKOAREN ENERGIA

Ezaguna dugunez, $\mathcal{E}$ indar elektroeragileak hornitutako potentzia $\mathcal{E} I$ da. Era berberean, $\mathcal{E}_L$ indar elektroeragile induzituaren potentzia $\mathcal{E}_L I = - L I\, dI/dt$ izango da. Beraz, aurreko puntuan aztertu dugun R-L zirkuituaren kasuan, potentziaren ekuazioa ondokoa izango da:

$$\mathcal{E} I - L I\, dI/dt = I^2 R \quad ,$$

edota,

$$\mathcal{E} I = I^2 R + L I\, dI/dt$$

Pilak hornitutako potentzia bi beharretan gastatzen dela diosku ekuazio honek. Lehenengo gaia Joule efektuak erresistentzian bero gisa disipatutako potentzia bada, bigarrena berriz, autoindukzioan eta eremu magnetikoa eraikitzeko gastatua dela esan genezake, interpretaziorik naturalena egin nahi izatekotan.

Hemen arrazonamendu sakonagorik emango ez badugu ere, hauxe da egin ohi dugun interpretazioa, komenigarri gertatzen bait da. Horrela, eremu magnetiko ereikitzean ondoko lana egiten da

$$W = \int P\, dt = L\int_0^I I\, dI = \frac{1}{2} L\, I^2 \quad .$$

Eremu elektrostatikoaren kasuan egin zenaren antzera, eremu magnetikoa eraikitzen gastatu den lana, bertan energia magnetiko gisa metaturik geratzen dela suposatzen da. Horrela, zirkuituaren energia magnetikoa $E_B = \frac{1}{2} L\, I^2$ balorekoa izango da.

Zirkuitua aurreko toroa baldin bada, azkeneko emaitzak hauxe diosku:

$$E_B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{l} I^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 A\, l \quad .$$

Hemen, A l eremu magnetikoa dagoeneko eskualdearen bolumena denez gero, $U_B \equiv B^2/2\mu_0$ magnitudea energia magnetikoaren dentsitatetzat har dezakegu.

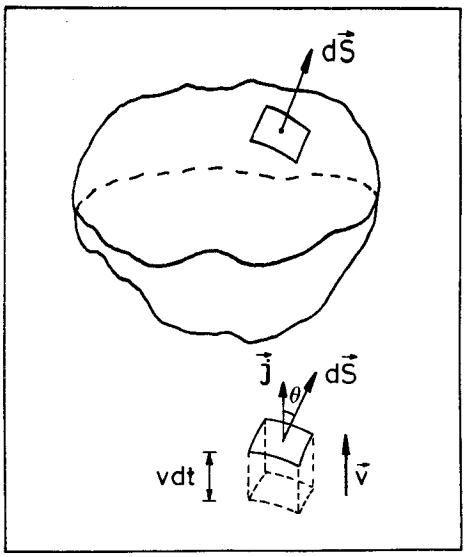
Berau oso kasu berezian ikusi dugun arren, guztiz emaitza orokorra da, eta izatez, kasurik orokorrenean ere, energia magnetikoaren dentsitatea $B^2/2\mu_0$ dela froga daiteke. Bestaldetik, energia elektrostatikoa $U_E = \varepsilon_0 E^2/2$ dela esan dugu. Frogapenik eman ez arren, esan dezagun emaitza hau kasu aldakorretan ere zutik geratzen dela. Edozein eremu elektromagnetiko eraikitzeko erabilitako lana, eremuan bertan geratzen da gordeta, eta energia elektromagnetiko honen dentsitatea hauxe dugu:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad .$$

## 22.5. KARGAREN IRAUPEN-PRINTZIPIOA

Kontsidera dezagun irudiko S gainazal itxia eta berak mugatzen duen V bolumena. Eman dezagun espazioko eskualde honetan $\rho$ karga dentsitatea dagoela eta $\vec{v}$ abiaduraz higitzen dela. Higi-

dura honen ondorioz, V bolumenean dagoen karga elektriko osoa aldatuz joango da, S gainazalean zehar karga-fluxu bat egongo bait da. Gainazaleko dS elementu infinitesimalari eta denbora unitateari dagokien kanporanzko karga-fluxua (hau da, intentsitatea) honako hau izango da:




$$dI = \frac{\rho\,(v\,dt\,\cos\theta)\,dS}{dt} =$$

$$= \rho\,\vec{v}\,.\,d\vec{S}\,.$$

Hemen, $\theta$ ikurrak $\vec{V}$ eta $d\vec{S}$ bektoreen arteko angelua adierazten du. Emaitza hau lortzeko, hidrodinamikan fluxua kalkulatzeko erabilitako metodoaz balia gaitezke. Horretarako aski da, dt tartean dS elementua zeharkaten duen karga irudiko paralelepipedoaren barruan dagoena dela erabiltzea.

Beraz, denbora-unitateko kanporanzko fluxu osoa, kalkulatu berri dugunaren antzeko ekarpenen batura izango da:

$$I = \oiint_S \rho\,\vec{v}\,.\,d\vec{S}\quad .$$

Emaitza hau ikusirik, $\vec{j} = \rho\,\vec{v}$ bektoreari <u>korronte-dentsitatea</u> esaten zaio, horrela eginez korronte-intentsitatea korronte-dentsitatearen fluxua bait da:

$$I = \oiint_S \vec{j}\,.\,d\vec{S}\quad .$$

Eroale baten kasuan, $\vec{j} = -e\,n\,\vec{v}$ dugu, n eramaleen dentsitatea delarik.

Experientziak dioskunez, karga elektriko osoak konstante

irauten du. Beraz V bolumeneko karga osoa q baldin bada, denbora-unitatean q-k duen aldaketa, bolumenean sartzen den kargaren ondorioa izango da eta, hortaz, barruranzko karga-fluxuaren berdina:

$$\frac{dq}{dt} = - \oiint_S \vec{j}.d\vec{S} \quad ,$$

Baina Gauss-en legea erabiltzen badugu, honela adieraz daiteke karga elektrikoaren iraupen-printzipioa:

$$\oiint_S \vec{j}.d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = 0 \quad ,$$

edota

$$\oiint_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \, . \, d\vec{S} = 0 \quad , \qquad (3)$$

S delakoa edozein gainazal itxi izanik.

Eremu elektromagnetikoa estatikoa baldin bada, $\partial \vec{E}/\partial t = 0$ dugu eta, beraz, honela geratzen da kargaren iraupena:

$$\oiint_S \vec{j}.d\vec{S} = 0 \quad .$$

## 22.6. AMPERE-MAXWELL-EN LEGEA. DESPLAZAMENDU-KORRONTEA

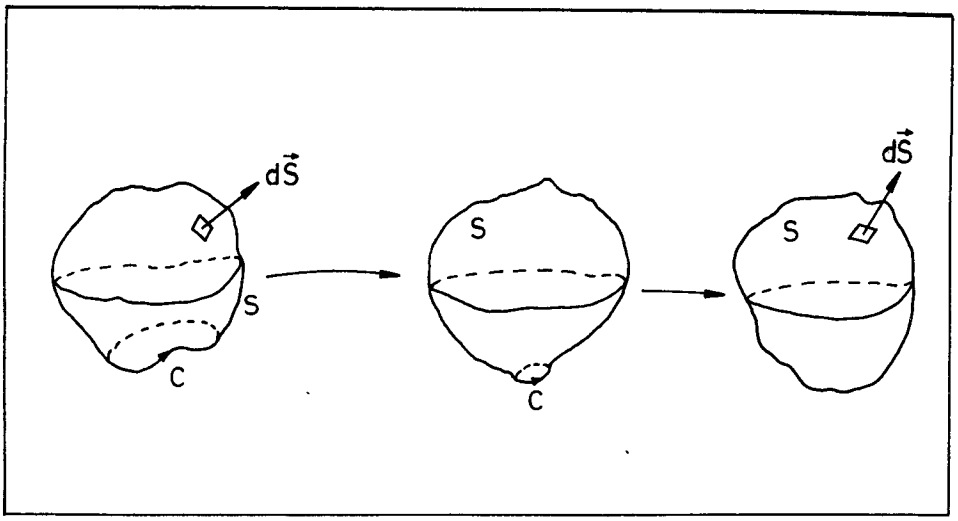
Har dezagun C muga orientatu duen S gainazala. Ampère-ren legearen arauera, hauxe dugu:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j}.d\vec{S} \quad . \qquad (4)$$

Demagun, C lerroaren luzera osoa zerorantz doala, hurrengo irudian adierazi dugun bezalaxe. Ageri denez, limitean hauxe izango dugu:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = 0 \quad ,$$

integrazio-bidea hutsa bait da.




Azkeneko bi ekuazio hauen ondorioz, honako hau lortzen da:

$$\oiint_S \vec{j}.d\vec{S} = 0 \quad ,$$

eta aurreko atalean ikusi dugunez, eremu estatikoen kasuan emaitza hau kargaren iraupena da. Beraz, karga-iraupenaren printzipioa Gauss-en eta Ampère-ren legeen ondorio hutsa dugu Elektrostatikan. Baina eremuak aldakorrak badira, ekuazio hau ez da halabeharrez beteko eta kargaren iraupenaren adierazpen zilegia (3) ekuazioak emandakoa izango da. Argi dago hemen kontraesan batekin topo egin dugula.

Erraz asmatzen da arazo honen zergatikoa; Ampère-ren legeak ez du balio eremuak aldakorrak badira. Hau ez da hain harrigarria, antzeko gauza gertatu bait zaigu beste lege batekin. Izan ere, elektrostatikan ikusi genuen ondoko lege integrala, eremu elektrostatikoa kontserbakorra dela adierazten duena alegia,

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = 0 \quad , \qquad (5)$$

ez da betetzen eremu magnetikoa aldakorra bada, eta kasu honetan Faraday-Henry-ren legea,

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . d\vec{S} \qquad (6)$$

erabili behar dugu haren ordez. Azkeneko kasu honen hildotik abiaturik eta (3) emaitza kontutan harturik, benetako ekuazioa ondokoa dela pentsa genezake:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) . d\vec{S} \quad . \qquad (7)$$

Izan ere, ekuazio hau lortzeko, (4) delakoari gehitu behar zaion gaia, (6) emaitza aurkitzeko (5) ekuazioari atxeki zitzaionaren antzekoa da. Horrela, (7) ekuazioa egia balitz, kasu estatikoan Ampère-ren legea berreskuratuko genuke alde batetik eta, garrantzitsuagoa dena, kasurik orrokorrenean ere zuzena den kargaren iraupen-legea lortuko litzateke ondorio moduan, C lerroaren luzera zerorantz joatean.

Hala ere, goian egindako arrazonamendua ez da nahikoa (7) ekuazioa benetako legea dela baiezteko, azkeneko baieztapena experientziaren aldetik etorri behar bait da. Baina horrelako intuizio batetan finkaturik edo, Maxwell-ek (7) ekuazioa proposatu zuen Ampère-ren legea ordezkatzeko. Ikusiko dugunez, Ampère-Maxwell-en legea berri honen ondorioen artean, argiaren izaera elektromagnetikoa eta uhin-luzera guztietako uhin elektromagnetikoen existentzia daude. Fisikaren historian zehar egindako aurresan teoriko distiratsuenetarikoa dugu hau! Jakina denez, geroxeago Hertz-ek baieztatu zuen aipaturiko aurresan teorikoa.

Experientziaren aldetik, gaur egun ez da inolako zalantzarik: Ampère-Maxwell-en legea Eletromagnetika ez-kuantitatikoaren funtsezko postulatuen artean dago.

Azter ditzagun lege honen ondorio batzu. Gauzak ahalik errazen egiteko, suposa dezagun korronte elektrikorik ez dagoe-

la. Kasu berezi honetan hauxe dugu:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S} \quad ,$$

S gainazalaren muga C lerro orientatua delarik. Baina (2) Faraday-Henry-ren legea indukzio magnetikoaren adierazpena baldin bada, aurreko ekuazioaren interpretazioa hauxe izango da: "eremu elektriko aldakorrak, eremu magnetiko bat sortarazten du bere inguruan". Indar elektroeragilearen definizioan finkaturik, ondoko adierazpeneko magnitudea

$$\Lambda \equiv \oint_C B.dr \quad ,$$

<u>indar magnetoeragile</u> izenaz bataiatzen badugu, fluxu elektrikoaren aldaketa eta indar magnetoeragile induzitua lotzen dituen ekuazioa honako hau dugu:

$$\Lambda = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \text{ non } \Phi_E \equiv \iint_S \vec{E}.d\vec{S} \text{ den.}$$

Begi bistan dago indar elektroeragile induzitua ematen digun ekuazioarekiko antzekotasuna.

Ampère-Maxwell-en legearen bigarren gaia, $\vec{j} + \varepsilon_0 \, \partial\vec{E}/\partial t$ bektorearen fluxua da, funtsean. Analogia formalaz baliaturik, bigarren gaiari, $\vec{j}_0 \equiv \varepsilon_0 \, \partial\vec{E}/\partial t$ bektoreari alegia, <u>desplazamendu-korrontearen dentsitatea</u> deitzen baldin badiogu, ondoko fluxua:

$$I_D \equiv \iint_S \vec{j}_D.d\vec{S} = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}.d\vec{S},$$

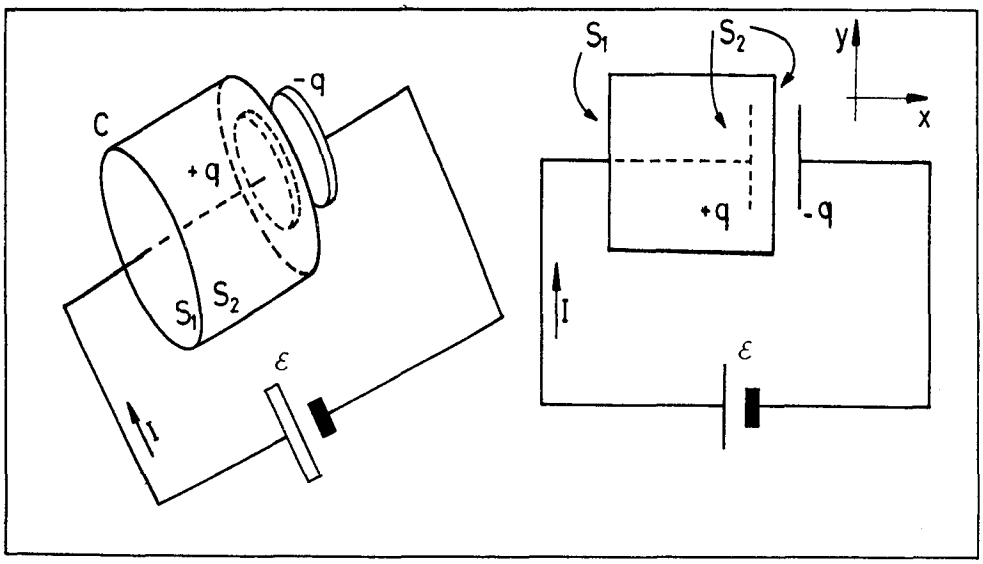
desplazamendu korrontearen intentsitatea izango da eta, beraz, Ampère-Maxwell-en adierazpena honela agertuko zaigu:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S}$$

edota, hitzez esanda: "C lerroan neurtutako zirkulazio magneti-

koa, korronte-intentsitate osoaren (hau da, kargen higidurak sorturikoaren eta desplazamendu-intentsitatearen baturaren) proportzionala izango da, haien arteko zatidura hutsaren permeabilitatea izanik".

Adibide moduan, azter dezagun irudiko kondentsadore launaren karga-prozesua. Kontsidera ditzagun C muga zirkularra duen $S_1$ zirkuloa eta $S_2$ gainazal zilindrikoa.




Elektromagnetika estatikoak ez du balio egoera aldakor honetan. Izan ere, kondentsadorea guztiz kargatu arte, I intentsitatea ez da nulua izango hari eroalean; baina bai plaken artean. Beraz, Ampère-ren legea aplikatzekotan, ondoko kontraesana lortuko genuke:

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_o \iint_{S_1} \vec{j}.d\vec{S} = \mu_o\ I \neq \mu_o \iint_{S_2} \vec{j}.d\vec{S} = 0\ .$$

Espero bezala, Ampère-Maxwell-en formulazio berria erabiliz ez dago arazorik. Lehen hurbilketan, eremu elektrikoa plaken artean dago kokaturik, eta bertan konstante eta ondoko balorekoa da:

$$\vec{E} = E\,\hat{i}\ , \qquad E = \frac{V}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{q}{\varepsilon_o S}\ .$$

Beraz, desplazamendu-korrontea hauxe izango da:

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j_D \hat{i} \quad , \qquad j_D = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} \quad .$$

Ondorioz, Ampère-Maxwell-en legearen arauera, honako hau dugu $S_1$ gainazalean:

$$\int_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j}.d\vec{S} = \mu_0 I \quad ,$$

eta $S_2$ delakoan:

$$\int_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_2} \vec{j}_D.d\vec{S} = \mu_0 \; j_D \; S = \mu_0 \frac{dq}{dt} \quad .$$

Baina,

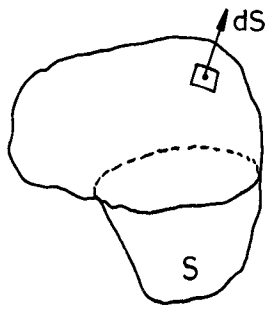
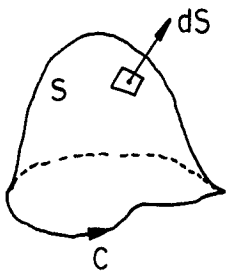
$$I = \frac{dq}{dt} \quad .$$

delako berdintza, intentsitatearen definizioaren ondorio zuzena da. Aurreko kontraesana desagertu egin da!

## 22.7. MAXWELL-EN EKUAZIOAK

Aurreko gaian egin genuen bezalaxe, hemen ere ikusitakoaren laburpena aurkeztuko dugu.

Elektromagnetikaren funtsezko legeak, ondoko hauek dira:

| | | |
|---|---|---|
| $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$ |   | $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ |
| $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ |   | $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\iint_S (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t})\cdot d\vec{S}$ |

Maxwell-en ekuazioak deritze hauei, eta hutsean $\rho$ karga-dentsitatea eta $\vec{j}$ korronte-dentsitatea iturritzat dituzten eremu elektromagnetikoak zeintzu diren esaten digute -deskribapena nahastezina izateko, muga-baldintza batzu ezarri behar zaizkie baina. Lege hauetaz gain, eremuen definizioa dugu, hau da q kargaren gainean eragiten duen indar elektromagnetiko osoa indar elektriko eta magnetikoaren batura dela:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

(berau Lorentz-en indarra dela esan ohi da). Baina Elektrodinamikaren beste emaitza guztiak lege hauen ondoriotzat kontsidera ditzakegu. Horrela, aurreko atalean ikusi dugunez, karga--iraupenaren legea erraz lortzen da lege hauetatik abiaturik. Beraz, Maxwell-en ekuazioak, Lorentz-en indarrarekin batera, Elektrodinamika klasiko modernoaren oinarrizko postulatuak dira, Newton-en legeak Mekanika klasiko ez-erlatibistaren funtsezko postulatuak ziren bezalaxe.

## 23. GAIA: KORRONTE ALTERNOA

23.1. Korronte alternoaren sorkuntza

23.2. Batezbesteko balioa eta balio efikaza

23.3. Korronte alternoaren efektuak eta ezaugarriak

23.4. Korronte alternoko hargailuak

- Erresistentzia hutsa
- Autoindukzio hutsa
- Kapazitate hutsa

23.5. Korronte alternoko zirkuituak

- R-L serie-zirkuitua
- R-C serie-zirkuitua
- R-L-C serie-zirkuitua
- Paralelo-zirkuitua

23.6. Potentzia

23.7. Erresonantzia

23.8. Transformadorea

Gaur egun, energia elektrikoaren ia aplikazio gehienetan, korronte alternoa erabiltzen da korronte jarraiaren ordez. Elektrizitatearen aintzinako sasoian, energia elektrikoa ekoizpen--lekuaren inguruan kontsumitzen zen eta korronte jarraia zen erabilia izaten zena.

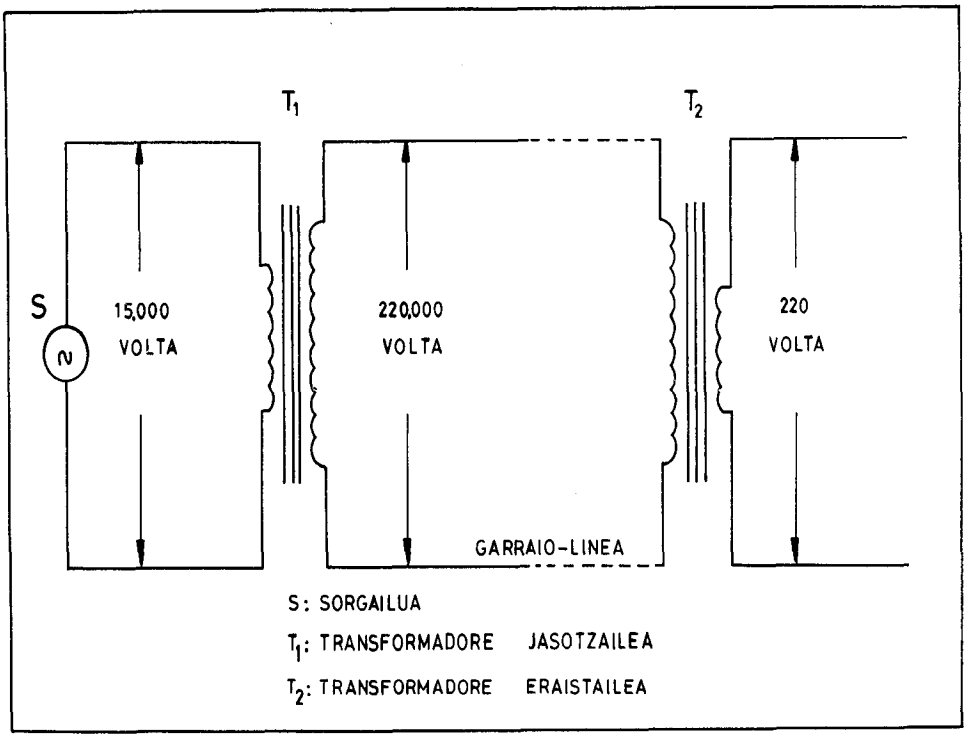
Hala ere, energia elektrikoaren distantzia handietako garraioaren beharra agertzean, korronte alternoa gertatu zen nagusi, garraioan zehar ematen diren energi galerak zirela eta.

Zeren, ez bait dugu ahaztu behar, garraio-galerak, Joule efektuak sorturikoak, intentsitatearen karratuaren proportzionalak direla, eta potentziaberbererako,tentsioa zenbat eta handiagoa izan, intentsitatea hainbat eta txikiagoa da; galerak ere txikiagoak ditugularik.

Arazo honetan, behin-betiko gauza izan zen transformadorearen agerpena, aparatu honen bidez erraza bait da behe-tentsiotan ekoizten den energia goi-tentsiotan garraiatzea; eta gero, kontsumo-puntuetara heltzerakoan, posiblea zaigu berriro ere, tentsio handitan garraiaturiko energia, tentsio erabilgarrian ipintzea beste transformadore bat erabiliz, noski. Eta transformadoreek korronte alternoa eskatzen dute.

Ondoko irudian ikus daiteke garraio-sistema.

Bestalde, korronte jarraia behar izatekotan, erraz lor dezakegu berau korronte alternotik abiaturik, bai artezgailuak erabiliz zein korronte alternoz elikaturiko korronte jarraiko sorgailuen bidez.




## 23.1. KORRONTE ALTERNOAREN SORKUNTZA

Korronte alternoko sorgailua, alternadorea ere deiturikoaren funtsa, eremu magnetikoan $\omega$ abiadura angeluar konstantez biratzen den espiran datza.

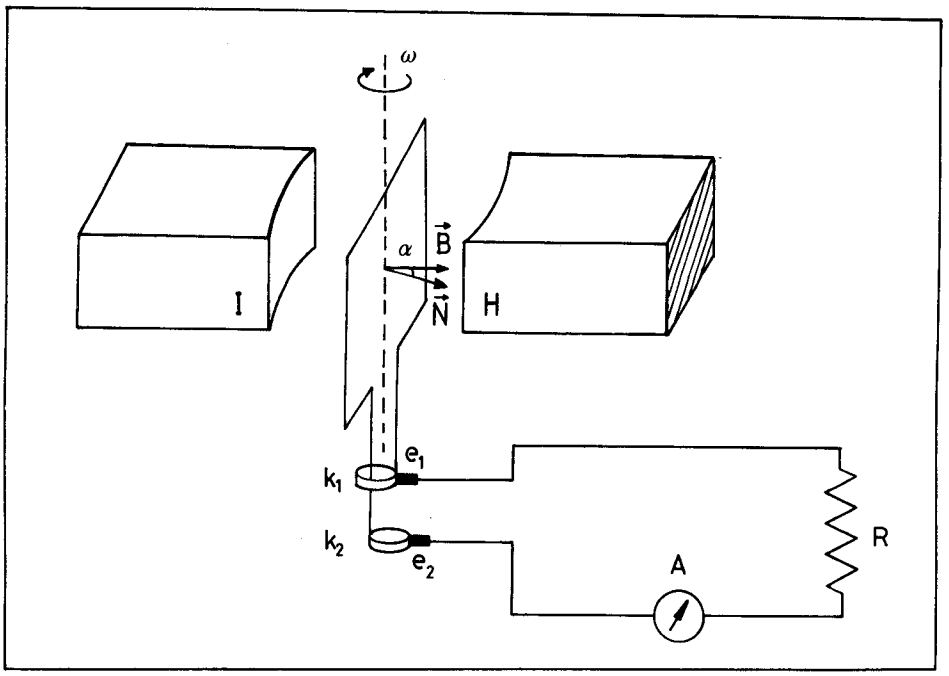
Espiraren muturrak, berekin batera biratzen diren $k_1$ eta $k_2$ bi eraztun kolektoreei soldaturik daude, eta $e_1$ eta $e_2$ bi eskuilen bidez, sorturiko korrontea hartzen da, R erresistentziako alboko zirkuituan erabili ahal izateko.

Espira zeharkatzen duen fluxua, hauxe izango da:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{ds} \ .$$

Baina, B = kte denez, aurreko adierazpena ondoko hau bihurtzen da:

$$\phi = \vec{B} \cdot \int \vec{ds} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \alpha \ ,$$




non

B: eremu magnetikoaren intentsitatea

S: espiraren azalera

α: eremu magnetikoaren intentsitateak eta espiraren plano-arekiko normalak eratzen duten angelua,

diren.

Bestalde, t denboran espirak biraturiko angelua $\alpha = \omega . t$ da. Beraz, $\phi = B\,S \cos \omega t$ .

Ikusten denez, aldakorra da fluxua, lege kosinuidal bati jarraitzen bait zaio. Fluxuaren aldakuntzak, indar elektroeragile induzitua sortuko du, beraren balioa ondokoa delarik:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\,S \cos \omega t) = B\,S\,\omega \sin \omega t \ .$$

eta $B\,S\,\omega = E_o$ egiten badugu:

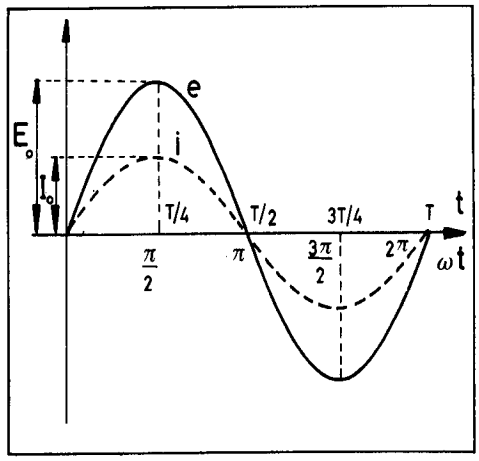
$$e = E_o \sin \omega t \ .$$

Indar elektroeragilea periodiko eta sinusoidala da, beraren balio maximoa $E_o$ izanik.

Oharra: Nahiz 19. eta 22. gaietan indar elektroeragilea adierazteko $\mathcal{E}$ ikurra erabili dugun, gai honetan, korronte alternoarekin egin ohi denez, e, E eta $E_o$ ikurrak erabiliko ditugu.

Orain, irudiko zirkuituan dagoen R erresistentzian zehar iragaten den korrontearen intentsitatea, ondokoa da:

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_o}{R} \sin \omega t = I_o \sin \omega t \ .$$




Ikus dezagun, bada, indar elektroeragile eta intentsitatearen adierazpen grafikoa.

Korronte alternoaren ezaugarrietariko bat maiztasuna da. Dakigunez, $\frac{1}{T} = f = \frac{\omega}{2\pi}$ ; edo gauza bera dena $\omega = 2\pi f$ .

Maiztasuna hertz-etan neurtzen da, Europan, etxerako eta industriarako erabiltzen den korronte alternoa 50 Hz-takoa delarik. Periodoa $\frac{1}{50}$ segundotakoa dela esan nahi du honek edo beste hitz batzutan, periodoerdia edo alternantzia $\frac{1}{100}$ s-takoa. Beraz mota honetako korronteak 100 aldiz aldatzen du bere norantza segundo bakoitzean.

Hau dela eta, korronte alternoak ez du adierazten, ezen, korronte jarraiaren kasuan gertatzen den legez, elektroiak, eroalearen sekzioan zehar, beti norantza berean iragaten direnik. Aitzitik, korronte alternoa $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodoa duen elektroien bibrazioan datza, hots, metalean zeharreko elektroien higidura ondulatorioa dugu korronte hau.

Dena dela, korronte alternoaren efektuak, aipaturiko higidura ondulatorioaren hedapenak sorterazitakoak direnez, korronte alternotzat, eroalean zeharreko uhin horren hedapena jotzen dugu.

## 23.2. BATEZBESTEKO BALIOA ETA BALIO EFIKAZA

Orain arte, indar elektroeragile eta intentsitatearen aldiuneko balioak (e,i) eta balio maximoak ($E_o$, $I_o$) ikusi ditugu. Goazen, beraz, erabilgarritasun handiko beste balio bat definitzera: balio efikaza, hain zuzen.

y(t) funtzio periodiko baten balio efikaza honela definitzen da:

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y(t)^2\, dt}\ .$$

Gure kasu honetan, y(t) delakoa, $e = E_o \sin \omega t$ edo $i = I_o \sin \omega t$ izan daiteke. Beraz,

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_o \sin \omega t]^2\, dt}\ ,$$

$\omega t = x$ aldagai-aldaketa eginez eta dagokion garapen matematikoa burutuz, hauxe da lortzen duguna:

$$I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}\ , \text{ eta era berean } \quad E = \frac{E_o}{\sqrt{2}}\ .$$

Ikasleari uzten diogu egiaztapen-lana.

Balio efikazaren kalkulu matematikoa eginik, goazen orain beraren esangura fisikoa aztertzera. Dakigunez, dt denboran korronte elektrikoaren eraginaz R erresistentzian sorturiko dQ bero-kantitatea honako hau dugu: $i^2Rdt$. Hortaz, korrontea konstantea ez denean, periodo batetan sorturiko beroa hauxe izango da:

$$Q = R\int_0^T i^2\, dt\ .$$

Eta, konturatzen bagara, integralaren balioa $I^2T$ da. Honelatan, bada, $Q = RI^2T$.

Honek adierazten digu, ezen, korronte alternoaren intentsitatearen balio efikaza, denbora berean bero-kantitate berbera sorterazten duen korronte jarraiko intentsitatearen balioa dela.

Jakina denez, y = y(t) funtzioaren batezbesteko balioa, honela definitzen da:

$$Y = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\, dt.$$

Edozelan ere, $i = I_o \sin \omega t$ motako funtzioen batezbesteko

balioetaz berba egiteak ez dauka inolako interesik, nuluak dira eta; zeren periodo bakoitzean, edozein balio positibori, magnitude bereko eta aurkako zeinuko beste balio bat bait dagokio.

Dena dela, funtzioak $y = y_o \sin^2 \omega t$ motakoak direnean, batezbesteko balioa ez da nulua, potentzia aztertzean ikusiko dugunez.

Bestalde, korronte alternoaren tentsioa eta intentsitatea aipatzean, beren balio efikazak aipatzen ditugu, berauek bait dira, hain zuzen ere, neurgailuek ematen dizkigutenak (220 volta, 14 ampere). Hortaz, kontutan hartu beharrekoa da, balio maximoak $\sqrt{2}$ aldiz handiagoak direla.

Amaitzeko, gogora dezagun berriro ere, kapitulu honetan zehar erabiliko dugun notazioa:

$e, i$ : aldiuneko balioak

$E_o, I_o$: balio maximoak

$E, I$ : balio efikazak.

## 23.3. KORRONTE ALTERNOAREN EFEKTUAK ETA EZAUGARRIAK.

- Korronte alternoak ez dauka polaritate finkorik; korronte jarraiak, aldiz, bai. Honek esan nahi du, ezen, korronte jarraiko sorgailuen borneetariko bata (positiboa dena), beti dagoela bestea (negatiboa) baino potentzial handiagoan. Korronte alternoko sorgailuetan, aldiz, alternantzia batetan betetzen da hau; hurrengoan kontrakoa.

Hau dela eta, korronte jarraiko sorgailu edo metagailuak (pilak edo kotxeko bateria adibidez) erabiltzen dituzten aparatuetan, polaritatea beti datorkigu azaldurik, eta konexioak burutzean, derrigorrezkoa dugu polaritatea mantentzea. Aitzitik, korronte alternokoak diren etxeko tresna elektrikoetan, ez dago inolako polaritate-zeinurik.

Esandakoa kontutan harturik, errazki ikusten da, ezen elektrolisian korronte jarraia erabili behar dela, zeren, korronte alternoaren norantza aldatzen denez gero, elektrodoen zeinua aldatu egiten bait da etengabeki, ondorioz, berek jasotako materiala ere elektrodo batetik bestera joaten delarik.

- Korronte alternoaren zirkulazioak, jarraiarenak bezalaxe, beroa sorterazten du. Arestian ikusi dugunez: $Q = 0'24RI^2t$.

- Korronte alternoak eremu magnetikoa sortzen du. Zer esanik ez, korrontearen intentsitatea periodikoki aldatzean, sorturiko eremu magnetikoa ere periodikoki aldatuko da, eremuaren maiztasuna eta korrontearena berdinak izango direlarik.

- Korronte alternoak kondentsadoreetan zehar iragan daitezke, korronte jarraiaren kasuan gertatzen ez dena, zeren, kondentsadoreak, kasu honetan, erresistentzia infinitua bailitzen jokatzen bait du, kargaldian eta deskargaldian salbu.

Korronte alternoaren intentsitatea, orokorrean, ez dator tentsioaren eta erresistentziaren arteko zatiduraz emanik, zeren, geroago ikusiko dugunez, autoindukzioek eta kapazitateek sorturiko beste zenbait efektu ere kontutan hartu beharrekoak bait dira.

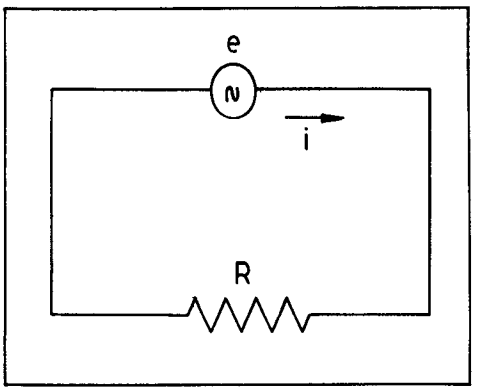
- Zirkuituaren muturretan ezarritako tentsioa eta beronek sorterazitako korrontearen intentsitatea, orokorrean, ez daude fasean, hau da, ez dira aldiberean beren balio maximoetara iristen. Fase-diferentziak, zirkuituaren elementuen eta maiztasunaren menpekoak dira.

- Aurreko lerroaldian esandakoaren arauera, kapazitate eta autoindukzioak dauzkaten zirkuituetako elementu desberdinen potentzial-diferentzien balio efikazen batura algebraikoak, ez du zertan zirkuituan ezarritako tentsioaren berdina izan behar. Dena den, balio efikazen ordez, aldiuneko balioak kontsideratzen baldin baditugu, aipaturiko batura ezarritako aldiuneko tentsioaren berdina da.

## 23.4. KORRONTE ALTERNOKO HARGAILUAK

Hiru motatakoak izan daitezke korronte alternoko hargailuak, hala nola: erresistentzia, autoindukzio eta kondentsadoreak. Ikus dezagun, bada, zeintzu diren tentsioaren eta intentsitatearen arteko erlazioak hargailu hauetako bakoitzean.

### Erresistentzia hutsa

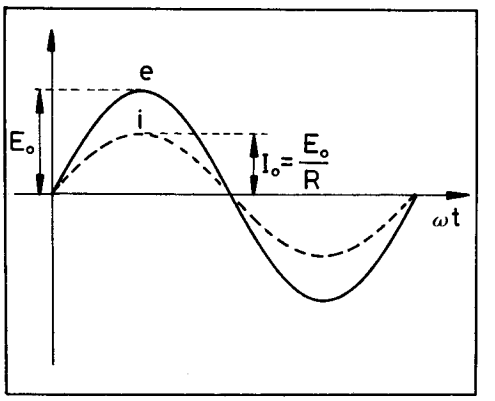



Demagun, R erresistentziaren borneen artean, $e = E_o \sin \omega t$ tentsioa ezartzen dugula.

Dakigunez, $i = \frac{e}{R} = \frac{E_o}{R} \sin \omega t = I_o \sin \omega t$ .

Zer esanik ez, balio efikazari dagokionez: $I = \frac{E}{R}$ .

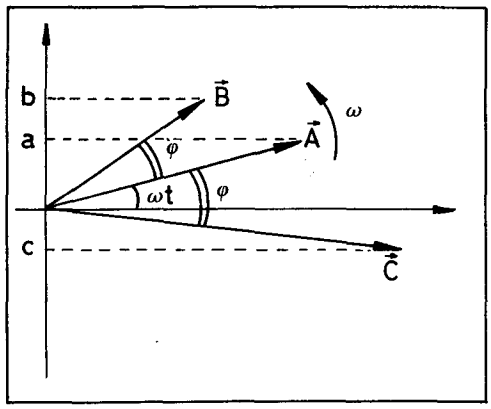
Alboko irudian ikus dezakegu funtzio hauen adierazpidea.



Ikusten dugunez, fasean daude biak, hots, aldiberean iristen dira beren balio maximo zein minimoetara. Bien arteko desfaserik ez dago.

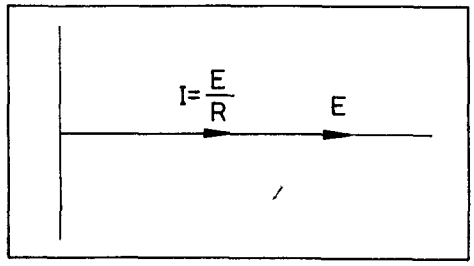
Bestalde, 15. gaian, Higidura Oszilakorra izenekoan ikusitakoaren arauera, funtzio sinusoidalak bektore biratzaileen bidez adieraz daitezke. Bektore hauei fasoreak ere deritze.

Demagun, adibidez, $a = A \sin \omega t$, $b = B \sin (\omega t + \varphi)$ eta $c = C \sin (\omega t - \varphi)$ funtzio sinusoidalak ditugula.

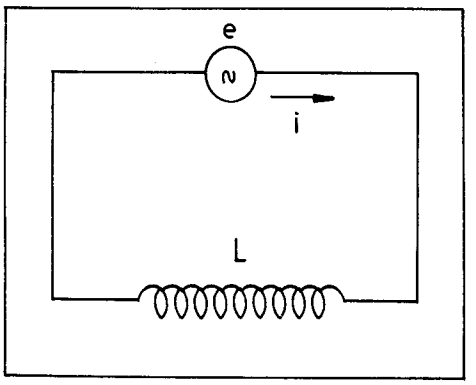



Berauen adierazpide fasoriala irudian ikus daiteke, fasore bakoitzaren luzera, A, B, eta C delarik hurrunez hurren. Nabaria denez, ardatz bertikalaren gaineko fasoreen projekzioek, adierazten ditugun funtzioen aldiuneko balioak ematen dizkigute. Dena den, magnitudeen balioetaz gain, korronte alternoa aztertzean erabateko garrantzia duen beste zerbait antzematen dugu adierazpide fasorialaren bitartez: fasoreen arteko posizio erlatiboak ezagutzea, hain zuzen ere.

Gure kasuan, $e = E_o \sin \omega t$ eta $i = I_o \sin \omega t$ funtzioak ditugu. Beraz, fasoreen luzeratzat balio efikazak harturik, eta adierazpidea $t = o$ aldiunean eginik, alboko irudian azaltzen den eran gertatzen da tentsio eta intentsitatearen adierazpide fasoriala, beren arteko desfaserik ez dagoenez, gainjarrita agertzen zaizkigularik.



Autoindukzio hutsa




Demagun, L autoindukzio-koefizientea daukan haril baten muturretan, $e = E_0 \sin \omega t$ tentsio alternoa ezartzen dugula. Ezarritako tentsioaren eta korrontearen intentsitatearen artean dagoen erlazioa hauxe da:

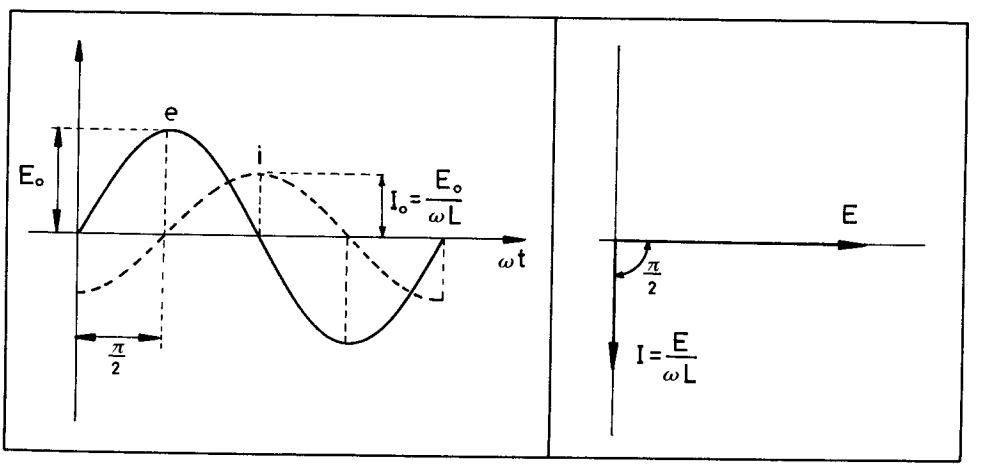
$$e = L \frac{di}{dt} ,$$

edo gauza bera dena,

$$i = \frac{1}{L} \int e dt = \frac{1}{L} E_0 \int \sin \omega t \, dt =$$

$$= - \frac{E_0}{\omega L} \cos \omega t = \frac{E_0}{\omega L} \sin (\omega t - \pi/2).$$

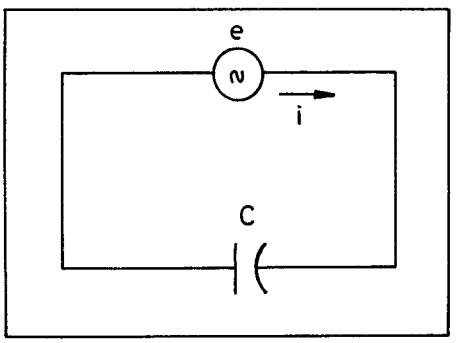
Ikusten denez, intentsitatea $\pi/2$ (edo 90°) atzeratuta dago tentsioarekiko, edo beste modu batez esanda, tentsioa $\pi/2$ aurreratuta intentsitatearekiko, bai era analitikoan zein grafikoan egiazta daitekeenez.



L delakoari erreaktantzia induktiboa deritzo, $X_L$ ikurraz adierazten delarik. Hortaz, $I = \frac{E}{X_L}$.

L autoindukzio-koefizientea henry-tan neurtzen da eta $X_L = 2\pi fL$ biderkadurak erresistentziaren dimentsioa du, ohm-etan ($\Omega$) neurtzen delarik. Nabaria denez, L-ren balio konstanterako, erreaktantzia induktiboa maiztasunaren arauera emendatzen da.

Kapazitate hutsa




Demagun, orain C kapazitateko kondentsadore baten borneen artean, $e = E_o \sin \omega t$ tentsio alternoa ezartzen dugula. Kondentsadoreak metatzen duen kargaren eta kapazitatearen arteko erlazioa hauxe da:

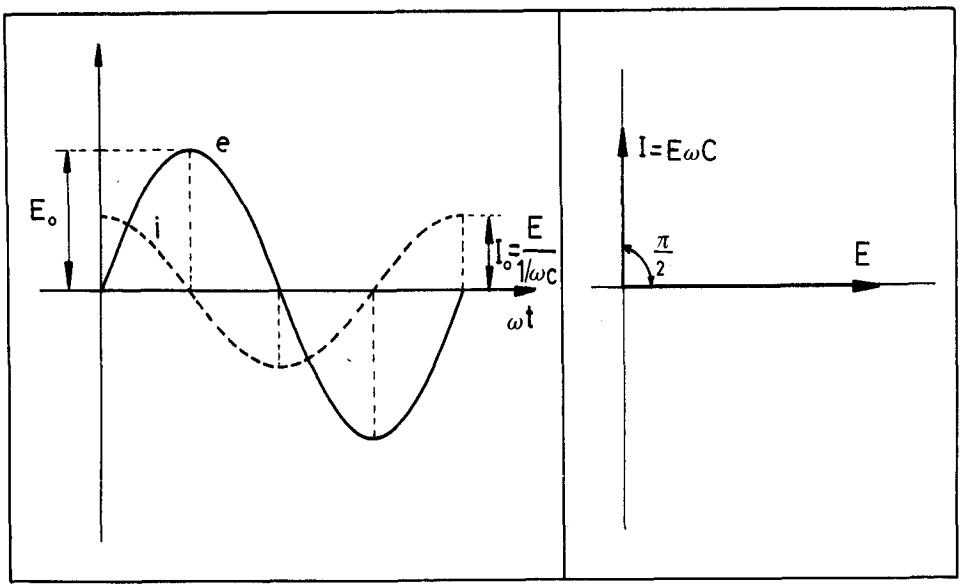
$$dq = C\, de.$$

Bestalde, $dq = idt$ denez, $idt = Cde$, edo $i = C \frac{de}{dt} =$

$$= C\, E_o\, \omega \cos \omega t = \frac{E_o}{1/\omega C} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}) .$$

Kasu honetan, intentsitatea $\pi/2$ (edo 90°) aurreratuta dago tentsioarekiko, edo gauza bera dena, tentsioa $\pi/2$ atzeratuta intentsitatearekiko.

$\frac{1}{\omega C}$ delakoari, erreaktantzia kapazitiboa deritzo, $X_C$ ikurraz adierazten dugularik. Beraz, $I = \frac{E}{X_C}$. C faraday-tan neurtzen da eta $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$ erreaktantzia kapazitatiboaren dimentsioak, erresistentziarenak dira ($\Omega$).

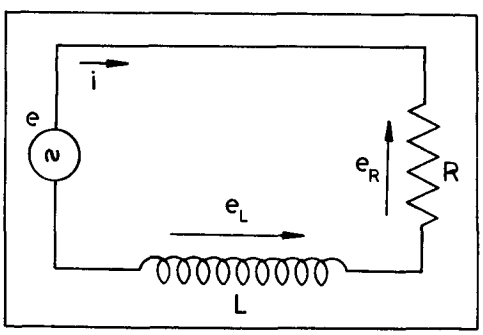



Bistakoa denez, erreaktantzia kapazitatiboa, erreaktantzia induktiboa bezala, frekuentziaren funtzioan lortzen da, beronekiko lehenengoak eta bigarrenak duten dependentzia desberdina bada ere.

## 23.5. KORRONTE ALTERNOKO ZIRKUITUAK

Aurreko atalean banan-banan aztertu ditugu korronte alternoko hargailuak. Berauek, ordea, era desberdinetan elkar daitezke zirkuituak osotzeko orduan. Ikus ditzagun, bada, ondoko zirkuitu hauek:

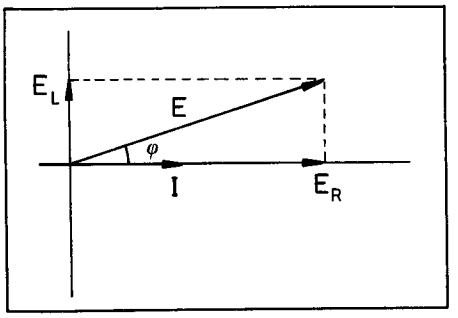
### R-L serie-zirkuitua




Demagun, irudiko zirkuitua dugula, non R eta L elementuak seriean konektaturik dauden.

Dakigunez, $e = e_R + e_L$. Bestalde, zirkuitutik, i intentsitatea iraganen da.

Ezaguna denez, erresistentzian ematen den $e_R$ tentsio-erorketa, fasean egongo da intentsitatearekin. Aldiz, autoindukzioan ematen dena, $e_L$, $\pi/2$ aurreratuta. Adierazpide fasoriala burutzen badugu, erreferentziatzat intentsitatearen posizioa hartuz, hauxe daukagu:




Magnitude bektorialak izanik, E bektorea, $E_R$ eta $E_L$ bektoreen batura da.

Moduluari dagokionez,

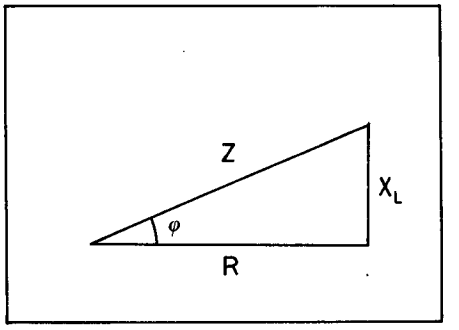
$$E^2 = E_R^2 + E_L^2 = (RI)^2 + (\omega LI)^2.$$

Beraz, $E = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = I\sqrt{R^2 + X_L^2}$ .

$\sqrt{R^2 + X_L^2}$ delakoari zirkuituaren <u>inpedantzia</u> deritzo, Z letraz adierazten delarik,

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

Inpedantzia definituta dagoelarik, ikus dezagun <u>inpedantzien triangelua</u> deitzen dena. Era honetako triangelu zuzena dugu, non katetoak erresistentzia eta erreaktantzia diren, hipotenusa inpedantzia izanik.



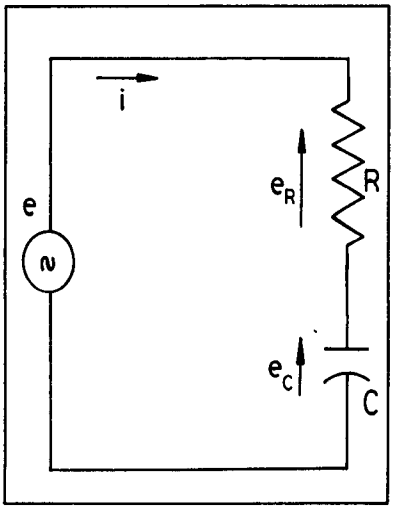

$\varphi$ angelua, tentsioaren eta intentsitatearen arteko desfasea da, beraren balioa ondoko adierazpenak emana datorrelarik:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} \Longrightarrow \varphi = \operatorname{artg}\frac{L\omega}{R} = \operatorname{artg}\frac{X_L}{R}$$

Hurrengo kasua aztertzera pasatu baino lehen, diogun, ezen gorago aipatu dugun inpedantziaren definizioa, eta beraz azaldu dugun triangelua, R-L serie-zirkuituari dagozkionak direla, ba-

taren zein bestearen definizio orokorrak geroxeagorako uzten ditugularik.

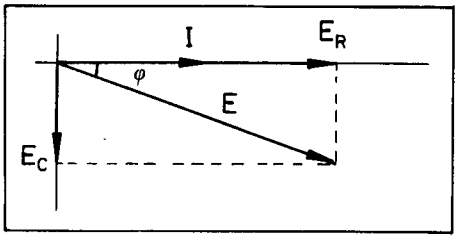
R-C serie-zirkuitua




Aurreko zirkuituaren antzera:

$$e = e_R + e_C.$$

Erresistentzian ematen den tentsio-erorketa fasean dago intentsitatearekin, kondentsadoreari dàgokiona, berriz, $\pi/2$ atzeraturik.



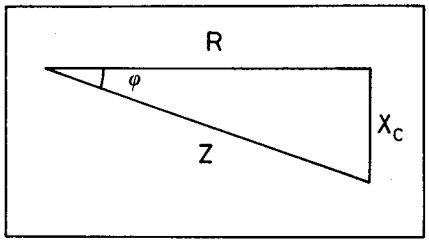

Lehen egin dugun bezala, intentsitatearen posizioa hartuko dugu erreferentziatzat. Hortaz, albokoa da fasoreen diagrama.

Argi dagoenez, $E^2 = E_R^{\ 2} + E_C^{\ 2} = (IR)^2 + (\frac{I}{\omega C})^2$ .

Beraz, $E = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = I \sqrt{R^2 + X_C^{\ 2}}$ .

Eta zirkuitu honen inpedantzia: $Z = \sqrt{R^2 + X_C^{\ 2}}$.

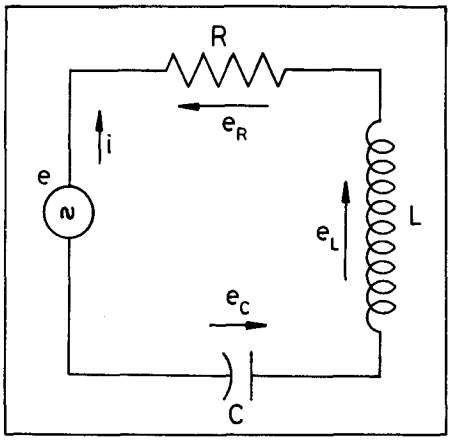
Inpedantzien triangelua albokoa da.



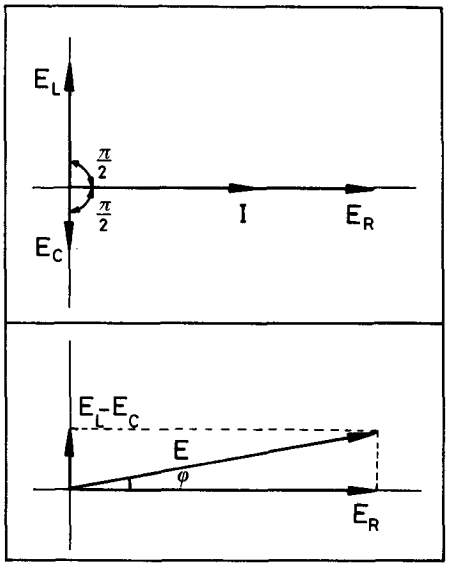

Desfasea: $\text{tg}\,\varphi = \frac{-1/\omega C}{R} \Longrightarrow \varphi = \text{artg}\,\frac{-1}{\omega CR} = \text{artg}\,\frac{-X_C}{R}$ .

Aurreko kasuan esan bezalaxe, oraingo honetan azaldutako inpedantzia eta inpedantzien triangelua R-C zirkuituari dagozkionak dira.

R-L-C serie-zirkuitua




kasu honetan, $e = e_R + e_L + e_C$ beteko da. $e_R$ fasean egongo da i-rekin, $e_L$ $\pi/2$ aurreratura, eta $e_C$ $\pi/2$ atzeratuta.



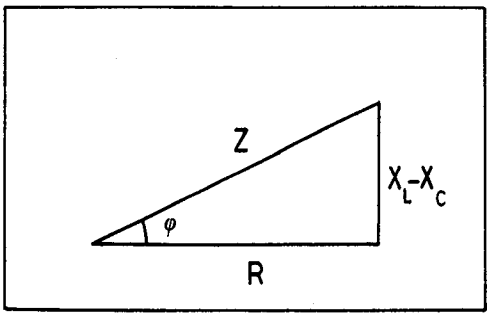

Egin dezagun magnitude hauen adierazpide fasoriala, $x_L > x_C$ suposaturik.

Eta hiru tentsioen arteko batuketa bektoriala eginez, alboko irudian agertzen den bezala geratzen zaigu adierazpide fasoriala.

Honelatan, ba, $E^2 = E_R^2 + (E_L - E_C)^2 = (IR)^2 + \left[(I\omega L)^2 - (\frac{I}{\omega C})^2\right]$

$$E = I\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\ .$$

Eta zirkuituaren inpedantzia: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ .

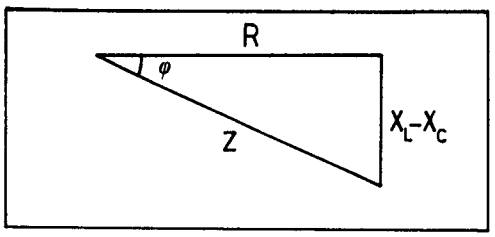



Desfaseari dagokionez,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \Rightarrow$$

$$\varphi = \operatorname{artg} \frac{X_L - X_C}{R} .$$

Kasu honetarako $X_L > X_C$ suposatu dugu, hauxe bait da korronte alternoko zirkuituetan gehienetan gertatzen dena. Hala ere, erreaktantzia kapazitiboa, induktiboa baino handiagoa izan daiteke kasuren batetan, inpedantzien triangelua, orduan, era honetan agertzen delarik.

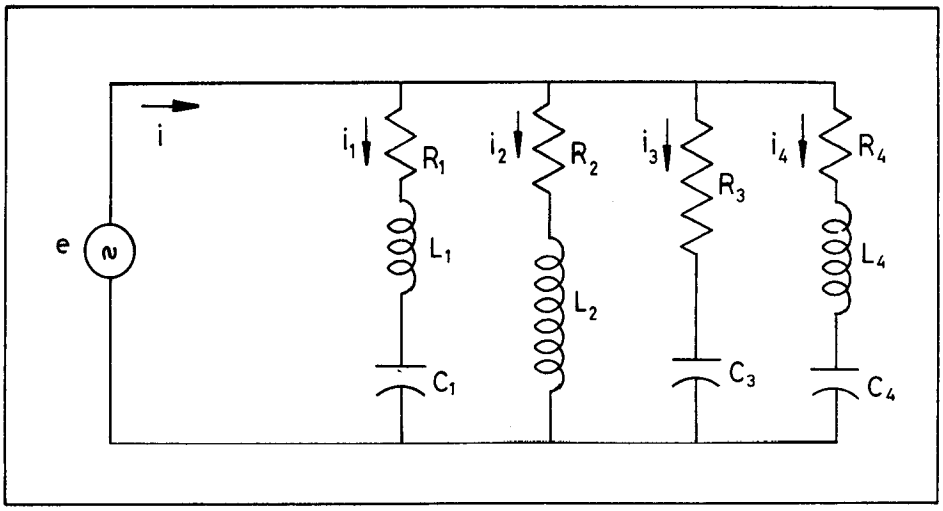



Edozein modutan ere, $X_L - X_C$ delakoari, zirkuituaren erreaktantzia netoa deritzo, X letraz adierazten dugularik, eta zirkuituaren inpedantzia: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Izatez, hauxe da serie-zirkuituaren inpedantziaren definizio orokorra, aurreko kasuetan ikusi ditugunak, azkenengo honen kasu partikularrak besterik ez direlarik.

Paralelo-zirkuituak

Demagun irudiko zirkuitua dugula.

Zirkuituaren adar bakoitza, R, R-L, R-C, L-C zein R-L-C serie-zirkuitua izan daiteke, inpedantziak, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, eta $Z_4$ direlarik.




Paralelo-konexioa izanik, adar guztietan, e tentsio alterno berbera ezarririk dago. Eta gauzak horrela, goazen adar bakoitzetik iragaten den intentsitatea kalkulatzera:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{E}{Z_2}, \quad I_3 = \frac{E}{Z_3}, \text{ eta } I_4 = \frac{E}{Z_4},$$

non $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ ..... eta $Z_4 = \sqrt{E_4^2 + X_4^2}$ diren.

Aurreko kasuetan ikusitakoaren arauera, intentsitate haueta riko bakoitzak, desfaseren bat izango du ezarritako tentsioarekiko.

$\varphi_1$: E eta $I_1$-ren arteko desfasea,

⋮

$\varphi_4$: E eta $I_4$-ren arteko desfasea.

Desfase-angeluen balioak honako hauek ditugu:

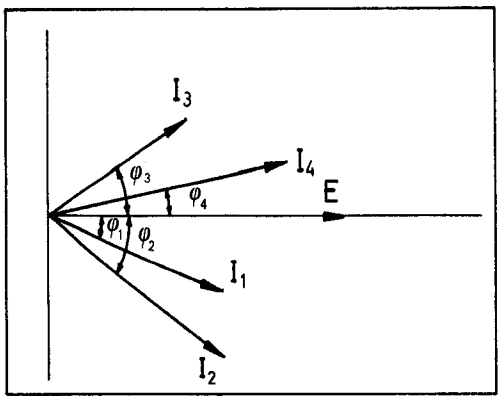
$$\varphi_1 = \text{artg}\,\frac{X_1}{R_1} = \text{artg}\,\frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{R_1},$$

⋮

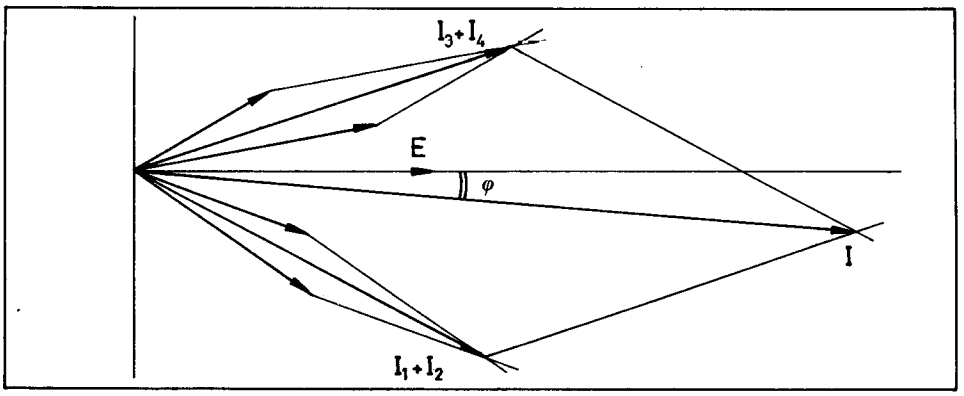
$$\varphi_3 = \text{artg}\,\frac{X_3}{R_3} = \text{artg}\,\frac{\frac{-1}{\omega C_3}}{R_3}\,,$$

$$\varphi_4 = \text{artg}\,\frac{X_4}{R_4} = \text{artg}\,\frac{\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4}}{R_4}\,.$$

Desfaseak kalkulatu eta gero, demagun, tentsioaren eta intentsitateen adierazpide fasoriala, alboko irudian azaltzen dugun erakoa dela.




Magnitude bektorialak izanik, bektorialki burutu beharko dugu beren arteko batuketa.




Beraz, I izango da zirkuitu osoari dagokion intentsitatea, tentsioarekiko desfasea $\varphi$ delarik.

Honaino heldu garelarik, azpimarratzekoa da adierazpen fasorialak aurkezten duen erosotasuna. Fasoreen bidez erraztasun

handiz adierazten ditugu funtzio sinusoidalak, beren arteko eragiketa bektorialak inolako oztoporik gabe burutzen ditugularik. Aitzitik, fasoreak erabili barik, sinusoideak irudikatu beharko bagenitu, oso zaila gertatuko litzateke, irudikapenari dagokionez, bai funtzioak berak adieraztea eta bai beren arteko eragiketak ere.

## 23.6. POTENTZIA

Tresna elektrikoetan, potentzia dugu parametro interesgarrienetakoa, garrantzitsua bait da alternadore batek horniturikо potentzia jakitea, edo motore batek zurgaturikoa edota irrati zein telebista-emisora batek igorritakoa eta abar.

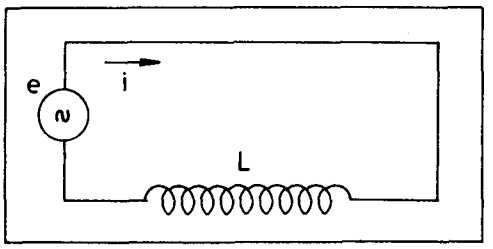
Dakigunez, zirkuitu elektriko batetan ezarritako tentsio alternoa denboraren funtzioa da. Halaber, bertatik iragaten den intentsitatea denboraren menpekoa dugu, beraren balioa, zirkuitua eratzen duten elementuen arauerakoa delarik.

Aldiune bakoitzeko tentsioaren eta intentsitatearen arteko biderkadurari, aldiuneko potentzia deritzo.

$$p = e.i \ .$$

Potentziak, balio positibo zein negatiboak har ditzake, kontsideratzen den aldiune edo denbora-tartearen arauerakoak, eta nolabait esatearren, esan dezagun, ezen, potentzia positiboak, iturritik—sorgailutik—sarerako energi transferentzia adierazten digula; potentzia negatiboak aldiz, saretik—zirkuitutik—sorgailurakoa.

Demagun, hasteko, zirkuituak autoindukzio hutsa daukala.




Zirkuitu honetan, $e = E_o \sin\omega t$ tentsio alternoa ezartzen dugu, bertatik iragaten den intentsitatea hauxe delarik: $i = I_o \sin(\omega t - \pi/2)$ .

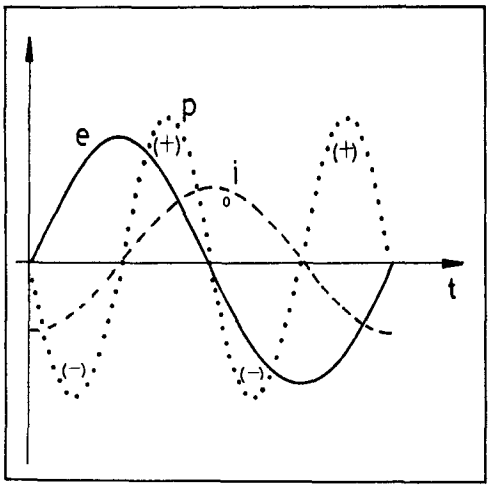
Aldiuneko potentzia ondokoa dugu:

$$p = e.i = E_o\ I_o \sin \omega t.\ \sin (\omega t - \pi/2).$$

Bestalde, $\begin{cases} \sin (\omega t - \pi/2) = - \cos t\ \omega t, \\ 2\sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t\ . \end{cases}$

Beraz, aurreko adierazpenean ordezkatuz:

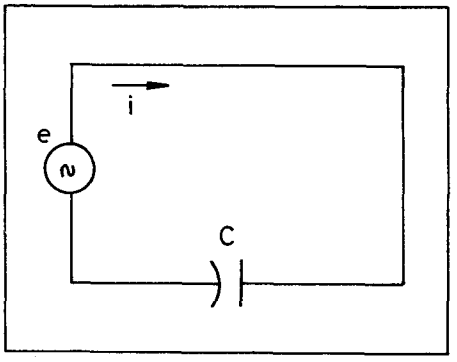
$$p = e.i = - \frac{1}{2} E_o\ I_o \sin 2\omega t\ .$$




Irudian ikusten denez, e eta i zeinu berekoak direnean, positiboa da potentzia, energi transferentzia iturritik harilerakoa delarik. Aitzitik, e eta i kontrako zeinukoak direnean, potentzia negatiboa da eta harilak itzuli egiten dio iturriari lehen beronek emandako potentzia.

Potentziaren maiztasuna, tentsio zein intentsitatearen maiztasunaren bikoitza da, eta zer esanik ez, ziklo-kopuru oso batetako batezbesteko balioa nulua da, erraz antzeman daitekeenez.

Zirkuituak, kondentsadore hutsa besterik ez baleuka, antzera gertatuko litzateke:

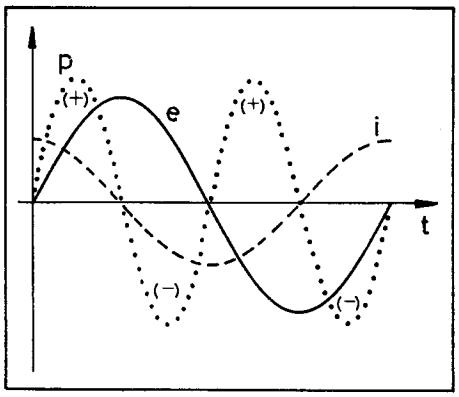



$$e = E_o \sin \omega t.$$

$$i = I_o \sin (\omega t + \pi/2) = I_o \cos \omega t.$$

Honelatan, bada, $p = e.i = E_o\ I_o \sin\omega t \cos\omega t =$

$$= \frac{1}{2} E_o\ I_o \sin 2\omega t\ .$$



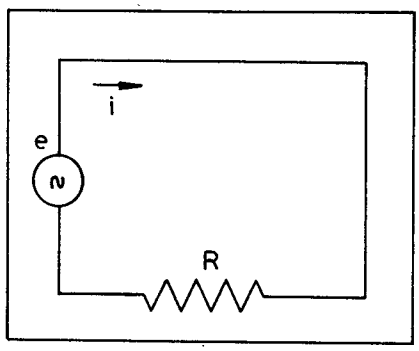

Kasu honetan ere, e eta i zeinu berekoak direnean, positiboa da potentzia, energi transferentzia iturritik kondentsadorerakoa delarik, hots, kondentsadorea kargatu egiten da.

e eta i kontrako zeinukoak badira, ordea, potentzia negatiboa da. Honek kondentsadorea deskargatu egiten dela adierazten digu, kargaldian hartutako energia, iturrira itzultzen duelarik.

Aurreko kasuan agertzen den legez, potentziaren maiztasuna, tentsio eta intentsitatearen maiztasunaren bikoitza da; eta ziklo-kopuru oso batetarako beraren batezbesteko balioa nulua dugu.

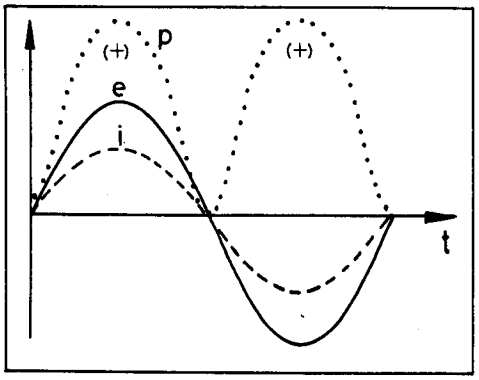
Demagun, orain, erresistentzia hutsa daukan alboko zirkuitua dugula:

$$e = E_o \sin \omega t$$




Dakigunez, kasu honetan ez dago tentsioaren eta intentsitatearen arteko desfaserik. Beraz, $i = I_o \sin \omega t$ .

Eta potentzia, $p = e.i = E_o\ I_o \sin^2\omega t$ .




Erresistentzia baino ez daukan zirkuito honi gagozkiolarik, potentziaren balioa beti da positiboa, eta aurreko kasuetan ez bezala, hemen ba dauka zentzua batezbesteko balioaz berba egiteak.

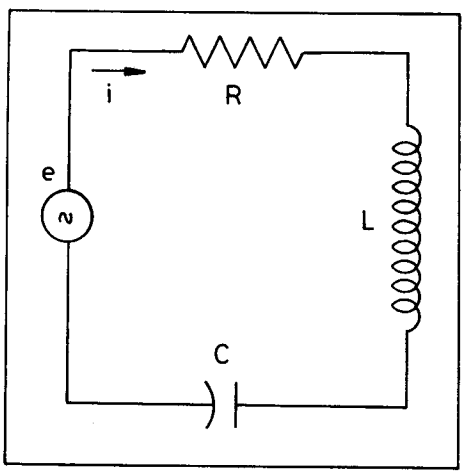
Aipaturik dago jadanik, funtzio periodiko baten batezbesteko balioa ematen digun adierazpena, potentziaren kasurakoa hauxe delarik:

$$P = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} p\,dt.$$

Bestalde, $p = E_o\ I_o\ \sin^2 \omega t$ izanik,

$$P = \frac{1}{T}\int_{o}^{T} E_o\ I_o\ \sin^2 \omega t = \frac{E_o\ I_o}{2}\ .$$

Eta potentziaren atalari amaiera emateko, kontsidera dezagun zirkuitu orokorraren kasua.




$e = E_o \sin \omega t$ tentsio alternoa ezartzean, orokorrean, $i = I_o \sin (\omega t + \varphi)$ motako intentsitatea izango dugu.

$\varphi$ desfase-angelua, positiboa zein negatiboa izan daiteke, zirkuituaren izaera induktibo ala kapazitiboaren arauera.

Ondokoa dugu potentzia:

$$p = E_o\ I_o\ \sin \omega t.\ \sin\ (\omega t + \varphi)\ ,$$

Bestalde, $\sin \alpha .\ \sin \beta = \frac{1}{2}\ [\cos\ (\alpha - \beta) - \cos\ (\alpha + \beta)]$

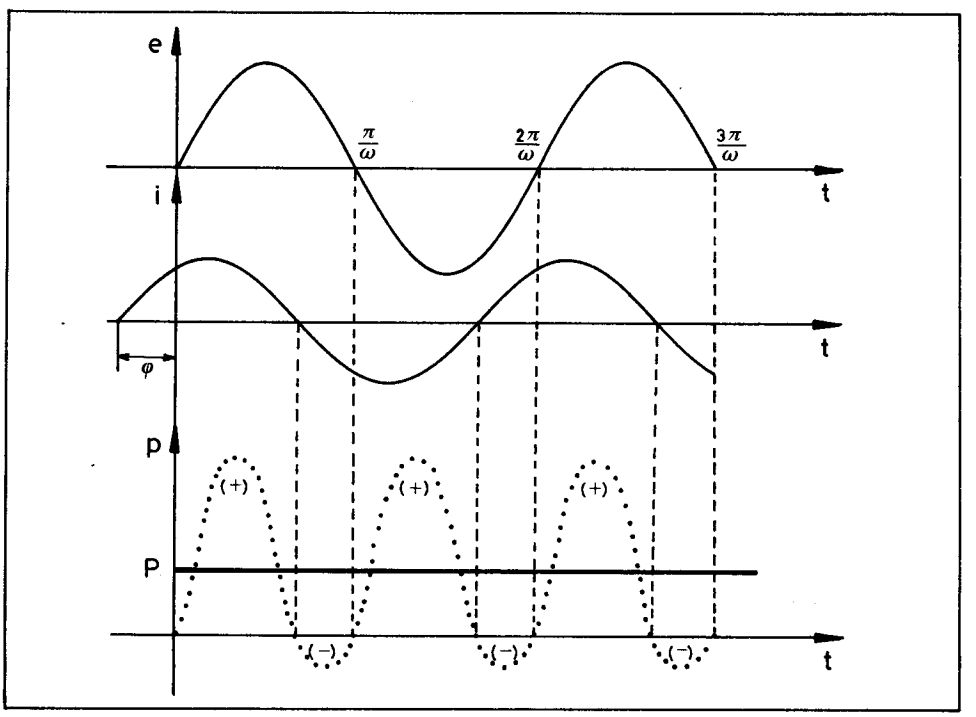
eta

$$\cos\ (-\alpha) = \cos \alpha .$$

Beraz, arestiko erlazioak kontutan hartuz eta dagokion garapen matematikoa burutuz, potentziaren adierazpena honako era honetan geratzen zaigu:

$$p = \frac{1}{2}\ E_o\ I_o\ [\cos \varphi - \cos(2\ \omega\ t + \varphi)]$$

Argi dagoenez, aldiuneko potentzia gai bik osoturik dago: bata kosinoidala, $-\frac{1}{2}\ E_o\ I_o \cos\ (2\ \omega\ t + \varphi)$ zeinaren batezbesteko balioa nulua den, eta bestea, konstantea den $\frac{1}{2}\ E_o\ I_o \cos \varphi$ .



Baldintza hauetan, potentziaren batezbesteko balioa edo potentzia eraginkorra ere deiturikoa $P = \frac{1}{2} E_o I_o \cos\varphi$ da.

Bestalde, balio efikazak hartzen baditugu:

$$E = \frac{E_o}{\sqrt{2}} \quad \text{eta} \quad I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} E_o = E\sqrt{2} \\ I_o = I\sqrt{2} \end{cases}$$

eta potentziaren adierazpenean ordezkatuz,

$$P = \frac{1}{2} E \sqrt{2} . \quad I\sqrt{2} \cos\varphi = E\ I \cos\varphi .$$

Cos $\varphi$ delakoari, potentzi faktorea deritzo, eta esan beharrik ez dago, tentsioaren eta intentsitatearen arteko desfase--angeluaren kosinua da.

M.K.S.A. sisteman, watt-a (W) dugu potentzia eraginkorraren unitatea, beraren anizkoitza bezala kilowatt-a (kW) erabiltzen delarik. 1kW = 1000 W.

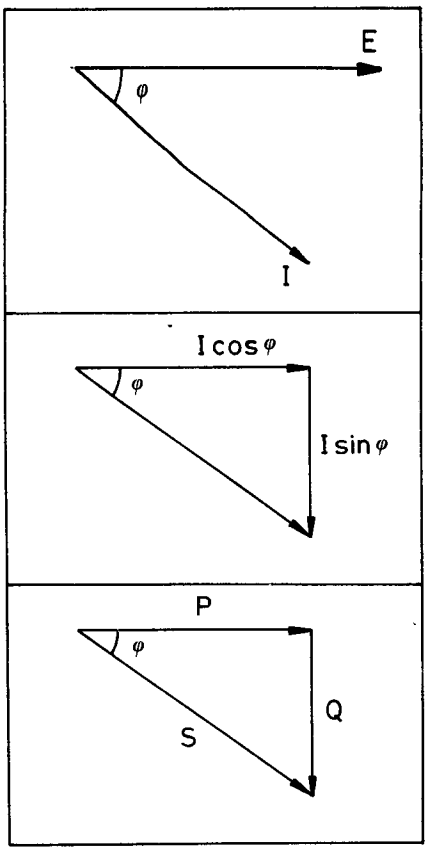
Dena dela, korronte alternoko zirkuituetan beste zenbait potentzi mota aipatzen dira, hara nola, itxurazko potentzia eta potentzia erreaktiboa.

E.I biderkadurari itxurazko potentzia deritzo, S letraz adierazten dugularik: S = E I. M.K.S.A. sistemari dagokiola, voltamperea (VA) dugu beraren unitatea, gehien erabilitako anizkoitza kilovoltamperea delarik. 1kVA = 1000 VA. Berau, kabea izenaz ere izendatzen dugu.

Bestalde, E. I sin $\varphi$ delakoari potentzia erreaktiboa deritzo, Q letraz adierazten delarik. Potentzi mota honi dagokion unitatea voltampere erreaktiboa (VAR) da, beraren anizkoitzik erabiliena kilovoltampere erreaktiboa (kVAR) izanik.

Eta, inpedantziak direla eta egin dugun era berean, hiru potentzien arteko erlazioak geometrikoki adieraz daitezke potentzien triangeluaren bidez.

Demagun zirkuitu induktiboa dugula, non korrontearen intentsitatea tentsioarekiko $\varphi$ angelua atzeraturik dagoen.

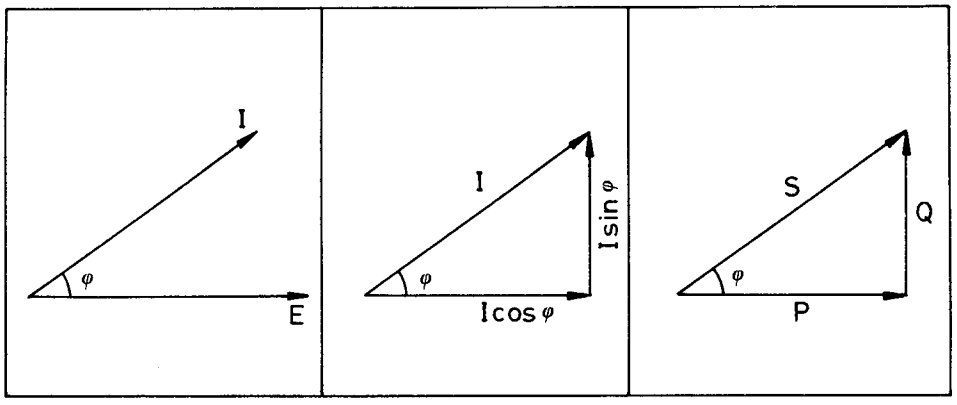



Tentsioa erreferentziatzat harturik, albokoa izango da beren adierazpide fasoriala.

Intentsitatea, osagai bitan deskonposatuko dugu: bata, osagai eraginkorra, zeina fasean dagoen tentsioarekiko (I cos $\varphi$), eta bestea, osagai erreaktiboa, tentsioarekiko koadraturan dagoena (I sin $\varphi$).

Orain, triangeluaren hiru aldeak E tentsioaz biderkatzean, potentzien triangelua deiturikoa daukagu.

Bestalde, zirkuitua kapazitiboa izatekotan, non intentsitatea tentsioarekiko aurreraturik dagoen, ondoko itxura honetakoa da triangelua.



Nolanahi ere, eta $\varphi$ angeluaren zeinua edozein motatakoa delarik, hauxe da betetzen den erlazioa:

$$S^2 = P^2 + Q^2 .$$

Azkenez, eta laburpen modura, ondoko kontzeptu hauek aipa ditzagun:

- Potentzia eraginkorra = P = tentsioa x intentsitatearen osagai eraginkorra = $E\ I \cos\varphi = RI^2 = \frac{E_R^{\ 2}}{R}$ .

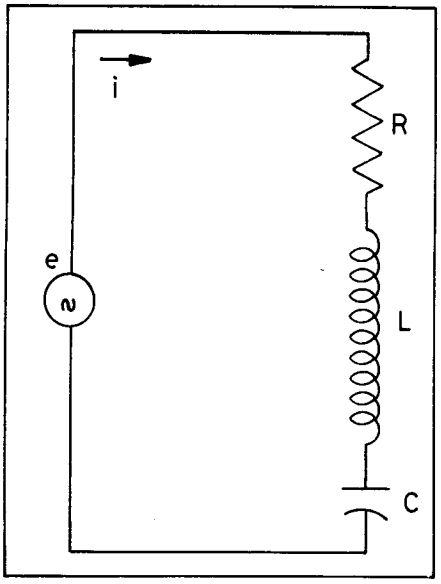
- Potentzia erreaktiboa = Q = tentsioa x intentsitatearen osagai erreaktiboa = $E\ I \sin\varphi = XI^2 = \frac{E_X^{\ 2}}{X}$.

- Itxurazko potentzia = S = tentsioa x intentsitatea = $= EI = ZI^2 = \frac{E^2}{Z}$ .

- Potentzi faktorea = $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$ .

Halaber, ezin dezakegu aipatzeke utz, ezen, orain arte egindako magnitude sinusoidal hauen azterketak, beste baliabide matematiko baliokide bat onartzen duela, zenbaki konplexuen bidezkoa alegia. Dena den, textu hau Fisika Orokorrekoa izanik, nahikoa deritzogu erabilitako erreminta matematikoari.

## 23.7. ERRESONANTZIA




Demagun, irudiko zirkuitua dugula. Dakigunez, R-L-C zirkuitu honen inpedantzia, pultsazioa edo maiztasunaren menpekoa da.

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2} \ .$$

Maiztasun konkretu batetarako, hauxe gerta daiteke: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ .

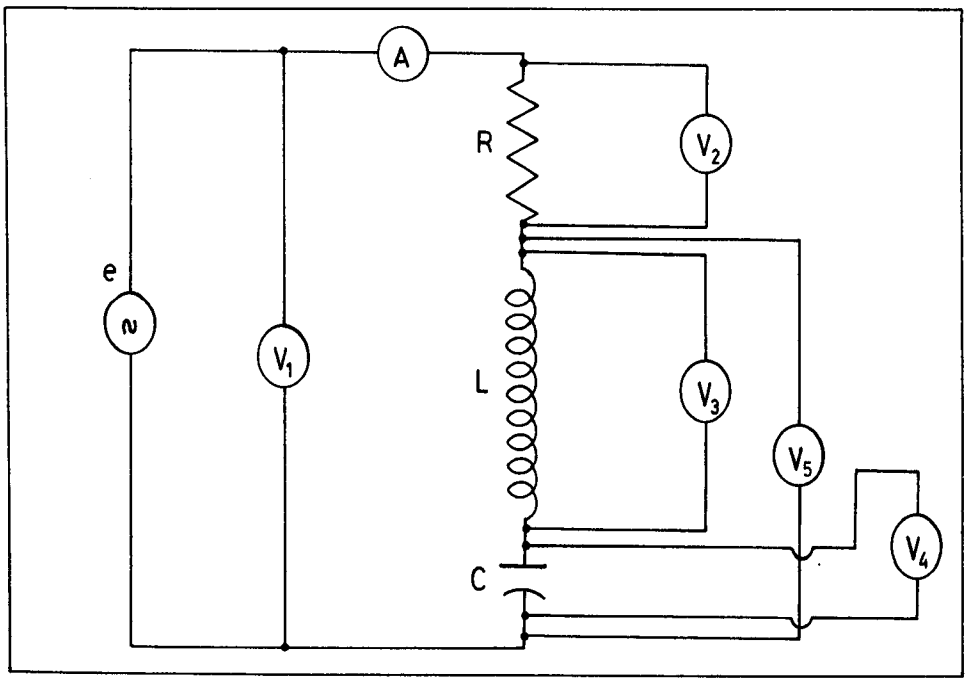
Beraz, $2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \Longrightarrow f^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$

eta $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_o$ .

Maiztasun honi, erresonantzi maiztasuna deritzo, baldintza hauetan, $X = X_L - X_C$ zirkuituaren erreaktantzia nulua delarik. Hau dela eta, intentsitate maximoa da: $I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{R}$. Kasu honetan zirkuitua erresonantea dela esaten dugu, eta $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{Z} = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \Longrightarrow \cos\varphi = 1$, beronen ondorioz, sorgailutik zirkuiturako energi transferentzia maximoa izanik. Hortaz, potentzia eragin korraren balioa maximoa dugu, $P = E\ I$, potentzia erreaktiboa nulua den bitartean.

Zirkuitu erresonanteari emandako gainbegirada teorikoa bukatzeko, diogun, ezen gai honek zerikusi handia daukala 15. kapituluan ikusitako oszilazio bortxatuen erresonantziarekin. Izan ere, korronte alternoko zirkuituak sistema bibrakorrak besterik ez dira funts-funtsean, non oszilazioak pairatzen dituzten partikulak elektroiak diren. Beraz, arestian aztertu dugun erresonantzia elektrikoa, aipaturiko atalean ikusi genuen energi erresonantzia orokorraren aplikazio partikularra da.

Erresonantzi egoeraren azalpen praktikoa burutzeko asmoz, azter dezagun segidan datorren zirkuituan gertatzen dena.




Demagun, e-ren balio efikaza 220 volta dela, maiztasun jakin batetarako $X_L = X_C = 1000\Omega$ izanik. Suposa dezagun, halaber, $R = 440\ \Omega$ . Zer adieraziko digu A amperemetroak? Zeintzu izango dira $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ eta $V_5$ voltimetroek adieraziko dizkiguten tentsioak? Hara!

$X_L$ eta $X_C$ balio berekoak direnez,

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = R \ .$$

Beraz, A amperemetroak adieraziko duena hauxe da:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{220}{440} = 0'5 \text{ ampère.}$$

Zer esanik ez, $V_1$ voltimetroak, sorgailuaren borneen arteko tentsioa neurtuko du, edo gauza bera dena, zirkuituan ezarritako tentsioa, hau da, 220 volta.

Eta erresistentzian konektaturiko $V_2$ voltimetroak?

$$E_R = I\ R = 0'5 \times 440 = 220 \text{ volta.}$$

Eta $V_3$ voltimetroak?

$$E_L = I\ X_L = 0'5 \cdot 1000 = 500 \text{ volta.}$$

Eta $V_4$ voltimetroak?

$$E_C = I\ X_E = 0'5 \cdot 1000 = 500 \text{ volta.}$$

Eta $V_5$ voltimetroak?

$$E_{LC} = I\ (x_L - x_C) = 0. \text{ Ez du ezer adierazten.}$$

Honen azalpena hauxe da: erreaktantzia induktiboa eta kapazitiboa berdinak izanik, autoindukzioan eta kondentsadorean ematen diren tentsio-erorketak, balio berekoak izateaz gain, 180° edo $\pi$ radian desfasaturik daude beren artean, hots, bien erresultantea nulua da. Beraz, $V_3$ eta $V_4$ voltimetroek 500 voltatako tentsioa adierazten duten arren, $V_5$-ren gaineko irakurketa nulua dugu.

## 23.8. TRANSFORMADOREA

Gaiaren hasieran transformadorea aipatu dugularik, azter dezagun, azaletik bada ere, makina elektriko hau zertan datzan.

Transformadorea, funtsean, burdinezko nukleoaren inguruan harilkaturiko eta elkarren artean isolaturiko bi harilkatutan datza. Harilkatu bietariko batetan zehar iragaten den korronte elektriko alternoak, fluxu alternoa sorterazten du nukleoak eratzen duen zirkuitu magnetikoan, eta fluxuak induzituriko eremu elektrikoak, indar elektroeragilea sorterazten du beste harilkatuan.

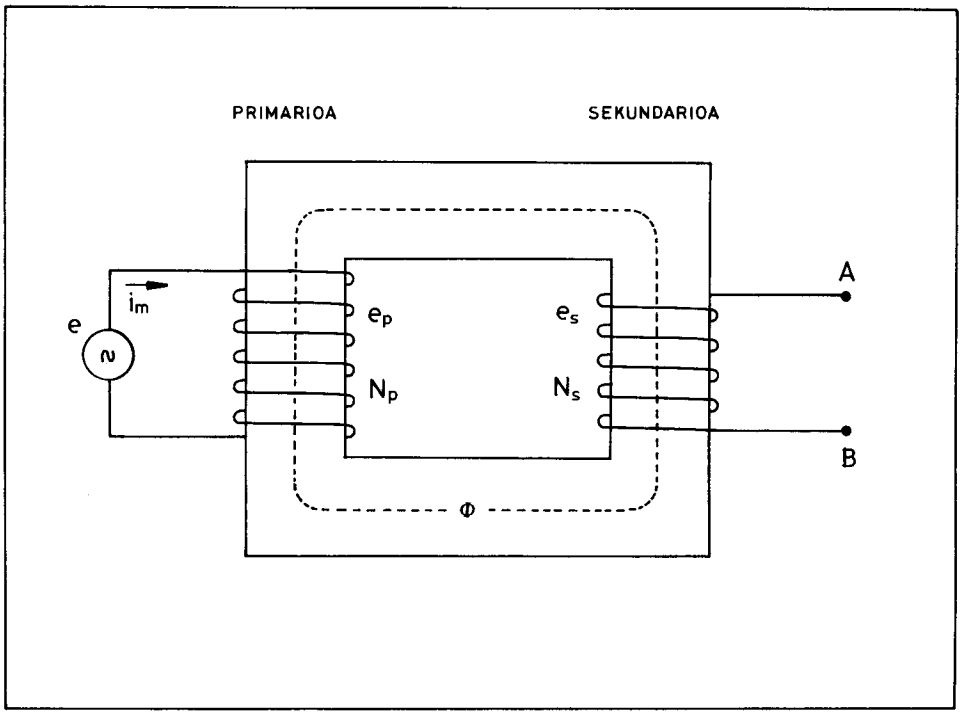
Beraz, harilkatu batetik besterako energi transmisioa ematen da, bai fluxuaren bitartez zein beroni loturiko eremu elek-

triko induzituaren bidez.

Energia ematen zaion harilkatuari, primarioa deritzo, bestea, zeinetik energia jasotzen dugun, sekundarioa deitzen delarik.

Transformadoretik jasotako potentzia, zer esanik ez, emandakoa baino txikiagoa da, zenbait potentzi galera gertatzen bait dira, hala nola, harilkatu primario eta sekundarioko harian azaltzen diren Joule efektuagatiko galerak ($I^2R$), kobreko galerak ere deiturikoak, eta nukleoan ematen direnak, bai histeresiagatikoak eta bai Foucoault-en korronteek sorterazikoak ere. Aipaturiko galera guztiak kontutan harturik ere, makina elektriko hauen etekina oso handia izaten da, 90%-a baino handiagoa, zenbait kasutan 99%-ra irits daitekeelarik.

Transformadorearen funtsa azaldu ahal izateko, kontsidera dezagun transformadore ideala, non inolako galerarik ez dagoen.



$N_p$ eta $N_s$, primario eta sekundarioaren espira-kopuruak dira hurrenez hurren. Primarioan, e tentsio alternoa ezartzean, bertatik iragaten den $i_m$ korronteak, burdinaren imantazioa sorterazten du.

Hau dela eta, nukleoan zehar finkatzen den $\Phi$ fluxu alternoak $e_p$ indar kontraelektroeragilea induzituko du primarioan, beraren balioa $e_p = - N_p \frac{d\Phi}{dt}$ delarik, Faraday-ren legearen arauera. Era berean, eta burdinaren iragazkortasun handia dela medio, primarioan zehar iragaten den fluxua bera, sekundarioan zehar ere iraganen da, bertan $e_s$ indar elektroeragilea induziturik. Sekundarioan ere, $e_s = - N_s \frac{d\Phi}{dt}$ .

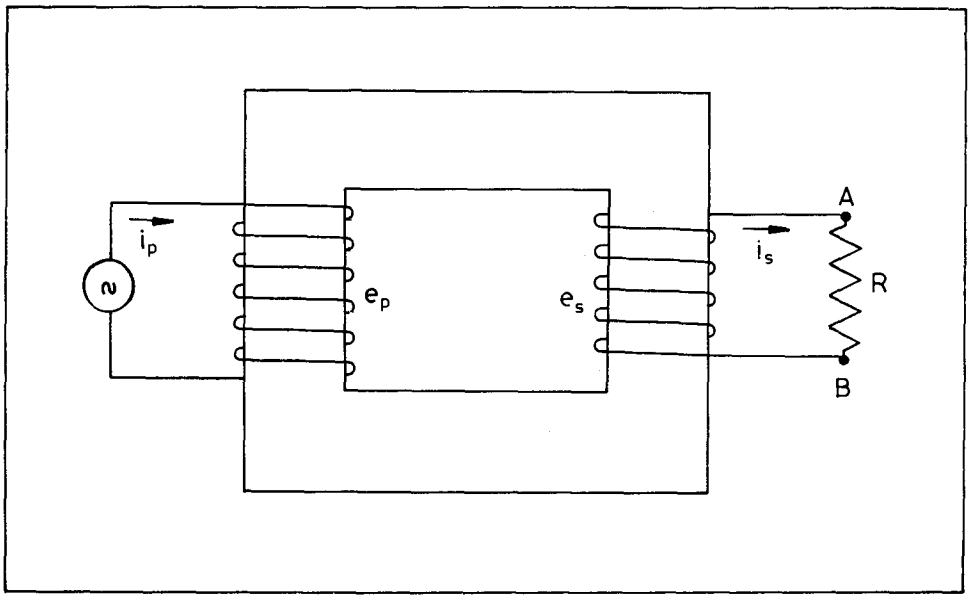
Beraz, aurreko bi adierazpenak elkarren artean zatituz,

$$\frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

Honek adierazten digu, ezen $\frac{N_p}{N_s}$ erlazioa era egokian aukeratuz gero, sekundarioko tentsioa, primariokoaren anizkoitza zein zatitzailea izan daitekeela, erlazio honi transformazio-erlazioa deritzolarik. Hau dela eta, baldin $N_s > N_p \Rightarrow e_s > e_p$, eta mota honetako transformadorea <u>jasotzailea</u> deitzen da. Alderantziz, $N_p > N_s \Rightarrow e_s < e_p$, kasu honetan transformadore <u>eraistailea</u> dugularik.

Demagun, orain A eta B borneen artean R erresistentzia ipintzen dugula.

Sekundarioko zirkuitua itxita egonik, $i_s$ intentsitatea iraganen da bertatik; primariokoa $i_m$ izatetik $i_p$ izatera heltzen da, beronen arrazoia segidan ematen dela: karga-egoeran, fluxua, aurkako norantzako fluxu biren erresultantea da, bata, primarioari eta bestea sekundarioari dagokiona izanik. Orain, sekundarioko korrontea emendatzen badugu —eta hauxe da, hain zuzen, erresistentzia ipintzean egin duguna, korrontea nulua izatetik $i_s$ izatera iritsi bait da— dagokion fluxua ere emendatuko da.




Hortaz, fluxu erresultantea aldaezina izan dadin, beharrezkoa da primarioko korronteak sorterazitako fluxua handiagoa izatea, eta ondorioz korrontearen intentsitatea ere. Beraz, $i_p > i_m$ .

Bestalde, transformadorea berez energi iturria ez izanik, eta lehen esan dugun bezala, inolako galerarik ez dagoela suposaturik, argi dago, ezen, primariotik sarturiko potentzia sekundarioan erabilitakoaren berdina dela. Honetan, bada, $e_p . i_p = e_s . i_s$.

Baldintza hau, edozein aldiunetan bete beharrekoa delarik, balio efikazetarako ere beteko da.

Orduan, $E_p I_p \cos \varphi_1 = E_s I_s \cos \varphi_2$. Transformadore idealean, $\varphi_1 \simeq \varphi_2 \simeq 0°$; hortaz:

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s} .$$

Adierazpen honek erakusten digunez, tentsioen balioak espira-kopuruekiko erlazio zuzenean daude, intentsitateenak, aldiz, aurkakoan.

## Azken oharra

Orain arte idatzitako guztia, zirkuituen erregimen iraunkorrari buruzkoa izan da. Dena dela, honetaz gain, erregimen iragankorra deiturikoa gertatzen da zirkuituetan, korrontea ezartzeko eta kentzeko aldiuneetan. Beronek, garapen matematiko berezia eskatzen duelarik, gure ustez, Elektrotekniaren arloari dagokio fenomeno iragankorren azterketa. Honexegatik, textu honetan ez dugu inolako aipamenik egin.

## 24. GAIA: UHIN ELEKTROMAGNETIKOAK

24.1. Uhin elektromagnetiko launak

24.2. Uhin elektromagnetikoen energia eta momentua. Poynting-en bektorea

24.3. Erradiazio elektromagnetikoen sorkuntza

24.3.1. Karga azeleratuaren erradiazioa

24.3.2. Dipolo elektriko oszilakorren erradiazioa

24.3.3. Antena baten bidez sorturiko erradiazio elektromagnetikoa

24.4. Compton efektua. Fotoiak

24.5. Erradiazio elektromagnetikoaren espektroa.

XIX. mendearen lehenengo erdian fisikariek magnitude elektriko eta magnetikoen azterketa egin ondoren, 1864. urtean Maxwell-ek, arrazonamendu teorikoen bidez, perturbazio elektrikoa argiaren abiaduraz hedatu behar zela frogatu zuen eta, horrela, argi-uhinak uhin elektromagnetikoak zirela postulatu zuen.

Handik urte batzutara, 1887. urtean hain zuzen, Hertz fisikari alemanak sortu egin zituen uhin elektromagnetikoak zirkuitu oszilatzaileen bidez eta, gainera, maiztasun berberera sintonizaturik zeuden beste zirkuitu batzutan detektatu zituen. Uhin elektromagnetiko geldikorrak lortu zituen eta elkarren ondoko nodoen arteko distantzia neurtuz, uhin-luzera neurtu zuen; eta bestalde erresonagailuen maiztasuna ezagutzen zuenez, uhinen hedapen-abiadura lortu ahal izan zuen, horrela Maxwell-ek teorikoki lorturiko emaitza konprobatuz.

Ordutik aurrera uhin elektromagnetikoen azterketa biziki garatu zen, eta Marconi-ren lanaren ondoren komunikabideetarako oinarri bihurtu ziren.

Gai honetan uhin elektromagnetikoen sorketa eta esangura fisikoa aztertuko dugu, halaber maiztasun desberdinetako uhinen ezaugarriak aipatuz, baina beren erabilera praktikoan sartu gabe.

## 24.1. UHIN ELEKTROMAGNETIKO LAUNAK

Uhin elektromagnetikoen hedapenaren azterketa egiteko kasu konkretu bat hartuko dugu adibide gisa. Maxwell-en ekuazioek hutsean eta ez kargarik ez korronterik dagoen espazioalde batetan duten ebazpen berezi batez arituko gara. Eremu elektromagnetiko aldakorrak aztertzean ikusi genuenez, baldintza horietan ondokoak dira Maxwell-en ekuazioak era integralean idatzita:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \ .$$

Ekuazio horiek era diferentzialean ere eman ditzakegu eta orduan honela agertzen dira:

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ .$$

Ekuazio hauen ebazpen partikular bat aztertuko dugu, hain zuzen, eremu elektrikoa eta eremu magnetikoa elkarren perpendikularrak diren kasu batetan. Jo dezagun, ba, eremu elektrikoa OY ardatzaren norabidekoa dela eta eremu magnetikoa OZ ardatzaren norabidekoa. Orduan:

$$E_x = 0 \qquad E_y = E \qquad E_z = 0$$

$$B_x = 0 \qquad B_y = 0 \qquad B_z = B \ .$$

Kasu horretan honela geratzen zaizkigu Maxwell-en ekuazioak:

$$\text{div } \vec{E} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial x} = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial y} = 0 \\[2ex] -\dfrac{\partial B}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

Argi ikusten denez, aurreko ekuazioen arauera, $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ eremuek x eta t aldagaien menpekotasuna dute soilik eta aldiune bakoitzean balio berbera dute OX ardatzaren perpendikularra den edozein planotako puntu guztietan. Bestalde, ekuazio hauen bidez $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ eremuek x eta t aldagaien arauera duten aldakuntza ere azter dezakegu. Hain zuzen, (i) ekuazioa x aldagaiarekiko deribatuz:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} ,$$

eta (ii) ekuazioa denborarekiko deribatuz:

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} ,$$

eta azkenean, bi adierazpen horiek konbinatuz, ondoko emaitza lortzen dugu:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} .$$

Hots, eremu elektrikoaren aldakuntza espazio-denborala, E(x,t), uhinen ekuazio diferentzialari dagokion berbera da (ikus 16.1 atala). Honek esan nahi du, eremu elektrikoa OX ardatzaren norabidean hedatzen dela, eta, gainera, ondoko abiaduraz:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} .$$

Prezeski, $\varepsilon_0$-ren eta $\mu_0$-ren balioak ordezkatuz,

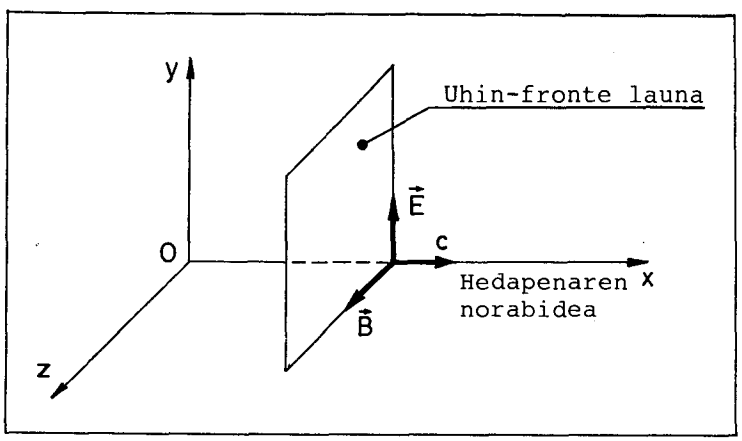
$$c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

lortzen da, argiak hutsean duen abiadura alegia.

Bestalde, antzerako bideari jarraituz, ondokoa ere lor dezakegu:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad ,$$

hots, eremu magnetikoaren hedapena ere modu berean gertatzen da. Labur esanda, bai eremu elektrikoa eta bai eremu magnetikoa OX ardatzaren norabidean argiaren abiaduraz hedatzen diren zeharkako uhinak dira, eta, beraz, alboko irudian datorren bezala adieraz daitezke grafikoki.




Analitikoki:

$$\begin{cases} E = f_1 (x - ct) \\ B = f_2 (x - ct) \end{cases} .$$

Arazoa gehiago zehazteko, uhin harmonikoen kasua aztertuko dugu. Orduan,

$$\begin{cases} E = E_0 \sin k\,(x - ct) = E_0 \sin (kx - \omega t) \\ B = B_0 \sin k\,(x - ct) = B_0 \sin (kx - \omega t) \end{cases}$$

Ikusiko dugunez, kasu honetan $E_0$ eta $B_0$ anplitudeak ez dira elkarren independenteak, zeren eta, azken batez, eremuek Maxwell-en ekuazioak bete behar bait dituzte. Adibidez, (i) ekuaziotik

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

denez, eta bestetik

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = k\, E_0 \cos (kx - \omega t) \\ - \frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_0 \cos (kx - \omega t) \end{cases}$$

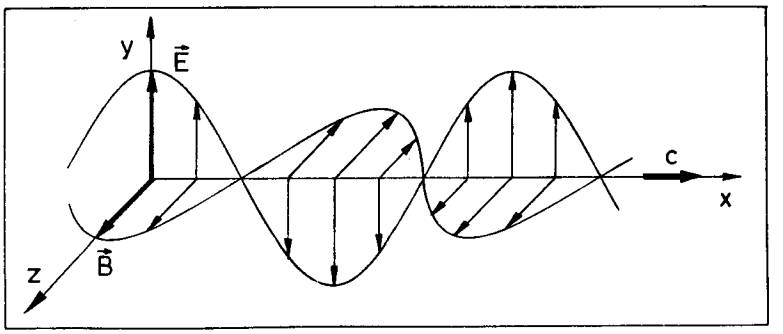
izanik, azkenean hauxe geratzen zaigu:

$$E_0 = c\, B_0 \quad .$$

Izatez, erlazio hau ez da soilik anplitudeekin betetzen, aldiuneko balioekin ere baizik, hau da:

$$E = c\, B \quad .$$

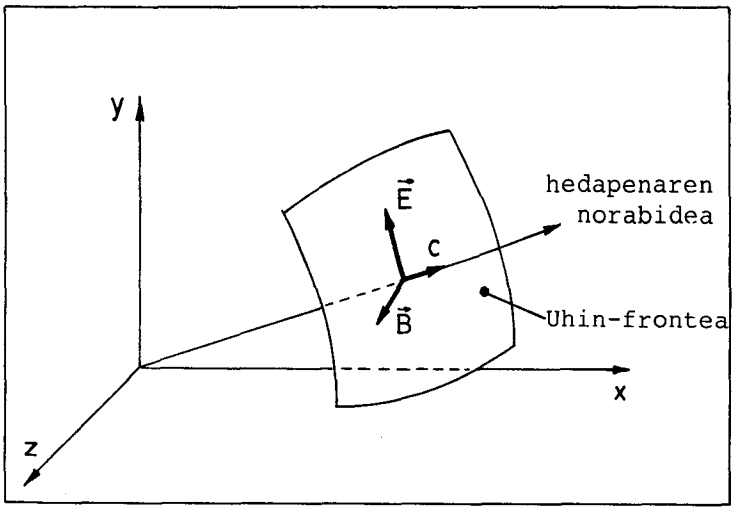
Denetara, adierazpen honek eremu bien arteko harreman estua agertzen digu, eta harreman hori argi ikusten da grafikoki, uhin elektromagnetiko launaren itxura adierazten duen hurrengo irudian.



Bertan ageri denez, $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ eremuak fasean daude eta hedapenaren abiaduraren perpendikularrak diren norabideetan aldatzen dira, hots, zeharkako uhinak dira.

Bestalde, irudiko kasu horretan $\vec{E}$ eremua etengabe dago XOY planoan eta $\vec{B}$ eremua XOZ planoan, horregatik, uhina linealki polarizaturik dagoela esan dezakegularik.

Dena den, aurreko lerroetan azterturikoa ez da Maxwell-en ekuazioen ebazpen bakarra. Uhin launez gainera, problemaren simetriaren arauera, uhin zilindriko edo esferikoak eta bestelakoak ere lor ditzakegu. Edozertara, uhin elektromagnetikoen




ituritik urrun samar dauden puntuetan, uhin zilindriko edo esferikoen parte txikia uhin launtzat har daiteke, alboko irudian ikus daitekeen bezala, eta orduan eremu elektriko eta eremu magnetikoa uhin launen kasuan legez azter daitezke.

Labur esanda, froga daitekeenez, uhin elektromagnetikoak zeharkakoak dira eta puntu bakoitzean $\vec{E}$ eta $\vec{B}$ eremuak elkarren perpendikularrak dira, eta halaber, hedapen-abiaduraren norabidearen perpendikularrak.

## 24.2. UHIN ELEKTROMAGNETIKOEN ENERGIA ETA MOMENTUA. POYNTING-EN BEKTOREA.

Eremu elektromagnetiko aldakorrak aztertzean ikusi genuen legez, energia elektromagnetikoaren dentsitatea honela adieraz dezakegu:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\,B^2 \quad .$$

Bestetik, aurreko atalean uhin elektromagnetiko launak aztertzean $E = cB$ dela ikusi dugunez, eta $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$ delarik, hauxe lortzen dugu:

$$U = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 + \frac{\varepsilon_0\,\mu_0}{2\mu_0}\,E^2 = \varepsilon_0\,E^2 \,.$$

Uhinei buruzko gaian uhinen intentsitatea definitzean (16.5. atala) ondoko emaitza lortu genuen uhin mekanikoen kasuan, denbora-unitatean hedapenaren norabidearen perpendikularra den azalera-unitateko pasatzen den energiarako:

$$I = U\,v \quad .$$

Beraz, analogiaz, uhin elektromagnetikoen kasuan honela adieraz dezakegu intentsitatea:

$$I = U\,c = c\,\varepsilon_0\,E^2 \,.$$

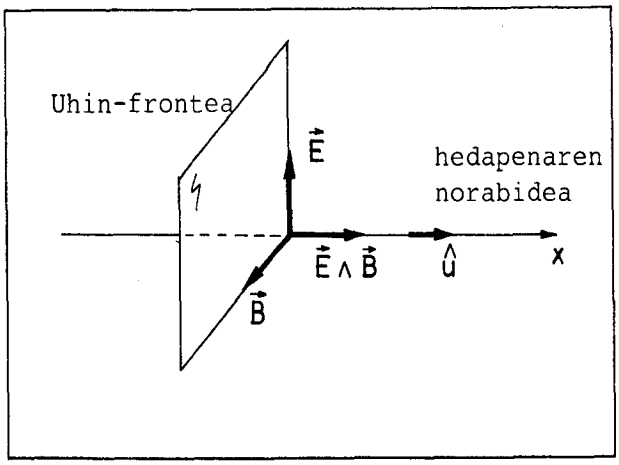
Aurreko balioa aldiune bakoitzari dagokio eta, ondorioz, denborarekiko batezbesteko balioa era honetara eman dezakegu:

$$\bar{I} = c\,\varepsilon_0\,\overline{E^2} \quad .$$

Emaitza hau uhin harmonikoen kasurako konkretatuko dugu, hots, $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$ denerako. Eta sinu karratu funtzioaren batezbestekoa $\frac{1}{2}$ dela kontutan hartuz:

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\,c\,\varepsilon_0\,E_0^2 \quad .$$

Uhin elektromagnetikoaren intentsitatearen adierazpenean finkatuz, esangura handiko bektore bat definituko dugu. Hasteko, ikus dezagun zer nolakoa den $\vec{E} \wedge \vec{B}$ biderkadura uhin elektromagnetiko launen kasuan. Irudian ikusten denez, $\vec{E} \wedge \vec{B}$ bektorearen




norabidea eta norantza uhinaren hedapenari dagozkionak dira, eta beraren modulua:

$$|\vec{E} \wedge \vec{B}| = EB = \frac{1}{c} E^2 .$$

Beraz,

$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

bektoreak intentsitatearen modulua du puntu eta aldiune bakoitzean eta uhinaren hedapen-norabidea du. Bektore honi <u>Poynting--en bektorea</u> deritzo eta energi fluxuaren intentsitatea adierazten du. Denetara, S gainazal batetan zehar denbora-unitatean pasatzen den energia ondokoa da:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \iint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = \iint_S c^2 \varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} .$$

Energiari buruzko aipamena egin ondoren, goazen orain momentu linealaren azterketa egitera. Uhin mekanikoen kasuan argi ikusi genuen higidurarekin batera momentua ere ba zela. Oraingoan arazoa ez da berbera, materiaren higidurarik ez bait dago, edo, bestela esanda, uhin hauetan duguna eremu elektriko eta

magnetikoaren aldakuntza besterik ez bait da. Dena den, hemen azalduko ez dugun erlatibitatearen teoriaren arauera, energia eta momentua elkarrekin erlazionaturik daudela ba dakigu, eta, prezeski c abiadurarekin hedatzen denez, beraren momentu linea-la honela adieraz daiteke energiaren bidez:

$$P = \frac{\mathcal{E}}{c} \quad .$$

Honen arauera, uhin elektromagnetikoaren kasuan bolumen--unitateko energia zein den kontutan hartuz, ondokoa izango da bolumen-unitateko momentu lineala:

$$p = \frac{U}{c} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c} = \varepsilon_0 \, |\vec{E} \wedge \vec{B}| \quad ,$$

eta momentu linealak hedapen-abiaduraren norabidea duela kontsideraturik, bektorialki honela adieraziko dugu bolumen-unitateko momentu lizeala Poynting-en bektorearen bidez:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \, \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\mathcal{S}} \, .$$

Bestalde, orain arte momentu lineala aztertu dugu soilik, baina, modu berean, puntu batekiko momentu angeluarra ere kalkula dezakegu:

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \varepsilon_0 \, \vec{r} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{r} \wedge \vec{\mathcal{S}} \, .$$

Hain zuzen, emandakoa puntu bateko eta bolumen-unitateko momentu angeluar elektromagnetikoa da.

## 24.3. ERRADIAZIO ELEKTROMAGNETIKOAREN SORKUNTZA

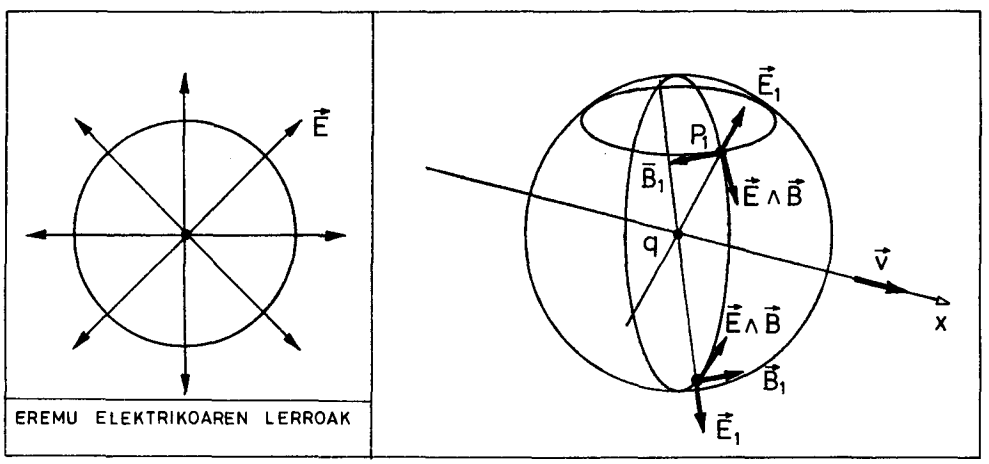
Aurreko atal bietan uhin elektromagnetikoen izaera eta beraien ezaugarriak aztertu ditugu, nola sortzen diren azaldu gabe. Zer esanik ez, uhin elektromagnetikoen iturriak, eremu elektromagnetikoa sortzen duten iturri berberak dira, higitzen ari diren karga elektrikoak alegia. Horrelako kargen multzo bat

emanik, Maxwell-en ekuazioen bidez, sortzen duten eremu elektromagnetikoa kalkula daiteke, eta, halaber, uhin elektromagnetikoak.

Dena den, oraingoan erradiazio elektromagnetikoa aztertuko dugu, hots, zeintzu baldintzatan energia elektromagnetikoa infiniturantz doan betirako, sortua izan deneko iturritik aldenduz. Erradiazioari dagokionez,hiru adibide aipatuko ditugu.

### 24.3.1. Karga azeleratuaren erradiazioa

Uhin elektromagnetikoen erradiaziorako sistemarik oinarrizkoena, azeleraturik dagoen partikula kargatuaren kasua dugu. Hala ere, arazoa hobeki ulertzeko, lehenengo abiadura uniformearekin doan partikula aztertuko dugu, nahiz eta, ikusiko dugunez, kasu horretan erradiaziorik ez dagoen.

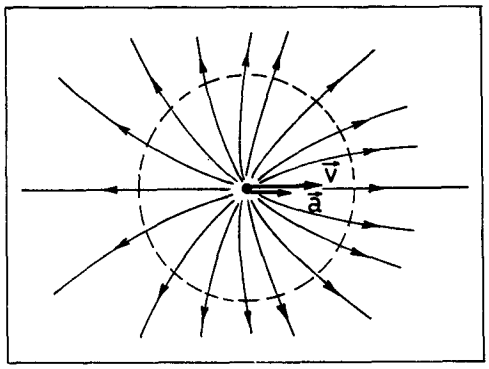



Alboko irudian v abiaduraz (abiadura txikia) higitzen den partikula kargatu batek sortzen dituen eremuak adierazten dira, bere zentrua partikulan duen esfera baten gainazaleko puntuetan, eta halaber Poynting-en bektorearen norabidea ere. Ikusten denez, Poynting-en bektorea esferaren tangentea da puntu guztietan eta, beraz, esferan zeharreko fluxua,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2 \, \varepsilon_0 \oiint_S (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

nulua da. Hots, ez dago energiaren fluxurik edo, beste hitz batzurekin esanda, abiadura uniformez higitzen den partikulak ez du energia elektromagnetikorik erradiatzen.

Hala ere, partikula kargatua azeleraturik dagoenean, eremu elektrikoa jadanik ez da erradiala, eta, beraz, ez da simetrikoa kargarekiko. Eremu-lerroak deformaturik daude alboko irudian




bezala eta, ondorioz, erradio oso handiko esfera batetan kalkuluak eginda, esferan zehar Poynting-en bektoreak fluxu ez-nulua daukala ikusten da. Labur esanda, karga azeleratuak erradiatu egiten du eta, hain zuzen, denbora-unitatean erradiatzen den energia elektromagnetikoa, Larmor-en formularen bidez eman daiteke:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^2 \, a^2}{6\pi\varepsilon_0 \, c^3}$$

non a partikularen azelerazioa den.

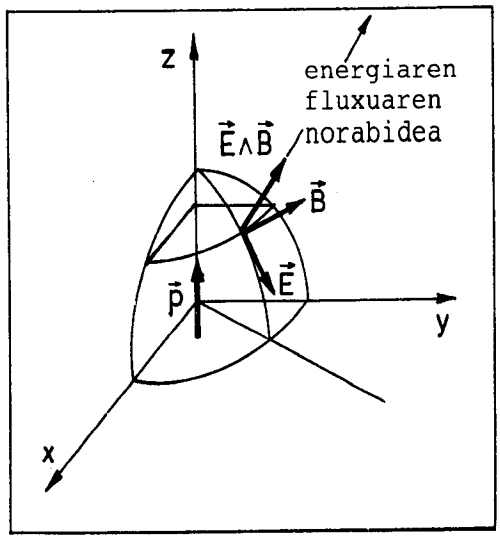
### 24.3.2. Dipolo elektriko oszilakorraren erradiazioa

Demagun higitzen ari diren partikulen higidura dipolo elektriko oszilakor baten bidez adieraz daitekeela, zeinaren momentu dipolar elektrikoa honela adieraz dezakegun:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

Kasu hau oszilatzen dabilen elektroi batena edo korronte oszilakor batena izan daiteke. Dipolo elektrikoa konstantea denean,

eremu elektrikoa ageri da soilik (ikus 18.6 atala). Baina dipoloa aldakorra izatean, eremu magnetikoa ere ageri da. Alboko irudian OZ ardatzeko dipolo oszilakorrak sortzen dituen eremu elektrikoa eta magnetikoa adierazten dira.



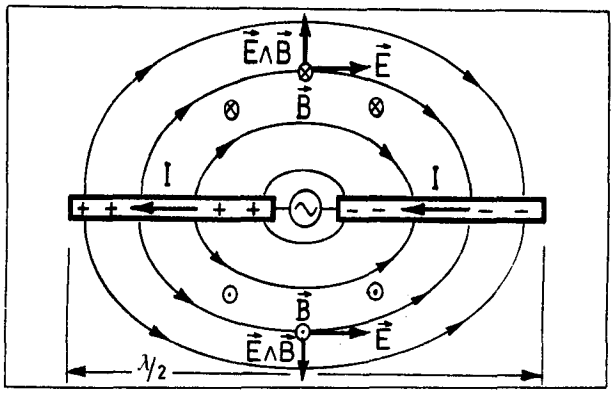

Ikusten denez, kanporanzko norabidea du Poynting-en bektoreak, hots, erradiaziozko fluxu netoa dugu. Kalkuluak eginez, emaitza hau lortzen da:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{p_o^2 \quad \omega^4}{12\pi\varepsilon_o \, c^3}$$

Energi fluxu hau esfera osoan zeharreko integrazioari dagokio.

### 24.3.3. Antena baten bidezko erradiazio elektromagnetikoa

Dipolo oszilakorraren bidetik, zirkuitu oszilakor baten jokabidea azter dezakegu, eta ikus daitekeenez, holako sistema baten bidez uhin elektromagnetikoen erradiazioa lor daiteke. Hain zuzen, hauxe da antenataz baliatuz irrati-emisioetan erabiltzen den metodoa.

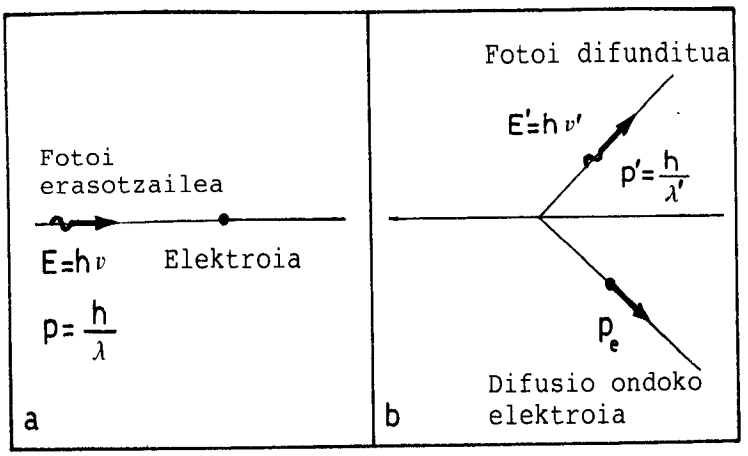



Eskematikoki, alboko irudian agertzen dugu holako antena bat eta beraren inguruan sortzen diren eremuak. Antenaren parte biek zeinu desberdina dute korrontearen eraginez. Denetara, Poynting-en bektoreak beti kanporanzko norantza du eta, ondorioz, erradiazio netoa dago.

## 24.4. COMPTON EFEKTUA. FOTOIAK

Erradiazio elektromagnetikoaren sorkuntza aipatu ondoren, materiak erradiazio hori nola absorbitzen duen ikustea ere interesgarria da. Baina, azterketa nolabait mugatzeko, kasu berezi bat aipatuko dugu soilik, alegia, uhin elektromagnetikoen eta elektroi askeen arteko interakzioa.

Experimentuetan behatzen den konportamoldea, Compton efektua izenarekin ezagutzen da, ezperimentu horiek 1920.urtearen inguruan lehenengo aldiz egin zituen A. H. Compton fisikariaren ohoretan jarria, hain zuzen. Labur esanda, $\lambda$ uhin-luzerako uhin elektromagnetikoak elektroia erasotzean, elektroia beste norabide batez abiatzen da eta, halaber, $\lambda'$ uhin-luzerako uhin elektromagnetikoa agertzen da beste norabide batetan. Fenomenoak bi partikulen arteko talkaren itxura dauka.




Prozesu horrek energiaren eta momentu linealaren aldaketak dauzka bere barnean, eta, izatez, uhin elektromagnetikoak pausagunean masa nulua duen partikularen modura jokatzen du. Neurketa experimentalen emaitzekin ados egoteko, partikula horien energia ondoko erara erlazionatu behar da erradiazioaren maiztasunarekin:

$$E = h\nu$$

non h delakoa konstante unibertsala den, Planck-en konstantea deritzona, honako balio hau duena:

$$h = 6{,}6256 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Honelatan, ba, ondorio hauek ateratzen dira Compton efektuaren azterketatik:

- Uhin elektromagnetikoaren eta elektroi askearen arteko interakzioa, elektroiaren eta pausagunean masa nulua duen partikula baten arteko talka modura azter daiteke.

- Pausagunean masa nulua duen eta argiaren abiaduraz higitzen den partikula horri fotoi deritzo

- Fotoiaren energia eta momentu lineala uhin elektromagnetikoaren maiztasunaren eta uhin-luzeraren bidez adieraz daitezke.

$$E = h\nu$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Dena dela, zer esan nahi du guzti horrek? Uhin elektromagnetikoak fotoi-txorrotadak direla? Ez horixe, hitzez hitz behinipehin. Agian, egokiagoa da ondoko erako azalpena: $E = h\nu$ energia eta $p = h/\lambda$ momentu lineala duen fotoia absorbitu egiten du elektroiak eta ondoren igorri egiten du beste fotoi bat $E' = h\nu'$ eta $p' = h/\lambda'$ energia-momentuduna. Elektroiak $E_k = E - E' = h(\nu-\nu')$ energia eta $\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$ momentua bereganatzen ditu. Azken batez, fotoia partikula kargatuak egiten duen absortzioan edo igorpenean jokoan dagoen energia eta momentu elektromagnetikoaren kuantua da, hots, uhin elektromagnetikoak elektroiarekin edo beste partikula kargatu batekin interakzioa duenean, elkarrekin truka daitezkeen energia eta momentua fotoiari dagozkionak dira.

Dena dela, orain arte ikasitako Fisikaz baliatuz, Fisika Klasikoaz alegia, ezin da horrelako fenomenoen azalpen egokirik eman. Fenomeno hauek ulertzen saiatzeko, Fisika Kuantikoa eraiki behar izan dute fisikariek. Hasierako oinarri experimentalen artean, Compton-ek aztertu zuen efektua dugu, prezeski.

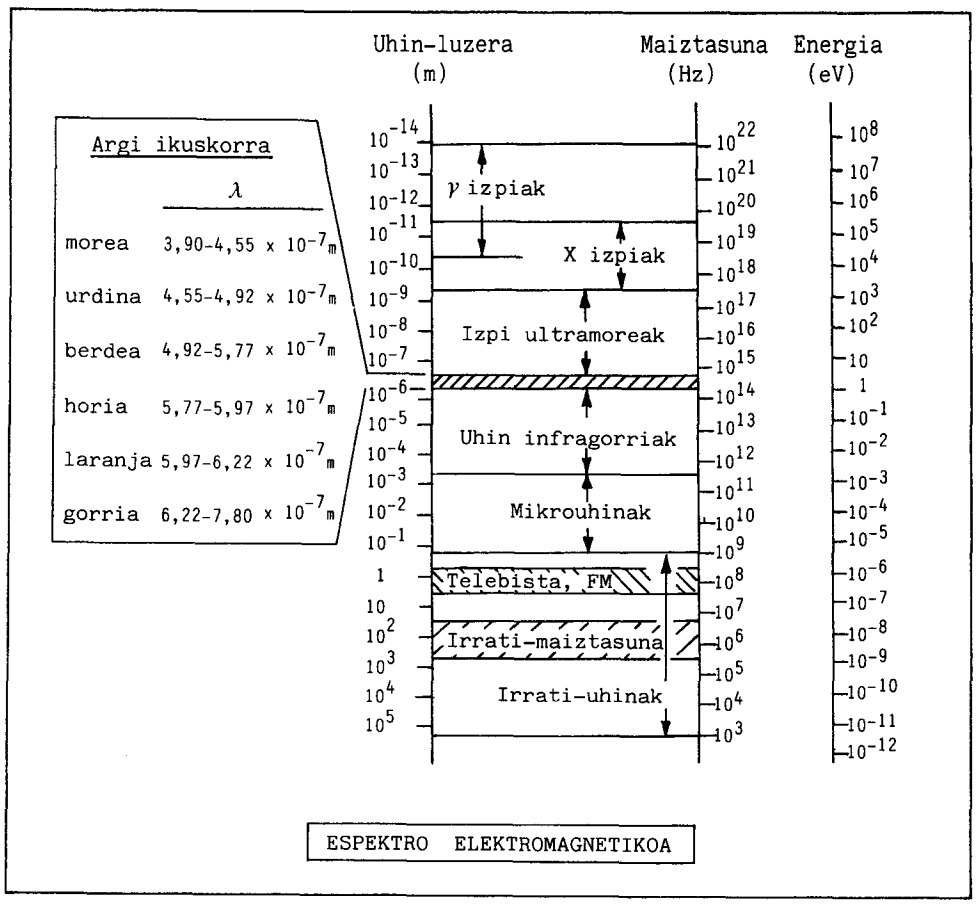
## 24.5. ERRADIAZIO ELEKTROMAGNETIKOAREN ESPEKTRUA

Uhin elektromagnetikoen uhin-luzera edo maiztasuna oso desberdinak izan daitezke uhin batzutatik bestetara, iturriaren arauera. Gainera oso helburu desberdinetarako erabil daitezke uhin-mota desberdinak. Horregatik ohitura dago uhin elektromagnetikoak uhin-luzeraren arauera sailkatzeko, edo, gauza bera dena, maiztasunaren arauera, ongi bait dakigu, biak hedapen--abiadurarekin erlazionaturik daudela, $\lambda\nu = c$ adierazpenaren bidez. Bestalde, fotoien energia uhinaren maiztasunarekin loturik dagoenez, $E = h\nu$, uhin elektromagnetikoen espektroa energiaren arauera ere eman dezakegu, kasu honetan eV (elektronvolta) unitatea erabiliz. Bukatzeko, sailkapenean agertzen diren uhin-motek ez dutela muga zehatzik esan behar da, iturri desberdinek gainezarririk dauden maiztasun-tarteetako uhinak sor bait ditzakete. Ohar horiek egin ondoren, honela sailkatu ohi dira uhin elektromagnetikoak:

- Irrati-uhinak. Zenbait zentimetrotatik kilometrotarako

tarteko uhin-luzerak dituzte. Normalki irrati-telebistako sistemetan erabiltzen dira eta uhin hauek sortzeko, tresna elektronikoak erabili ohi dira, zirkuitu oszilakorrak gehienetan. Irrati-uhinak gehiago ere sailka daitezke, uhin luze, ertain eta laburretan. Telebistan eta maiztasun modulatuzko (FM) emisioetan maiztasun handiagoak eta, beraz, uhin-luzera txikiagoak erabiltzen dira.

- Mikrouhinak. Uhin hauen maiztasuna askoz handiagoa da ($10^9$ Hz $\div$ 3 x $10^{11}$ Hz) eta uhin-luzera txikiagoa (0,3m $\div$ $10^{-3}$m), eta normalki radar sistemetan erabili ohi dira. Azken urteetan labeetan ere hasi dira erabiltzen. Ikerkuntzan baliagarriak gertatzen dira egitura atomiko-molekularren azterketan. Hauek ere tresna elektronikoz sortzen dira. Mikrouhinen alde honi UHF (Ultra High Frecuency) izena eman ohi zaio.



- Uhin infragorriak. Uhin-luzeren tartea $10^3$m ÷ 7,8 x $10^{-7}$m (edo 7.800 Å) da eta maiztasunena 3 x $10^{11}$ Hz ÷ 4 x $10^{14}$ Hz. Gorputz beroek eta molekulek sortzen dituzte uhin hauek eta erabilpen asko dauzkate industrian, medikuntzan, astronomian eta abarretan.

- Argi ikuskorra. Honela deritzo gure begiek ikus dezaketen uhin elektromagnetikoen multzoari. Argiak begietan sortzen dituen zentzazioei kolore deritze eta maiztasun desberdinei kolore desberdina dagokie. Oso maiztasun-tarte estua dago gorritik morera, tarte horretan ostarkuaren koloreak daudelarik.

- Izpi ultramoreak. Uhin-mota hauek atomo eta molekulen deskarga elektrikoetan sortzen dira eta beraien energia erreakzio kimiko askotan agertzen diren energien mailakoa da; hortik azaltzen dira sortzen dituzten efektu kimikoak. Uhin-maiztasunen tartea 8 x $10^{14}$ Hz ÷ 3 x $10^{17}$ Hz da edo uhin-luzeratan emana, 3,8 x $10^{-7}$ m ÷ 6 x $10^{-10}$m. Eguzkia izpi ultramoreen iturri handia da eta besteren artean izpi hauek dira gure azalaren beltzarantzearen sortzaileak. Izatez, eguzkitik datozen izpi ultramore gehienak atmosferaren goialdean absorbitzen dira, 80 km-tik gora eta, ondorioz, atmosferalde hori oso ionizaturik dago eta ionosfera deritzo. Atmosferan dagoen ozonoak ($O_3$) ere babestu egiten gaitu izpi ultramoreeen eraginetik, bestela kaltegarriak gertatuko bait litzaizkiguke.

- X izpiak. Are energia handiagoko izpi hauen uhin-luzerak $10^{-9}$ m ÷ 6 x $10^{-12}$m tartean daude eta maiztasunak 3 x $10^{17}$ Hz ÷ 5 x $10^{19}$ Hz. X izpiak 1895. urtean aurkitu zituen W. Röntgen-ek, izpi katodikoak aztertzen ari zelarik. Modu desberdinez sortzen dira X izpiak. Batetik elektroi atomiko ongi lotuen kausaz eta baita balaztaketa-erradiazioaren (bremsstralhung) kausaz. Energia handiko izpi hauek ionizatu egiten dituzte molekulak eta horregatik kalteak sortzen dituzte bizidunen ehunetan. Bestalde materia zeharkatzeko ahalmen handia dute eta halaber plaka fotografikoak inpresionatzekoa. Hori dela eta diagnostiko medikoan erabiltzen dira, zeren eta gorputzaren barneko ehun batzutan (hezurretan adibidez) bestetan baino gehiago absorbitzen bait dira eta horrela barneko ehunen "argazkiak"

lortzeko balio bait dezakete. Bestalde oso erabilgarriak dira kristalografiaren arloan, kristalen egitura aztertzeko. Edozertara kontuz erabili behar dira eta dosi txikietan, oso kaltegarriak bait dira osasunerako.

- γ izpiak. Gamma izpiak nukleo atomikoetan sortzen dira eta X izpiek baino are energia handiagoa dute. Uhin-luzerak $10^{-10}$m ÷ $10^{-14}$m tartekoak dira eta maiztasuna 3 x $10^{18}$Hz ÷ 3x$10^{22}$Hz Sarri, beraien energiaren bidez adierazten dira, eta, horrela, fotoien energia $10^4$ eV ÷ $10^7$ eV tartekoa izan daiteke. Izpi hauek substantzia erradioaktiboek sortuak dira. Materian barrena pasatzeko X izpiak baino sarkorragoak dira, eta, halaber, arriskugarriagoak.

- Izpi kosmikoak. Izenak berak dioenez, izarretatik edo kosmotik datozkigu eta oraindik energia handiagoko uhin elektromagnetikoak dira. Ez da oraindik ongi ulertzen zein eratara sortzen diren.

## 25. GAIA: TERMODINAMIKAREN LEHEN PRINTZIPIOA

25.1. Sistema termodinamikoak. Oreka termodinamikoa

25.2. Oreka termikoa. Tenperatura. Termometroak

25.3. Lan termodinamikoa

25.4. Beroa. Bero-ahalmena

25.5. Termodinamikaren lehen printzipioa. Barne-energia

Gai honetan eta hurrengoetan, partikula askoz osoturiko sistemen deskribapen termodinamikoa egingo dugu.

Partikula askoz osoturiko sistema baten deskribapena, bi ikuspuntutatik egin dezakegu:

a) Ikuspuntu mikroskopikotik: Mikroskopikoki, sistemaren egoera deskribatzeko, sistema osotzen duten partikula guztien posizioa eta abiadura ezagutu behar ditugu, 6 N magnitude alegia, sistema N partikulaz osoturik baldin badago; magnitude hauei koordenatu mikroskopikoak deritze. Askotan, sistemaren partikula guztiek aldiune bakoitzean dituzten posizioa eta abiadura ezagutzea ezinezkoa gertatzen zaigula eta, honelako sistemak mikroskopikoki deskribatzeko metodo bereziak erabiltzen dira, "Mekanika Estatistikoa" deritzon Fisikaren atalean biltzen direlarik.

b) Ikuspuntu makroskopikotik: Makroskopikoki, berriz, sistemaren bi deskribapen mota egin daitezke:

- "Mekanika" deritzon Fisikaren atalean, sistemaren higiduraren deskribapen makroskopikoa egiten da, beraren energia mekanikoa determinatuz. Honetarako, sistemaren masa-zentrua definitzen da eta sistemaren translazio-higiduraren deskribapena masa-zentruaren posizioaren eta abiaduraren bidez ematen da; magnitude hauei koordenatu mekanikoak deritze.

- "Termodinamika" deritzon Fisikaren atalean, sistemaren barne-egoeraren deskribapen makroskopikoa egiten da, beraren barne-energia determinatuz. Honetarako, sistemaren barne-egoerarekin erlazioa duten magnitude behagarriak definitzen dira, hala nola presioa, bolumena, tenperatura eta abar; magnitude hauei koordenatu termodinamikoak edo egoera-aldagai termodinamikoak deritze.

Termodinamikaren helburu orokorra, ba, partikula askoz osoturiko sistemen barne-egoeraren deskribapen makroskopikoa izanik, koordenatu termodinamikoak eta sistemaren barne-energia definitzen dira, eta Termodinamikaren funtsezko printzipioetan oinarrituz, berauen arteko erlazioak aurkitzen dira.

## 25.1. SISTEMA TERMODINAMIKOAK. OREKA TERMODINAMIKOA

Koordenatu termodinamikoen bidez deskribatzen dugun sistemari, sistema termodinamikoa deitu ohi zaio. Horrela, ondoko sistema hauek sistema termodinamikoak ditugu:

- Likido-zutabearen neurketen bidez deskribaturiko kapilare batetako likidoa.

- Presio eta bolumenaren luzeraren bidez deskribaturiko ontzi batetako gasa.

- Esfortzu eta deformazioaren bidez deskribaturiko solido deformagarria.

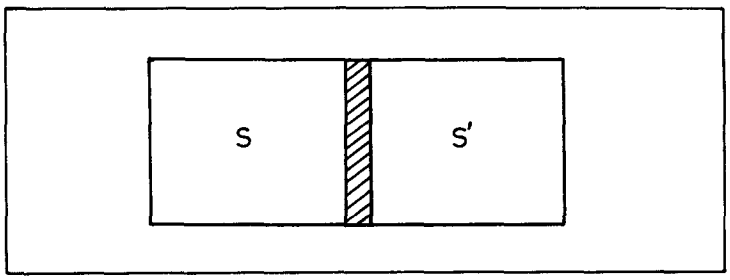
Sistema termodinamiko baten barne-egoera deskribatu ahal izateko halabeharrez ezagutu behar ditugun koordenatu termodinamikoak, koordenatu termodinamiko edo egoera-aldagai termodinamiko independenteak direla esan ohi da. Horrela, bada, kapilare batetako likidoaren barne-egoera deskribatzeko likido-zutabearen luzera, presioa eta tenperatura direlako koordenatu termodinamikoak erabil ditzakegula ere, hiru hauetatik bat bakarrik dugu independentea. Halaber, ontzi batetako gasaren eta solido deformagarriaren barne-egoera deskribatzeko defini ditzakegun koordenatu termodinamikoetatik, bi bakarrik ditugu independenteak.

Azkenik, diogun, ezen sistema termodinamiko baten barne-egoera, beraren inguruarekin elkarrakzionatzen ez duelarik lortzen duen egoera egonkorrean dagoenean bakarrik defini daitekeela koordenatu termodinamikoen bidez. Egoera egonkor honi oreka termodinamikoa deritzo.

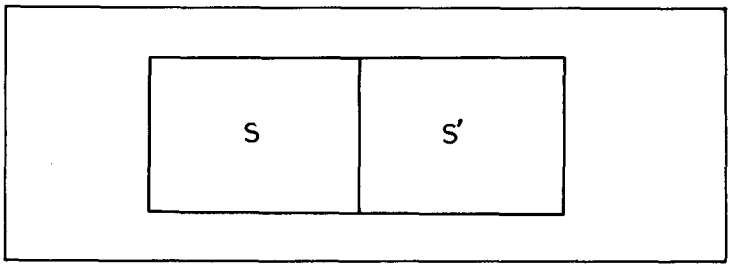
## 25.2. OREKA TERMIKOA. TENPERATURA. TERMOMETROAK

Demagun S eta S' sistema termodinamikoak ditugula. Bi sistema hauek kontaktuan jartzean edo, zehazkiago esanik, bata bestearen ondoan jartzean, bien arteko mugak mota askotakoak izan daitezkeela ere, bi muga-mota idealetan sailka daitezke:

a) S eta S' sistemak kontaktuan jartzean, energi elkartrukatzerik ez dagoelarik, sistema bakoitzaren barne-egoera edozein izan daitekeenean, bien arteko muga adiabatikoa dela eta sistemak kontaktu adiabatikoan daudela esan daroagu. Muga adiabatikoz bananduriko sistemak honela adierazten ditugu:




b) S eta S' sistemak kontaktuan jartzean, energi elkartrukatzerik ba dagoelarik, sistema bakoitzaren barne-egoera sistema osoaren egoera egonkorra lortu arte aldatzen denean, bien arteko muga diatermanoa dela eta sistemak kontaktu diatermanoan daudela esan daroagu; sistema osoak honela lortzen duen egoera egonkorrari oreka termikoa deritzo. Muga diatermanoz bananduriko sistemak honela adierazten ditugu:




"Muga adiabatiko" delako kontzeptu teorikorako hurbilketa onak, zurezko, igeltsuzko eta feldrozko muga lodiak ditugu. "Muga diatermano" delako kontzeptu teorikorako hurbilketa ona,

berriz, kobrezko muga mehea dugu.

Demagun, orain, A, B eta C sistemak ditugula. A eta C sistemak, bai eta B eta C sistemak ere, kontaktu diatermanoan jartzean oreka termikoan baldin badaude, experientzian oinarriturik, A eta B sistemak ere kontaktu diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo direla baiezta dezakegu. Emaitza experimental honi Termodinamikaren Zero Printzipioa deritzogu.

Termodinamikaren Zero Printzipioan oinarriturik, hirugarren sistema bat aukeratuz, edozein bi sistema kontaktu diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo direnentz aurresan dezakegu. Hirugarren sistema honi termometroa deritzo, eta normalean egoera-aldagai independente bakarreko sistema izan ohi da.

Termometroa A eta B sistemekiko oso txikia aukeratuz, beronen egoera aldagai independente bakarra X letraren bidez adierazten baldin badugu, Termodinamikaren Zero Printzipioaren arauera, A sistema eta termometroa, bai eta B sistema eta termometroa ere, kontaktu diatermanoan jartzean oreka termikoa X aldagaiaren balio bererako lortzen den guztietan, A eta B sistemak kontaktu diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo direla aurresan dezakegu. Bestalde, X aldagaiaren funtzio arbitrario bat defini baldin badezagu:

$$\theta : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \theta = \theta(x) \ ,$$

eta funtzio honi tenperatura izena eman baldin badiezaiogu, zera ondoriozta dezakegu: "A eta B sistemak tenperatura berbera duten guztietan, kontaktu diatermanoan jartzean oreka termikoan egongo dira".

Termometrotzat, beste batzuren artean, egoera-aldagai independente bakarreko ondoko sistemok hartu ohi dira:

- Kapilare batetako likidoa,
- Ontzi batetako gasa, bolumena konstante mantenduz,
- Ontzi batetako gasa, presioa konstante mantenduz,

beraien aldagai independentea, likido-zutabearen luzera(L), gasaren presioa(p) eta gasaren bolumena(V) izanik, hurrenez hurren.

Termometro hauen tenperatura, normalean, honela definitu ohi da:

$$\theta = X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \theta = a\,x + b\ ,$$

non x delakoa L, p edo V izanen den, hurrenez hurren, eta a eta b konstante arbitrarioak. Honela definituriko tenperatura--eskala, eskala lineala dugu.

Tenperatura eskala ongi definiturik gera dadin, a eta b konstanteen balioak finkatu beharko ditugu; a konstantearen balioa finkatzeko bi prozedurari jarrai gakizkioke:

1) Uraren fusio-puntua eta irakite-puntua direlako egoera standardak aukeratuz, eta egoera hauei dagozkien tenperaturen arteko kendurari 100 gradutako balioa emanez (100°), zera izanen dugu:

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = 100°\ ,$$

$$a\,x_2 - a\,x_1 = 100°\ ,$$

$$a\,(x_2 - x_1) = 100°\ ,,\ a = \frac{100°}{x_2 - x_1} \Longrightarrow \theta(x) = \frac{100°}{x_2 - x_1}\,x + b,$$

non $x_1$, $x_2$, eta x, termometroaren aldagai independenteak uraren fusio-puntuan, uraren irakite-puntuan eta gure sistemarekin kontaktuan jartzean hartzen dituen balioak diren, hurrenez hurren, gure sistemaren tenperatura $\theta(x)$ izango dela-

rik. Honela, bada, tenperatura-eskala guztiz definiturik geratzen ez bada ere, tenperatura-unitatea, gradua alegia, definiturik dago.

Hau, tenperatura eskala definitzeko 1954. urterarte erabili izan zen metodoa dugu; baina uraren fusio-puntuaren lorpenaren zailtasunak eta neurketa bikoitza egin behar izanak erakartzen duen errore experimentalak, 1954. urtean prozedura zehatzago bati jarraitzera bultzatu zituen orduko fisikariak. Bigarren prozedura hau ondoko honetan datza:

2) Uraren puntu hirukoitza delako egoera standard bakarra aukeratuz, eta egoera honi dagokion tenperaturari, aurreko prozedura dela medio definituriko tenperatura-eskala berbera aurkitzeko, 273,16 gradutako balioa emanez (273,16°), zera izanen dugu:

$$\theta(x_3) = 273{,}16° \;,,\; a\, x_3 + b = 273{,}16° \;.$$

Bestalde, b = 0 aukeratuz:

$$a = \frac{273{,}16°}{x_3} \quad \Longrightarrow \quad \theta(x) = \frac{273{,}16°}{x_3}\, x \quad ,$$

non $x_3$ eta x, termometroaren aldagai independenteak uraren puntu hirukoitzean eta gure sistemarekin kontaktu diatermanoan jartzean hartzen dituen balioak diren, hurrenez hurren, gure sistemaren tenperatura $\theta(x)$ izango delarik. Honela, bada, tenperatura-eskala guztiz definiturik geratzen da.

Beraz, tenperatura-eskala lineal bat definitu dugu. Baina termometro ezberdinak hartuz gero, X delako aldagaiak, aldagai termometrikoa deritzonak, balio ezberdinak hartuko dituelarik, honela definituriko tenperatura-eskala aukeraturiko termometroaren menpekoa dela, hots, absolutua ez dela atera dezakegu ondorioz. Izan ere, termometrotzat bolumen konstanteko gas bat harturik, gas-mota ezberdinak aukeratuz gero, tenperatura-eskala ezberdinak definituko genituzke. Dena den, termometrotzat bolumen konstanteko eta presio txikiko gasak hartzen baldin baditu-

gu, experientzian oinarriturik, edozein gas-mota hartuta ere definitzen den tenperatura-eskala beti berbera dela aurkitzen dugu. Hau da, termometrotzat bolumen konstanteko eta presio txikiko gasak aukeraturik, lehen definituriko tenperatura-eskala absolutua dugu; tenperatura eskala honi gas idealezko tenperatura eskala absolutua deritzo, eta eskala honetan gure sistemaren tenperatura ondokoa izango da:

$$\theta(p) = 273{,}16^\circ \lim_{p_3 \to 0} \left(\frac{p}{p_3}\right)_{V=kte},$$

non $p_3$ eta p, termometroaren presioak uraren puntu hirukoitzean eta gure sistemarekin kontaktu diatermanoan jartzean hartzen dituen balioak diren, hurrenez hurren.

Gas idealezko tenperatura-eskala absolutuan neur daitekeen tenperaturarik txikiena, heliozko termometroa erabiliz lortzen den 0,5 gradutako tenperatura dugu, berau bait da gas batek lortzen duen tenperaturarik txikiena. Horrela, bada, tenperatura-eskala honetan zero absolutua lortu ezinik gertatzen da.

Termodinamikaren Bigarren Printzipioa azaldu ondoren, tenperatura-eskala absolutua edo Kelvin eskala definituko dugu, eta gas idealezko tenperatura-eskala absolutua defini daitekeen tarteetan modu ezberdinetara definituriko tenperatura-eskala absolutu bi hauek baliokideak direla aurkituko dugu. Honetaz gain, gas idealezko tenperatura-eskala absolutua ezin defini daitekeen arren, zero absolutua barne delarik, Kelvin eskala ongi definiturik geratuko da.

Azkenik, bi tenperatura-eskala hauek aipatu ditugularik, ezin utz dezakegu aipatzeke, sarritan erabili ohi den Celsius eskala. Eskala honetan, tenperatura-unitatea, gradua alegia, tenperatura-eskala absolutuan definituriko unitate berbera dela ere, tenperatura-eskala absolutuan uraren puntu hirukoitzaren tenperaturari 273,16 gradutako balioa ematen zaion bitartean, Celsius eskalan 0,01 gradutako balioa ematen zaio. Beraz, tenperatura absolutuaren eta Celsius tenperaturaren arteko erlazioa

ondokoa dugu:

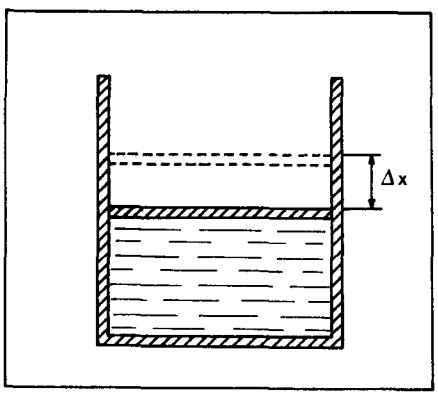
$$t = \theta - 273{,}15°$$

$\theta$ eta t tenperatura absolutua eta Celsius tenperatura izanik, hurrenez hurren.

## 25.3. LAN TERMODINAMIKOA

Sistema termodinamiko baten egoera aldatzean, sistemak bere inguruaren gainean edo inguruak sistemaren gainean burutzen duen lanari, lan termodinamikoa deritzo. Inguruak sistemaren gainean burutzen duen lana positibotzat hartuko dugu, eta sistemak bere inguruaren gainean burutzen duena negatibotzat. Sistema muga adiabatikoz isolaturik baldin badago, burutzen den lan termodinamikoari lan adiabatikoa deritzo.

Demagun, adibide gisa, zilindro batetan pistoi batez konprimaturik dagoen gasa:




Pistoiaren bidez gasaren bolumena aldatuz, sistemak bere inguruaren gainean eta inguruak sistemaren gainean buru ditzaketen lan termodinamikoak expantsio-lana eta konpresio-lana ditugu, hurrenez hurren. Saia gaitezen, bada, lan hau kalkulatzera.

Sistemak pistoiaren gainean eragiten duen indarraren modulua ondokoa dugu:

$$F = p_k A ,$$

non $P_k$, kanpo-presioa, eta A, pistoiaren azalera ditugun. Ondorioz, sistemaren bolumenak $\Delta V = A \Delta x$ delako gehikuntza jaso ondoren, sistemak ondoko expantsio lana burutuko du:

$$W = p_k A \Delta x .$$

Demagun, orain, expantsio-prozesua oso-oso astiro gertatzen dela. Honela, sistema aldiune guztietan oreka termodinamikoan dagoela kontsidera daitekeelarik, sistemaren presioa defini dezakegu, zeinek aldiune guztietan kanpo-presioaren balioa hartuko duen. Beraz, expantsio-prozesua infinitu etapa infinitesimalez osoturik dagoela, eta etapa infinitesimal bakoitzean sistema oreka termodinamikoan dagoela kontsideratuz, sistemak etapa bakoitzean ondoko expantsio-lana burutuko du:

$$\delta W = - p \, d V ,$$

non P, sistemak etapa bakoitzean duen presioa den. Halaber, sistemaren bolumenak $\Delta V = V_2 - V_1$ delako gehikuntza jaso ondoren, beronek ondoko expantsio-lana burutuko du:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p \, d V ,$$

integralaren balioa integrazio-bidearen menpekoa, hots, 1 egoeratik 2 egoerara pasatzeko erabiltzen den bilakabide fisiko-motaren menpekoa izanik. Honelako prozesu idealei, hots, sistema infinitu oreka egoeratatik pasatzen deneko prozesuei, <u>prozesu kuasi-estatikoak deritze</u>.

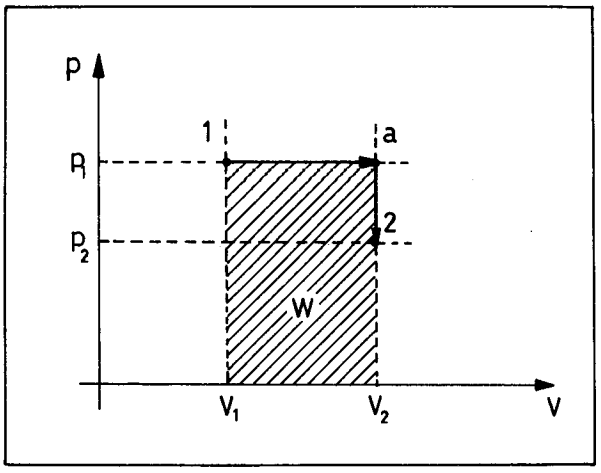
Expantsio-lana kalkulatzean, kasu bi bereiztuko ditugu:

1) Sistema <u>muga adiabatikoz</u> isolaturik baldin badago, beronek burutzen duen lana adiabatikoa dugu, eta, experientzian oinarrituz, hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzeko segitu den bidearen, hots, bitarteko egoeren menpekotasunik ez duela baiezta dezakegu. Bestalde, sistema muga adiabati-

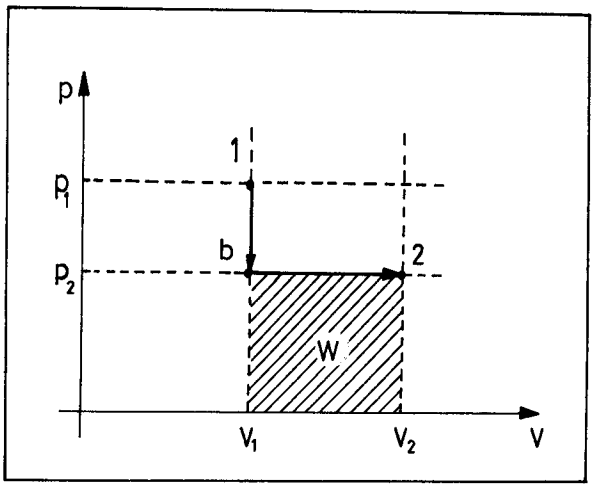
koz isolaturik dagoenean, kuasi-estatikoki hasierako egoeratik bukaerako egoerara ibilbide bakar bati jarraituz pasa daiteke.

2) Sistema muga diatermanoz isolaturik baldin badago, beronek burutzen duen expantsio-lana , hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzeko segitu den bidearen, hots bitarteko egoeren menpekoa dugu. Bestalde, sistema muga diatermanoz isolaturik dagoenean, kuasi-estatikoki hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzeko, beste batzuren artean, ondoko ibilbideei jarrai dakieke:

a) Lehenik prozesu isobariko batez, presioa konstante mantenduz alegia, a bitarteko egoerara pasaturik, bigarrenez prozesu isokoro batez, bolumena konstante mantenduz alegia, bukaerako egoerara pasatzen da:




b) Lehenik prozesu isokoro bat dela medio b bitarteko egoerara pasaturik, ondoren prozesu isobariko bat dela medio bukaerako egoerara pasatzen da:




Grafikoki erraz egiazta daitekeenez, hemen azaldutako bi adibideetan sistemak buruturiko expantsio-lanak, hots, segituriko ibilbideari dagokion kurbak, $V = V_1$, $V = V_2$ eta $p = 0$ direlako zuzenekin osotzen duen azalerak, ez dira berdinak.

## 25.4. BEROA. BERO-AHALMENA

Dakigunez, A eta B sistema termodinamikoen tenperaturak ezberdinak baldin badira, kontaktu diatermanoan jarriz gero, elkarrakzionatu egingo dute, oreka termikoa lortu arte, hau da, sistema bien tenperaturak berdindu arte.

Aintzina, tenperatura ezberdineko bi sistema kontaktu diatermanoan jartzean, oreka termikoa lortzeko tenperatura altueneko sistematik tenperatura baxueneko sistemara kaloriko izenaz bataiatu zuten fluido ikustezina pasatzen zela azaltzen zuten orduko zientzialariek. Kalorikoaren unitateari kaloria izena eman zitzaion eta ondoko modu honetara definitu zen: "Kaloria bat, ur-gramo baten tenperatura gradu batez igotzeko, urari eman behar zaion kaloriko-kantitatea da".

1843-1878 urte tartean, aldiz, bi sistemaren oreka termikoa lortzeko, tenperatura altueneko sistematik tenperatura baxueneko sistemara energia pasatzen zelako interpretazioa egin zen nagusi zientzialarien artean, energia mota honi beroa delako izena eman zitzaiolarik. Hau behar den bezala ulertzeko, adibi-

de bat jarriko dugu:

Biz, zilindro batetan pistoi batez konprimaturik dagoen gasa. Demagun, expantsio baten bitartez, sistema 1 egoeratik 2 egoerara pasatzen dela. Sistemaren hormak adiabatikoak direnean eta diatermanoak direnean, hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzeko burutzen diren expantsio-lanak ezberdinak direla aurkitzen da, bigarren kasuan sistemaren eta beronen inguruaren artean bero-transferentzia dagoelarik, lehenengo kasuan bero-transferentziarik ez bait dago. Beraz, sistemak lana burutzean beronen barne-energia gutxitzen delarik, sistemak beroa transferitzen duenean ere beronen barne-energia gutxitu egiten da. Hau da, lana eta beroa mota bereko magnitudeak ditugu, eta magnitude hauek neurtzeko unitate berberak erabili ahal izango ditugu, beraz.

Horrela, ba, Joule, kaloriaren eta energia-unitatearen arteko erlazioa bilatzera saiatu zen, 1840. urtean ondoko erlazio hau aurkitu zuelarik:

$$1 \text{ cal} = \frac{1}{860} \text{ W.h} ,$$

edo, gauza bera dena:

$$1 \text{ cal} = 4{,}18605 \text{ Joule} ,$$

non 4,18605 Joule/cal delako balioari <u>beroaren baliokide mekanikoa</u> deritzon.

Demagun, orain, sistema baten eta beronen inguruaren artean transferitzen den beroa positibotzat eta negatibotzat noiz hartuko dugun finkatzeko asmoz, sistemaren eta beronen inguruaren tenperaturak T eta $T_o$ direla, hurrenez hurren. Sistemaren eta beronen inguruaren arteko mugak diatermanoak baldin badira, T eta $T_o$ tenperaturak ezberdinak diren bitartean, bero-transferentzia egongo da sistemaren eta inguruaren artean, zeina sistematik beraren ingururantz gertatuko den, sistemaren tenperatura handiagoa denean, eta sistemaren ingurutik sistemarantz gertatuko den, sistemaren tenperatura txikiagoa denean. Lehenengo ka-

suan beroa negatibotzat hartuko dugu, eta bigarren kasuan, berriz, positibotzat.

Sistemari masa-unitateko, tenperatura gradu batez igotzeko, eman behar zaion bero-kantitateari, bero-ahalmen espezifikoa deritzo:

$$c = \frac{\delta Q}{m\, dT} \quad ,$$

non m, sistemaren masa osoa, eta $\delta Q$, tenperatura dT graduz aldatzean transferitutako bero-kantitatea diren.

Kaloria, ur-gramo baten tenperatura gradu batez igotzeko, urari eman behar zaion bero-kantitatea denez, uraren bero-ahalmen espezifikoa ondokoa dugu:

$$c = 1 \frac{cal}{g \,.\, gradu} = 4{,}18605 \frac{J}{g \,.\, gradu} \quad .$$

Sistema bati mol baten tenperatura gradu batez igotzeko eman behar zaion bero-kantitateari, bero-ahalmen molarra deritzo:

$$C_m = \frac{\delta Q}{n\, dT} \quad ,, \quad C_m = \frac{\delta Q}{m/M\ dT} = M\, c \quad ,$$

non n, sistemaren mol kopurua, M, masa molekularra, eta $\delta Q$ tenperatura dT graduz aldatzean transferituriko bero-kantitatea diren.

Uraren bero-ahalmen molarra, beraz, ondokoa dugu:

$$C_m = M\, c = 18 \frac{cal}{mol \,.\, gradu} \quad ,$$

$$C_m = M\, c = 75{,}3489 \frac{J}{mol \,.\, gradu} \quad .$$

Horrela, bada, m masako sistema baten tenperatura $T_1$ baliotik $T_2$ baliora alda dadin, eman behar zaion bero-kantitatea, on-

doko hau dugu:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m\, c\, d\, T = m \int_{T_1}^{T_2} c\, dT \quad ,$$

eta $\Delta T = T_2 - T_1$ tenperatura-tartean sistemaren bero-ahalmen espezifikoak konstante irauten baldin badu, zera izanen dugu:

$$Q = m\, c\, \Delta T \; .$$

$\Delta T = T_2 - T_1$ tenperatura-tartean, aldiz, sistemaren bero--ahalmen espezifikoak konstante baldin ez badirau, zera izanen dugu:

$$Q = m\, \bar{c}\, \Delta T \quad ,$$

non $\bar{c} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} c\, d\, T$ , batezbesteko bero-ahalmen espezifikoa den.

Modu berean, zera idatz dezakegu:

$$Q = n\, \bar{C}_m\, \Delta T \; ,$$

non n, sistemaren mol-kopurua, eta $\bar{C}_m = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} C_m\, d\, T$ , batezbesteko bero-ahalmen molarra diren.

## 25.5. TERMODINAMIKAREN LEHEN PRINTZIPIOA. BARNE-ENERGIA

Sistema termodinamiko baten gainean burutzen den lana eta sistemak zurgatzen duen beroa positibotzat hartuz, experientzian oinarrituz, zera baiezta dezakegu: "Sistema hasierako egoeratik bukaerako egoerara pasatzean buruturiko lanak eta transferituriko beroak, hasierako eta bukaerako egoeren menpekotasuna izateaz gain bitarteko egoeren menpekotasuna ere izan ohi duten arren, bien arteko baturak hasierako eta bukaerako egoeren menpekotasuna baino ez du". Hau da, hasierako eta bukaerako egoerak lotzen dituen ibilbide guztietarako, buruturiko lanak eta transferituriko beroak hartzen duten balioen arteko baturak

balio berbera hartzen du. Beraz, batura, hasierako eta bukaerako egoerei dagozkien aldagai termodinamikoen funtzioa izango da, eta sistemak prozesu osoan pairatzen duen energia-aldaketa adieraziko digu. Honen arauera, bada, zera idatz dezakegu:

$$\Delta U = Q + W \quad ,$$

zeina Termodinamikaren Lehen Printzipioaren adierazpen analitikoa den, non $\Delta U = U_2 - U_1$ den, $U_1$ eta $U_2$, sistemak hasierako eta bukaerako egoeretan duen barne-energia izanik, hurrenez hurren. Sistemaren barne-energia, beronen aldakuntzaren bidez definitu dugularik, konstante arbitrario batez indeterminaturik egongo da.

Sistema, edozein ibilbideri jarraituz gero hasierako egoera itzultzen bada, beronek prozesu zikliko bat jasan duela esaten dugu. Kasu honetan, Termodinamikaren Lehen Printzipioan oinarriturik, zera ondoriozta dezakegu:

$$\Delta U = Q + W \overset{\Delta U = 0}{\Longrightarrow} Q = - W \ .$$

Hau da, edozein prozesu ziklikotan zehar sistemak burutzen duen lana eta zurgatzen duen beroa, edo sistemaren gainean burutzen den lana eta beronek ematen duen beroa, berdinak dira. Lehenengo kasuko sistemari motorea deritzo, eta bigarren kasukoari, hozkailua edo frigorifikoa.

Demagun, orain, sistemak $\delta Q$ bero-kantitate infinitesimala zurgatzen duelarik, beraren gainean $\delta W$ lan-kantitate infinitesimala burutzen dela. Horrela, sistemaren egoera termodinamikoa aldatu egingo da, beronen barne-energiak $dU$ aldaketa infinitesimala pairatuko du, eta azken batez, zera idatzi ahal izanen dugu:

$$dU = \delta Q + \delta W \quad ,$$

zeina Termodinamikaren Lehen Printzipioaren adierazpen diferentziala dugun. $dU$ diferentzial zehatza dugula ere, $\delta Q$ eta $\delta W$ ez dira diferentzial zehatzak, hasierako eta bukaerako egoeren menpekotasuna izateaz gain, bitarteko egoeren menpekotasuna

ere bait dute. Prozesu osoan burutzen den lana konpresio edo expantsio-lana baldin bada, zera dugu:

$$\delta W = - p\, d V \quad ,$$

eta ondorioz, kasu honetan, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren forma diferentziala ondoko modu honetara idatziko dugu:

$$d U = \delta Q - p\, d V \quad .$$

Azkenik, diogun, ezen sistema erabat isolaturik baldin badago, hots, sistema inguratzen duten mugak adiabatikoak ez ezik zurrunak ere baldin badira, lanik ezin burutu delarik, ez eta berorik transferitu ere, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera, sistemaren barne-energiak konstante irauten duela:

$$\left\{ \begin{array}{l} d U = \delta Q + \delta W \\ \\ \delta Q = \delta W = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow d U = 0 \quad ,, \quad U = \text{kte} \quad .$$

Hau, <u>Energiaren Kontserbazioaren Printzipioa</u> dugu.

## 26. GAIA: GAS IDEALAK

26.1. Egoera-ekuazioa

26.2. Barne-energia. Joule-ren experimentua

26.3. Bero-ahalmen espezifikoak. Mayer-en erlazioa

26.4. Gas ideal baten gaineko prozesu adiabatiko itzulgarriak. Lerro adiabatikoak

26.5. Gasen teoria zinetikoa

26.5.1. Sarrera gisa

26.5.2. Materia nolakoa den

26.5.3. Higidura browndarra eta batezbesteko abiadura koadratikoa

26.5.4. Presioaren lorbide berria

Aurreko gaian, Termodinamikan erabiltzen diren kontzeptu nagusi gehienak definitu izan ditugu: tenperatura, egoera-ekuazioa, bero-ahalmena, barne-energia eta abar. Esan genezake, honekin loturik doan formulazioa edozein sistema termodinamikori aplika diezaiokegula. Baina sistema termodinamiko baten egoera--baldintzak limite edo muga batetarantz eramaten ditugunean, sarritan sistema hori menperatzen duten ekuazioak, erraztu edo sinplifikatu egiten dira. Gainera, gabiltzan mailan, ager daitezkeen sistema sinpleenak aztertuko ditugunez, ez dugu formulazio konplexuegi baten beharrik izango.

Batek esan lezake, sistema bat sinpleegia egiterakoan, haren azterketa egiteak ez duela garrantzi handirik, zeren Naturan agertzen diren sistemak ez bait dira horrelakoak. Benetan, hori egia da, baina gaur egun laborategietan lor daitezkeen baldintzak kontutan hartuz, ez da alferrik galtzeko lana, sistema ideal hauen azterketa egitea. Are gehiago, esango genuke: Fisikan agertzen diren ekuazio edo lege guztiak, egoera errealen mugak kontsidera daitezke, edo beste era batetan esateko, sistema erreal baten baldintzak muga ideal horretara eramatean, sistema sinpleen ekuazioak beteko lituzke. (Gogora itzazue Mekanikan aztertutako marruskadura gabeko sistemak: benetan, ezin da pentsatu inolaz ere, Naturan daudenen artean, horrelako sistemarik dagoenik, baina laborategietan, edo kanpoko espazioko hutsean, presta daitezke ia-ia baldintza hori betetzen duten sistemak. Orduan, sistema horrek segituko lukeen higidura, sistema idealak duen higiduraren hurbilketa oso ona izango litzateke).

Sistema termodinamiko baten azterketa egitean, gauza berbera egingo dugu: hau da, sistema horrek, ideala balitz, segituko lukeen bilakaera termodinamikoa aztertzea.

Gai honen helburuak finkatzeko, esan dezagun zeintzu izango diren gure aztergaiak: gas idealak, hain zuzen ere. Sistema

hauek definitzeko, esango genuke gasak direla (hau da, hau, miragarria!), baina gas errealek dituzten ezaugarrien ordez, beste hauek suposatuko ditugu: gas hauek osotzen dituzten partikulek ez dute bolumenik (edo beste hitz batzutan, puntualak dira), ez dute beste partikuletatik elkarrakziorik jasaten, eta erabiliko ditugun presioak oso txikiak dira. Azken hau besteen ondorio bezala kontsidera daiteke, zeren presioa oso txikia bada, partikulak oso urrun bait daude elkarretik eta elkarrakzio elektrikoa arbuiagarria dela onar bait daiteke.

Eta, esan zenezakete, aurkitzen ote den Naturan horrelako sistemarik. Lehen esan dugun bezala, zehatz-zehazki ez; sistema hauetatik oso hurbil daudenak, bai, hala nola espazio "hutseko" gasa, izarren atmosferetako gasak (hidrogenoa, bereziki), eta gaur egun zenbait laborategitan izarretako baldintzak sorterazteko erabiltzen diren plasmak (materiaren laugarren egoera) fusio termonuklearra menperatzeko bidean. Lehenengo azpiatal batetan, gas ideal hauen egoera-ekuazioa, barne-energia, bero espezifikoak eta jasan ditzaketen prozesu itzulgarriak aztertuko ditugu, eta bigarrenean, Mekanikaren printzipioak erabiliz, talken prozesuak hain zuzen, nola hurbil gaitezkeen Termodinamikaren ekuazioetara. (Esan beharra dago, azken atal honetako talketan elkarrakzio bat agertzen zaigula, baina bakar bakarrik Mekanikaren ikuspuntutik onartutakoa. Hau da, talka aurretik eta talka ondoren ez dago inolako elkarrakziorik, eta ez dira kontsideratzen indar grabitatorioak. Gainera, gauzak gehiegi ez nahasteko, bakarrik kontsideratuko ditugu gasen partikulek ontzi baten hormen kontra dauzkaten talkak, eta ez beraien artean dauzkatenak. Azken hau, hurrengo maila batetako gai batetan aztertzen da, garraio fenomenoetan hain zuzen).

Pasa gaitezen, orduan, gas idealen ezaugarriak eta bilakaera aztertzera.

## 26.1. EGOERA-EKUAZIOA.

Aurreko gaian ikusi dugunez, sistema termodinamiko baten

egoera-ekuazioa, gehienetan hiru parametro ez-independenteren funtzioz adieraz daiteke, honela: $f(p,V,T) = 0$, non p delakoa presioa den, V delakoa , sistemak betetzen duen bolumena, eta, eta T, tenperatura absolutua. Sarritan, V bolumen osoaren ordez, bolumen molarra erabiltzen da: $v = V/N$, N delakoa sistema osotzen duten molen kopurua izanik. Formulazio berri hau erabiliz, egoera-ekuazioa honela idatziko genuke: $f(p,v,T)= 0$.

Gas erreal batentzako egoera-ekuazioa, tenperatura bakoitzarekiko, horrelakoa da:

$$pv = A\left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \ldots\right),$$

hau da, birialaren garapena deitzen denaren bezalakoa, non A, B, C, ... tenperaturaren funtzioak diren "birialaren koefizienteak" deitzen diren.

Gai honetan egin nahi duguna zera da, jokabide erreal honen sinplifikazio bat, sarreran esan dugun bezala, gas hauek edukiko luketen portaera ideala kontsideratuz, berau $p \longrightarrow o$ egiten dugunean gas guztiek betetzen duten hurbiltze ona bait da.

Nola lortzen dugu jokaera ideala? Ba, esan dugunez, presioa zerora ahal bezainbeste hurbilduz. Horrela, ondoko hau lortzen dugu:

$$\lim_{p \to o} (pv) = A .$$

Experientziak dioskunez, A horrek ez du gas-motaren gorabeherekiko zerikusirik. Beraz $A = A(T)$ dugu, eta aurreko gaian definituriko tenperatura-sistema eredutzat hartzen badugu, zera idatz dezakegu:

$$pv = RT .$$

Hau da, A delakoa T tenperaturarekiko zuzenki proportziona-

la da, R proportzio-konstantea izanik (baita ere, gasen konstanteaz ezagutua). Beronen balorea hauxe da:

$$R = 1.987 \frac{cal}{mol.°K} = 8.314 \frac{J}{mol.°K} .$$

Beraz, $p \rightarrow o$ egiten dugunean, edozein gasen egoera-ekuazioak ondoko adierazpena hartzen du:

$$\lim_{p \rightarrow o} (pv) = RT .$$

Hemendik atera genezake gas ideal baten definizioa: Edozein presiotarako, aipaturiko egoera-ekuazioa betetzen duena, alegia. Ikusitakoaren arauera, eta birialaren lehenengo koefizientea kalkulatu ondoren, honelaxe idatz dezakegu gas erreal baten egoera-ekuazioa:

$$pv = RT \left(1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \ldots\right) .$$

Argi dagoenez, $B/v$, $C/v^2$, ... adimentsionalak izan beharko dute eta ondorioz, B, C, ... ezin dira izan bakarrik tenperaturaren funtzioak.

Galdera honekin bukatzeko, idatz dezagun gas idealeen egoera-ekuazioa erabilgarriagoa den beste forma batetan: bolumen molarra bolumen osoaren funtzioan jarriz: $v = V/N$. Honekin zera geratzen zaigu:

$$pV = NRT .$$

<u>Oharra</u>: Termodinamikan erabiltzen diren magnitudeen artean, bi eratakoak bereiz daitezke: intentsiboak eta extentsiboak. Bietariko adibide erraz bat jartzeko, esan dezagun presioa intentsiboa dela eta bolumen extentsiboa dela. Hobeto ulertzeko, orekan dagoen sistema baten presioa, edozein puntutan, berdina da, eta ez dira batzen sistema horretan puntutik puntura dauden presioak. Era berean gertatzen da tenperaturarekin. Bolumenarekin, ordea, ez da gauza bera gertatzen: Sistema baten bolume-

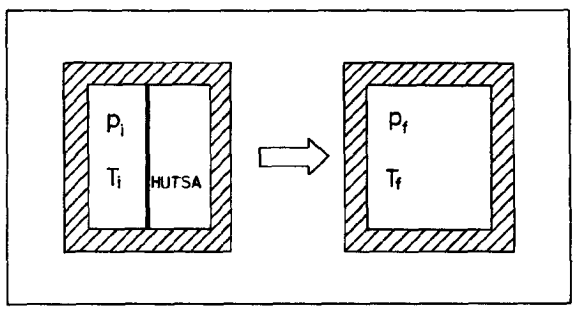
nak, partez parte, batu egiten dira sistema osoaren bolumena lortzeko. Parametro extentsibo bat intentsibotan bihurtzeko, sisteman dagoen mol kopuruarekin zatitzen da, lehen bolumen molarra kalkulatzean egin dugun bezalaxe. Barne-energia, bolumena, entropia eta abar aipa ditzakegu parametro extentsibo bezala. Notazioari buruz, parametro intentsiboak letra txikiz izendatuko ditugu (p,v,u), tenperatura izan ezik (T), eta extentsiboak, majuskulaz (V,U).

## 26.2. BARNE-ENERGIA. JOULE-REN EXPERIMENTUA.

Aurreko gaian ikusi dugunez, sistema termodinamiko baten barne-energiaren aldaketa, honela adieraz dezakegu:

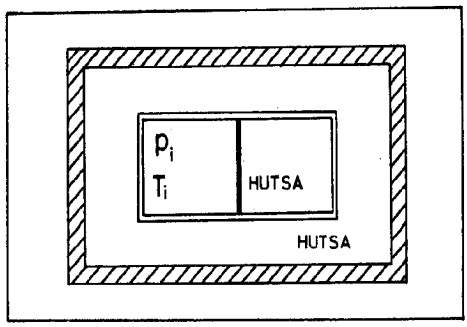
$$\Delta U = Q + W$$

Egin dezagun gas ideal batekin ondoko irudiak adierazten duen experimentua (zer esanik ez, experimentu ideal bat izango da).




Demagun, horma zurrun adiabatikoz inguraturiko ontzi bat dugula (hau da, ezin da barrutik kanpora edo kanpotik barrura ez materiarik, ez berorik, ez lanik pasa). Ontzi honen erdian, holtz bat ipintzen dugu, eta alde batetan $p_i$ presiopean eta $T_i$ tenperaturapean, gas ideal bat jartzen dugu, beste aldea hutsik utzirik. Hau honela, erdiko holtza kendu edo zabaldu egiten badugu, ezkerreko gasak ontzi osoa beteko du, prozesuak kanpoarekin inolako harremanik eduki gabe. Experientzia honi expantsio adiabatikoa deitzen zaio.

Experientzia hau praktikara eramateko aurkitzen dugun problemarik handiena, horma adiabatiko on batzu lortzean datza. Nola lor ditzakegu? Ba, hurbiltze ona litzateke, geure ontzia ontzi handiago batetan sartuz eta bien artean hutsa eginez lortutakoa (ontzi handiaren hormek ere adiabatikoak izan beharko lukete neurri handienean).




Kanpoko horma termostato batez eta bero-erregulatzaile batez ontziaren hormen tenperatura berberean mantentzen badugu, ez da bero-harremanik egongo, ez kondukzioz, ez konbekzioz.

Gure experimentura itzuliz, eta Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arauera, sisteman bertan beroaren eta lanaren balantzea nulua denez, barne-energia ez da aldatuko:

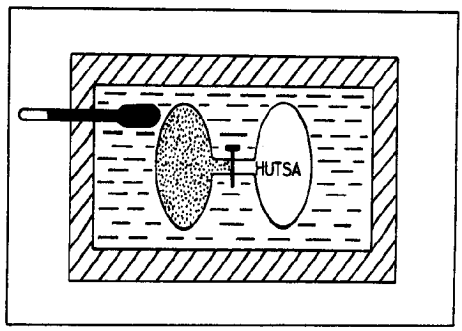
$$Q = 0 \quad , \quad W = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta U = 0$$

Beraz, zera idatz dezakegu:

$$U(T_i, V_i) = U(T_f, V_f)$$

Erlazio horrek ez digu ezer berririk argitzen, berez. Baina Joule-k, joan den mendean, ondoko experientzia egin zuen, barne-energiaren dependentziak ezagutu nahian, eta honek bai emango digula berorren berri.

Uraz beteriko upel adiabatiko batetan, ontzi bi sartu zituen, bata bestearekin hodi batez baturik, eta erdian giltza bat ipinirik. Batean gas bat ipini zuen eta bestean hutsa egin zuen. Gero, giltza zabaldu zuen eta lehenengo ontziko gasak expantsioa jasan zuen.




Eduki dezagun kontutan ezen ontzi bien hormak ez direla adiabatikoak, baina zurrunak direnez, gasak, bere expantsioan, ez du kanpoaren aurka lanik egiten. Orduan, bero transferientziarik balego, hau uretan sarturik zegoen termometro batekin neur ahal zezekeen, haren tenperaturaren aldaketa nabarituz.

Eta horrela egin zuen Joule-k, zera ikusiz, urak ez zuela inolako tenperatura-aldaketarik izan. Beraz, expantsioa isotermikoa izan zen, eta honen ondorioak berehalakoak dira:

Tenperatura-aldaketarik ez dagoenez,

$$T_i = T_f$$

eta bestalde, $U(T_i, V_i) = U(T_f, V_f)$ gertatzen denez, ondorio hau atera dezakegu:

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0 \quad ,$$

hau da, barne-energiak ezin dezakeela V-rekiko dependentziarik eduki. Azkenez, zera atera dezakegu:

$$U = U(T)$$

Geroztik, askotan aztertu izan da gauza berbera, eta lortu ere egin da U delakoak ba duela p eta V-rekiko dependentziarik. Zergatik ez zuen, ba, Joule-k dependentzia hori nabaritu? Erantzuna erraza da: urak eta ontziak zuten bero espezifikoa, gasarena baino askoz handiagoa zen —mila bat aldiz handiagoa— eta nahiz eta honek (gasak) tenperatura-aldaketa nahiko nabaria

ukan, termometroak ez zuen inolakorik detektatu.

Hala ere, Termodinamikaren 2. printzipioaren arauera (hurrengo gai batetan ikusiko dugunez), erraz ikus daiteke, gas idealen egoera-ekuaziotzat onartu dugun ekuazioa (hau da, $pV = NRT$ ekuazioa) betetzen duen gas baten barne-energiak, tenperaturaren funtzioa izan behar duela soilik, hau da, $U = U(T)$. Beraz, hauxe da gas idealetarako 2. hurbilketa: $U = U(T)$ dela esatea, V edo p-rekiko dependentzia arbuiaturik. Hau ez dugu harritzekoa, p eta V-rekiko dependentzia T-rekikoa baino askoz ere txikiagoa bait da. Beraz, gas ideak batek ondoko ekuazioak betetzen ditu:

$$pV = NRT$$

$$U = U(T) \ ,$$

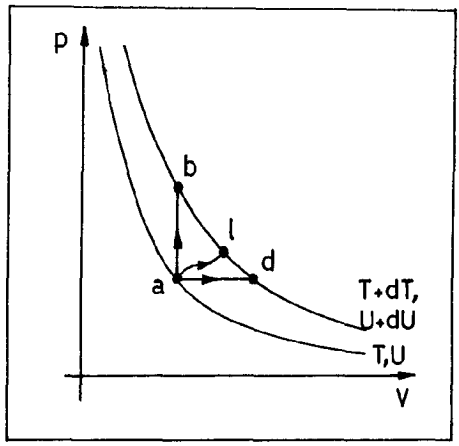
eta edozein gasek ekuazio hauek nahiko ondo betetzen ditu presio txikietan, experientziak frogatzen digunez.

## 26.3. BERO-AHALMEN ESPEZIFIKOAK. MAYER-EN ERLAZIOA.

Egoera-ekuazioa eta barne-energia ezagutuz gero, erraz ikus ditzakegu aurreko gaian definituriko magnitudeen gorabeherak (kasu honetarako). Konkretuki, bero espezifikoen arteko erlazioa. Gogora gaitezen bero-ahalmen espezifikoen esanguraz (ikus 25.4). Berauek, tenperatura-aldaketarekiko bero-aldaketak ematen dizkigute. Baina aldaketa hauek hainbat prozesu desberdinen bidez egin ditzakegu, berauen artean, lortu nahi dugun erlazioarekiko interes handia dutenak, bolumen eta presio konstantekoak direlarik, $c_V$ eta $c_p$ ematen dizkigutenak, alegia.

Honetarako, dakusagun alboko irudia, p - V diagrama bat da, eta bertan bi lerro isotermo (T = kte) agertzen zaizkigu. Baina oraintxe bertan ikusi dugunez, $U = U(T)$ da gas idealen kasuan (eta presio oso txikitan gas errealen kasuan); beraz, lerro isotermoak isoenergetikoak ere izango dira:

$$T = \text{kte} \longrightarrow U = \text{kte} \ .$$




Honela, ba, eta bi lerro isotermo ditugula, T eta T + dT isotermoak, batetik bestera edozein bidetatik joanez gero, energi aldaketa berdina izango da. Horrela:

$$\Delta U_{ab} = \Delta U_{ad} = \Delta U_{al}$$

(Kasu honetan, aldaketak infinitesimalak dira).

Demagun orain, V = kte dueneko prozesua eragiten diogula gas ideal baten mol bati. Definizioz, zera idatz dezakegu, aurreko gaian ikusitakoaren arauera:

$$\delta Q = c_V \, dT \ ,$$

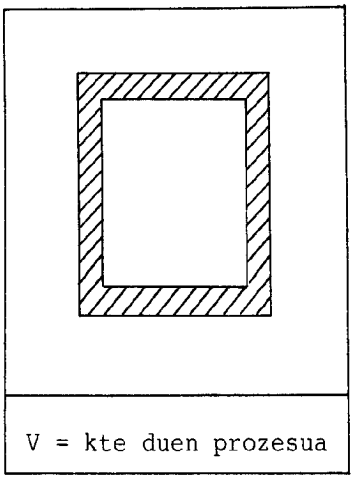
zeren

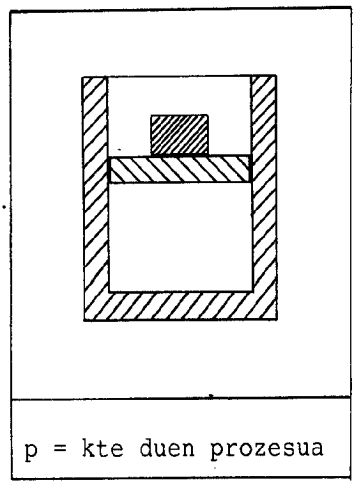
$$c_V = \lim_{\Delta T \to o} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad \text{bait da.}$$

Bestalde, V = kte denez, eta expantsiorik ez dagoenez, lanik ez da egiten, eta lehenengo printzipioaren adierazpenean $\delta W = 0$ da, eta ondorioz zera geratzen zaigu:

$$dU = c_V \, dT$$

Baina lehen esan dugun bezala, segi dezagun orain ad proze-




su isobaroa (p = kte). Lerro horrek isotermo berberak lotzen dituenez, barne-energiaren aldaketa lehenengoaren berdina izango da (prozesu hau, presio konstanteko pistoi bat duen ontzi baten bidez egin daiteke).

Kasu honetan, eta modu berean, definizioz, hauxe idatz dezakegu:

$$\delta Q = c_p \, dT \quad \text{eta} \quad \delta W = -p \, dV \; .$$

Baina gas idealen egoera-ekuazioa gogoratuz, eta mol bakar bat dugunez (N = 1):

$$pV = RT \longrightarrow p \, dV = R \, dT \qquad (p = \text{kte baita})$$

$$\delta W = -p \, dV = -R \, dT .$$

Azkenez, lehenengo printzipioaren arauera, hauxe idatz dezakegu:

$$dU = \delta Q + \delta W = c_p \, dT - R \, dT = (c_p - R) \, dT \; .$$

Baina prozesu isokoroan (V = kte) eta isobaroan (p = kte), lehen esan dugunez, barne-energiaren aldaketa berdina da.

Beraz:

$$dU = c_v\, dT = (c_p - R)\, dT \longrightarrow c_v = c_p - R\ ,$$

eta hemendik:

$$c_p - c_v = R\ .$$

Kasu orokorrean, gas idealaren mol bakarra izan ordez, N mol baditugu:

$$C_p - C_v = NR\ .$$

Eta hauxe da Mayer-en erlazioa.

---

Oharra: Garapen honetan ez dira nahastu behar jarritako hizkiak: Gogora ezazue bakoitza zer den:

$c_p$, $c_v$ : bero-ahalmen espezifiko molarrak

$C_p$, $C_v$ : bero-ahalmenak: $C_p = Nc_p$ eta $C_v = Nc_v$

Mol bakar baten kasuan : $C = c$ .

Erlazio hau, experientziak frogatzen duenez, nahiko ondo betetzen dute gas errealek, gutxienez presio ez-handiegien kasuan.

---

Generalean, intuitiboki ere uler daiteke erlazio hauen zergatikoa, ba, prozesu batetan bolumena konstante mantentzen bada, sistemari emandako bero-kantitatea, oso osorik erabiltzen da beraren barne-energia gehitzen (azken batez, sistemaren tenperatura gehitzen), zeren bolumenak konstante irauten duenez, ez bait du lanik egiten. Aldiz, presioa konstante mantentzeak, sistemaren bolumenaren aldaketa batetara eramaten gaitu (expantsio batetara, hain zuzen). Beraz, sistemari emandako bero-kantitatea ez da bakarrik erabiliko beraren tenperatura igotzen, baizik eta parte bat kanpoko indarren kontrako lan bat egiten

ere gastatzen da, bolumena gehitzerakoan. Beraz, azken kasu honetan, bero-kantitate handiagoa beharko genuke tenperatura-aldaketa berbera lortzeko. Ondorioz, $c_p > c_v$ izango da.

Halaber, experientziak ematen digu, presio txikitarako, gas monoatomikoetan $c_v$ eta $c_p$ direlakoen baloreak ondoko hauek direla:

$$c_v = \frac{3}{2} R \quad ; \quad c_p = \frac{5}{2} R .$$

Emaitza hauek, gasen teoria zinetikoan oinarrituz ere lor daitezke, beraien barne-energia osoa traslaziozko energia zinetikotzat bakarrik kontsideratuz. Horrela, goiko baloreak, gas nobleen eta bapore metalikoen kasuan erabiltzen dira.

Modu berean, gas biatomikoen kasuan ($N_2$, $O_2$,...):

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad \text{eta} \quad c_p = \frac{7}{2} R$$

direla ikusi da (hemen, traslaziozko energia zinetikoaz gainera, biraketazko energia zinetikoa ere kontutan hartu behar da).

$$c_v = c_v^\circ + c_v' (T) ,$$

$c_v$ delakoak T-ren dependentzia bait du $c_v'$ (T) modura, hots, bibrazioei loturiko funtzio horren modura. Eta gauza berbera dugu $c_p$ delakoaren kasuan, Mayer-en erlazioak zuzenki ematen digunez:

$$c_p = R + c_v = (R + c_v^\circ) + c_v' (T) = c_p^\circ + c_v' (T) .$$

Baina experimentalki frogatua izan denez, $c_v'$ (T) = $c_p'$ (T) da, eta ondorioz, hauxe idatz dezakegu:

$$c_p = c_p^\circ + c_p' (T) .$$

## 26.4. GAS IDEAL BATEN GAINEKO PROZESU ADIABATIKO ITZULGARRIAK. LERRO ADIABATIKOAK.

Demagun gas ideal baten N mol ditugula, eta beraietan prozesu bat eragiten dugula. Demagun era berean, prozesu horretan ez dagoela sistemaren eta kanpoaren arteko bero-harremanik (hau da, prozesu adiabatikoa dela).

Prozesua adiabatikoki iragan dadin, hurbiltze ona lor dezakegu prozesu arina behartuz, sistemaren eta unibertsoaren arteko bero-harremanak oso geldoak bait dira, baina hau ez litzateke prozesu itzulgarria izango. Edozein modutan, guk prozesu hori posible dela kontsideratuko dugu, nahiz eta praktikan baldintza guztiak ezin bete. Prozesu adiabatiko hauetan, sistemak berak kanpoko indarren aurka lana egin dezake, edota kanpokoek lana egin sistemaren gainean, eta tenperatura alda daiteke, kasurik orokorrenean. Egin dezagun, baldintza hauen pean, Termodinamikako lehenengo printzipioaren arauerako balantzea.

Horretarako, har dezagun prozesu osoaren zati infinitesimal bat. Prozesua adiabatikoa denez, $\delta Q = 0$ izango da, sistemari dagokionez, $dU = Nc_v\, dT$ eta $\delta W = -p\, dV$ diren bitartean.
Beraz:

$$dU = \delta Q + \delta W = -p\, dV = Nc_v\, dT\ .$$

Bestalde, eta gas idealen egoera ekuazioa ezaguna dugunez:

$$p\, dV + Vdp = NR\, dT\ ,$$

eta azken expresio hauen artean dT eliminatzen badugu:

$$p\, dV + Vdp = -\frac{R}{c_v}\, p\, dV,$$

eta hemen, Mayer-en erlazioa kontutan hartuz:

$$c_p - c_v = R \longrightarrow p\, dV + Vdp = -\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) p\, dV$$

$$Vdp = -\gamma p\, dV\ ,$$

non $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ egin dugun. Balore honi "indize adiabatikoa" deritzo, eta beraren funtzioan zera geratzen zaigu:

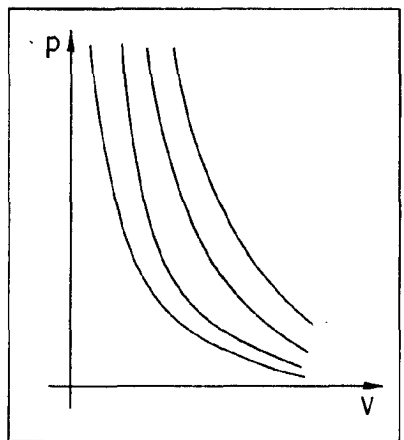
$$Vdp + \gamma pdV = 0$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \ .$$

Eta $\gamma$ = kte kontsidera dezakegunez, azken adierazpen hori integratuz, zera lortzen dugu:

$$\ln p + \gamma \ln V = kte$$

$$p\ V^{\gamma} = kte \ .$$




Lerro adiabatikoak
p-V diagraman

Hauxe da lerro adiabatikoen ekuazioa. Berau beste aldagaien funtzioan ere adieraz daiteke, egoera-ekuazioaz baliatuz. Honela, kalkulu erraz batzu eginez, zera lortzen dugu:

$$T\ V^{\gamma-1} = kte \qquad\qquad T\ p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = kte \ .$$

Bestaldc ikus dezagun prozesu isotermoetan zer gertatzen den, hau da, tenperatura konstantepean eginikoetan. Horretarako, sar ditzagun gas ideal baten N mol ontzi batetan horma diatermanoz inguraturik. Gauzak horrela, expantsio bat eragin diezaiokegu gas idealari. Kasu honetan, prozesuen gorabeherak

ekuazio honek emango dizkigu:

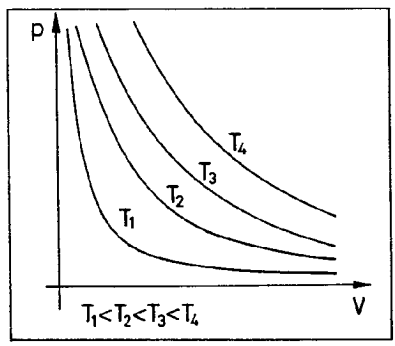
$$pV = NRT = kte \ ,$$

zeren T = kte bait da eta N-k prozesuan konstante irauten bait du.

Beraz:

$$pV = kte$$

da gas idealen lerro isotermoen ekuazioa.




Lerro isotermoak p-V diagraman

*Ikus dezagun lerro adiabatiko eta lerro isotermoen arteko erlazioa. Horretarako, p - V planoko edozein puntutan, bertatik pasatzen diren mota bietako lerroen aldapak lortuko ditugu. Lerro adiabatikoen kasuan, $pV^{\gamma}$ = kte denez, berau beste era honetan idatziz: $p = kte/V^{\gamma}$, aldaparen balorea ondoko deribatuak emango digu:

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_{ad} = -\gamma \frac{kte}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p}{V} \ .$$

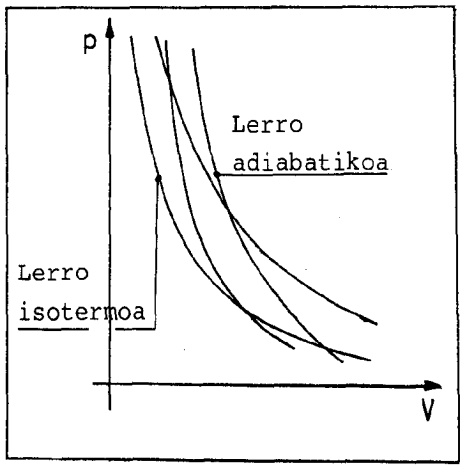
Hauxe da lerroen aldapa, negatiboa, espero genuen bezala.

Lerro isotermoen kasuan, gauza berbera egiten dugu:

$$pV = kte \longrightarrow p = kte/V$$

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_{is} = -\frac{kte}{V^2} = -\frac{p}{V} \ .$$

Ikusten dugunez, forma aldetik guztiz antzekoak dira batak eta besteak, $\gamma$ faktorea positiboa bait da, eta bakarrik aldapa-gradua aldatzen da.




Bestalde, $\gamma > 1$ da beti, $c_p > c_v$ bait da; horregatik, lerro adiabatiboek, isotermoek baino aldapa gogorragoa dute (handiagoa balore absolututan). Analitikoki:

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_{ad} \Big/ \left.\frac{dp}{dV}\right|_{is} = \gamma > 1$$

Ariketa bezala, kalkula dezagun gas ideal batek expantsio adiabatikoan eginiko lana.

Aurreko gaiaren lanaren adierazpenetik:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -p\,dV = -kte \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -kte.\ \frac{1}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right] .$$

Baina: $kte\ .\ V^{1-\gamma} = \frac{kte}{V^\gamma}\ .\ V = pV$

Hau ordezjarriz, zera geratzen zaigu azkenean:

$$W = -\frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} .$$

Hau da, hasierako eta bukaerako presio eta bolumenak ezagutuz, ez da gauza zaila eginiko lanaren balorea kalkulatzea.

Aipaturiko baloreak ezagutzen ez badira ere, baina prosezuaren hasierako eta bukaerako tenperaturak ezagunak badira, beste bide hau segi dezakegu: Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arauera, prozesu adiabatikoetan zera idatz dezakegu:

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta W ,$$

zeren $\delta Q = 0$ bait da. Baina $dU = Nc_v dT$ denez:

$$\delta W = Nc_v dT .$$

Azken hau integratuz, $c_v$-k tenperaturarekin konstante irauten duela suposatuz, erraza da lanaren adierazpena lortzea:

$$W = Nc_v \int_{T_1}^{T_2} dT = -Nc_v(T_1-T_2) .$$

Aipaturiko prozesu isotermo eta adiabatikoez gain, idazle batzuk bien artean daudenak ere definitzen dituzte, prozesu "politropikoak" deiturikoak hain zuzen ere. Azken hauek beteko lituzketen ekuazioak, $pV^k$ = kte eratakoak izango lirateke, non $1 < k < \gamma$ izango den. Edozein modutan, gu ez gara prozesu hauetaz arduratuko.

## 26.5. GASEN TEORIA ZINETIKOA.

### 26.5.1. Sarrera gisa.

Edozein behatzailek, besterik gabean, munduaren irudi kontinuo edo jarraia du. Eta geuk ere horrela tratatu izan ditugu liburu honetan materia eta beraren propietateak. Baina hainbat gertaerak fisikariak honetara eraman zituen, materia gauza desjarraia dela sinestera. Aipa ditzagun, adibidez, gorputzen konprimagarritasuna, gasen portaera berezia, eta abar.

Gaur egun, denek onartua den zerbait da, gorputzak mikroskopikoki partikulaz osoturik daudela, nahiz eta hauen izakera oso eztabaidatua izan den gaur egun arte.

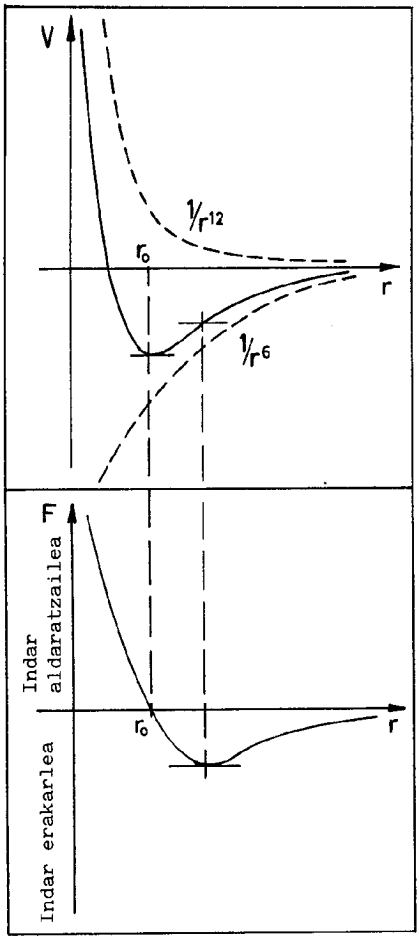
Ikuspuntu honen arauera ere egin dezakegu fenomeno fisikoen estudioa, beste bidetatik heldu gareneko ondorio berberetara helduz. Hauxe da, zuzenki, teoria zinetikoaren oinarria. Azterketa hau nahi bezain zabal egin genezake (gasetara ez ezik, likidoetara ere aplika geniezaieke aipaturiko teoria), baina ez dugu hiruzpalau puntu besterik tratatuko, eta berauek azaletik ikusiz.

Horretarako, lehenengo eta behin, sinplifikazio bat egingo dugu. Honen arauera, atomoak eta molekulak (partikulak, hitz batetan), esfera zurruntzat hartuko ditugu, beraien konposizioa kontutan hartu gabe. Hau, noski, eta esan dugun bezala, sinplifikazio bat besterik ez da, eta berau egitean, zenbait fenomeno teoriatik kanpo uzten ditugu, hala nola fenomeno optikoak, elektromagnetikoak, nuklearrak eta abar.

Bigarrenez, partikulen arteko indarrei buruzko kontsiderazio batzu egingo ditugu. Espero izatekoa da, partikulen arteko nolabaiteko indarren bat. Besterik ez bada ere, indar grabitatorioa. Eta gorputzak osotzen dituzten partikulen arteko loturak ikusiz, berauek mespreziagarriak direla dakusagu, partikulen artean beste indar zeharo biziagoak bait daude, indar nahiko konplikatuak bestalde, ez bait dira lege sinple batetara lotzen. Edozein modutan, indar hauetariko batzu, elektrikoak dira, eta ez dute distantziaren karratuaren alderantzizko proportzionaltasunaren lege sinplea segitzen.

Partikulen arteko distantzia handia denean, indarra erakarlea eta oso txikia da, baina elkarren hurbilean aurkitzen direnean, beraien nukleoen diametroaren arauerako distantziatan, indarrak biziro aldaratzaileak dira.

Ikus ditzagun alboko irudietan horrelako elkarrakzio-motari dagozkion eremu eta indarraren grafikoak. Kasu honetan, parti-




kula bik osoturiko sistema baten Lennard-Jones-en potentziala marrazten dugu, bi gaiez osoturikoa: bata, erakarlea, $r^{-6}$-ren proportziozkoa, eta bestea, aldaratzailea, $r^{-12}$-ren proportziozkoa. Potentzial bien batuketaz lortzen da potentzial erresultantea, lerro jarraiaz marraztutakoa. Honek, ikusten duzuenez, minimo bat du, $r_0$ distantziara. Ondorioz, distantzia horretara, indar erresultantea nulua izango da eta hasierako higidurarik ez balego, Mekanikak dioskunez, oreka egonkorrean segituko lukete. Baina hori ez da izaten gure kasua, partikulak higidura erradial erlatiboan ari bait dira eta oreka egonkorra lortuko balute, materia guztiak egoera kondentsatutara jo egingo bait luke (solido edo likidora, alegia). Are gehiago, ezin eduki genezake atmosferarik, partikula guztiak, grabitatearen eraginaz, lurrazalera amilduko bait lirateke. Garbi dago hauek guztiok ez direla gertatzen, eta honen zergatikoa partikulen energia zinetikoan datza. Honek, partikulak higidura batez ari direla esan nahi du, eta beraren eragin pean, molekulek, atomoek (partikulek, hitz batean), elkarrekiko higidura dute, eta grabitate-indarrik ez balego, partikulak unibertsoan dispertsatuko lirateke, higidura kaotiko honen eraginpean sakabanatzera jotzen bait dute. Honekin ere segi genezake baina textu honetako helburuetatik kanpo geratzen da. Berauen barnean, laburtuz, zera esan dezakegu: partikulen higidura, higidura termikoaren, grabitatearen eta indar elektromagnetikoen artean lortutako oreka bat da.

Aurrerago ikusiko dugunez, higidura honen abiadura T tenperaturarekin handituz doa, beraren funtzioa bait da. Horrela, T handituz doanean, gorputza egoera solidotik likidora doa, eta honetatik gasenekora, beraien mugimendutan partikulek geroz eta askatasun handiagoa lortuz.

Hauek guztiok kontutan hartuz, besterik gabe, has gaitezen teoria zinetikoaren gainetiko azterketaz.

26.5.2. Materia nolakoa den.

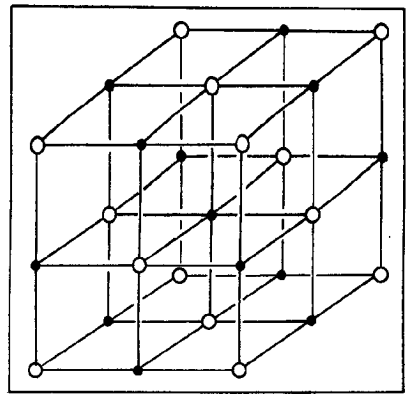
Esan dugun bezala, materia partikula mikroskopikoz osoturik dago. Gorputz puruen kasuan, partikula guztiak berdinak dira. Partikula hauek, bai atomoak zen molekulak izan, oso txikiak direnez, molekula-gramo bat (mol bat) partikula-kopuru oso handiak osotzen du. Gainera, edozein gorputz kimikoren molekula-gramo bat osotzen duten partikulen kopurua, teoriaren konstante tipiko bat da, Avogadro-ren zenbakia, eta materia-mota guztietan berbera da. Orain arte, zenbaki honen balorerik zehatzena, kristal baten geruza melokularren arteko distantziak neurtuz lortu izan da, X-izpiez baliatuz. Hauxe da:

$$N_A = 6.02217 \cdot 10^{23} \text{ molekula/mol} .$$

Zenbaki hau ezagutuz, edozein atomo edo molekularen masa lor dezakegu.

Nola agertzen zaigu partikula-multzo izugarri hau materiaren barnean? Ba, hiru mota desberdinetan: egoera solido, likido eta gaseosotan. (Egia esan, laugarren egoera bat ere aipatzen da, "plasma" deritzona. Egoera honetan, atomoek elektroi guztiak galdu dituzte, eta bakarrik baldintza oso gogorretan lor daiteke, hala nola izarretan, edo laborategietan, eremu magnetiko oso handi baten menpean. Gu ez gara hemen egoera honetaz arduratuko). Lehenengo bi egoeretan, hau da, egoera kondentsatuetan, bi partikula kontsekutiboren arteko distantzia konstantetzat har dezakegu. Partikulen elkarren arteko loturak (kohesio-indarrak) gogorrak dira, eta hauek, partikulak honetara

Sistema kubikoan kristalizatutako gorputz biatomiko baten kristal bat, mikroskopikoki adierazirik. Atomoen arteko lotura, zurruntzat baino, elastikotzat hartu behar dugu.



behartzen dituzte, alegia, orekan beraien arteko batezbesteko distantziak denboran zehar konstante mantentzera. Honek ez du esan nahi partikulak geldi daudenik; bai batean zein bestean, partikulek bibratu egiten dute, baina bibrazio-zentruek lehen esandakoari jarraitzen diote (horregatik jarri dugu "batezbesteko distantziak" izena).

Egoera likidoan, halaber, loturek ez dute estruktura finkorik mantzentzeko adinako indarrik. Eta horretan bereizten dira solidoak eta likidoak: azken hauek bakarrik lokalki gordetzen dute finkapen hori, solidoek, aldiz, beraien osotasunean.

Egoera gaseosoan, lotura-indarrak hain dira motelak, nuluak direla kontsidera dezakegula. Eta noski, partikulen elkarren arteko kokatzea guztiz aleatorioa da. Plasmei ere, gasen eredua aplika geniezaieke.

Beraz, egoera solidotik likidora, eta likidotik gaseosora igarotzean, desordena handituz doa, partikulek gero eta askatasun handiagoa dute, hau da, energia zinetikoa irabazten dute, eta tenperatura igoz doa, aurreko gaian eta gai honetan bertan ikusi dugunaren arauera.

| | | |
|---|---|---|
| $V_m$ txikia | $V_m$ ertaina | $V_m$ handia |
| $E_k$ txikia | $E_k$ ertaina | $E_k$ handia |
| Solidoak | Likidoak | Gasak |

$\longrightarrow E_k$

Hau da, nolabait, aurreko grafikan adierazten dena, non $E_k$ energia zinetikoa, eta $v_m^2$ batezbesteko abiadura koadratikoa diren.

Gure estudioan, egoera gaseosoa aztertuko dugu, eta lotura--indarrak nulutzat onartuko ditugu, talka-uneetan izan ezik.

### 26.5.3. Higidura browndarra eta batezbesteko abiadura koadratikoa.

Gure sinplifikazioan, gauzak honela doaz gasaren barnean: Partikulek, higidura uniformea dutela, ibilbide zuzenak betetzen dituzte.

Noizean behin, hauetako bik txokatu egiten dute, eta bien abiadura, bai moduluz eta bai norabidez, aldatu egiten denez, beste ibilbide berriak (lehen bezala uniforme eta zuzenak) hasiko dituzte.

Honela, ba, mikroskopikoki gas bat behatuko bagenu, zera ikusiko genuke: partikula-multzo handi bat, eta bertan partikula bakoitzak nolanahiko norabideko ibilbidea betetzen, noizean behin beste partikulen aurkako txokeak dituelarik.

Hau ederto nabari daiteke edozein likidotan, masa handiko molekulak sartzen baldin baditugu (hau da, mikroskopioaz ikus ahal daitezkeenak). Orduan, molekula hauen gorabeherak segitzen baditugu, beraien ibilbideak hautsiak direla ikusiko dugu. Higidura honi, higidura browndarra deritzo.

Partikulen egoera zinematikoa adierazteko, ezin dugu partikula bakoitzaren abiadura eman. Guztien abiadurak berdinak direla onartuz (moduluz, noski), modulu horren karratua honela adieraz daiteke:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 ,$$

non $v_x$, $v_y$, $v_z$, edozein partikularen abiaduraren osagaiak diren. Orokorki (are gehiago, inoiz ere ez) hori ez da gertatzen,

eta partikulek edozein abiadura eduki dezakete. Demagun, N direla dauzkagun partikulak, beraien abiadurak $v_i(v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$ direlarik. Partikula guztiak x norabidean dauzkaten osagaien karratuen batezbesteko balorea, hauxe da:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_i v_{xi}^2 \ .$$

Beste osagaiekin, gauza bera gertatzen da. Orduan, partikulentzako ezaugarritzat har daitekeen balorea, abiadura osoaren karratuaren batezbestekoa da, batezbesteko abiadura koadratikoa, hain zuzen ere. Hauxe da:

$$\overline{v_m^2} = \frac{1}{N} \sum_i (v_{xi}^2 + v_y^2 + v_z^2) = \left[\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}\right] \ .$$

Bestalde, partikulek espazioan norabide berezirik segitzen ez dutenez, (hau da, higidurak guztiz koatikoak eta arbitrarioak direnez), zera idatz dezakegu:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \ .$$

Ondorioz:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v_m^2}}{3} \ .$$

Estatistikoki, partikula-kopurua hain handia denez, banaketa-funtzio bat defini dezakegu, N(v), eta v edozein partikularen abiadura bada, N(v)dv gaiak v eta v+dv abiaduren tartean zenbat partikula dauden adieraziko digu.

Horrela, batezbesteko abiadura koadratikoaren adierazpena, hauxe izango litzateke:

$$\overline{v_m^2} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 N(v)dv \ .$$

Integralen mugak 0-tik ∞ -ra doaz, abiadura posible guztiak sartzekotan. Aipaturiko N(v) horrek v eta v+dv tartean, abiadura--unitateko dauden partikulen kopurua adierazten digu. Hortik, partikula guztien kopurua honela lor daiteke:

$$N = \int_0^\infty N(v)dv \ .$$

Ondorioz, gaseko partikula guztien batezbesteko energia zinetikoa, honela idatz genezake:

$$\overline{E_k} = \frac{N}{2}m\overline{v_m^2} = \frac{N}{2}m\left[\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}\right]$$

edota, aurreko banaketa-funtzioaren arauera:

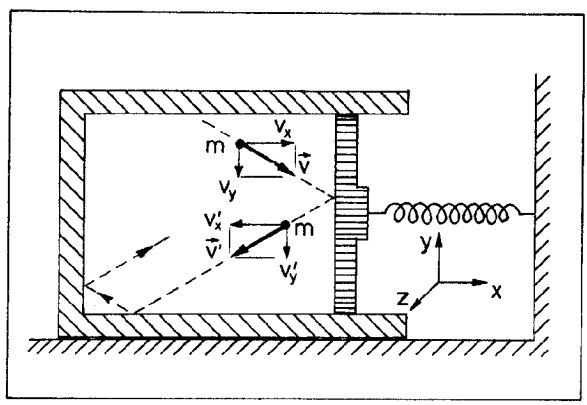
$$\overline{E_k} = \frac{1}{2}m\int_0^\infty v^2 N(v)dv \ ,$$

m konstantetzat onartzen bait dugu.

26.5.4. Presioaren lorbide berria.

Demagun irudian agetzen den partikula. Gasa daukan ontziak, partikularen ibilbidea oztopatuko du. Ikus dezagun zein den partikula horrek enboloari emango dion bulkada. Kasurik idealenean, talka guztiz elastikoa dela kontsideratuko dugu. Horrela, partikulak hormaren aurka talka egin ondoren, bakarrik hormaren perpendikularra den osagaia aldatuko da, besteek konstante irauten dutelarik:

$$v'_x = -v_x \qquad v'_y = v_y \qquad v'_z = v_z \ .$$

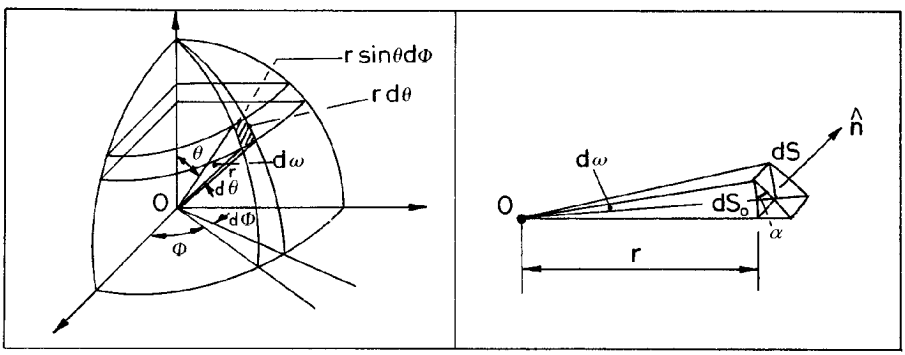



Lehen definituriko N(v) banaketa-funtzioak, erabilitako V bolumenean, han zeuden partikula guztietatik, N, zenbat ziren v abiadura zeukatenak adierazten zigun. Baina partikulen abiadurak ez dira bakarrik banatzen abiaduren moduluak hartuz, be-

raien norabidez ere baizik. Beraz, abiaduren banaketa-funtzioak espazioko norabideak ere kontsideratu beharko lituzke. Orduan, zenbat izango dira gure bolumenean ez bakarrik v abiadura (moduluz) daukaten baina $\vec{v}$ bektorearen norabidean ere dauden partikulak? Azken hau, $N^*(\vec{v})$ banaketa-funtzioaz adieraziko dugu.

Norabide baten tarte infinitesimala (edo ingurua) espazioan, angelu solido infinitesimalaz adierazten da. Koordenatu esferikotan, irudiko gainazal infinitesimalari dagokion angelu solido infinitesimala, $d\omega$ da. Zirkunferentzia batetan erradianak definitzean egiten den bezalaxe, esfera oso bati dagokion angelu solido osoa $4\pi$ estereorradian da, edota, haren azalera osoa, $4\pi r^2$, eta erradioaren karratuaren bidezko zatiketa da. Beraz, irudiko azalera infinitesimalari dagokiona, honela adieraz daiteke:

$$d\omega = \frac{r^2 \sin\theta \, d\Phi d\theta}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\Phi \ .$$




O puntutik ikusitako azalera infinitesimala norabide erradialaren perpendikularra ez balitz, irudian dS-rekin gertatzen den bezala, orduan dS azalerari eta berari dagokion projekzio esferikoari dagokion angelu solidoa berdina da. Kasu honetan:

$$d\omega = \frac{dS_o}{r^2} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2} \ .$$

Eranskin honetan finkatuz, ikus dezagun definituriko banaketa-funtzio bien artean betetzen den erlazioa, N(v)-ren eta $N^*(\vec{v})$-ren artean, hain zuzen ere. Ez da zailegia erlazio hau

betetzen dela ikustea :

$$N(v) = \int_0^{4\pi} N^*(\vec{v})d\omega \ ,$$

zeren $N^*(\vec{v})$ banaketa-funtzioak, v abiadura eta gainera $\vec{v}$ bektorearen norabidean dauden partikulak adierazten baldin baditu, espazioko norabide eta norantza guztiak hartzean (horregatik integralaren mugak, esteorradianetan adierazirik), hortik lortuko dugun emaitzak, v abiadura duten ontziko partikula guztien kopurua emango bait digu.

Geure buruari egin diezaiokegun hurrengo galdera, hauxe da: Zein izango da, dauzkagun partikulen artean, v eta v+vd abiaduren tartean eta gainera $d\omega$-k seinalatzen duen norabidean aurki daitezkeen partikulen kopurua? Probabilitateaz baliatuz, alde batetik, esan dugunez, v abiadura daukatenen kopurua N(v) bada, v eta v+dv abiaduren tartean izango ditugunak, N(v)dv izango dira, eta gainera hauek v konkretu baten inguru infinitesimalean egon behar badute, $d\omega$-k seinalatutakoan, azken probabilitate hau $d\omega/4\pi$ denez (espazioko norabide guztiek probabilitate berdina dutelako), baldintza biak betetzen dituzten partikulen kopurua, bien biderkatetaz lor daiteke:

$$[N(v)dv] \ . \ (\frac{d\omega}{4\pi}) = [N^*(\vec{v})d\omega]dv \ ,$$

non:

N(v)dv : v eta v+dv tartean dauden partikulak
$d\omega/4\pi$ : espazioko $d\omega$ konoan egoteko probabilitatea
$N^*(\vec{v})d\omega$: aipaturiko konoan, $\vec{v}$-ren norabidearen inguruan eta v balorea daukaten partikulak

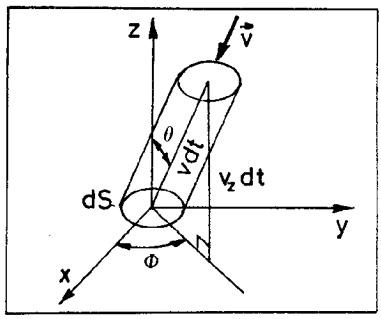
diren.

Azkenez, banaketa-funtzioei buruz zera idatz dezakegu:

$$\int_0^{\infty} N(v)dv = N \quad \text{(ikus 427. orrialdea)},$$

edota:

$$\int_0^{\infty} dv \int_0^{4\pi} N^*(\vec{v})d\omega = N \ .$$




Aplika dezagun ikusitakoa presioaren lorbide berrirako. Alboko irudian, dS hormaren edo enboloaren azalera infinitesimala da. Hormarekin partikulek dauzkaten talkak, guztiz elastikoak direla onartuko dugu. Kalkula dezagun dS-rekin $\vec{v}$ abiaduraren inguruan (bai moduluz eta bai direkzioz) talka egiten duten partikulen kopurua dt denbora tarte infinitesimalean. Begi bistan dagoenez, marraztutako zilindroan dauden partikulak izango dira esandako baldintzak betetzen dituztenak, noski. Talka hauetan, lehenago esan dugunez, partikulen abiadurak bakarrik z-ren direkzioan aldatuko dira ($v_z$-tik $-v_z$-ra pasatuko dira), eta partikula bakoitzak talkaren ondorioz jasango duen momentu linealaren aldaketa, $-2mv_z$ izango da. Alderantziz, hormak jasango duen bulkada, $2mv_z$ izango da.

Ontzi osoan dauden partikulen kopurua N bada, marraztutako zilindro infinitesimalean daudenena $(N/V)dS.v_z dt$ izango da, eta hauen artean, esandako baldintzak betetzen dituztenen kopurua:

$$n[f^*(\vec{v})dvd\omega] \ . \ dS \ v_z dt \quad ,$$

non $n = N/V$ eta $f^*(\vec{v}) = N^*(\vec{v})/N$ diren. Azken honek, partikula bakoitzeko v abiaduraz eta gainera $\hat{v}$ bertsoreak seinalatutako norabidea eta norantzan zenbat dauden adierazten digu (hitz batean, $f^*(\vec{v})$, $N^*(\vec{v})$ banaketa-funtzioari dagokion funtzio errenormalizatua, ondorioz, aurrerago idatzitako integralak honela

berridatziko genituzke:

$$\int_0^\infty dv \int_0^{4\pi} f^*(\vec{v})\, d\omega = 1 \quad \text{eta} \quad \int_0^\infty f(v)dv = 1 \ .$$

zeren $f(v) = N(v)/N$ izango bait litzateke).

Idatzitakoarekin, dS azalera infinitesimalak jasango duen bulkada, hauxe da:

$$(nf^*(\vec{v})d\omega dvdS\ v_z dt).2mv_z = (nf(v)dv\frac{d\omega}{4\pi}.v_z dtdS)2mv_z \ ,$$

lehen ikusi dugun berdintza baten arauera. dt-rekin zatitzean, dS-k jasandako indarra lortuko genuke, eta ondoren dS-rekin zatitzen badugu, hormak jasandako presioa:

$$d^3p = nf(v).2mv_z^2.\frac{d\omega}{4\pi}\ dv \ ,$$

non $d^3p$ jarri dugun zeren presio hori hirugarren ordenako diferentziala bait da:

Bestalde:

$$\begin{cases} v_z = v\cos\theta \\ d\omega = \sin\theta d\theta d\phi \end{cases} ,$$

azken hau galdera honetan bertan ikusi izan dugunez. Aurreko ekuazioan balore hauek ordezjarri ondoren, egin dezagun $\vec{v}$ bektoreari dagozkion norabide posible guztietarako integrala. Horrela, v eta v+dv abiaduraren tartean dauden partikula guztiek, hormak jasaten duen presio osoan daukaten kontribuzioa lortuko dugu. Hori eginez:

$$dp = \frac{1}{2\pi}\ nf(v)dv.mv^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{3}\ nmv^2 f(v)dv.$$

($\theta$ angeluarekiko integralaren mugak, 0 eta $\pi/2$ dira, eta ez 0 eta $\pi$, zeren dS gainazalera alde bakar batetik heltzen diren partikulak kontsideratu behar bait ditugu, eta ez alde bietatik

hel daitezkeenak).

Azken pauso batetan, kalkula dezagun abiadura guztietako partikulek hormaren gainean eginiko presioa. Horretarako, beste integrazio bat besterik ez dugu egin behar, kasu honetan abiadurarekiko. Abiadura guztietako partikulak sartzeko asmoz, integralaren mugek 0-tik infinitura joan beharko dute. Horrela:

$$p = \frac{1}{3}\, nm\int_0^\infty v^2 f(v)dv = \frac{1}{3}\, nm\overline{v_m^2} \ ,$$

zeren, lehentxoago ikusi izan dugunez:

$$\overline{v_m^2} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 N(v)dv = \int_0^\infty v^2 f(v)dv \ .$$

Beraz, presioak ba du zerikusirik gasak osotzen dituzten partikula mikroskopikoekin. Ikusten dugunez, haien talka diskretuz sortzen da presioa. Ez da, ba, kontzeptu jarraia.

Biderka dezagun orain presioaren adierazpen berria ontziaren V bolumenarekin, eta berrordena dezagun emaitza:

$$pV = \frac{1}{3}\, nVm\ \overline{v_m^2} = \frac{2}{3}N.\frac{1}{2}m\overline{v_m^2} = \frac{2}{3}\,\frac{N}{N_A}.(N_A.\frac{1}{2}m\overline{v_m^2}) \ ,$$

non $N_A$, Avogadro-ren zenbakia den. Beraz, ontziko partikulen kopuru osoa N bada, $N/N_A = \nu$ izango da bertan dauden molen kopurua, eta parentesi artean dagoen gaia mol baten traslaziozko energia zinetikoa denez, K delakoa, beste era honetan geratzen zaigu goiko ekuazioa:

$$p\ V = \frac{2}{3}\,\nu K \ .$$

(Oharra: Esandakoa, bakarrik gas monoatomikoetara aplika daiteke. Besteetan, molekulek, traslaziozko energia zinetikoaz gain, ba dute biraketazkoa eta bibraziozkoa ere).

Konpara dezagun erdietsi dugun azken formula, gas idealetarako gai honetan bertan eta ikuspuntu makroskopikotik idatzi dugunarekin:

$$pV = \frac{2}{3}\nu K \quad \text{eta} \quad pV = \nu RT \ .$$

Biak berdinak balira, zera bete beharko litzateke:

$$\frac{2}{3}K = RT \longrightarrow T = \frac{2K}{3R} \ .$$

Hau da, $T \propto K$ : Gas baten tenperatura, gas hori osotzen dituzten partikulen energia zinetikoaren proportziozkoa da. Hauxe da, hain zuzen, teoria zinetikoaren ikuspuntutik, tenperaturaren definizioa.

Bukatzeko, defini dezagun beste konstante unibertsal bat: Boltzmann-en konstantea. Definizioz, konstante honen balorea hauxe da:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.381 \ . \ 10^{-23} \ \text{jul/°K} \ .$$

Konstante honen funtzioz, eta $K = N_A \ . \ \frac{1}{2}\overline{mv_m^2}$ ekuazioan oinarrituz, zera idatz dezakegu:

$$K = N_A \ . \ \frac{1}{2}\overline{mv^2} = \frac{3}{2}RT \ .$$

Hemendik:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}kT \ .$$

Baina

$$\overline{v_m^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \qquad \text{eta} \qquad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v_m^2}}{3} \ .$$

Beraz:

$$\frac{1}{2}\overline{mv_i^2} = \frac{1}{2}kT \ .$$

Hau da, gas horren partikula bakoitzari eta askatasun-gradu bakoitzari dagokion energia zinetikoak, $\frac{1}{2}kT$ balio du. Printzipio honi, <u>energiaren ekipartizioaren printzipioa</u> deritzogu. Honek garrantzi handia du gasen bero-ahalmen espezifikoak kalku-

latzerakoan, zeren ez bait da bakarrik betetzen traslaziozko askatasun-graduekin baizik eta edozein motatako askatasun-graduekin ere, hala nola bibraziozko eta biraketazko askatasun--graduekin ere.

Zer da guk idatzi dugun traslaziozko energia zinetiko molarra, K delakoa alegia? Gas monoatomikoetan gerta daitekeen higidura bakarra traslaziozkoa denez, eta beste elkarrakziorik ez dagoenez, huts hutsik, barne-energia da, U. Orduan, bero--ahalmen espezifiko molarrak kalkulatzeko, zera egiten genuen:

$$c_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V \quad .$$

Baina esandakoarekin, $U = \frac{3}{2}\,RT$ . Beraz:

$$c_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = \frac{3}{2}\,R \quad .$$

Presioa konstante mantenduz, gasa berotzen badugu, gasak expantsio lana egingo luke, eta prozesu infinitesimal batetan eginiko lana, hauxe izango litzateke, mol bakoitzeko:

$$p\,dV = R\,dT \quad ,$$

eta Termodinamikaren lehenengo printzipioaren arauera:

$$\delta Q = dU - \delta W = dU + p\,dV = \frac{3}{2}\,R\,dT + R\,dT = \frac{5}{2}\,R\,dT \quad .$$

Presio konstantezko bero-ahalmen espezifiko molarraren adierazpenetik:

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \frac{5}{2}\,R \quad .$$

Hau da:

$$c_p - c_V = R \qquad \text{eta} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3} = 1.667 \quad ,$$

experientzarekin guztiz ados doana berau.

Gas poliatomikoetan, baloreak desberdinak dira. Horrek esan nahiko luke, ez direla mespreziagarriak biraketarekin eta bibrazioarekin loturik doazen energiak.

## 27. GAIA: TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIPIOA

27.1. Kelvin-Planck-en eta Clausius-en enuntziatuak

27.2. Prozesu itzulgarri eta itzulezinak

27.3. Carnot-en zikloa

27.4. Tenperaturaren eskala termodinamikoa

27.5. Clausius-en teorema

27.6. Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren formulazio matematikoa

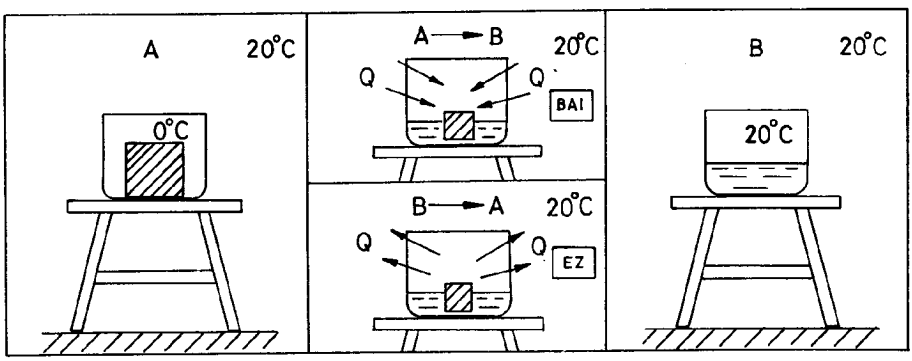
27.7. Entropia eta itzulezintasuna

27.8. Entropiaren gehikuntzaren printzipioa.

Demagun 20°C-tako tenperaturako gela batetan urez beteriko ontzi diatermanoa dugula. Gelaren dimentsioak ontziaren dimentsioekiko oso handiak baldin badira, berauek kontaktu diatermanoan jartzean, gelaren tenperatura praktikoki aldatzeke, ontziaren eta gelaren arteko bero-transferentzia gertatuko delarik, gelari bero-iturria deritzo. Gela isolaturik baldin badago, kanpo eraginik ez badago alegia, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera zera dugu:

$$U_B - U_A = Q \ ,$$

Q delakoa, ontziak daukan urak A egoeratik B egoerara pasatzean bero-iturritik absorbitzen duen bero-kantitatea, eta $U_A$ eta $U_B$, urak A egoeran eta B egoeran duen barne-energia izanik, hurrenez hurren.




Horrela, bada, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera, kanpo-eraginik gabe, bero-iturritik Q bero-kantitatea absorbituz, A egoeratik B egoerara pasa daitekeen bezalaxe, bero-iturriari Q bero-kantitatea emanez, B egoeratik A egoerara pasa daiteke. Aldiz, A, ura izozturik dagoeneko egoera, eta B, uraren tenperatura 20°C-takoa denekoa baldin badira, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera, ura A egoeratik B egoerara pasatzen den era berean B egoeratik A egoerara ere pasa daitekeela ere, experientzian oinarriturik, ura behin B oreka-egoera lortuz gero ez dela berriro A egoerara itzuliko ondoriozta dezakegu.

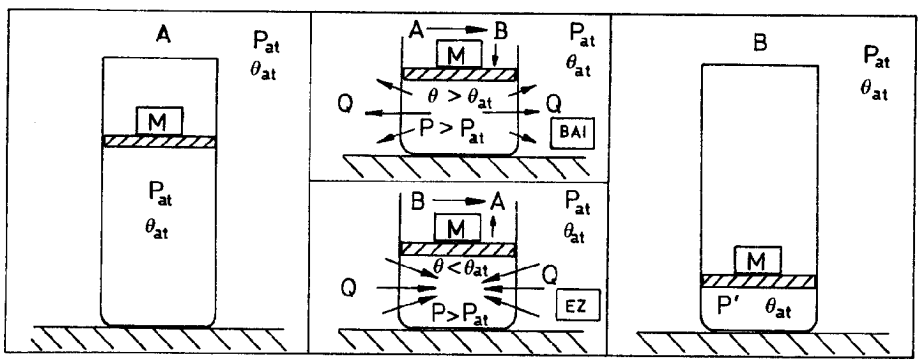
Demagun, orain, gela isolatu batetan gasez beteriko zilindro diatermanoa dugula, gasa enbolo batez eta M masako gorputz batez zapaldurik dagoelarik. Gelaren dimentsioak zilindroaren dimentsioekiko oso handiak baldin badira, gela sistemaren bero-iturria dugu, eta berau isolaturik dagoen bitartean, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera zera dugu:

$$U_B - U_A = W + Q \ ,$$

non W eta Q, gasa A egoeratik B egoerara pasatzean burutzen den lana eta transferitzen den bero-kantitatea diren, hurrenez hurren. Horrela, bada, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera, gasaren gainean W delako lana burutuz eta gasak bero-iturriari Q bero-kantitatea emanez A egoeratik B egoerara pasa daitekeen era berean, sistemak W delako lana burutuz eta bero-iturritik Q bero-kantitatea absorbituz, B egoeratik A egoerara ere pasa daiteke. Aldiz, A egoera, sistemaren tenperatura eta presioa gelarenak direnekoa, eta B egoera, tenperatura gelarena eta presioa,

$$P' = P_{at} + \frac{Mg}{A}$$

direnekoa baldin badira, $P_{at}$, gelaren presioa, eta A, enboloaren azalera izanik, experientzian oinarriturik, sistema A egoeratik B egoerara berez pasa daitekeelarik ere behin B oreka-egoera lortuz gero ez dela A egoerara sekula ere itzuliko atera dezakegu ondorioz.

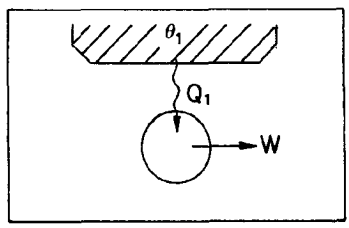


Halaber, dakigunez, gatza uretan, berez, disolbatu egiten da, eta burdina, herdoildu; aldiz, gatzak eta burdinak ez dute, kanpoko manipulaziorik gabe, hasierako egoera sekula ere berriro lortuko. Hau da, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera berezko prozesuen itzulgarritasuna zilegi bada ere, experientzian oinarriturik, Naturan gertatzen diren berezko prozesu guztiak itzulezinak direla, hots, beti norantza berean gertatzen direla ondoriozta dezakegu, eta experientzian oinarrituriko ondorio honek Termodinamikaren Bigarren Printzipioa enuntziatzera bultzatzen gaitu.

## 27.1. TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIPIOAREN ENUNTZIATUAK

Demagun, adibide gisa, batetik, plano aldapatsu eta infinitu batetan barrena higikari bat labaintzen ari dela, eta, bestetik, ontzi diatermano batetako gas ideala expantsionatu egiten dela. Lehenengo adibidean, marruskadura-indarrak burutzen duen lan osoa bero bilakatzen da etengabe; bigarren adibidean, aldiz, expantsio-prozesuan zehar sistemak atmosferatik hartzen duen bero guztia lan bilakatzen da, baina ez etengabe, gasak presio atmosferikoa lortzen duen arte baizik. Hau da, berezko prozesuetan lan guztia bero bilaka daitekeen bezalaxe, bero guztia ere lan bilaka daiteke; baina posible al da bero guztia lan etengabe bilakatzea? Horrela balitz, itsasotik edo atmosferatik beroa absorbituz, untziak higi eraztea eta zentral termikoak funtziona eraztea posible izango litzateke. Hara!

Sistemak bero-iturritik absorbitzen duen beroa etengabe lan bilaka dadin, sistemak hasierako egoerara itzuli beharko du, era ziklikoan funtzionatuz. Sistema ziklikoki funtziona erazten duen dispositiboari motore termikoa deritzo, eta prozesu ziklikoa, eskematikoki, ondoko era honetara adierazten dugu:



Hau da, sistema prozesu zikliko bati jarraitzen zaiolarik, $\theta_1$ tenperaturako bero-iturritik absorbitzen duen beroa lan bilakatzen du. Bestalde, ziklo bakoitzaren hasieran eta bukaeran sistemaren egoera eta, ondorioz, barne-energia berberak direnez gero, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera,

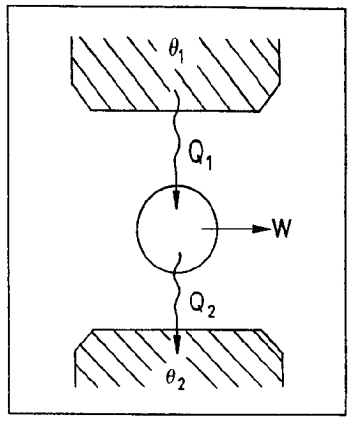
$$Q_1 = - W$$

dela, hots, sistemak absorbitzen duen bero guztia lan bilakatzen dela ondoriozta dezakegu.

Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera, beraz, prozesu zikliko bati jarraituz sistemak absorbitzen duen bero guztia etengabe bilaka liteke lan; aldiz, ez da honez gero sistemari honelako prozesu ziklikori jarrai erazten dion dispositiborik aurkitu. Are gehiago, badirudi Naturak berak honelako dispositiboak eraikitzeko ahalbidea ukatzen duela, eta, ondorioz, lan guztia bero etengabe bilakatzea delako prozesua itzulezina dela, norantza batetan bakarrik gertatzen dela alegia; prozesu zikliko bati jarraituz sistemak absorbitzen duen bero guztia lan bilakatzen duen dispositiboari "bigarren motako higikari iraunkorra" deritzo, eta emaitza experimental honetan oinarriturik, Kelvin-ek eta Planck-ek honela enuntziatu zuten Termodinamikaren Bigarren Printzipioa:

"Sistemak era ziklikoan absorbitzen duen bero guztia lan bilakatzea, hots, bigarren motako higikari iraunkorra eraikitzea ezinezkoa da".

Hau da, eraiki daitezkeen motore termiko guztiek bero-iturri bi behar dituzte era ziklikoan funtzionatu ahal izateko; iturri hauei iturri beroa (IB) eta iturri hotza (IH) deitu ohi zaie. Hortaz, ziklo bakoitzean motoreak lehenengo iturritik, IB delakotik alegia, absorbitzen duen bero-kantitatearen zati bat, bigarren iturrira, IH delakora alegia, bidaltzen du, bien bitartean lana burutuz. Prozesu zikliko hauek, beraz, eskematikoki honela adierazten ditugu:




non $\theta_1$ eta $\theta_2$ , iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak, eta $Q_1$, $Q_2$ eta W, ziklo bakoitzean iturri berotik absorbituriko bero-kantitatea, iturri hotzari emanikoa eta sistemak buruturiko lana ditugun.

Zer esanik ez, ziklo bakoitzaren hasieran eta bukaeran sistemaren barne-energia berbera denez, Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera zera dugu:

$$0 = Q_1 - Q_2 - W ,$$

hots,

$$W = Q_1 - Q_2 .$$

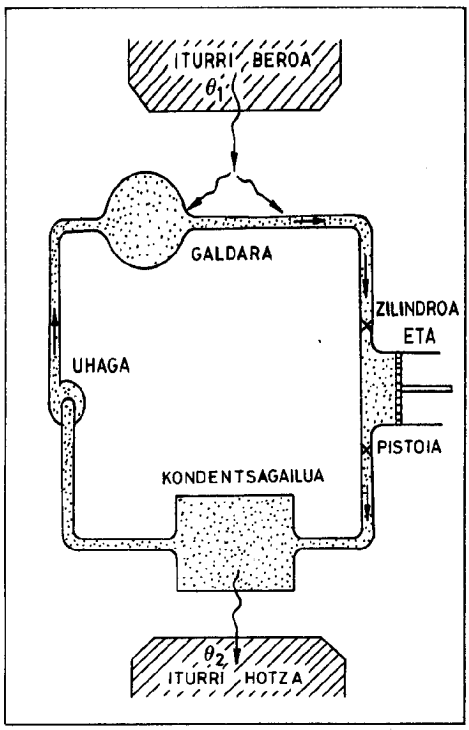
Bestalde, motore termikoaren etekina honako modu honetara definitu ohi da:

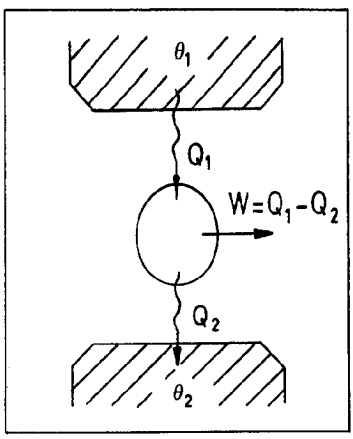
$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} .$$

Beraz, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin--Planck-en enuntziatuari jarraituz, eraiki daitezkeen motore termiko guztien etekina, berauek idealak izanik ere, unitatea baino txikiagoa izanen dela atera dezakegu ondorioz.

Motore termikoa bi motatakoa izan daiteke, "kanpo-erre-

kuntzako motorea" eta "barne-errekuntzako motorea"; lehen motako motoreak zentral termiko gehienek erabiltzen dituzten lurrin-makinak ditugu, eta bigarren motakoak, gasolinakoak zein Diesel deiturikoak. Azal dezagun, adibide gisa, ondoko irudian adierazten den zentral termikoaren funtzionamendua:




Irudiko uhagak kondentsagailuan dagoen ura galdarara pasa erazten du, eta adiabatikoki konprimatzen da, galdararen presioa lortuz. Ondoren, presio berbera mantenduz, isobarikoki alegia, urak beroa absorbitzen du irakite-puntua lortuz eta lurrinduz. Berriro ere presio berbera mantenduz, lurrinak beroa absorbitzen du, $\theta_1$ tenperatura lortu arte, eta zilindrora pasatzen da, bertan adiabatikoki expantsionatuz, eta, horrela, lana burutuz. Ondoren, lurrinak kondentsagailuan $\theta_2$ tenperaturako iturri hotzari beroa ematen diolarik, isotermikoki eta isobarikoki kondentsatzen da, $\theta_2$ tenperaturako ur bihurtuz eta, azkenik, hasierako egoerara itzuliz.

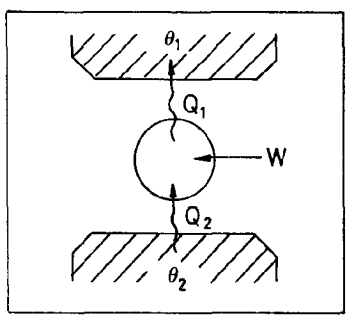
Lurrin-makina errealetan etekina unitatea baino txikiagoa izatea, turbulentziaren, marruskaduraren eta, oro har, funtzio-

namendu idealari oztopo egiten dioten beste fenomeno batzuren ondorioa dela pentsa liteke. Aldiz, experientzian oinarrituriko Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuaren arauera, Rankine zikloan, hots, etekina txikiagotzen duten fenomeno guztiak arbuia daitezkeeneko ziklo idealean ere, $Q_2 \neq 0$ izanen da, eta ondorioz, etekina, unitatea baino txikiagoa.

Demagun, orain, tenperatura txikiko iturritik tenperatura handiko iturrira beroa ziklikoki pasa erazi nahi dugula. Dakigunez, beroa berez pasa daiteke ziklikoki iturri berotik iturri hotzera, baina posible al da kanpoko eraginik gabe iturri hotzetik absorbituriko beroa iturri berora pasa eraztea? Beroa, berez, beti iturri berotik iturri hotzera pasatzen delarik, experientziak erakusten digunez, kanpo-eraginik gabe beroa iturri hotzetik iturri berora pasatzea ez da posible gertatzen, hau da, beroa berez transferitzea delako berezko prozesua, Naturan gertatzen diren berezko prozesu guztien antzera, itzulezina dugu. Horrela, bada, emaitza experimental honetan oinarriturik, Clausius-ek Termodinamikaren Bigarren Printzipioa honela enuntziatu zuen:

"Prozesu zikliko bati jarraituz eta lanik burutzeke beroa iturri hotzetik iturri berora pasa erazten duen dispositiborik eraikitzea ezinezkoa da".

Hau da, iturri hotzetik iturri berora beroa etengabe pasa dadin, lana burutu beharra dago. Sistemaren gainean lana burutuz prozesu zikliko hau gerta erazten duen dispositiboari hozkailua deritzo, eta gertatzen den prozesua eskematikoki honela adierazi ohi da:



non $\theta_1$ eta $\theta_2$, iturri beroaren eta iturri hotzaren tenperaturak diren, eta $Q_1$, $Q_2$ eta W, ziklo bakoitzean iturri beroari emaniko bero-kantitatea, iturri hotzetik absorbiturikoa eta sistemaren gainean buruturiko lana, hurrenez hurren. Termodinamikaren Lehen Printzipioaren arauera,

$$0 = Q_2 - Q_1 + W,$$

hau da,

$$W = Q_1 - Q_2,$$

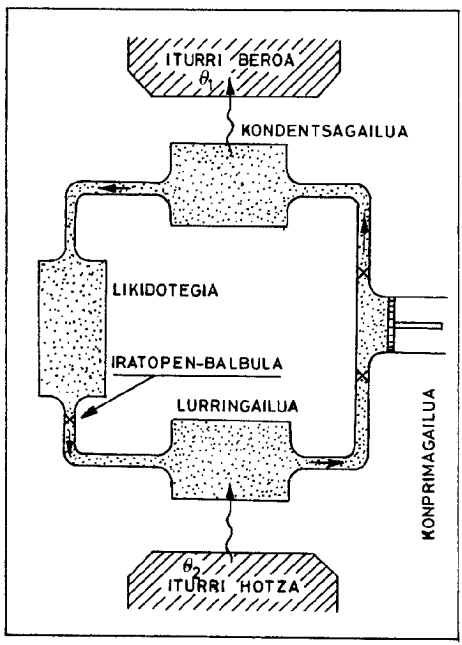
ziklo bakoitzaren hasieran eta bukaeran sistemak barne-energia berbera bait du. Bestalde, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Clausius-en enuntziatuaren arauera, zera dugu halabeharrez:

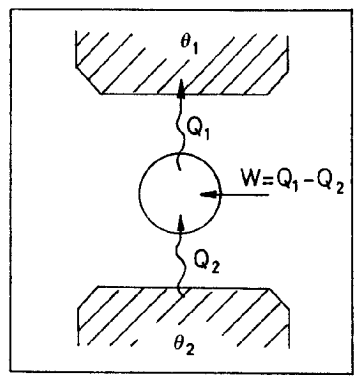
$$W \neq 0 \ ,$$

hots,

$$Q_1 \neq Q_2 \ .$$

Azal dezagun, adibide gisa, ondoko irudian adierazten den hozkailu arruntaren funtzionamendua:



Irudiko likidotegian dagoen likidoa iratopen-balbulan zehar pasatzen da, presioa eta tenperatura txikiagotuz; likido honi hozkarria deritzo. Hozkarria lurringailuan dagoenean, iturri hotzetik $Q_2$ bero-kantitatea absorbituz, lurrindu egiten da, isobariko eta isotermikoki, horrela iturri hotzeko gaiak hoztu egiten direlarik. Ondoren, lurrina konprimagailura pasatzen da, bertan adiabatikoki konprimatuz, $\theta_1$ baino tenperatura handiagoa lortu arte. Azkenik, lurrinak kondentsagailuan $Q_1$ bero-kantitatea ematen dio iturri-beroari, eta kondentsatu egiten da, presio handiko eta $\theta_1$ tenperaturako likido bihurtuz, eta horrela, hasierako egoerara itzuliz.

Etxeko hozkailuen kasuan, iturri hotza jakiek eta izotzak osotu ohi dute, eta iturri beroa, sukaldeko aireak.

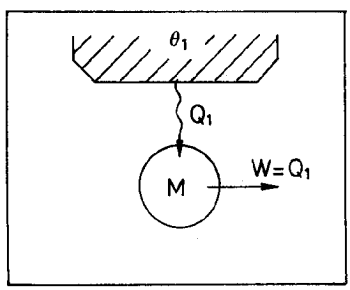
Bestalde, edozein hozkailuren efizientzi koefizientea ondoko erlazio honi deitu ohi zaio:

$$\eta = \frac{Q_2}{W} ,$$

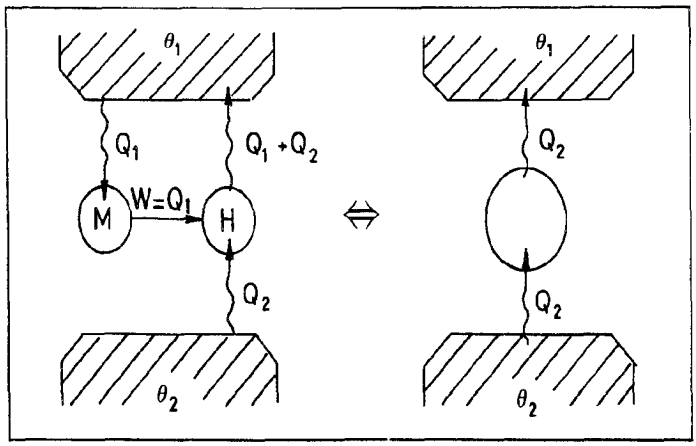
hots,

$$\eta = \frac{Q_1}{W} - 1 .$$

Froga dezagun, azkenik, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin-Planck-en eta Clausius-en enuntziatuak baliokideak direla. Demagun, bada, Kelvin-Planck-en enuntziatua ez dela betetzen, hau da, enuntziatu hau betetzen ez duen ondoko motore termikoa eraiki dezakegula:

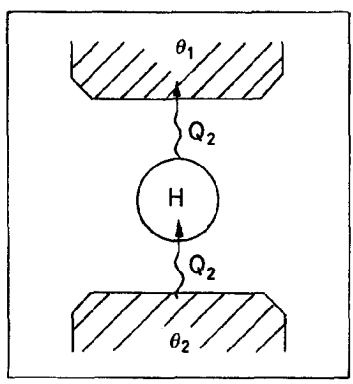


Motore termiko honek burutzen duen lana hozkailu bat funtziona erazteko erabil baldin badezagu, zera dugu:

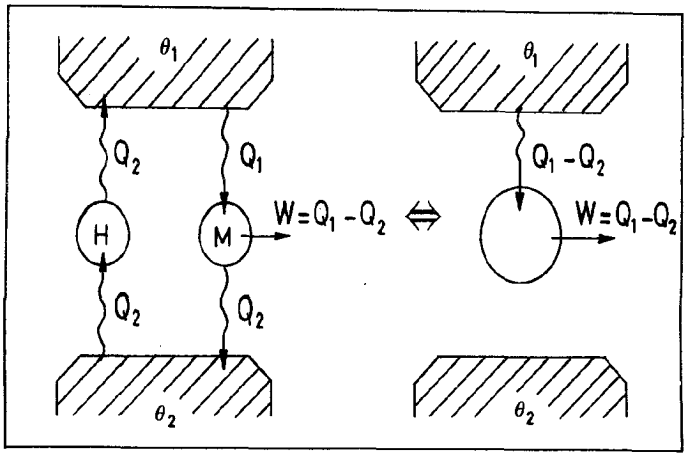



eta ondorioz, guztira, motoreak eta hozkailuak osotutako sistemaren gainean lanik burutzeke $Q_2$ bero-kantitatea iturri hotzetik iturri berora pasa erazten duen dispositiboa eraiki dezakegu, hau da, Clausius-en enuntziatua ere ez dela betetzen ondorioztatzen dugu. Beraz, Clausius-en enuntziatua betetzen baldin bada, Kelvin-Planck-ena ere beteko da.

Suposa dezagun, orain, Clausius-en enuntziatua ez dela betetzen, hau da, enuntziatu hau betetzen ez duen ondoko hozkailua eraiki dezakegula:




Hozkailu hau iturri hotzari $Q_2$ bero-kantitatea ematen dion motore termiko batekin elkar baldin badezagu, zera dugu:




eta ondorioz, guztira, iturri berotik absorbituriko bero guztia lan bilakatzen duen dispositiboa eraiki dezakegu, hau da, Kelvin-Planck-en enuntziatua ez dela betetzen ateratzen dugu ondorioz. Beraz, Kelvin-Planck-en enuntziatua betetzen baldin bada, Clausius-ena ere beteko da.

Horrelatan, bada, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren bi enuntziatuok baliokideak ditugu, frogatu nahi genuen bezala.

## 27.2. PROZESU ITZULGARRIAK ETA ITZULEZINAK

Demagun sistema bat A hasierako egoeratik B bukaerako egoerara pasatzen dela. Sistema A egoeratik B egoerara pasatzen den era berean kanpo-eraginik gabe B egoeratik A egoerara itzul baldin badaiteke, sistemak izan duen prozesua itzulgarria dela esan daroagu. Sistema, aldiz, kanpoko manipulaziorik gabe B egoeratik A egoerara ezin itzul baldin badaiteke, prozesua itzulezina dela esan daroagu.

Biz, adibide gisa, hasierako aldiunean ontzi batetan presio handiko gasa dugula, masa gabeko pistoi batez zapaldurik. Berehalaxe, gasaren eta eguratsaren arteko presio-diferentziaren ondorioz, gasaren expantsio librea gertatuko da, oreka mekanikoa lortu arte, prozesuan zehar sistemak burutzen duen lan guztia bero bilakatzen delarik. Aldiz, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuaren arauera,

sistema ezin itzul daiteke berez hasierako egoerara absorbitzen duen bero guztia berriro lan bilakatuz. Beraz, azaldutako prozesu hau itzulezina dugu.

Bestalde, tenperatura ezberdineko bi sistema kontaktuan jar baldin baditzagu, sistema osoa isolatzen dugun bezain laster tenperatura altueneko sistematik tenperatura baxueneko sistemara beroa pasatuko da, oreka termikoa lortu arte. Ostera, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Clausius-en enuntziatuaren arauera, sistema osoa ezin itzul daiteke, lanik burutzeke, hasierako egoerara beroa tenperatura baxueñeko azpisistematik tenperatura altuenekora transferituz. Beraz, prozesu hau ere itzulezina dugu.

Era berean, urez beteriko ontzira gatza botatzen baldin badugu, berehala disolbatuko da, kontzentrazio-oreka lortu arte, baina, dakigunez, sistema ez da sekula berez hasierako egoerara itzuliko. Hau da, prozesu hau ere itzulezina dugu, itzulezintasun hau Termodinamikaren Bigarren Printzipioan oinarriturik frogatzea batere erraza izan ez arren.

Demagun, azkenik, korronte elektrikoa pasatzen ari deneko erresistentzia dugula. Dakigunez, prozesuan zehar beroa disipatzen da; Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin--Planck-en enuntziatuaren arauera, berriz, sistema ezin itzul daiteke, berez, hasierako baldintzetara. Hau da, prozesu disipakorrak ere itzulezinak dira.

Horrela, bada, desoreka termodinamikoaren kausaz gertatzen diren prozesu guztiak zein prozesu disipakorrak itzulezinak direla atera dezakegu ondorioz. Prozesu itzulgarriak, beraz, efektu disipakorrak gertatzen ez direneko prozesu kuasiestatikoak ditugu, berauetan sistema oreka termodinamikoko infinitu egoeratatik pasatzen bait da. Dena den, Naturan gertatzen diren berezko prozesu errealak itzulezinak dira, eta prozesu itzulgarriak berauen idealizazioak baino ez dira, masa puntuala, soka luzaezinak eta masa gabeko txirrikak, masa, soka eta txirrika errealen idealizazioak diren bezalaxe.

## 27.3. CARNOT-EN ZIKLOA

Biz $\theta_1$ eta $\theta_2$ tenperaturako bero-iturrien artean ondoko lau prozesuez osoturiko zikloa:

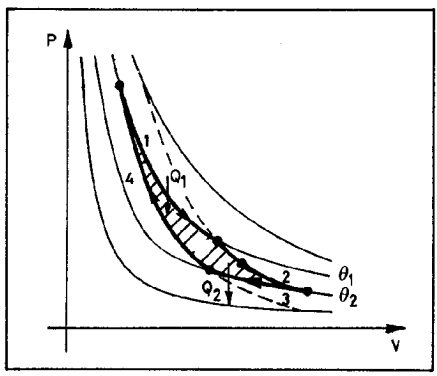
1. Sistemak iturri berotik $Q_1$ bero-kantitatea hartzen du isotermikoki, $\theta_1$ tenperatura konstante mantenduz.

2. Sistemaren tenperatura adiabatikoki txikiagotzen da, $\theta_2$ delako balioa lortu arte.

3. Sistemak iturri hotzari $Q_2$ bero-kantitatea ematen dio isotermikoki, $\theta_2$ tenperatura konstante mantenduz.

4. Sistemaren tenperatura adiabatikoki handiagotzen da, $\theta_1$ delako balioa lortu arte.

Prozesu adiabatikoak kuasi-estatikoki gertatzen baldin badira, ziklo osoa itzulgarria dugu. Izan ere, hauxe dugu, froga daitekeenez, bi iturriren artean gerta daitekeen ziklo itzulgarri bakarra, eta Carnot-en zikloa deritzo. Halaber, ziklo itzulgarri honi jarraituz funtzionatzen duen motore termikoari Carnot-en motorea deritzogu. Sistema gas ideala deneko kasu berezian honela adieraz daiteke ziklo itzulgarri hau:

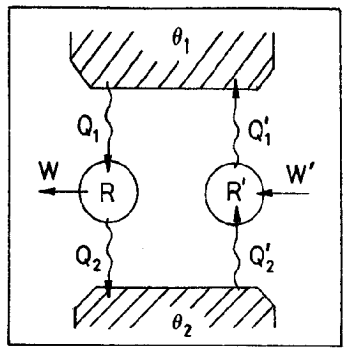



Aipaturiko motore idealizatua Nicolas Léonard Sadi Carnot injinadore frantsesak proposatu zuen 1824. urtean, beraren izenaz ezagutzen den ondoko teorema enuntziatuz:

" $\theta_1$ eta $\theta_2$ tenperaturako bero-iturrien artean ziklo itzulgarri bati jarraituz funtzionatzen duten motore guztiek etekin berbera dute, berau bi bero-iturri horien artean lor daitekeen etekinik handiena delarik".

Teorema hau frogatzeko, demagun $\theta_1$ eta $\theta_2$ tenperaturako bero-iturrien artean funtzionatzen duten Carnot-en R eta R´motoreak ditugula. Dakigunez, Carnot-en motoreek ziklo itzulgarriri jarraituz funtzionatzen dute; beraz, motore termikoaren funtzioa zein hozkailuarena bete dezakete.

Demagun, bada, lehenengoz, R dispositiboak motore termikoaren funtzioa, eta R' delakoak, hozkailuarena betetzen dutela, hau da:




R-k iturri berotik "m" ziklo burutu ondoren hartzen duen bero--kantitatea, R'-k "n" ziklo burutu ondoren itzultzen dio, hots,

$$m\ Q_1 = n\ Q'_1\ ,$$

non $Q_1$ eta $Q'_1$, R-k eta R'-k ziklo bakoitzean iturri beroarekin elkartrukaturiko bero-kantitateak diren, hurrenez hurren. Horrela, R eta R' dispositiboak elkarturik, R-k m ziklo eta R'-k n ziklo burutu ondoren, guztira, bero-iturri berotik hartzen den bero-kantitatea nulua izango da, eta iturri hotzari ematen zaiona, $mQ_2 - nQ'_2$, $Q_2$ eta $Q'_2$, R-k iturri hotzari ematen dion bero-kantitatea eta R'k iturri hotzetik hartzen duena izanik. Beraz,

$$m\ Q_2 - n\ Q'_2 > 0$$

baldin bada, R-k m ziklo eta R'-k n ziklo burutu ondoren, guztira, sistemaren gainean burutzen den lan guztia bero bilakatuko da, berau iturri hotzari pasatzen delarik; aldiz,

$$m\,Q_2 - n\,Q'_2 < 0$$

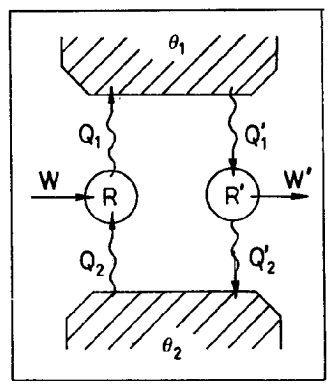
baldin balitz, guztira, sistemak iturri hotzetik hartuko lukeen bero-kantitate osoa lan bilakatuko litzateke, eta hori, dakigun legez, ezinezkoa da. Ondorioz, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuan oinarrituz,

$$m\,Q_2 \geqslant n\,Q'_2$$

izanen dela baiezta dezakegu.

Era berean, R dispositiboak hozkailuaren funtzioa eta R' delakoak motore termikoarena betetzen dutela emanik, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuan oinarrituz,

$$m\,Q_2 \leqslant n\,Q'_2$$




izanen dela atera dezakegu ondorioz.

Beraz,

$$m\,Q_1 = n\,Q'_1$$

izanik,

$$m\,Q_2 = n\,Q'_2$$

izanen dugu. Hau da, $Q_1$, $Q_2$, $Q'_1$ eta $Q'_2$ direlako bero-kantitateek ondoko erlazioa beteko dute:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2} \quad .$$

Ondorioz, iturri berotik $Q_1$ bero-kantitatea absorbitzen duen eta iturri hotzari $Q_2$ bero-kantitatea ematen dion edozein motore termikoren etekina

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

dela kontutan izanik, Carnot-en motore guztiak etekin berekoak direla, eta, horrela,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta_1, \theta_2)$$

dela ondoriozta dezakegu, frogatu nahi genuen bezala.

Demagun orain, berriro, R dispositiboak motore termikoaren funtzioa betetzen duelarik, R' delakoak hozkailuaren funtzioa betetzen duela, eta ziklo bakoitzean R'-k iturri beroari R-k iturri honetatik absorbitzen duen bero-kantitate berbera ematen diola. Orduan, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren Kelvin-Planck-en enuntziatuan oinarriturik,

$$Q_2 \geq Q'_2$$

izanen dela atera daiteke ondorioz.

Era berean, R dispositiboak hozkailuaren funtzioa betetzen duelarik R' delakoak motore termikoaren funtzioa betetzen duela emanik,

$$Q_1 = Q'_1$$

izanik

$$Q_2 \leqslant Q'_2$$

izanen dela aurkitzen da.

Beraz, R eta R' Carnot-en motoreak baldin badira,

$$Q_1 = Q'_1$$

izatekotan,

$$Q_2 = Q'_2$$

izanen da; aldiz, R edozein motore eta R' Carnot-en motorea baldin badira,

$$Q_2 \geqslant Q'_2$$

izanen da, eta R Carnot-en motorea eta R' edozein motore izanez gero,

$$Q_2 \leqslant Q'_2 \quad .$$

Hau da, edozein motoreren etekina

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

denez gero, Carnot-en motorea etekin handieneko motore termikoa dugu, frogatu nahi genuen bezala.

Horrela, bada, Carnot-en teorema frogaturik geratzen da.

## 27.4. TENPERATURAREN ESKALA TERMODINAMIKOA

Demagun $\theta_1$, $\theta_2$ eta $\theta_3$ tenperaturako iturriak ditugula, eta Carnot-en R eta R' motoreek $\theta_1$ eta $\theta_2$ tenperaturako iturrien, eta $\theta_2$ eta $\theta_3$ tenperaturako iturrien artean funtziona-

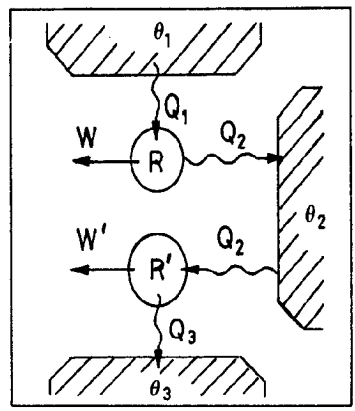
tzen dutela, hurrenez hurren. R' motoreak R delakoak $\theta_2$ tenperaturako iturriari ematen dion bero-kantitate berbera absorbitzen baldin badu, $\theta_1$ eta $\theta_3$ tenperaturako iturrien artean funtzionatzen duen Carnot-en motore berri bat dugularik, Carnot-en teoremaren arauera Carnot-en ziklo bakoitzean iturri berotik absorbituriko bero-kantitatearen eta iturri hotzari emanikoaren arteko erlazioak bero-iturrien tenperaturen menpekotasuna baino ez duela gogoan izanik, ondoko hau idatz dezakegu:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f\,(\theta_1, \theta_2) \quad ,$$

$$\frac{Q_2}{Q_3} = f\,(\theta_2, \theta_3)$$

eta

$$\frac{Q_1}{Q_3} = f\,(\theta_1, \theta_3) \quad ,$$




non $Q_1$, $Q_2$ eta $Q_3$ bero-kantitateek ohiturazko esangura duten (ikus irudia). Hortaz, erlazio hau aurkitzen dugu:

$$F\,(\theta_1, \theta_2) = \frac{f\,(\theta_1, \theta_3)}{f\,(\theta_2, \theta_3)} \quad ,$$

zeina $\theta_3$ tenperaturaren edozein baliotarako betetzen den; ondorioz,

$$f\,(\theta_1, \theta_2) = \frac{\Psi\,(\theta_1)}{\Psi\,(\theta_2)} \quad ,$$

hau da,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\Psi\,(\theta_1)}{\Psi\,(\theta_2)} \quad .$$

Honelatan, bada, aukeraturiko sistema-motaren menpekotasunik ez duen ondoko tenperatura-eskala absolutua defini dezakegu:

$$T = C\,\Psi\,(\theta) \quad .$$

Honela definituriko tenperatura-eskalari tenperaturaren eskala termodinamikoa, Kelvin-en tenperatura-eskala edo tenperatura--eskala absolutua deitu ohi zaio.

Ondorioz, bero-iturrien tenperatura absolutuen funtzioan, zera idatz dezakegu:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad .$$

Bestalde, gas ideal bati Carnot-en zikloa jarrai erazten baldin badiogu , ondoko erlazioa betetzen dela aurkitzen da:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad ,$$

erraz froga daitekeenez, $\theta_1$ eta $\theta_2$, gas idealezko tenperatura--eskala absolutuan iturri beroari eta iturri hotzari egokitzen zaizkien tenperaturak izanik.

Beraz, termodinamikaren tenperatura-eskala absolutuan ere uraren puntu hirukoitzari 273,16 gradutako balioa eman baldin badiezaiogu, gas idealen tenperatura-eskala eta atal honetan definituriko tenperatura-eskala termodinamikoa baliokideak direla aurkitzen dugu. Aldiz, gas idealezko tenperatura-eskalan P presiozko sistema baten tenperatura honela aurkitzen dugun bitartean:

$$\theta = 273{,}16° \lim_{P_3 \to 0} \left(\frac{P}{P_3}\right)_{V = kte} \quad ,$$

tenperatura-eskala termodinamikoan edozein sistemaren tenperatura abosolutua honela aurki dezakegu:

$$T = 273{,}16° \frac{Q}{Q_3} \quad ,$$

Q eta $Q_3$, T tenperaturako eta 273,16 gradutako tenperaturako iturrien artean Carnot-en ziklo bati jarraituz elkartrukatzen diren bero-kantitateak izanik.

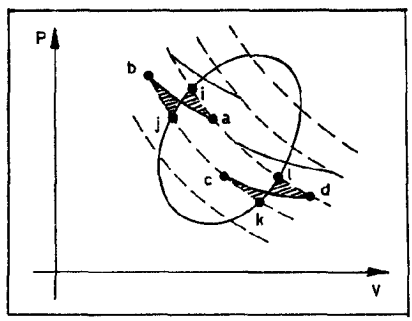
Bestalde, motore termiko baten etekina, iturri beroaren eta iturri hotzaren Kelvin tenperaturaren funtzioan, honela idatz dezakegu:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} ,$$

eta, ondorioz, iturri hotzaren Kelvin tenperatura zero izango balitz, motore termikoaren etekina unitatea izango litzateke, iturri beroaren tenperaturaren edozein baliotarako. Beraz, Kelvin-Planck-en enuntziatuan oinarriturik, tenperaturaren zero absolutua lortezina dela ondoriozta dezakegu.

## 27.5. CLAUSIUS-EN TEOREMA

Biz irudian adierazten den prozesu zikliko eta itzulgarria. Erraz froga daitekeenez, edozein bi lerro adiabatikok ezin dezakete inoiz ere elkar ebaki; beraz, irudian marraz adierazten den lerro adiabatikoen sarea kontsidera dezakegu.




Bestalde, i-j eta i-a-b-j lerroek nahiz k-l eta k-c-d-l lerroek V ardatzarekin osotzen dituzten azalerak berdinak baldin badira, i-j prozesu itzulgarrian eta a-b prozesu isotermikoan zehar zein k-l prozesu itzulgarrian eta c-d prozesu isotermikoan zehar transferituriko bero-kantitateak berdinak izango ditugu. Beraz, $T_1$ eta $T_2$, a-b eta c-d prozesu isotermikoak gertatzen direneko tenperaturak, eta $Q_1$ eta $Q_2$, i-j eta k-l prozesuetan zehar transferituriko bero-kantitateak, a-b eta c-d prozesuetan zehar transferiturikoak hain zuzen ere, izanik, a-b-c-d delako zikloa Carnot-en zikloa dela kontutan hartuz, zera idatz dezakegu:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad ,$$

non $Q_1$ eta $Q_2$, transferituriko bero-kantitateen balioak diren. Absorbituriko beroa positibotzat, eta askaturikoa negatibotzat hartuz gero, hauxe dugu:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Beraz, lerro adiabatiko guztien artean lerro isotermikoz osoturiko bikote egokiak aukeraturik, zera idatz dezakegu:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{Q_i}{T_i}\right)_{IG} = 0 \quad ,$$

non N-k, kontsideraturiko prozesu isotermikoen kopurua adierazten duen.

Berriz, infinitu prozesu adiabatikoz eta infinitu prozesu isotermikoz osoturiko zikloa kontsideraturik, zera dugu:

$$\oint_{IG} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad ,$$

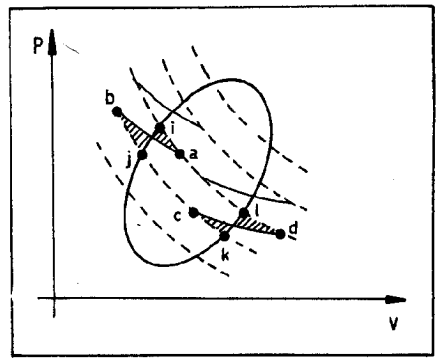
non $\delta Q$, prozesu isotermiko infinitesimal bakoitzean transferituriko bero-kantitatea den (positiboa, beroa absorbitu egiten denean, eta negatiboa, beroa askatu egiten denean), eta T, sistemak duen tenperatura.

Hau, Clausius-en teorema dugu. Teorema hau, aldiz, jarraituriko prozesua ziklikoa izateaz gain itzulgarria denean bakarrik betetzen da; hau adierazteko, bada, integral-ikurraren ondoan IG delako azpiindizea jarri ohi dugu.

## 27.6. TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIPIOAREN FORMULAZIO MATEMATIKOA

Biz irudian adierazten den prozesu ziklikoa. Delako prozesu hau itzulgarria baldin bada, zera dugu:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad ,$$




aurreko atalean frogatu dugunez, non $Q_1$ eta $Q_2$, i-j eta k-l direlako prozesuetan transferituriko bero-kantitateak diren. i-j edo eta k-l direlako prozesuak itzulezinak baldin badira, aldiz, Termodinamikaren Bigarren Printzipioan oinarrituz,

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

dela aurkitzen da.

Horrela, bada, prozesu zikliko a itzulgarria denean

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{Q_i}{T_i}\right)_{IG} = 0$$

delako berdintza betetzen den bitartean, prozesu ziklikoa itzulezina denean,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{Q_i}{T_i}\right)_{IE} < 0$$

ezberdintza betetzen da. Era berean, prozesu osoa infinitu prozesu infinitesimalez osoturik dagoela kontsideraturik, ondoko berdintza eta ezberdintza hauek betetzen dira:

$$\oint_{IG} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

eta

$$\oint_{IE} \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad .$$

Beraz, edozein prozesu zikliko kontsideraturik, Termodi-

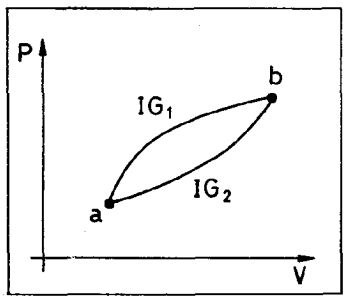
namikaren Bigarren Printzipioan oinarrituz zera idatz daiteke:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad ,$$

non $\delta Q$, prozesu infinitesimal bakoitzean transferituriko bero-kantitatea den, eta T, sistemaren tenperatura absolutua. Azken adierazpen honi, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren formulazio matematikoa deitu ohi zaio.

## 27.7. ENTROPIA ETA ITZULEZINTASUNA

Kontsidera ditzagun irudian adierazten diren sistema baten a eta b egoerak, eta a-tik b-ra pasatzeko $IG_1$ eta $IG_2$ prozesu itzulgarriak.




a-$IG_1$-b-$IG_2$-a delako prozesua zikliko eta itzulgarria denez gero, Clausius-en teoremaren arauera zera dugu:

$$\int_{a\,(IG_1)}^{b} \frac{\delta Q}{T} + \int_{b\,(IG_2)}^{a} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad .$$

Hau da,

$$\int_{a\,(IG_1)}^{b} \frac{\delta Q}{T} = \int_{a\,(IG_2)}^{b} \frac{\delta Q}{T} \quad .$$

Ondorioz, $\int_{a\,(IG)}^{b} \frac{\delta Q}{T}$ delako integralak ez du a-tik b-ra pasatzeko jarraituriko prozesu itzulgarriaren menpekotasunik; ho-

rrelatan, bada, $_{IG}\int_a^b \frac{\delta Q}{T}$ delako integralak integrazio-bidearen menpekotasunik ez duelarik, hasierako eta bukaerako egoeren arauerakoa izango da, hau da,

$$_{IG}\int_a^b \frac{\delta Q}{T} = S_b - S_a \quad ,$$

non $S_b$ eta $S_a$, aldagai termodinamikoen S funtzioak bukaerako eta hasierako egoeran hartzen dituen balioak diren, hurrunez hurren. Honela definituriko S funtzioari entropia deritzo.

Beraz, sistemaren edozein bi egoeraren arteko entropia-aldaketa, hasierako egoeratik bukaerako egoerara edozein prozesu itzulgarriri jarraituz pasatzean $_{IG}\int_a^b \frac{\delta Q}{T}$ delako integralak hartzen duen balioa dugu. Bestalde, sistemaren egoera bati entropiaren balio arbitrario bat egoki eraziz, sistemaren edozein egoeraren entropia guztiz definiturik geratuko zaigu.

Aldiz, hasierako egoeratik bukaerako egoerara prozesu itzulezin bati jarraituz pasatzean $_{IE}\int_a^b \frac{\delta Q}{T}$ delako integralak hartzen duen balioa ez da, oro har, hasierako eta bukaerako egoeren arteko entropia-aldaketa izango.

Bestalde, edozein prozesu infinitesimal itzulgarriri jarraitu ondoren sistemak jasaten duen entropia-aldaketa infinitesimala ondokoa dugu:

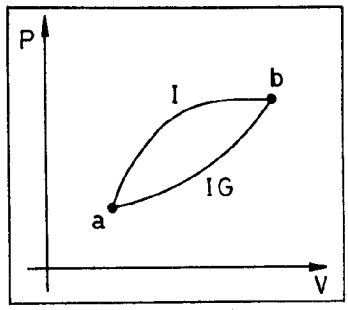
$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad ,$$

$\delta Q$, prozesu infinitesimal honetan zehar transferituriko bero-kantitatea, eta T, sistemaren Kelvin tenperatura, tenperatura absolutua alegia, izanik. Horrelatan, bada, edozein prozesu infinitesimal itzulgarritan zehar transferituriko bero-kantitatea ondokoa dugu:

$$\delta Q = T\, d\, S \quad .$$

## 27.8. ENTROPIAREN GEHIKUNTZAREN PRINTZIPIOA

Kontsidera ditzagun irudian adierazten diren a eta b direlako egoerak, eta a egoeratik b egoerara pasatzeko I prozesua, itzulgarria nahiz itzulezina, eta IG prozesu itzulgarria.




IG delako prozesua itzulgarria denez, prozesu honi jarraituz, sistema a egoeratik b egoerara pasatzen den era berean b egoeratik a egoerara ere pasa daiteke. Horrela, bada, sistema a-I-b-IG-a prozesu ziklikoari jarrai dakioke.

Bestalde, Termodinamikaren Bigarren Printzipioaren formulazio matematikoa ondokoa dugu:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0 \quad .$$

Beraz, zera idatz daiteke:

$$\int_{I\,a}^{b} \frac{\delta Q}{T} + \int_{IG\,b}^{a} \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0 \quad .$$

Gainera, IG delako prozesua itzulgarria denez, hauxe dugu:

$$\int_{IG\,b}^{a} \frac{\delta Q}{T} = S_a - S_b \quad ,$$

eta ondorioz,

$$\int_{I\,a}^{b} \frac{\delta Q}{T} + S_a - S_b \leqslant 0 \quad ,$$

hau da,

$$\int_{I\,a}^{b} \frac{\delta Q}{T} \leqslant S_b - S_a \quad .$$

Horrela, bada, Clausius-en teorema gogoan izanik, I prozesua itzulgarria baldin bada,

$$\int_{I\,a}^{b} \frac{\delta Q}{T} = S_b - S_a$$

dela aurkitzen dugu, espero genezakeen bezalaxe. I prozesua itzulezina baldin bada, aldiz, zera dugu:

$$\int_{I\,a}^{b} \frac{\delta Q}{T} < S_b - S_a \quad .$$

Hau da, $\int_a^b \frac{\delta Q}{T}$ delako integralak balio txikiagoa hartzen du integrala kalkulatzen duguneko prozesua itzulezina denean, itzulgarria denean baino.

Kontutan har dezagun, orain, lehen kontsideraturiko sistemaz eta beronekin interakzionatzen duen sistema osagarriaz osoturiko sistema berria. Sistema berri hau isolatua delarik, sistema osoak ez du berorik elkartrukatzen, eta, ondorioz, a egoeratik b egoerara pasatzean zera dugu:

$$0 \leqslant S_b - S_a \quad ,$$

non $S_a$ eta $S_b$, sistema barriaren hasierako egoeraren eta bukaerako egoeraren entropiak diren, hurrunez hurren.

Hau da, prozesu itzulgarri bati jarraitzean edozein sistemaren entropia ez da aldatzen; aldiz, prozesu itzulezin bati jarraitzean, edozein sistema isolaturen entropia hazi edo handitu egingo da. Ondorioz, entropiaren gehikuntzaren printzipioa enuntzia dezakegu, edozein sistema isolaturen entropia ez dela inoiz gutxituko, hots, sistema isolatua denean ondoko ezberdintza hau betetzen dela baieztatuz:

$$\Delta S \geqslant 0 \quad .$$

Azkenik, diogun, Unibertso osoa sistema isolatua dela eta bertan gertatzen diren berezko prozesu guztiak itzulezinak direla; beraz, Unibertsoaren entropia gehituz doa etengabe. Horrelatan, bada, entropiak har ditzakeen balioek goi-mugarik baldin balute, behin balio hau lortuz gero, ezin liteke berezko prozesurik gerta eta, ondorioz, Unibertsoaren heriotza entropikoa gertatuko litzateke.

## 28. GAIA: OPTIKA GEOMETRIKOA

28.1. Argia eta optika

28.2. Argiaren ereduak

28.3. Argi-izpiak. Optika Geometrikoa. Argiaren abiadura eta errefrakzio-indizea

28.4. Bide optikoa eta Fermat-en printzipioa

28.5. Optika Geometrikoaren legeak. Isladapenaren eta errefrakzioaren legeak

28.6. Isladapen osoa

28.7. Sistema optikoak. Dioptrioak eta katoptrioak

28.8. Objektuak eta irudiak. Sistema estigmatikoak

28.9. Notazioa eta hitzarmenak Optika Geometrikoan

28.10. Optika Paraxiala (edo Gauss-en hurbilketa)

28.11. Dioptrio esferikoa. Abbe-ren inbariantea

28.12. Lagrange-Helmholtz-en inbariantea

28.13. Handipenak

28.14. Fokuak. Distantzia fokalak. Sistema baten ahalmen optikoa

28.15. Ispilu esferikoak. Eraiketa grafikoak

28.16. Dioptrio esferikoak. Eraiketa grafikoak

28.17. Sistema zentratu baten elementu kardinalak

28.18. Sistema baten distantzia fokalak eta beraien arteko erlazioak

28.19. Ekuazio orokorrak sistema laburtuetan

28.20. Lenteak

28.21. Lente meheak

28.22. Lente meheen sailkapena

28.23. Eraiketa grafikoak lente meheetan

28.24. Tresna optikoak

## 28.1. ARGIA ETA OPTIKA.

Gorputzen atomoak egoera exzitatuan edo desexzitatuan egon daitezke. Lehenengotik bigarrenera pasatzean, erradiazio elektromagnetiko bat igortzen dute, beraren energia, desexzitazioa gertatu deneko energi mailen arteko diferentzia izanik. Baina atomo eta molekuletan dauzkagun energi mailak oso ugariak dira. Beraz, desexzitazioz lor dezakegun (energiari dagokionez) errediazio elektromagnetikoen kopurua kontaezina da. Aurreko gai batetan ikusi genuen uhin-elektromagnetikoen espektroan agertzen ziren uhinen sailkapena kontutan hartuz, gai honetan begiak ikus dezakeen zatiaz arduratuko gara, hau da, guk argia izenaz ezagutzen dugunaz. Are gehiago, uhin elektromagnetikoen propietate ondulatorioak ez ditugu kontutan edukiko gai honetan, zeren argia izpi bezala, eta ez uhin bezala, hedatzen dela suposatuko bait dugu.

Defini dezagun Optika zer den: Optika, argia eta berarekin loturik doazen fenomeno guztiak aztertzen dituen Fisikaren arloa da. Orokorki, hiru ataletan sailka daiteke: a) Optika geometrikoa: atal honetan argiak sorteraz ditzakeen eta ikus daitezkeen fenomeno optikoak aztertzen dira. Azpiatal honen izenak adierazten duenez, "geometrikoki" aztertzen dira fenomeno hauek, argia izpi bezala hedatzen dela suposatuz; b) Optika fisikoa: argiaren uhin-propietateak kontutan hartzen ditu, beraiekin loturik doazen fenomenoak aztertuz: interferentziak, difrakzioa eta polarizazioa, hain zuzen ere. Horrez gain, isladapena eta errefrakzioa ere azter daitezke azpiatal honetan; c) Optika kuantikoa: Argiak materiarekin sorterazitako fenomenoez arduratzen da.

Optika geometrikoaren arloan, ispiluak, lenteak eta tresna optiko ugari erabiliko ditugu, eta tresna hauen bidez lor daitezkeen irudien azterketa izango dugu helburu nagusia.

Besterik esan gabe, pasa gaitezen lehendabizi argiaren ereduak aztertzera.

## 28.2. ARGIAREN EREDUAK

Betidanik, argiaren izaerak eztabaida biziak sortu ditu zientzilarien artean, Fisikaren historia irakurtzean argi ikus daitekeenez. Bi izan dira erabili izan ohi diren argiaren ereduak:

a) Eredu gorpuzkularra: Eredu honetan, argia partikulaka edo zatika hedatzen dela kontsideratzen da, izugarrizko abiaduraz. Orduan, argi-iturri bat, partikula pila bat etengabe jaurtikitzen egongo litzateke. Horregatik, eredu hau "eredu balistiko" izenaz ere ezagutzen da. Eredu honen bitartez, argiak sorterazten duen zenbait fenomeno azal daitezke, efektu fotoelektrikoa, adibidez, baina ez beste batzu, hala nola, interferentziak, difrakzioa eta abar. Eredu honetan, argiari Newton-en legeak aplikatzen zaizkio. Argi-partikula hauei "fotoiak" deritzegu.

b) Eredu ondulatorioa: Eredu honetan, argia uhin bat besterik ez da, uhin elektromagnetikoa, hain zuzen ere. Aintzinatik ezagutzen ziren argiak sortzen zituen isladapen eta errefrakzio fenomenoak, eta teoria ondulatorioaz baliatuz, adierazpen oso erraza zuten fenomeno hauek. Beraz, ez da ulergaitza hainbat eta hainbat zientzilari zeudela eredu honen defentzaile. Baina baziren ere beste fenomeno batzu eredu honek explikatzen ez zituenak, eredu gorpuzkularrean gertatzen zen bezalaxe.

Eredu honetan finkatuz, argi-iturri batek sorteraziko dituen uhinak, gainazal esferiko zentrukide bezala urrunduko dira erdigunetik, ingurune homogeneo eta isotropoetan behintzat.

Esan bezala, eredu biek zituzten defendatzaileak. Newton-en teoria gorpuzkularrak, Mekanikaren talken legeak eta erakarpen indarrak erabiliz, ederto argitzen zituen isladapen eta errefrakzio fenomenoak, baina azken honen kasuan, argi-partikulak beiran edo uretan abiadura handiagoz higitu beharko luke airean baino, fenomenoa guztiz azaltzeko. 1850. urtean, Foucault-ek argiak uretan duen abiadura neurtu zuen, airean baino txikiagoa

zela ikusiz. Beraz teoria gorpuzkularrak ez zuen izaera errealik. Honekin batera, teoria ondulatorioa indar gehiagoz suspertu egin zen. Geure mendeko lehenengo hogeitamar urteetan, 1860. urtetik aurrera Young eta Fresnel-ek argiarekin egin zituzten experimentu ondulatorioen laguntzan, Maxwell-en teoriak eta Hertz-en saiakuntzak lortu zituzten emaitzak etorri ziren, argia uhin elektromagnetikoa zela identifikatu ondoren. Baina Hertz-ek, uhin elektromagnetiko hauen ekoizpena ez ezik, teoria ondulatorioaz explikaezina zen beste fenomeno bat ere nabaritu zuen, efektu fotoelektrikoa hain zuzen. 1905. urtean Einsten-ek frogatu zuenez, fenomeno hau, argia partikula bezala onartuz azal zitekeen bakarrik (lan honegatik jaso zuen Nobel saria 1921. urtean). Gainera, partikula bakoitzaren energia, propietate ondulatorio batekin loturik joango litzateke, maiztasunarekin, era honetan:

$$E = h\,\nu\ ,$$

non $\underline{h} = 6.63\text{x}10^{-34}$J/s. Planck-en konstantea eta $\underline{\nu}$, partikula horri legokiokeen uhin baten maiztasuna diren.

Baina, nola lot zitezkeen eredu biak batean, garai horretan ezagutzen zen Fisika klasikoaren arloan? Egia esateko, beste hamabost urte itxaron behar izan zuten zientzilariek (1920. urterarte hain zuzen) nahaste honi irtenbide bat eman arte. Urte horretan, Davisson eta Germer-ek elektroien difrakzioa aurkitu zuten. Aurkikuntza hau izan zen benetako giltza ez bakarrik eredu biak batean ados ipintzeko, baizik eta teoria kuantikoaren lehenengo urratsak finkatzeko ere, de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Dirac eta beste zientzilari batzuren eskuetatik. Elektroiak, denek zekiten hori, partikulak ziren. Beraz, nola sorteraz zitzaketen bakarrik uhinei zegozkien difrakzio fenomenoak? L.V. de Broglie izan zen arazo honi irteera eman ziona. Beraren iritziz, higitzen ari den edozein partikula batekin loturik, $\lambda = h/p$ uhin-luzeratako uhin bat higitzen da, p hori partikulak duen momentu lineala izanik. Orduan, partikula horrek materiarekin elkarrakzio bat duenean, partikula gisako konportamoldea izango luke, eta berari Mekanikaren legeak aplika geniezazkioke. Aldiz, hedatzen ari den bitartean, partikulek beraie-

kin daramatzaten uhinek, difrakzio fenomenoak sortuko lituzkete, teoria ondulatorioan adierazten den legez.

Galdera honi amaiera ematekotan, argiari buruz zera esango genuke: hedatzen diharduen bitartean, uhin bezala kontsideratuko dugu (isladapen eta errefrakzio prozesuetan Huygens-en printzipioa aplikatuz, eta interferentzia eta difrakzio prozesuetan, uhinen baturaren legeak), eta materiarekin elkarrakzioak dituenean, partikula bezala, Mekanika erlatibistaren ekuazioak eta legeak aplikatuz.

## 28.3. ARGI-IZPIAK. OPTIKA GEOMETRIKOA. ARGIAREN ABIADURA ETA ERREFRAKZIO-INDIZEA.

Lehen aipatu izan dugunez, urte askotan argiaren eredu gorpuzkularra onartu zen, nagusiki garai hartako tresneria optikoarekin fenomeno ondulatorioak nabaritzen ez zirelako. Gainera, gero ikusi zenez, nahiz eta eredu ondulatorioa bete ere, uhinen uhin-luzera soinu-uhinena baino askoz txikiagoa zen (edota maiztasuna askoz handiagoa), eta horregatik ez ziren aipaturiko fenomeno ondularotioak bereizten.

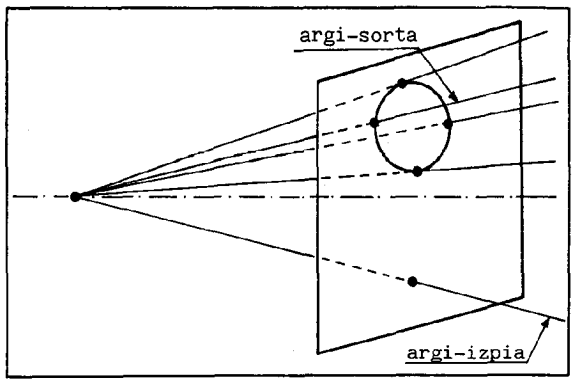
Eredu gorpuzkularrean finkatuz, Newton-en talken legeak eta inguruneek partikulen gainean zituzten erakarpen-indarrak kontutan harturik, aski ongi explika zitezkeen argiaren isladapena eta errefrakzioa. Beraz, gai honetan isladapen eta errefrakzio fenomenoak besterik ikusiko ez dugunez, gure helbururako nahikoa izango da eredu gorpuzkular hau erabiltzea (hobe esango genuke, eredu sasigorpuzkularra, zeren argiak segituko lukeen bideaz arturatuko bait gara, eta ez argiak, partikula bezala kontsideratuz, materiarekin izango lukeen harremanaz).

Defini ditzagun, orduan, gai honetan erabiliko ditugun zenbait kontzeptu:

*Argi-izpia: Aipaturiko argi-sasipartikulek beraien hedapenean daramatzaten ibilbideei, argi-izpiak deritzegu. Definizio honetatik ez da atera behar, argi-izpiak zuzena izan beharko duenik. Ingurune homogeneo eta isotropo batetan izan ezik, oro-

korki ibilbidea lerro hautsia edo kurbatua izango da.

Hurbilketa geometriko bat egiteko asmotan, suposa dezagun ingurunea homogeneoa eta isotropoa dela. Beraz, bertan argi--izpiek ibilbide zuzenak beteko dituzte.




Demagun 0 puntuan argi-puntu igorle bat dugula, eta beraren aurrean pantaila opako bat zulo zirkular batekin. Irudian ikusten denez, 0 puntuak eta zuloak argi-kono bat eratzen dute, zeini argi-sorta deritzogu. Zuloaren erradioak zerorantz jotzen duenean, argi-sorta hori argi-izpi bihurtzen da.

Argiaren propietate ondulatorioak kontutan eduki izan bagenitu, zirkulu bien ertzetan difrakzio fenomenoak aztertu beharko genituzkeen (eta hori da benetan gertatzen dena), baina gu gai honetan ez gara horretaz arduratuko.

*Argiaren abiadura eta errefrakzio-indizea: Dakigunez, argiak edozein ingurunetan duen abiadura izugarria da. Gainera, ez du behar inolako ingurune materialik heda ahal izan dadin. Gaur egun, espazio hutsean argiak duen abiadura nahiko ongi neurtuta dago, beraren balorea inbariante fisiko oso garrantzitsua izanik:

$$c = (2.997930 \pm 0.000003) \times 10^5 \text{km/s}.$$

Kalkulu gehienetarako, $c = 3 \times 10^5$km/s. erabiltzen da. Abiadura hau, Naturan gertatzen diren partikulen eta uhinen abiaduren goimuga dugu. Beste ingurune ugari erabiliko dugunez, interes-

garria gertatzen zaigu argiak ingurune desberdinetan dituen abiaduren eta hutsean duen abiaduraren arteko erlazio bat definitzea: errefrakzio-indizea hain zuzen. honela kalkulatzen da:

$$n = c/v \ . \qquad (1)$$

Beraz, $c \geqslant v$ denez, $n \geqslant 1$ izango da.

Ingurune material batetan argiaren abiadura puntu eta norabide guztietan berdina bada, ingurunea homogenoa eta isotropoa dela esaten da. Norabidearekin aldatuz badoa, anisotropoa, eta puntuz puntu aldatuz badoa, heterogenoa. Horrez gain, errefrakzio-indizeak argiaren uhin-luzeraren dependentzia du: $n = n(\lambda)$. Beraz, ez dira era berean errefraktatuko, adibidez, argi-izpi gorriak eta urdinak. Fenomeno honi, dispertsio kromatikoa deritzogu. Gai honetan dispertsio hau aztertuko ez dugunez, hemendik aurrera ingurune baten errefrakzio-indizeari buruz hitz egiterakoan, uhin-luzera konkretu batetarako definituko dugu, edota argi monokromatiko batetarako.

## 28.4. BIDE OPTIKOA ETA FERMAT-EN PRINTZIPIOA.

Oraintxe berton ikusi dugunez, argiak ez du abiadura berbera ingurune guztietan. Hurrengorako merezi du, beraz, bide optiko izenaz ezagutzen den magnitudea definitzeak: $n$ errefrakzio-indizea duen ingurune batetan, argi-izpi batek $s$ luzera duen ibilbide bat egiten badu, luzera geometriko horri dagokion bide optikoa, hauxe da:

$$[d] = n\, s \ .$$

Argi-izpiak zeharkatzen dituen inguruneak ezberdinak balira ($i$-garren inguruneak $n_i$ errefrakzio-indizea badu eta bertan $s_i$ luzerako ibilbidea egiten badu), egindako bide osoari, ondoko bide optikoa legokioke:

$$[d] = \sum_i n_i s_i \ . \qquad (2)$$

Azkenez, ingurunea heterogeno eta jarraia balitz, puntuz puntuko errefrakzio-indizearen aldaketarekin, batukaria, integral bihurtuko litzateke, eta bide optikoa honela adieraziko genuke:

$$[d] = \int_A^B n\,ds = c\int_A^B \frac{ds}{v} = c\int_{t_A}^{t_B} dt = c(t_B - t_A) = c\Delta t \quad (3)$$

Adierazpen honetatik letorkiguke bide optikoaren esangura fisikoa: bide optikoa, argiak, errealitatean A puntutik B puntura pasatzean hartuko lukeen denbora-tartean, hutsean egingo lukeen ibilbidearen luzera da. (Zeinuen hitzarmena: Bide optikoa, ibilbidea argiaren hedapenaren norantzan neurtzen bada, positibotzat onartzen da. Bestela, negatibotzat).

Bide optikoaren definizioan oinarrituz, oso lagungarri izango zaigun printzipio bat ikusiko dugu, Fermat-en printzipioa, hain zuzen.

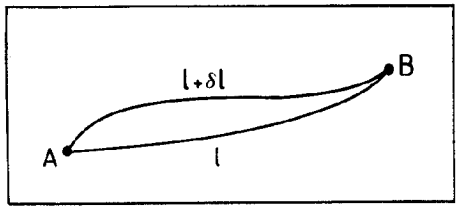
*Fermat-en printzipioa: Extramalen printzipioak oso onuragarriak izan dira Fisikaren historian zehar, Naturan gertatzen diren jazoera batzuri adierazpen bat eman diezaiegun (Maupertuis-en akzio minimoa, oreka-energia minimoa, etab.). Batzutan, erabiltzen den funtzioaren extremala, minimoa dela ikusten da, eta besteetan, maximoa.

Optikan ere, antzeko gauza bat ikusiko dugu: Fermat-en printzipioa. Beronek zera dio: " Argiak bi punturen artean segitzen duen ibilbide errealean neurturiko bide optikoa, minimoa da, beraren inguruan nahi dugun bezain hurbil dagoen beste edozein ibilbide geometriko batetan neurturiko bide optikoarekin konparatuz". Beste era batetan adieraziz, "bi puntu horien artean, bide errealetik argiak hartzen duen denbora-tartea, minimoa da".

Matematikoki:

$$\delta[d] = \delta\int_A^B n\,ds = 0 \quad (4)$$

non $\delta$ horrek, bide optikoaren aldaketa infinitesimala adierazten duen.



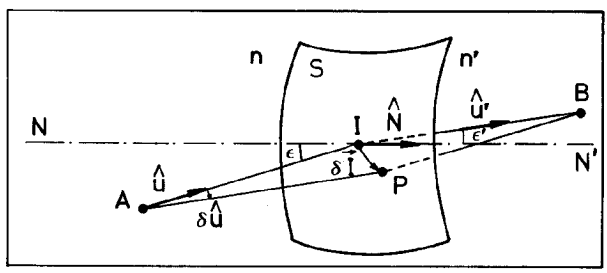

Ibilbide erreala kalkulatzeko, kontsidera ditzagun irudian adierazitako ibilbide hipotetiko biak. l ibilbidetik l+δl ibilbidera pasatzeko, parametroen lehenengo ordenako aldaketa infinitesimalak onartuko ditugu. Beraz, Fermat-en printzipioaren arauera, ibilbide bietan zehar, bide optikoak geldikorra iraungo du; hau da, beraren aldaketa nulua izango da bigarren ordenako infinitesimoak eta ordena handiagokoak arbuiatuz.

Batzutan, ibilbide erreala maximoa dela ikusiko dugu (ispilu esferikoetan, hain zuzen, puntu biak kurbatura-zentrua baino urrunago daudenean).

Oharra: Izan bedi kontutan argiaren bide erreala kalkulatzea ez dela kasurik orokorrenetan erraza izaten, zeren: $n = n(x,y,z,t,\lambda)$ izango bait da. Funtzio hori ezagutuz gero, kalkulu bariazionalaren metodoak aplikatu beharko ditugu ibilbidearen ekuazioa lortzeko. Hala ere, hurrengo galderan metodo bektorial errazago bat erabiliko dugu isladapenaren eta errefrakzioaren legeak lortzeko.

## 28.5. OPTIKA GEOMETRIKOAREN LEGEAK. ISLADAPENAREN ETA ERREFRAKZIOAREN LEGEAK.

Demagun n eta n' errefrakzio indizeak dituzten bi inguru-ne ezberdin eta homogenoak banatzen dituen S gainazala. Aipaturiko legeak lortzeko, Fermat-en printzipioan oinarrituko gara.



Suposa dezagun, A puntutik igortzen den argi-izpi bat, I puntuan errefraktatu ondoren B puntutuik pasatzen dela. Marraztutako bertsore guztiek, izpien direkzioak adierazten dituzte $(\hat{u},\hat{u}')$ eta I puntuan S gainazalaren normala den bertsorea $(\hat{N})$.

$\overline{AI}$ ibilbidea erreala izan dadin, $n.\overline{AI}$ bide optikoak minimoa izan beharko luke. Baina n konstantea denez (ingurunea homogenoa bait da), $\overline{AI}$ berak izan beharko du minimoa. Beraz, $\overline{AI}$ horrek lerro zuzen baten zati bat izan beharko du. Ondorioz, hauxe esan genezake:

I) Ingurune homogenoa eta isotropoetan, argiak puntu batetatik beste batetara segitzen duen ibilbidea, zuzena da.

*Suposa dezagun orain, argiaren ibilbidea A eta B puntuen artean, AIB, erreala dela, eta APB, AIB ibilbidearen inguruan nahi dugun bezain hurbil dagoen beste ibilbide hipotetiko bat (hau da, AIB ibilbideari lehenengo ordenako bariazio infinitesimal bat aplikatzen diogu). Fermat-en printzipioaren arauera, lehenengo ibilbidetik bigarrenera pasatzean, bide optikoaren bariazioa nulua izango da.

Ikusten denez, bide optiko osoa honela idatziko genuke:

$$[d] = n\,\overline{AI} + n'\,\overline{IB}\,.$$

Edo bektorialki idatzirik:

$$[d] = n\,\hat{u}.\vec{AI} + n'\,\hat{u}'.\vec{IB}\,.$$

Ibilbide bariatutik:

$$[d] + \delta[d] = n\,\overline{AP} + n'\,\overline{PB} = n\,(\hat{u}+\delta\hat{u}).(\vec{AI}+\vec{IP})+$$

$$+n'\,(\hat{u}+\delta\hat{u}').(-\vec{IP}+\vec{IB}) = n\hat{u}.\vec{AI} + n'\hat{u}'.\vec{IB} + n\hat{u}.\vec{IP} -$$

$$-n'\hat{u}'.\vec{IP} = [d] + (n\hat{u}-n'\hat{u}').\vec{IP}$$

zeren $\delta\hat{u}.\vec{AI} = \delta\hat{u}'.\vec{IB} = 0$ elkarren perpendikularrak bait dira,

eta $\delta\hat{u}.\vec{IP}$ eta $\delta\hat{u}'.\vec{IP}$, lehenengo ordenako diferentzialen biderkaketak direnez, nulutzat onartzen dira. Beraz, bide optikoak jasaten duen bariazioa, hauxe da:

$$\delta[d] = (n\,\hat{u} - n'\hat{u}').\vec{IP}\ ,$$

eta Fermat-en printzipioaren arauera, bariazio honek nulua izan behar du:

$$\delta[d] = (n\,\hat{u} - n'\hat{u}').\vec{IP} = 0\ . \qquad (5)$$

Goian esan dugunez, $\vec{IP}$ lehenengo ordenako bektore diferentziala da, baina ez nulua. (5) ekuazioan, faktore bietatik ez bata ez bestea ez dira nuluak. Beraz, biderkadura nulua izan dadin, biek elkarren perpendikularrak izan beharko dute. Baina $\vec{IP}$ bektorea, bigarren ordenako diferentzialak izan ezik, I puntuan S gainazalaren tangentea den planoan dagoela onar daiteke. Ondorioz, $(n\,\hat{u} - n'\hat{u}')$ bektorea, bektore honen perpendikularra den, I puntuan gainazalaren perpendikularra den norabidean egongo da, $\hat{N}$ bertsorearenean hain zuzen:

$$n\,\hat{u} - n'\hat{u}' = k\,\hat{N}\ , \qquad (6)$$

non <u>k</u> konstante bat den. Ekuazio honen esangura, ondokoa dugu:

II) <u>Izpi intzidentea, errefraktatua eta intzidentzi puntuko normala, plano berean aurkitzen dira</u> (intzidentzi planoa deritzoguna).

*Biderka dezagun bektorialki (6) ekuazioa, $\hat{N}$ bertsorearekin:

$$(n\,\hat{u} - n'\hat{u}') \wedge \hat{N} = k\hat{N} \wedge \hat{N} = 0\ .$$

Edota:

$$n\,\hat{u} \wedge \hat{N} = n'\hat{u}' \wedge \hat{N}$$

Honen modulua hartuz:

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon' \qquad (7)$$

eta hauxe da, hain zuzen ere, Snell-en errefrakzioaren legea:

III) Snell-en errefrakzioaren legea: Lege honek dioenez, inguruneen errefrakzio-indizeen eta isladapenaren eta errefrakzioaren angeluen arteko erlazioa, hauxe da:

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$$

*(7) ekuazioaren kasu berezi bat, isladapen hutsa izango litzateke. Isladapenean, $n$ eta $n'$ berdinak dira. Ondorioz, zera lortuko genuke:

IV) Isladapenaren legea:

$$\varepsilon = \varepsilon' \qquad (8)$$

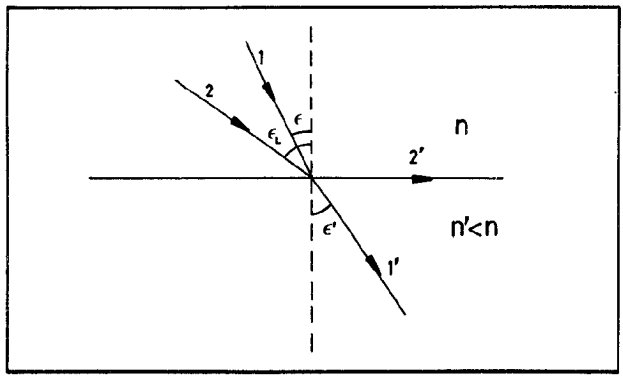
erraz ikus daitekeenez.

*Galdera honekin bukatzeko, esan dezagun erraz froga daitekeela, $\overline{AIB}$ ibilbidea erreala bada, $\overline{BIA}$ ibilbidea ere erreala dela. Honek zera esan nahi du:

V) Argi-izpien ibilbideak ingurune desberdinetan zehar itzulgarriak dira.

## 28.6. ISLADAPEN OSOA.

Snell-en legearen arauera, $n' > n$ denean, $\varepsilon' < \varepsilon$ izango da. Beraz, errefraktatzen den argi-izpia, intzidentzi puntuko normalerantaz hurbilduko da. Aldiz, $n' < n$ denean, $\varepsilon' > \varepsilon$ izango da eta argi-izpia normal horretatik aldenduko da. Argi dagoenez, errefrakzio angelua, $\varepsilon'$ delakoa, angelu zuzenaren balorera heltzen denean, ez da bigarren ingurunera argi-izpirik pasatuko, zeren izpi guztiak gainazalaren tangenteak irtengo bait dira.




Kalkula dezagun horrelako errefrakzio-angelua sorterazten duen intzidentzi angelua. Horretarako, (7) ekuazioan $\varepsilon' = 90°$ egin beharko dugu. Ondorioz:

$$n \sin \varepsilon_L = n' \sin 90° = n'$$

Edo:

$$\sin \varepsilon_L = n'/n \qquad (9)$$

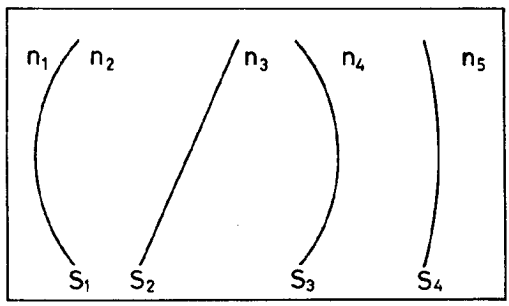
Intzidentzi angelu honi, $\varepsilon_L$, muga-angelua deritzogu. Ikus daitekeenez, horrelakoa gerta dadin, $n'<n$ izan behar du.

$\varepsilon > \varepsilon_L$ angeluetarako, argi-izpiek ez dute errefrakziorik pairatuko, eta guztiak isladatu egingo dira. Fenomeno hau, isladapen osoa deitzen da, eta bertan, argi-izpiek isladapenaren legea segituko dute. Hauxe da, hain zuzen, fibra optiko famatuen barnean gertatzen dena.

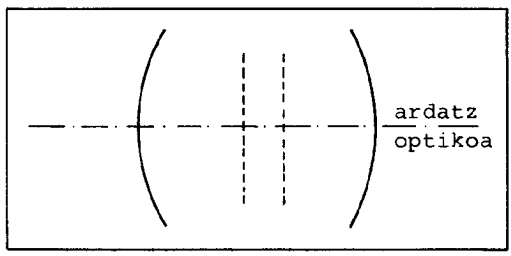
## 28.7. SISTEMA OPTIKOAK. DIOPTRIOAK ETA KATOPTRIOAK.

Normalean, Optikan aztertzen diren sistemek ez dute soilik kontsideratzen gainazal bakar batez banaturik dauden bi ingurunez osoturiko sistemak. Hauek, kasu berezi sinpleenak dira. Edozein tresna optiko hartuz, han agertzen diren ingurune eta gainazalak ugariak dira. Orokorki, ingurune ugari eta desberdinez osoturiko sistemak, batak besteetatik gainazalez banaturik daudelarik, sistema optikoak deitzen dira. Aipaturiko gainazalak errefraktanteak badira, dioptrioak deitzen dira, eta

isladatzaileak badira, katoptrioak. Beraz, sistema batetan agertzen diren gainazal guztiak errefraktanteak balira, sistema dioptrikoa izango genuke, eta guztiak isladatzaileak balira, sistema katoptrikoa. Mota bietako gainazalak dituzten sistema optikoei, sistema katadioptrikoak deritze.



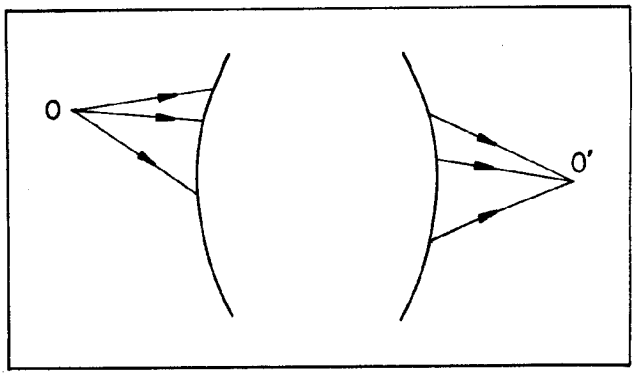

Optikan erabiltzen diren sistema ugarienak, biraketa-gainazalez osoturikoak izaten dira, eta horrez gain, gainazal hauen zentruak lerro zuzen berean aurkitzen dira. Sistema hauei, sistema zentratuak deritzegu. Besterik esaten ez badugu, hemendik aurrera sistema zentratuak aztertuko ditugu. Hauexek, sinbolikoki, irudian ikusten den bezala adierazten dira, lerro etenen artean nahi dugun bezain beste biraketa-gainazal banatzaile dagoela suposatuz.




Gainazal guztien zentruen leku geometrikoa, hau da, lehen aipaturiko lerro zuzena, ardatz optikoa deitzen da.

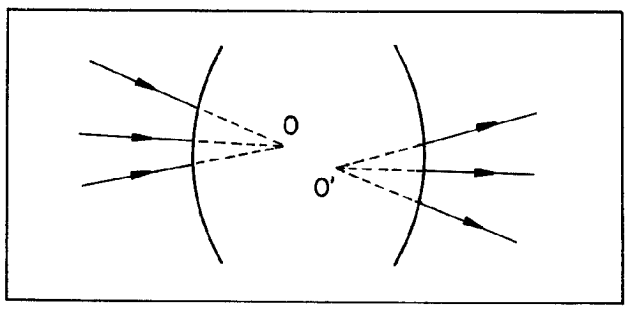
## 28.8. OBJEKTUAK ETA IRUDIAK. SISTEMA ESTIGMATIKOAK.

Demagun edozein sistema optiko bat dugula, eta bertan, bi puntu: 0, 0' (ikus irudia). O puntutik pasatzen diren argi-izpi




guztiak, sistema zeharkatu ondoren, 0' puntutik pasatzen badira (argi-izpi berak edo beraien luzapenak), 0 eta 0' puntuen bikotearekiko sistema optikoa estigmatikoa dela esango dugu, eta 0 eta 0' puntuak konjokatuak direla. Irudian, 0 puntuari objektu erreala deritzogu, eta 0' delakoari, irudi erreala, zeren izpi intzidenteak benetan pasatzen bait dira 0 puntutik, eta sistematik irteten direnak, benetan pasatzen bait dira 0' puntutik.

Baina gerta daiteke bigarren irudi honetan ikusten dena: izpi intzidenteak ez dira errealki biltzen puntu konkretu bate-




tan (bai beraien luzapenak). Kasu honetan objektu eta irudi direlako hauek ez lirateke errealak izango, birtualak edo alegiazkoak baizik.

Argi dagoenez, beste bi kasu aipa daitezke: objektu erreal baten irudia, alegiazkoa denean, eta alderantzizkoa dena, alegiazko objektu baten irudia, erreala denean.

Sarrerako gainazaletik ezkerrerantz dagoen espazioaldea, objektu-espazio erreala deitzen da, eta irteerako gainazaletik

eskuinerantz, irudi-espazio erreala.

Aipaturiko kasu guztietan, sistema optikoa estigmatikoa dela suposatu dugu, hau da, objektu-espazioko puntu bakoitzari, irudi-espazioko puntu bakar bat dagokiola. Baina sistema errealetan ez da hori gertatzen, eta puntu bati dagokion irudia ez da izaten puntu bakar bat, eta ondorioz, irudia ez da izango zehatza, nahasia baizik.

Sistema errealak aztertzea ez da erraza. Horregatik, gu sistema idealak aztertzen saiatuko gara hurrengoan, edota, sistema errealak ukitzen baldin baditugu, baldintza gogor batzu ezarriko dizkiegu. Gainera, azterketa errazagoa izan dadin, biraketa-sistema optiko zentratuak izango dira gure helburua. Gure sistemak, ideala izango denez, estigmatikoa izan beharko du, eta, horrez gain, ardatz optikoaren perpendikularra den objektu bati, ardatz optikoaren perpendikularra den irudi bat legokioke, eta azkenez, objektuek eta irudiek antzekoak izan behar dute, edozein irudi konjokatutarako antzekotasunaren koefizientea gordez.

Ikusten denez, sistema optikoa perfektua izan dadin, aipatzen den baldintzarik garrantzitsuena, estigmatikoa izatea da, eta lehen ikusitako puntuak, 0 eta 0' direlakoak, konjokatuak izan daitezen, 00' bide optikoak berdina izan behar du 0 puntutik 0' puntura doan edozein argi-izpitarako, Fermat-en printzipioa aplikatuz erraz lor daitekeenez. Hori da estigmatismorako baldintzarik orokorrena.

Sarritan, Optikazko problema bat hauxe izaten da: Ingurune desberdinetan dauden edozein bi puntu emanez, zein izan beharko litzatekeen ingurune biak banatzen dituen gainazalaren ekuazioa, aipaturiko puntuak konjokatuak izan daitezen.

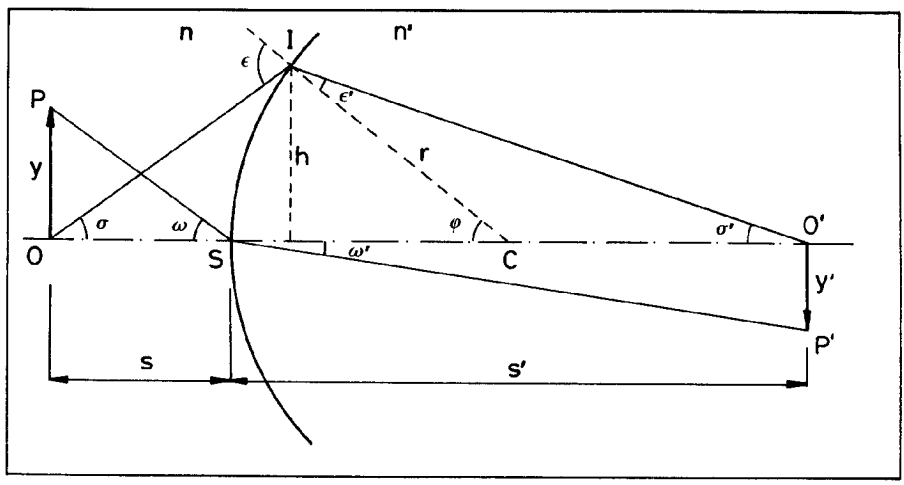
## 28.9. NOTAZIOA ETA HITZARMENAK OPTIKA GEOMETRIKOAN.

Optikan erabiltzen den tresnariaren artean, esfera edo gainazal esferikoak dira ugarienetarikoak. Gainera, esferaren

simetriaz oso erraza gertatzenda argi-izpiek segitzen dituzten ibilbideak aztertzea. Beraz, normala da Optika Geometrikoan erabiliko ditugun hainbat eta hainbat neurri eta angeluen zeinuak finkatzeko, horrelako sistema optiko batek sortuko lituzkeen aldagaiekin definitzea.

Demagun n eta n' errefrakzio-indizea dituzten bi ingurune, C puntuan zentraturik dagoen gainazal esferiko batez banaturik daudela. Ardatz optikoaren O puntuan, y altuera duen OP objektua jartzen dugu. Sistema guztiz ideala dela suposatuko bagenu, OP objektuaren irudia lortzeko, nahikoa izango litzateke sistema honek emango lituzkeen muturren irudiak ezagutzea, O' eta P' direlakoak. Horretarako, puntu bakoitzari dagokion irudia lortzeko, gutxienez mutur bakoitzetik bidaltzen diren bi izpiren ibilbideak segitu beharko ditugu.

Objektuaren O puntuari dagokion irudia lortzeko, har ditza




gun $\overline{OS}$ eta $\overline{OI}$ argi-izpiak. Errefraktatu ondoren, argi-izpiak O' puntuan bilduko dira. Sistema optikoa guztiz perfektua denez, ardatz optikoaren perpendikularra den objektu baten irudiak, ardatz horren perpendikularra izan beharko du. Beraz, P muturraren irudia, O' puntutik pasatuz, ardatz optikoaren perpendikularra den direkzio batetan egongo da. Hau da, P muturraren irudia lortzeko, nahikoa izango da P puntutik irteten den argi-

-izpi baten ibilbidea segitzea, $\overline{PS}$ izpiarena, adibidez. O' puntutik pasatu eta ardatz optikoaren perpendikularra dèn norabidearekin azken izpi honek duen ebakidura puntua, P' da, eta, ondorioz, $\overline{OP}$ objektuaren irudia, $\overline{O'P'}$ izango da.

Beharrezkoa izango zaigu, hemendik aurrera neurriei eta angeluei buruzko hitzarmen eta notazio batzu erabiltzea, DIN izeneko arauak, hain zuzen ere. Aurreko irudian finkatuz, hauexek dira:

a) Objektuei dagozkien neurriak eta angeluak, hizki primaturik gabe idatziko ditugu, eta irudiei dagozkienak, hizki primatuez.

b) Ebakidura-puntuak, majuskulaz idatziko ditugu.

c) Ardatz optikoaren norabidean neurtzen diren luzerak, ardatz optiko horrek dioptrioarekin duen ebakidura-puntutik neurtuko dira, argi-izpiak duen norantza normala positibotzat kontsideratuz. Gure kasuan, S da jatorri-puntua. Beraz, $\underline{s}'$ positiboa da eta $\underline{s}$ negatiboa.

d) Kurbatura-erradioa positibotzat hartzen da, kurbatura-zentrua S puntutik eskuinerantz badago. Beraz, $\underline{r}$ positiboa da gure kasuan.

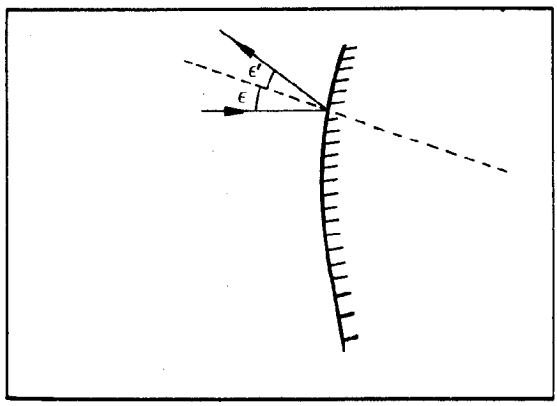
e) Ardatz optikoaren perpendikularraren norabidean neurtzen diren luzerak, gorantza daudenak positiboak izango dira ( y,h), eta behera daudenak, negatiboak (y').

f) Angeluak neurtzeko, beste hitzarmen hauek erabiliko ditugu:

1. Ardatz optikoa ebakitzen duten izpien angeluak positiboak dira, bide laburrenetik ardatz horren bila joatean, erlojuaren orratzen norantza arruntaren aurka badoaz; eta negatiboak, orratzen norantzan badoaz. Beraz, $\omega$, $\omega'$ eta $\sigma'$ positiboak dira, eta $\sigma$ negatiboa.

2. Dioptrioan isladatzen eta errefraktatzen diren beste argi-izpiei dagokionez, $\underline{\varepsilon}$ eta $\underline{\varepsilon}'$ direlako angeluak , posi-

tiboak izango dira, puntu horretan dagoen normalerantz bide laburrenetik eramaterakoan erlojuaren orratzen jokabidea segitzen baldin badute, eta negatiboak aurkako norantzan badoaz. Beraz, gure kasuan $\underline{\varepsilon}$ eta $\underline{\varepsilon}'$ positiboak izango dira. Hemen problema bat sortzen zaigu: $\underline{\omega}$ eta $\underline{\omega}'$ angeluak, intzidentzi eta errefrakzio-angelu bezala kontsideratzen baldin baditugu, oraintxe berton aipaturiko arauaz, negatiboak lirateke, baina ardatz optikoarekin ebakitzen diren izpiak kontsideratuz, aldiz, positiboak. Beraz, kasu bakoitzean zer diren zehaztu egin beharko litzateke.




Hitzarmen hauen arauera, alboko irudian ikusten den isladapenean, $\underline{\varepsilon}$ eta $\underline{\varepsilon}'$ angeluakbalio berekoak baina kontrako zeinukoak dira. Hau da:

$$\varepsilon = -\varepsilon'$$

edota, errefrakzio bat kontsideratuz:

$$n = -n'$$

## 28.10. OPTIKA PARAXIALA (EDO GAUSS-EN HURBILKETA).

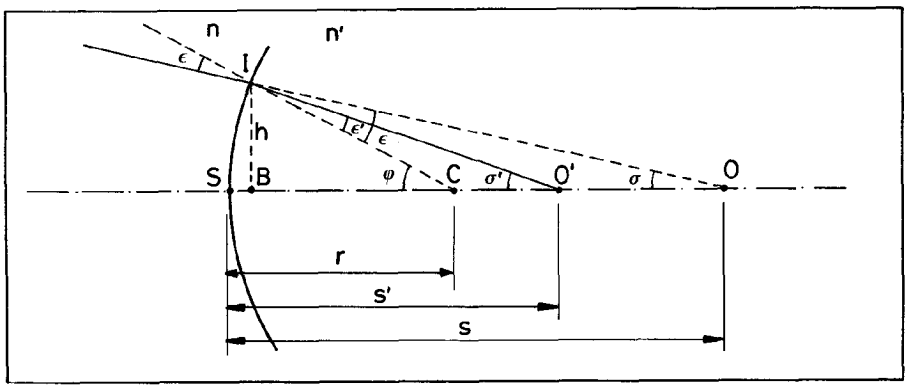
Sistema optiko zentratuak aztertzerakoan, hurbilketa batzu egiten dira. Esan dugunez, orokorki, sistemak ez dira perfektuak izaten, eta argi-izpien ibilbideak segitzea ez da sarritan erraza. Baina argi-izpi hauek ardatz optikoarekin angelu oso txikiak egiten dituztenean, kalkuluak neurri handi batetan sinplifika daitezke.

Hurbilketa honetan, angeluak eta beraien sinu eta tangenteak berdinak direla onar daiteke: $\varepsilon \approx \sin \varepsilon \approx \operatorname{tg} \varepsilon$ .

Ikusiko ditugun tresna optikoen jokaera zonalde honetan aztertuko dugunez, nahikoa izango zaigu hurbilketa hau erabiltzea, Optika paraxiala edo Gauss-en hurbilketa deritzoguna, hain zuzen. Beraz, hurrengo galdera hauetan, Optika paraxialean mugituko gara; areago, dioptrio esferikoak Optika paraxialean aztertuko ditugu.

## 28.11. DIOPTRIO ESFERIKOA. ABBE-REN INBARIANTEA.

Hurrengo irudian, segi dezagun argi-izpi baten ibilbidea dioptrio esferiko batetan errefraktatu ondoren. Egingo ditugun kalkuluak, zonalde paraxialean bakarrik izango dira baliagarriak.




Geure helburua hauxe izango da: ezker aldetik eta n errefrakzio-indizea duen ingurune batetan hedatzen den argi-izpi bat, r erradioa duen dioptrio esferiko batetan errefraktatu ondoren, n' errefrakzio-indizea duen ingurune batetara pasatzean, ardatz optikoaren zein puntutatik pasatuko den aurkitzea.

Lehendabizi, Snell-en legea, aipaturiko hurbilketan, honela idatz daiteke:

$$n\,\varepsilon = n'\varepsilon' \,. \qquad (10)$$

Geometrikoki ikusten denez:

$$\varphi = \varepsilon' + \sigma' = \varepsilon + \sigma \ .$$

Hemendik:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varphi - \sigma \\ \varepsilon' &= \varphi - \sigma' \end{aligned}\right\}$$

Baina:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\simeq \operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} \\ \sigma &\simeq \operatorname{tg}\sigma = \frac{h}{s} \\ \sigma' &\simeq \operatorname{tg}\sigma' = \frac{h}{s'} \end{aligned}\right\}$$

Ondorioz:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{h}{r} - \frac{h}{s} \\ \varepsilon' &= \frac{h}{r} - \frac{h}{s'} \end{aligned}\right\}$$

eta (10) ekuaziora eramanez:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) . \qquad (11)$$

Hau da: $n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$-ren balorea ez da aldatzen objektu-espaziotik irudi-espaziora pasatzean. Beste era batetan esanez, idatziriko adierazpena aldaezina da, Abbe-ren inbariantea hain zuzen.

Formula hau bezain baliagarria den beste bat atera genezake bertatik:

$$\frac{n}{s} - \frac{n'}{s'} = \frac{n-n'}{r} \ , \qquad (11')$$

edota:

$$\frac{1}{s'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{s} + \frac{n'-n}{n'r} \quad . \qquad (11'')$$

Azken honetan, beste ezaugarri guztiak esagutuz, erraz lortuko genuke 0' puntuaren posizioa.

Esan beharra dago ezen formula hauetan aldagai bakoitzak inplizituki bait daramala bere zeinua. Lehen aipaturiko arauak segituz, r, s, s', n eta n' positiboak izango lirateke.

Ikus ditzagun zenbait kasu berezi:

a) Dioptrio laun errefraktantea: Kasu honetan, $r = \infty$ egin beharko genuke (11) ekuazioan. Beraz:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \qquad \text{edo} \qquad s' = \frac{n'}{n}\, s \, .$$

b) Ispilu esferikoa: Lehen ikusi dugunez, kasu honetan $n' = -n$ egin behar dugu. Beraz, zera lortuko dugu:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad .$$

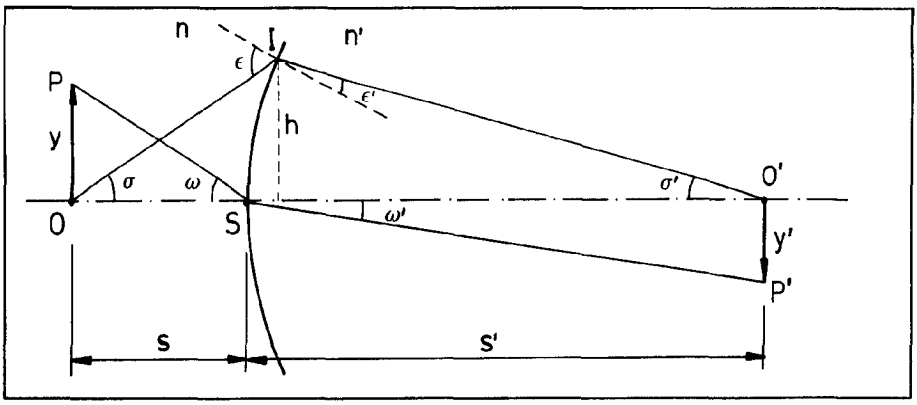
c) Ispilu launa: Aurreko kasuaren ondorio bat besterik ez da, r infinitua egiten denekoa, hain zuzen. Honekin:

$$s' = -s \quad .$$

## 28.12. LAGRANGE-HELMHOLTZ-EN INBARIANTEA

Dioptrio esferikoekin segituz, aurki dezagun objektu- eta irudi-espazioko n, y eta $\sigma$ magnitude homologoen artean zein erlazio betetzen den, y delakoa objektuen tamainu bertikala eta $\sigma$ delakoa, beraien ardatz optikoaren puntutik neurtzen diren angeluak izanik, irudian adierazten den bezala.

Kalkuluak errazteko, bi ingurune banatzen dituen dioptrio




bakar bat kontsideratuko dugu. Kasu honetan, ikus dezagun zein den objektuaren P muturretik irtenez, dioptrioaren S erpinean errefraktatzen den argi-izpiaren ibilbidea. $\omega$ eta $\omega'$ angeluak, intzidentzi eta errefrakzio-angeluak direla suposatuz (beraz, negatiboak), Snell-en legearen arauera zera beteko da Optika paraxialean:

$$n\omega = n'\omega' \ . \qquad (12)$$

Baina hurbilketa honetan, irudiaren geometriari begiratuz, zera idatz dezakegu:

$$\omega \simeq tg\omega = \frac{y}{s} \quad \text{eta} \quad \omega' \simeq tg\omega' = \frac{y'}{s'} \ .$$

Gainera:

$$s = \frac{h}{tg\sigma} \simeq \frac{h}{\sigma} \quad \text{eta} \quad s' = \frac{h}{tg\sigma'} \simeq \frac{h}{\sigma'} \ .$$

(12) ekuazioan balore hauek ordezjarriz, hauxe lortuko genuke:

$$n\,\frac{y\,\sigma}{h} = n'\,\frac{y'\sigma'}{h} \qquad ny\sigma = n'y'\sigma' \qquad (13)$$

Ikusten denez, aipaturiko hiru magnitudeen arteko biderkadura ez da aldatzen objektu-espaziotik irudi-espaziora pasatzean. Hau da, biderketa hori aldaezina da, Lagrange-Helmholtz-en inbariantea hain zuzen.

Baina Optikan erabiltzen diren sistemak ez dira hain sin-

pleak izaten. Sistema zentratu bat kontsideratuz, suposa dezagun i dioptrio esferikoz osoturik dagoela, hasierako eta bukaerako errefrakzio-indizeak $n_1$ eta $n'_i$ direlarik.

Kontutan eduki behar da ezen lehenengo dioptrioak sorteraz ten duen irudiak, bigarren dioptriorako objektu bezala jokatuko duela. Beraz, Lagrange-Helmholtz-en ekuazioa aplikatzean, notazio hauek erabiliko ditugu:

$$n'_j = n_{j+1} \ , \qquad y'_j = y'_{j+1} \ , \qquad \sigma'_j = \sigma_{j+1} \ .$$

Dioptrio guztiei Langrange-Helmholtz-en ekuazioa aplikatuz, hurrengoa lortzen dugu:

$$\left.\begin{array}{l} n_1 y_1 \sigma_1 = n'_1 y'_1 \sigma'_1 \\ n_2 y_2 \sigma_2 = n'_2 y'_2 \sigma'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ n_i y_i \sigma_i = n'_i y'_i \sigma'_i \end{array}\right\}$$

Baina erabiltzen ari garen notazioaren arauera, ekuazio bakoitzaren bigarren atala, hurrengo ekuazioaren lehenengo atalaren berdina da. Azkenez, hauxe lortzen da:

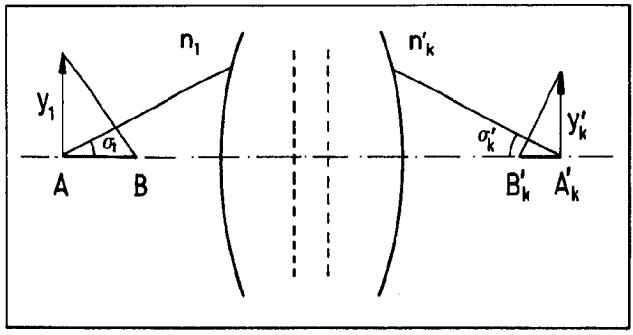
$$n_1 \ y_1 \ \sigma_1 = n'_i \ y'_i \ \sigma'_i \ . \qquad (14)$$

Hau da, Langrange-Helmholtz-en ekuazioa baliagarria da sistema osorako. Aipagarria da azken formula honetan ikusten dena: lehenengo eta azken inguruneak izan ezik, beste guztiak ez dira ezertarako agertzen.

## 28.13. HANDIPENAK

Galdera honetan, sistema zentratu batek sortzen duen irudiaren zenbait magnitudek, objektuaren magnitude homologoekin dituzten erlazioak aztertuko ditugu, hala nola, neurri bertika-

len arteko erlazioa, ardatz optikoa ebakitzen duten argi-izpiek egiten dituzten angeluen arteko erlazioa, eta ardatz optikoaren paraleloak diren neurri homologoen arteko erlazioa.




a) Albo-handipena: Definizioz, irudiaren eta objektuaren altuera homologoen zatidura da. Hau da:

$$\beta' = \frac{y'_k}{y_1} \quad . \tag{15}$$

Formula honetan zeinuak inplizituki doazela kontutan hartuz, objektua eta irudia norantza berekoak badira, $\beta'$ positiboa izango da, eta aurkako norantzan badaude, negatiboa.

Langrange-Helmholtz-en ekuazioa kontutan hartuz, honela idatziko genuke albo-handipenaren adierazpena:

$$\beta' = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{n_1 \sigma_1}{n'_k \sigma'_k} \quad . \tag{16}$$

Hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak balira (airea, adibidez), hauxe geratuko litzaiguke:

$$\beta' = \frac{\sigma_1}{\sigma'_k} \quad . \tag{17}$$

Hau da, objektuaren oinarritik irteten den argi-izpi batek eta argi-izpi homologoak azken ingurunean ardatz optikoarekin egiten dituzten angeluen arteko erlazioa, huts hutsik.

b) Handipen angeluarra: Magnitude honek, ardatz optikoa ebaki-

tzen duten argi-izpiek egiten dituzten angeluen arteko erlazioa definitzen du (egia esateko, beraien tangente trigonometrikoena, baina optika paraxialean dihardugunez, angeluen arteko erlazioa besterik ez da). Beraz, definizioz, hauxe ipiniko dugu:

$$\gamma' = \frac{\sigma'_k}{\sigma_1} \quad . \tag{18}$$

Lehengo irudian ikusten denez, kasu honetan $\gamma'$ negatiboa izango da. Hemen ere, Langrange-Helmholtz-en ekuazioa erabiliz, $\gamma'$ beste era honetan idatz genezake:

$$\gamma' = \frac{n_1 y_1}{n'_k y'_k} = \frac{n_1}{n'_k} \cdot \frac{1}{\beta'} \quad . \tag{19}$$

Hau da, handipen angeluarra eta albo-handipena alderantziz proportzionalak dira.

Lehen bezala, hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak balira ($n_1 = n'_k$), $\gamma' = 1/\beta'$ izango litzateke.

c) Handipen axiala: Magnitude honek, ardatz optikoaren paraleloak diren neurri homologoen arteko erlazioa adierazten du. Lehenengo irudiari begiratuz, honela idatz daiteke, ba, handipen axiala:

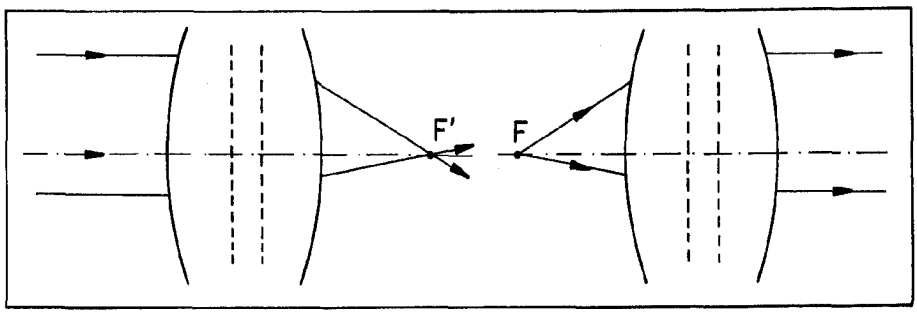
$$\alpha' = \frac{\overline{A'_k B'_k}}{\overline{A_1 B_1}} \quad . \tag{20}$$

* Albo-handipena eta handipen angeluarra, plano konjokatu biren artean, konstanteak dira. Sistema optiko perfektu batetan, ardatz optikoaren perpendikularra den plano baten irudia, beste horrelako plano bat izango da. Plano hauek konjokatuak deitzen dira, eta hauxe da lehen esandakoaren esangura.

Sistema optiko ber batetan plano konjokatu desberdinak hartuz, orokorki handipen angeluarra eta albo-handipena aldatu egingo dira, baina bikote bakoitzean konstanteak izanik.

## 28.14. FOKUAK.DISTANTZIA FOKALAK.SISTEMA BATEN AHALMEN OPTIKOA.

Demagun ardatz optikoan dugun objektu bat ezker alderantz eta infiniturantz daramagula. Handik datozen argi-izpiak, sistema optikoa zeharkatu eta gero, ardatz optikoaren puntu batetan bilduko dira. Puntu hori irudi-fokua deitzen da. Era berean, demagun ardatz optikoan beste puntu bat dugula. Bertatik igortzen diren argi-izpiak, sistema zeharkatu eta gero, ar-




datz optikoaren paraleloak irteten baldin badira (edota irudia infinituan aurkitzen bada), puntu horri objektu-fokua deitzen zaio.

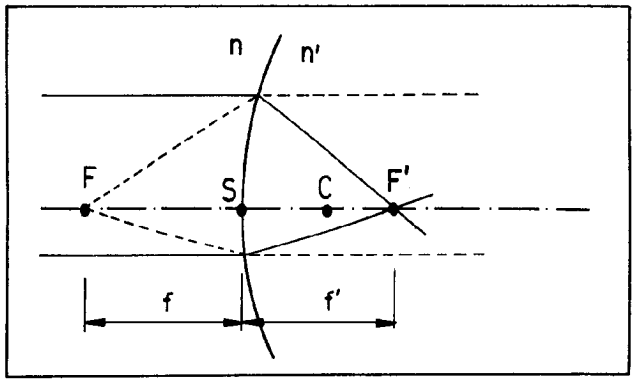
Puntu hauei loturik, bi magnitude definitzen dira: distantzia fokalak, hain zuzen ere. Objektu-fokuari dagokionari, objektu-distantzia fokala, f, deritzogu, eta beraren balorea, $s' = \infty$ distantziari dagokion s delakoaren balorea da. Era berean, $s = \infty$ distantziari dagokion s', irudi-distantzia fokala, f', izango da. Beste era batetan esanez, fokuak, ardatz optikoaren infinituko puntuen puntu konjokatuak dira.

Dioptrio bakar bat dugunean, ez dago inolako problemarik f eta f' direlakoen baloreak lortzeko. Kalkula ditzagun, adibidez, kasu berezi batzuri dagozkien distantzia fokalak:

I. Dioptrio esferikoa:

a) Objektu-distantzia fokala: Gogora dezagun Abbe-ren inbariantea:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right).$$




Hemen, $s' = \infty$ eginez, $s = f$ izango litzateke, eta ondorioz:

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{f}\right) = \frac{n'}{r} \ .$$

Beraz:

$$f = \overline{SF} = \frac{n}{n-n'} r \ . \qquad (21)$$

b) Irudi-distantzia fokala: Kasu honetan, $s = \infty$ eginez, $s' = f'$ lortuko genuke:

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n} r \ . \qquad (22)$$

c) Gauss-en formula: Biderka dezagun Abbe-ren inbariantea, $\frac{r}{n-n'}$ faktoreaz, (11') ekuazioa erabiliz:

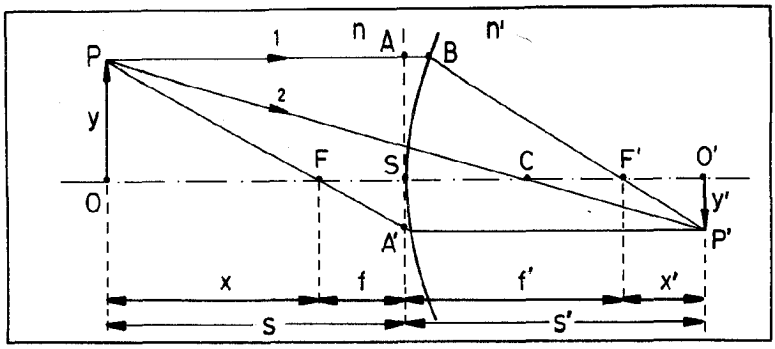
$$\frac{n}{s} \cdot \frac{r}{n-n'} - \frac{n'}{s'} \cdot \frac{r}{n-n'} = \frac{n-n'}{r} \cdot \frac{r}{n-n'} = 1 \ .$$

Lehenengo atala ordenatuz, zera geratuko zaigu:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \ . \qquad (23)$$

Formula hau oso baliagarria gertatzen zaigu dioptrio esferiko batetan objektu-distantziaren eta irudi-distantziaren arteko erlazioak kalkulatzeko. Hauxe da, hain zuzen, Gauss-en formula.

d) Newton-en formula: Ikus dezagun ondoko eraiketa grafikoa. Irudi honetan, ardatz optikoaren 0 puntuan oinarriturik dagoen




y altuerako objektu bertikal baten irudiaren eraiketa ikusten da. Adierazitako sistema perfektua denez, OP objektuaren irudia aurkitzeko aski da P puntuaren irudia non dagoen ikustea, zeren irudiak ere bertikala izan beharko bait du, eta 0 puntuaren irudiak, 0' delakoak, ardatz optikoan egon beharko bait du. Segi ditzagun 1 eta 2 izpien ibilbideak, dioptrioan errefraktatu ondoren. 1 izpia ardatz optikoaren paraleloa denez, 1' izpia irudi-fokutik pasatuko da. 2 izpiak dioptrioaren zentruaren norabidea darama eta beraz, dioptrioaren perpendikularra da eta ez du beraren direkzioa aldatuko. Orduan, C puntutik pasatuko da. Izpi bien ebakidura-puntua, P puntuaren irudia izango da, P' delakoa hain zuzen ere. Irudi honetan, objektuak eta irudiak fokuekiko dituzten posizio erlatiboak definitzen dira: $x = \overline{FO}$ eta $x' = \overline{F'O'}$ (kasu honetan, $x < 0$ eta $x' > 0$ izango dira).

Gogora bedi Optika paraxialean gabiltzala, eta angelu oso txikiak darabiltzagula. Orduan, A eta B puntuak ia ia kointzidenteak izango dira. Ikus dezagun esandakoa kontutan hartuz nola adieraz daitekeen hurrengo erlazioa: $y'/y$.

$$\frac{y'}{y} = \frac{y'}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA'}}{y} < 0 \ . \qquad (24)$$

$\overset{\triangle}{ASF'}$ eta $\overset{\triangle}{P'O'F'}$-en antzekotasunez: $\frac{y'}{\overline{SA}} = -\frac{x'}{f'}$ (zeren x' eta f' positiboak bait dira).

$\overset{\triangle}{POF}$ eta $\overset{\triangle}{A'SF}$-en antzekotasunez: $\frac{\overline{SA'}}{y} = -\frac{f}{x}$ (zeren x eta f negatiboak bait dira).

Idatzitakoa (24) adierazpenean ordezjarriz, zera dugu:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} \quad \Rightarrow \quad xx' = ff' \,. \tag{25}$$

Hauxe da hain zuzen, dioptrio esferiko batetarako Newton-en formula Optika paraxialean: lau aldegaietatik hiru ezagutuz, laugarren aldagaiaren balorea kalkulatu ahal izango dugu.

II. Ispilu esferikoa: Inguruneen gainazal banatzailea isladatzailea bada, lehen ikusi dugunez, $n' = -n$ hartzen da.

a) Objektu-distantzia fokala: (21) ekuazioan $n' = -n$ eginez, zera lortuko genuke:

$$f = \frac{n}{2n}\, r = \frac{r}{2} \longrightarrow f = \frac{r}{2} \,. \tag{26}$$

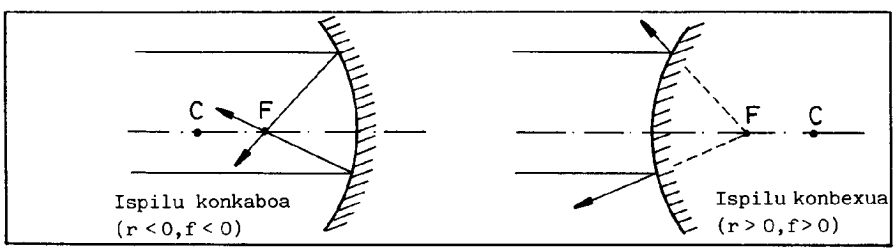
b) Irudi-distantzia fokala: (22) ekuazioan $n' = -n$ eginez, hauxe lortzen da:

$$f' = \frac{r}{2} \,. \tag{27}$$

Ondorioz, ispilu esferikoetan, zera lortzen da:

$$f = f' = \frac{r}{2} \,. \tag{28}$$

Hau da foku biak puntu berean aurkitzen dira. Gainera, $r>0$ bada, distantzia fokala positiboa izango da (ispilu konbexua), eta $r<0$ denean, distantzia fokala negatiboa izango da (ispilu konkaboa).

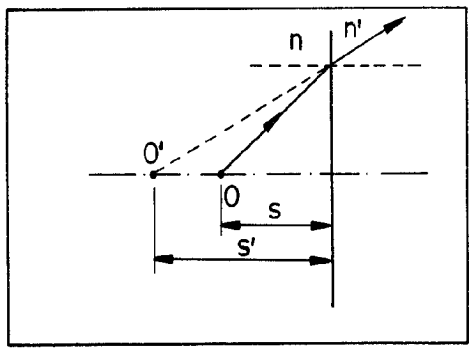



c) Gauss-en formula: (23) eskuazioa erabiliz eta $f = f' = \frac{r}{2}$ dela kontutan hartuz, honela geratzen zaigu Gauss-en formu-

la ispilu esferikoen kasuan:

$$\frac{f}{s} + \frac{f}{s'} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r} \; . \qquad (29)$$

III. Dioptrio launa: Dioptrio esferikoaren kasu berezi bat besterik ez da, $r = \infty$ egiten denean. Orduan: $f = -f' = \infty$ (edo $f' = -f = \infty$).



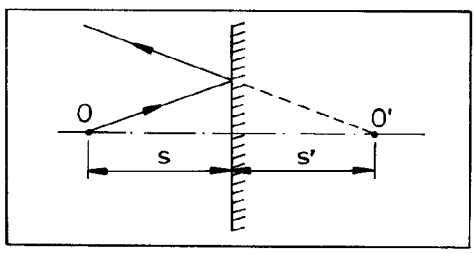

Abbe-ren inbariantea erabiliz, zera lortuko genuke:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \; . \qquad (30)$$

Hau da s, eta s' zeinu berekoak izango dira, irudian ikusten den bezala.

IV. Ispilu launa: Ispilu esferikoaren kasu berezi bat da, $r = \infty$ eginez. Hemen, $f = f' = \infty$ izango da. (29) ekuazioan $r = \infty$ eginik:

$$\frac{1}{s} = -\frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = -s \; . \qquad (31)$$




Hau da, s eta s'-k zeinu desberdinak dituzte.

Aipagarria da ispilu launaren eta dioptrio launaren ar-

teko desberdintasuna, nahiz eta azken kasu honetan dioptrioak banatzen dituen inguruneak berdinak izan ($n = n'$). Hau kontsideratuz, (30) ekuaziotik, zera lortuko genuke: $s' = s$, eta ez $s' = -s$, ispilu launaren kasuan lortzen den bezala.

* Distantzia fokalari loturik, askotan erabiltzen den magnitude bat definitzen da: Sistema optikoaren ahalmen optikoa. Honela definitzen da:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} \quad . \tag{35}$$

Hau da: definizioz, sistemaren ahalmen optikoa, irudi-distantzia fokalaren inbertsua da.

Aztertu ditugun kasuetan, balore hauek hartzen ditu:

a) Dioptrio esferikoa: $\varphi' = \frac{n'-n}{n'r}$

b) Ispilu esferikoa: $\varphi' = \frac{2}{r}$

c) Dioptrio launa: $\varphi' = 0$

c) Ispilu launa: $\varphi' = 0$

$f'$ delakoa metrotan neurtzen bada, $\varphi'$ delakoa dioptrietan adierazten da ($m^{-1}$).

## 28.15. ISPILU ESFERIKOAK. ERAIKETA GRAFIKOAK.

Demagun objektu bat dugula ispilu esferiko baten aurrean. Ispiluak sorteraziko duen irudiaren tamainua eta posizioa lortzeko, metodo grafiko erraz bat erabil daiteke. Horretarako, kasu sinpleena ikusteko, ardatz optikoaren perpendikularrak diren objektuak kontsideratuko ditugu, beraien oinarriak ardatz optikoan bertan daudelarik. Horrela, irudiaren ezaugarriak ezagutzeko, aski da beste muturretik igarotzen diren bi izpiren ibilbideak segitzea:

a) Ardatz optikoaren paraleloa den izpia: Isladatu ondoren, ispiluaren fokutik pasatuko da.

b) Kurbadura-zentrutik pasatzen den izpia: Hau, norabide berean baina aurkako norantzan joango da isladatu eta gero.

Objektuaren oinarria ardatz optikoan bertan dagoenez, beraren irudiarena ere ardatz optikoan egongo da, eta horregatik esan dugu aski dela beste muturraren posizioa jakitea irudi osoa eraikitzeko.

Aipaturiko izpiren bat erabiltzea ezinezkoa bada, kasu batzutan gertatzen denez, beste izpi hau ere lagungarria zaigu:

c) Fokutik pasatzen den izpia: Isladatu ondoren, ardatz optikoaren paralelo irtengo da.

Oharra: Aipaturiko izpien ebakidura-puntua izpi errealena bada, lorturiko irudia erreala izango da, eta bietariko bat (edo biak) izpi erreal baten luzapena bada, irudia alegiazkoa izango da.

Pasa gaitezen, ba, besterik gabe, gerta daitezkeen kasuak aztertzera, hurrengo irudiekin baliatuz.

I. Ispilu konkaboa:

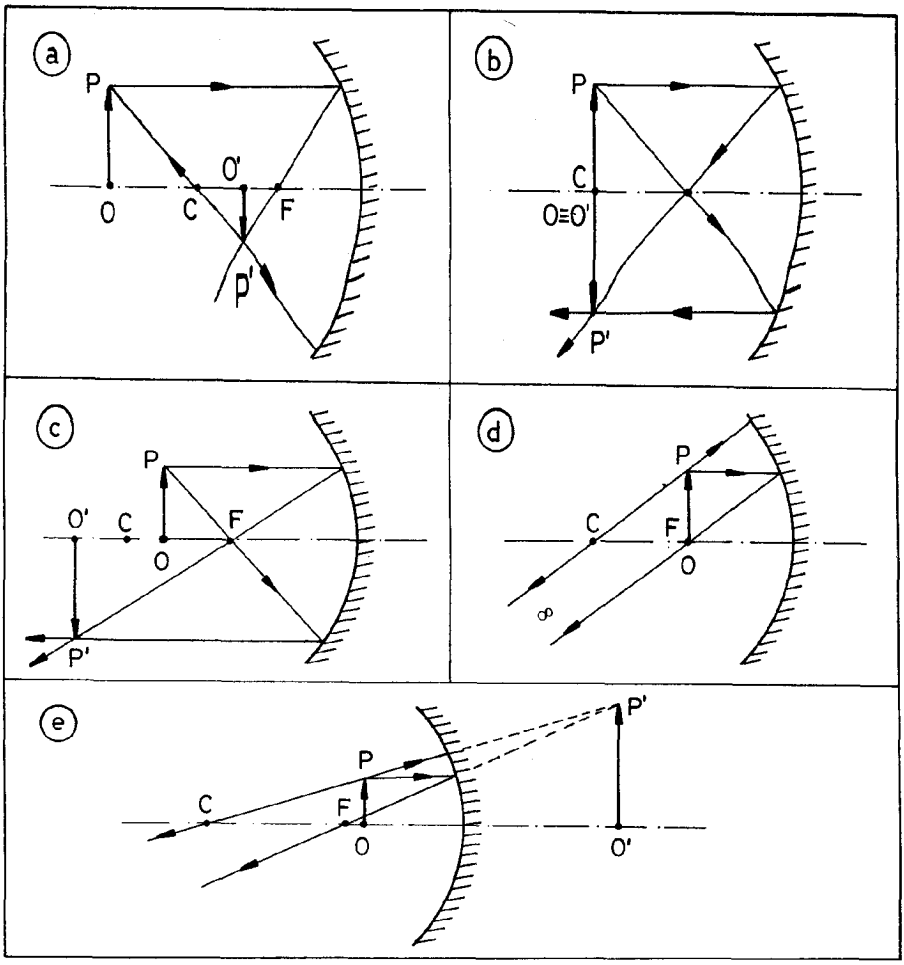
a) 0 puntua, C puntutik eskerrerantz: Irudi inbertitua, txikiagoa, erreala eta F eta C puntuen artean kokatua.

b) 0 puntua, kurbadura-zentruan: Irudi inbertitua, erreala eta objektuaren tamainu berekoa, C puntuan bertan oinarriturik.

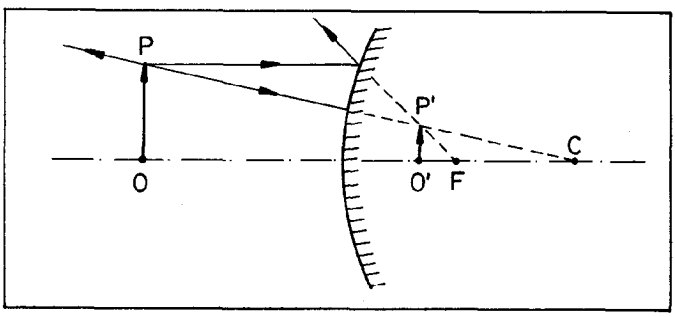
c) 0 puntua, kurbadura-zentru eta fokuaren artean: Irudi inbertitua, erreala, handiagoa eta C puntutik eskerrerantz.

d) 0 puntua, F fokuan bertan: Irudia infinituan.

e) 0 puntua, foku eta ispiluaren artean: Alegiazko irudia, zuzena eta handiagoa.




II. Ispilu konbexoa. Kasu honetan, irudi guztiak alegiazkoak dira, zuzenak eta objektuak baino txikiagoak.




## 28.16. DIOPTRIO ESFERIKOAK. ERAIKETA GRAFIKOAK.

Kasu honetan ere, aurreko galderan ikusitako eraiketaren antzeko bat egin dezakegu, baina fokuak desberdinak izango di-

rela kontutan hartuz. Gerta daitezkeen posibilitateak ugariak dira, baina guk bizpahiru besterik ez ditugu ikusiko.

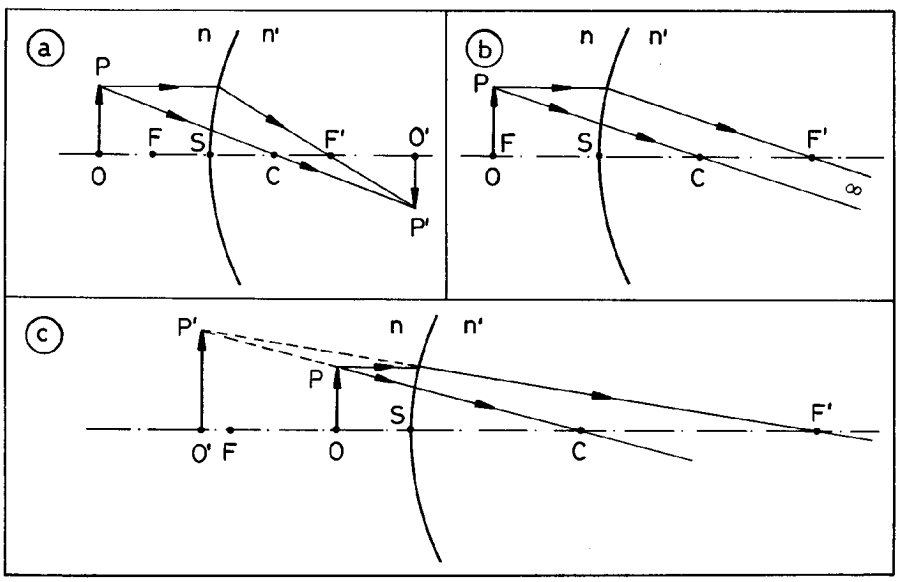
Objektuaren irudia lortzeko, lehen bezala egingo dugu; hau da, objektuaren muturraren irudia besterik ez dugu erdietsi behar, mutur horretatik irteten diren edozein bi izpiren ibilbideak segituz. Guk hauetariko bi izpi berezi aukeratuko ditugu: ardatz optikoaren paraleloa den izpia (beraz, irudi-fokutik pasatuko da errefraktatu eta gero), eta dioptrioaren zentrura zuzendurik doana (honek, aldiz, ez du bere norabidea aldatuko, eta zentru horretatik igaroko da).

28.14. galderan, distantzia fokalen adierazpenak ikusi izan ditugu:

$$f = \frac{n}{n-n'}\, r \qquad \text{eta} \qquad f' = \frac{n'}{n'-n}\, r \ . \qquad (33)$$

Guk, $n' > n$ eta $r > 0$ baldintzak betetzen dituzten kasuak aztertuko ditugu bakarrik, besteak irakurleari utziz.

(33) ekuazioetatik, $f < 0$ eta $f' > r > 0$ ateratzen da. Horrez gain, $|f|<|f'|$ da.



a) 0 puntua, objektu-fokutik ezkerrerantz: Irudia erreala, inbertitua, txikiagoa eta F' fokutik eskuin alderantz.

b) 0 puntua, F objektu fokuan bertan: Irudia infinituan.

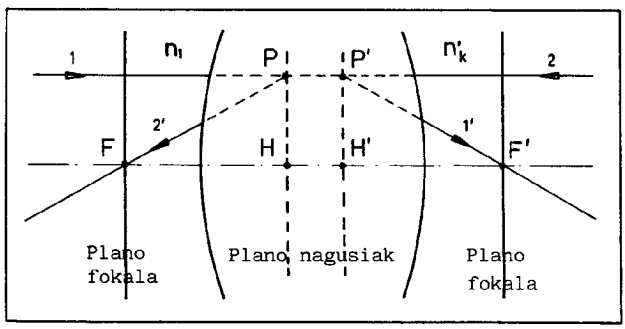
c) 0 puntua, objektu-fokuaren eta dioptrioaren artean: Alegiazko irudia, handiagoa, zuzena eta F fokutik ezker alderantz.

Bai hemen, bai aurreko galderan, eraiketa grafikoak egiteko, zehazki neurtu beharko dira erabilitako distantzia guztiak (f, f', r direlakoak), bestela, ez lukete ezertarako balioko.

## 28.17. SISTEMA ZENTRATU BATEN ELEMENTU KARDINALAK.

Sistema optiko batek ez du orokorki dioptrio bakar bat edukiko, bi, hiru edo gehiago baizik. Orduan, objektu baten irudia lortzeko, lehendabizi lehenengo dioptrioak ematen duen irudia kalkulatu beharko dugu; gero, irudi hori bigarren dioptrioaren objektu bezala kontsideratuz, bigarren dioptrio honek ematen duen irudia, eta prozesu berbera segituz azken dioptrioak ematen duen irudia lortu arte. Ikusten denez, ebazpide hau segitzea aspergarria da. Hobe da, kasurik gehienetan, sistema guztiaren beste sistema sinplifikatu eta baliokide bat erabiltzea, hurrengo lerroetan definituko ditugun puntu eta plano berezi batzuren bidez, sistema zentratu horren elementu kardinalak, hain zuzen ere. Hauexek dira:

I. Fokuak eta plano fokalak: Sistema optiko baten fokuak aurkitzeko, segi ditzagun sisteman zehar 1 eta 2 argi-izpien



ibilbideak: 1 izpia, ardatz optikoaren paraleloki higitzenden izpi bat da (hau da, ardatz optikoaren infinituko puntu batetatik irtendakoa). Definizioz, sistemaren irudi-fokutik pasatuko da sistema osoa zeharkatu ondoren, F' puntutik, alegia; 2 izpia, irudi-espazioko ardatz optikoaren infinituko puntu batetatik datorren izpia da, eta lehen bezala, ardatz optikoaren paraleloki higituko da, eta sistema osoa zeharkatu eta gero, F objektu-fokutik igaroko da. Beste era batetan esanik, irudi--fokua, F', objektu-espazioko ardatz optikoaren infinituko puntuen irudia da, eta gauza bera esan daiteke F fokuari buruz, izpien norantza aldatzen baldin badugu.

Plano fokalak (objektua eta irudia), foku hauetatik pasatuz, ardatz optikoaren perpendikularrak diren planoak dira (edo ta ardatz optikoaren perpendikularrak diren infinituko planoen plano konjokatuak). Hau da, objektu-plano fokaleko puntu batetik irteten diren izpi guztiak, sistema zeharkatu ondoren, elkarren paraleloki hedatuko dira, eta sistema optikora elkarren paraleloki heltzen diren izpi guztiak, irudi-plano fokaleko puntu bakar batetan bilduko dira. Horrela definituriko puntu fokalak, errealak edo alegiazkoak izan daitezke.

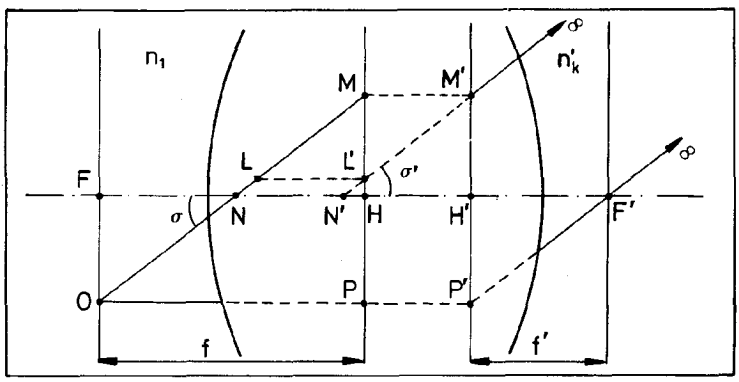
II. Puntu eta plano nagusiak: Plano nagusiak, ardatz optikoaren perpendikularrak diren bi plano konjokatu dira zeintzuetzako albo-handipena $\beta' = +1$ den. Ardatz optikoarekin dauzkaten ebakidura-puntuak, puntu nagusiak deitzen dira.

Definiziotik, objektu-plano nagusiko edozein P puntu batetara zuzendurik dagoen argi-sorta bat, sistematik irteterakoan, P puntuaren konjokatutik, P' delakotik, irtengo da, ardatz optikoarekiko P eta P' puntuek dituzten distantziak berdinak eta zeinu berekoak direlarik.

Plano hauen lorpen grafikoa ez da zaila. Demagun lehengo irudiko 1 eta 2 izpiak. Dakigunez, ardatz optikoaren paraleloak direnez, sistematik irteterakoan irudi-fokutik eta objektu-fokutik pasatuko dira. Izpi irtenkor hauek, izpi intzidenteen luzapenekin dituzten ebakidura-puntuak, plano nagusietako bi puntu izango dira, P eta P' direlakoak, hain zuzen ere. P puntutik

igaro eta ardatz optikoaren perpendikularra den planoa, objektu-plano nagusia da, eta ardatz optikoarekin duen ebakidura-puntua, H delakoa, objektu-puntu nagusia. Era berean definitzen dira irudi-plano nagusia eta irudi-puntu nagusia, H' delakoa. Plano eta puntu nagusiek ez dute zentzurik Optika paraxialean izan ezik.

III. Puntu nodalak: Ardatz optikoaren puntu bi hauek, N eta N' direlakoek, baldintza hau betetzen dute: beraietatik pasatzen diren argi-izpi konjokatuak, elkarren paraleloak dira. Definiziotik, hau bete dadin, puntu hauetarako handipen angeluarrak $\gamma = +1$ izan beharko du (ikus irudia). N eta N' puntu konjokatuak dira.




Puntu hauen lorpen grafikorako zera egin dugu: Demagun objektu-plano fokalean 0 puntu bat dugula. Lehendik dakigunez, 0 puntutik irteten diren argi-izpi guztiak, sistema zeharkatu eta gero, elkarren paraleloki hedatuko dira. Suposa dezagun 0 puntutik irteten den $\overline{OP}$ argi-izpia. Ardatz optikoaren paraleloa denez, izpi honen konjokatua F' fokutik pasatuko da. Marraz dezagun orain 0 puntutik pasatuz, $\overline{P'F'}$ izpiaren paraleloa den beste izpi bat, $\overline{OM}$ delakoa, hain zuzen. Orain bertan esandakoaren arauera, izpi honen konjokatua $\overline{P'F'}$ izpiaren paraleloa izango da. M puntua objektu-plano nagusiko puntua da. Beraz, horren konjokatua M' izango da, eta aipaturiko $\overline{OM}$ izpiaren konjokatua, M' puntutik pasatuz, $\overline{P'F'}$ izpiaren paraleloa den izpia izango da. Eraiketa grafiko honetan, $\sigma$ eta $\sigma'$ angeluak berdinak direla ikusten da. Hau da, N eta N' puntuek puntu nodalei eskatutako

baldintza betetzen dute. Beraz, N eta N' dira bilatzen ari ginen puntu nodalak.

Gainera, paralelotasunaren propietateak erabiliz, begi bistan dago, $\overline{MM'} = \overline{HH'} = \overline{NN'}$ dela, hau da, puntu nagusien arteko distantzia, puntu nodalen arteko distantziaren berdina da.

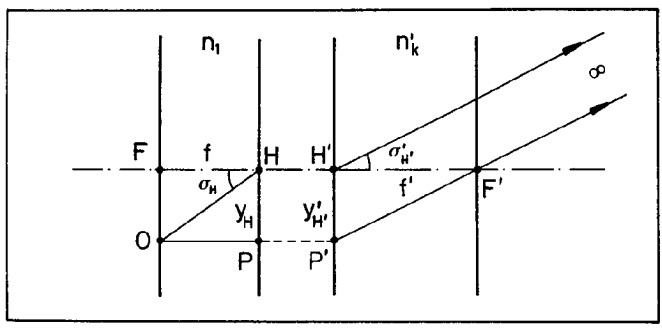
## 28.18. SISTEMA BATEN DISTANTZIA FOKALAK ETA BERAIEN ARTEKO ERLAZIOAK.

Definizioz, sistema optikoaren distantzia fokalak hauexek dira:

a) Sistemaren objektu-distantzia nagusia: $f = \overline{HF}$ .

b) Sistemaren irudi-distantzia nagusia: $f' = \overline{H'F'}$ .

Distantzia fokal biak, puntu nagusietan hasiz neurtuko dira.




Ikus dezagun irudian eginiko eraiketa grafikoa: 0 puntua, objektu-plano fokalean aurkitzen da, eta beraren irudia, dakigunez, infinituan egongo da. Marraz ditzagun 0 puntutik irteten diren bi izpi konkreturen ibilbideak: ardatz optikoaren paraleloa den izpi batena, $\overline{OP}$ delakoarena, eta objektu-puntu nagusira zuzendurik dagoen beste batena, $\overline{OH}$ delakoarena. Orain arte ikusitako plano nagusietako propietateen arauera, izpi irtenkorren ibilbideak argi daude.

Aplika diezaiegun H eta H' puntuetan kokaturik dauden objek

tuak eta irudiari, $y_H = \overline{HP}$ eta $y'_{H'} = \overline{H'P'}$ direlakoei, Lagrange--Helmholtz-en inbariantea:

$$n_1 y_H \sigma_H = n'_k y'_{H'} \sigma'_{H'} . \qquad (34)$$

Adibide honetan, $\sigma_H < 0$, $\sigma'_{H'} < 0$, $y_H < 0$, $y'_{H'} < 0$ dira, eta erlazio hauek betetzen dira:

$$y_H = y'_{H'} , \qquad \sigma_H = -\frac{y_H}{f} \text{ eta } \sigma'_{H'} = \frac{y'_{H'}}{f'} ,$$

zeren $f < 0$ eta $f' > 0$ bait dira. Balore hauek (34) ekuazioan sartzean, zera lortzen da:

$$\frac{f}{f'} = - \frac{n_1}{n'_k} . \qquad (35)$$

Hauxe da, hain zuzen, distantzia fokalen eta hasierako eta bukaerako errefrakzio-indizeen arteko erlazioa, eta azken hauek berdinak badira, hau da, $n_1 = n'_k$, orduan guztiz sinplifikaturik geratzen zaigu:

$$f = -f' . \qquad (36)$$

Azken formula hau oso lagungarri izango zaigu hurrengo galderetan ikusiko ditugun lenteen problemak aztertzeko. Gainera, kasu honetan, aurreko irudian erraz ikus daitekeenez, $\overline{OH}$ eta $\overline{P'F'}$ izpiak elkarren paraleloak izango lirateke, edo eta $\sigma_H = \sigma'_{H'}$. Hau da, H eta H' puntuek, lehen definituriko puntu nodalen baldintza beteko lukete.

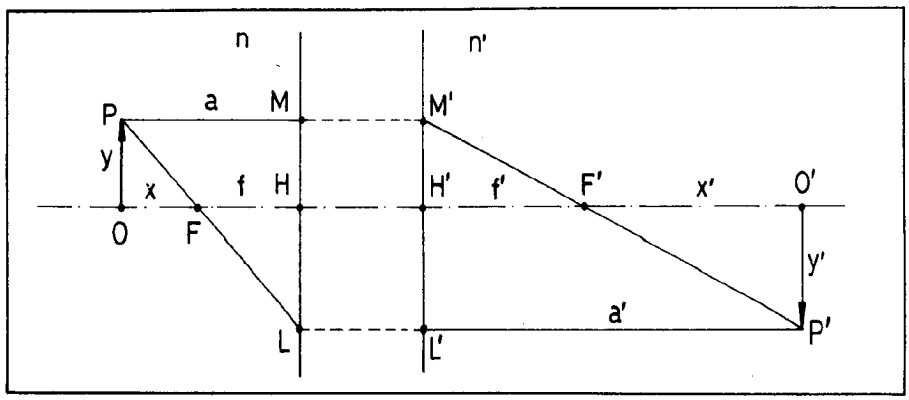
Beraz: $H \equiv N$ eta $H' \equiv N'$.

## 28.19 EKUAZIO OROKORRAK SISTEMA LABURTUETAN.

Kontsidera dezagun sistema optiko zentratu bati dagokion sistema laburtua; hau da, sistema osoa beraren elementu kardinalez adieraziko dugu: fokuak eta plano fokalak, puntu eta plano nagusiak, puntu noladak eta hasierako eta bukaerako errefrak

zio indizeak, zeintzuei $n = n_1$ eta $n' = n'_k$ deituko diegun.

Demagun, ardatz optikoaren 0 puntuan oinarriturik dagoen objektu bertikal bat, eta aurki ditzagun objektu horri dagokion irudiaren ezaugarriekin dauden erlazio matematikoak. Horretarako, egin dezagun lehendabizi betiko eraiketa grafikoa, ondoko irudian adierazten den bezala:




Irudi honetan agertzen diren neurriek, zeinu hauek dituzte:

$$\overline{HF} = f < 0 \; ; \; \overline{FO} = x < 0 \; ; \; \overline{HO} = a < 0 \; ; \; \overline{OP} = \overline{HM} = \overline{H'M'} = y > 0 .$$

$$\overline{H'F'} = f' > 0 \; ; \; \overline{F'O'} = x' > 0 \; ; \; \overline{H'O'} = a' > 0 \; ; \; \overline{O'P'} = \overline{H'L'} = \overline{HL} = y' < 0 .$$

Gainera, marrazturiko triangeluen artean, antzekotasun hauek gertatzen dira:

$$\triangle POF \simeq \triangle LHF \qquad \triangle P'O'F' \simeq \triangle M'H'F' .$$

Hau kontsideratuz, erlazio hauek lor genitzake:

$$\frac{\overline{O'P'}}{\overline{H'M'}} = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'} = \frac{\overline{HL}}{\overline{OP}} = -\frac{f}{x} = -\frac{a'-f'}{f'} = -\frac{f}{a-f} = \beta' .$$

Eta berrordenatu ondoren:

$$\underset{\mathrm{I}}{\frac{y'}{y}} = \underset{\mathrm{II}}{-\frac{f}{x}} = \underset{\mathrm{III}}{-\frac{f}{a-f}} = \underset{\mathrm{IV}}{-\frac{x'}{f'}} = \underset{\mathrm{V}}{-\frac{a'-f'}{f'}} = \underset{\mathrm{VI}}{\beta'} . \qquad (37)$$

Erlazio hauek erabiliz, objektu baten eta berari dagokion irudiaren ezaugarri guztiak aurki genitzake.

* II = IV ekuaziotik:

$$xx' = ff' \ , \tag{38}$$

eta hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak baldin badira ($n = n'$), lehen ikusi dugunez $f = -f'$ da, eta ondorioz (38) ekuazioa honela geratzen zaigu:

$$xx' = -f'^2 \ . \tag{39}$$

* III = V ekuaziotik:

$$ff' = aa' + ff' - af' - a'f \implies af' + a'f = aa'$$

eta $aa'$-rekin zatituz:

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \ , \tag{40}$$

edota $f = -\frac{n}{n'} f'$ dela kontutan hartuz (ikus (35)):

$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'} \ . \tag{41}$$

Lehen bezala, $n = n'$ denaren kasu berezian, hauxe geratuko litzaiguke:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \ . \tag{42}$$

Ikusten denez, azken formula hauetan ((39), (41), (42)), erlazioak irudi-distantzia fokalaren funtzioz adierazten dira. Horrek badu arrazoi bat: Sistema zentratuen optikan, sistemaren <u>ahalmen optikoa</u> irudi-distantzia fokalaren inbertsua bezala definitzen da:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} \ , \tag{43}$$

eta f' delakoa metrotan neurturik badator, ahalmen optikoa dioptrietan ematen da, 489. orrialdean esan bezala.

*Azkenez, ikus dezagun albo-handipenaren beste adierazpen bat. (37) erlazioetatik, hauxe atera dezakegu:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{f'-a'}{f'} = 1 - \frac{a'}{f'} .$$

Baina (41) ekuaziotik:

$$\frac{1}{f'} = - \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

denez, zera geratzen zaigu:

$$\beta' = 1 - a'.(- \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}) = \frac{n}{n'} \cdot \frac{a'}{a} .$$

Hau da :

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{a'}{a} . \qquad (44)$$

Hasierako eta bukaerako inguruneak berdinak badira (n = n'), zera dugu:

$$\beta' = \frac{a'}{a} . \qquad (45)$$

Handipenen arteko erlazioa: 13. galderan ikusi genuenez, handipen axiala honela definitzen da:

$$\alpha' = \frac{\overline{A'_k B'_k}}{\overline{A_1 B_1}} .$$

Gure sisteman, beste era honetan ere idatz genezake:

$$\alpha' = \frac{\Delta x'}{\Delta x} .$$

(39) ekuaziotik, gehikuntzak hartuz, zera dugu:

$$x \,.\, \Delta x' + x' \,.\, \Delta x = 0$$

zeren f' konstantea bait da. Hemendik:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = - \frac{x}{x'} = \alpha' \quad .$$

(37) erlazioetan, biderka ditzagun II eta IV zatikiak:

$$(-\frac{f}{x})(-\frac{x'}{f'}) = \frac{x'}{x} \cdot \frac{f}{f'} = -\alpha' \frac{f}{f'} = \beta'^2 = -\alpha'(-\frac{n}{n'}) \quad \text{(ikus (35))}$$

Beraz:

$$\alpha' = \beta'^2 \cdot \frac{n'}{n} \quad . \qquad (46)$$

Lagrange-Helmholtz-en inbarianteak dioenez, $n\sigma y = n'\sigma' y'$ da, eta hauxe kontutan hartuz, ondorengoa zuzenean atera daiteke:

$$\frac{y'}{y} = \beta' = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\gamma'} \longrightarrow \frac{n'}{n} = \frac{1}{\beta'\gamma'} \quad ,$$

non $\gamma'$ handipen angeluarra den.

Azken hau (46) ekuazioan ordezjarriz, definituriko hiru handipen arteko erlazioa lortzen da:

$$\alpha'\gamma' = \beta' \quad . \qquad (47)$$

Erlazio hau Optika paraxialean aztertzen den edozein sistema zentrutarako baliagarria da.

## 28.20. LENTEAK

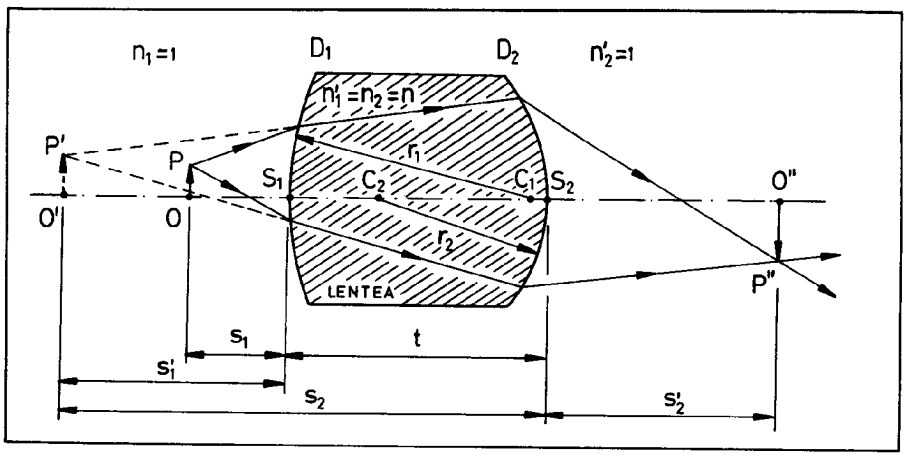
Lenteak tresna optikoetatik erabilitakoenak dira. Izatez, bi dioptrioz (bataesferikoa eta bestea esferikoa edo launa) osoturiko sistema zentratu bat osotzen dute. Gainera, kalkuluak

erraztekotan, lentetik alde bietara dauden inguruneak berdinak direla onartuko dugu. Areago, airea dela susposatuko dugu: $n_1 = n'_2 = 1$, lenteak berak duen materialaren errefrakzio-indizea $\underline{n}$ delarik.

Nahiz eta lentearen kasuan aurreko galderan lorturiko erlazio guztiak baliagarriak izan, sistema sinple honetan, lehenengoz, beste bide bat segituko dugu, bertan agertuko zaizkigun objektu eta irudien ezaugarrien arteko erlazioak kalkulatzeko.

Horrelako sistema batetan, objektu bati dagokion irudia lortzeko, zera egiten da: Lehendabizi, lehenengo dioptrioak sorterazten duen irudia eraikiko dugu, eta irudi hau bigarren dioptriorako objektu bezala hartuz, azken honek emango duen irudia kalkulatuko dugu.

Demagun ondoko irudian adierazten den kasua:




Irudi honetan agertzen zaizkigun ikurren esangurak hauexek dira:

$D_1, D_2$ : Dioptrio biak

$S_1, S_2$ : Dioptrioen erpinak

$\overline{OP} \equiv$ Objektua

$\overline{O'P'}$ ≡ Lehenengo dioptrioak ematen duen irudia ≡
≡ bigarren dioptriorako objektua

$\overline{O''P''}$ ≡ bigarren dioptrioak ematen duen irudia

$\overline{S_1O} = s_1 < 0$ : lehenengo dioptriorako objektu-distantzia

$\overline{S_1O'} = s'_1 < 0$ : lehenengo dioptriorako irudi-distantzia

$\overline{S_2O'} = s_2 < 0$ : bigarren dioptriorako objektu-distantzia

$\overline{S_2O''} = s'_2 > 0$ : bigarren dioptriorako irudi-distantzia

$\overline{S_1S_2} = t > 0$ : lentearen lodiera.

Begi bistan dagoenez, zeinuak kontutan hartu ondoren, erlazio hau dugu:

$$s_2 = \overline{S_2O'} = s'_1 - t \ . \tag{48}$$

$s'_2$ kalkulatzekotan, aplika diezaiogun dioptrio bakoitzari Abbe-ren formula ((11') edo (11")). Honela:

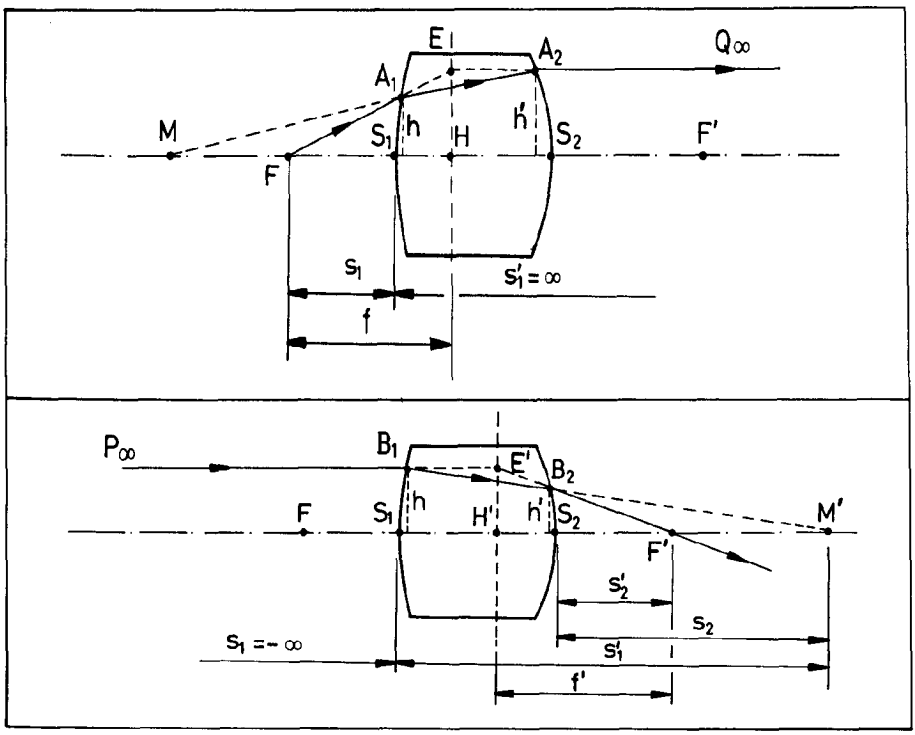
$$\begin{aligned} &\text{1. dioptrioa:} \quad \frac{1}{s_1} - \frac{n}{s'_1} = \frac{1-n}{r_1} \ , \\ &\text{2. dioptrioa:} \quad \frac{n}{s_2} - \frac{1}{s'_2} = \frac{n-1}{r_2} \ . \end{aligned} \tag{49}$$

Lehenengotik, $s_1$ eta $r_1$ ezagutuz, $s'_1$ lortuko genuke, eta (48) erlaziotik, $s_2$. Azken balore hau bigarren ekuazioan sartu ondoren, $s'_2$ lortzen da, $r_2$ ezagutzen bada, noski, eta honela problema ebatzirik geratzen da.

Marraztu dugun lentea, lenterik orokorrena da, eta lente

lodia deitzen da. Hurrengo pausoa, lente honen elementu kardinalak bilatzea izango litzateke: foku eta plano fokalak, eta puntu eta plano nagusiak, hain zuzen ere.

Aurreko galderetan, fokuen lorpen grafikoa ikusi dugu. Beraz, ez gara horretaz arduratuko. Ikus dezagun hemen ea nola lor daitezkeen lente lodi baten puntu eta plano nagusiak. Horretarako, lentearen fokuak ezagutzen ditugula kontsideratuko dugu. Ikus ditzagun hurrengo irudiak:




Lehenengo irudian, F objektu-fokutik irteten den izpi bat, $A_1$ eta $A_2$ puntuetan errefraktatu eta gero, ardatz optikoaren paraleloa irtengo da. $\overline{FA_1}$ eta $\overline{A_2Q_\infty}$ izpien luzapenen ebakidura-puntua, E delakoa, plano nagusien definizioaren arauera, objektu-plano nagusiaren puntu bat izango da, eta plano honek ardatz optikoarekin duen ebakidura-puntua, H delakoa, objektu-puntu nagusia izango da.

Bigarren irudian, alderantzizko jokabidea eramango dugu: ardatz optikoaren paralelo datorren izpi bat, $B_1$ eta $B_2$ puntuetan errefraktatu ondoren, F' irudi-fokutik pasatuko da. Argi daude E' eta H' puntuen esangura, lehen ikusi dugunaren araue-

ra. Teoria orokorra segituz, $\overline{HF}$ eta $\overline{H'F'}$ distantziak, f eta f' distantzia fokalak dira, errespektiboki.

Gauden hurbilketan, irudi bietan marraztu ditugun h eta h' altueren oinarriak, $S_1$ eta $S_2$ dioptrioen erpinekin kointzidenteak direla onar dezakegu.

Ikus ditzagun bigarren irudian dauden erlazio geometrikoak:

$\overset{\triangle}{B_1S_1M'}$ eta $\overset{\triangle}{B_2S_2M'}$ triangeluen antzekotasunaren arauera:

$$\frac{h}{s'_1} = \frac{h'}{s_2} \; ; \tag{50}$$

$\overset{\triangle}{E'H'F'}$ eta $\overset{\triangle}{B_2S_2F'}$ triangeluen antzekotasunaren arauera:

$$\frac{h}{f'} = \frac{h'}{s'_2} \; ; \tag{51}$$

eta (50) eta (51) ekuazioak atal-atalez zatitu ondoren, zera lortzen da:

$$\frac{1}{f'} = \left(\frac{s_2}{s'_2}\right) \frac{1}{s'_1} \quad . \tag{52}$$

$s_2$, $s'_1$ eta $s'_2$ ezagutuz, irudi-distantzia fokalaren inbertsua lortuko genuke, hau da, <u>lente lodiaren ahalmen optikoa</u>, zeren $\varphi' = 1/f'$ bezala definitu bait dugu. Orduan, ahalmen optikoa lortzeko, $s_2$, $s'_1$ eta $s'_2$ aldagaiak beharko ditugunez, beraien baloreak kalkulatzeko (48) eta (49) ekuazioen erabilpena beharrezkoa izango zaigu.

Gainera, lentearen alde bietara dauden inguruneak berdinak direla suposatu egin dugunez, f = -f' da (ikus (36)).

Lente lodia sistema zentratua dela kontsideratuz, (42) ekuazioa ere beteko litzateke:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \quad ,$$

non a eta a' puntu nagusietatik neurturiko distantziak diren.

## 28.21. LENTE MEHEAK.

Lente lodiaren kasu berezi bat, lente mehea da. Kasu honetan, lentearen lodiera, t delakoa, zerorantz doa, eta orduan, optika paraxialean, plano nagusiak, puntu nagusiak eta dioptrio bien erpinak, kointzidenteak dira.

Beraz, gure kasu berri honetarako (48), (49) eta (52) ekuazioak berridatziz, hauxe geratzen zaigu:

$$\overline{S_1S_2} = t \longrightarrow 0 \qquad : \qquad s_2 \approx s'_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s_1} - \dfrac{n}{s'_1} = \dfrac{1-n}{r_1} \\[2ex] \dfrac{n}{s'_1} - \dfrac{1}{s'_2} = \dfrac{n-1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s'_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Baina dioptrioen erpinak kointzidenteak direnez ($S_1 \equiv S_2$), zera betetzen da:

$s_1 \approx a \equiv$ objektu-distantzia; $s'_2 \approx a' \equiv$ irudi-distantzia.

Ondorioz, erlazio hau beteko da:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \cdot \qquad (53)$$

Hemendik, lente mehearen irudi-distantzia fokala kalkulatzeko, $a = \infty$ egin beharko genuke. Honela, $a' = f'$ izango litzateke;eta hauxe lortzen da:

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} = \varphi' = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot \qquad (54)$$

(53) eta (54)ekuazioetatik,hurrengoa zuzenean ateratzen da:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \quad . \qquad (55)$$

19. galderan ikusi dugunez, airean dagoen lente mehe baten albo-handipena, $\beta'$, hauxe da (ikus(45)):

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a} \quad . \qquad (56)$$

(53)-(56) ekuazio-taldeak, lente mehe batetan gerta daitezkeen ia-ia problema guztiak ebazteko bidea ematen digu.

## 28.22. LENTE MEHEEN SAILKAPENA.

Lente meheak bi taldetan sailka daitezke irudi-distantzia fokalari begiratuz (beti bezala, airean daudela kontsideratuko dugu):

I. Konbergenteak edo hurbiltzaileak:

$f' > 0$ da ( eta $f < 0$ , ezinbestez).

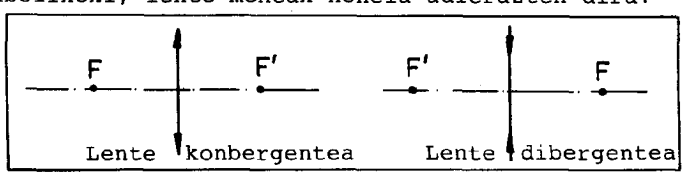
(54) ekuazioa kontutan hartuz, ikus dezagun zeintzu erlazio bete behar dituzten dioptrioen kurbadura-erradioek, hori gerta dadin:

a) $r_1 < 0$, $r_2 > 0$ : Lente bikonkaboa

b) $r_1 = \infty$, $r_2 > 0$ : Lente laun-konkaboa

c) $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_1 > r_2$ : menisko dibergentea (ertz lodiak).

Sinbolikoki, lente meheak honela adierazten dira:



## 28.23. ERAIKETA GRAFIKOAK LENTE MEHEETAN.

Ispilu esferikoetan egin dugunaren antzera, lente mehe batek sorterazten duen objektu baten irudia lortzeko, arau batzu segitu beharko ditugu. Hemen ere, ardatz optikoaren perpendikularra den objektu bat kontsideratuko dugu. Sistema perfektua dela onartuz, aski zaigu objektuaren muturraren irudia kalkulatzea irudi osoa lortzeko.

Gainera, lenteetan distantzia fokalak berdinak dira (baina aurkakoak) lentearen alde bietara dauden inguruneek errefrakzio-indize berdina badute, eta puntu nagusiak, puntu nodalak eta dioptrio bien erpinak kointzidenteak dira, aurreko galderetan ikusi dugunaren arauera.

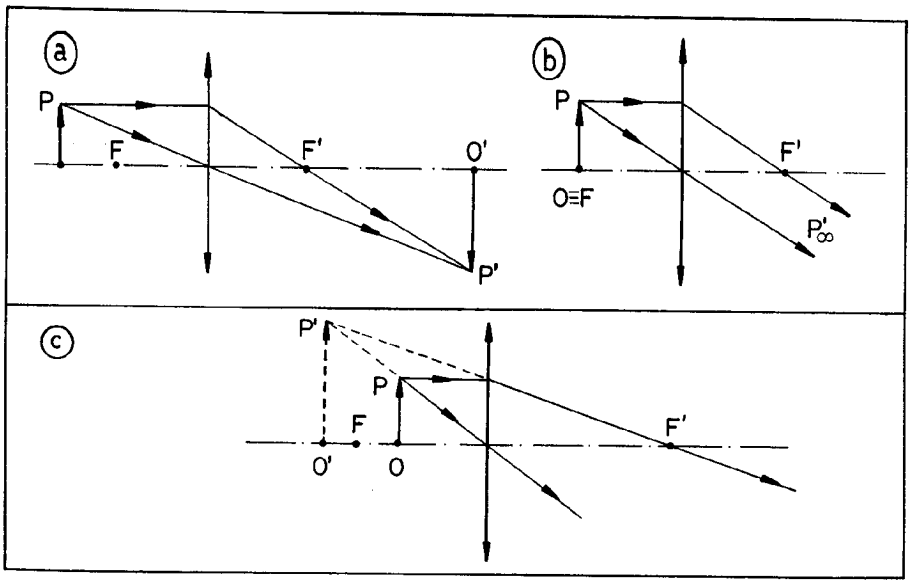
Objektuaren muturraren irudia lortzeko, bi izpi besterik ez ditugu erabiliko:

a) Ardatz optikoaren paraleloa den izpia: lentean errefraktatu eta gero, irudi-fokutik pasatuko da.

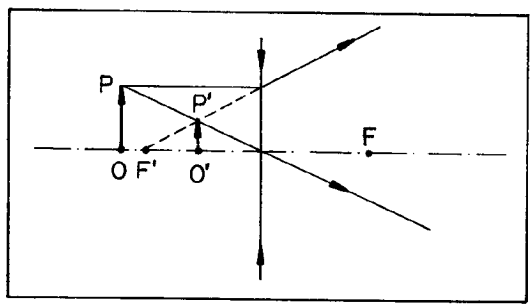
b) Lentearen zentrutik pasatzen den izpia: Zentru honetan, lehen ikusi dugunez, puntu nagusiak eta puntu nodalak biltzen dira. Puntu nodalek duten propietatearen arauera, izpi intzidenteak eta izpi errefraktatuak angelu berdina osotuko dute ardatz optikoarekin. Beraz, ez da desbideratuko .

Ikus ditzagun, ba, gerta daitezkeen kasuak lente konbergente eta dibergenteetan , beti ere objektu errealak kontsideratzera mugatuko garela aldez aurretik jakineraziz.

I. Lente konbergenteak:




II. Lente dibergenteak:




Azter ditzagun irudi bakoitzean objektuaren eta irudiaren arteko erlazioak:

I. a) Objektua, F objektu-fokutik ezker alderantz: Irudi errea-la, inbertitua, handiagoa eta F' irudi fokutik eskuin alderantz.

b) Objektua, F fokuan bertan: Irudia infinituan.

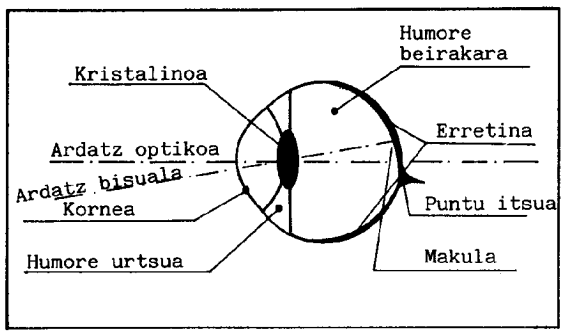
c) Objektua, F objektu-foku eta lentearen zentruaren bitartean: Alegiazko irudia, zuzena, handiagoa, eta F objektu--fokutik ezker alderantz.

II. Hemen, kasu bat besterik ez dugu ikusi zeren eta gerta daitezkeen beste biak antzerakoak bait dira. Lortzen den irudia alegiazkoa da, zuzena eta txikiagoa, F' irudi-fokua eta lentearen zentruaren bitartean kokatuta dagoelarik. (Beste kasu biak irakasleari uzten dizkiogu).

## 28.24. TRESNA OPTIKOAK

Galdera honetan, tresna optikoetatik erabilitakoenak eta sinpleenak ikusiko ditugu: begia, lupa, okularea, mikroskopioa, Galileoren betaurrekoa eta teleskopioa, hain zuzen ere. Tresna guzti hauen helburua ikusmena hobatzea da. Beraz, normala da begiaren azterketarekin hastea.

I. Begia. Optika geometrikoaren ikuspuntutik, begia sistema optiko zentratua eta konbergentea da. Beraren osagai fisiologikoak eta geometrikoak, hurrengo irudian adierazten dira.




Gutxi borabehera, begia 25mm-tako diametroa duen esfera bat da. Barneko ingurune k (humore beirakara eta humore urtsua) ia-ia uraren errefrakzio indizea dute, 1.34, kristalinoarena 1.44-takoa izanik. Gainera, kristalinoak propietate berezi bat du: moldakortasuna. Hots, irudiak leku konkretu batetan formatu behar direnez, kristalinoaren kurbadura-erradioa objektu-distantziara moldatzen da: objektua urrun baldin badago, kristalinoarenkurbadura-erradioa handitu egiten da (ondorioz, ahalmen optikoa txikitu egiten da), eta objektua hurbil badago, kurbadura--erradioa txikitu egiten da, ahalmen optikoa handituz.

Guztira, begiaren ahalmen optikoa 60 dioptriatakoa da,

edo horren ingurukoa. Ahalmen optiko handiena, korneak ematen du ( 45 dioptria), beste hamabost bat kristalinoarenak izanik.

Irudiak erretinan formatzen dira, eta honek argazki-plaka baten jokabidea du. Baina plaka hau ez da uniformea: Irudien formaziorako lekurik onena, makula deitzen da. Puntu honetan ikusmenerako zelula optiko egokienak biltzen dira (konoak deitzen direnak, hain zuzen ere). Horrek ez du esan nahi beste erretina guztian konorik ez dagoenik; egon, ba daude, baina proportzio gutxiagotan. Aldiz, irudia puntu-itsuan formatuko balitz (hau da, nerbio optikoaren irteera-puntuan), ez litzateke ezer ikusiko.

Gizakiak zehazki ikus dezakeen punturik gertuena, puntu hurbila deitzen da, eta adinarekin urrunduz doa. Gutxi gorabehera, estatistikoki, hauxe da puntu hurbilaren eta adinaren arteko erlazioa:

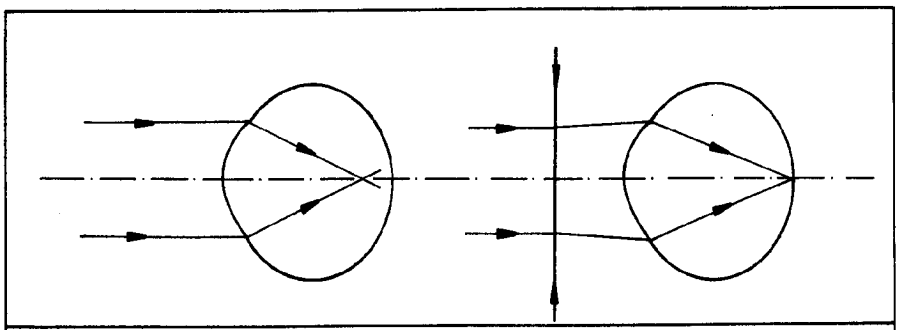
| Adina (urteak) | Puntu hurbila (cm) |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 20 | 10 |
| 30 | 14 |
| 40 | 22 |
| 50 | 40 |
| 60 | 200 |

Horrek esan nahi du kristalinoaren moldapen-ahalmena galdu egiten dela adinarekin.

Gizakiak, bi begi dituenez, ba du ere beste ahalmen bat: ikusmen estereoskopikoa. Hau da: nahiz eta begi bietara objektu berdinaren informazioa iritsi, begiak bananduta daudenez, informazio hau era desberdinean heltzen zaie, eta informazio hauek burmuinera heltzerakoan sakontasun-zentzatzioa sorterazten dute. Hori da, hain zuzen, aipaturiko ikusmen estereoskopikoa.

Ez dago begi perfekturik. Honako honetan, begiek izan ditzaketen akatsak ikusiko ditugu: miopia, hipermetropia eta astigmatismoa, hain zuzen ere.

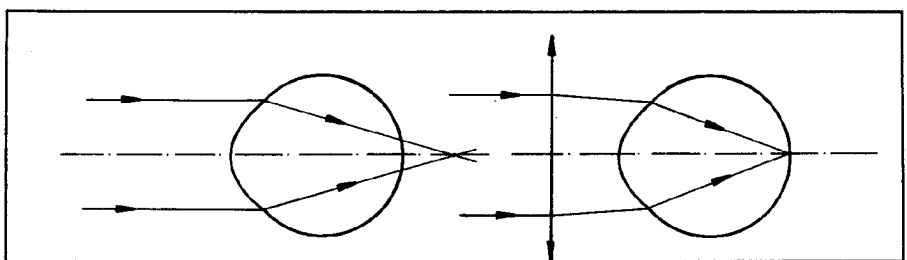
*Miopia: Begi perfektu batek, infinituko puntu baten irudia, erretinan bertan eratuko luke. Begia luzeegia bada, infinitutik datozen izpiak ez dira erretinan bertan bilduko haren aurrean baizik. Begi hori miope dela esaten da, eta dagokion akatsari miopia deritzogu.



Miopia eta beraren zuzenketa

Miopi akatsa zuzentzeko, infinitutik datozen izpiak zabal du egin beharko genituzke. Beraz, begi aurrean lente dibergente egoki bat ipini beharko genuke, irudian ikusten den bezala.

*Hipermetropia: Kasu honetan, begia laburregia da edo kristalinoak ez du behar duen ahalmenik infinitutik datozen izpiak erretinan bertan bilerazteko izpi hauen luzapenak erretinaren atzekaldetik elkartzen dira . Horrelako begi bat, hipermetrope deitzen da, eta dagokion akatsa, hipermetropia.

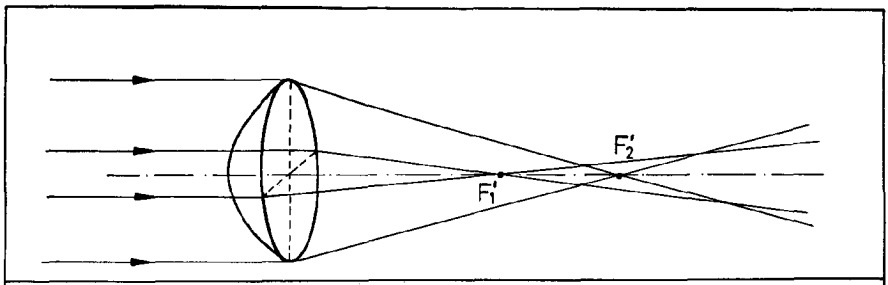


Hipermetropia eta beraren zuzenketa

Erraz ikus daitekeenez, hipermetropia zuzentzeko, infinitutik datozen izpiak, begira heldu baino lehenago, ardatzerantz itxi egin beharko genituzke. Beraz, begi aurrean lente konbergente egoki bat ipini beharko genuke (ikus irudia).

*Astigmatismoa: Kornea eta kristalinoa ez dira zehazki esferikoak. Beraz, beraien sekzio desberdinetan irudi-distantzia

fokal desberdinak edukiko dituzte, eta ez dute irudi argirik aterako. Horrelako begi bat, astigmatikoa deitzen da, eta dagokion akatsa, astigmatismoa.




Astigmatismoa

Akats hau zuzentzeko, lente zilindrikoak erabiltzen dira, izpi guztiak (infinitutik datozenak, noski) puntu berera hel daitezen.

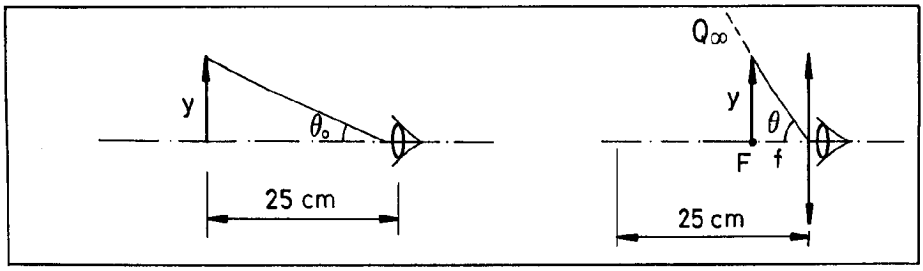
II. Lupa. Objektu baten ageriko tamainuak, begiak erretinan formatzen duen irudiaren tamainuarekin zerikusirik du. Objektua infinitutik puntu hurbilerantz doanean, erretinako irudiaren tamainua handituz doa, edota irudiaren tamainu angeluarra handitu egiten da. Baina puntu hurbilera helduz, ezin dugu objektua gehiagorik hurbildu, irudia argi eta garbi ikustea nahi baldin badugu behintzat.

Objektuaren ageriko tamainua (beraz, haren irudi erretiniarra) handitzeko, lente konbergente bat erabiltzen da: lupa, hain zuzen ere.

Hemendik aurrera, begiaren puntu hurbila begitik 25cm-tara dagoela suposatuko dugu.

Luparen distantzia fokalak puntu hurbilaren distantzia baino txikiagoa izan beharko du, nahi dugun handipena lortzeko.

Objektua lupa horren objektu-fokuan jarriz, irudia infinituan formatuko litzateke, eta irudi hau, kristalinorako objektu bezala hartuz, moldapenik barik, irudia erretinan formatuko litzateke, lehen osotzen zuen baino angelu handiagoa eginik, $\theta$ angelua hain zuzen (ikus irudia).




Luparen handipena edo ahalmena, honela definitzen da:

$$M = \frac{tg\,\theta}{tg\,\theta_o} \simeq \frac{\theta}{\theta_o} \ . \qquad (57)$$

Irudietan ikusten denez:

$$tg\,\theta_o = \frac{y}{25} \text{ eta } tg\,\theta = \frac{y}{|f|} \quad (y \text{ eta } |f| \text{ zentrimetrotan}).$$

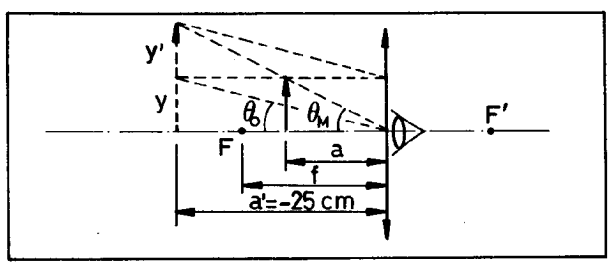
(57) formulan balore hauek ordezjarriz:

$$M = \frac{25}{|f|} \ . \qquad (58)$$

$|f| < 25$ denez, $M > 1$ izango da.

Erretinan formatzen den irudiaren tamainu angeluarra handitu egin daiteke, objektua F fokua eta luparen bitartean jarriz. Dakizuenez, kasu honetan, lente konbergente honek sorturiko alegiazko irudia begirantz hurbilduko litzateke, eta beraz, erretinan emango lukeen irudiaren tamainu angeluarra handitu egingo litzateke, kristalinoaren moldapen-ahalmenaz baliatuz.

Lupak sorterazitako alegiazko irudia begiaren puntu hurbilean balego, ikusmenerako handipen maximoa lortuko genuke. Ikus dezagun kasu honetan zein izango litzatekeen handipen horren balorea. Lente meheen formulatik, zera dugu:



$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{-25}=\frac{1}{f'} \longrightarrow a=-\frac{25f'}{25+f'} .$$

Gauden hurbilketan, zera betetzen da:

$$tg\theta_M=\frac{y}{|a|}\simeq\theta_M ,$$

edota:

$$\theta_M\simeq+\frac{(25+f')y}{25f'} .$$

Beraz, lorturiko M-ren balorea, hurrengoa da:

$$M=\frac{\theta_M}{\theta_o}=\frac{(25+f')y}{25f'}\cdot\frac{25}{y}=\frac{25+f'}{f'} .$$

Azkenez, lupak ematen duen alegiazko irudia begiaren puntu hurbilean aurkituko baldin balitz, luparen ahalmen optikoa hauxe izango litzateke:

$$M=1+\frac{25}{|f|} . \qquad (59)$$

Kasu honetan, irudiari begiratuz, beste hau ere lor genezake:

$$M=\frac{\theta_M}{\theta_o}=\frac{y'/-25}{y/-25}=\frac{y'}{y}=\beta'$$

Hau da, begirako handipen angeluarra eta albo-handipena berdinak dira.

III. Okularea. Okularea sistema konbergente bat besterik ez da, beraren aurrean dagoen sistemak formatzen duen irudia handitzeko erabiltzen delarik. Esandakoaren ondorioz, lupa baten jokabidea izaten du . Erabilitakoenak, bi lente konbergentez osoturik daude. Nagusiki, hauexek erabiltzen dira:

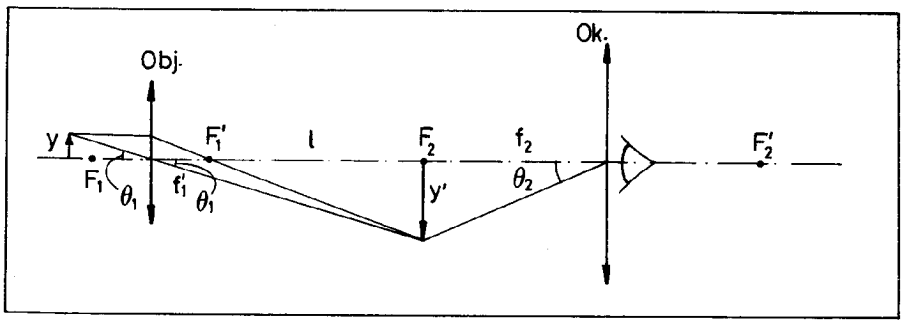
- Ramsden-en okularea: Distantzia fokal berdina duten bi lente laun-konbexoz osoturiko sistema da, beraien arteko distantzia aipaturiko distantzia fokal honen bi herenak izanik (gutxi

gorabehera). Aurreko sistemak sorterazten duen irudia erreala da eta lehenengo lentearen objektu-distantzia fokalaren barnean formatzen da, okularetik irteterakoan infinituan dagoelarik (begiak moldapenik gabe ikus dezan). Lehen bezala, okulareak sorturiko irudia begiaren puntu hurbilean formatuko balitz, anplifikazio handiena lortuko genuke (hemen, begiaren moldapen - propietatea erabili beharko genuke).

-Huygens-en okularea: Kasu honetan, okularea osotzen duten lenteek ez dute distantzia fokal berbera, beraien arteko distantzia, fokal bien baturaren erdia izanik. Okularearen lehenengo lentea, aurreko sistemak emango lukeen irudi errealaren aurretik jartzen da (beraz, aurreko sistemak emango lukeen irudia ez da errealki formatuko). Lehen bezala, okulareak sorteraziko duen irudia infinituan egongo da. (Hemen ere, okulareak formatzen duen alegiazko irudia begiaren puntu hurbileraino eramango bagenu, ageriko tamainu handiena lortuko genuke).

Oharra: Hemendik aurrera, okularea sinbolikoki adierazteko, lente konbergente baten ikurra erabiliko dugu.

IV. Mikroskopioa. Nahiz eta mikroskopioa sistema nahiko konplexua izan, guk bi lentez osoturiko sistema dela suposatuko dugu: aurrean dagoena, objektiboa, eta atzekoa, okularea.




Objektiboaren eta okularearen arteko aklopamendua, irudian ikusten den bezala egiten da, hau da, objektiboaren irudi-fokua, $F'_1$ delakoa, eta okularearen objektu-fokua, $F_2$ delakoa, $l$ tarte espazial batez banaturik aurkitzen dira.

Mikroskopioa, objektu oso txikiak behatzeko erabiltzen den tresnarik ezagunena da, eta objektiboaren distantzia fokala, okularearena baino askoz txikiago izaten da.

Objektua, objektiboaren objektu-distantzia fokalaren kanpo, baina foku honetatik nahi dugun bezain hurbil, jartzen da, dagokion irudia erreala eta tamainurik handienekoa izan dadin. Gainera, objektiboak emandako irudi honen posizioa, okularearen objektu-fokuan formatzekotan behartzen dugu, bertatik irten ondoren infinituan era dadin eta begiak moldapen barik ikus dezan. (Begiaren moldapen-ahalmena kontutan hartuz, okulareak aztertzerakoan esandakoa erants genezake, baina mikroskopioaren handipena edo ahalmena kalkulatzekotan, errazagoa izan dadin, begiaren moldapen gabeko kasua onartuko dugu).

Kalkula dezagun aipaturiko sistemaren handipen angeluar osoa . Irudian ikusten denez:

$$M = \frac{tg\theta_2}{tg\theta_o} \approx \frac{\theta_2}{\theta_o} \quad ,$$

non $\theta_o$, mikroskopio barik eta objektua begiaren puntu hurbilean kontsideratuz, objektuak begian osotuko lukeen angelua, eta $\theta_2$, mikroskopioa erabiliz gero, dagokion infinituko irudiak begian sortuko lukeen irudiaren anplitude angeluarra diren.

Beraz:

$$\theta_o \approx tg\theta_o = \frac{y}{25}$$

$$\theta_2 \approx tg\theta_2 = \frac{y'}{f'_2} \quad .$$

Eta hemendik:

$$M = \frac{tg\theta_2}{tg\theta_o} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{25}{f'_2} = \beta'_{ob} \cdot M_{ok} \quad . \qquad (60)$$

Beraz, zera esan genezake: Mikroskopio baten handipen

angeluarra, objektiboak ematen duen albo-handipenaren eta okulareak ematen duen handipen angeluarraren biderkaketaz lortzen da.

(60) adierazpenean agertzen diren magnitude guztiak, positiboak direla kontsideratuko dugu, nahiz eta moduluaren ikurrik erabili ez izan.

Irudiari begiratuz, $\beta'_{ob}$ beste era honetan adieraz genezake, $\underline{l}$ eta $\underline{f'_1}$ direlakoen funtzioz:

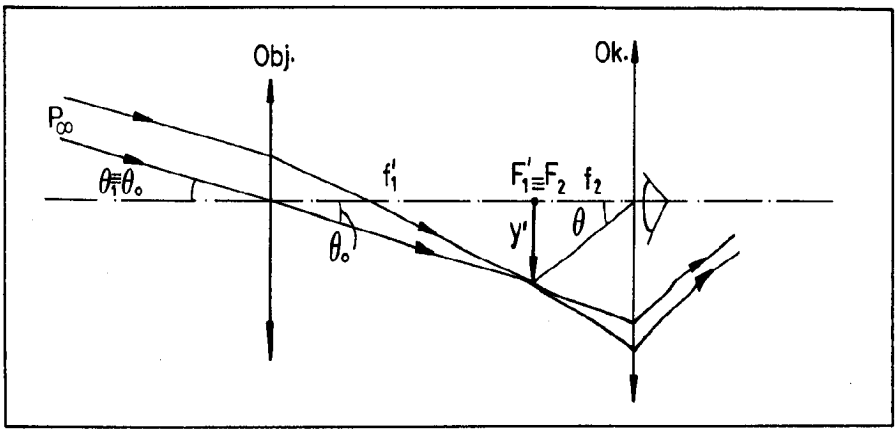
$$\beta'_{ob} = \frac{y'}{y} = \frac{l}{f'_1} ,$$

eta (60) formula honela geratzen zaigu:

$$M = \frac{25 \cdot l}{f'_1 \cdot f'_2} , \qquad (61)$$

non distantzia guztiak zentimetrotan neurtzen diren. Beraz, objektiboaren eta okularearen distantzia fokalak eta akoplamendu-distantzia besterik ez da jakin behar, mikroskopioaren handipen angeluarra ezagutzeko.

V. Galileo-ren betaurreko astronomikoa. Izatez, mikroskopioa eta Galileo-ren betaurreko astronomikoa antzekoak dira. Biak, objektiboz eta okularez osoturik daude, baina helburuak desberdinak dira. Mikroskopioa, oso txikiak diren objektuak behatzeko erabiltzen da, eta betaurreko astronomikoa, normalki, oso urrun eta handiak diren objektuak behatzeko da. Kasu honetan, objektua infinituan aurkitzen denez, objektiboak sortorazten duen irudi erreala, beraren plano fokalean formatuko da. Lehen bezala, plano fokal hau okularearen objektu-plano fokalarekin kointzidentea eginik, irteeran, irudia infinituan egongo litzateke. Beraz, lehen aipaturiko $\underline{l}$ distantzia nulua izango litzateke.




Hemen ere, betaurrekoaren handipen angeluarra betiko moduan definitzen da:

$$M = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_o} \approx \frac{\theta}{\theta_o} \quad .$$

Baina objektua puntu hurbilean jar ezin denez, objektiboarekin osotzen duen angelua eta begiarekin egingo duena berdinak izango dira: $\theta_o = \theta_1$. Irudiari begiratuz:

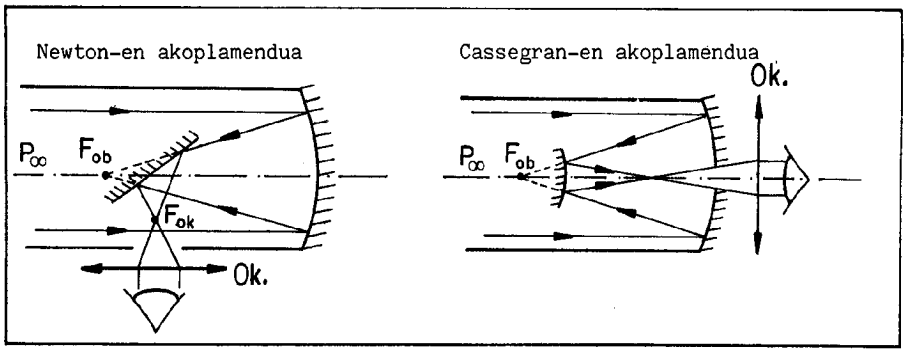
$$\operatorname{tg}\theta_o = -\frac{y'}{f'_1} \qquad \text{eta} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y'}{f_2} \quad .$$

Ondorioz:

$$M = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_o} = -\frac{f'_1}{f_2} = \frac{f'_1}{f'_2} \quad . \qquad (62)$$

(62) ekuaziotik ateratzen denez, betaurrekoa baliagarria izan dadin, $f'_1 >> f'_2$ izan beharko du.

VI. Teleskopioa. Gaur egun, izarrak eta planetak behatzeko, lenteen ordez ispilu esferikoak erabiltzen dira, zeren askoz errazagoak bait dira eraikitzeko. Izatez, betaurreko astronomiko baten jokabidea dute, objektiboaren ordez ispilu esferiko bat jarriz. Ispilu honek formatzen duen irudia, okulare batekin behatzen da, ondoko irudietan ikusten den bezala:




Kasu bakoitzean, beste ispilu batez baliatuz ateratzen dira argi-izpiak teleskopioaren hodiaren barnetik, okularera hel daitezen.

# A ERANSKINA

## ANALISI BEKTORIALA

A.1. Eremu eskalarrak eta bektorialak.

A.2. Lerro-integrala eta zirkulazioa.

A.3. Gainazal-integrala eta fluxua.

Liburu honetan zehar erabiltzen diren eremu eskalar eta beltorialei buruzko definizio eta propietate nagusiak bildu nahi izan ditugu eranskin honetan, horrela egitea kapitulu askotan agertzen diren funtsezko egituren arteko erlazioak nabarian ezartzeko baliagarri gerta daitekeelakoan.

Berez eranskin matematikoa izan arren, hemengo zorroztasun matematikoaren maila lan osoarenaren antzekoa izango da. Horrela, ideiak azpimarkatzen saiatu gara, batzutan frogapenen kalterako izan bada ere. Gainera, lerro eta gainazal-integralak definitu egiten dira, baina ez dugu kalkulu-metodorik ematen, kontzeptua baino ez bait dugu beharko.

## A.1. EREMU ESKALARRAK ETA BEKTORIALAK

Aldagai bektoriala duten funtzioak izendatzeko "eremu" hitza erabili ohi da Fisikan. Guk hemen bi eratako eremuak hartuko ditugu kontutan, balore eskalarrak eta bektorialak hartzen dituztenak hain zuzen. Horretarako, hurrengo bi definizioak egingo ditugu.

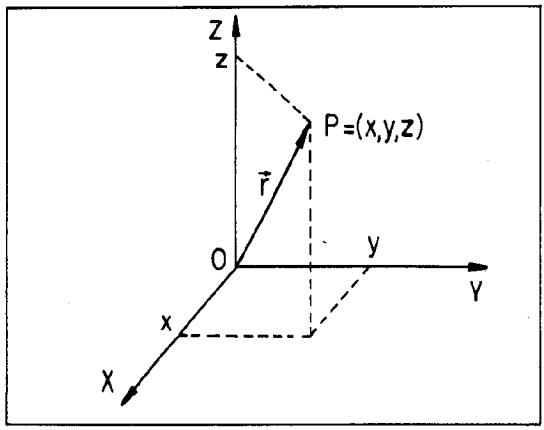
- "Eremu eskalarra", aldagai bektoriala eta balio eskalarra dituen funtzioa da. Adibidez, $V(\vec{r}) = r$ eremu eskalarraren bidez, bektore bakoitzari bere modulua dagokio. Potentzial elektrikoa ere, eremu eskalarra dugu.

- "Eremu bektoriala" aldagai eta balore bektorialak dituen edozein funtzio da. Aipa dezagun kasurik sinpleena, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{r}$ identitate eremua alegia. Eremu elektrikoa ere, eremu bektoriala dugu.

Aurrerantzean, bektoreak eta espazioko puntuak adierazteko triedro kartesiar bat aukeratuko dugu behin betiko. Horrela (erreferentzi-sistemaren jatorrian ipinitako) $\vec{r}$ bektorea, P pun

tua eta (x,y,z) zenbaki-hirukotea elkarrekin identifikatuko ditugu,

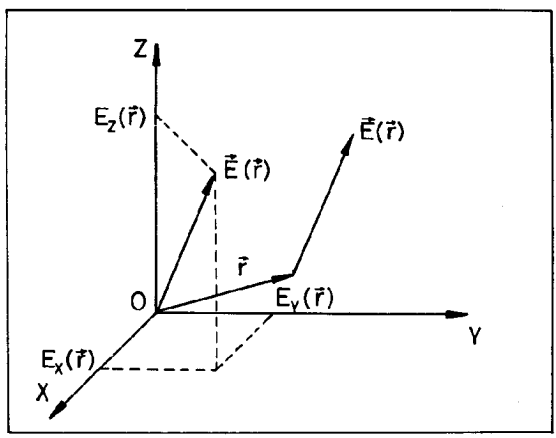
$$\vec{OP} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}\ ,$$




irudian ikusten den moduan. Beraz, $V(P) = V(\vec{r})$ eta $\vec{E}(P) = \vec{E}(\vec{r})$ identitateak direla kausa, eremuak "puntu-funtzioak" direla esan ohi da, espazioko puntu bakoitzari balore (eskalar edota bektorial) bat egokierazten bait diote. Gainera, $V(x,y,z) = V(\vec{r})$ eta $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(\vec{r})$ idazkerek dioskutenez, eremuak hiru eskalareren funtziotzat ere kontsidera ditzakegu.

Zer esanik ez, $\vec{r}$ puntuari dagokion $\vec{E}(\vec{r})$ bektorea bere osagaietan deskonposaturik kontsidera dezakegu, ondoko irudian ikusten den moduan:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\,\hat{i} + E_y(\vec{r})\,\hat{j} + E_z(\vec{r})\,\hat{k}\ ,$$



edo gauza bera dena,

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\,\hat{i} + E_y(x,y,z)\,\hat{j} + E_z(x,y,z)\,\hat{k}.$$

Ageri denez, gure erreferentzi-sistemako puntu bakoitzean $E_x(\vec{r})$ balore eskalar bat dugu. Hau da, $\vec{r}$ aldagaiaren balore bakoitzari $\vec{E}(\vec{r})$ bektorearen x osagaia egokierazten dion arauak $E_x$ eremu eskalar bat definitzen digu. Beste bi osagaiei buruz antzeko gauza esan daitekeenez, $\vec{E}$ eremu bektoriala, hiru eremu eskalarrek osoturiko $(E_x,E_y,E_z)$ multzoaren baliokidea da.

Eremu eskalar batek K balorea konstante jakin bat duneko puntuen multzoari, S "sestra-gainazala" esaten zaio. Beraz, ondoko ekuazioak adierazitako baldintzak ematen digu S sestra-gainazala:

$$V(\vec{r}) = K\ .$$

Argi dago puntu bakoitza sestra-gainazal batetan, eta bakar batetan, datzala eta, ondorioz, sestra-gainazalek ez dutela elkar ebakitzen.

Eremu eskalarra $V = \vec{r}.\hat{k} = z$ baldin bada, dagokion S sestra--gainazala $z = K$ ekuazioak emandakoa izango da, hau da, OZ ardatza K kotan ebakitzen duen plano horizontala, $V = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ eremuaren kasuan, ordea S delakoa K erradioa eta 0 zentrua dituen gainazal esferikoa izango da, K positiboa bada jakina.

Eremu eskalar bat "esferikoa" dela esaten da baldin eta beraren sestra-gainazal bakoitza gainazal esferiko batek edota gainazal esferiko batzuk osoturik badago. Simetria esferikoa dela eta, erraz ikusten da eremu eskalar bat esferikoa dela baldin eta soilik baldin honako hau betetzeko moduko f(r) funtzio bat existitzen bada,

$$V(\vec{r}) = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\ .$$

Liburu honetan V(r) idazkera laburbildua erabiliko dugu eremua esferikoa dela adierazteko. Azkeneko adibidea eta, esaterako,

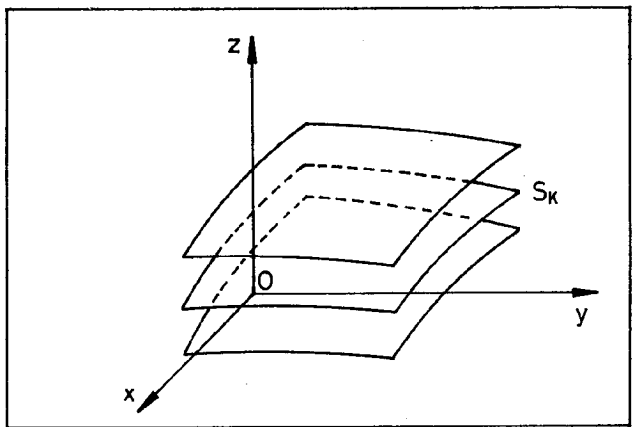
V(r) = sin r delakoa, eremu esferikoak ditugu.

Esandakoaren ondorioz, eremu eskalar bakoitzari ondoko bi baldintzak betetzen dituen gainazal-multzo bakar bat dagokio:

- Espazioko punto bakoitzetik multzoko gainazal bat, eta soilik bat, pasatzen da.

- Multzoa parametrizaturik dago, hau da gainazal bakoitzari balore eskalar bat atxekirik dagokio.

Eta, alderantziz, aurreko bi baldintzak betetzen dituen gainazal-multzo bakoitzak eremu eskalar bakar bat definitzen du. Espazioko punto batetan eremu honek duen balorea ezagutzeko, aski da punto horretatik pasatzen den multzoko gainazalari dagokion parametroaren balorea ezagutzea.



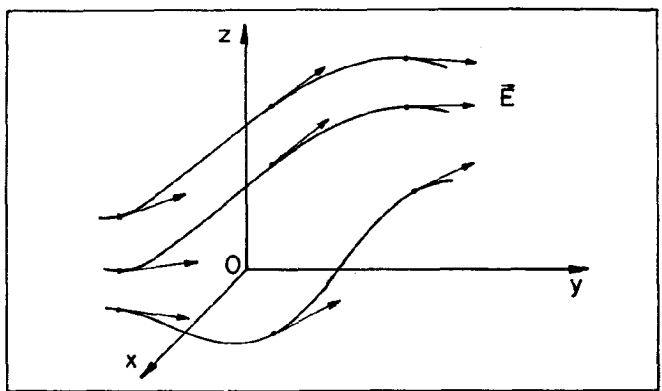

SESTRA-GAINAZALAK

Antzeko gauza egin daiteke kurben bidez. Hurrengo bi baldintzak betetzen dituzten lerroen multzoari "kurba-kongruentzia" deritzogu:

- Puntu bakoitza kongruentziaren kurba bakar batetan datza.

- Kurba bakoitza t parametro baten bidez parametrizaturik dago.

Horrelako kongruentzia bati eremu bektorial bakar bat eratxeki diezaiokegu: puntu bakoitzean, bertatik pasatzen den kurbak bertan duen bektore tangentea izango da aipaturiko eremuaren balorea (ik. hurrengo irudia). Eta, alderantziz, edozein eremu bektoriali azkeneko baldintza hau betetzen duen kurba-kongruentzia bakar bat dagokio. Azkeneko emaitza hau ekuazio diferentzialen existentzia eta bakartasunaren teorema ospetsuaren ondorio zuzena da eta ez dugu hemen frogatuko. Diogun bakarrik kurba-kongruentzien eta eremu bektorialen arteko korrespondentzia biunibokoa dela. Eremu bektorial bati dagokion kongruentziaren kurba bakoitzari "korronte-lerroa" edota "eremu-lerroa" esaten zaio. Lehenengo izenaren jatorri historikoa Fluidoen Mekanikan aurkitzen da, noski, baina kontzeptua beste kontextu askotan ere agertzen da, hala nola Dinamika orokorrean (eta, kasu berezi honetan, "indar-lerroez" mintzatzen da).

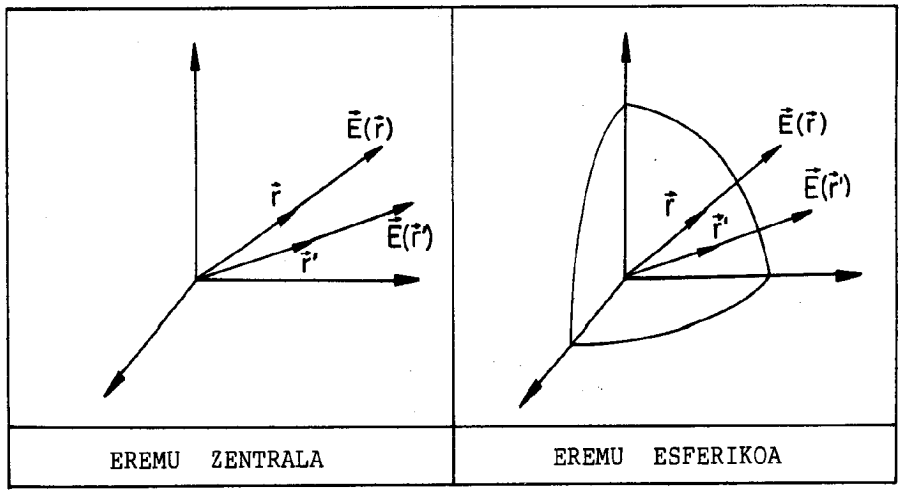



KORRONTE-LERROAK

Eremu bektorial baten korronte-lerro guztiak puntu berberetik pasatzen diren lerrozuzenak badira, hau da, eremu bektorialaren egitura honelakoa bada:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\ \hat{r},$$

"eremu zentrala" dela esango dugu. Azken adierazpen honetan triedroaren jatorritzat, aipaturiko puntua, eremuaren "poloa" deitzen duguna, aukeratu dugu.




| EREMU ZENTRALA | EREMU ESFERIKOA |
|---|---|

Azkeneko baldintza hau betetzeaz gain, $E(\vec{r})$ modulua eremu eskalar esferikoa baldin bada, eremu bektorialari "esferikoa" deritzo eta ondoko eran ipin daiteke:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\ \hat{r}\ .$$

Gogora dezagun 6.7 atalean eremu eskalar baten gradienteari buruz esandakoa. Eragiketa honen bidez, V eremu eskalar bakoitzari ondoko eremu bektoriala datxekio:

$$\vec{E} = -\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V = -\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\ \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\ \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\ \hat{k}\right)\ .$$

Hemen ez dugu han esandakoa errepikatuko, eta adibide pare bat ipintzera mugatuko gara.

V = r eremu eskalarraren kasuan, esaterako, zera dugu:

$$-\ \overrightarrow{\text{grad}}\ r = -\ \hat{r}\ ,$$

jakina dugunez. Emaitza honen eta Kalkulu Diferentzialaren ondorio zuzentzat hauxe lor dezakegu:

$$-\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V(r) = -\ \frac{dV}{dr}(r)\ \hat{r}\ ,$$

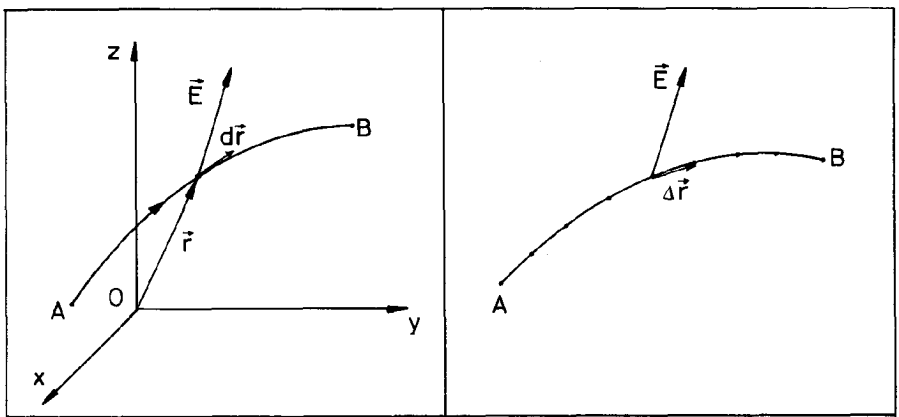
edozein eremu esferikoren kasuan. Eta, bereziki, eremu coulombiarra badugu,

$$-\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\ \hat{r}\ .$$

## A.2. LERRO-INTEGRALA ETA ZIRKULAZIOA

Kontsidera dezagun espazioko bi puntu, A eta B, lotzen dituen C lerro orientatua. Espazioan $\vec{E}$ eremu bektoriala definiturik dagoela ere suposatuko dugu. Kurbak eta eremuak osoturiko bikoteari zenbaki bat egokieraziko diogu hurrengo metodoaren bidez:

- Hasteko, kurba irudian ikusten den bezala zatituko dugu.




C LERRO KURBATUA | C LERROAREN ZATIKETA

- Bigarrenez, kurbaren orientazioak definitzen dituen zati bakoitzaren hasierak eta amaierak $\Delta\vec{r}$ bektore bat ematen digute. Aipaturiko zatiko hasieran eremu bektorialak duen $\vec{E}$ balorea eta $\Delta\vec{r}$ delakoa biderkatuko ditugu, $\vec{E}.\Delta\vec{r}$ zenbakia lortzeko. Zati guztietan horrela lorturiko zenbakiak elkarrekin batuko ditugu.

- Azkenik, zati bakoitzaren luzera zerora jo eraziko dugu eta limitean lorturiko zenbakia, honela idatzikoa:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \ ,$$

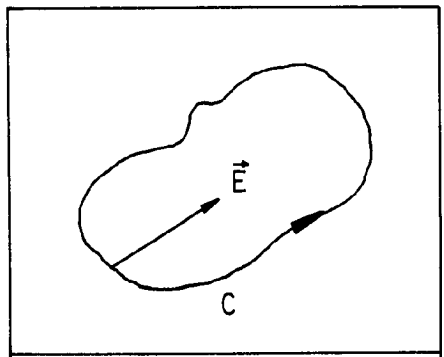
"lerro-integral" izenez ezagutuko dugu.

Mota honetako integralak Fisikaren arlo askotan agertzen dira, batzutan izen bereziak ematen zaizkielarik. Esaterako,

6. gaian oso adibide garrantzitsua ikusi dugu, "lana" deritzon indarraren lerro-integrala hain zuzen.

Kurba (integrazio-bidea) itxia bada, lerro-integrala $\vec{E}$ eremuaren "zirkulazioa" dela esaten da eta honela idatziko dugu:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \ .$$




LERRO ITXIA

Kurbaren orientazioa aldatzen badugu, $\Delta \vec{r}$ bektorearen norantza eta beraz lerro-integralaren zeinua ere, aldatuko da. Honela adierazten dugu propietate hau:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \ .$$

Bi integralok C lerroan barrena, baina alderantzizko norantzan, kalkulaturik daudela suposatzen dugu hemen. Hurrengo hiru propietateok ere erraz froga daitezke:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^D \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_D^B \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

$$\int_C (\vec{E}+\vec{E}') \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} \ ,$$

$$\int_C (a\,\vec{E}) \cdot d\vec{r} = a \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad \text{(a eskalarra da)},$$

non D delakoa C lerroko edozein puntu baita.

Aurreko atalean ikusi dugunez, eremu eskalar bakoitzetik eremu bektorial bat lor dezakegu, gradientearen bidez. Eta alderantziz, egia ote da edozein eremu bektorial eremu eskalar baten gradientea denik? Erantzuna "batzutan bakarrik" da eta hurrengo definizioa egitera bultzatzen gaitu.

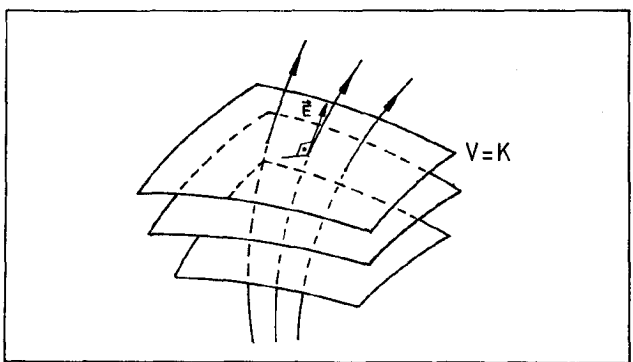
$\vec{E}$ eremu bektoriala "kontserbakorra" dela esango dugu baldin eta hurrengo baldintza betetzen duen V eremu eskalar bat existitzen bada:

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, V ,$$

eta, kasu honetan, V delakoa $\vec{E}$ eremuaren "potentziala" deitzen da. Zeinuaren hautapena energiaren hitzarmenak gordetzeko asmo hutsaz egiten da, noski, eta erraz ikus daitekeenez, V potentziala ez da bakarra, konstante bat gehitzen bazaio eremu bektoriala ez bait da aldatzen:

$$- \overrightarrow{\text{grad}}\, (V + K) = - \overrightarrow{\text{grad}}\, V - \overrightarrow{\text{grad}}\, K = - \overrightarrow{\text{grad}}\, V .$$

Eta alderantziz, eremu kontserbakorraren potentziala ezagutuz gero, beste guztiak aurrekoari konstanteak gehituz lorttzen dira.



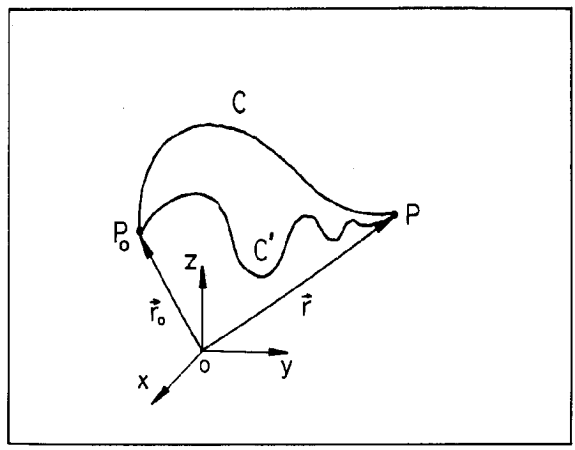

GAINAZAL EKIPOTENTZIALAK ETA EREMU-LERROAK

6.7. atalean ikusi genuen gradientearen esanahi geometri-

koa gogoratuz, espazioko puntu bakoitzetik pasatzen diren V potentzialaren sestra-gainazala ("gainazal ekipotentziala") eta $\vec{E}$ eremu kontserbakorraren eremu-lerroa elkartzutak dira.

Aipaturiko 6.7. puntuan esandakoaren arabera, $\vec{E}$ eremua kontserbakorra izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa, beraren lerro-integralak integrazio-bidearen dependentziarik ez izatea da, eta kasu honetan ondoko erlazioa betetzen da:

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_o) - \int_{P_o}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r} \ ,$$




non integrazio-bidea $P_o$ eta P puntuak lotzen dituen edozein kurba den. Azkeneko adierazpen honen bidez, aldez aurretik eremua kontserbakorra dela baldin badakigu, beraren potentziala kalkula dezakegu. Honetarako, $\vec{r}_o$ puntu bakar batetan $\vec{E}$ eremuak duen balorea ezagutu edota aukeratu behar dugu. Balio bakar bat aukeratzeko askatasuna, potentziala konstante batukor batetan izan ezik definiturik egotetik datorkigu. Eta alderantziz, potentzialaz balia gaitezke eremu kontserbakor baten lerro-integrala kalkulatzeko, azkeneko emaitza honela ere idatz bait dezakegu:

$$\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(\vec{OA}) - V(\vec{OB}) \ .$$

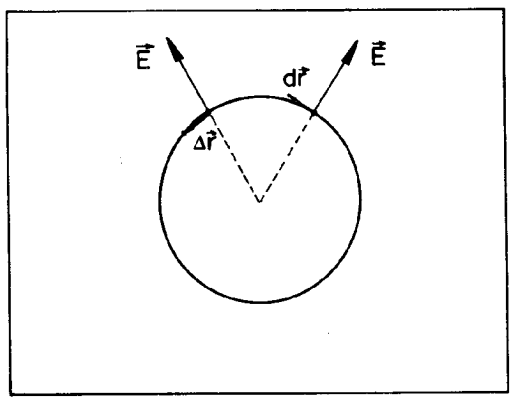
Bi puntu ezagun lotzen dituzten C eta C' kurbak hartzen

baditugu eta haietariko baten orientazioa aldatzen badugu, lerro itxi bat lortzen dugu. Eta alderantziz, kurba itxi batetan bi puntu aukeratuz gero, aipaturiko puntuak lotzen dituzten bi lerro lortzen dira. Hau dela eta, $\vec{E}$ eremu bektoriala kontserbakorra da baldin eta soilik baldin edozein C kurba itxitan barrena beraren zirkulazioa nulua bada,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \ .$$

Adibide moduan, kontsidera dezagun $\vec{E} = \vec{r}/r^3$, eremu bektoriala. Ba dakigu $V = 1/r$ potentzialetikoa dela (ik. aurreko atalean esandakoa), baina hemen jatorrian zentraturiko zirkunferentziara hedatutako lerro-integrala nulua dela ikusiko dugu era zuzenean. Horretarako aski da limitean $\Delta\vec{r}$ bektorea zirkunferentziaren tangentea eta, beraz, erradioaren eta $\vec{E}$ eremu zentralaren elkartzuta dela ikustea:

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \xrightarrow[|\Delta\vec{r}| \to 0]{} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$




Kasurik orokorrenean ere emaitza berbera lortzen dela, potentzial elektrikoa aztertzerakoan ikusi dugu.

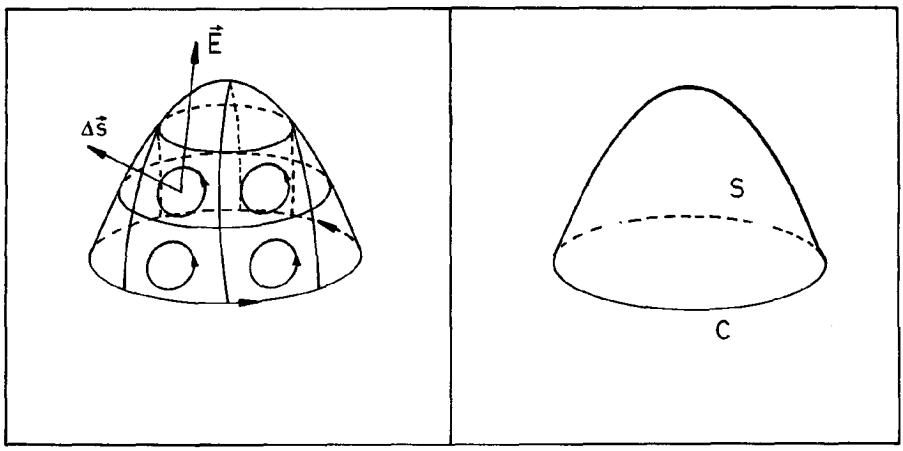
Areago, edozein eremu esferiko, $\vec{E} = E(r)\ \hat{r}$, kontserbakorra da, aski baita ondoko potentziala aukeratzea:

$$V(r) = - \int E(r)\, dr + Kte. \quad ,$$

Ageri denez, emaitza hau aurreko atalean ikusirikoaren ondorio zuzena dugu.

## A.3. GAINAZAL INTEGRALA ETA FLUXUA

Atal honetan aldebiko gainazal bat kontsideratuko dugu eta irudian ikusten den moduko partiketak hartuko ditugu kontutan. Paralelogramo lerromakur guztiak elkarrekiko (eta bai C muga-lerroarekiko ere) orientatu dira. Horrelako bi orientazio daude eta hemendik aurrera horietariko bat aukeraturik dagoela suposatuko dugu.




Lerro-integralaren kasuan erabilitakoaren antzeko metodo bati jarraituz, S gainazalari eta $\vec{E}$ eremu bektorialari, "gainazal-integrala" edota "fluxua" deitzen den

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

zenbakia egokieraz dakieke, hurrengo hiru pausoen bidez:

- Paralelogramo lerromakur bakoitzari, 2.3. puntuan definituriko $\Delta\vec{S}$ bektorea atxekitzen zaio.

- Aipaturiko paralelogramoaren zentruan $\vec{E}$ eremuak duen balorea eta $\Delta\vec{S}$ bektorea elkarrekin biderkatzen dira eta zati guztietan horrela lortutako $\vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$ zenbakiak batu egiten dira.

- Paralelogramo bakoitzaren azalera zerora jo erazten da.

Gainazal-integralaren aplikazio garrantzitsuenetariko bat, eta agian intuitiboena gertatzen dena, fluidoen arloan aurkitzen dugu. Izan ere, fluidoaren abiaduraren fluxuak, denbora-unitatean gainazalean zehar pasatzen den fluidoaren bolumena adierazten digu. Beste adibide interesgarri bat, korrontearen intentsitateak emandakoa dugu.

Lerro-integralen kasuan bezalaxe, gainazalaren orientazioa aldatzen bada, integralaren zeinua ere aldatu egiten da. Bestaldetik, S delakoa $S_1$ eta $S_2$ gainazalen bildura bada,

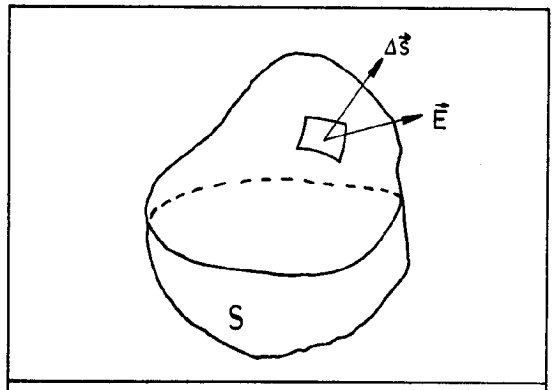
$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad .$$

Gainera, eragiketa hau lineala denez, hurrengo propietateak betetzen ditu:

$$\iint_S (\vec{E} + \vec{E}') \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{E}' \cdot d\vec{S} \quad ,$$

$$\iint_S (a\,\vec{E}) \cdot d\vec{S} = a \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \text{(a eskalarra da).}$$

Integrazio-gainazala itxia baldin bada, beraren muga hutsa da eta orientazioa kanporanzkoa (irudian ikusten den bezalaxe) edota barruranzkoa (kontrakoa) izan daiteke eta, kasuaren arabera, gainazal-integrala "kanporanzko fluxua" edota "barruranzko fluxua" dela esaten dugu eta $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ idazkera erabiltzen dugu.



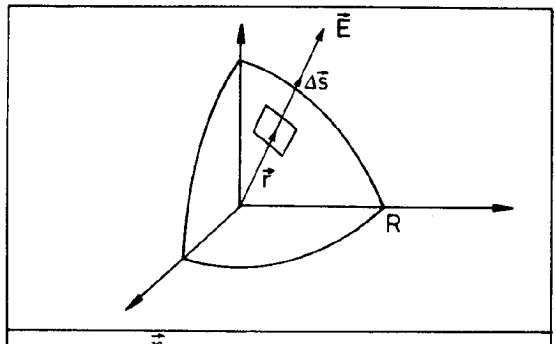

GAINAZAL ITXIA

Berriro ere $\vec{E} = \hat{r}/r^2$ eremua hartuko dugu kontutan. Aipaturiko eremua, R erradioa eta O zentrua dituen gainazal esferikoan zehar integra dezakegu. Puntu bakoitzean $\vec{E}$, $\Delta\vec{S}$ eta $\hat{r}$ elkarrekiko paraleloak dira eta, ondorioz,

$$\vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = |\vec{E}| \cdot |\Delta\vec{S}| = \frac{1}{R^2} \; |\Delta\vec{S}| \; .$$

Bestaldetik, gainazal osoaren azalera $S = 4\pi R^2$ da eta, ikusi dugunaren arabera,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{S}{R^2} = 4\pi \; .$$



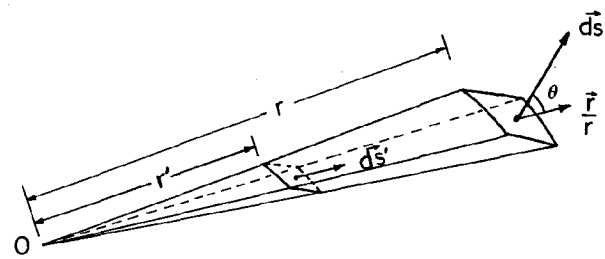

$\frac{\vec{r}}{r^3}$ EREMUAREN FLUXUA

Emaitza honek ez du erradioaren menpekotasunik! Izan ere, eremu bektorial esferiko honen kanporanzko fluxuak balore bi besterik ez ditu hartzen: $4\pi$ delakoa eremuaren poloa ($\vec{r} = 0$)

gainazal barruan baldin badago eta 0 alderantzizko kasuan.

Emaitza honen esangura argiago ikusteko, kontsidera dezagun ondoko ekarpen infinitesimala:

$$d\omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} \cdot$$




$$d\omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r'^2}$$

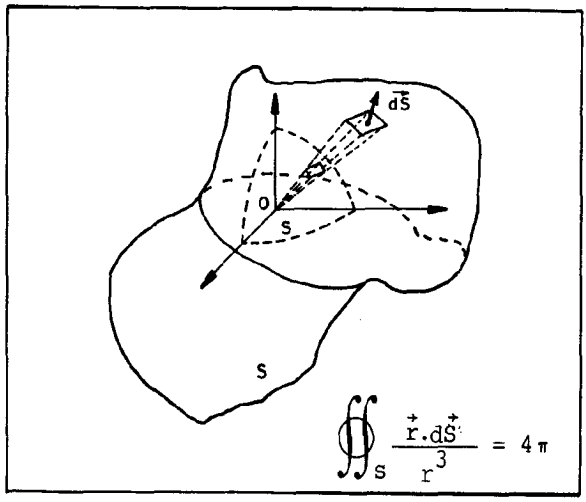
ANGELU SOLIDO INFINITESIMALA

O jatorritik ikusita dS gainazalaren zatiak $d\omega$ estereorradianeko angelu solidoa definitzen du. Hortaz, aipaturiko ekarpen infinitesimalen batura den

$$\oiint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}$$

fluxua jatorritik ikusita, S gainazalak determinatzen duen angelu solido osoa da.

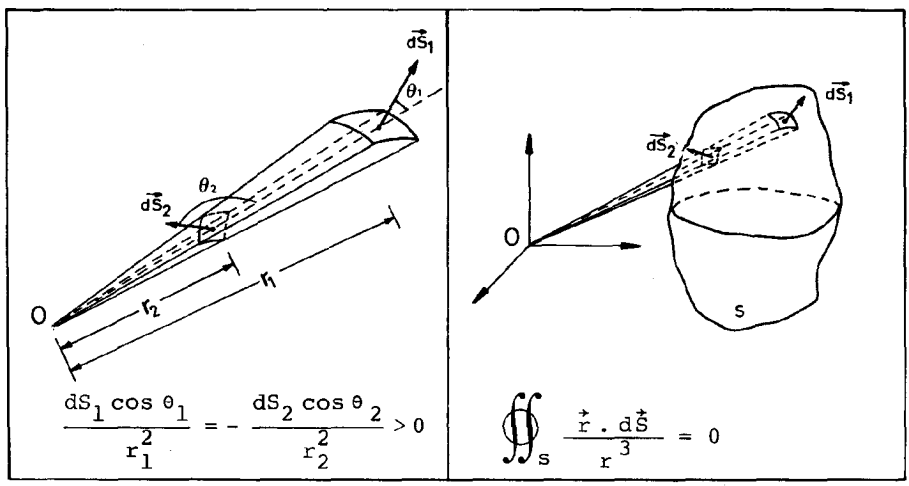
Jatorria barruan badago, aipaturiko angelua jatorrian zentraturiko gainazal esferiko bati dagokionaren berdina izango da, hau da $4\pi$ balorekoa.




Jatorria gainazaletik kanpo baldin badago, ostera, angelu solido elementu bakoitzak bi ebakidura definituko ditu, $d\vec{S}_1$ eta $d\vec{S}_2$, eta dagozkien ekarpenek balore absoluto berbera dute:

$$|d\omega| = \frac{dS_1 \ |\cos \theta_1|}{r_1^2} = \frac{dS_2 \ |\cos \theta_2|}{r_2^2}$$

baina zeinu desberdinak, $\cos \theta_1$ eta $\cos \theta_2$ baloreen zeinuak ere elkarrekin kontrakoak baitira. Azkenean, beraz, ez da ezer geratuko, elkarrekin anulatzen dira eta.



Egia esan, kasurik orokorrenean elementu bakoitzari dagokion ebakiduren kopurua ez da halabeharrez bikoa izango, baina bai parea (eta lehenago azterturiko kasuan, hots, 0 puntua gainazalaren barruan zegoenean, ez-parea) eta arrazonamendua bikote bakoitzaren kasuan errepika daiteke.

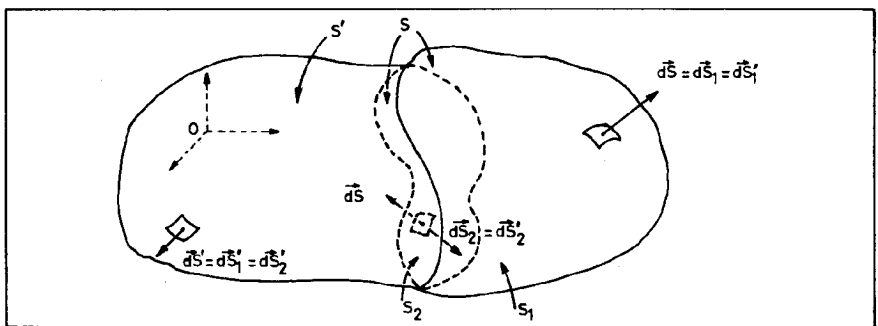
Bigarren emaitza lehenbizikoaz baliatuz ere lor daiteke. Horretarako, aski da S gainazala bi zatitan banatuz gero, irudian ikusten den bezalako S' gainazala aukeratzea eta gainazal-integralen propietateak erabiltzea:

$$\oiint_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \iint_{S_1} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}_1}{r^3} - \iint_{S_2} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}_2}{r^3} =$$

$$= \iint_{S_1} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}_1}{r^3} + \iint_{S'} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}'}{r^3} -$$

$$- \iint_{S_2} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}_2}{r^3} - \iint_{S'} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}'}{r^3} =$$

$$= \oiint_{S_1'} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}_1'}{r^3} - \oiint_{S_2'} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}_2'}{r^3} = 4\pi - 4\pi = 0 .$$




$\oiint \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = 0$ FROGATZEKO BIGARREN METODOA

Hemen $S_k'$ gainazala S' eta $S_k$ direlakoen bildura da, eta bere barruan 0 jatorria dauka.

# BIBLIOGRAFIA

. M. ALONSO, E.J. FINN, *Física*, Vol I. *Mecánica*, Vol II, *Campos y Ondas*, Vol III, *Fundamentos Cuánticos y Estadísticos*, Ed. Fondo Educativo Interamericano (1970).

. L.M. BANDRES, *Elektromagnetika*, UEU, Iruñea (1979).

. L.M. BANDRES, I. GOIRIZELAIA, M. ENSUNZA, *Teknologia Elektrikoa. Eranskinak*, UEU, Iruñea (1982).

. L.M. BANDRES, A. SAGARNA, *Teknologia Elektrikoa*, UEU, Iruñea (1981).

. J. BRICARD, H. BENOIT, *Physique*, Editions Medicales Flammarion, Paris (1966).

. A.D. BUCKINGHAM, *Los principios de la Termodinámica y sus aplicaciones*, Ed. Alhambra S.A, Madrid (1966).

. H.B. CALLEN, *Thermodynamics*, J. Wiley and Sons, New York (1960).

. J. CASAS, *Optica*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza (1978).

. J. CATALÁ, *Fisica General*, Ed. Saber, Valencia (1972).

. F.S. CRAWFORD, *Berkeley Physics Course*, Vol 3, *Ondas y Oscilaciones*, Ed. Reverté, Barcelona (1969).

. J.A. EDMINISTER, *Circuitos Eléctricos*, McGraw-Hill, Mexico (1969).

. J. EGIGUREN; J.R. ETXEBARRIA, I. LASA, P. UGALDE, *Fisika Generala II*, UEU, Iruñea (1979).

. R.M. EISBERG, L.S. LERNER, *Fisica, Fundamentos y aplicaciones*, Mc.Graw-Hill (1984).

. ELHUYAR TALDEA, *Elektrika-Elektronika Hiztegia*, Elhuyar, Donostia (1984).

. ELHUYAR KIMIKA-TALDEA, *Termodinamika klasikoaren oinarriak*, UEU, Iruñea (1982).

. M. ENSUNZA, *Potentzi faktorearen garrantzia*, Elhuyar 9, 4, (1983).

. J.R. ETXEBARRIA, P. UGALDE, *Fisika Orokorra (I) Problemak eta Ariketak*, UEU, Iruñea (1980).

. J.R. ETXEBARRIA, O. EZENARRO, P. UGALDE, *Fisika Orokorra (II) Problemak eta Ariketak"*, UEU, Iruñea (1981).

. R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON, M. SANDS, *Fisica*. Vol 1. *Mecanica, radiadión y calor*, Fondo Educativo Interamericano SA, Bogotá (1971).

. M. FRANCON, *Physique*, Masson et Cie, Paris (1969).

. F.A. JENKINS, *Fundamentos de Optica*, Ed. Aguilar.

. A.F. KIP, *Fundamentals of Electricity and Magnetism*, second edition, McGraw-Hill, New York (1969).

. C. KITTEL, W.D. KNIGHT, M.A. RUDERMAN: *Berkeley Physics Course*, Vol I, *Mecánica*, Ed. Reverté, Barcelona, (1968).

. J. MAÑAS, R. MARTINEZ AGUIRRE, *Física General*, (1967).

. W.K.H. PANOFSKY and M. PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism*. 2nd. ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1972).

. R.D. PRESENT, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, New York, (1958).

. PURCELL, *Berkeley Physics Course*, Vol 2, *Electricidad y Magnetismo*.

. J.R. REITZ, F.J. MILFORD, *Fundamentos de la teoría electromagnética*, UTEHA, México (1969).

. F.W. SEARS, *Fundamentos de Física*, Vol II, *Electricidad y Magnetismo*, Vol III, *Optica*, Ed. Aguilar, Madrid (1963).

. F.W. SEARS, M.W. ZEMANSKY, *Física*, Aguilar, Madrid (1969).

. V.L. STREETER, *Mecánica de los Fluidos*, Ed. del Castillo, Madrid (1967).

. TILLEY, THUMM, *Física*, Fondo Educativo Interamericano (1976).

. S. TIMOSHENKO, *Resistencia de Materiales*, Espasa-Calpe, Madrid (1967).

. P.A. TIPLER, *Física*, Ed. Reverté, Barcelona (1978).

. UZEI TALDEA, *Fisika Hiztegia*, Elkar, Donostia (1979).

. UZEI TALDEA, *Matematika Hiztegia*, Elkar, Donostia (1982).

. UZEI TALDEA, *Teknologia Mekanikoa Hiztegia*, Elkar, Donostia (1985).

. H.E. WHITE, *Física Moderna*, UTEHA, México (1965).

. B.M. YAVORSKI, A.A. DETLAF, *Manual de Física*, Ed. MIR, Moscu (1977).

. H.D. YOUNG, *Fundamentos de Mecánica y Calor*, Ed. del Castillo SA, Madrid (1966).

. M.W. ZEMANSKY, *Calor y Termodinámica*, Ed. Aguilar, Madrid (1970).

# KONTZEPTUEN AURKIBIDE ALFABETIKOA

*Abbe 488*
*Adiabatikoak (bilakideak) 417*
*Ahalmen optikoa 499*
*Akzio-Erreakzio Printzipioa 7*
*Aldiuneko fasea 116*
*Ampère 236,298,302,303,304,322, 324,281*
*Angelu kritikoa 180,480*
*Angelu solidoa 547*
*Anisotropoa (ingurunea) 474*
*Anplitudea 116*
*Anplitude modulatua 130*
*Antzekotasuna 90*
*Ardatz optikoa 481*
*Argi ikuskorra 383*
*Argiaren abiadura 473*
*Argiaren eredu gorpuzkularra 470*
*Argiaren eredu ondulatorioa 470*
*Argi-izpia 472*
*Argi-sorta 473*
*Arkhimedes 74,105,211*
*Astigmatismoa 522*
*Autoindukzio-koefizientea 317,341*
*Avogrado 424,433*

*Baliokidetasun-Printzipioa 9,11,12*
*Balore efikazak (korronte alternoa) 335*
*Begia (gizasemearena) 520*
*Bektore biratzailea 117*
*Bernouilli 82*
*Beroa 397*
*Beroaren baliokide mekanikoa 398*
*Bero-ahalmena 399*
*Bibrazio-energia 125*
*Bide optikoa 474*
*Bigarren motako higikari iraunkorra 442*
*Biot 314,275,277*
*Birial 407*
*Biskositate dinamikoa 63,66*
*Biskositate zinematikoa 66*
*Biskositate-koefizientea 61, 64,65,66*
*Boltzmann 434*
*Bosoia 213*
*Broglie (de) 471*
*Browndarra (higidura) 426*
*Bultzada aerodinamikoa 91*
*Bultzadaren zentrua 74*

*Carnot 451*
*Cassegran 530*
*Cavendish 8*
*Celsius 393*
*Clausius 445,447,458*
*Compton 379*
*Copernico 4*
*Coulomb 119,204 216,276*

*Davisson 471*
*Deformazio unitarioak 42*
*Desplazamendu-korrontea 322*
*Dielektrikoa 195*
*Difrakzioa 169,184*
*Dioptria 500*
*Dioptrioa 480*
*Dipolo elektrikoa 226,377*

Dipolo magnetikoa 275
Dirac 471
Dispertsio kromatikoa 474
Doppler 187
Du Fay 196

Ebakidura-tentsioa 59,63,64,76,40
Egoera-ekuazioa(gas idealena) 408
Egoera-aldagaia 387,388
Einstein 309,471
Eite-koefizientea 89
Elastikotasun-modulua 46,48
Elastikotasun-muga 44
Elementu kardinalak 503
Elongazioa 116
Energi dentsitatea 166,296,320
Energi erresonantzia 140
Energi fluxua 166
Energi uhina 165
Energia potentzial elastikoa 125
Energia potentzial elektrikoa 217
Energia potentzial grabitatorioa 20,32
Energiaren ekipartizioaren Printzipioa 434
Energiaren ekuazioa fluidoetan 82 85
Entropia 461,463
Erdieroalea241
Eremu elektrikoa 204
Eremu elektrikoaren energia 295
Eremu esferikoa 537,535
Eremu grabitatorioa 12
Eremu-lerroa 208,537
Eremu magnetikoa 262,275
Eremu magnetikoaren energia 319
Erlajazio-denbora 318
Eroalea 195,241
Eroankortasun elektrikoa 240
Erreaktantzia 142,341,346
Errefrakzioa 169,175,476
Errefrakzio-indizea 178,179, 180,473
Erresistentzia 142,243
Erresistentzia elektrikoen konbinazioa 251
Erresistibitate elektrikoa 240
Erresonantzia 140,357
Erresonantzi maiztasuna 357
Esfortzu-tentsorea 40,51
Espektro elektromagnetikoa 382
Estigmatikoak (sistema optikoak) 481
Eterea 154,155

Faraday 309,313,314,315,324, 361
Fase-abiadura 149
Fasorea 117
Fermat 475,483
Flotazioa 72
Fluentzi-nekea 45
Fluido tixotropikoak 62
Fluidoaren fluxuen sailkapenak 76,77
Fluidoen definizioa 59
Fluidoen sailkapena 62
Fluxu magnetikoa 296
Fluxua 544
Fokuak 494,503
Forma-koefizientea 89
Fotoia 380
Foucault 360,470
Fourier 115
Fourier 150

Fraunhofer 185
Fresnel 471

Gainazal bentralak 171
Gainazal ekipotentziala 22,208, 220,542
Gainazal nodalak 171
Gainazaleko energia potentziala 100
Gainazal-indarrak 96
Gainazal-integrala 544
Gainazal-tentsioa 96,99
Gainezarmen-printzipioa 13,16,22
Galileo 528
Gasen konstantea 408
Gauss 15,213,289,291,294,298,322, 323,486,495
Germer 471
Gilbert 195
Grabitate "efektiboa" 71
Grabitazioaren konstante unibertsala 8,11

Handipenak 491
Hargailu elektrikoa 247,338
Hasierako fasea 116
Hedatze-abiadura 149
Heisenberg 471
Helmholtz 490
Henry 313,314,315,317,324
Hertz 324,367,471
Heterogenoa (ingurunea) 474
Hidrostatika 67
Higidura harmonikoaren ekuazioa 120
Hipermetropia 522
Histeresi elastikoa 46
Homogenoa (ingurunea) 474
Hooke 46,50,55,159
Hutsaren permeabilitate magnetikoa 282
Hutsaren permitibitatea 201
Huygens 172,176,177,185,526

Iheste-abiadura 33
Indar elektroeragilea 245,310 312,313,314,317,333
Indar kontraelektroeragilea 248
Indar magnetoeragilea 325
Indar-lerroa 208,537
Indize adiabatikoa 418
Indukzio-lerroa 297
Inpedantzia 141,343,344,345, 346
Intentsitatea (elektrizitate-arena) 235
Intentsitatea (uhinarena) 166
Interferentziak 169
Irrati-uhinak 381
Isladapen osoa 181,479
Isladapena 169,175,476
Isotermoak (bilakabideak) 418
Isotropoa (ingurunea) 474
Itxurazko potentzia 354
Itzulezina (prozesua) 441, 449
Itzulezintasuna 461
Itzulgarria (prozesua) 449
Izpi kosmikoak 384
Izpi ultramoreak 383
Izpia 174
Izpiak (γ deiturikoak) 384
Izpiak (X deiturikoak) 384

Jones 423
Joule 244,319,360,398,410
Jurin-en legea 110

Kaloria 397
Kalorikoa 397
Kapazitate elektrikoa 293
Kapilartasuna 110
Karga elektrikoa 196,198
Karga-galera (fluidoetan) 67,86
Kargaren kontserbazio-printzipioa 198,320
Kargaren kuantizazioa 210
Katoptrioa 481
Kaudal bolumetrikoa 82
Kaudal masikoa 81
Kelvin 393,442,447,457
Kepler 4,6,23,26
Kirchoff 174,254
Kohesio-indarrak 96
Kondentsadorea 293
Konprimigarritasun-koefizientea 47
Konprimigarritasun-modulua 47, 48
Konstante errekuperatzailea 51
Kontaktu-angelua 106,110
Kontinuitatearen ekuazioa 81,238
Koordenatu termodinamikoa 387,388
Korapiloa (zirkuitu elektrikoetan) 254
Korronte elektrikoa 233
Korrontearen dentsitatea 235,301
Korronte-hodia 78
Korronte-lerroa 77,537
Kuantua 381

Lagrange 490
Lan termodinamikoa 394
Laplace 104,314
Laplacearra 157
Larmor 377
Lennard 423
Lenteak 511,516
Lenz 314
Leptoia 213
Lerro-integrala 539
Lorentz-en indarra 328

Mach 191
Magnus 90,91
Maila (zirkuitu elektrikoetan) 254
Maiztasun angeluarra 116,152
Maiztasuna 116
Malgukia 50,121
Malus 174,178
Marconi 367
Marruskadura (solido eta likidoaren artekoa) 89
Masa grabitazionala 10
Masa inertziala 9,10
Masa laburbildua 23
Masen espektrometroa 267
Maxwell 309,322,324,367,368
Maxwell-en ekuazioak 327
Mayer 415
Meniskoa 110
Metazentrua 75
Mikrouhinak 382
Millikan 211
Miopia 522
Momentu dipolar elektrikoa 226
Momentu dipolar magnetikoa 274

Muga adiabatikoa 389
Muga-angelua 480
Muga diatermanoa 389
Muga-abiadura 211
Muga-tentsioa 62

Navier-Stokes 78
Nekea 39,40
Neke-tentsorea 40,51
Newton 3,5,7,10,61,76,82,90,119, 160,163,294,309,328,497,530
Nodoak 182,184
Norabide nagusiak 54

Ohm 240,243,244,249,255,317
Oinarrizko maiztasuna 184
Okulareak 525
Oreka termikoa 389
Oreka termodinamikoa 388
Osziladore indargetua 133
Oszilazio bortxatuak 138
Oszilazio harmonikoak 115
Oszilazioen konposaketa 127

Paralelo-konekxioa 251,251
Pascal 72
Pendulu fisikoa 123
Pendulu sinplea 122
Periodoa 116
Periodoa 152
Permeatibitatea 201
Planck 380,442,447,471
Plano fokalak 504
Plano nagusiak 504
Plastikoak 62,63
Poiseuille 66
Poisson 48
Polarizazioa 153
Potentzi faktorea 354
Potentzia eraginkorra 354
Potentzia erreaktiboa 354
Potentzial elektrikoa 216, 218,225
Potentzial grabitatorioa 21
Poynting 374,375,378
Ptolomeo 34
Presioa 67
Pultsazioa 116
Puntu izpikideak 174
Puntu korrespondenteak 174
Puntu nagusiak 504
Puntu nodalak 505

Quark 213

Ramsden 525
Rankine 445
Reynolds-en zenbakia 78,80
Röntgen 383

Sabelak 182
Sare elektrikoa 251
Savart 314,275,277
Schrödinger 471
Serie-konekxioa 251
Sestra-gainazala 535
Sistema termodinamikoa 388
Snell 178,180,181,479,487 490
Soinaren horma 192
Stokes 89,211
Supereroalea 241

Talka-uhina 191
Teleskopioa 529

*Tenperaturaren eskala termodinamikoa 457*
*Tentsimetroa 99*
*Termodinamikaren bigarren printzipioa 441,442,445,449,450,459*
*Termodinamikaren lehen printzipioa 400,441*
*Termodinamikaren zero printzipioa 390*
*Termometroa 390*
*Tortsio-modulua 47*
*Transformadorea 359*
*Tyndall 177*

*Uhin geldikorrak 182*
*Uhin infragorriak 383*
*Uhinaren momentu lineala 166*
*Uhin-energia 166*
*Uhin-frontea 155,173,175*
*Uhin-gainazala 173,175*
*Uhin harmonikoa 150*
*Uhin-luzera 151*
*Uhin-motak 153*
*Uhin-zenbakia 151*

*Van der Waals 96*
*Volta 225*

*X izpiak 383*

*Young 47,48,158,471*

*Zenbaki kritikoa 80*
*Ziklotroia 268*
*Zirkulazioa 540*
*Zurruntasun-konstantea 51*
*Zurruntasun-modulua 47,48*