

TXILLARDEGI

ELEBIDUN GIZARTEEN AZTERKETA MATEMATIKOA



IRUÑEA 1984

EUSKO JAURLARITZAREN LAGUNTZAZ

Jabegoa: U.E.U.ko Hizkuntzalaritza Saila.

Lege-gordailua: SS - 662/84.

ISBN: 84-398-2771-7.

Inprimategia: JESAGA. Donostia.

TXILLARDEGI

ELEBIDUN GIZARTEEN
AZTERKETA MATEMATIKOA

Sarrera bat

U. E. U.

1984

EZAGUERA ETA ERABILPENA

E. H. E. ko borrokakide
guztiei

Donostian,

1984 ko Azaroa

1. MULTZO FINITOAK1.1.- LAUKOTEEN AZTERKETA

1.1.1.- Has gaitezen lau elemendutako multzo txikiaren azterketatik:

$$M = \{ h_1, h_2, h_3, h_4 \}$$

(h = hiztuna).

Azter ditzagun, aurrenik, bi lagunez sor daitezkeen taldeak:

$$M = \{ h_1 h_2, h_1 h_3, h_1 h_4, h_2 h_3, h_2 h_4, h_3 h_4 \}$$

Alegia, 6 bikote desberdin.

Esan beharrik ez dago: $h_1 h_2 = h_2 h_1$; $h_3 h_2 = h_2 h_3$; eta a-bar. Hizkuntzen erabilpenari dagokionez $\{ \text{Kepa, Antton} \}$ bikotea eta $\{ \text{Antton, Kepa} \}$ bikotea, gauza bera dira.

Hitz batez: Konbinazioak ditugu,

$$C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \text{ talde.}$$

1.1.1.1.- Nola mintza daitezke hiztun horiek?. Zein hizkuntza hautatuko dute?. A hizkuntza besterik ez dakiten A-elebakarrak (a) A-z mintzatuko dira nahi-ta-ez; eta, bestela, mutu gelditu ko dira. Era berean B hizkuntza besterik ez dakiten B-elebakarrak (b), B-z mintzatuko dira; edo, bestela, mutu egongo dira. Eta, azkenekorik, AB-elebidunak, A-z edo B-z mintzatuko dira; eta behin ere ez dira mutu edo gor geldituko. Tentsioak, bestela, esanda elebakarrek sortzen eta jasaten dituzte; ez elebidunek.

Diglosi arazoak ere elebidunek jasaten dituzte (giro hone

tan A erabili, giro hartan B; eta abar). Elebakarrek, aldiz, -
beti erabiltzen dute beren hizkuntza; edo-ta, bestela, gor edo
 mutu gertatzen (honi dagokion tentsioa sortuz edo jasanez). Di
 glosia, hitz batez, elebidunei dagokie bakarrik.

1.112.- Eman dezagun orain egoera hau:

$$N = \{a_1, a_2, a_3, b_1\}$$

Alegia: hiru A-elebakar $\{a_1, a_2, a_3\}$; eta B-elebakar -
 bat: $\{b_1\}$.

Zer gertatuko da bikoteetan?

$a_1 a_2$ = nahi-ta-ez, A-z mintzatuko dira

$a_1 a_3$ = nahi-ta-ez, A-z.

$a_1 b_1$ = $\emptyset$ (ezin hitzik esan: mutu)

$a_2 a_3$ = A.

$a_2 b_1$ = $\emptyset$ (ezin)

$a_3 b_1$ = $\emptyset$ (ezin).

Erabilpena, beraz, hauxe da.

$$p_{A2} = \frac{3}{6} = 0,50 \quad (\% 50\text{-etan } \underline{A} \text{ erabiliko})$$

$$p_{B2} = \frac{0}{6} = 0,00 \quad (\% 100; \text{ inoiz ez, } \underline{B})$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{3}{6} = 0,50 \quad (\% 50\text{-etan, gor-mutu})$$

1.1121.- Ohar garrantzitsu bat: ezaguera eta erabilpena desber-
dinak dira:

$$e_A = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$e_B = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$e_{AB} = \frac{0}{4} = 0,00 \quad (\text{elebidunik ez}).$$

Eta, beraz:

	ezag.	erab.	
A	0,75	0,50	A
B	0,25	0,00	B
AB	0,00	0,50	∅

Estatistikek erakusten dituzten zifrak ezaguerazkoak izanik, erabilpena desberdina da. Zenbatetakoa?. Horixe da ikerlan honetan barrena kalkulatu duguna. Gauza bat garbi, dena dela; ezaguera eta erabilpena desberdinak dira. Bai adibide honetan, eta bai orokorki ere.

1.1122.- Laukote honetan, ikus daitekeenez, tentsio handia dago: kasoen erdian ezinezkoa da komunikazioa:

$$p_{\emptyset 2} = 0,50$$

Eta B hizkuntzak ez du ezertarako balio, ezin baita inoiz erabili. Egoera, beraz, aldakorra da; eta B-ren desagerketa -rantz doa.

1.1123.- Nork jasaten du tentsio hori?

A-alebakarre¹ kasu hauetan gertatzen zaie mintzatu ezina:

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 a_3 \rightarrow A$$

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset$$

Alegia, hirutatik behin gor-mutu gertatzen:

$$q_{a2} = \frac{1}{3} = 0,33 \dots$$

B-alebakarraren egoera, aldiz, askoz gogorragoa da; askoz maizago dago "diskriminaturik":

$$b_1 a_1 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 a_2 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 a_3 \rightarrow \emptyset$$

$$q_{b2} = \frac{3}{3} = 1,00 \quad (\text{beti mutu}).$$

Tentsioak ez daude orokaturik:

$$\frac{q_{b2}}{q_{a2}} = \frac{1,00}{0,33} = 3$$

B elebakarrek hiru aldiz maizago jasaten dute mintzatu e-gina, A elebakarrek baino.

Beraz:

$$d_2 (\rightarrow A) = \frac{q_{b2}}{q_{a2}} = 3.$$

Dinamika nabarmena A-ren alde.

1.12.- Eman dezagun orain beste egoera hau:

$$M = \{ a_1, a_2, a_3, x_1 \}$$

Beraz: hiru A-elebakar eta elebidun bat: x_1 .

Zer gertatuko da?

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 a_3 \rightarrow A$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A \quad (\text{noski !})$$

$$a_2 a_3 \rightarrow A$$

$$a_2 x_1 \rightarrow A$$

$$a_3 x_1 \rightarrow A$$

Hemen A erabiliko da beti; eta B inoiz ez.

Lehenengo taula bera eginez gero:

	ezag.	erab.	
A	0,75	1,00	A
B	0,00	0,00	B
AB	0,25	0,00	$\emptyset$

Beraz:

- a) elebiduna, elebakar bihurtzen da erabilpenaren mailan.
- b) tentsio objektiboak desagertu egin dira.
- c) B hizkuntzak ez du ezertarako balio.

1.121.- Tentsioen azterketa interesgarria da.

A-elebakarrek ez dute inoiz tentsiorik jasaten:

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 a_3 \rightarrow A$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

Beraz:

$$q_{a2} = \frac{0}{3} = 0,00 .$$

Eta elebidunek, bata zein bestea erabiltzea berdin baldin bazale, ez dute tentsiorik jasaten:

$$x_1 a_1 \rightarrow A$$

$$x_1 a_2 \rightarrow A$$

$$x_1 a_3 \rightarrow A$$

Eta, beraz:

$$q_{x2} = \frac{0}{3} = 0,00$$

Tentsiorik ez dago.

Baina, elebidunek beti erabiltzen dute A hizkuntza, eta - sekula ez B hizkuntza.

$$p_{a2} = 1,00 \quad ; \quad q_{a2} = 0,00$$

$$p_{x2} = 1,00 \quad ; \quad q_{x2} = 0,00$$

Eta, beraz:

$$p_{x2,A} = 1,00 \quad \text{eta} \quad p_{x2,B} = 0,00$$

Tentsiorik ez dago; baina saria hau da: elebidunak elebarrak dira, praktikan; eta B ezin erabil daiteke.

1.13.- Eman dezagun orain beste egoera hau:

$$M = \{ a_1, a_2, b_1, x_1 \}$$

Alegia: bi A-elebakar, B-elebakar bat, eta elebidun bat.

1.131.- Ezaguerak hauek dira:

$$e_A = \frac{2}{4} = 0,50$$

$$e_B = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$e_{AB} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Azter ditzagun erabilpenak:

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset \quad (\text{ezin})$$

$$a_2 x_1 \rightarrow A$$

$$a_2 b_1 \rightarrow \emptyset \quad (\text{ezin})$$

$$x_1 b_1 \rightarrow B$$

Eta beraz:

$$p_{A2} = \frac{3}{6} = 0,500$$

$$p_{B2} = \frac{1}{6} = 0,167$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{2}{6} = 0,333$$

Eta beti taula antolatuz:

	ezag.	erab.	
A	0,500	0,500	A
B	0,250	0,167	B
AB	0,250	0,333	$\emptyset$

Ezagueraren eta erabilpenaren tasak desberdinak dira berriro ere.

1.132.- Azter ditzagun tentsioak.

A-elebakarrak:

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

Hirutatik behin gertatzen zaie mintzatu ezina:

$$q_{a2} = \frac{1}{3} = 0,333 .$$

B-elebakarrak:

$$b_1 a_1 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 a_2 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 x_1 \rightarrow B$$

$$q_{b2} = \frac{2}{3} = 0,667$$

Soma genezakeenez, tentsio handiagoa jasaten dute B-elebakarrak, A-elebakarrek baino:

$$d_2(\rightarrow A) = \frac{0,667}{0,333} = 2 .$$

AB-elebidunak:

$$x_1 a_1 \rightarrow A$$

$$x_1 a_2 \rightarrow A$$

$$x_1 b_1 \rightarrow B$$

Tentsiorik ez, beraz, elebidunekin:

$$q_{x2} = \frac{0}{3} = 0,000 .$$

Baina elebidunen erabilpena desorekatua da:

$$p_{x2,A} = \frac{2}{3} = 0,667$$

$$p_{x2,B} = \frac{1}{3} = 0,333 .$$

Elebidunei A hizkuntza, B baino maizago erabiltzea berdin bazaie, problemarik ez; baina bi aldiz maizago mintzatzen dira A-z, B-z baino.

1.14.- Azter dezagun orain beste egoera hau:

$$M = \left\{ a_1 , b_1 , x_1 , x_2 \right\}$$

(A-elebakar bat; B-elebakar bat; bi elebidun).

Beraz:

$$e_A = 0,25 \quad ; \quad e_B = 0,25 \quad ; \quad e_{AB} = 0,50 .$$

1.141.- Erabilpenak:

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$b_1 x_1 \rightarrow B$$

$$b_1 x_2 \rightarrow B$$

$$b_1 x_2 \rightarrow X \quad (\text{ez dakigu nola mintzatuko diren}).$$

Ohar garrantzitsu bat: p_A , p_B , p_X , erabilpen seguruak neurtzen dituzte; p_X , berriz, elebidunen gogoaren arauera zehaztuko da; elebidunek bata zein bestea erabil baititzakete.

Hortaz:

$$p_{A2} = \frac{2}{6} = 0,333$$

$$p_{B2} = \frac{2}{6} = 0,333$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{1}{6} = 0,167$$

$$p_{X2} = \frac{1}{6} = 0,167$$

Diglosiak, borondateak, militantismoak, p_{X2} horren ba - rruan dute beren eragina. Elebidunek A hitz egiteko joera handia baldin badute, 0,167 hori A-ren alde agertuko da; eta alde rantziz. Hortaz:

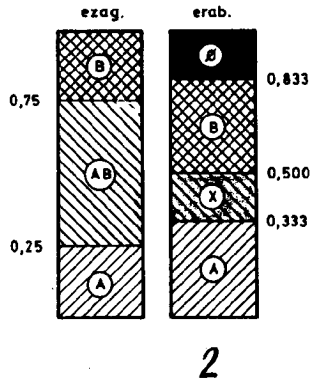
$$0,333 \leq p_{A2} \leq 0,500$$

$$0,500 \geq p_{B2} \geq 0,333$$

1.142.-

	ezag.	erab.	
A	0,25	0,333	A
B	0,25	0,333	B
AB	0,50	0,167	X
		0,167	$\emptyset$

Eta, beraz:



Militantismoaren bidez X zerrenda erabil daiteke batera - zein bestera; baina gainerakoa aldatu ezina da.

1.143.- Azter ditzagun tentsioak:

A-elebakarrak:

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$q_{a2} = \frac{1}{3} = 0,333$$

B-elebakarrak:

$$b_1 a_1 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 x_1 \rightarrow B$$

$$b_1 x_2 \rightarrow B$$

$$q_{b2} = \frac{1}{3} = 0,333$$

Tentsioak orekaturik agertzen dira:

$$\frac{q_{b2}}{q_{a2}} = \frac{0,333}{0,333} = 1$$

AB-elebidunak:

$$x_1 a_1 \rightarrow A$$

$$x_1 b_1 \rightarrow B$$

$$x_1 x_2 \rightarrow X$$

Ezin mintzaturik, sekula ez:

$$q_{x2} = \frac{0}{3} = 0,00$$

Eta tentsiorik ez, beraz. Bestetik:

$$p_{x2,A} = \frac{1}{3} = 0,333$$

$$p_{x2,B} = \frac{1}{3} = 0,333$$

Hirutatik behin, dena dela, aukera libro:

$$p_{x2,x} = \frac{1}{3} = 0,333$$

Multzo horretan, hitz batez, tentsioak badaude ($p_{\emptyset 2} \neq 0$) baina orekaturik agertzen zaizkigu.

1.15.- Eman dezagun orain beste egoera hau:

$$M = \left\{ a_1, x_1, x_2, x_3 \right\}$$

$$e_A = 0,25 \quad ; \quad e_B = 0 \quad ; \quad e_X = 0,75$$

Erabilpenak:

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_1 x_3 \rightarrow A$$

$$x_1 x_2 \rightarrow X$$

$$x_1 x_3 \rightarrow X$$

$$x_2 x_3 \rightarrow X$$

Eta, hortaz:

$$p_{A2} = \frac{3}{6} = 0,500$$

$$p_{B2} = \frac{0}{6} = 0,000$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{0}{6} = 0,000$$

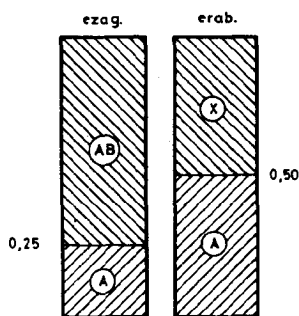
$$p_{X2} = \frac{3}{6} = 0,500$$

Erabilpenaren mugak:

$$0,500 \leq p_A \leq 1,000$$

$$0,500 \geq p_B \geq 0,000$$

Honelako egoera batetan elebidunen gogoak (edo axolakabekeriak) garrantzi handia izan dezake.



2

Tentsiorik ez dago, jakina; elebidunek ez baitute jasaten ez sortzen. Baina B hizkuntza ez da inoiz beharrezkoa. Desoreka dago, beraz, A-ren alde.

1.16.- Zer esan hirukoteetako erabilpenaz?

1.161.- Zenbat hirukote dago, hasteko?

$$M = \{ h_1, h_2, h_3, h_4 \}$$

Lau hirukote ditugu:

$h_1 \quad h_2 \quad h_3$

$h_1 \quad h_2 \quad h_4$

$h_1 \quad h_3 \quad h_4$

$h_2 \quad h_3 \quad h_4$

Alegia: elemenduen hurrenkera berdin izanik:

$$C_3^4 = \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 .$$

1.162.- Zein hizkuntza erabili beharko da hirukoteetan?. Azter ditzagun orain arteko kasuak:

1.1621.-

$$M = \left\{ a_1, a_2, a_3, b_1 \right\} \quad (\text{ik. 1.112})$$

$$a_1 a_2 a_3 \rightarrow A$$

$$a_1 a_2 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_3 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 a_3 b_1 \rightarrow \emptyset$$

Hitz batez:

$$p_{A3} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$p_{B3} = 0$$

$$p_{\emptyset 3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$p_{X3} = \frac{0}{4} = 0,00$$

Nahiak ezin ezer egin maila honetan:

$$p_{X2} = 0$$

Nahiak, diglosiak, eta abar, elebidunetan baitute beren -

eragina; eta ez elebakarretan.

B, bestalde, ez da inoiz beharrezkoa:

$$p_{B3} = 0$$

Eta tentsio handia dago:

$$p_{\emptyset 3} = 0,75$$

1.16211.- Tentsioak ez daude orekaturik:

A-elebakarrak

$$a_1 a_2 a_3 \rightarrow A$$

$$a_1 a_2 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_3 b_1 \rightarrow \emptyset$$

Beraz:

$$p_{a3} = \frac{1}{3} = 0,333 \quad ; \quad q_{a3} = \frac{2}{3} = 0,667$$

B-elebakarrak:

$$b_1 a_1 a_2 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 a_1 a_3 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 a_2 a_3 \rightarrow \emptyset$$

$$p_{b3} = \frac{0}{3} = 0 \quad ; \quad q_{b3} = \frac{3}{3} = 1,000$$

Tentsioak ez daude orekaturik:

$$d_3 (\rightarrow A) = \frac{1,000}{0,667} = 1,5$$

Interesgarria da zifra hauek eta bikoteetan aurkitu ditugunak alderatzea.

1.1622.-

$$M = \{ a_1, a_2, a_3, x_1 \} \quad (\text{ik. 1.13})$$

Erabilnerak:

$$a_1 a_2 a_3 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_2 x_1 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_3 x_1 \longrightarrow A$$

$$a_2 a_3 x_1 \longrightarrow A$$

Beraz:

$$p_{A3} = 1,00$$

$$p_{B3} = 0$$

$$p_{\emptyset 3} = 0$$

$$p_{X3} = 0$$

Tentsioak desagertu, eta A erabat nagusitu. B erabili ezi na da:

	ezag.	erab.	
A	0,75	1,00	A
B	0	0	B
AB	0,25	0	X
		0	$\emptyset$

1.1623.-

$$M = \left\{ a_1, a_2, b_1, x_1 \right\} \quad (\text{ik. 1.13})$$

$$a_1 a_2 b_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 x_1 \longrightarrow A$$

$$a_1 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_2 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$p_{A3} = 0,25 \quad ; \quad p_{\emptyset 3} = 0,75$$

Tentsio handia da, baina:

$$p_{a3} = \frac{1}{3} = 0,333 \quad ; \quad q_{a3} = \frac{2}{3} = 0,667$$

eta

$$p_{b3} = \frac{0}{3} = 0,000 \quad ; \quad q_{b3} = \frac{3}{3} = 1,000$$

B-zko hiztunak jasandakoa da handiena.

$$d(\rightarrow A) = \frac{1,00}{0,67} = 1,5$$

eta B galtzera doa.

1.1624.-

$$M = \{ a_1, b_1, x_1, x_2 \} \quad (\text{ik. 1.14})$$

$$a_1 b_1 x_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 b_1 x_2 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 x_2 \rightarrow A$$

$$b_1 x_1 x_2 \rightarrow B$$

Beraz:

	ezag.	erab.	
A	0,25	0,25	A
B	0,25	0,25	B
AB	0,50	0	X
		0,50	$\emptyset$

1.1625.-

$$M = \{ a_1, x_1, x_2, x_3 \} \quad (\text{ik. 1.15})$$

$$a_1 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 x_1 x_3 \longrightarrow A$$

$$a_1 x_2 x_3 \longrightarrow A$$

$$x_1 x_2 x_3 \longrightarrow X$$

$$p_{A3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$p_{B3} = 0$$

$$p_{\emptyset 3} = 0$$

$$p_{X3} = 0,25$$

Tentsiorik ez, eta B ez da beharturik erabiltzen. Bietara hitz egiten dezaketen taldeak kontutan hartuz gero.

$$1,00 \geq p_A \geq 0,75$$

$$0,00 \leq p_B \leq 0,25$$

B ezinbestean erabili beharra ez denez gero, A nagusitzen da; nahiz, militantismoz, gizarte-baliorik gabeko hizkuntzatzen zenbaiten artean ikas badaiteke ere. (ikus $p_{X3} = 0,25$).

1.17.- Laukotea, noski, bakarra da:

$$\binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$$

Erabilpenaren azterketa hemen berriro xehetu bakarrik egingo dago. Egin beza irakurleak.

1.18.- Gaurko Euskal Herrian askotan gertatzen den fenomeno delako, eman dezagun multzo hau (lehen ere aipatua):

$$M = \left\{ a_1, x_1, x_2, x_3 \right\}$$

Alegia: erdaldun huts bat, eta hiru euskaldun (elebidun).

Zertan dago erabilpena?

Bikoteetan:

$$a_1 x_1 \longrightarrow A$$

$$a_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 x_3 \longrightarrow A$$

$$x_1 x_2 \longrightarrow X$$

$$x_1 x_3 \longrightarrow X$$

$$x_2 x_3 \longrightarrow X$$

Tentsiorik ez dago taldeetan; baina A nagusiturik geldi -
tzen da:

$$p_{A2} = \frac{3}{6} = 0,50$$

$$0,50 \leq p_A \leq 1,00$$

Hirukoteetan:

$$a_1 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 x_1 x_3 \longrightarrow A$$

$$a_1 x_2 x_3 \longrightarrow A$$

$$x_1 x_2 x_3 \longrightarrow X$$

Areago hirukoteetan:

$$p_{A3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$0,75 \leq p_A \leq 1,00$$

Eta laukote bakarrean:

$$p_{A4} = \frac{1}{1} = 1,00$$

Erdal elebakar batek inposatu egiten du A hizkuntza.

1.2.- BOSKOTEEN AZTERKETA

Azter dezagun, bide beretik, bost elemendutako multzoetako erabilpena.

1.21.- Eman dezagun multzo hau:

$$M = \left\{ a_1, a_2, b_1, x_1, x_2 \right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{array} \quad N = 5$$

Alegia: bi A-elebakar, B-elebakar bat, eta bi elebidun.

1.211 Bikoteak:

Zenbat bikote desberdin, hasteko?.

$$a_1 a_2 - a_1 b_1 - a_1 x_1 - a_1 x_2$$

$$a_2 b_1 - a_2 x_1 - a_2 x_2$$

$$b_1 x_1 - b_1 x_2$$

$$x_1 x_2$$

Beraz, 10 bikote:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Nola hitz egiten dute bikote horiek?

$$a_1 a_2 \rightarrow A \text{ nahi-ta-ez}$$

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset \text{ (ezin)}$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A \text{ nahi-ta-ez}$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_2 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 x_1 \rightarrow A$$

$$a_2 x_2 \rightarrow A$$

$$b_1 x_1 \rightarrow B$$

$$b_1 x_2 \rightarrow B$$

$$x_1 x_2 \rightarrow X$$

Beraz:

$$p_{A2} = \frac{5}{10} = 0,50$$

$$p_{B2} = \frac{2}{10} = 0,20$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{2}{10} = 0,20$$

$$p_{X2} = \frac{1}{10} = 0,10$$

Multzo honetan, eta bikoteei dagokienez, A nagusi da; gutxienez 0,50-tan erabiltzen baita (elebidunek beren artean zer egingo duten ez dakigu)

$$0,50 \leq p_A \leq 0,60$$

eta B gutxiago erabiltzen da:

$$0,20 \leq p_B \leq 0,30$$

A erabilgarriago denez, ez dakitenek ikasi egingo dute.

Ezaguera soilak kontutuan hartuz gero, ordea, nekez soma zitekeen hau.

Bikoteak

	ezag.	erab.	
A	0,40	0,50	A
B	0,20	0,20	B
AB	0,40	0,10	X
		0,20	$\emptyset$

Mintzatu ezina (eta tentsioa, beraz) nabarmen dago:

$$p_{\emptyset 2} = 0,20 \text{ (= \% 20, alegia)}$$

Tentsio desberdinak jasaten dituzte.

Azter dezagun A-elebakarren egoera:

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 b_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$p_{a2} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad ; \quad q_{a2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

eta B-elebakarrena:

$$b_1 a_1 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 a_2 \rightarrow \emptyset$$

$$b_1 x_1 \rightarrow B$$

$$b_1 x_2 \rightarrow B$$

$$p_{b2} = \frac{2}{4} = 0,50 \quad ; \quad q_{b2} = \frac{2}{4} = 0,50$$

Hortaz:

$$d_2 (\rightarrow A) = \frac{0,50}{0,25} = 2 .$$

Beti bezala, elebidunek ez dute tentsiorik sortzen, ez jasaten:

$$x_1 a_1 \rightarrow A$$

$$x_1 a_2 \rightarrow A$$

$$x_1 b_1 \rightarrow B$$

$$x_1 x_2 \rightarrow X$$

$$p_{x2,A} = \frac{2}{4} = 0,50$$

$$p_{x2,B} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$p_{x2,X} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$q_{x2} = 0 \quad (\text{tentsiorik ez elebidunentzat})$$

Baina:

$$\frac{p_{x2,A}}{p_{x2,B}} = \frac{0,50}{0,25} = 2 \quad (\text{elebidunek bi aldiz gehiagotan}$$

darabilte A hizkuntza, B baino). Egoera, hitz batez, ez da o-rekatua eta ez egonkorra.

1.212.- Azter ditzagun orain hirukoteak:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \text{ hirukote:}$$

$$a_1 a_2 b_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 x_1 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_2 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 b_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_2 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_2 b_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_2 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$b_1 x_1 x_2 \longrightarrow B$$

Eta beraz:

$$p_{A3} = \frac{4}{10} = 0,40$$

$$p_{B3} = \frac{1}{10} = 0,10$$

$$p_{X3} = \frac{0}{10} = 0,00$$

$$p_{\emptyset 3} = \frac{5}{10} = 0,50$$

Hirukoteetan azkartu egiten da mintzatu ezina:

$$p_{\emptyset 3} (= 0,50) > p_{\emptyset 2} (= 0,20)$$

eta hizkuntzen arteko desoreka bikoteetan baino nabarmenago agertzen da:

	ezag.	erab.	
A	0,40	0,40	A
B	0,20	0,10	B
AB	0,40	0,00	X
		0,50	$\emptyset$

Baina tentsio hori ez dute berdinki jasaten A-elebakarrek eta B-elebakarrek.

A-elebakarrek:

$$p_{a3} = \frac{3}{6} = 0,50 \quad ; \quad q_{a3} = \frac{3}{6} = 0,50$$

B-elebakarrek:

$$p_{b3} = \frac{1}{6} = 0,167 \quad ; \quad q_{b3} = \frac{5}{6} = 0,833$$

Eta hortaz, A-ren aldeko dinamika:

$$d_3 (\rightarrow A) = \frac{0,833}{0,500} = 1,667$$

Egoera ez da egonkorra.

Bide beretik azter daiteke elebidunen egoera eta erabilpe na.

1.213.- Azter ditzagun orain laukoteak.

Zenbat laukote desberdin?

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

$$a_1 a_2 b_1 x_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 b_1 x_2 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 x_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_1 b_1 x_1 x_2 \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 b_1 x_1 x_2 \rightarrow \emptyset$$

B ezin daiteke inoiz erabil; eta mintzatu ezina gogorra -
da:

$$p_{\emptyset 4} = \frac{4}{5} = 0,80$$

	ezag.	erab.	
A	0,40	0,20	A
B	0,20	0	B
AB	0,40	0	X
		0,80	$\emptyset$

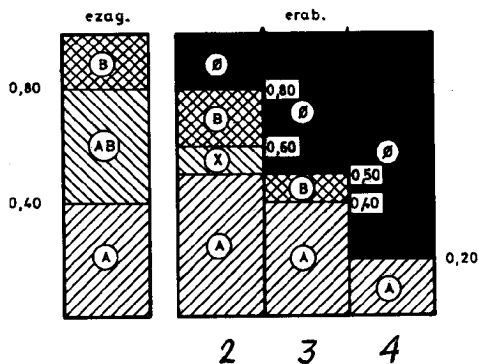
4

Eta tentsioak:

$$q_{a4} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad ; \quad q_b = \frac{4}{4} = 1,00$$

$$d_4 (\rightarrow A) = \frac{1,00}{0,75} = 1,333$$

Eskema bat egiten badugu:



Taldeak handitu ala, B-ren erabilpena txikitu egiten da -
(are desagertu ere arte); eta mintzatu ezina azkartzen. Ten-
tsioa, hitz batez maila publikoan nabaitzen da; ez maila pribatua: ala A erabili; ala ezin mintza.

Joera hauek nabarmenkiago agertuko zaizkigu multzo handia
goetan.

1.22.- Azter dezagun orain beste hau:

$$M = \{ a_1, a_2, x_1, x_2, x_3 \}$$

Hitz batez, b_1 zena elebidun bihurtu da.

Goazen atalka:

1.221.- Bikoteak:

$$a_1 a_2 \rightarrow A$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_1 x_3 \rightarrow A$$

$$a_2 x_1 \rightarrow A$$

$$a_2 x_2 \rightarrow A$$

$$a_2 x_3 \rightarrow A$$

$$x_1 x_2 \rightarrow X$$

$$x_1 x_3 \rightarrow X$$

$$x_2 x_3 \rightarrow X$$

(2)

	ezag.	erab.	
A	0,40	0,70	A
B	0	0	B
AB	0,60	0,30	X
		0	$\emptyset$

Eta beraz:

$$p_{A2} = \frac{7}{10} = 0,70$$

$$p_{B2} = \frac{0}{10} = 0$$

$$p_{X2} = \frac{3}{10} = 0,30$$

$$p_{\emptyset 2} = 0$$

$$q_{a3} = \frac{0}{4} = 0$$

Mintzatu ezina desagertu egin da, eta tentsio objektiboak ere bai. A-ren erabilpena nagusitu egin da:

$$0,70 \ll p_A \ll 1,00$$

Erabilpenen proportzioa hau da:

$$\frac{p_A}{p_B} \gg \frac{0,70}{0,30} = 2,333$$

eta A nagusi agertzen da erabat (2,333 aldiz maizago, gutxienez). B, bestalde ez da inoiz beharrezko izaten; nahiz, elebi dunen joeren arauera, zenbait aldiz erabil badaiteke ere:

$$0 \ll p_B \ll 0,30$$

1.222.- Hirukoteak

$a_1 a_2 x_1 \rightarrow A$

$a_1 a_2 x_2 \rightarrow A$

$a_1 a_2 x_3 \rightarrow A$

$a_1 x_1 x_2 \rightarrow A$

$a_1 x_1 x_3 \rightarrow A$

$a_1 x_2 x_3 \rightarrow A$

$a_2 x_1 x_2 \rightarrow A$

$a_2 x_1 x_3 \rightarrow A$

$a_2 x_2 x_3 \rightarrow A$

$x_1 x_2 x_3 \rightarrow X$

	ezag.	erab.	
A	0,40	0,90	A
B	0	0	B
AB	0,60	0,10	X
		0	∅

(3)

$$p_{A3} = 0,90 \quad ; \quad p_{X3} = 0,10 .$$

Hizkuntzen erabilpenen proportzioa:

$$\frac{p_A}{p_B} \gg \frac{0,90}{0,10} = 9$$

Gutxienez 9 aldiz maizago A, B baino.

Tentsioak ere amaitu egin dira.

1.223.- Laukoteak:

④

$a_1 a_2 x_1 x_2 \rightarrow A$

$a_1 a_2 x_1 x_3 \rightarrow A$

$a_1 a_2 x_2 x_3 \rightarrow A$

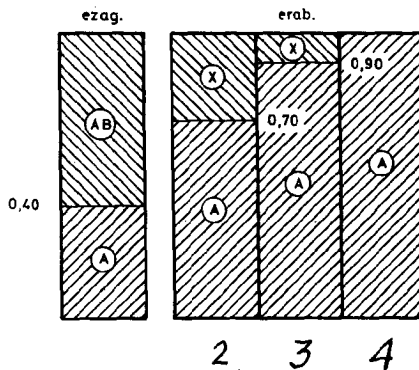
$a_1 x_1 x_2 x_3 \rightarrow A$

$a_2 x_1 x_2 x_3 \rightarrow A$

	ezag.	erab.	
A	0,40	1,00	A
B	0	0	B
AB	0,60	0	X
		0	∅

Talde guztietan, eta nahi-ta-ez, A-z mintzatu beharra gertatzen da. Tentsiorik ez dago, bestalde; eta tirabirarik gabe nagusituko da A.

Eskema bat eginez gero:



Talde txikietan oraindik ere, elebidunen militantismoaren bidez, B hizkuntza entzun badaiteke ere:

② $0 \leq p_B \leq 0,30$

talde zabalagoetan, B desagertu egiten da:

③ $0 \leq p_B \leq 0,10$

$$(4) \quad p_B = 0 \quad (\text{ezin erabilia})$$

1.224.- Emaitza hauek eta 1.21-pasartekoak alderatzen badira,= ondorioak nabarmen agertzen dira. B-elebakarra, AB-elebidun bi hurtzean, B-ren egoera guztiz txartu da.

1.2241.- Datu hauen arauera ikus daitekeenez:

$$M = \{ a_1, a_2, b_1, x_1, x_2 \}$$

Elebidunak ahal duten guztietan A-z hitz egiten baldin ba dute, erabilpenak hauek dira (aurrerago ere azaldu dugunez):

$$p_A = p_A + p_X \quad \text{eta} \quad p_B = p_B$$

$$(2) \quad p_A = 0,50 + 0,10 = 0,60$$

$$p_B = 0,20$$

$$\frac{p_A}{p_B} = 3 \quad (\text{hiru aldiz maizago } \underline{A}, \underline{B} \text{ baino})$$

$$(3) \quad p_A = 0,40 + 0 = 0,40$$

$$p_B = 0,10$$

$$\frac{p_A}{p_B} = 4 \quad (\text{lau aldiz maizago})$$

$$(4) \quad p_A = 0,20 + 0 = 0,20$$

$$p_B = 0$$

$$\frac{p_A}{p_B} = \infty$$

Elebidunak, **alderantziz**, ahal duten guztietan B-z mintzo= badira:

$$p_A = p_A \quad \text{eta} \quad p_B = p_B + p_X$$

$$(2) \quad p_A = 0,50$$

$$p_B = 0,20 + 0,10 = 0,30$$

$$\frac{p_A}{p_B} = 1,67$$

$$(3) \quad p_A = 0,40$$

$$p_B = 0,10 + 0 = 0,10$$

$$\frac{p_A}{p_B} = 4$$

$$(4) \quad p_A = 0,20$$

$$p_B = 0$$

$$\frac{p_A}{p_B} = \infty$$

Eta beraz:

$$(2) \quad 1,67 < R < 3,00$$

$$(3) \quad R = 4,00$$

$$(4) \quad R = \infty$$

A-ren nagusigoa, nabarmenago agertzen da talde handietan.
Eta erabilpenen mugak guztiz zehazki azter daitezke.

1.2242.- Azter dezagun orain:

$$M = \left\{ a_1, a_2, x_1, x_2, x_3 \right\}$$

Elebidunek A-ra jotzen badute:

$$(2) \quad p_A = 1,00 \quad ; \quad p_B = 0,00 \quad ; \quad R = \infty$$

$$(3) \quad p_A = 1,00 \quad ; \quad p_B = 0,00 \quad ; \quad R = \infty$$

$$(4) \quad p_A = 1,00 \quad ; \quad p_B = 0,00 \quad ; \quad R = \infty$$

Eta elebidunek B-ra jotzen badute:

$$(2) \quad p_A = 0,70 \quad ; \quad p_B = 0,30 \quad ; \quad R = 2,333$$

$$(3) \quad p_A = 0,90 \quad ; \quad p_B = 0,10 \quad ; \quad R = 9,000$$

$$(4) \quad p_A = 1,00 \quad ; \quad p_B = 0,00 \quad ; \quad R = \infty$$

Eta beraz:

$$(2) \quad 2,333 < R < \infty$$

$$(3) \quad 9,000 < R < \infty$$

$$(4) \quad R = \infty$$

Egoera erabat larritu da B hizkuntzaren kontra.

1.23.- Ariketak

Azter bitza irakurleak multzo hauek:

$$1.231.- \quad M = \{ a_1, a_2, a_3, b_1, x_1 \}$$

$$1.232.- \quad M = \{ a_1, b_1, b_2, b_3, x_1 \}$$

$$1.233.- \quad M = \{ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \}$$

1.3.- SEIKOTEEN AZTERKETA

Azter ditzagun orain, ama. zeko sei elemendutako multzoak

Zenbat talde desberdin dago?

$$\textcircled{2} \quad \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

$$\textcircled{3} \quad \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

$$\textcircled{4} \quad \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

$$\textcircled{5} \quad \binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$$

$$\textcircled{6} \quad \binom{6}{6} = 1$$

1.31.- Eman dezagun multzo hau:

$$M = \left\{ a_1, a_2, a_3, b_1, x_1, x_2 \right\}$$

Alegia: hiru A-elebakar, B-elebakar bat, eta bi elebidun.

Ezagueraren mailan, beraz:

$$e_A = \frac{3}{6} = 0,500$$

$$e_B = \frac{1}{6} = 0,167$$

$$e_{AB} = \frac{2}{6} = 0,333$$

Nola mintzatuko dira taldeak?

1.311.- Bikoteak:

$$a_1 a_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_3 \longrightarrow A$$

$$a_1 \textcircled{b_1} \longrightarrow \emptyset$$

$$p_{A2} = \frac{9}{15} = 0,600$$

$$a_1 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_2 a_3 \rightarrow A$$

$$a_2 (b_1) \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 x_1 \rightarrow A$$

$$a_2 x_2 \rightarrow A$$

$$a_3 (b_1) \rightarrow \emptyset$$

$$a_3 x_1 \rightarrow A$$

$$a_3 x_2 \rightarrow A$$

$$(b_1) x_1 \rightarrow B$$

$$(b_1) x_2 \rightarrow B$$

$$x_1 x_2 \rightarrow X$$

$$p_{B2} = \frac{2}{15} = 0,133$$

$$p_{X2} = \frac{1}{15} = 0,067$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{3}{15} = 0,200$$

$$K_A = \frac{0,6}{0,5} = 1,20$$

$$K_B = \frac{0,133}{0,167} = 0,80$$

	ezag.	erab.	
A	0,500	0,600	A
B	0,167	0,133	B
AB	0,333	0,067	$\emptyset$
		0,200	X

A-elebakarrak erdia izanik ere, A-ren erabilpena nagusi -
da:

$$0,600 \leq p_A \leq 0,800$$

$$0,333 \geq p_B \geq 0,133$$

Mintzatu ezina handia izanik (= 0,200), egoera aldako -
rra da; hiltunen tentsioak ez baitira orekatuak:

$$q_{a2} / q_{a2} = \frac{1}{5} = 0,20$$

$$q_{b2} / q_{b2} = \frac{3}{5} = 0,60$$

$$d_2 (\rightarrow A) = \frac{0,60}{0,20} = 3,00$$

Erabilpena ere ez da orekatua:

$$R_{\min} = \frac{0,600}{0,333} = 1,800$$

$$R_{\max} = \frac{0,800}{0,133} = 6,015$$

$$6,015 \leq P_{(A/B)} \leq 1,800$$

Dirudien baino txarragoa da B-ren egoera multzo horretan.

1.312.- Hirukoteak

$$a_1 a_2 a_3 \rightarrow A$$

$$a_1 a_2 (b_1) \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 a_2 x_2 \rightarrow A$$

$$a_1 a_3 (b_1) \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_3 x_1 \rightarrow A$$

$$a_1 a_3 x_2 \rightarrow A$$

$$a_1 (b_1) x_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 (b_1) x_2 \rightarrow \emptyset$$

$$a_1 x_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_2 a_3 (b_1) \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 a_3 x_1 \rightarrow A$$

$$a_2 a_3 x_2 \rightarrow A$$

$$a_2 (b_1) x_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 (b_1) x_2 \rightarrow \emptyset$$

$$a_2 x_1 x_2 \rightarrow A$$

$$a_3 (b_1) x_1 \rightarrow \emptyset$$

$$a_3 (b_1) x_2 \rightarrow \emptyset$$

$$a_3 x_1 x_2 \rightarrow A$$

$$(b_1) x_1 x_2 \rightarrow B$$

$$p_{A3} = \frac{10}{20} = 0,500$$

$$p_{B3} = \frac{1}{20} = 0,050$$

$$p_{X3} = \frac{0}{20} = 0$$

$$p_{\emptyset 3} = \frac{9}{20} = 0,450$$

	ezag.	erab.	
A	0,500	0,500	A
B	0,167	0,050	B
AB	0,333	0	X
		0,450	$\emptyset$

$$K_A = \frac{0,5}{0,5} = 1,00$$

$$K_B = \frac{0,05}{0,167} = 0,30$$

Hirukoteetan garbi kiago agertzen den erabilpenen desore-
ka:

$$P_A = p_A = 0,50$$

$$p_B = p_B = 0,05$$

$$R_{(A/B)} = \frac{0,50}{0,05} = 10$$

Hamar aldiz maizago A, B baino. Ia-ia B ez da erabiltzen. Hiztunen tentsioak, berriz:

$$q_{a3} = \frac{4}{10} = 0,400$$

$$q_{b3} = \frac{9}{10} = 0,900$$

$$d_3 (\longrightarrow A) = \frac{0,900}{0,400} = 2,250$$

Hiru aldiz maizago jasaten dute B-elebakarrek mintzatu ezina, A-elebakarrek baino.

Bestetan bezala ere: tentsioak, nolabait esateko, "sozialak" dira; eta maila "pribatuan" askoz gutxiago senditzen dira tirabirak, maila "publikoan" baino.

1.313.- Laukoteak

$$a_1 a_2 a_3 b_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 a_3 x_1 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_2 a_3 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_2 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 b_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_2 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 a_3 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_3 b_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_1 a_3 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_1 b_1 x_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_2 a_3 b_1 x_1 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_2 a_3 b_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_2 a_3 x_1 x_2 \longrightarrow A$$

$$a_2 b_1 x_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$a_3 b_1 x_1 x_2 \longrightarrow \emptyset$$

$$p_{A4} = \frac{5}{15} = 0,333$$

$$p_{B4} = \frac{0}{15} = 0$$

$$p_{X4} = \frac{0}{15} = 0$$

$$p_{\emptyset 4} = \frac{10}{15} = 0,667$$

$$K_A = \frac{0,333}{0,500} = 0,667$$

$$K_B = \frac{0}{0,167} = 0$$

	ezag.	erab.	
A	0,500	0,333	A
B	0,167	0	B
AB	0,333	0	X
		0,667	∅

Lekurik ez borondatearentzat: erabili behar den hizkun - tzak ez du lekurik uzten ($p_{X4} = 0$); eta B ezin daiteke era - bil. Mintzatu-ezina nabarmenago agertzen da lehen baino.

Erabilpena erabat desorekatua da:

$$R_{(A/B)} = \frac{0,333}{0} = \infty$$

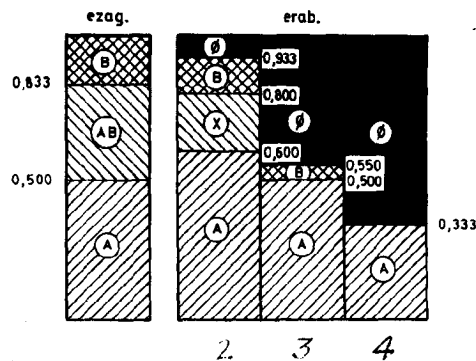
eta hiztunen tentsioak ere desberdinak dira oso:

$$q_{a4} = \frac{6}{10} = 0,600$$

$$q_{b4} = \frac{10}{10} = 1,000$$

$$d_y (\rightarrow A) = \frac{1,000}{0,600} = 1,667$$

Eta eskema bat eginez gero:



Desorekak eta arazoak talde handietan agertzen dira garbi kienik.

1.4.- EDOZEIN MULTZO FINITOKEN AZTERKETA OROKORRA

Eman dezagun multzo hau:

$$M = \left\{ a_1, a_2 \dots a_\alpha; b_1, b_2 \dots b_\beta; x_1, x_2 \dots x_\gamma \right\}$$

1.41.- Ezaugarak hauek dira:

$$e_A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\alpha}{N}$$

$$e_B = \frac{\beta}{N}$$

$$e_{AB} = \frac{\gamma}{N}$$

1.421.- Bikoteak

1.4211.- Has gaitezen erabilpenetatik:

Zenbat taldetan egiten da A-z?

$$\binom{\alpha + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2}$$

Zenbat taldetan B-z?

$$\binom{\beta + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2}$$

Zenbat taldetan X-z?

$$\binom{\gamma}{2}$$

Zenbat taldetan ezin mintzatua?

$$\alpha \beta$$

Beraz, erabilpenak hauek dira:

$$p_{A2} = \frac{\binom{\alpha + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2}}{\binom{N}{2}}$$

$$p_{B2} = \frac{\binom{\beta + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2}}{\frac{N}{2}}$$

$$p_{X2} = \frac{\binom{\gamma}{2}}{\binom{N}{2}}$$

$$p_{\emptyset 2} = \frac{\alpha \beta}{\binom{N}{2}}$$

1.4212.- Tentsioak

Zenbat taldetan mintza daiteke a elebakarra?. Erdaraz e -
zin dezakeen kasuetan, noski:

$$p_{a2} = \frac{(\alpha - 1) + \gamma}{N - 1}$$

$$\text{Eta beraz: } p_{a2} = \frac{\alpha + \gamma - 1}{N - 1} = \frac{N - \beta - 1}{N - 1}$$

Zenbat taldetan gertatzen zaio mintzatu-ezina (eta datxe-
kion tentsioa, beraz)?

$$q_{a2} = \frac{\beta}{N - 1}$$

Era berean, eta B-zko elebakarrei dagokienez:

$$q_{b2} = \frac{N - \alpha - 1}{N - 1}$$

$$q_{\emptyset 2} = \frac{\alpha}{N - 1}$$

Eta tentsioen proportzioak, A nagusitzeko joera neurtzen=
du:

$$d_2 (\longrightarrow A) = \frac{q_{b2}}{q_{a2}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

1.4213.- Elebidunen erabilpen desorekatua

Elebidunek A erabiltzen dute, ezinbestean, a elebakarren-
aurrean:

$$p_{X2,A} = \frac{\alpha}{N-1}$$

baina b, ezinbestean ere, B elebakarrekin:

$$p_{X2,B} = \frac{\beta}{N-1}$$

Desoreka hori nolabait neurtzeko:

$$d_{X2} (\longrightarrow A) = \frac{p_{X2,A}}{p_{X2,B}} = \frac{\alpha}{\beta} .$$

1.422.- Hirukoteak

1.4221.- Erabilpenak

$$p_{A3} = \frac{\binom{\alpha+\gamma}{3} - \binom{\gamma}{3}}{\binom{N}{3}}$$

$$p_{B3} = \frac{\binom{\beta+\gamma}{3} - \binom{\gamma}{3}}{\binom{N}{3}}$$

$$p_{X3} = \frac{\binom{\gamma}{3}}{\binom{N}{3}}$$

$$\text{Eta } p_{\emptyset 3} = 1 - p_{A3} - p_{B3} - p_{\emptyset 3}$$

1.4222.- Tentsioak

Zenbat aldiz mintza daiteke A elebakarra? a elebakarrekin eta x elebidunekin. Beraz:

$$p_{a3} = \frac{\binom{\alpha + \gamma - 1}{2}}{\binom{N - 1}{2}}$$

Zenbat aldiz mutu? Bai B-z mintzo diren bikoteekin, bai mutu dauden bikoteekin. Beraz:

$$\binom{\beta + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2} \quad \text{eta} \quad (\alpha - 1)\beta .$$

Eta, beraz:

$$q_{a3} = \frac{\binom{\beta + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2} + (\alpha - 1)\beta}{\binom{N - 1}{2}}$$

Bide beretik:

$$p_{b3} = \frac{\binom{\beta + \gamma - 1}{2}}{\binom{N - 1}{2}}$$

$$q_{b3} = \frac{\binom{\alpha + \gamma}{2} - \binom{\gamma}{2} + (\beta - 1)\alpha}{\binom{N - 1}{2}}$$

Eta A-ren aldeko dinamika:

$$d_3 (\rightarrow A) = \frac{q_{b3}}{q_{a3}}$$

1.4223.- Elebidunen erabilpen desorekatua

Noiz mintzo da A-z, derrigorrez, x elebiduna?

$$\binom{\alpha}{2} + \alpha(\gamma - 2)$$

Era berean; noiz B-z?

$$\binom{\beta}{2} + \beta(\gamma - 2)$$

Eta, beraz:

$$p_{X3,A} = \frac{\binom{\alpha}{2} + \alpha(\gamma - 1)}{\binom{N-1}{2}}$$

$$p_{X3,B} = \frac{\binom{\beta}{2} + \beta(\gamma - 1)}{\binom{N-1}{2}}$$

Eta desoreka:

$$d_{X3} (\longrightarrow A) = \frac{\binom{\alpha}{2} + \alpha(\gamma - 1)}{\binom{\beta}{2} + \beta(\gamma - 1)}$$

1.423.- K-Koteak (K elementutako multzoak)

Azterketa bide beretik eginez, hau dugu:

1.4231.- Erabilpenak

$$p_{AK} = \frac{\binom{\alpha + \gamma}{K} - \binom{\gamma}{K}}{\binom{N}{K}}$$

$$p_{BK} = \frac{\binom{\beta + \gamma}{K} - \binom{\gamma}{K}}{\binom{N}{K}}$$

$$p_{XK} = \frac{\binom{\gamma}{K}}{\binom{N}{K}}$$

Eta beti ere $p_{AK} + p_{BK} + p_{XK} + p_{\emptyset K} = 1$

Adibidez:

1.5.- Azter ditzagun multzo honen erabilpenak eta tentsioak:

$$M = \{ a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ; b_1 b_2 b_3 b_4 ; x_1 x_2 x_3 \}$$

Beraz:

$$\alpha = 5 \text{ (5 A-alebakar)}$$

$$\beta = 4 \text{ (4 B-alebakar)}$$

$$\gamma = 3 \text{ (3 elebidun)}$$

$$N = 12 .$$

1.51.- Bikoteen azterketa

Erabilpenak:

$$P_{A2} = \frac{\binom{5+3}{2} - \binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{28 - 3}{66} = \frac{25}{66} = 0,37878$$

$$P_{B2} = \frac{\binom{4+3}{2} - \binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{21 - 3}{66} = \frac{18}{66} = 0,27272$$

$$P_{X2} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{66} = 0,04545$$

$$P_{\emptyset 2} = \frac{5 \cdot 4}{\binom{12}{2}} = \frac{20}{66} = 0,30303$$

Ikus daitekeenez, erabilpena ia-ia aldakaitza da:

$$P_{X2} = 0,04545 = \% 4,545$$

Diglosiak, motibazioek eta abar, % 4,5 horretan bakarrik izan dezakete eragina; alebakarrek ezin balitezakete beren mintzabidea hauta. Hau oso inportantea da; diglosiaren eta mili - tantismoen mugak garbi ikusteko.

Bikote horietan, dena dela, tentsio handia dago; %30,303-tan gertatzen baita mintzatu ezina. Egoera ez da batere egonkorra, beraz.

Tentsio horiek ez dira orekatuak:

$$q_{a2} = \frac{4}{11} = 0,36363$$

$$q_{b2} = \frac{5}{11} = 0,45454$$

B-elebakarrek areago jasaten dute mintzatu ezina:

$$d_2 (\rightarrow A) = \frac{5}{4} = 1,25$$

Eta elebidunek ez dituzte A eta B maiztasun berean erabiltzen:

$$d_{X2} (\rightarrow A) = \frac{5}{4} = 1,25$$

Grafikoak eta gainerako iruzkinak ikaslearen eskuetan utziko ditugu.

1.52.- Hirukoteen azterketa

$$p_{A3} = \frac{\binom{8}{3} - \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{56 - 1}{220} = \frac{55}{220} = 0,25$$

$$p_{B3} = \frac{\binom{7}{3} - \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{35 - 1}{220} = \frac{34}{220} = 0,15454$$

$$p_{X3} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220} = 0,00454$$

$$p_{\emptyset 3} = 1 - 0,25 - 0,15454 - 0,00454 = 0,59092$$

Hirukoteetan nabarmenkiago agertzen da desoreka:

$$p_{\emptyset 3} = 0,59 (> 0,30)$$

$$p_{A3} = 0,25 (< 0,38)$$

$$p_{B3} = 0,15 (< 0,27)$$

eta militantismoak eta diglosiak eragin txikiagoa dute:

$$p_{X3} = 0,0045 (< 0,045)$$

Maila publikoan agertzen da desoreka. Tentsioak ez daude orekaturik:

$$p_{a3} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{21}{55} = 0,3818$$

$$p_{b3} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{15}{55} = 0,2727$$

Eta, hortaz, mintzatu ezinak hauek dira:

$$q_{a3} = 1 - 0,3818 = 0,6182$$

$$q_{b3} = 1 - 0,2727 = 0,7273$$

Eta A-ren aldeko joera:

$$d_3 (\rightarrow A) = \frac{0,7273}{0,6182} = 1,176$$

Mintzatu ezina denontzako azkarturik ere, berriro ere B-e lebakarrek jasaten dute gehienik.

Elebidunen erabilpena ez da orekatua:

$$d_{X3} (\rightarrow A) = \frac{\binom{5}{2} + 5 \cdot 2}{\binom{4}{2} + 4 \cdot 2} = \frac{20}{14} = 1,4286$$

askoz ere maizago A erabiltzera beharturik daudenez.

1.53.- Laukoteen azterketa

$$p_{A4} = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = 0,1414$$

$$p_{B4} = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = 0,0707$$

$$p_{X4} = 0$$

$$p_{\emptyset 4} = 0,7879$$

Taldeak zabaldu ala, mintzatu-ezina azkartu egiten da:

$$p_{\emptyset 4} = \% 78,79$$

$p_{X4} = 0$ denez, erabilpena borondateetatik at dago lau ele mendutako taldeetan: ez nahiak ez diglosi-arazoez alda dezakete mendrenik ere erabilpenaren arazoa.

Taula bat egiten badugu:

		erabilpena			
	ezag.	②	③	④	
A	0,417	0,379	0,250	0,141	A
B	0,333	0,273	0,155	0,071	B
AB	0,250	0,045	0,0045	0,000	X
		0,303	0,591	0,788	∅

Taulan ongi ikus daitekeenez, ezkerretatik eskuinetara joanez gero (alegia, talde txiki eta "pribatuetatik", talde handiago eta "publikoetara" joanez gero), ondoko fenomeno hauek azpimarra daitezke:

a) gora doan zifra bakarra, p_0 da; alegia, mintzatu-ezina eta tentsioa adierazten duena.

b) bi hizkuntzen arteko aukera, oso txikia da beti ($p_X \ll 0,045$); eta talde handietan erabat desagertzen da.

c) erabilpena eta ezaqueria neurtzen dituzten zifrak, guztiz desberdinak dira. Behin eta berriz ikusiko dugunez, ezaqueraren zifrak goraiapatzeak, ondorio alienatzaileak ditu hizkuntzaren egoera ezaqutu nahi denean.

d) erabilpenen proportzioa:

$$\frac{p_A}{p_B}$$

aztertzen bada, zifra gorantz doa:

$$0,379 / 0,273 = 1,388$$

$$0,250 / 0,155 = 1,613$$

$$0,141 / 0,071 = 1,986$$

Beste modu batera esanda, desoreka nabarmenago agertzen da maila publikoan, maila pribatuan baino.

e) Kontutan har adibide honetan erabiltzen diren oso orekatuak izanik:

$$p_A = 0,417$$

$$p_B = 0,333$$

$$p_{AB} = 0,250$$

ongi soma daiteke gure herrian dagoen ezaqueria-motak erakutsiko duen desoreka praktikoaren maila.

Baina goazen orain ^{multzo} infinitoen azterketa egitera.

2. MULTZO INFINITOEN AZTERKETA

Eman dezagun multzo infinito bat; eta ezaguera-mailak -
hauek direla:

$$e_A = \underline{A}\text{-elebakarrak.}$$

$$e_B = \underline{B}\text{-elebakarrak.}$$

$$e_X = \underline{AB}\text{-elebakarrak.}$$

Jakina:

$$e_A + e_B + e_{AB} = 1$$

2.1.- BIKOTEA

Bikoteak modu hauetara antola daitezke;

$$aa \longrightarrow A$$

$$ab \longrightarrow \emptyset$$

$$ax \longrightarrow A$$

$$ba \longrightarrow \emptyset$$

$$bb \longrightarrow B$$

$$bx \longrightarrow B$$

$$xa \longrightarrow A$$

$$xb \longrightarrow B$$

$$xx \longrightarrow X$$

Hots: zein dira bikote horiek elkartzeko probabilitateak?

Hona hemen:

$$e_A \cdot e_A$$

$$e_A \cdot e_B$$

$$e_A \cdot e_X$$

$$e_B \cdot e_A$$

$$e_B \cdot e_B$$

$$e_B \cdot e_X$$

$$e_X \cdot e_A$$

$$e_X \cdot e_B$$

$$e_X \cdot e_X$$

A mintzatua izateko probabilitatea, beraz, hau da:

$$p_{A2} = e_A \cdot e_A + e_A \cdot e_X + e_X \cdot e_A ; \text{edo-ta;}$$

$$p_{A2} = e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_X$$

Bide beretik:

$$p_{B2} = e_B^2 + 2 \cdot e_B \cdot e_X$$

$$p_{\emptyset 2} = 2 \cdot e_A \cdot e_B$$

$$p_{X2} = e_X^2$$

$$\text{Jakina: } p_{A2} + p_{B2} + p_{\emptyset 2} + p_{X2} = 1$$

$$\begin{aligned} & (e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_X) + (e_B^2 + 2 \cdot e_B \cdot e_X) + (2 \cdot e_A \cdot e_B) + (e_X^2) = \\ & = e_A^2 + e_B^2 + e_X^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_X + 2 \cdot e_A \cdot e_B + 2 \cdot e_B \cdot e_X = \\ & = (e_A + e_B + e_X)^2 = 1 \end{aligned}$$

Adibidez:

$$e_A = 0,50 ; e_B = 0,15 ; e_X = 0,35$$

(% 50 A-elebakarrak ; % 15 B-elebakarrak ; eta % 35, elebidunak).

$$p_{A2} = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,35 = 0,6000$$

$$p_{B2} = 0,15^2 + 2 \cdot 0,15 \cdot 0,35 = 0,1275$$

$$p_{\emptyset 2} = 2 \cdot 0,50 \cdot 0,15 = 0,1500$$

$$p_{X2} = 0,35^2 = 0,1225$$

$$1,0000$$

Eta, sistema bera erabiliz:

	ezag.	erab.	
A	0,50	0,6000	A
B	0,15	0,1275	B
AB	0,35	0,1225	X
		0,1500	∅

(2)

A nagusi da:

$$p_{A2} = 0,60$$

eta elebidunek A-zaleak baldin badira:

$$p_{A2} = 0,60 + 0,1225 = 0,7225$$

$$0,600 \leq p_A \leq 0,7225$$

$$0,250 \geq p_B \geq 0,1275$$

Egoera honetan, beraz, elebidunen joerak garrantzi txikia izan dezake:

$$p_{X2} = 0,1225 \text{ (= \% 12,25)}$$

Oro har, elebakarrek markatzen dute erabilpenaren maila
(= % 87,75 beren eskuetan dago).

Tentsioa handi xamarra da:

$$p_{\emptyset 2} = \% 12,25 \text{ (= \% 12,25 taldetan ezin mintza)}$$

eta ez dago berdinki jasana.

Mintzatu-ezinak, beraz, hauek baitira:

$$\begin{cases} p_{b2,\emptyset} = e_A \\ p_{a2,\emptyset} = e_B \end{cases}$$

A-ren aldeko joera nabarmen dago:

$$d_2 (\longrightarrow A) = \frac{e_A}{e_B} = \frac{0,5}{0,15} = 3,333$$

3,333 aldiz maizago gertatzen zaie ezin-mintzatzea B-elebaka -rrei, A-elebakarrei baino. Nolabait esateko, "diskriminatuago" daude b elemenduak, a elemenduak baino.

2.2.- HIRUKOTEAK

Gerta daitezkeen egoerak hauek dira:

aaa	→ A
aab	→ ∅
aax	→ A
axa	→ A
axx	→ A
axb	→ ∅
aba	→ ∅
abx	→ ∅
abb	→ ∅
xaa	→ A
xax	→ A
xab	→ ∅
xxa	→ A
xxx	→ X
xxb	→ B
xba	→ ∅
xbx	→ B
xbb	→ B
baa	→ ∅
bax	→ ∅
bab	→ ∅
bxa	→ ∅
bxx	→ B
bxb	→ B
bba	→ ∅
bbx	→ B

$$\underline{bbb \rightarrow B}$$

Hots, axb hirukotea elkartzeko probabilitatea:

$$e_A \cdot e_X \cdot e_B$$

eta bide beretik besteak.

Hortaz, terminoak elkartzuz:

$$p_{A3} = e_A^3 + 3 \cdot e_A^2 \cdot e_X + 3 \cdot e_A \cdot e_X^2$$

$$p_{B3} = e_B^3 + 3 \cdot e_B^2 \cdot e_X + 3 \cdot e_B \cdot e_X^2$$

$$p_{X3} = e_X^3$$

$$p_{\emptyset 3} = 3 \cdot e_A^2 \cdot e_B + 3 \cdot e_A \cdot e_B^2 + 6 \cdot e_A \cdot e_B \cdot e_X$$

Adibidez, eta lehengo adibideari ekinez:

$$\begin{aligned} p_{A3} &= 0,5^3 &= 0,1250 \\ &+ 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,35 &= 0,2625 \\ &+ 3 \cdot 0,5 \cdot 0,35^2 &= 0,18375 \\ &&\hline &&0,57125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{B3} &= 0,15^3 &= 0,003375 \\ &+ 3 \cdot 0,15^2 \cdot 0,35 &= 0,023625 \\ &+ 3 \cdot 0,15 \cdot 0,35^2 &= 0,055125 \\ &&\hline &&0,082125 \end{aligned}$$

$$p_{X3} = 0,35^3 = 0,042875$$

$$\begin{aligned} p_{\emptyset 3} &= 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,15 &= 0,1125 \\ &3 \cdot 0,5 \cdot 0,15^2 &= 0,03375 \\ &6 \cdot 0,5 \cdot 0,15 \cdot 0,35 &= 0,1575 \\ &&\hline &&0,30375 \end{aligned}$$

Eta, beraz, taula modura aurkeztuz:

	②	③
p_A	0,6000	0,57125
p_B	0,1275	0,082125
p_X	0,1225	0,042875
$p_\emptyset$	0,1500	0,30375

Ongi ageri denez, eta berriro ere, talde zabalagotara pasatzean, B-ren erabilpena nabarmenki jaisten da (% 12,75 $\rightarrow$ % 4,29) ; elebidunen eragina jaitsi ere bai, garbiki (% 12,25 $\rightarrow$ % 4,29) ; eta, oro har, mintzatu ezina azkartu egiten da. Baina A-ren balio soziala gora doa:

$$\frac{p_{A2}}{p_{B2}} = \frac{0,6000}{0,1275} = 4,706$$

$$\frac{p_{A3}}{p_{B3}} = \frac{0,57125}{0,082125} = 6,96$$

A-ren gailentasuna garbikiago agertzen da.

2.3.- LAUKOTEAK

Joera horiek azkartu egiten dira laukoteetara pasatzean:

$$p_{A4} = e_A^4 + 4 \cdot e_A^3 \cdot e_{AB} + 6 \cdot e_A^2 \cdot e_{AB}^2 + 4 \cdot e_A \cdot e_{AB}^3$$

$$p_{B4} = e_B^4 + 4 \cdot e_B^3 \cdot e_{AB} + 6 \cdot e_B^2 \cdot e_{AB}^2 + 4 \cdot e_B \cdot e_{AB}^3$$

$$p_{X4} = e_{AB}^4$$

$$p_{\emptyset 4} = 4 \cdot e_A \cdot e_B \cdot (e_A^2 + e_B^2) + 6 \cdot e_A^2 \cdot e_B^2 + 12 \cdot e_A \cdot e_B \cdot e_{AB}$$

(Aski da formula hauek lortzeko, $3^4 = 81$ laukoteak bana-bana idaztea; eta terminoak sailkatzea. Ageri denez, bestalde, Newton-binomioaren aurrean gaude.)

Eta lehengo adibideari ekinez:

$$\begin{aligned}
 p_{A4} &= 0,5^4 &= 0,0625 \\
 4 \cdot 0,5^3 \cdot 0,35 &= 0,1750 \\
 6 \cdot 0,5^2 \cdot 0,35^2 &= 0,18375 \\
 4 \cdot 0,5 \cdot 0,35^3 &= 0,08575 \\
 &\hline
 &0,507
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{B4} &= 0,15^4 &= 0,0005062 \\
 4 \cdot 0,15^3 \cdot 0,35 &= 0,004725 \\
 6 \cdot 0,15^2 \cdot 0,35^2 &= 0,01654 \\
 4 \cdot 0,15 \cdot 0,35^3 &= 0,025725 \\
 &\hline
 &0,0474962
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{X4} &= 0,35^4 &= 0,015006 \\
 p_{\emptyset 4} &= 4 \cdot 0,5 \cdot 0,15 \cdot (0,5^2 + 0,15^2) = 0,08175 \\
 &6 \cdot 0,5^2 \cdot 0,15^2 &= 0,03375 \\
 &12 \cdot 0,5 \cdot 0,15 \cdot 0,35 &= 0,315 \\
 &&\hline
 &0,4305
 \end{aligned}$$

Eta lehengo taula osatuz:

	ezag.	②	③	④	
A	0,50	0,6000	0,5712	0,5070	A
B	0,15	0,1275	0,0821	0,0475	B
AB	0,35	0,1225	0,0429	0,0150	X
		0,1500	0,3037	0,4305	∅

Somatzen ziren joerak azkartu egin dira:

a) A-ren balio soziala gora doa:

$$\frac{p_{A4}}{p_{B4}} = \frac{0,5070}{0,0475} = 10,67 > 6,96 > 4,706$$

Nekez soma liteke hau ezagueren taulatik!

b) B-ren balioa, areago txikitzen da:

$$p_{B4} = \% 4,75$$

c) bi hizkuntzen arteko aukera (elebidunei bakarrik dago-kiena: nahia, militantzia, diglosia, etab.), guztiz - txikia da:

$$p_{X4} = \% 1,5$$

d) Tentsioa garbi agertzen da:

$$p_{\emptyset 4} = \% 43,05 \text{ (ia-ia erdia!)}$$

Egoera, beraz, ezin egonkorra izan.

2.4.- OHARRA : bide beretik kalkula daitezke p_5 , p_6 , etab. ; baina talde horiek gutxitan gertatzen dira pratikan; eta, estatistikoki, pisu urria dute egoera orokorrean.

Aski du irakurleak Newton-en binomioa kontutan hartzea.

2.41.- Erabilpenak, beste modu honetara ere kalkula daitezke.

Bikoteak:

$$\begin{aligned} p_{A2} &= e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} (+ e_{AB}^2 - e_{AB}^2) = \\ &= (e_A + e_{AB})^2 - e_{AB}^2 = (1 - e_B)^2 - e_{AB}^2 \end{aligned}$$

Eta bide beretik:

$$p_{B2} = (1 - e_A)^2 - e_{AB}^2$$

Hirukoteak:

$$p_{A3} = (1 - e_B)^3 - e_{AB}^3$$

$$p_{B3} = (1 - e_A)^3 - e_{AB}^3$$

Laukoteak:

$$p_{A4} = (1 - e_B)^4 - e_{AB}^4$$

$$p_{B4} = (1 - e_A)^4 - e_{AB}^4$$

p_X eta $p_\emptyset$ kalkulatzeko, arestian emandako formulak erabil daitezke.

Adibidez:

$$\begin{cases} e_A = 0,50 \\ e_B = 0,15 \\ e_{AB} = 0,35 \end{cases}$$

Bikoteetan:

$$p_{A2} = (1 - 0,15)^2 - 0,35^2 = 0,7225 - 0,1225 = 0,6000$$

$$p_{B2} = (1 - 0,50)^2 - 0,35^2 = 0,2500 - 0,1225 = 0,1275$$

Hirukoteetan:

$$p_{A3} = (1 - 0,15)^3 - 0,35^3 = 0,6141 - 0,0429 = 0,5712$$

$$p_{B3} = (1 - 0,50)^3 - 0,35^3 = 0,1250 - 0,0429 = 0,0821$$

Laukoteetan:

$$p_{A4} = (1 - 0,15)^4 - 0,35^4 = 0,5220 - 0,0151 = 0,5069$$

$$p_{B4} = (1 - 0,50)^4 - 0,35^4 = 0,0625 - 0,0151 = 0,0474$$

Ikus daitekeenez balore berak dira; eta kalkulabide errazago burutzen da.

2.5.- TENTSIOAK

Elebidunek, dakizkiten bi hizkuntzetako baten erabilpenari trabak jartzen ez dizkioten bitartean (alegia, elebidun "neutro" direno: A edo B erabiltzea, berdin bazaie), ez dute inoiz tentsiorik jasaten ez sortzen.

Tentsioak elebakarrei dagozkie (edo-ta, militantismoz, dakizkiten bi hizkuntzeko bati uko egiten dioten elebidunei).

Hots, tentsio horiek desberdinak dira A-elebakarrentzat eta B-elebakarrentzat.

2.51.- Bikoteetan

Kasu hau erraza da.

a hiru kasutan gerta daiteke:

$$a \begin{cases} a \\ b \\ x \end{cases}$$

Lehenengo kasuan A-z mintzatuko da; bigarrenean, ezin; eta hirugarrenean A-z:

$$aa \longrightarrow A$$

$$ab \longrightarrow \emptyset$$

$$ax \longrightarrow A$$

Hortaz, hau dugu:

$$p_{a2} = e_A + e_{AB}$$

$$q_{a2} = e_B \quad (\text{mintzatu ezina})$$

Bide beretik, b hiru kasutan gerta daiteke:

$$ba \longrightarrow \emptyset$$

$$bb \longrightarrow B$$

$$bx \longrightarrow B$$

eta, hortez:

$$p_{b2} = e_B + e_{AB}$$

$$q_{b2} = e_A \quad (\text{mintzatu ezina}) .$$

Eta, azkenekotz:

x elebiduna:

$$\begin{cases} xa \longrightarrow A \\ xb \longrightarrow B \\ xx \longrightarrow X \quad (\text{mintza daiteke A-z zein B-z}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{x2} = 1 \\ q_{x2} = 0 \quad (\text{elebidunei ez zaie inoiz mintzatu ezinik gertatzen}) . \end{cases}$$

Azter dezagun lehengo adibidea:

A-elebakarrak:

$$q_{a2} = 0,15 \quad (\% 15\text{-tan ezin mintza})$$

B-elebakarrak:

$$q_{b2} = 0,50 \quad (\% 50\text{-tan ezin mintza}) .$$

Tentsio handiagoa jasaten dute B-elebakarrek:

$$d_2 (\longrightarrow A) = \frac{q_{b2}}{q_{a2}} = \frac{0,50}{0,15} = 3,333$$

2.511.- Elebidunek, era berean, maizago erabiltzen dute A-hizkuntza, B baino:

$$d_{x2} (\longrightarrow A) = \frac{e_A}{e_B} = \frac{0,5}{0,15} = 3,333$$

Bi zifra hauek talde zabalagoetan ez dira berdinak.

2.52.- Hirukoteetan

Hona hemen a-ren kasuak:

$$a \left[\begin{array}{l} aa \rightarrow A \\ ab \rightarrow \emptyset \\ ax \rightarrow A \\ ba \rightarrow \emptyset \\ bb \rightarrow \emptyset \\ bx \rightarrow \emptyset \\ xa \rightarrow A \\ xb \rightarrow \emptyset \\ xx \rightarrow A \end{array} \right.$$

Zenbat aldiz mintza daiteke?

$$\begin{aligned} p_{a3} &= e_A \cdot e_A + e_A \cdot e_{AB} + e_{AB} \cdot e_A + e_{AB} \cdot e_{AB} = \\ &= e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} + e_{AB}^2 = (e_A + e_{AB})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{a3} &= e_A \cdot e_B + e_B \cdot e_A + e_B^2 + e_B \cdot e_{AB} + e_{AB} \cdot e_B = \\ &= e_B^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_B + 2 \cdot e_{AB} \cdot e_B = e_B (2 - e_B) \end{aligned}$$

Gure adibidean:

$$\left[\begin{array}{l} p_{a3} = (0,5 + 0,35)^2 = 0,85^2 = 0,7225 \\ q_{a3} = 0,15 (2 - 0,15) = 0,2775 \end{array} \right.$$

Eta, simetriad:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{b3} = (e_B + e_{AB})^2 \\ q_{b3} = e_A (2 - e_A) \end{array} \right.$$

Eta, gure kasuan:

$$p_{b3} = (0,15 + 0,35)^2 = 0,2500$$

$$q_{b3} = 0,5 (2 - 1,5) = 0,7500$$

Askoz maizago gertatzen zaie mintzatu ezina B-elebakarrei ($q_{b3} = \% 75$), A-elebakarrei baino ($q_{a3} = \% 27,75$). Eta, beraz, A-ren aldeko dinamika sortzen da:

$$d_3 (\rightarrow A) = \frac{0,75}{0,2775} = 2,703$$

Denontzako azkartu da mintzatu ezina; baina proportzioa hor dago, desorekaren lekuko: B-elebakarrak "diskriminatuago" daude.

2.521.- Nola mintzo dira elebidunak?

$$x \left[\begin{array}{l} aa \rightarrow A \\ ab \rightarrow \emptyset \quad (\text{nahiz banaka posible izan}) \\ ax \rightarrow A \\ ba \rightarrow \emptyset \\ bb \rightarrow B \\ bx \rightarrow B \\ xa \rightarrow A \\ xb \rightarrow B \\ xx \rightarrow X \end{array} \right.$$

Beraz:

$$\left[\begin{array}{l} p_{X3,A} = e_A \cdot e_A + e_A \cdot e_{AB} + e_{AB} e_A = e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} \\ p_{X3,B} = e_B \cdot e_B + e_B \cdot e_{AB} + e_{AB} e_B = e_B^2 + 2 \cdot e_B \cdot e_{AB} \end{array} \right.$$

Beraz:

$$p_{X3,A} = p_{A2}$$

$$p_{X3,B} = p_{B2}$$

Eta, hortaz, desorekaz erabiltzen dituzte biak:

$$d_{X3} (\longrightarrow A) = \frac{p_{A2}}{p_{B2}}$$

Gure adibidean:

$$d_{X3} (\longrightarrow A) = \frac{0,60}{0,1275} = 4,706$$

Ia-ia bost aldiz maizago erabiltzen dute elebidunek A-hizkuntza, B-hizkuntza baino.

2.53.- Laukoteetan

Hona hemen, hasteko, a-ren egoerak:

a. aaa $\longrightarrow$ A	a. bxa $\longrightarrow$ $\emptyset$
aab $\longrightarrow$ $\emptyset$	bx b $\longrightarrow$ $\emptyset$
aax $\longrightarrow$ A	bxx $\longrightarrow$ $\emptyset$
aba $\longrightarrow$ $\emptyset$	xaa $\longrightarrow$ A
abb $\longrightarrow$ $\emptyset$	xab $\longrightarrow$ $\emptyset$
abx $\longrightarrow$ $\emptyset$	xax $\longrightarrow$ A
axa $\longrightarrow$ A	xba $\longrightarrow$ $\emptyset$
axb $\longrightarrow$ $\emptyset$	xbb $\longrightarrow$ $\emptyset$
axx $\longrightarrow$ A	xbx $\longrightarrow$ $\emptyset$
baa $\longrightarrow$ $\emptyset$	xxa $\longrightarrow$ A
bab $\longrightarrow$ $\emptyset$	xxb $\longrightarrow$ $\emptyset$
bax $\longrightarrow$ $\emptyset$	xxx $\longrightarrow$ A
bba $\longrightarrow$ $\emptyset$	
bbb $\longrightarrow$ $\emptyset$	
bbx $\longrightarrow$ $\emptyset$	

Eta, hortaz:

$$p_{a4} = e_A^3 + 3 \cdot e_A^2 \cdot e_{AB} + 3 \cdot e_A \cdot e_{AB}^2 + e_{AB}^3 = (e_A + e_{AB})^3$$

$$q_{A4} = 1 - (e_A + e_{AB})^3$$

$e_A + e_{AB} < 1$; eta beraz mintzatu ezina azkartu egiten da-
talde zabaletan.

Bide beretik:

$$\begin{aligned} p_{b4} &= (e_B + e_{AB})^3 \\ q_{b4} &= 1 - (e_B + e_{AB})^3 \\ d_4 (\rightarrow A) &= \frac{1 - (e_B + e_{AB})^3}{1 - (e_A + e_{AB})^3} \end{aligned}$$

Gure kasuan, adibidez:

$$p_{a4} = (0,5 + 0,35)^3 = 0,614$$

$$q_{a4} = 0,386 \text{ (\% 38,6)}$$

eta, B-elebakarrei buruz:

$$p_{b4} = (0,15 + 0,35)^3 = 0,125$$

$$q_{b4} = 0,875 \text{ (\% 87,5 ; zinez askotan)}$$

$$d_4 (\rightarrow A) = \frac{0,875}{0,386} = 2,267$$

Maizago jasaten dute B-elebakarrek mintzatu ezina, A-ele-
bakarrek baino.

2.531.- Elebidunek ere desorekaturik daukate beren erabilpena.

$$x.aaa \rightarrow A$$

$$aab \rightarrow \emptyset$$

$$aax \rightarrow A$$

$$aba \rightarrow \emptyset$$

$$abb \rightarrow \emptyset$$

$$abx \rightarrow \emptyset$$

$$axa \rightarrow A$$

$$axb \rightarrow \emptyset$$

$$x.bxa \rightarrow \emptyset$$

$$bxb \rightarrow B$$

$$bxx \rightarrow B$$

$$xaa \rightarrow A$$

$$xab \rightarrow \emptyset$$

$$xax \rightarrow A$$

$$xba \rightarrow \emptyset$$

$$xbb \rightarrow B$$

$axx \longrightarrow A$	$xbx \longrightarrow B$
$baa \longrightarrow \emptyset$	$xxa \longrightarrow A$
$bab \longrightarrow \emptyset$	$xxb \longrightarrow B$
$bax \longrightarrow \emptyset$	$xxx \longrightarrow X$
$bba \longrightarrow \emptyset$	
$bbb \longrightarrow B$	
$bbx \longrightarrow B$	

Beraz:

$$p_{X4,A} = e_A^3 + 3 \cdot e_A^2 \cdot e_{AB} + 3 \cdot e_A \cdot e_{AB}^2 = p_{A3}$$

$$p_{X4,B} = p_{B3}$$

Eta, desoreka, beraz:

$$d_{X4} (\longrightarrow A) = \frac{p_{A3}}{p_{B3}}$$

Eta, gure adibidean:

$$d_{X4} (\longrightarrow A) = \frac{0,5712}{0,0821} = 6,96$$

Ia-ia zazpi aldiz maizago mintzatuko dira elebidunek A hizkuntzaz, B hizkuntzaz baino. Berriro ere, desoreka nabarmen kiago agertzen da talde zabaletan, talde txikietan baino: bai mintzatu-ezinen aldetik (d); bai elebidunen desorekarenetik (d_X).

2.6.- EGOERA BEREZI BATZU

B hizkuntza apala noraino dagoen zapalduta, nekez soma daiteke ezagueren taulen aurrean.

2.61.- Eman dezagun egoera " on " hau:

$$e_A = 0,40 \text{ (\% 40 "erdaldun huts")}$$

$$e_B = 0,05 \text{ (\% 5 "euskaldun huts")}$$

$$e_{AB} = 0,55 \text{ (\% 55 " euskaldun elebidun")}.$$

Gehienagoa "euskalduna", beraz:

$$e_B + e_{AB} = 0,60 \text{ (= \% 60)}.$$

Azter dezagun egoera erabilpenaren maila.

Erabilpena eta tentsioak

2.611.- Bikoteetan:

$$p_{A2} = 0,4^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,55 = 0,6000$$

$$p_{B2} = 0,05^2 + 2 \cdot 0,05 \cdot 0,55 = 0,0575$$

$$p_{X2} = 0,55^2 = 0,3025$$

$$p_{\emptyset 2} = 2 \cdot 0,4 \cdot 0,05 = 0,0400$$

Ia-ia tentsiorik ez dago eskualde honetan:

$$p_{\emptyset 2} = \% 4,00$$

(\% 96-tan mintzatu-ezinik gertatzen ez delako).

"Problema"rik ez, hitz batez....

Baina erabilpenak erabat desorekatu daude.

Elebidunak ahal duten guztietan B-z mintzo badira ere:

$$e_B = 0,0575 - 0,3025 = 0,36$$

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{0,60}{0,36} = 1,667$$

eta axolakabeak baldin badira:

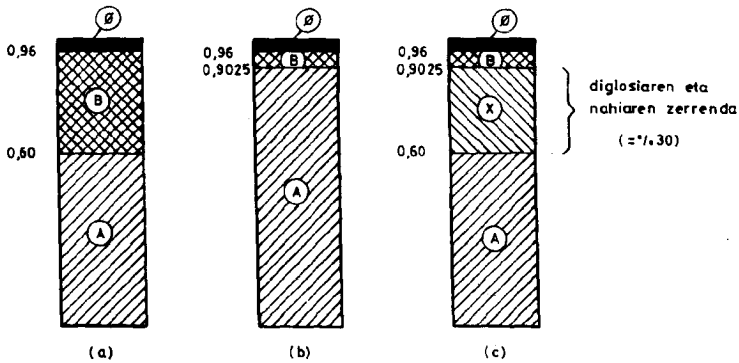
$$e_A = 0,60 + 0,3025 = 0,9025$$

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{0,9025}{0,0575} = 15,7$$

Elebidunen jokabideak hein batez alda dezake proportzioa:

$$1,667 < \frac{p_A}{p_B} < 15,7$$

baina A-ren gailentasura inolez ere gairiditu gabe.



Egoera funtseen (% 70) aldakaitz dago.

Ezkerreko zutabean, elebidunek gogor jokatzen dute euskararen alde; erdikoan, axolakabaki; eta eskuineko zutabean X zerrenda ageri da; bortxatu gabe elebidunen eskuetan dagoena. Ageri denez, tentsiorik ez dago ia-ia multzo horretan. Baina erdara nagusi da erabat.

Hots, talde zabalagoetan aurkituko dugunez, desoreka handia dago: dirudien baino handiagoa.

2.612.- Hirukoteetan

$$\begin{aligned}
 p_{A3} &= 0,4^3 &= 0,064 \\
 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,55 &= 0,264 \\
 3 \cdot 0,4 \cdot 0,55^2 &= 0,363 \\
 &\hline
 &0,691
 \end{aligned}$$

$$p_{B3} = 0,05^3 = 0,000125$$

$$3 \cdot 0,05^2 \cdot 0,55 = 0,004125$$

$$3 \cdot 0,05 \cdot 0,55^2 = 0,045375$$

$$0,049625$$

$$p_{X3} = 0,55^3 = 0,166375$$

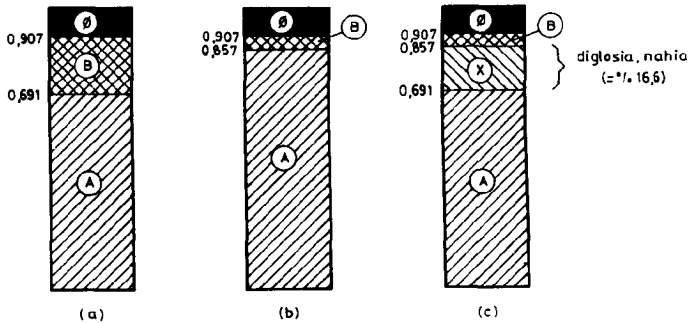
$$p_{\emptyset 3} = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,05 = 0,024$$

$$3 \cdot 0,4 \cdot 0,05^2 = 0,003$$

$$6 \cdot 0,4 \cdot 0,05 \cdot 0,55 = 0,066$$

$$0,093$$

Beraz:



Erabilpenen desoreka nabarmenago agertzen da.

Elebidunen eragina txikitu egin da; eta diglosiak eta militantismoak ezer gutxi alda dezakete.

Tentsioak ez daude orekaturik:

$$q_{A3} = 1 - (0,40 + 0,55)^2 = 0,0975$$

$$c_{b3} = 1 - (0,05 + 0,55)^2 = 0,6400 \text{ (\% 64-tan ezin mintza)}$$

B-elebakerrak askoz maizago gertatzen dira mintzatu ezi -
nean:

$$d_3 (\rightarrow A) = \frac{0,6400}{0,0975} = 6,564$$

Ia zazpi aldiz maizago, A elebakerrak baino.

Erdara ikasi beharra garbi dago...

Eta elebidunek oso desorekaturik darabiltzate bi hizkun -
tzak:

$$d_{X3} (\rightarrow A) = \frac{0,6000}{0,0575} = 17,39 \text{ (!)}$$

2.613.- Laukoteetan

$$\begin{array}{rcl} p_{A4} = 0,4^4 & = & 0,0256 \\ 4 \cdot 0,4^3 \cdot 0,55 & = & 0,1408 \\ 6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,55^2 & = & 0,2904 \\ 4 \cdot 0,4 \cdot 0,55^3 & = & 0,2662 \\ & & \underline{0,7230} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p_{B4} = 0,05^4 & = & 0,00000625 \\ 4 \cdot 0,05^3 \cdot 0,55 & = & 0,000275 \\ 6 \cdot 0,05^2 \cdot 0,55^2 & = & 0,0045375 \\ 4 \cdot 0,05 \cdot 0,55^3 & = & 0,033275 \\ & & \underline{0,0380937} \end{array}$$

$$p_{X4} = 0,55^4 = \underline{0,091506}$$

$$\begin{aligned}
 p_{\emptyset 4} &= 4 \cdot 0,4 \cdot 0,05 \cdot (0,4^2 + 0,05^2) = 0,013 \\
 &6 \cdot 0,4^2 \cdot 0,05^2 = 0,0024 \\
 &12 \cdot 0,4 \cdot 0,05 \cdot 0,55 = 0,132 \\
 &\underline{\underline{0,1474}}
 \end{aligned}$$

Eta beraz:

		erabilpena			
	ezag.	②	③	④	
A	0,40	0,6000	0,6910	0,7230	A
B	0,05	0,0575	0,0496	0,0381	B
AB	0,55	0,3025	0,1663	0,0915	X
		0,0400	0,0930	0,1474	∅

Leukoteetan are aldakaitzago dago erabilpena ($p_{X4} = \%9,15$) eta diglosiak eta nahiak indar txikia erakusten dute.

Funtsezko desoreka elebakarrengandik dator; eta oso eragin txikia dute elebidunek. Gero eta txikiagoa taldeak zabal-tzean:

$$0,3025 > 0,1663 > 0,0915$$

B-hizkuntza, era berean, gero eta erabili-ezinago agertzen da:

$$0,0575 > 0,0496 > 0,0381$$

Eta mintzatu-ezina azkartu egiten da:

$$0,0400 < 0,0930 < 0,1474$$

Azter ditzagun tentsioak:

$$q_{a4} = 1 - (0,40 + 0,55)^3 = 0,1426$$

$$q_{b4} = 1 - (0,05 + 0,55)^3 = 0,7840 \quad (\% 78,4\text{-tan ezin})$$

$$d_y (\rightarrow A) = \frac{0,7840}{0,1426} = 5,498$$

Mintzatu ezina, beti ere, azkarrago zaie B-elebakarrei, A-elebakarrei baino; maila jasangaitzak iritsiz (% 78).

Elebidunen desoreka ere, oso nabarmen dago, eta A-ren alde:

$$d_{X4} (\rightarrow A) = \frac{0,6910}{0,0496} = 13,93 \quad (!)$$

B-elebakarrek oso gutxitan erabil dezakete beren hizkuntza ($p_{B4} = \% 3,81$); eta elebidunek ere oso bakanka (14 al - diz gutxiagotan A baino) . B-hizkuntza herdoildu egiten da ezinbestean.

	②	③	④
$d (\rightarrow A)$	8	6,564	5,498
$d_X (\rightarrow A)$	8	17,39	13,93

Azken oharra: funtsezko egoera, elebidunen jokabideetatik at, aldakaitza da; eta aldakaiztasun hori ($1 - p_X$), gogorra go agertzen da talde handietan:

	②	③	④
$1 - p_X$	0,6975	0,8337	0,9085

Erabilpena elebakarrek inposatzen dute funtsean.

Hots, diglosiak (kodaren hautaketa) eta militantismoak (ahalean, beti hizkuntza bera hautatzea, bestea, ahalean ere, ez erabiliz) elebidunei dagozkie.

Elebidun gutxi dagoen gizarteetan, beraz (are elebidun - asko dagoenetan ere, arestiko adibidean ageri denez), diglo - siak eta militantismoak eragin txikia dute. Diglosiaren ideiak berak, hitz batez, ez du baliorik kasorik gehienetan.

(p_X) handia izatea da beharrezkoa, hitz batez, diglosiaren ideiak bere funtsa izan dezan. Bestela, eta erabilpenaren mailan, egoera disimulatzeko tresna bihur daiteke; " elebitasun orekatua " bihurtu den bezala.

2.7.- ERABILPEN DESOREKATUAREN MUGAK

2.71.- Bikoteetan

Noiz esan daiteke A hizkuntza ziur nagusi dela? Erantzuna erraza da:

$$p_{A2} > 0,5$$

Alegia: $p_{A2} > 0,5$ baldin bada.

$$p_{A2} = p_{A2} + p_{X2} > 0,5$$

(nahiz elebidunak oso axolakabeak izan A-ren erabilpenaren al detik).

Hortaz, baldintza hau da:

$$e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} > 0,5$$

Muga, beraz, hau da:

$$e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} - 0,5 = 0$$

$$e_A = -e_{AB} \pm \sqrt{e_{AB}^2 + 0,5}$$

Balio negatiboak ez du balio. Hortaz:

$$e_A = -e_{AB} + \sqrt{e_{AB}^2 + 0,5}$$

Jakina:

$$e_A + e_B + e_{AB} = 1$$

eta:

$$e_B = 1 - e_A - e_{AB}$$

$\sqrt{e_{AB}^2 + 0,5} = R$ deitzen badugu, mugaren kurba hauxe da:

$$e_A = -e_{AB} + R$$

$$e_B = 1 - R$$

e_{AB}	R	e_A	e_B
0,00	0,707	0,707	0,293
0,10	0,714	0,614	0,286
0,20	0,7384	0,5384	0,2616
0,30	0,7681	0,4681	0,2319
0,40	0,8124	0,4124	0,1876
0,50	0,8660	0,3660	0,1340
0,60	0,9274	0,3274	0,0726
0,70	0,9950	0,2950	0,0050
0,707	1,0000	0,293	0,0000

Kurbatik gorako egoeretan, A-hizkuntza nagusi dago biko - teetan.

Edo, beste honetara:

$$e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} - 0,5 = 0$$

$$e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} + e_{AB}^2 - e_{AB}^2 - 0,5 = 0$$

$$(e_A + e_{AB})^2 - e_{AB}^2 - 0,5 = 0$$

$$(1 - e_B)^2 - e_{AB}^2 - 0,5 = 0$$

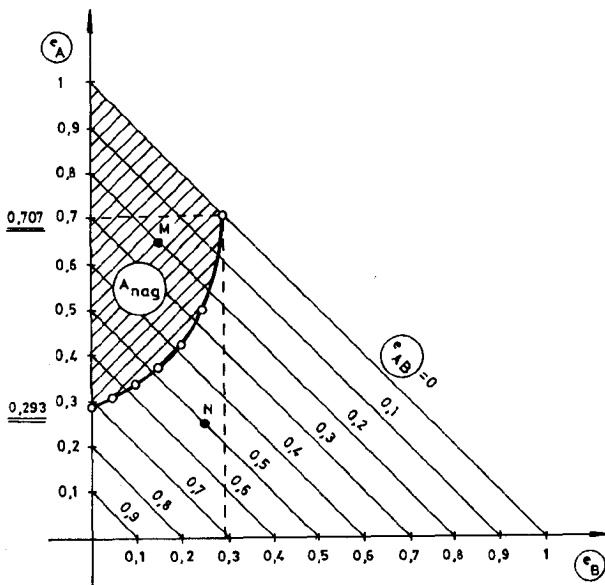
$$e_{AB} = \sqrt{(1 - e_B)^2 - 0,5}$$

Eta, hortaz, $(1 - e_B)^2 \geq 0,5$

$$e_B \leq 0,293$$

Eta, beraz, muga-kurba:

e_B	$1 - e_B$	$(1 - e_B)^2$	e_{AB}	e_A
0,05	0,95	0,9025	0,6344	0,3156
0,10	0,90	0,8100	0,5568	0,3432
0,15	0,85	0,7225	0,4717	0,3783
0,20	0,80	0,6400	0,3742	0,4258
0,25	0,75	0,5625	0,2500	0,5000
0,293	0,707	0,5000	0,0000	0,7071
0,00	1,000	1,0000	0,7071	0,2929



Eman dezagun M egoera:

$$e_A = 0,65 \quad ; \quad e_B = 0,15 \quad ; \quad e_{AB} = 0,20$$

Egoera horretan A da nagusi:

$$p_{A2} = 0,65^2 + 2 \cdot 0,65 \cdot 0,20 = 0,6825 > 0,5$$

Baina N egoeran hau dugu:

$$e_A = 0,25 \quad ; \quad e_B = 0,25 \quad ; \quad e_{AB} = 0,5$$

$$p_{A2} = 0,25^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,3125 < 0,5$$

Kurbatik gorako egoeretan, beraz, A nagusi izango da beti. Eta, partikulazki, multzo batetan A elebakarrak % 29,3 baino gehiago baldin badira, A nagusiturik dago.

Euskal Herriko herririk eta eskualderik gehienetan $e_A > \% 29,3$ izanik, normala da erdara gehiago entzutea, euskara baino.

Hots, ikusiko dugunez, muga apalago agertzen da hirukoteetan eta laukoteetan.

2.72.- Hirukoteetan

Muga-egoera hau da orain:

$$e_A^3 + 3 \cdot e_A^2 \cdot e_{AB} + 3 \cdot e_A \cdot e_{AB}^2 - 0,5 = 0$$

$$(e_A + e_{AB})^3 - e_{AB}^3 - 0,5 = 0$$

$$(1 - e_B)^3 - e_{AB}^3 - 0,5 = 0$$

$$e_{AB} = \sqrt[3]{(1 - e_B)^3 - 0,5}$$

Eta, noski: $e_A = 1 - e_{AB} - e_B$

Hirukoteetan

e_B	$(1 - e_B)$	$(1 - e_B)^3$	e_{AB}	e_A
0,05	0,95	0,8574	0,7097	0,2403
0,10	0,90	0,7290	0,6118	0,2882
0,15	0,85	0,6141	0,4851	0,3649
0,20	0,80	0,5120	0,2290	0,5710
0,2063	0,7937	0,5000	0,0000	0,7937
0,0000	1	1	0,7937	0,2063

$$1 - e_B = \sqrt[3]{0,5} = 0,7937$$

$$e_B = 0,2063$$

Aski da multzo batetan $e_A = \% 20,63$ izatea, A nagusi izan dadin.

Ikus daitekeenez:

$$0,2063 < 0,2929$$

Berririo ere hirukoteetan nabarmenago ageri da desoreka, bikoteetan baino.

2.73.- Laukoteetan

Puntu kritikoa hau da:

$$e_{AB} = \sqrt[4]{(1 - e_B)^4 - 0,5}$$

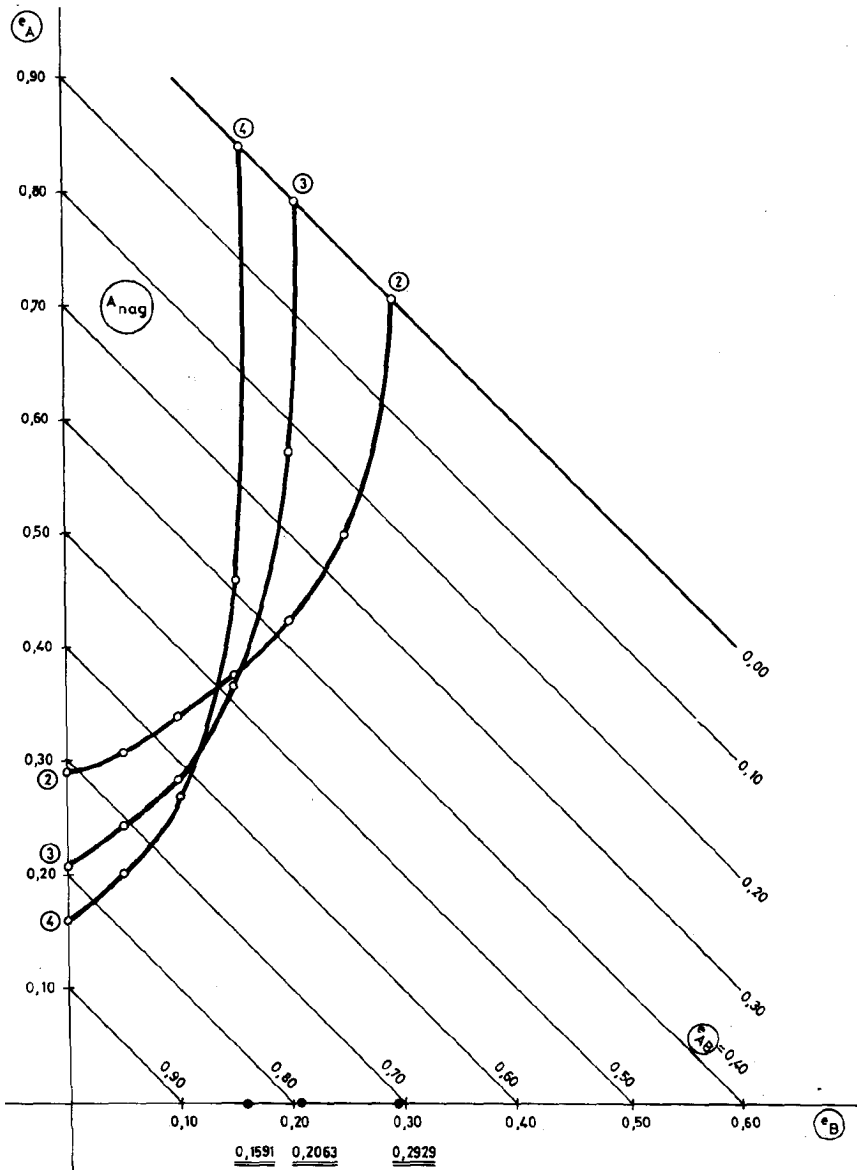
e_B	$(1 - e_B)$	$(1 - e_B)^4$	e_{AB}	e_A
0,00	1,0000	1,0000	0,8409	0,1591
0,05	0,95	0,8145	0,7489	0,2011
0,10	0,90	0,6561	0,6286	0,2714
0,15	0,85	0,5220	0,3851	0,4649
0,1591	0,8409	0,5000	0,0000	0,8409

$$(1 - e_B)^4 > 0,5$$

$$1 - e_B > 0,8409$$

$$e_B < 0,1591$$

Eta kurba hau are erpinago da, ondoko grafikoan ikus daitekeenez.



Kurban gainetik dauden puntuetan (= hizkuntz eza guera e-goeretan), A-hizkuntzaren erabilpena nagusi da.

Aski dira, hortaz:

$$\underline{e_A} = 0,2929 \quad (\text{bikoteetan})$$

$$\underline{e_A} = 0,2063 \quad (\text{hirukoteetan})$$

$$\underline{e_A} = 0,1591 \quad (\text{laukoteetan})$$

A hizkuntza nagusi agertzeko.

2.8.- B-ELEBAKARREN SUNTSIERA

Eman dezagun $e_B = 0$ (alegia, ez dago inor multzo horretan A erabiltzeko gai ez denik).

Formulek erraztu egiten dira.

2.81.- Bikoteak

$$p_{A2} = e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} = 1 - e_{AB}^2$$

$$p_{B2} = 0$$

$$p_{X2} = e_{AB}^2$$

$$p_{\emptyset 2} = 0$$

Beraz:

a) B-hizkuntza ez da inoiz beharrezkoa.

b) Tentsioak amaitu dira. Hizkuntz egoera "baketsua" da.

Hots, desoreka guztizkoa da.

2.811.- Egoera kritikoa aurrenik:

$$e_{AB} = \sqrt{(1 - 0)^2 - 0,5} = \sqrt{0,5} = 0,7071$$

eta $e_A = 0,2929$.

B-elebakarrak suntsitu direnean, aski da A-elebakarren ko purua % 29,29 izatea, A seguru nagusi izan dadin.

Gaurko Euskal Herrian, beraz, B-elebakarrak ahitu direnez normala da, are bikoteen mailan ere, erdara gehiagotan erabiltzea.

Bestela esanda, euskaldun elebidunen kopurua % 70,71 baino txikiagoa izanez gero, erdara ezinbestean nagusi.

2.812.- Euskaltzaletasuna neurtzeko bidea badugu, dena dela.

Goiko muga $p_{X2} = e_{AB}^2$ denez gero, inkesta-baten bidez p' aurkituz gero, B-ren aldeko nahia neur daiteke:

$$n = \frac{p'_B}{p_{X2}}$$

Adibidez, egoera hau baldin bada:

$$e_A = \% 40$$

$$e_{AB} = \% 60$$

$$p_{A2} = 0,4^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,64$$

$$p_{X2} = 0,6^2 = 0,36$$

eta inkesta batek hau ematen badu:

$$p'_B = 0,25$$

nahia hau da:

$$n = \frac{0,25}{0,36} = 0,694 \text{ (\% 69,4)} .$$

2.82.- Hirukoteak

Bide beretik:

$$p_{A3} = 1 - e_{AB}^3$$

$$p_{B3} = 0$$

$$p_{X3} = e_{AB}^3$$

$$p_{\emptyset 3} = 0$$

Tentsioak desagertu dira, eta B ez da inoiz beharrezkoa:

$$p_{A3} = 1 - 0,6^3 = 0,784$$

$$p_{X3} = 0,216$$

2.83.- Laukoteak

$$p_{A4} = 1 - e_{AB}^4$$

$$p_{B4} = 0$$

$$p_{X4} = e_{AB}^4$$

$$p_{\emptyset 4} = 0$$

Gure adibidean:

$$p_{A4} = 1 - 0,6^4 = 0,8704$$

$$p_{X4} = 0,6^4 = 0,1296$$

Harrigarria da: gehiengoa euskalduna izanik ere (baina elebiduna), erabilpenaren mailan erdara da nagusi, eta urrun dik:

$$p_{A2} = 0,6400$$

$$p_{A3} = 0,7840$$

$$p_{A4} = 0,8704$$

batez ere talde handietan.

2.84.- Elebkarren suntsitzearen ondorioak

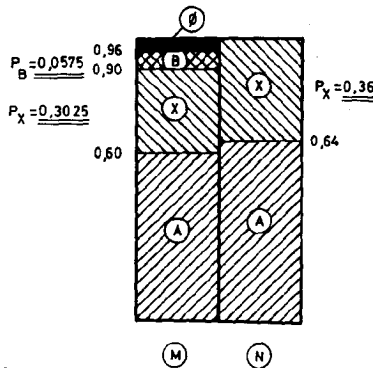
Aski dugu orrialde hauetan aztertu ditugun bi egoerak alderatzea:

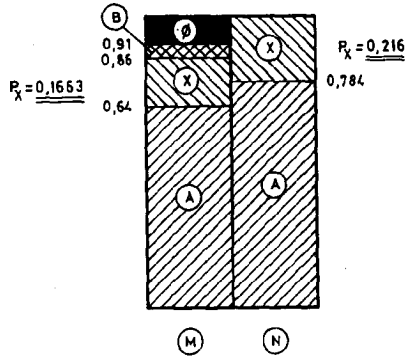
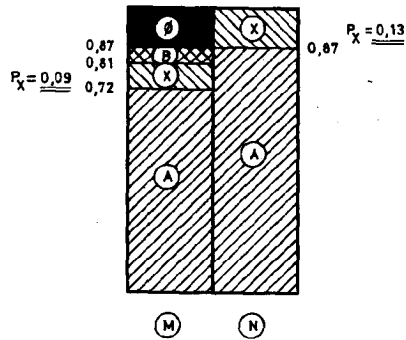
(M) $e_A = 0,40$ $e_B = 0,05$ $e_{AB} = 0,55$	(N) $e_A = 0,40$ $e_{AB} = 0,60$ $[e_B = 0]$
---	--

Biotan dugu "euskaldun" gehiago: lehenengo kasuan B-eleba kar batzu daude, bigarrenean ez. Baina erdaldun hutsak gutxiengo dira ($e_A = \% 40$).

Halaz ere:

Bikoteak:



Hirukoteak:Laukoteak:

Desberdintasunak nabarmen daude. B-elebakarrak suntsi-tzean:

- 1) Tentsioak desagertu egiten dira
- 2) B ez da inoiz beharrezkoa
- 3) A-ren erabilpena zabaldu egiten da

Batean eta bestean, dena dela, elebidunen jokabideak ga-rrantzi txikia du. Elebakarrek agintzen dute.

2.841.- Elebidunen erabilpena ez da inondik orekatua.

$$d_{X3} (\rightarrow A) = \frac{0,64}{0,36} = 1,78$$

$$d_{X4} (\rightarrow A) = \frac{0,784}{0,216} = 3,63$$

eta nahiz elebidunak kasu honetan gehiengoak izan, askoz maizago gertatzen zaie A erabili beharra.

Elebidunek beren artean B erabiltzeko joera azkarra ez ba dute, zifra horiek handitu egiten dira.

2.9.- ELEBITASUN-MAILA TXIKIKO MULTZOEN EGIAZKO EGOERA

Eman dezagun egoera hau:

$$e_A = 0,75$$

$$e_{AB} = 0,25$$

(alegia, Euskal Herriko herri askotan aurki daitekeena).

Erabilpenak hauek dira:

2.91.- Bikoteetan:

$$p_{A2} = 1 - 0,25^2 = 0,9375$$

$$p_{X2} = 0,25^2 = 0,0625$$

% 93,75 erdaraz, gutxienez.

2.92.- Hirukoteetan:

$$p_{A3} = 1 - 0,25^3 = 0,984375$$

$$p_{X3} = 0,25^3 = 0,015625$$

% 98,44 erdaraz, gutxienez.

2.93.- Laukoteetan:

$$p_{A4} = 1 - 0,25^4 = 0,9961$$

$$p_{X4} = 0,25^4 = 0,0039$$

% 99,61 erdaraz, gutxienez.

Edo, nahiago baldin bada, euskaraz eta gehienez ondoko hauek:

$$\underline{\% 6,25} \quad (2) ; \quad \underline{\% 1,56} \quad (3) ; \quad \underline{\% 0,39} \quad (4)$$

Euskaldun (elebidunak) laurdena ere diren herrietan, euskara ez da ia-ia erabiltzen.

Askoz ere gehiago erabiltzen da erdara:

$$93,75 / 6,25 = \underline{15,0} \text{ aldiz maizago}$$

$$98,44 / 1,56 = \underline{63,1} \text{ aldiz maizago}$$

$$99,61 / 0,39 = \underline{255,4} \text{ aldiz maizago}$$

Zertarako balio du B-hizkuntzak egoera horretan?. Hauxe da jendeak pentsatzen duena; eta hizkuntza ordainketa gertu da go.

Zer esango, hortaz, $e_A = 0,90$; $e_A = 0,95$; eta abar, ezagu tzen duten eskualdeei buruz? Euskara ez dela zinez ia sekula -

entzuten; eta ez dela harritzekoa. Aski du irakurleak berak kalkulak egin.

2.95.- Eman dezagun $p_A = 0,999$ hartzen dugula erabilnen arbuia garriaren mugatzat. Alegia, A % 99,9 gutxienez hitz efiten den multzoetan, B " hildakotzat " jo daiteke.

Zeri dagokio erabilnen arbuia garri muga hori?

2.951.- Bikoteetan:

$$e_A^2 + 2 \cdot e_A \cdot e_{AB} = 0,999$$

$$\text{Beraz: } (e_A + e_{AB})^2 - e_{AB} = 0,999$$

$$(1 - e_B)^2 - e_{AB}^2 = 0,999$$

$$e_{AB} = \sqrt{(1 - e_B)^2 - 0,999}$$

$$\text{Hortaz: } 1 - e_B \geq \sqrt{0,999} = 0,99949$$

$$e_B \leq 1 - 0,99949 = 0,00051$$

Eman dezagun $e_B = 0$ (B-elebakarrak suntsitu)

$$\begin{cases} e_{AB} = \sqrt{0,001} = 0,0316 \\ e_A = 0,9684 \end{cases}$$

Hots, egoera hau, pentsa zitekeen baino hurbilago dugu Euskal Herriko puntu askotan:

$$e_A = \% 96,84 \quad (\text{erdaldun huts})$$

$$e_{AB} = \% 3,16 \quad (\text{euskaldun elebidun}).$$

Aski da zentsua hartu eta begiratzea, leku askotan euskararen erabilpena maila " arbuia garri " horretan dagoela ikusteko.

2.952.- Hirukoteetan

$$e_{AB} = \sqrt[3]{(1 - e_B)^3} = 0,999$$

Eta elebidunak suntsitzean:

$$\begin{cases} e_{AB} = \sqrt[3]{0,001} = 0,1 \\ e_A = 0,9 \end{cases}$$

Egoera hau maiz dugu, hortaz:

$$\begin{cases} e_A = \% 90,0 \\ e_{AB} = \% 10,0 \end{cases}$$

Hirukoteetan berehala desagertzen da B-hizkuntzaren era - bilpena.

2.953.- Laukoteetan

Areago laukoteetan, jakina:

$$e_{AB} = \sqrt[4]{(1 - e_B)^4} = 0,999$$

Eta $e_B = 0$ baldin bada:

$$\begin{cases} e_{AB} = \sqrt[4]{0,001} = 0,1778 \\ e_A = 0,8222 \end{cases}$$

Laukoteen mailan, beraz, hauxe da erabilpen arbuia garrien muga:

$$\begin{cases} e_A = \% 82,22 \\ e_{AB} = \% 17,78 \end{cases}$$

$\% 17,78$ euskaldun elebidun dagoen herrietan, euskara ez - da entzutun (= ezin entzun daiteke) bikoteetan-edo, bakanka, ez bada. Egoera askoz larriagoa da, ezaguera-datuek idaroki - tzen dutena baino.

Gure herri asko eta askotan, gehienetan, euskara ez da erabiltzen. Hobeki esan: ezin erabil daiteke.

Zeren-eta B-hizkuntza erabiltzeko aukerak hauek baitira:

$$p_{X2} = 0,0316^2 = 0,0009986 = \% 0,09986 \sim \% 0,1$$

$$p_{X3} = 0,1^3 = 0,001 = \% 0,1$$

$$p_{X4} = 0,1778^4 = \% 0,1$$

Egoera horietan, beraz, nahi osoa izanik ere $p_B < \% 0,1$:

$$e_{AB} = \% \underline{3,16} \ ; \ \% \underline{10,0} \ \text{eta} \ \% \underline{17,78} \ (!)$$

Iruzkinak egitea lan alferra litzateke. Hor daude zifrak, hor dago Euskal Herriaren hizkuntz ezaguera maila (zentsua be giratzea aski); eta irakurleak atera ditzake ondorioak. Erdal dun hutsen kopurua altoa denean, jokia eginga da: euskara ezin=erabil.

Erdaldun hutsen kopurua, aldiz, horren gora ez denean, aukera badute euskaldun elebidunek erabilpenaren itxura franko aldatzeko.

3. MULTZOEN BARNeko EGITURAZ

3.1.- Eman dezagun M multzoa; beti bezala ezaguerak mailak e_A , e_B eta e_{AB} direlarik.

Gerta daiteke multzo hori orokorki bat izatea: alegia, elementuen arteko harremanak berdinak izatea multzo guztian barrera. Herri txiki batetan, eman dezagun: denak denekin bizi.

Nolabait esateko, zatikaturik egotea ere gerta daiteke: herri bateko auzo urrunetako jendea, eman dezagun, auzotik at gutxitan irteten direnean. Kasu honetan auzo adina azpi-multzo ditugu, zein bere alde eta bere buruz ibilki.

Zer esan erabilpenari buruz?

Eman ditzagun K azpi-multzo: $M_1, M_2, M_3, \dots, M_K$.

Azpi-multzo bakoitzean ezaguerak hauek dira: $e_{A(1)},$

$e_{A(2)} \dots e_{A(K)}; e_{B(1)}, e_{B(2)} \dots e_{B(K)}; e_{AB(1)}, e_{AB(2)} \dots e_{AB(K)}.$

Azpi-multzo bakoitzeko jendeketak hauek dira: $N_1, N_2, \dots, N_K$; denen batuketa N delarik.

Azpi-multzo bakoitzaren pisua hau da:

$$\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \frac{N_3}{N} \dots \frac{N_K}{N}$$

Ezagueren mailan, hortaz:

$$e_A = \frac{N_1}{N} \cdot e_{A(1)} + \frac{N_2}{N} \cdot e_{A(2)} + \dots + \frac{N_K}{N} \cdot e_{A(K)}$$

$$e_B = \frac{N_1}{N} \cdot e_{B(1)} + \frac{N_2}{N} \cdot e_{B(2)} + \dots + \frac{N_K}{N} \cdot e_{B(K)}$$

$$e_{AB} = \frac{N_1}{N} \cdot e_{AB(1)} + \frac{N_2}{N} \cdot e_{AB(2)} + \dots + \frac{N_K}{N} \cdot e_{AB(K)}$$

Eta formula antzekoak erabilpenaz:

$$p_A = \frac{N_1}{N} \cdot p_{A(1)} + \frac{N_2}{N} \cdot p_{A(2)} + \dots + \frac{N_K}{N} \cdot p_{A(K)}$$

eta abar.

Hots, $N_1 e_{A(1)}$ zer da?. Lehenengo azpi-multzoan A dakite nen kopurua; $N_2 e_{A(2)}$, bigarren multzoan A dakiteen kopurua; etab. Hor linealtasuna dago; baina p erabilpenetan ez.

Hitz batez, azpi-multzoen artean harremanak izatea edo ez izatea ezagueraren aldetik berdin bada ere, erabilpenaren alde tik ez da gauza bera: multzoa bat izateak, ala azpi-multzotan zatiturik egoteak, ondorio garrantzitsuak ditu erabilpenaren aldetik.

Argi dezagun hau adibide baten bidez.

3.11.- Eman dezagun eskualde hau:

$$N = 450 \text{ biztanle}$$

$$N_A = 100 \text{ erdaldun huts}$$

$$N_B = 30 \text{ euskaldun huts}$$

$$N_{AB} = 320 \text{ euskaldun elebidun.}$$

Zifra horiekin, multzo infinitoen azterketa erabiliko du-gu.

3.111.- Eman dezagun aurrenik eskualde hori oso batua dela: de nak denekin bizi dira, eta ez dago barne-zatiketarik. Azter de zagun egoera.

Ezaguera-mailak hauek dira:

$$e_A = 100 / 450 = 0,222 \quad (\% 22,2)$$

$$e_B = 30 / 450 = 0,067 \quad (\% \ 6,7)$$

$$e_{AB} = 320 / 450 = 0,711 \quad (\% \ 71,1)$$

$$1,000$$

Oso herri "euskaldun" bat, hitz batez.

Erabilpenak hauek dira (bikoteetan).

$$p_{A2} = 0,222^2 + 2 \cdot 0,222 \cdot 0,711 = 0,3650$$

$$p_{B2} = 0,067^2 + 2 \cdot 0,067 \cdot 0,711 = 0,0998$$

$$p_{X2} = 0,711^2 = 0,5055$$

$$p_{\phi 2} = 2 \cdot 0,222 \cdot 0,067 = 0,0297$$

$$1,0000$$

Eta gauza bera egin genezake hirukoteei eta laukoteei buruz.

3.112.- Eman dezagun orain eskualde hori zatiturik bizi dela; hiru auzotan, eman dezagun, eskema honen arauera. Hiru azpi-multzo autonomo ditugula: X_1 , X_2 eta X_3 .

	X_1	X_2	X_3	
N_A	80	15	5	100
N_B	0	5	25	30
N_{AB}	200	45	75	320
	280	65	105	

Auzorik handiena X_1 da (= 280 biztanle), eta txikiena, X_2 (= 65 biztanle). Auzorik erdaldunena X_1 da; eta X_3 euskaldunena.

Ezagueren taula egiten badugu:

	X_1	X_2	X_3
e_A	0,2857	0,2308	0,0476
e_B	0	0,0769	0,2381
e_{AB}	0,7143	0,6923	0,7143

Auzo bakoitzaren nisua multzo osoari buruz hau da:

$$m_1 = 280 / 450 = 0,6222$$

$$m_2 = 65 / 450 = 0,1444$$

$$m_3 = 105 / 450 = 0,2333$$

$$0,9999$$

Ezaguera orokorrak, hortaz:

$$e_A = 0,6222 \cdot 0,2857 + 0,1444 \cdot 0,2308 + 0,2333 \cdot 0,0476 = 0,2222$$

$$e_B = 0,6222 \cdot 0 + 0,1444 \cdot 0,0769 + 0,2333 \cdot 0,2381 = 0,0665$$

$$e_{AB} = 0,6222 \cdot 0,7143 + 0,1444 \cdot 0,6923 + 0,2333 \cdot 0,7143 = 0,7110$$

Beraz, espero zitekeenez, lehengo berak.

Multzoa batua ala zatitua izan, ondoriorik ez ezagueraren aldetik.

3.1121.- Baina besterik da erabilpenen aldetik:

X_1

$$p_{A2}(1) = 0,2857^2 + 2 \cdot 0,2857 \cdot 0,7143 = 0,4898$$

$$p_{B2}(1) = 0 = 0$$

$$p_{X2}(1) = 0,7143^2 = 0,5102$$

$$p_{\emptyset 2}(1) = 0 = 0$$

X_2

$$p_{A2}(2) = 0,2308^2 + 2 \cdot 0,2308 \cdot 0,6923 = 0,3728$$

$$p_{B2}(2) = 0,0769^2 + 2 \cdot 0,0769 \cdot 0,6923 = 0,1124$$

$$p_{X2}(2) = 0,6923^2 = 0,4793$$

$$p_{\emptyset 2}(2) = 2 \cdot 0,2308 \cdot 0,0769 = 0,0355$$

 X_3

$$p_{A2}(3) = 0,0476^2 + 2 \cdot 0,0476 \cdot 0,7143 = 0,0703$$

$$p_{B2}(3) = 0,2381^2 + 2 \cdot 0,2381 \cdot 0,7143 = 0,3968$$

$$p_{X2}(3) = 0,7143^2 = 0,5102$$

$$p_{\emptyset 2}(3) = 2 \cdot 0,0476 \cdot 0,2381 = 0,0227$$

Eta erabilpen hauen pisuak kontutan hartzen baditugu:

$$p_{A2} = 0,6222 \cdot 0,4898 + 0,1444 \cdot 0,3728 + 0,2333 \cdot 0,0703 = 0,3750$$

$$p_{B2} = 0,6222 \cdot 0 + 0,1444 \cdot 0,1124 + 0,2333 \cdot 0,3968 = 0,1088$$

$$p_{X2} = 0,6222 \cdot 0,5102 + 0,1444 \cdot 0,4793 + 0,2333 \cdot 0,5102 = 0,5057$$

$$p_{\emptyset 2} = 0,6222 \cdot 0 + 0,1444 \cdot 0,0355 + 0,2333 \cdot 0,0227 = 0,0104$$

0,9999

Fresta dezagun taula orain:

	multzo batua	multzo zaticatua
A	0,3650	0,3750
B	0,0998	0,1088
X	0,5055	0,5057
$\emptyset$	0,0297	0,0104

Egoera aldatu egiten da. Adibide honetan desberdintasunak txikiak dira; baina beste kasutan garbikiago ikus daiteke alda

kuntza.

3.12.- Adibidez:

	X_1	X_2	
A	100	0	100
B	0	30	30
AB	320	0	320
	420	30	

Beraz: B-elebakerrak aparte biziko balira bezala.

X_1

$$e_A = 100 / 420 = 0,238$$

$$e_B = 0$$

$$e_{AB} = 320 / 420 = 0,762$$

X_2

$$e_B = 1$$

$$e_A = e_{AB} = 0$$

Erabilpenak hauek dira:

X_1

$$p_A = 0,238^2 + 2 \cdot 0,238 \cdot 0,762 = 0,4194$$

$$p_B = 0$$

$$p_X = 0,762^2 = 0,5806$$

$$p_{AB} = 0$$

X_2

$$p_A = 0$$

$$p_B = 1^2 = 1$$

$$p_X = 0$$

$$p_{AB} = 0$$

Eta pisuen arauera batuz:

$$p_A = \frac{420}{450} \cdot 0,4194 - 0 = 0,3914$$

$$p_B = 0 + \frac{30}{450} \cdot 1 = 0,0667$$

$$p_X = \frac{420}{450} \cdot 0,5806 = 0,5419$$

$$p_{AB} = 0 = 0$$

	batua	zatikatua
A	0,3650	0,3914
B	0,0998	0,0667
X	0,5055	0,5419
∅	0,0297	0

3.13.- Eta euskaldunak elkartuz gero (elebidunak eta euskaldun hutsak auzo berean).

	X_1	X_2	
A	100	0	100
B	0	30	30
AB	0	320	320
	100	350	

	X_1	X_2
A	1	0
B	0	0,0857
AB	0	0,9143

X_1

$$p_A = 1$$

$$p_B = 0$$

$$p_X = 0$$

$$p_\emptyset = 0$$

 X_2

$$p_A = 0$$

$$p_B = 0,0857^2 + 2 \cdot 0,0857 \cdot 0,9143 = 0,1641$$

$$p_X = 0,9143^2 = 0,8359$$

$$p_\emptyset = 0$$

Eta pisuak orekatuz:

$$p_A = \frac{100}{450} \cdot 1 + 0 = 0,2222$$

$$p_B = 0 + \frac{350}{450} \cdot 0,1641 = 0,1276$$

$$p_X = 0 + \frac{350}{450} \cdot 0,8359 = 0,6501$$

$$p_\emptyset = 0 + 0 = 0$$

Eta egoeraz alderatuz:

	batua	zaticatua
A	0,3650	0,2222
B	0,0998	0,1276
X	0,5055	0,6501
$\emptyset$	0,0297	0

Euskaldunak euskaldunekin eta erdaldunak erdaldunekin ibi
liz gero, A-ren erabilrena jaitzi eta B-ren erabilrena igo egi
ten dira. p_X ere emendatu egiten da; eta nahiak garrantzi han
diagoa hartzen du.

3.14.- Egoera honetan, bestalde, euskaldun elebidunak orain
euskaldun huts bihurtzen badira (alegia: erdaraz hitz egiteari
erabat uko egiten badiote) :

	X_1	X_2
A	100	0
B	0	350
AB	0	0

X_1 azpi-multzoan A-z hitz egingo da bakarrik, eta X_2 azpi
multzoan B-z bakarrik.

Fisuak kontutan hartuz:

$$p_A = \frac{100}{450} \cdot 1 + 0 = 0,2222$$

$$p_B = \frac{350}{450} \cdot 1 + 0 = 0,7777$$

$$p_X = p_\emptyset = 0$$

Eta, beraz:

	batua	zaticatua
A	0,3650	0,2222
B	0,0998	0,7777
X	0,5055	0
$\emptyset$	0,0297	0

Multzo berean, beraz, E-hizkuntza (euskara eman dezagun) erabat nagusiturik ikusten duñu zifra berberekin. Baina bi ghetto agertu dira: euskaldunak lauzo batean, erdaldunak bestean.

3.15.- Beste egoera hau ere gerta daiteke: nor**k** bere hizkuntza baizik hitz egiten ez duten horiek, elkaturik bizitzea. Ale -
gia:

	M
A	100
B	350
X	0

eta, beraz:

$$e_A = 0,222$$

$$e_B = 0,777$$

$$e_{AB} = 0$$

eta denak elkaturik.

Erabilpenak:

$$\left[\begin{array}{l} p_A = 0,222^2 = 0,0494 \\ p_B = 0,777^2 = 0,6048 \\ p_X = 0 \\ p_{\emptyset} = 2 \cdot 0,222 \cdot 0,777 = 0,3456 \end{array} \right.$$

Eta taula berean paratuz:

	batua	gogortua
A	0,3650	0,0494
B	0,0998	0,6048
X	0,5055	0
$\emptyset$	0,0297	0,3456

Hemen ere B-hizkuntza nagusitu da erabat; eta tentsio han diak daude multzoan ($p_{\emptyset} = 0,3456$). Eta, noski, euskaldun elebidun huts bihurtzea, jokabide gaitza da. Joerak, halere, garbi agertzen dira hipotesietako zifretan.

3.16.- Eman dezagun adibidez, euskaldun elebidunen erdiak, eus kaldun huts gisa jokatzen duela; alegia, tentsioak sorturik ere, erdarari uko eginez.

Aldakuntza hauxe da beraz:

	Lehen	Orain	(e)
A	100	100	0,2222
B	30	190	0,4222
AB	320	160	0,3555
	450	450	

$$190 = \frac{320}{2} + 30$$

Ikus ditzagun oraingo erabilrenak:

$$p_{A2} = 0,2222^2 + 2 \cdot 0,2222 \cdot 0,3555 = 0,2073$$

$$p_{B2} = 0,4222^2 + 2 \cdot 0,4222 \cdot 0,3555 = 0,4784$$

$$p_{X2} = 0,3555^2 = 0,1264$$

$$p_{\emptyset 2} = 2 \cdot 0,2222 \cdot 0,3555 = 0,1580$$

Aldakuntza, beraz, hau da:

	lehen	orain
A	0,3650	0,2073
B	0,0998	0,4784
X	0,5055	0,1264
$\emptyset$	0,0297	0,1580

A jaitsi da; B azkarki igo (4,8 aldiz maizago erabiltzen da lehen baino); zalantzezko egoerak, noski, oso jaitsi ere bai; baina tentsioak azkarki igo : 5,3 aldiz handiago dira lehen baino. Tentsio horiek, noski, tentsio politiko bihurtzen dira; eta hor dago kakoa.

Elebidun gutxi dagoen eskualdeetan, borondateak ezin han-dirik alda ez badezake ere, elebidunak ugari dauden eskualdeetan, euskararen aldeko jokabide gogorrak egoera erratik alda dezake. Horixe da adibide honetan ikusi duguna ($e_A = 0,222$; $e_B + e_{AB} = 0,777$). Euskaldunak % 77,7 dauden herrietan, beraz erabilpenaren egoera, euskaldun horiek nahi izanez gero, erratik alda daiteke.

Baina tentsioak sortuz, jakina; eta hñrtxe dugu koska. Tentsiorik gabe, eta ezaguera-mailak aldatu gabe, euskara erabiltzerik ez dagoela.

Oharra: Bide beretik kalkula daitezke bai gainerako erabilpenak, eta bai tentsioak. Ondorioak alde beretik datoz; nahiz azkarkiago markaturik.

3.2.- AZPI-MULTZOEN PISUA

Behin eta berriz ikusi dugunez:

$$p_{A2} \neq p_{A3} \neq p_{A4}$$

$$p_{B2} \neq p_{B3} \neq p_{B4} \text{ , etab.}$$

Zein da balio ertaina?

Balio ertain aritmetikoa kalkulatzek, ideia bat eman dezake:

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$$

Baina:

a) bikote batek ordubetez hizkuntza erabiliz gero, 2 ordu x hiztun du; hirukote batek: 3 ordu x hiztun ; eta laukote batek: 4 ordu x hiztun.

b) maizago gertatzen dira bikoteak elkar-hizketan, hirukoteak baino; hirukoteak, laukoteak baino. Teori-kontsiderazioak egin daitezke:

$$n_2 = p^2$$

$$n_3 = p^3$$

$$n_4 = p^4$$

p elkartzeko probabilitatea izanik.

Zenbat da p , ordea ?. Ezin esan.

Haztamuka apur bat egin ondoren, badirudi zifra hauek proposa daitezkeela:

$$n_2 = 4 \cdot N$$

$$n_3 = 2 \cdot N$$

$$n_4 = N$$

Eta beraz, a) pasartean esandakoa kontutan hartuz, pisuak hauek izan daitezkeela:

$$\textcircled{2} \quad 4 \cdot N \cdot 2 = 8 \cdot N$$

$$\textcircled{3} \quad 2 \cdot N \cdot 3 = 6 \cdot N$$

$$\textcircled{4} \quad N \cdot 4 = 4 \cdot N$$

Eta, hortaz:

$$m_2 = \frac{8N}{18N} = 0,444$$

$$m_3 = \frac{6N}{18N} = 0,333$$

$$m_4 = \frac{4N}{18N} = 0,222$$

3.21.- Eman dezagun hau, esate baterako:

$$p_2 = 0,1275$$

$$p_3 = 0,0821$$

$$p_4 = 0,0475$$

Zein izan daiteke denontzako balio ertain orokorra?

$$p = 0,1275 \ 0,444 = 0,0566$$

$$0,0821 \ 0,333 = 0,0273$$

$$0,0475 \ 0,222 = 0,0105$$

$$p_{ert} = \underline{0,0944}$$

$$\underline{\% \ 9,44}$$

Kasu honetan:

$$p_3 < p_{ert} < p_2$$

Estatistika-lanen ondorioz, pisu horiek hobeki definitu arte, hiru balio horiek bali² daitezke.

4. AZTERKETA DIAKRONIKOAKEN OINARRIAK

Orain arte e_A , e_B eta e_{AB} aldakaitzak ziren. Hots, e-lebidun gizarteetan aldatu egiten dira denboran barrena:

$$e_A \longrightarrow a(t)$$

$$e_B \longrightarrow b(t)$$

$$e_{AB} \longrightarrow c(t)$$

beti ere, dena dela:

$$a(t) + b(t) + c(t) = 1$$

Diferentziatuz, hortaz, hau dugu:

$$da + db + dc = 0$$

4.1.- Interesgarri izan daiteke erabilpenen gorabeherak aztertzea. Hauta ditzagun bikoteak:

$$p_{A2} = a^2 + ac$$

eta, hortaz:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{A2}}{dt} &= 2a \cdot \frac{da}{dt} + \frac{da}{dt} \cdot c + a \cdot \frac{dc}{dt} = \\ &= (2a + c) \cdot \frac{da}{dt} + a \cdot \frac{dc}{dt} \end{aligned}$$

$$p_{B2} = b^2 + bc$$

$$\frac{dp_{B2}}{dt} = (2b + c) \cdot \frac{db}{dt} + b \cdot \frac{dc}{dt}$$

$$p_{X2} = c^2$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2c \cdot \frac{dc}{dt}$$

$$p_{\emptyset 2} = 2ab$$

$$\frac{dp_{\emptyset 2}}{dt} = 2a \cdot \frac{db}{dt} + 2b \cdot \frac{da}{dt} \quad .$$

Ete $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ ezagutuz gero, erabilpenen hazkuntza ere neur daiteke. (Izarien aldetik, deribatu horiek $[1/\text{urte}]$ -tan neurtuko dira). p_A -ren erabilpena, eman dezagun, hamar urtetan % 25-tik % 28-ra pasa bada:

$$\frac{0,28 - 0,25}{10} = 0,003 \quad [\text{urte}^{-1}]$$

eta % 63-tik % 56-ra pasa bada:

$$\frac{0,56 - 0,63}{10} = -0,007 \quad [\text{urte}^{-1}]$$

4.2.- Kasu interesgarri bat izan daiteke lineala:

$$a(t) = a_0 + \alpha t$$

$$b(t) = b_0 + \beta t$$

$$c(t) = c_0 + \gamma t$$

Eta, beraz: $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Zeren-eta:

$$\alpha dt + \beta dt + \gamma dt = 0$$

$$\frac{da}{dt} = \alpha \qquad \frac{db}{dt} = \beta \qquad \frac{dc}{dt} = \gamma$$

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = (2a + c)\alpha + a \cdot \gamma$$

$$\frac{dp_{B2}}{dt} = (2b + c)\beta + b \cdot \gamma$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2c \cdot \gamma$$

$$\frac{dp_{\theta 2}}{dt} = 2a\beta + 2b\alpha$$

Eta a,b,c ezagutuz gero, aldakuntzak zertan diran jakin daiteke.

Adibidez:

$$\begin{aligned} a(t) &= 0,60 + 0,003 t & \alpha &= 0,003 \\ b(t) &= 0,15 - 0,002 t & \beta &= - 0,002 \\ c(t) &= 0,25 - 0,001 t & \gamma &= - 0,001 \end{aligned}$$

t = 0 denean, egoera hau da:

$$\begin{aligned} a(0) &= 0,60 \\ b(0) &= 0,15 \\ c(0) &= 0,25 \end{aligned}$$

Zertan daude joerak mementu honetan?

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = (2a + c) \cdot 0,003 - 0,001 \cdot a$$

Eta t=0 denean:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp_{A2}}{dt} \right)_0 &= (2 \cdot 0,60 + 0,25) \cdot 0,003 - 0,001 \cdot 0,60 = \\ &= 1,45 \cdot 0,003 - 0,001 \cdot 0,60 = + 0,00375 \text{ [urte}^{-1}\text{]} \end{aligned}$$

A-ren erabilpena gorantz doa, eta goranzko habaila hau da:

$$\textcircled{+} \text{ } \underline{\% 0,375 / \text{urte}}$$

$$\frac{dp_{B2}}{dt} = (2b + c) \cdot (-0,002) + b \cdot (-0,001)$$

$$\left(\frac{dp_{B2}}{dt} \right)_0 = (2 \cdot 0,15 + 0,25) \cdot (-0,002) + 0,15 \cdot (-0,001) =$$

$$= \ominus 0,00125 \left[\text{urte}^{-1} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{X2}}{dt} &= 2c \cdot (-0,001) = -2 \cdot 0,25 \cdot 0,001 = \\ &= -0,00050 \left[\text{urte}^{-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\emptyset 2}}{dt} &= 2a \cdot (-0,002) + 2b \cdot (0,003) = \\ &= 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,002) + 2 \cdot 0,15 \cdot 0,003 = \\ &= -0,0024 + 0,0009 = -0,0015 \left[\text{urte}^{-1} \right] \end{aligned}$$

Tentsioak behera doaz.

Zein izango dira egoera eta joerak handik 8 urtetara?
(Funtzioek beren balioa dute orduan ere, ikus daitekeenez).

Egoera:

$$a(8) = 0,60 + 0,003 \cdot 8 = 0,624$$

$$b(8) = 0,15 - 0,002 \cdot 8 = 0,134$$

$$c(8) = 0,25 - 0,001 \cdot 8 = 0,242$$

Joerak:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{A2}}{dt} &= (2 \cdot 0,624 + 0,242) \cdot 0,003 = 0,004470 \\ &+ 0,624 \cdot (-0,001) = -0,000624 \\ &\quad \underline{\quad \quad \quad} \\ &\quad \quad \quad \oplus 0,004076 \end{aligned}$$

A-ren gorakada azkartu egingo da ($> 0,00375$)

$$\begin{aligned} \frac{dp_{B2}}{dt} &= (2 \cdot 0,134 + 0,242) \cdot (-0,002) = -0,00102 \\ &+ 0,134 \cdot (-0,001) = -0,000134 \\ &\quad \underline{\quad \quad \quad} \\ &\quad \quad \quad (\text{vid.} -0,00125) \ominus 0,001154 \end{aligned}$$

B-ren beherakada moteldu egingo da (kasu honi !), fenomenoaren habailaren aldetik.

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2 \cdot 0,242 \cdot (- 0,001) = \ominus 0,000468$$

Hau ere motelduko (vid. - 0,000500)

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\emptyset 2}}{dt} &= 2 \cdot 0,624 \cdot (- 0,002) + 2 \cdot 0,134 \cdot (0,003) = \\ &= - 0,002496 + 0,000804 = - 0,001692 \end{aligned}$$

Tentsioa ere txikitu egingo da, itxuraz eta gero eta azkarkiago txikitzen ari (vid. - 0,0015).

Beraz, hipotesi linealean (eta estatistikek beherakada linealak idarokitzen dituzte ezagueraren mailan), B-hizkuntza rekiko egoera txartu ala, fenomenoaren habaila txikitu egiten da; eta tentsioak ere beherantz bide doaz... Heriotza leuna heldu da...

Gauza bera gertatzen da B-elebakarrak suntsitzen den mentuan: ez dago inolako asaldurik.

4.3.- Beste kasu interesgarri bat, $b = 0$ da (alegia, gizar tean A-elebakarrak eta AB-elebidunak besterik ez dago). Eta , beraz:

$$a(t) = a_0 + \alpha t$$

$$b(t) = 0$$

$$c(t) = c_0 - \alpha t$$

Eta erabilpenen aldakuntzak:

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = (2a + c)\alpha + a (- \alpha) = a\alpha + c\alpha = \alpha$$

A-ren erabilpena gorantz doa; eta habaila aldagabea doa gora.

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2 \cdot c (- \alpha) = - 2 \alpha c$$

Ikus dezagun adibide konkretu bat:

$$a(t) = 0,70 + 0,005 t$$

$$c(t) = 0,30 - 0,005 t$$

Beraz, elebakarrak suntsitu dira, eta A aldagaitz doa gora (% 0,5 urteko).

Gaurko joera hau da:

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = 0,005 \quad \left[\text{urte}^{-1} \right] \quad (\text{beti bezala})$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = - 2 \cdot 0,005 \cdot 0,30 = - 0,003 \quad \left[\text{urte}^{-1} \right]$$

Hemendik 20 urtetara, egoera hau izango da:

$$a(20) = 0,70 + 20 \cdot 0,005 = 0,80$$

$$c(20) = 0,30 - 20 \cdot 0,005 = 0,20$$

Erabilpenak:

$$p_{A2} (20) = 0,8^2 + 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,96$$

$$p_{X2} (20) = 0,20^2 = 0,04$$

B-hizkuntza erabilpenetik at, ia-ia.

Hala ere, joerak hauek dira:

$$\frac{dp_{A2}}{dt} (20) = 0,005 \left[\text{urte}^{-1} \right] \quad (\text{beti})$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} (20) = - 2 \cdot 0,005 \cdot 0,2 = - 0,002 \left[\text{urte}^{-1} \right]$$

B galtzen ari da, baina habaila txikiagoan: "mort douce".

Eta sunstitzeko bezperan:

$$c(59) = 0,30 - 0,005 \cdot 59 = 0,005$$

$$a(59) = 0,995$$

$$\text{Baina } \frac{dp_{X2}}{dt} (59) = - 2 \cdot 0,005 \cdot 0,005 = - 0,00005 \left[\text{urte}^{-1} \right]$$

Alegia: - % 0,005 / urte

Ez da ezer nabaritzen, hitz batez; B-ren erabilpenaren urriketa ia-ia zero baita ! Berriro ere "mort douce".

Azkenekotz: $t = 60$ urte

$$a(60) = 0,70 + 60 \cdot 0,005 = 1$$

$$c(60) = 0,30 - 60 \cdot 0,005 = 0$$

B-hizkuntza mementu horretan desagertzen da; baina:

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 0$$

Ez da ezer senditzen !

Hizkuntzen erabilpena, senditu ere gabe deuseztatzen da.

4.4.- Azter dezagun orain fenomenoa goranzkoan. Eman dezagun, hitz batez:

$$a(t) = a_0 - \alpha t$$

$$c(t) = c_0 + \alpha t$$

Elebidunak gorentz doaz.

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = (2a + c) \cdot (-\alpha) + a \alpha = -\alpha$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2c\alpha$$

A-ren beherakada aldakaitza da: beti bera, beti habaila bera.

p_{X2} , berriz, gero eta azkarragoa; baita $p_{B2} = 0$ beti zero izanik.

Eman dezagun hau:

$$a(t) = 0,70 - 0,005 t$$

$$c(t) = 0,30 + 0,005 t$$

Gaurko aldakuntzen habaila hau da:

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = - 0,005 / \text{urte} \quad (- \% 0,5 \text{ urteko})$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2 \cdot 0,30 \cdot 0,005 = + 0,003 \quad (\% 0,3 / \text{urte})$$

Eta hemendik 20 urtetara:

$$a(20) = 0,70 - 0,005 \cdot 20 = 0,60$$

$$c(20) = 0,30 + 0,005 \cdot 20 = 0,40$$

eta joerak:

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = - 0,005 / \text{urte} \quad (\text{beti})$$

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2 \cdot 0,40 \cdot 0,005 = + 0,004 \quad (\% 0,4 / \text{urte})$$

Erabilpenaren gorakada gero eta azkarkiago indartzen da.

4.41.- Noiz hel daiteke $p_A = \% 50$ -ra ?. (A nagusi ez izatera, beraz).

$$c(t) = 0,30 + 0,005 t = 0,7071$$

$$t = \frac{0,7071 - 0,30}{0,005} = 81,42 \text{ urte}$$

Elebidun "baketsuen" bidez, beraz (alegia, sekula B-elebakarren jokabiderik hartuko ez dutenen bidez) 81 urte behar dira egoerari "gaina" hartzeko; alegia, A (= erdara) nahi-ta - ez erabiliena ez izatera. Besterik ez, kasu !

Mementu horretan:

$$\frac{dp_{X2}}{dt} = 2 \cdot 0,7071 \cdot 0,005 = 0,00707$$

Alegia: % 0,707 / urte irabazten ari.

Dena dela, mementu horretan:

$$p_{X2} (81) = 0,50$$

Alegia, erdia ez dakigu zein hizkuntzaz egingo den. Eta posible da A oraindik nagusi egotea.

Hirukoteetan eta laukoteetan, zer esanik ez, A beti nagusi. Noiz arte ?. Kalkuluak egitea erraza da, eta irakurlearen eskuetan utziko dugu. Mende batzu behar dira, jakina.

Hots, urtean % 0,5 irabaztea asko da (20 urtez, % 10 elebidun gehiago: 300.000 esan dezagun; edo-ta, 15000 / urtean). Posible dea ?. Zenbat haur, nahiz elebidun izan, eskolatzen di ra urtero ?. 15.000 haur bai ? Eta heriotzak ?

Abiada horretan ekinez, dena dela, mende oso bat behar genuke erdararen parean jartzen hasteko (bikoteetan bakarrik;

eta elebidunak erabat euskaltzale izanik: shal luketen guztietan, euskara hautatuko).

Badirudi, beraz, bide horretatik euskarek ez duela burua altxako. Eta soluzio bakarra hau dela:

1) elebidunen kopurua azkartzea: eskola, telebista, etab. Hori bai, jakina. Baina:

2) euskaldun elebakarrak (egiazkoak edo "faktikoak") sortzea; eta, tentsioak sortuz, eta abar, dinamika azkarrago bat sortzea.

Bestela gezurra da Euskal Herria normalizatuko dela esatea; liburuska honetan barrena argiro agertu den bezala.

Jokabide hauen kontra dagoenak, hitz batez, euskararen heriotza bilatzen du; bai konturatzen baldin bada, eta bai kontu ratzen ez bada ere.

Problema latza ? Noski !

Euskal Herriaren arazoa ez baita txantxetako jokoa.

AURKIBIDEA
=====

1.- MULTZO FINITOEN AZTERKETA

1.1.- Laukoteak	(7)
1.2.- Boskoteak	(25)
1.3.- Seikoteak	(37)
1.4.- Edozein multzo finito	(42)

2.- MULTZO INFINITOEN AZTERKETA

2.1.- Bikoteak	(52)
2.2.- Hirukoteak	(55)
2.3.- Laukoteak	(57)
2.4.- Ohar orokorra	(59)
2.5.- Tentsioak	(61)
2.6.- Egoera bereziak	(67)
2.7.- Erabilpen desorekatuaren mugak	(74)
2.8.- B-elebakarren suntsiera	(80)
2.9.- Elebitasun-maila txikiak	(85)

3.- MULTZOEN BARNEKO EGITURA

3.1.- Multzo batua / multzo zatikatua	(90)
3.2.- Azpi-multzoen pisua	(101)

4.- AZTERKETA DIAKRONIKOAREN OINARRIAK

4.1.- B-ren beherakoan	(104)
4.2.- B-ren gorakoan	(105)