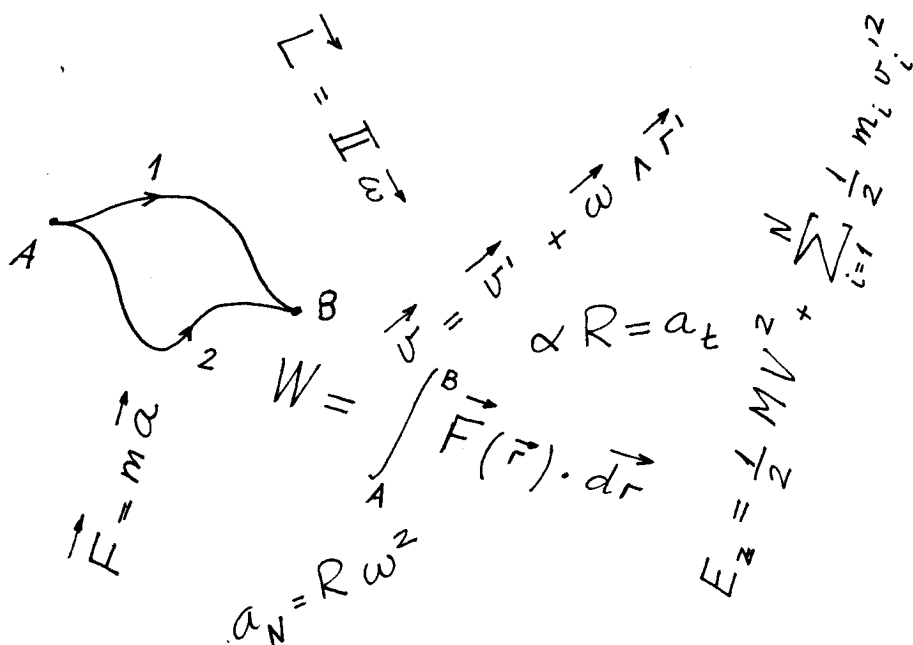




FISIKA

OROKORRA (I)



Banco de Vizcaya

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya

Jabegoa: U.E.U.ko FISIKA Saila

Lege-gordailua: BI-1436-82

ISBN: 84-300-7263-2

Inprimategia: BOAN, S.A.

F I S I K A O R O K O R R A (I)

MEKANIKA

EGILEAK: J.R. ETXEBARRIA ,

M. ENSUNZA
O. EZENARRO
P. UGALDE

IRAKASLEEN LAGUNTZAREKIN

A U R K I B I D E A

Lehenengo argitarapeneko hitzaurrea VII

Bigarren argitarapeneko hitzaurrea VIII

1. GAIA : IDEIA OROKORRAK

1.1. Espazioa eta denbora Fisika Klasikoan	2
1.2. Magnitude fisikoak. Eskalareak eta bektoreak.	3
1.3. Gainezarmenaren printzipioa	4
1.4. Oinarritzko magnitudeak eta magnitude deribat- tuak	5
1.5. Unitate-sistemak	8
1.6. Dimentsioen ekuazioak	9

2. GAIA : KALKULU BEKTORIALA

2.1. Erreferentzi sistemak	14
2.2. Eskalareak eta bektoreak	16
2.3. Bektore askeen algebra	19
- Bektoreen batuketak.	
- Eskalare eta bektorearen biderkaketa	
- Bektoreen osagaiak.	

- Biderkaketa eskalarra eta biderkaketa bektoriala.

- Hirubektoreren biderkaketa mixtoa.

2.4. Kurtsoreen sistemak 28

- Kurtsore baten momentua.

- Kurtsore-sistema baten erredukzioa: tortsorea.

- Kasu bereziak: sistema konkurrenteak, koplanarioak eta paraleloak.

3. GAIA : PUNTUAREN ZINEMATIKA

3.1. Puntu material baten abiadura eta azelerazioa 41

- Abiadura

- Azelerazioa

3.2. Azelerazio konstanteko higidura 48

3.3. Azelerazioaren osagai tangente eta normala . 54

3.4. Higidura zirkularra 58

- Abiadura angeluarra.

- Azelerazio angeluarra.

- Azelerazio lineala.

3.5. Higidura kurbatua planoan 64

4. GAIA : HIGIDURA ERLATIBOA

4.1. Abiaduraren eta azelerazioaren izaera erlatiboa 71

4.2. Translaziozko higidura erlatiboa 74

III

4.3. Biraketa uniformezko higidura erlatiboa . .	80
4.4. Higidura erlatibo orokorra.	86
- Coriolis-en azelerazioa.	

5. GAIA : MEKANIKAREN PRINTZIPIOAK : PARTIKULAREN DINAMIKA

5.1. Inertziaren printzipioa. Newton-en lehen legea	92
- Galileoren transformazioa eta iner- tziaren printzipioa.	
5.2. Momentu lineala	96
5.3. Momentu linealaren kontserbazioaren printzi- pioa	97
5.4. Indar kontzeptuaren definizioa; Newtonen bi- garren eta hirugarren legeak	100
5.5. Kontaktu-indarrak: Indar normala era marrus- kadurazko indarra	103
5.6. Marruskadurazko indarrak fluidoetan	109
5.7. Momentu angeluarra	113
5.8. Indar zentralak	119
5.9. Sistema ez-inertzialak. Inertzi indarrak. .	123
5.10 Lurra erreferentziazko sistema bezala . . .	126

6. GAIA : LANA ETA ENERGIA

6.1. Indar baten bulkada	132
6.2. Indar baten lana	133
6.3. Potentzia	136
6.4. Energia zinetikoa	137

IV

6.5. Energia potentziala	139
6.6. Energia mekanikoaren kontserbazioa.	140
6.7. Funtzio eskalar baten gradientea.	142
6.8. Indar zentral kontserbakorren peko higidura	148
6.9. Indar ez-kontserbakorrak	158
6.10 Energia eta oreka	160

7. GAIA : PARTIKULA-SISTEMEN DINAMIKA

7.1. Masa-zentrua eta grabitate-zentrua	164
7.2. Partikula-sistema baten masa-zentruaren higidura	166
7.3. Masa laburbildua	172
7.4. Momentu angeluarraren teorema	175
7.5. Sistema baten energia zinetiko eta potentziala	180
- Energia propioa.	
- Energia osoa.	
7.6. Talkak	187

8. GAIA : SOLIDO ZURRUNA

8.1. Lotur baldintzak. Sistema baten askatasun-graduak	194
8.2. Euler-en angeluak	198
8.3. Solido zurrun baten abiaduren eremua. Translazio eta bira hutsak	200
8.4. Solidoaren momentu angeluarra. Inertzi tentsorea	206

8.5. Inertzi ardatz eta momentu nagusiak	209
8.6. Inertzi elipsoidea	213
8.7. Inertzi momentuen kalkulua	215
- Poinsot-en formula.	
- Steiner-en formula.	
- Inertzi momentu polarra.	

9. GAIA : SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA

9.1. Solidoaren dinamikaren ekuazioak. Indarren sistemaren tortsorea	226
9.2. Solido zurrunaren energia zinetikoa	231
9.3. Biraketa askea	236
9.4. Ardatz fixuaren inguruan biratzen ari den solidoaren higidura	238
9.5. Zenbait adibide	243

10. GAIA : ESTATIKA

10.1. Puntu material baten oreka-baldintzak	248
10.2. Solido baten oreka-baldintzak	254
10.3. Solidoak eta loturak	258
10.4. Lan birtualen printzipioa	263

BIBLIOGRAFIA	273
------------------------	-----

LEHENENGO ARGITARAPENENKO HITZAURREA

Lan hau Leioako Zientzi Fakultatean burutu da 1977-78 ikasturtean zehar. Kimikazko espezialitateak egin nahi dituzten ikasleek lehenengo ikas-mailako Fisika Orokorra asignaturaren programa ofizialaren lehenengo lauhileko parteari atxikirik doa.

Lehenengo proiektu batetan euskara hutsez eta ofizialki eman gura izan genituen ikastaldiak. Hala ere, zenbait oztopo zirela eta, azkenean extraofizialki eman ditugu eta ematen dihardugu.

Erabiltzen ari garen lan-metodoa, hauxe da: Ikastaldi ofizialez -gastelaniaz- gainera, astean behin mintegi bat egiten dugu euskara hutsean. Bertan eskribu hauk erabiltzen ditugu materiale teoriko gisa. Mintegietan, ikasleek Fisika euskaraz ikasteko aukera dute, batetik euskara landuz eta bestetik Fisikazko zalantzak argituz. Gainera, ikasleek berek aukeraturiko problemak ebazten eta eztabaidatzen ditugu.

Fisikazko mintegi hauekin batera, Kimika, Biologia eta Matematika tematikari buruzkoak ere ba daude, berorietan J. Iturbe, J.M. Txurruka, I. Gurtubai eta J.M. Arregi irakasleek eta lan esker gan diharduten hirugarren, laugarren eta bostgarren kurtsotako ikasleek parte hartzen dutelarik.

Oinarriak finkatzeko asmoz egiten ari garen lan honek, jarraitzaile hoberik edukiko ahal du.

Bilbon, 1978.eko Martxoaren 19an.

BIGARREN ARGITARAPENEO HITZAURREA

Lau urte pasatu dira, liburu honen lehenengo argitarapena egin zenetik. Tarte horretan pauso asko eman dira Fisikaren arloan euskararen erabilpenari dagokionez eta, noski, liburuaren behin-behinekotasuna kontutan harturik, egokitu beharra zegoen.

Batetik UZEIk ateratako "Fisika Hiztegia" kaleratu da, bertan zientziaren arlo honetan lanean ari garenon eritziak eta guztion artean harturiko hitzarmenak agertzen direlarik. Zer esanik ez, horik guztiok oso kontutan eduki ditugu liburu honen nomenklatura egokitzerakoan, hiztegi horretako proposamenen arauera idatzi baitugu oraingoa.

Bestetik Euskaltzaindiak berak ere arauberriak eman ditu Hletraren erabilpenari buruz (1979-XI-30) eta horien arauera behar ziren zuzenketak ere egin ditugu.

Baina ez dira horik izan egindako zuzenketa bakarrak. Horretaz gain, urte osoan zehar Martxel Ensunzak, Oskar Ezenaarrok, Patxi Ugaldek eta laurok elkarlanean astero egiten izan ditugun mintegietan, textua bera eztabaidatu dugu, idazketa zuzenduz, kontzeptu zientifikoak landuz, argi ez zeuden puntu batzu argituz, zenbait azalpen gehituz, ariketa berriak jarritz eta abar. Beraz, horrelako kasuetan esan ohi denez, guk geuk ere "berrargitarapen zuzendu eta gehitua" prestatu dugula esan dezakegu. Gauza askotan berria ere ba dela esan dezakegu.

Aipamen bereziak ere egin behar dira liburuaren prestaketari buruz. Mari Karmen Menikak idatzi ditu makinaz original guztiak eta irudi guztien egilea Martxel Ensunza da.

Bukatzeko, lehenengo argitarapeneko hitzaurrean esaten

*genuen bezala, lan honek jarraitzaile hoberik edukiko duela-
koan plazaratzen dugu.*

Leioan, 1982.eko Martxoaren 18an.

1. GAIA - IDEIA OROKORRAK

- 1.1. ESPAZIOA ETA DENBORA FISIKA KLASIKOAN
- 1.2. MAGNITUDE FISIKOAK, ESKALAREAK ETA BEKTOREAK
- 1.3. GAINEZARMENAREN PRINTZIPIOA
- 1.4. OINARRIZKO MAGNITUDEAK ETA MAGNITUDE DERIBATUAK
- 1.5. UNITATE-SISTEMAK
- 1.6. DIMENTSIOEN EKUAZIOAK

1.1. ESPAZIOA ETA DENBORA FISIKA KLASIKOAN

Fisika Klasikoaren oinarrian espazio eta denboraren ideia dago. Bi kontzeptu hauk intuitiboki edo definitzen ditugu eta absolututzat jotzen ditugu. Fisika Klasikoaren arlotik irteten ez garen bitartean, espazioak eta denborak orain aipatuko ditugun propietateak dituztela onartuko dugu. Horrek, ordea, ez du esan nahi horrelakoak direnik; eta Mekanika Kuantikoaren edo Fisika Erlatibistaren arloetara pasatzean, kolokan jarriko dira.

Geometria euklidearrean finkatuz, espazioari buruzko ideia intuitiboa dugu. Espazioak hiru dimentsio dituela, isotropoa dela, hots, direkzio guztietan berez propietate berdinak dituela, eta infinitua dela onartzen dugu. Halaber, bi punturen arteko distantziarik laburrena, bi puntuak lotzen dituen zuzenaren direkzioan neurtzen dena dela, eta gainera distantzia hori neurri absolutua dela. Absolutua dela esatean, zera esan nahi dugu, alegia, edozein behatzailek aldiune berean bi puntuen posizioa kontsideratzean, distantzia berbera neurtzen duela. Zer esanik ez, absolututasun honek mugatu egiten du Fisika Klasikoaren arloa, zeren eta, Erlatibitatearen teorian sartuz, bi punturen arteko distantzia behatzailearen abiaduraren funtzioan baitago (Erlatibitate Espeziala) eta, bestalde, espazioaren kurbatura ere kontutan hartu behar baita (Erlatibitate Generala).

Denborarekin ere berdintsu gertatzen da. Intuitiboki jotkatuz, denbora etengabe handituz doan magnitude bat dela kontsideratzen dugu. Magnitude hori erlojuen bidez neurtzen da. Kasu honetan ere, denbora zerbait absolututzat hartzera jotzen dugu, eta egin ere, horrela egiten dugu Fisika Klasikoan. Hau da, bi gertakariaren artean pasatzen den denbora, edozein behatzailek neurturik berbera izanen dela kontsideratzen dugu. Badakigu, hala ere, Erlatibitatearen Teoriaren arauera, bi gertakariaren simultaneitatea bera ere kontzeptu erlatiboa dela.

Dena den, Fisika Klasikoan erabiltzen diren espazio eta denbora absolutuak guztiz zehatzak ez badira ere, esan beharra dago ezen kontzeptu horien erlatibotasuna abiadura handien kasuan baino ez dela nabaritzen. Hain zuzen ere, erlatibotasuna nabari dadin, abiadurek argiaren abiadurarekin konparatzeko modukoak izan behar dute. Eta Fisika Klasikoaren arloan abiadura txikiak aztertuko ditugunez, ez dugu inolako problemarik ukanen, denbora eta espazioa absolututzat hartzeagatik.

Bestalde, Erlatibitatearen Teoria ez doa Fisika Klasikoaren aurka; aitzitik, beraren osagarria da. Eta Erlatibitatearen Teorian ageri diren formula eta adierazpenak, limitean, -abiadura txikien kasuan alegia, Fisika Klasikoan ageri diren berberak dira. Honek ez gaitu harritu behar, zeren, azken batez, Fisikan azaltzen diren legeak errealitatearen hurbilketa baino ez baitira, eta guztiek baitituzte zenbait muga beren -aplikapenerako.

1.2. MAGNITUDE FISIKOAK, ESKALAREAK ETA BEKTOREAK.

Magnitude hitza etengabe agertuko zaigunez, lehenik eta behin horrekin adierazi nahi dugun kontzeptua definituko dugu. Zer da magnitude fisikoa? Laburki esanik, "magnitude fisikoa neurtu egin daitekeen edozer gauza da, beraren izaera gizonaren eraginetik aparte geratzen delarik".

Bi faktore daude, beraz, magnitude kontzeptuaren definizioan. Batetik, neurtu egin daitekeen zerbait dela. Bestetik, gizonak parte hartu gabe ere ba direla; honek ez du esan nahi, noski, gizonak alda ez ditzakeenik, izaeraz gizonaz kanpoko delarik baizik.

Zenbait magnitude aipatzearren, hona hemen batzuren izenak: abiadura, masa, denbora, indarra, lana, ...

Matematikoki kontsideratuz, ordena desberdineko tentso-

reak direla esan dezakegu. Zero ordenakoak, eskalare deitzen dira, eta hurrengo gaian ikusiko dugunez, numero batez adierazten dira osorik. Eskalareen artean, denbora, lana, masa eta beste ditugu. Lehen ordenakoak, bektore deitzen dira. Hauk geometrikoki definitzeko, zenbaki batez gainera, zein direkzioa koak diren ere esan behar da. Hauen artean abiadura eta indarra ditugu, adibidez. Ba dira magnitude konplikatuagoak ere, baina oraingoz ez du merezi horretan sakontzerik.

Edozein modutan, lege fisikoak agertzen dituzten esioetako magnitudeei buruzko zenbait ohar egitea komeni da. Fenomeno fisikoak eredu matematikoen bidez aztertzen dira, Matematika baita fenomenook aztertzeko erabiltzen den hizkuntza. Hori egitean sortzen diren ekuazioek, kobariante izan behar dute: Hau da, ekuazioaren parte biek maila eta era bereko tentsioak izan behar dute. Sinpleago esanik, honek zera esan gura du, alegia, lehen partea bektorea bada, bigarrenak ere bektore izan behar duela, eta lehena eskalare bada, bigarrenak ere eskalare izan beharko duela.

1.3. GAINEZARMENAREN PRINTZIBIOA.

Printzipio hau askotan erabiliko dugu Fisikako edozein arlotan. Fenomeno ber baten iturburu edo sortzaile desberdinak daudenean erabiltzen da. Zera dio: "Sortzaile desberdinen ondorioak gainerazi edo batu egiten dira, magnitudeari dagokion moduan". Hau da, ondorioa adierazten duen magnitudea eskalarea bada, eskalarki batzen dira; eta bektorea bada, bektorialki batu beharko dira.

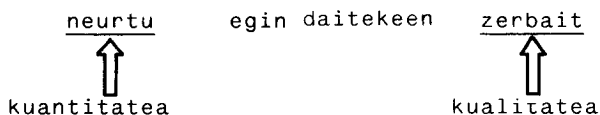
Adibideak milaka jar daitezke. Demagun, kasu batetarako, gorputz ber baten gainean eragiten ari diren indarrak. Gainezarmenaren printzipioaren arauera (gorputza elastikoa ez bada behintzat) gorputza indar erresultantearen eta beronekin doan momentuaren eraginpean (ikus hurrengo gaiko "kurtsoreen sistema") higituko da. Baina indarrak (eta berauen momentuak) be

torialki batu beharko dira, noski.

Modu berean elektrostатikan, karga-multzo batek sorturi ko eremu elektrikoa, bakoitzak sorturikoaren batuketa bektoriala da. Eta horrela, beste adibide asko.

1.4. OINARRIZKO MAGNITUDEAK ETA MAGNITUDE DERIBATUAK.

Gertakari fisikoen behaketa kualitatiboki eta kuantitatiboki egin daiteke. Eta egin ere horrela egiten da. Kualitatiboki aztertuz, gertakariaren tasun edo kualitate bakoitza magnitude-mota bat da. Eta magnitude bakoitza kuantitatiboki neurtzen da. Izatez, gutxi gorabehera, horixe izan da magnitudearen definizioa:



Has gaitezen ikuspegi kuantitatiboa aztertzen. Ikuspegi honen sostengua, neurketa da.

. Neurketak. Magnitude-mota bakoitzari dagokionez, teknika egokiak daude neurketak egiteko.

Magnitude batzuren kasuan, propietatea patro*i* batekin (unitatearekin) konparatuz neurtzen da. Horrela zenbaki bat lortzen da, patro*i*aren unitateetan adierazten dena.

Beste kasu batzutan neurketaren definizio operazionala egiten da. Adibidez, abiaduraren kasuan, lehenik luzera eta gero denbora neurtuz (biak batera, hobeki esanik), bi magnitude horien zatiketaz lortzen da abiadura.

- . Neurketetako perturbazioak. Sarri, neurtzerakoan aldatu egiten ditugu inguruko baldintzak eta neurketa ez da, beraz, izan behar zuena. Honelako kasuetan perturbazio bat gertatu dela esan ohi da. Demagun, adibidez, termometro baten bidez edalontzi batetako uraren temperatura neurtu nahi dugula. Baina termometroa uretan sartzean, urarenaz bestelako tenperatura badu, aldatu egiten da pixka bat uraren temperatura, eta termometroak neurtuko duena ez da izanen aurretik zegoen berbera.

Perturbazioez gainera, errore esperimentalak ere hartu behar ditugu kontutan. Neurgailua perfektua ez dela edo gaizki erreglaturik dagoela, nekaturik gaudela, metodoa egokia ez dela, eta beste mila arrazoi dela, okerrak ageri dira gure neurketetan, gu konturatu gabe: errore esperimentalak. Neurketak gure mugen barnean ongi egon daitezen, edozein modutan perturbazioek errore esperimentalek baino txikiagoak izan behar dute.

Perturbaketa sistematikoa denean, kalkulatu egiten da, eta gero korrekzio edo zuzenketak egiten dira neurketetan. Adibidez, termometro eta kalorimetroen kasuan, bien bero espezifikokoak kontutan hartuz, oso erraza da zuzenketak egitea.

Dena den, perturbazioen balio erlatiboa oso kontutan edukitzekoa da zuzenketak egiterakoan. Fenomenoaren eta neurgailuak sortzen duen perturbazioaren mailak konparagarriak badira, hots, maila berdinekoak badira, orduan beharrezkoa da zuzenketa egitea. Baina, perturbazioa erlatiboki txikia bada, ez du merezi zuzenketarik egiteak. Adibidez, termometro batek gela baten temperatura neurtzean sortzen duen perturbaketa, guztiz arbuigarria da.

Sistema mikroskopikoetan, jadanik Mekanika Kuantikoaren arloan sartuz, prezisioaren kontzeptuak beste esangura bat hartzen du, tartean zihurgabetasunaren printzipioa baitago:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Honen arauera ez da posible magnitude konjokatueta zehaztasun osorik lortzea.

Ikuspegi kuantitatiboa nolabait landu ondoren, goazen orain magnitudeen izakera kualitatiboa aztertzeraz.

- Oinarrizko magnitudeak. Kualitatiboki era askotako magnitude fisikoak dauden arren, beren artean era desberdinetako erlazioak daude. Magnitude batzu, ordea, ezin dira gehiago sinplifikatu, eta horregatik oinarrizkoak direla esaten da. Sei dira Fisikaren oinarrizko magnitudeak:

- luzera
- masa
- denbora
- korrante elektrikoaren intentsitatea (batzutan oinarrizko magnitude gisa karga elektrikoa hartzen da)
- tenperatura termodinamikoa
- argi-intentsitatea

- Magnitude deribatuak. Beste magnitude fisiko guztiak lehen-goien konbinaketaz lortzen dira. Mekanikaren arloan agertzen diren oinarrizko magnitude bakarrak, lehen hirurak dira (luzera, masa eta denbora). Honela, indarra masa eta azelerazioaren biderketaz lortzen da:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

azelerazioa, abiaduraren denborarekiko deribatua izanik, eta abiadura, posizio-bektorearen (luzera) denborarekiko deribatua:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} : \text{azelerazioa} \\ \vec{v} : \text{abiadura} \\ t : \text{denbora} \end{array} \right.$$

1.5. UNITATE SISTEMAK.

Oraintsu arte era askotako sistemak erabili badira ere, gaur egun mundu osoko zientzilariek unitateen sistema internazionala erabiltzen dute ia eksklusiboki. Sistema hau MKSAKC siglez ezagutzen da, letra horik sei oinarritzko unitateen sinboloak direlarik:

M : Metro (luzera)
 K : Kilogramo (masa)
 S : Segundo (denbora)
 A : Ampere (korronte elektrikoaren intentsitatea)
 K : Kelvin gradu (tenperatura)
 C : Kandela (argi-intentsitatea)

Batzutan, amperea erabili beharrean coulomb izeneko unitatea (karga elektrikoa) erabiltzen da.

Sistema internazional hau, Giorgi sistema ere izan da deitua, lehen lau unitateei dagokienez behintzat.

Lehenago, cgs sistema ere erabili izan da:

c : (cm) zentrimetro
 g : gramo
 s : segundo

Zenbait liburutik sistema teknikoa ere erabili izan da. Honetaz, ez da masa oinarritzko magnitude gisa erabiltzen. Masaren ordez, pisua (indarra) hartzen da oinarritzat.

Sistema anglosaxoietan unitateak konplikatu egiten ziren, oinak (luzera), librak (masa) eta antzerako gauzak erabiltzen baitziren.

1.6. DIMENTSIOEN EKUAZIOAK.

Dimentsioen ekuazioek edozein magnitudek oinarritzko magnitudeekiko duen konposizioa adierazten dute. Mekanikaren arloan hiru oinarritzko magnitudeak honela adierazten dira:

masa : M

luzera : L

denbora : T

Magnitude fisikoen dimentsioen ekuazioa, magnitude hori adierazten duen letra kortxete artean jarritz adierazten da. Demagun, adibidez, indarra:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Beronen dimentsio-ekuazioa hauxe da:

$$[F] = [m a] = [m] [a] = M L T^{-2}$$

Hau da, luzera eta denboraren bigarren potentzia negatiboa biderkatuz lortzen da indarra. Beraren unitateak, MKS sisteman, hauxek izanen dira:

$$\text{indar-unitatea} \longrightarrow \text{K. m. s}^{-2}$$

$$\left(\frac{\text{Kilogramo} \cdot \text{metro}}{\text{segundo}^2} \right)$$

Ikus ditzagun zenbait magnituderen dimentsio-ekuazioak:

. Pisu espezifikoa

$$[\gamma] = \left[\frac{\text{Indarra}}{\text{Bolumena}} \right] = \frac{M L T^{-2}}{L^3} = M L^{-2} T^{-2}$$

. Dentsitatea (masa espezifikoa)

$$[\rho] = \left[\frac{\text{Masa}}{\text{Bolumena}} \right] = \frac{M}{L^3} = M L^{-3}$$

Ikusten denez, sarri nahasturik erabiltzen diren bi magnitude hauk, oso desberdinak dira dimentsionalki.

. Lana

$$[W] = [\vec{F} \cdot \Delta \vec{l}] = M L T^{-2} \quad L = M L^2 T^{-2}$$

. Energia Zinetikoa

$$[E_k] = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = M (L T^{-1})^2 = M L^2 T^{-2}$$

. Energia potentziala

$$[E_p] = [m g h] = M [a] L = M L T^{-2} \quad L = M L^2 T^{-2}$$

Kasu honetan, osteraz, izen desberdineko hiru magnitude hauak dimentsio-ekuazio berbera dute.

Dimentsio-ekuazioek garrantzia dute lege fisikoak idaztean, zeren eta ekuazioen parte biek kobariante izan behar duten modu berean, dimentsio-ekuazio berbera eduki behar baitute.

Bukatzeko, zenbait magnitude erlatiboren kasua aipatuko dugu. Hauk, dimentsio-ekuazio berbera duen beste magnitude bategiko definitzen dira eta horrela ez dute dimentsiorik. Zenbait adibide jarriko ditugu:

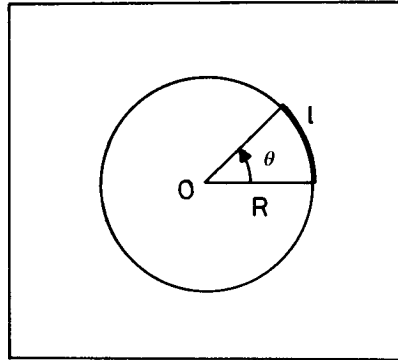
. Dentsitate erlatiboa: Uraren dentsitatearekiko definitzen da

$$[\rho_e] = \frac{[\rho]}{[\rho_{ura}]} = \frac{M L^{-3}}{M L^{-3}} = M^0 L^0 T^0$$

- Angelua. Radian-etan honela neurtzen da angelua

$$\theta = \frac{l}{R}$$

$$[\theta] = \frac{[l]}{[R]} = \frac{L}{L} = M^0 L^0 T^0$$



Gauza bertsua gertatzen da estereorradiana definitzean (angelu solidoa, alegia).

Honelako magnitude erlatibo batzutatik beste magnitude batzu atera daitezke. Adibidez, abiadura angeluarra, angelua denboraz zatitzean lortzen da:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

$$[\omega] = \frac{[\theta]}{[t]} = T^{-1}$$

2. GAIA - KALKULU BEKTORIALA

2.1. ERREFERENTZI SISTEMAK

2.2. ESKALAREAK ETA BEKTOREAK

2.3. BEKTORE ASKEEN ALGEBRA

- BEKTOREEN BATUKETA
- ESKALARE ETA BEKTOREAREN BIDERKAKETA
- BEKTOREEN OSAGAIK
- BIDERKAKETA ESKALARRA ETA BIDERKAKETA BEKTORIALA
- HIRU BEKTOREREN BIDERKAKETA MIXTOA

2.4. KURTSOREEN SISTEMAK

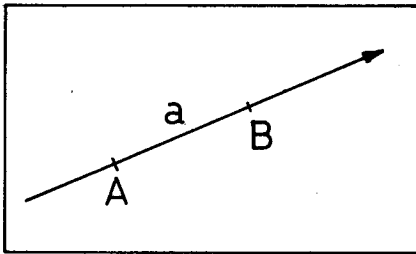
- KURTSORE BATEN MOMENTUA
- KURTSORE-SISTEMA BATEN ERREDUKZIOA; TORTSOREA
- KASU BEREZIAK: SISTEMA KONKURRENTEAK, KOPLANA

RIOAK ETA PARALELOAK

2.1. ERREFERENTZI SISTEMAK.

Fisikazko gertakarien azterketa matematikorako, guztiz be harrezkoa da puntuak lekutzen jakitea eta horretarako erreferentzi sistema bat eduki behar da. Lehen mailan, sistema carte siarrak ditugu. Horrelako sistemak puntu batetatik pasatzen di ren hiru direkzio elkarrekiko perpendikularren bidez adierazten dira, eta sistema bakoitzak triedro izena hartzen du. Erreferentzi sistemen kontzeptua argi edukitzeko, zenbait kontzeptu sinpleago adierazi behar dira aurretik.

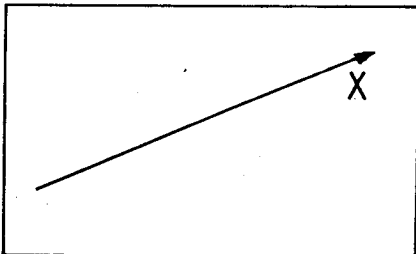
- Direkzioa zer den. Hitz laburrez esanik, zuzen orientatu bat da.



AB sentidoan hartzen bada,
+ a izanen da

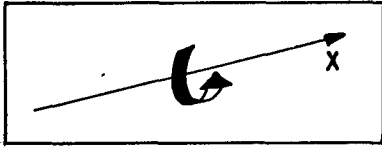
BA sentidoan harturik, - a

Honela adierazten da x direkzioa

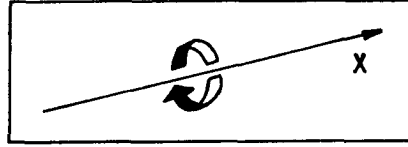


Oharra: Izatez, zenbait textutan direkzio eta sen tidoaren arteko desberdintasuna markatzen da. Beste batzutan sinonimotzat hartzen dira.

- Ardatz baten inguruko biraketak. Hemen dagoen problema bak arra, hitzarmen bat egin beharra da. Hauxe, hain zuzen ere:



biraketa direktua edo zuzena, torloju arruntek duten erregelaren arauera^{ko}a.



biraketa inbertsua, torlojuaren erregelaren aurkakoa.

Biraketaren kasuan beste sinbologia hau ere erabiltzen da



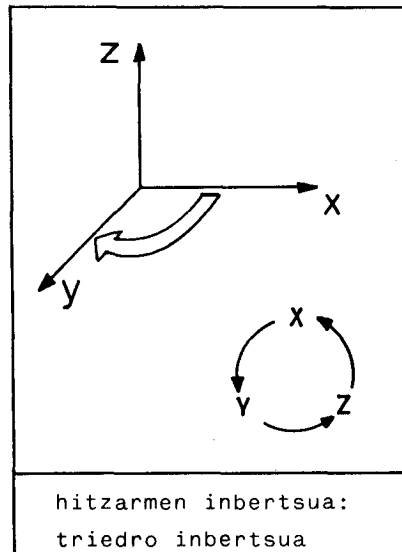
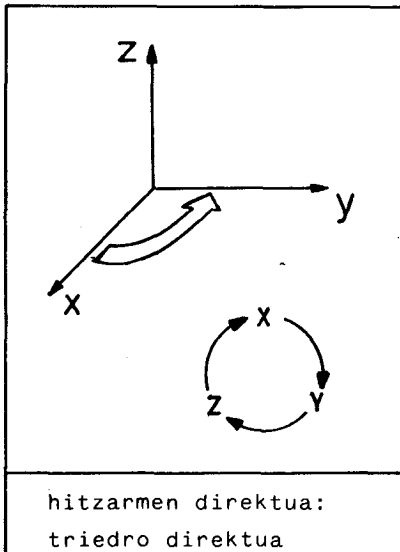
: bektorea paperaren perpendikularra eta barrurantz sartzen denean, era honetan adierazten da.



: paperaren perpendikularra eta kanporantz irteten denean, honela.

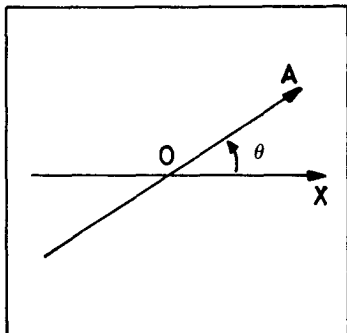
- Triedroak. Dakigunez, Fisikaren espazio klasikoak hiru dimentsio ditu. Horregatik, hiru direkzio perpendikular hartzen dira oinarritzat (koordinatu kartesiar^{ak}).

Biraketaren kasuko hitzarmenak kontutuan hartuz, bi eratako triedroak har daitezke

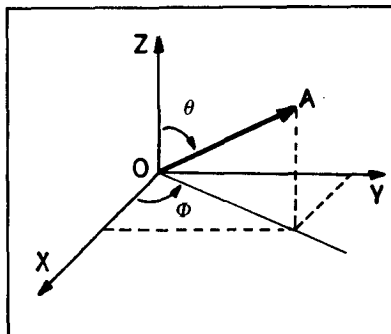


Gaur egunean, Fisikaren arloan triedro direktua da nagusi. Bestea ez da ia erabiltzen.

Erreferentzi sistemekin bukatzeko, eta behar ditugun kontzeptuak definiturik ditugularik, planoan eta espazioan di-
rekzioak nola definitzen diren ikusiko dugu:



Planoan, OA direkzioa angelu baten bidez defini-
tzen da.



Espazioan, ordea, bi angelu eman behar dira direkzio ho-
ri zehazteko.

2.2. ESKALARE ETA BEKTOREAK.

Magnitude fisiko batzu adierazteko, nahikoa da numero bat eta beronen unitatea adieraztea. Eta gainera, magnitude horrek balore berbera du edozein erreferentzi sistematatik ikusiz. Ho-
rrelako magnitude fisikoak, eskalare deitzen dira.

Adibide batzu jartzearen, denbora, masa, lana, tempera-
tura eta abar aipatuko ditugu.

Beste magnitude fisiko batzuren kasuan, kantitateaz gain direkzioa ere adierazi behar izaten da. Magnitude horik bekto
re deitzen dira. Hauen artean, posizio-bektorea, abiadura, in
darra eta abar ditugu.

Liburuetan, eskalareak letra arruntez idazten dira eta bektoreak letra bereziz. Apunteetan, bektoreei gezi bat jar tzen zaie gainean.

Eskalareak

m (masa)
t (denbora)
W (lana)

Bektoreak

$\mathbf{F}$ edo $\vec{F}$ (indarra)
 $\mathbf{v}$ edo $\vec{v}$ (abiadura)
 $\mathbf{r}$ edo $\vec{r}$ (posizio-bektorea)

Bektoreak honela ere idazten dira.



$$\vec{AB} = (B-A)$$

Bektoreen ezagugarrietako bat modulua da. Honela adierazten da

$$\vec{V} \longrightarrow |\vec{V}| = V \quad (\vec{V}\text{-ren modulua})$$

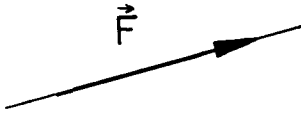
Modulu unitatea duten bektoreak, bektore unitario deitzen dira. Ardatzen direkzioetan daudenak honela adierazten dira:

$$\left. \begin{array}{l} x \longrightarrow \vec{i} \\ y \longrightarrow \vec{j} \\ z \longrightarrow \vec{k} \end{array} \right\} \quad \text{edo eta} \quad \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix}$$

Hiru motatako bektoreak daude.

1. Bektore askeak. Espazioko edozein puntutan aplika daitezke. Guztion ordezkari gisa, bat har daiteke, gero paraleloki edo nora eramateko. Bektore hori ekipolente deitzen da. Adibidez, ardatz kartesiarren direkzioko bektore unitarioak asketzat jotzen dira.

2. Bektore labainkorrak. Hauk zuzen baten edozein puntutan aplikatu daitezke.



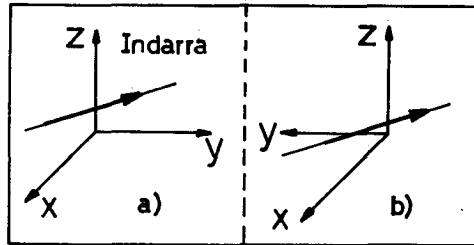
Kurtsore izenaz ere ezagutzen dira.

Hauen artean indarrak ditugu.

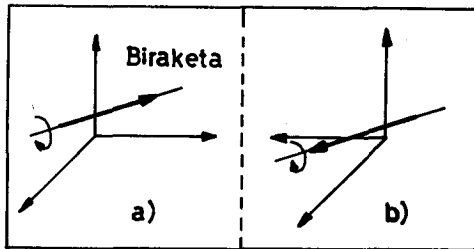
- . Bektore lotuak. Puntu bakar batetan aplikaturik baino ez du te zentzurik. Aplikazio-puntu finkoa dute beraz. Hauen artean, puntu baten abiadura aipa dezakegu.

Bestelako sailkapen batzu ere egin daitezke. Adibidez, ondo ko hau:

- . Bektore polarrak. Bene tako bektoreak. Nahiz eta triedro direktutik (a) inbertsura (b) pasa, direkzio eta senti do berberaz ageri dira. Indarra, adibidez.



- . Ardatz-bektoreak, edo bektore axialak, sasi-bektoreak ere deituak. Haux hitzarmen batetan finkaturik dute sentido eta sistema direktu batetatik inbertsu batetara aldatzean hi tzarmena aldatzen de-



nez, sentidoz aldatzen dira. Hauen artean, biraketak ditugu.

Bukatzeko, lege fisikoen kobariantzia aipatu behar dugu. 1.2. galderan ikusi dugunez, lege fisiko baten formulaketan agertzen diren termino guztiek kobarianteak izan behar dute, hau da, lehen zatian bektore bat badago, bigarrenen ere bek torea egon beharko da

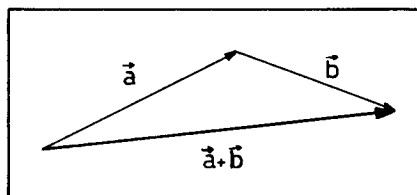
bektore = bektore
eskalare = eskalare

2.3. BEKTORE ASKEEN ALGEBRA.

Puntu honetan geometrikoki azalduko ditugu bektore askeen egin daitezkeen eragiketen propietateak. Banan banan aztertuko ditugu.

. Bektoreen batuketa.

Bi bektoreren batuketa egingeko, bata bestearen atzetik jartzen dira irudian bezela. Lortzen den emaitza, batura da.



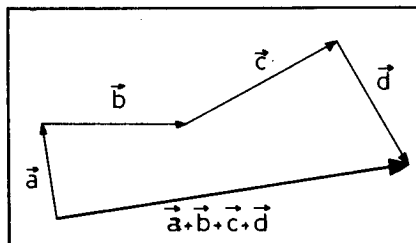
Bektoreen batuketak bi propietate ditu:

a) Trukakorra

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

b) Elkarkorra

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



. Eskalare eta bektore baten arteko biderkaketa

f eskalarearen eta $\vec{a}$ bektorearen arteko biderkaketa egingean, $\vec{a}$ -ren direkzioko bektore bat lortzen da, baina modulu f aldiz handiagoa da eta sentidoa, berdina f positiboa bada eta alderantzizkoa f negatiboa bada

$$f \vec{a} \longrightarrow |f \vec{a}| = f |\vec{a}| = f a$$

Propietate hauk ditu:

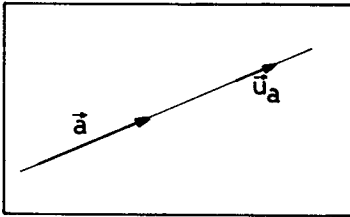
a) Trukakorra

$$f \vec{a} = \vec{a} f$$

b) Banakorra

. bektorearekiko: $(f_1 + f_2) \vec{a} = f_1 \vec{a} + f_2 \vec{a}$

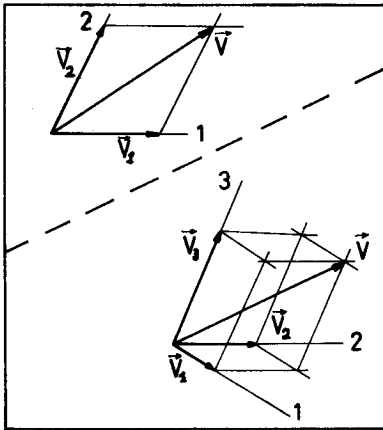
. eskalarearekiko: $f (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = f \vec{a}_1 + f \vec{a}_2$



$\vec{u}$ bektorea $\vec{a}$ direkzioko bektore unitarioa bada

$$|\vec{u}| = 1$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{u}_a = a \vec{u}_a$$

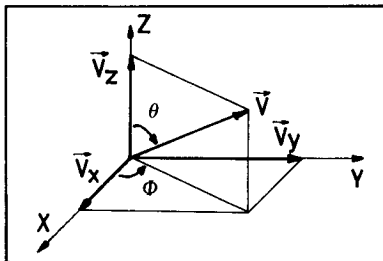
. Bektore baten osagaiak

Bi direkzio hartuz (1,2) eta direkzio horik edukiz beren batuketa $\vec{v}$ bada, $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$, $\vec{v}$ bektoreak bi direkzio horietan dituen osagaiak direla esaten da

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Espazioan, hiru direkzio ez-koplanario hartu behar ditugu

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

. Osagai cartesianarrak

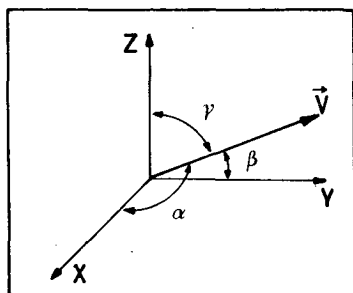
Ardatz cartesianarrei buruzko osagaiak hauxek dira

$$\begin{cases} v_x = v \sin \theta \cos \phi \\ v_y = v \sin \theta \sin \phi \\ v_z = v \cos \theta \end{cases}$$

Erraz froga daitekeenez

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

. Kosinu zuzentzaileak

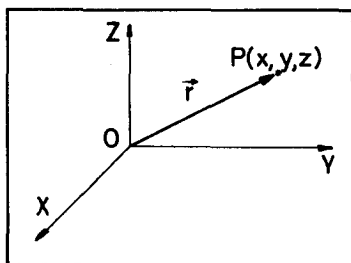


Beste batzutan, ardatz koordena-
tuekiko angeluak erabiltzen dira:
 α , β , γ . Hauen kosinuak, ko-
sinu zuzentzaile deitzen dira:

$$\begin{cases} v_x = v \cos \alpha \\ v_y = v \cos \beta \\ v_z = v \cos \gamma \end{cases}$$

Hemen: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

. Posizio-bektorea



Sistemaren jatorritik (O-tik) pun-
tu batetara (P-ra) doan bektorea
da. $\vec{r}$ letraz adierazten da

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

. Bektoreen baturaren osagaiak

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots \quad \text{izanik}$$

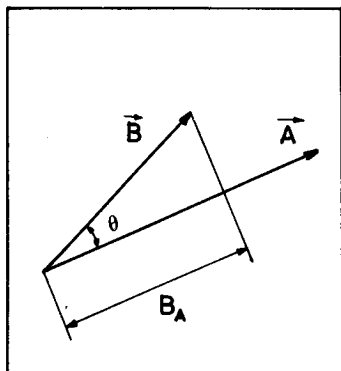
$$\begin{cases} v_x = v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} + \dots = \sum_i v_{ix} \\ v_y = \sum_i v_{iy} \\ v_z = \sum_i v_{iz} \end{cases}$$

Hots, baturaren osagaiak, bektoreen osagaien baturak dira.

. Biderkaketa eskalarra

Bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra honela defini-
tzen da: Eskalare bat da, bektore bien moduluaren eta forma-
tzen duten angeluaren kosinuaren biderkaketa lortua. Honela

adierazten da



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Definizio honen esangura geometrikoa oso sinplea da.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB_A = A_B B$$

Hemen B_A , $\vec{B}$ bektoreak $\vec{A}$ direkzioan duen proiektzioaren modua izanik.

Argi dagoenez

$$B_A = B \cos(\vec{A}, \vec{B}) = B \cos \theta$$

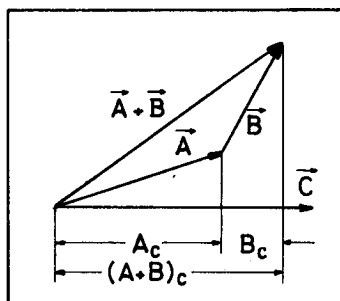
Biderkaketa eskalarrak ondoko propietate operazionalak ditu:

- Trukakorra da $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Propietate hau definizioz ulertzen da

- Banakorra da bektorearen batuketari dagokionez:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$$



Honen frogapena alboko irudiaren laguntzaz egin daiteke erraz.

Ikusten denez:

$$(\vec{A} + \vec{B})_C = A_C + B_C$$

Eta honetan finkatuz, goikoa frogaturik geratzen da.

Bi bektoreen biderkadura eskalarraz hainbeste ohar egin daiteke:

I) Bi bektoreen biderkadura eskalarra zero bada, eta ez bada ez bestea nulu ez badira, bi bektore horik perpendikularak (ortogonalak) dira

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{A} \neq 0 \text{ eta } \vec{B} \neq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

zeren eta $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0$

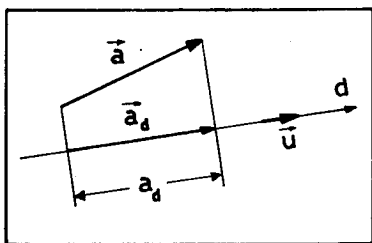
II) Erraz ikus daitekeenez, bektore unitarioen biderkadura eskalarrek ondokoak dira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{array} \right.$$

III) Bektore ber baten biderkaketaz, moduluaren karratua lor tzen da

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

IV) Direkzio baten bektore unitarioa ezagutuz, erraz kalkula daiteke, edozein bektorek direkzio horretan duen pro jekzioa



$$\vec{a}_d = \vec{a} \cdot \vec{u}$$

Izatez, hauxe da projekzioa. Batzutan, bektorialki idaz ten da:

$$\vec{a}_d = (\vec{a} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

Honetaz finkatuz, edozein bektoreren osagai cartesiarrak ho nela lortzen dira

$$v_x = \vec{V} \cdot \vec{i} \quad v_y = \vec{V} \cdot \vec{j} \quad v_z = \vec{V} \cdot \vec{k}$$

V) Bi bektoreren arteko biderkadura eskalarra honela kalku-

latzen da osagaien funtzioan

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Edozein modutan komeni da gogora eraztea, ezen hau osagai errektangeluarren kasuan gertatzen dela soilik.

Osagaien bidez honela adierazten da bi bektore horien arteko angeluaren kosinua:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

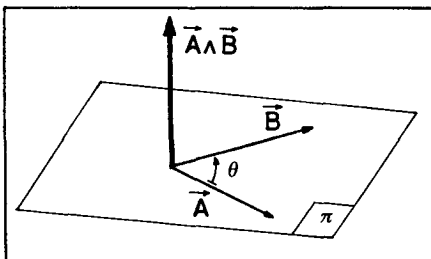
VI) Bektore bat bi bektoreren batura denean, honela kalkulatu tzen da beraren karratua

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$V^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = V_1^2 + V_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

• Biderkaketa bektoriala

Definizioa, bi bektoreren arteko biderkaketa bektorialaz beste bektore bat lortzen da, haiek osotzen duten planoaren perpendikularra dena, sentidoa torlojuaren aurrerapenarena (lehen bektoretik bigarrenera bira egitean baina osotzen duten angelurik txikienaren arauera) duena eta modulua bi bektoreen moduluaren eta formatzen duten angeluaren sinuaren arteko biderkadura izanik.



$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin \theta$$

$\vec{A} \wedge \vec{B}$ edo $\vec{A} \times \vec{B}$ sinbo loez adierazten da.

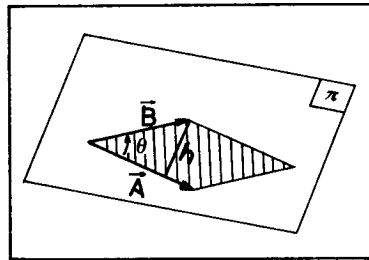
Izatez, sasibektore bat da

Beraren moduluari esangura geometriko argia eman dakio ke. Alboko irudian ikusten denez,

$$h = B \sin \theta \text{ izanik,}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin \theta = Ah$$

Hots, iruditurik dagoen paralelogramoaren azalera da.

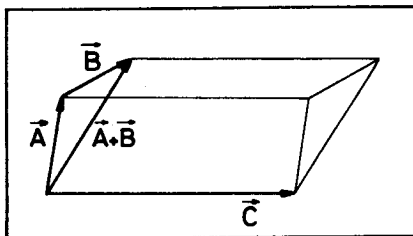


Biderkaketa bektorialak ondoko propietateak ditu:

- Antitrukakorra da

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \vec{A} \quad (\text{definizioz ikusten da})$$

- Banakorra da bektoreen batuketarekiko



$$(\vec{A} + \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{B} \wedge \vec{C}$$

irudian ageri da frogapena, hiru bektoreak plano berean daudenean.

- Ez da elkarkorra

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} \neq \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

Biderkadura bektorialaz ere hainbeste ohar egin daitezke:

I) Bi bektore nulu ez izanik, beraien arteko biderkadura bektoriala zero bada, bi bektoreok paraleloak dira:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} \wedge \vec{B} = 0 \\ \vec{A} \neq 0, \vec{B} \neq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$$

II) Sistema cartesiarraren bektore unitarioen arteko biderkadura bektorialak ondokoak dira

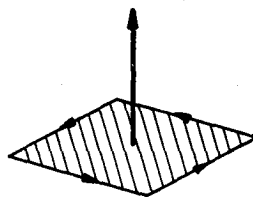
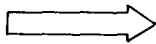
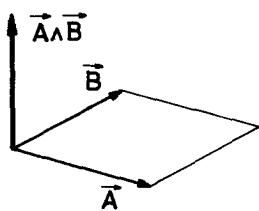
$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{c} \vec{i} \\ \curvearrowright \quad \vec{j} \\ \vec{k} \end{array} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= 0 \\ \vec{j} \wedge \vec{j} &= 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{k} &= 0 \end{aligned} \right.$$

III) Bi bektoreren biderkadura bektoriala honela adierazten da haien osagaien funtzioan

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

IV) Biderkadura bektorialaren definizioan oinarriturik, eta hitzarmen bat eginez, azalerak bektoreren bidez adieraziko ditugu:

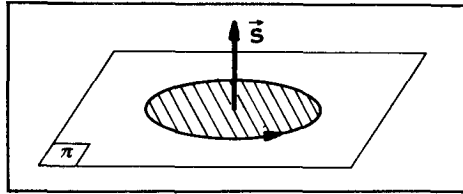


$|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ paralelogramoaren azalera da

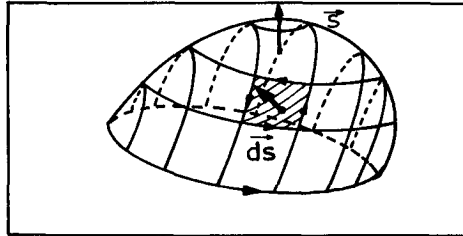
Analogiaz, azalera laun bati bektore bat lotzen diogu.

Modulua: azalera; direkzioa: perpendikularra; sentidoa: hitzarmena (torlojuarena)

Analogian beste pauso bat emanik, berdin egiten dugu beste edozein azalera launez, nahiz eta ingurumaria paralelogramoa ez izan.

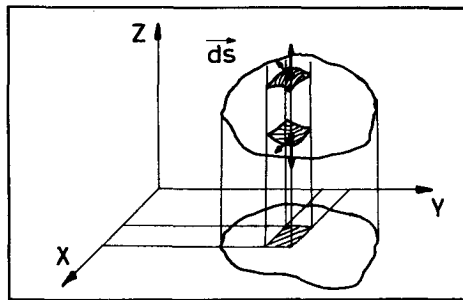


Aurrera joanik, azalera launa ez den kasurako ere generaliza dezakegu lehenengo hitzarmena. Elementu infinitesimaletan banatuz, hauk launtzat jo daitezke eta bakoitzari $d\vec{s}$ bektore bat lot dakioke. Denetara:



$$\vec{S} = \sum d\vec{s}_i = \int d\vec{s}$$

Azal guztiz hertsien kasuan denetara lortzen den azalaren bektorea, nulua da, zeren eta osagaiak anulatu egiten baitira.



. Hiru bektoreen biderkadura mixtoa.

Definizioz, $\vec{A}$, $\vec{B}$ eta $\vec{C}$ bektoreen biderkadura mixtoa honela lortzen da:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

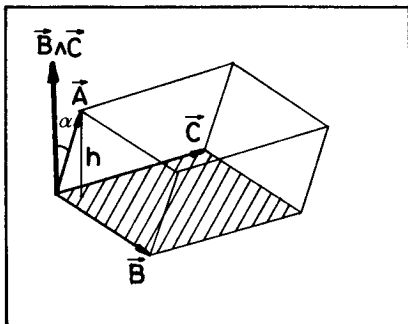
Errazki ikus eta frogatu daitezkeenez:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Goiko determinantearen hedapena kontutan harturik

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{B})$$

Hau da, ordena aldatu arren, biderkadura mixtoa ez da aldatzen $\vec{C} \rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ permutazioaren sentidoa aldatzen ez bada.



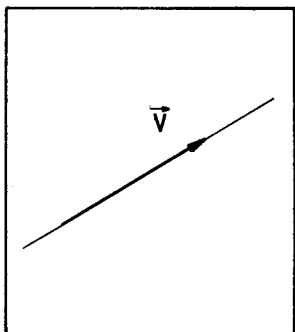
Esangura geometrikoari dagokionez, $\vec{A}$, $\vec{B}$ eta $\vec{C}$ bektoreek osotzen duten paralelepipedoaren bolumena adierazten duela esan behar da, $|\vec{B} \wedge \vec{C}|$ oinarriaren azalera izanik eta $A \cos \alpha$ paralelepipedoaren altuera (h)

Esangura geometrikoan finkatuz, erraz ikusten da ezen hiru bektoreak launkide edo koplanarioak direnean,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0 \quad \text{dela.}$$

2.4. KURTSOREEN SISTEMAK

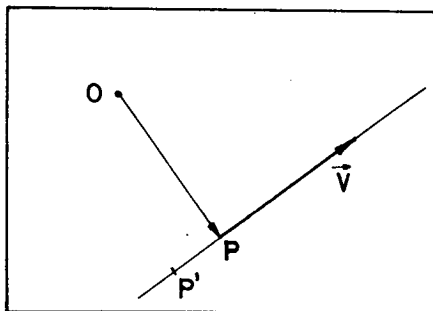
Bektoreen sailkapena egitean ikusi genuen bezala, kurtsoak bektore labainkorrak dira, hots, direkzioa eta modulua ezagunak ditugu baina aplikazio-puntu zuzen batetako edozein da.



Adibide gisa, indarra eta abiadura angeluarra aipa ditzakegu (azken hau, sasibektorea da). Izatez, indarrak kurtso bezala tratatzean, gorputzak solido zurruntzat dauzkagu. Elastikotasuna kontutan hartzean, ezin daiteke modu berean egin eta hemen esaten denak ez du balio.

. Kurtsore baten momentua

Zuzena kalkuluetarako erabiltzea nahastagarria denez, kurtsoak erreduzitu egiten dira puntu batetara. Horre-



tarako magnitude berri bat definitzen da: momentua edo hobeki eta zehazkiago esateko, puntu batekiko momentua.

Honela definitzen da

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{V}$$

Hemen $\vec{OP}$, O puntutik zuzeneko edozein puntutara doan posizio-bektorea izanik.

P puntuaren ordeiz beste edozein puntu bat (P') hartuz, berdina da momentua. Ikus dezagun hori

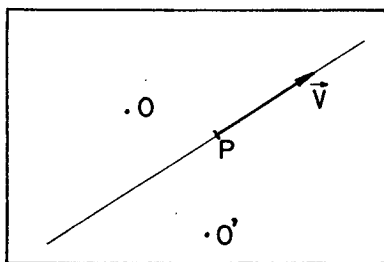
$$\vec{M}'_O = \vec{OP}' \wedge \vec{V} = (\vec{OP} + \vec{PP}') \wedge \vec{V} = \vec{OP} \wedge \vec{V} + \vec{PP}' \wedge \vec{V}$$

Baina $\vec{PP}' \wedge \vec{V} = 0$ zeren eta bi bektore hauk paraleloak baitira. Beraz:

$$\vec{M}'_O = \vec{OP} \wedge \vec{V} = \vec{M}_O$$

Ikusten denez, emandako definizioa bakarra da eta balio berdina du kurtsorearen aplikagune bezala bere zuzeneko edozein puntu harturik.

Aurrera beste pauso bat emateko, orain beste puntu desberdin batekiko (O') kalkulatu dugu momentua. Eta halaber, momentu honek lehengoarekin duen erlazioa:

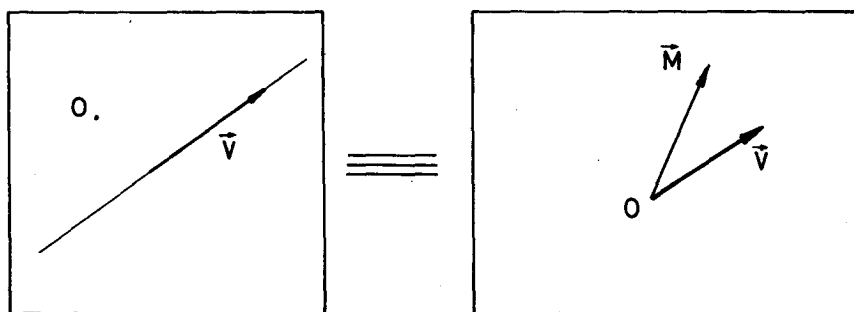


$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \vec{O'P} \wedge \vec{V} = \\ &= (\vec{O'O} + \vec{OP}) \wedge \vec{V} = \vec{O'O} \wedge \vec{V} + \vec{OP} \wedge \vec{V} \\ \vec{M}_{O'} &= \vec{M}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

Azken formula honetan oinarriturik, zera esan dezakegu: kurtsore batek edozein punturekiko duen momentua lortzeko, na hiko a dugu kurtsorea bera eta beste puntu batekiko momentua ezagutzea. Goiko formula irakurriz:

"O' puntuarekiko momentua lortzeko, lehenik O puntuarekiko $\vec{V}$ lortzen da eta gero honi gehitu egiten zaio $\vec{V}$ kurtsorearen O' puntuarekiko momentua, baina $\vec{V}$ kurtsorea O puntuan aplikaturik balego bezala".

Honék ondorio berezia du, alegia, kurtsorea puntu batetara erreduzi daitekeela, puntu horrekiko momentua emanik. Eta honek zera esan nahi digu, alegia, kurtsorearen efektuak espazio osora hedatzen badira, ondoko sistema biak baliokideak dira:

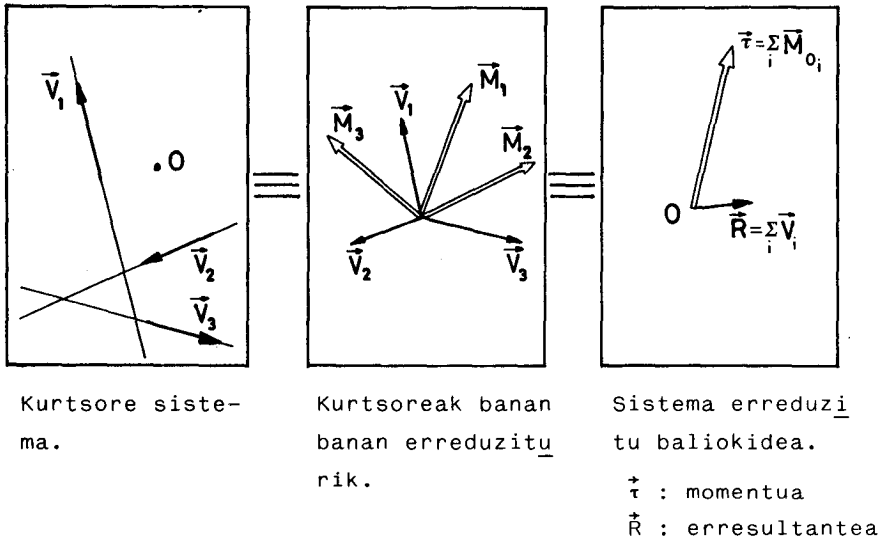


Kurtsorea bere labaintze-zuzenean

Kurtsorea puntu batetara erreduziturik

Baliokidetasun hori oso interesgarri eta lagungarri gertatzen zaigu, kurtsore askoz osoturik dagoen kurtsore-sistema bat erreduzitzeko. Banan banan, kurtsoreak puntu batetara erreduzitzen dira, eta gero gainezarmenaren printzipioan oinarriturik, bektoreak eta momentuak batuz, kurtsore-sistema osoa bektore bakar batez eta momentu bakar batez osoturik dagoen sistema batetara erreduzitzen da. Honela, sinplifikatu egiten zaigu sistema.

Eskematikoki, honela adieraz daiteke erredukzio-prozesua



Erraz ikus daitekeenez, momentu erresultanteak ere trans
formakuntz lege berberak betetzen ditu. Hara:

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{M}_{O_i}$$

$$\vec{\tau}_{O'} = \sum_i \vec{M}_{O',i} = \sum_i (\vec{M}_{O_i} + \vec{O'O} \wedge \vec{V}_i)$$

$$\vec{\tau}_{O'} = \sum_i \vec{M}_{O_i} + \sum_i \vec{O'O} \wedge \vec{V}_i = \vec{\tau}_O + \vec{O'O} \wedge \left(\sum_i \vec{V}_i \right)$$

Beraz

$$\vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R}$$

- . Espazioko inbarianteak. Espazioan kurtsoreen sistema bat kon
tsideratzean, espazioko puntu guztietan balore berdina duten
magnitude batzu daudela konturatzen gara. Magnitude hauk in-
bariante deitzen dira.

Bi dira nagusiki:

- Batetik, inbariante bektoriala. Hau sistemaren erresultantea da, $\vec{R}$. Sistema edozein puntutara erreduzitzean, erresultantea beti da berbera

$$\vec{R} = \sum_i \vec{V}_i$$

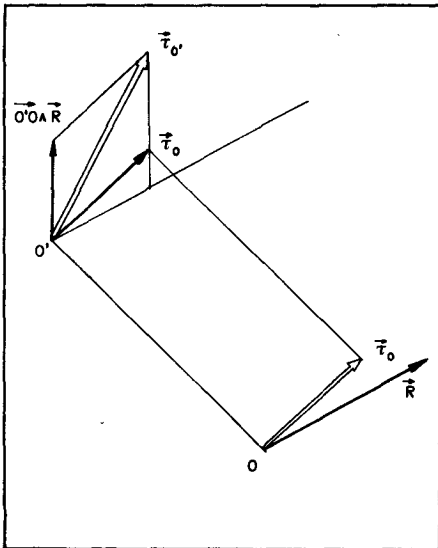
- Bestetik, inbariante eskalarra: $\vec{r} \cdot \vec{R}$. Magnitude hau inbariantea dela ikusteko, egin dezagun operazio hori bi puntu desberdinetan:

$$O \text{ puntuan} \quad \vec{r}_O \cdot \vec{R}$$

$$\begin{aligned} O' \text{ puntuan} \quad \vec{r}_{O'} \cdot \vec{R} &= (\vec{r}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = \\ &= \vec{r}_O \cdot \vec{R} + (\vec{O'O} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{r}_O \cdot \vec{R} \end{aligned}$$

Ikusten denez, bi kasuetan balore berbera hartzen du, eta beraz, inbariantea da.

Inbariante eskalarraren esangura, geometrikoki ere azter dezakegu.

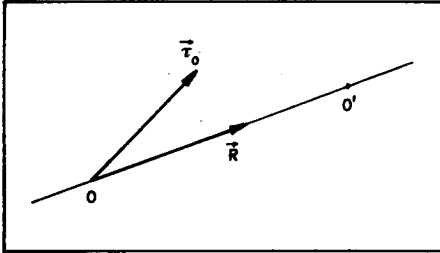


$$O \text{ puntuan} \quad \vec{r}_O \cdot \vec{R}$$

$$O' \text{ puntuan} \quad \vec{r}_{O'} = \vec{r}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R}$$

Baina $\vec{O'O} \wedge \vec{R}$ eta $\vec{R}$ elkarren perpendikularrak dira eta beraz, $\vec{O'O} \wedge \vec{R}$ delakoak $\vec{R}$ delakoaren direkzioan duen projekzioa, nulua da. Beste hitz batzuz esateko, $\vec{r}_O$ eta $\vec{r}_{O'}$ momentuek $\vec{R}$ erresultantearen direkzioan duten osagaia (edo projekzioa) berbera da, hots inbariantea da.

Aurrera joanik, ikus dezagun beste inbariantzia berezi bat. Demagun orain, OO' zuzenak (O eta O' puntuetatik pasatzen den zuzenak), erresultantearen direkzioa duela.



$$\vec{r}_{O'} = \vec{r}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} = \vec{r}_O$$

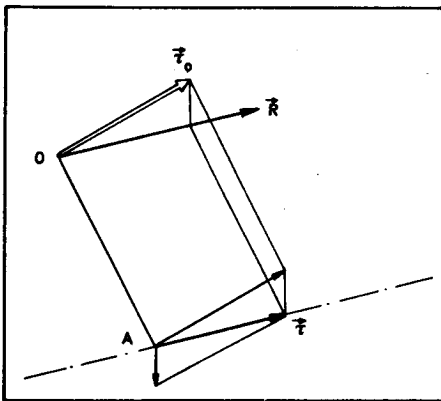
Hots, O eta O' puntuekiko momentuak berdinak dira.

Hau honela adieraz dezakegu:
"Erresultantearen direkzioa

duten zuzenak, momentu berdineko puntuen leku geometrikoak dira".

. Momentu minimoa eta ardatz zentrala

Inbariante eskalarra aztertzean ikusi dugunez, momentuak erresultantearen direkzioan duen projekzioa inbariantea da. Honek esan nahi du, espazio osoan egon daitekeen momenturik txikienaren modulua, projekzio hori dela. Bestalde beraren direkzioa erresultantearena da. Momentu txikien hori momentu minimo deitzen da.



Modulua:

$$\tau = \frac{\vec{r}_O \cdot \vec{R}}{R}$$

Direkzioa

$$\vec{u}_\tau = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau = \frac{\vec{r}_O \cdot \vec{R}}{R} \\ \vec{u}_\tau = \frac{\vec{R}}{R} \end{array} \right\} \vec{\tau} = \frac{\vec{r}_O \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R}$$

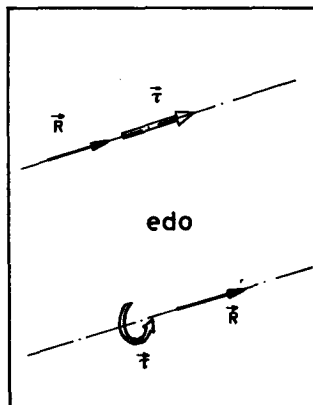
Bestalde, erresultantearen direkzioko zuzenak, momentu berdineko puntuen leku geometrikoak direnez, momentu minimoa dutenak zuzen bat osotzen dute: zuzen hori ardatz zentrala deitzen da.

Ikusitako puntuak kontutan harturik, ikus dezagun zenbat modutan errezduzi daitekeen kurtsoreen sistema:

- I) Kasurik generalenean, ardatz zentraleko puntuetan erresultantea eta momentu minimoa izanen ditugu, biak direkzio berekoak (sentido berekoak edo aurkakoak izan daitezke):

$$\vec{r} \neq 0 \quad \vec{R} \neq 0$$

Sistema hau tortsore izenez ezagutzen da.

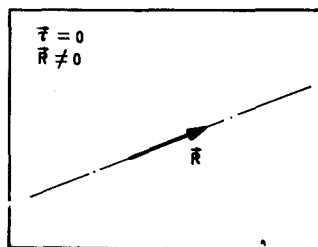


- II) Erresultantea nulu denean, $\vec{R} = 0$, momentua berdina da espazioko puntu guztietan

$$\vec{r}_{O'} = \vec{r}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} = \vec{r}_O$$

Sistema osoa momentu batez adierazten da espazioko edozein puntutan. Kutsoreen sistema momentu bakar baten baliokidea da.

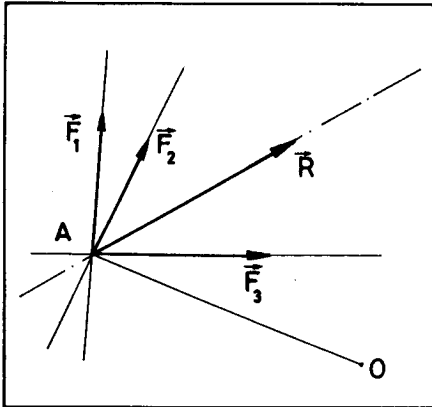
- III) Momentu minimoa nulua bada, $\vec{r} = 0$ erresultantea nulua ez izanik, sistema osoa kurtsore bakar batez adieraz daiteke, kurtsore hori erresultantea delarik, ardatz zentrolean aplikaturik.



- IV) Momentu minimoa eta erresultantea nuluak badira, espazio ko puntu guztietan ere nuluak dira eta sistema hori orekan dagoela esaten da.

ZENBAIT KASU BEREZI

- . Sistema konkurrentea. Demagun konkurrentzi puntua A dela. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i$, kurtsoreen labaintze-zuzenak A puntutik pasatzen dira. Erresultantea zera da:



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i$$

Bestalde, bektoreen labaintze-zuzenak A puntutik pasatzen direnez, A puntuarekiko momentua nulua da:

$$\vec{\tau}_{iA} = 0 \longrightarrow \vec{\tau}_A = \sum \vec{\tau}_{iA} = 0$$

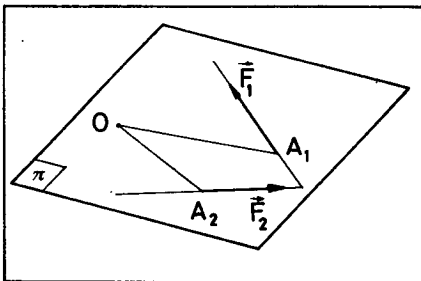
Beraz, momentu minimoa nulua da $\vec{\tau} = 0$, eta honek esan nahi du, ezen sistema osoa kurtsore bakar batez erreprezentatu litekeela. Bestalde, A puntua ardatz zentralkoa da ($\vec{\tau}_A = 0 = \vec{\tau}$ baita). Horrela, ba, ardatz zentrala A puntutik pasatuz $\vec{R}$ erresultantearen direkzioa duen zuzena da.

Espazioko edozein puntutan, momentua eta erresultantea perpendikularrak dira; ondoko balorea du momentuak:

$$\vec{\tau}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_2 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_3 + \dots$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) = \vec{OA} \wedge \vec{R}$$

- . Sistema planokidea (bektore koplanarioak)



Bektoreak daudeneko zuzenak plano ber batetan daude. Iku siko dugunez, momentuak plano horren direkzio perpendikularra du

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 & \perp \pi \\ \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2 & \perp \pi \\ \dots\dots\dots & \end{array} \right.$$

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i \quad \perp \pi$$

Hemen, O puntua π planoan hartu dugu, irudian ikusten den legez.

Bestalde, erresultanteak berak π planoaren direkzio paraleloa du

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

Beraz $\vec{R}$ eta $\vec{\tau}_O$ perpendikularrak dira:

$$\vec{R} \cdot \vec{\tau}_O = 0$$

Eta honek, momentu minimoa nulua dela esan nahi du:

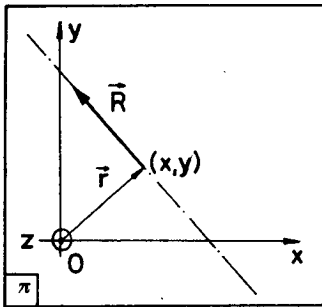
$$\vec{\tau}_O = 0$$

Egia esan, hau honela da, $\vec{R} \neq 0$ bada.

$\vec{R} = 0$ baldin bada, ez da zertan $\vec{\tau} = 0$ izan behar. Horrelatan, ba, bi kasu aztertuko ditugu.

a) $R \neq 0$. Esan bezala, kasu honetan $\vec{\tau} = 0$. Kasu hau kurtso re bakar baten baliokidea da. Ardatz zentrala kalkulatu-ko dugu.

O_x , O_y ardatzak π planoan hartuko ditugu. O_z perpendikularra da. Momentua eta erresultantea bektore unitarioen funtzioan ipiniko ditugu:



$$\begin{cases} \vec{\tau}_O = \tau_O \vec{k} \\ \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \\ \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \end{cases}$$

Hori posible izan dadin, $\vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{\tau}_O$ izan behar da

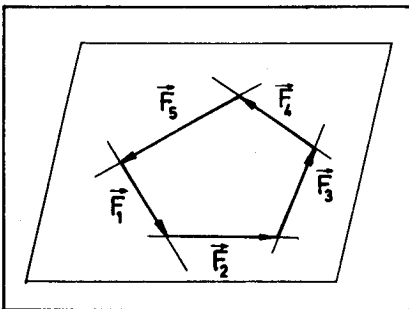
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{vmatrix} = (x R_y - y R_x) \vec{k} = \tau_O \vec{k}$$

$$\tau_O = x R_y - y R_x$$

$\vec{\tau}_O$ eta $\vec{R}$ ezagutuz, azken espresio honek ardatz zentra-
laren ekuazioa ematen digu.

- b) $\vec{R} = 0$ eta $\vec{\tau} \neq 0$ baldin bada, sistema osoa momentu ba-
tez adieraz daiteke. Espazioko puntu guztietan momentuak
balore berbera du:

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}$$

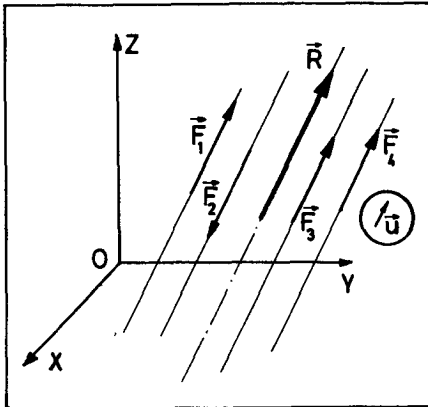


Adibidez, alboko irudiko
sistemaren kasuan:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{\tau} \neq 0$$

. Kurtsore paraleloz osoturiko sistema



Kasu honetan kurtsore guztiek direkzio berbera dute eta honela adieraz daitezke:

$$\vec{F}_i = F_i \vec{u}$$

Beraz, erresultanteak ere direkzio berbera du.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i F_i \vec{u} = \left(\sum_i F_i \right) \vec{u}$$

Momentua eta erresultantea elkarren perpendikularrak dira

$$\vec{\tau}_O = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{u} F_i =$$

$$\vec{\tau}_O = \left(\sum_i \vec{r}_i F_i \right) \wedge \vec{u}$$

Ikusten denez, $\vec{\tau}_O \perp \vec{R}$

Eta $\vec{\tau}_O \cdot \vec{R} = 0$ denez gero, ondoko posibilitateak ditugu:

- $\vec{R} \neq 0$ bada, $\vec{\tau}_O \cdot \vec{R} = 0$ denez, momentu minimoa nulu da, eta sistema osoa kurtsore bakar batetara erreduzi daiteke (ardatz zentralean aplikaturik, noski)
- $\vec{R} = 0$ bada, espazioko puntu guztietan momentu berbera dugu.

3. GAIA - PUNTUAREN ZINEMATIKA

3.1. PUNTU MATERIAL BATEN HIGIDURAREN ABIADURA ETA AZELERAZIOA

- ABIADURA
- AZELERAZIOA

3.2. AZELERAZIO KONSTANTEKO HIGIDURA

3.3. AZELERAZIOAREN OSAGAI TANGENTE ETA NORMALA

3.4. HIGIDURA ZIRKULARRA

- ABIADURA ANGELUARRA
- AZELERAZIO ANGELUARRA
- AZELERAZIO LINEALA

3.5. HIGIDURA KURBATUA PLANOAN

Gertakari fisikoen artean, ongien ikusten eta antzematen duguna higidura da. Gorputz arruntak, planetak, haizea, elektroiak, gas baten molekulak, guztiak ari dira higitzen. Gainera, gorputzen arteko elkarrazioek mugatu egiten dute no labait, higidura nolakoa izanen den.

Mekanikaren helburua gorputzen higidura aurrikustea da. Horretarako lehenik eta behin higidura bera deskribatzen eta adierazten jakin behar du. Nolabait esateko, hizkuntza matemtikoaren bidez, higiduren deskribapena egin beharko du. Eta horixe da lehen pausoa, Zinematikan ematen dena hain zuzen ere. Bigarren pausoa, elkarrazioak ezagutzea da; eta gero, elkarrazioak ezagutuz, gertatzeko den higidura nolakoa izanen den aurrikustea. Azken bi pauso hauk Dinamikan ematen dira.

Honela, ba, bi arlo nagusitan banatzen da Mekanika.

- I) Zinematika. Arlo honetan higidura bera aztertzen da soilik. Higidura ongi deskribatzeko erabiltzen diren magnitude eta teknika matematikoak lantzen dira, higidura sortzen duteneko kausetaz arduratu gabe.
- II) Dinamika. Dinamikan higidura sortzen duteneko kausak aztertzen dira: elkarrazioak edo indarrak. Eta halaber indarron eta magnitude zinematikoen artean dauden erlazioak ere.

3.1 PUNTU MATERIAL BATEN HIGIDURAREN ABIADURA ETA AZELERAZIOA

Ezer baino lehen, argi utzi behar da, zer erreferentzia rekiko neurtu eta deskribatuko den higidura. Eta zergatik ho ri? Higidura gauza erlatiboa delako.

Pausagunea eta higidura gauza erlatiboak dira. Hau argi ikus daiteke adibide sinplerekin. Demagun hegazkin batetan doan bidaiari bat. Hegazkin berean doazenekiko, geldi dago; aldiz, Lurrean geldi daudenekiko, abiadura handiz higitzen ari da.

Honelatan, ba, higidura-neurketak eta deskribapenak egi teko, lehenik eta behin erreferentzi sistema bat hartu behar da. Eta bertan kokatu behar da, neurketak eginen dituen beha tzailea.

Higidura aztertzea, azken batez, aldiune desberdinetan gorputz batek erreferentzi sistema batetan dituen posizioak adieraztea da. Beraz, oinarri-oinarrian bi neurketa-motaren beharra ageri da: denboraren neurketa (aldiunea) eta distan tzien neurketa (posizioa). Eta noski, neurketa horik egiten dituen pertsonaia hipotetiko eta ideal bat egon beharko da, behatzailea alegia. Elementu hauen multzoa da erreferentzi sistema.

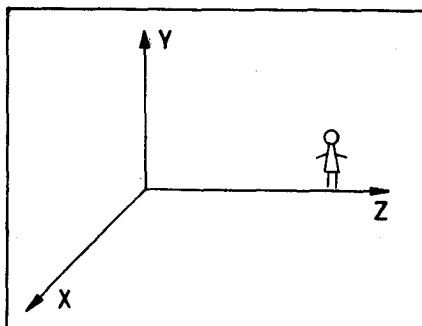
Gorputzaren posizioari dagokionez, erreferentzi sistema ren hautapenetik bertatik sortzen da higiduraren erlatibota-suna, posizioak ez baitira era berean neurtzen bi erreferen-tzi sistema desberdinetatik.

Denboraren neurketei dagokienez, ondoko galdera egin diezaiokegu geure buruari. Erreferentzi sistemak ba ote du eraginik denbora-tarteen neurketan? Fisika ez-erlatibistak ezezko erantzuna ematen du, denboraren eboluzioa gauza abso

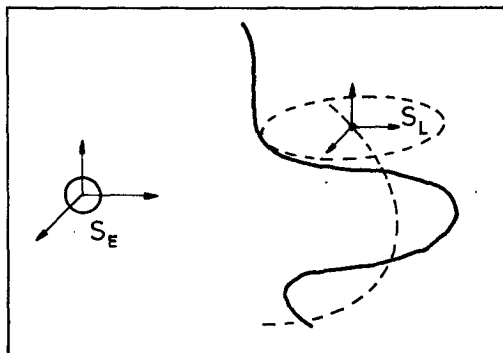
lututzat hartuz; eta liburu honetan erizpide hau erabiliko du gu. Ez da soberan egongo, ordea, denboraren absolututasuna - postulatu gisako suposizioa baino ez dela azpimarratzea. Hain zuzen ere, Erlatibitatearen Teoriaren arloan sartzean erizpi de horrek ez du inolako baliorik. Dena den, gure liburu hone tan agertzen diren azterketetan, denbora modu berean aldatzen ikusiko dute behatzaile guztiek.

Beraz, sistema desberdinetan dauden behatzaileek, modu desberdinez ikusiko eta deskribatuko dute higidura berbera. Hala ere, higidura bat bakarra da. Hau argi ikusteko, adibi de bat jarriko dugu. Baina, ezer baino lehen, erreferentzi sistemak nola adierazten diren azalduko dugu.

- . Erreferentzi sistemak adie razteko, nahikoa da, trie dro bat ematea eta bertan behatzaile bat kontsidera tzea.



- . Ipin dezagun adibide bat. Demagun hilargiaren higidu ra. Higidura hau eguzkian dagoen sistematik (S_E) eta lurreen egonik S_E -ren paraleloa den sistematik (S_L) azter tuko dugu.

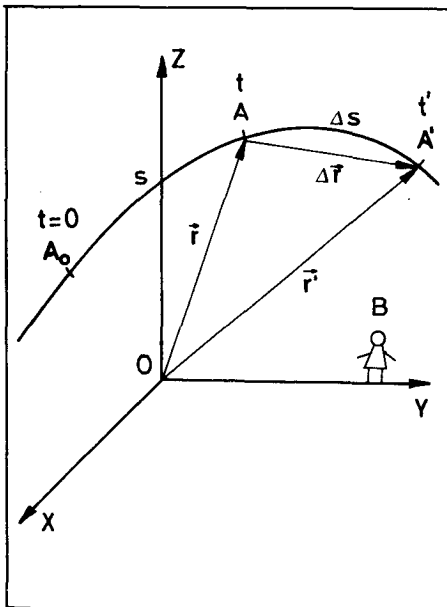


S_L sistematik, hilargiak elipse bat (ia-ia zirkun ferentzia bat) deskriba tzen duela ikusten da (irudian puntuka dago).

S_E sistematik ordea, uhin antzeko batzu dituen ibil bide bat ikusten da.

Hurrengo gaian, higidura erlatiboa aztertzean, erreferen-
tzi sistema desberdinetako behatzaileen neurketen arteko erla-
zioak aztertuko ditugu. Baina oraingo honetan, erreferentzi
sistema bakar bat hartuko dugu oinarritzat. Eta horretatik hi
giduraren ezagugarri nagusiak aztertuko ditugu: abiadura eta
azelerazioa. Hauetaz gainera, ibilbidea kontsideratu behar du-
gu, noski. Eta hasteko, kasu generala aztertzeko, ibilbidea
lerromakurra dela kontsideratuko dugu.

. Abiadura



Lehenik eta behin, irudian
ageri diren elementuak de-
finituko ditugu.

$\overline{A_0 A A'}$: ibilbidea.

A_0 : Lehen unean ($t = 0$)
partikula dagoeneko
puntua.

A : t aldiunean partiku-
la dagoeneko puntua.

A' : t' aldiunean parti-
kula dagoeneko pun-
tua.

$\vec{r}$: A puntuaren posizio-
-bektorea.

$\vec{r}'$: A' puntuaren posizio-
-bektorea.

$A_0 A = s$: arku-luzera

$\Delta \vec{r}$: AA' baina bektorialki neurturik (desplazamendu bektoria-
la).

Δs : AA' baina arkuan barrena neurturik.

Δt : $t' - t$ denbora-tartea.

Lehenik batezbesteko abiadurak definituko ditugu; eta gai nera bi modu desberdinez.

a) Eskalarki $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

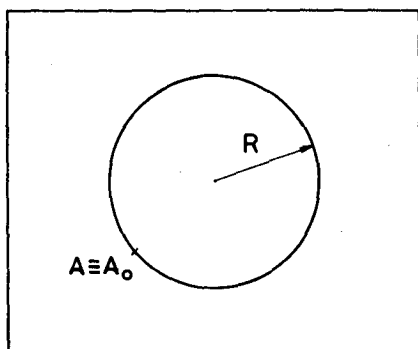
b) Bektorialki $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Izatez, bi hauen artean ez dago harreman finkorik. Adibi de batez, zein desberdin izan daitezkeen ikusiko dugu.

Abiadura magnitudearen dimentsio-ekuazioa hauxe da

$$[v] = \left[\frac{s}{t} \right] = L T^{-1}$$

Unitateak hauxek dira: ms^{-1} , $cm s^{-1}$



Demagun ibilbide zirkular bat, eta kontsidera ditzagun bira oso bat ematean lortzen ditugun batezbesteko abiadurak.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2 \pi R}{\Delta t}$$

$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 0$, hasierako eta bukaerako puntuak toki berean baitaude.

Batezbesteko abiadurak definitu ondoren, orain aldiuneko abiadurak definituko ditugu. Eta lehen bezala, bi moduz egingen dugu.

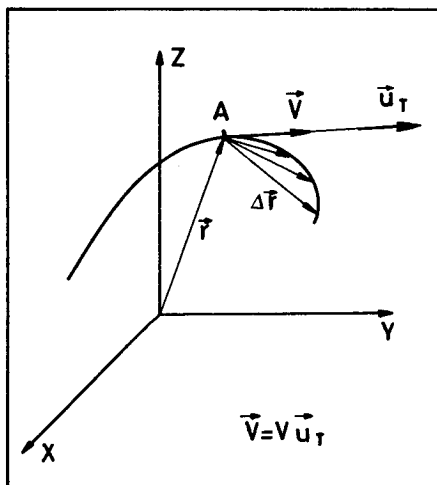
a) Eskalarki. Batezbesteko abiadura eskalarraren limitea da, Δt tarteak zerorantz jotzean.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Hauxe da prezeski autoen belozimetroak adierazten duen abiadura.

- b) Bektorialki. Aldiuneko abiadura batezbesteko abiadura bektorialaren limitea da, denbora-tarteak zerorantz jotzean:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Beraz, bektore bat da.

Direkzioa, kurbaren tangentearena da, zeren eta $\Delta \vec{r}$ bektorearen direkzioa limitean horixe baita, irudian ikusten den bezala.

Eta modulua, aldiuneko abiadura eskalarra (v) da:

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = v$$

zeren eta $|d\vec{r}| = ds$ baita.

Honelatan, ba, aldiuneko abiadura ondoko hau da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v \vec{u}_T$$

Honen osagaiak ondokoak dira:

$$\vec{v} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

zeren, $\vec{i}$, $\vec{j}$ eta $\vec{k}$ konstanteak izanik, $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ baitira.

Hau honela idatzi ohi da:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

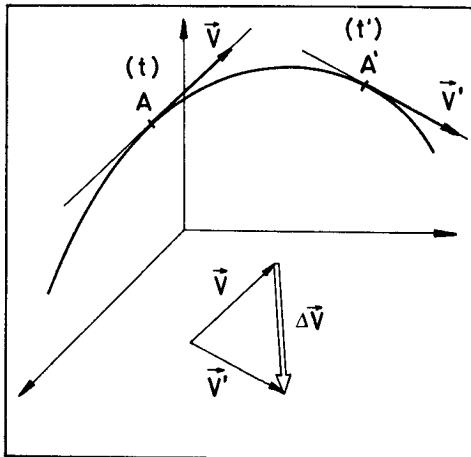
Abiaduraren modulua hauxe da:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

- . Azelerazioa. Generalki, puntuaren abiadura aldatuz doa den borarekin. Aldaketa hori adierazteko, magnitude berri bat erabiltzen da: azelerazioa. Honek, denbora unitateko abiaduraren aldaketa adierazten du. Azelerazioa magnitude bektorial bat da eta moduluz eta direkzioz abiadurak duen aldakuntza neurtzen du.

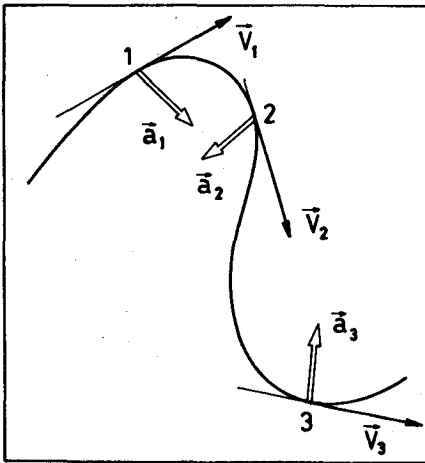


Lehenik, batezbesteko azelerazioa definituko dugu

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t}$$

Ondoren, aldiuneko azelerazioa definituko dugu, aurrekoaren limite gisa, denbora tarteak zerorantz jotzean:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Lehenago ikusi dugunez, abiadura ibilbidearen tangentea da. Generalean azelerazioak ez du direkzio hori. Azelerazioaren direkzioaz esan daitekeen gauza bakarra, ibilbidearen barru aldeko sentidoa duela da, hots alde konkaboranzkoa.

Azelerazioaren dimentsio-ekuazioa hauxe da:

$$[a] = \left[\frac{v}{t} \right] = L T^{-1} T^{-1} = L T^{-2}$$

Eta unitateak:

MKS sisteman : $m s^{-2}$

cgs sisteman : $cm s^{-2}$

Analitikoki honela adierazten da azelerazioa:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

Eta azelerazioaren modulua:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)^2}$$

3.2 AZELERAZIO KONSTANTEKO HIGIDURA

Higidura hau oso interesgarria da, grabitatearen erakarpenaren pean gertatzen dena baita (Lurraren azalean). Matematika tikoki problema honetan datza: Azelerazioa ezagutuz eta lehen uneko baldintzak ezagutuz, higidura osoa eta abiadura ezagutzear.

Demagun azelerazioa konstantea dela $\vec{a} = k \frac{te}{}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{denez,} \quad d\vec{v} = \vec{a} dt$$

Eta integratuz:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a} dt = \vec{a} \int_{t_0}^t dt = \vec{a} (t - t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Beraz:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} (t - t_0) \quad [1]$$

$$\text{Hemen } \begin{cases} t_0 : \text{haserako aldiunea (A}_0 \text{ puntuan)} \\ \vec{v}_0 : \text{haserako abiadura (A}_0 \text{ puntuan)} \\ t : \text{edozein aldiunea (A puntuan)} \\ \vec{v} : \text{A puntuan duen abiadura} \end{cases}$$

Integratuz, aurrera jo dezakegu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{denez,}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^t \vec{v} dt = \int_{t_0}^t [\vec{v}_0 + \vec{a} (t - t_0)] dt$$

$$\begin{cases} OY : \text{bertikala} \\ OX : \text{horizontala} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$$

Kalkuluak errazteko,

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = 0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

eginen ditugu. Halaber

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{izanik}$$

[1] expresioa erabiliz, eta $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ eginik:

$$v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} - g t \vec{j}$$

Eta osagaiak banatuz

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Honek zera esan nahi digu, X direkzioan abiaduraren osa gaia denbora guztian berbera dela, hots, konstantea dela. Al-diz, Y direkzioan higidura uniformeki azeleratua (edo dezelele ratua) dugu.

* Kalkula dezagun, goiko punturaino (A) igoteko behar duen denbora (t_1)

A puntuan $v_y = 0$

Beraz $0 = v_{oy} - g t_1$ $t_1 = \frac{v_{oy}}{g}$

* Kalkula dezagun, orain, edozein punturen koordenatuen adierazpena. [2] expresioa harturik:

$$x \hat{i} + y \hat{j} = (v_{ox} \hat{i} + v_{oy} \hat{j}) t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j}$$

Eta osagaiak banaturik

$$\begin{cases} x = v_{ox} t \\ y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

* Azken hauetan finkatuz, garaierarik altuena (h) lor dezakegu. Horretarako, t_1 denbora y-ren formulara pasatuko dugu:

$$y_1 = h = v_{oy} \frac{v_{oy}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g}$$

Edo bestela idatzirik $h = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2 g}$

* Modu berean, OB = R alkantzea kalkula dezakegu. B puntuan, $y = 0$. Beraz :

$$0 = v_{oy} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

t_2 , B puntuan dagoeneko aldiunea izanik.

$$t_2 = 2 \frac{v_{oy}}{g} = 2 t_1$$

Honela, alkantzea B puntuaren x koordinatua denez,

$$R = v_{ox} t_2 = v_{ox} \frac{2 v_{oy}}{g} = \frac{2 v_o^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

Azkenean hauxe geratzen zaigu

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

- * Aurreko puntuan kalkulaturiko formularen finkatuz, v_0 hasierako abiaduraren balore fixu batekiko alkantze horizontala ren balore maximoa kalkula dezakegu. Bertan ikusten denez

$$R = f(\alpha)$$

Beraz, balore maximoa lortzeko $\frac{dR}{d\alpha} = 0$ egin behar dugu

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\alpha = 0$$

Hau gerta dadin, $\cos 2\alpha = 0$ izan behar da

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Beraz, v_0 hasierako abiaduraren balore fixu batekiko alkantze maximoa $\alpha = 45^\circ$ angeluari dagokio. Kasu honetan:

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$R = \frac{v_0^2}{g}$$

Gauza berbera ikus daiteke honela: R maximoa izango da, $\sin 2\alpha$ maximo denean hots

$$\sin 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

- * Kalkuluekin bukatzeko, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu. Horretarako $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ adierazpenetik, denbora eliminatu behar dugu, $y = y(x)$ gera dakigun.

$$\begin{cases} x = v_{ox} t & t = \frac{x}{v_{ox}} \\ y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Honela,

$$y = v_{oy} \frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{ox}^2}$$

$$y = - \left(\frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 + (\operatorname{tg} \alpha) x$$

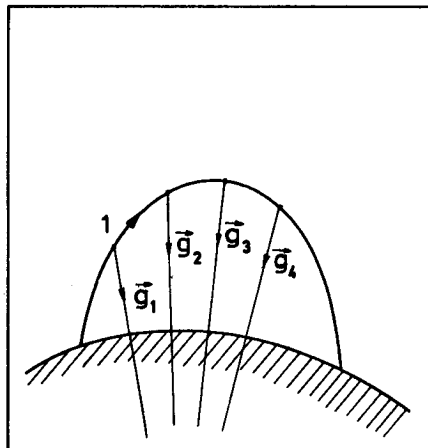
Hau parabola baten ekuazioa da ($y = ax^2 + bx + c$). Ardatzak y -ren direkzioa du eta ahurdura beherantz begira dago, x^2 -ren koefizientea negatiboa baita. Gainera, parabola hau ardatzen jatorritik iragaten da, $c = 0$ baita.

OHARRAK:

Grabitatearen eraginpean gertatzen den higidura aztertu dugularik, interesgarria da zenbait ohar egitea benetako higidura errealarari buruz. Izatez zenbait zuzenbide egin beharko lirateke hiru arrazoi nagusirengatik: Lurra esfera bat (izatez elipsoidea) delako, atmosferan airea dagoelako eta Lurra bere ardatzaren inguruan biraka ari delako.

- 1) Higidura oso luzea denean, kontutan eduki behar da Lurrraren kurbadura. Honen kausaz $\vec{g}$ aldatuz doa direkzioz. Honela lortzen den ibilbidea ez da parabola, elipsea baizik.

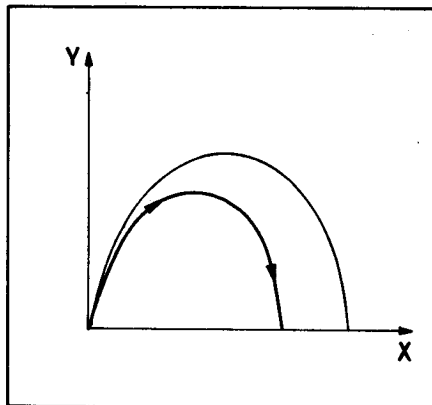
Bestalde, gorputzak altuera handia hartzen badu, grabitatearen azelerazioa moduluz ere aldatzen dela kontsideratu beharko da.



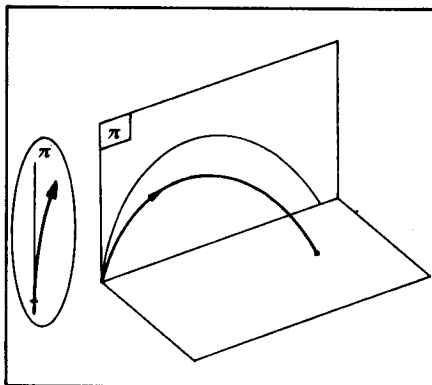
$$g_1 \neq g_2 \dots$$

- 2) Airearen igurtzimendua kontutan harturik, gorputzak (edo projektilak) egiten duen bidea laburragoa da, x ardatzaren direkzioan frenatuz joango baita.

Bestalde, eta projektila bere ardatzaren inguruan biraka badabil, Magnus efektua ere kontutan eduki beharko litzateke.



- 3) Coriolis-en indarra dela eta, Lurraren bira higiduraren kausaz, Ipar Hemisferioan abiadura guztiak eskuinetarantz desbidatzen dira (Hego Hemisferioan, ezkerretarantz). Horrela, higidura ez da launa. Dena den, puntu hau hurrengo gai batetan aztertuko dugu.

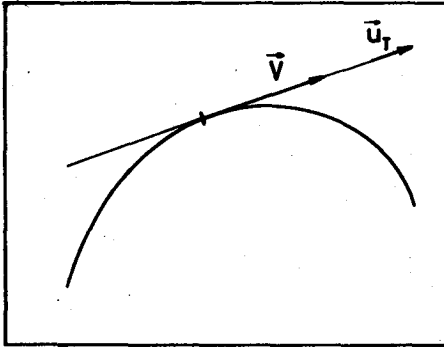


3.3 AZELERAZIOAREN OSAGAI TANGENTE ETA NORMALA

Demagun higidura laun eta kurbatua. Izatez, higidurarik generalena ez da zertan launa izan behar, kasurik generalenean alabeatua baita. Dena den, hemen esanen duguna guztiz generala da, zeren eta ibilbide alabeatuen kasuan, plano muntzailea harturik, higidura launa bailitzen azter baitaiteke. Ohar hau eginez, aurrera egingen dugu.

Azelerazioaren definizioa ematean, beraren direkzioa kurbaren barru alderanzkoa dela esan dugu. Honela, ba, orokorki,

bi osagai ditu, bata kurbaren tangentearen direkzioan eta beste kurbaren normalaren direkzioan.



Higidura kurbatuaren kasuan, lehenago esan dugun legez, abiadurak tangentearen direkzioa du.

$$\vec{v} = v \vec{u}_T$$

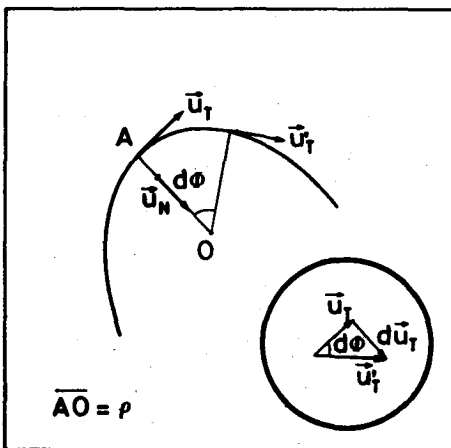
$\vec{u}_T$: bektore unitarioa

Deribazioz, azelerazioa kalkulatu dugu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Irudian erraz ikusten da, $\vec{u}_T$ -ren direkzioa denborarekin (ego posizioarekin) aldatuz doala. Horregatik, generalki $\frac{d\vec{u}_T}{dt} \neq 0$ da.

Baina zenbat balio du $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ delakoak?



Lehenik, beronen direkzioa kalkulatu dugu

$$\vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = 1$$

Deribatuz

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} \cdot \vec{u}_T + \vec{u}_T \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$$

$$\vec{u}_T \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$$

Eta ez bata ez bestea nulu ez direnez, perpendikularrak

izan behar dute:

$$\vec{u}_T \perp \frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Beraz, $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ delakoak $\vec{u}_N$ bektorearen direkzioa du, hots, normalaren direkzioa. Bestalde, barru aldeko sentidoa du.

Kalkula dezagun orain modulua. aurreko irudian dauden bi triangeluak antzekoak dira. Beraz:

$$\frac{|\frac{d\vec{u}_T}{dt}|}{|\vec{u}_T|} = \frac{ds}{\rho} \longrightarrow |\frac{d\vec{u}_T}{dt}| = \frac{ds}{\rho}$$

Hemen ρ aldiuneko kurbadura-erradioa izanik. Aurrera egi nez:

$$\left| \frac{d\vec{u}_T}{dt} \right| = \frac{|\frac{d\vec{u}_T}{dt}|}{|\vec{u}_T|} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

Denetara, bektorialki idatziz:

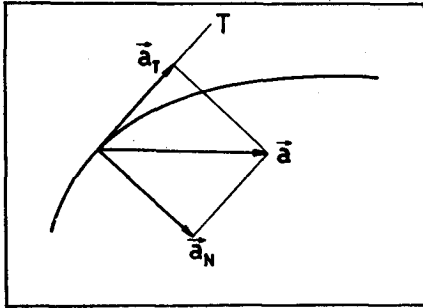
$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{u}_N$$

Eraitza hau azelerazioaren espresiora eramanik:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \frac{v}{\rho} \vec{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N$$

Azken espresio hau aztertzea oso interesgarria da. Alde batetatik, azelerazioak bi osagai dituela esaten digu: bata kurbaren tangentearen direkzioan, eta bestea, normalaren direkzioan. Bi osagai hauk $\vec{a}_T$ eta $\vec{a}_N$ deituko ditugu errespektiboki.



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Bi osagai hauen modulua hau xe da

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

$\frac{dv}{dt}$: abiaduraren moduluaren aldaketa adierazten digu

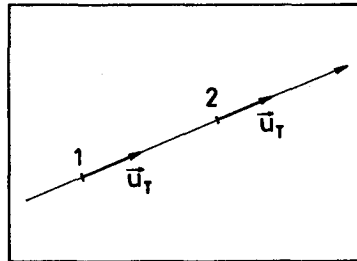
$\frac{v^2}{\rho}$: abiaduraren direkzioaren aldaketa adierazten digu.

Ikus ditzagun zenbait kasu berezi:

* Higidura zuzena. Kasu honetan $\vec{u}_T$ bektorea ez da aldatzen.

Beraz,
$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$$

Honek esan nahi du $a_N = 0$ dela. Hori logikoa da, zeren eta kurbadura-erradioa $\rho = \infty$ baita.



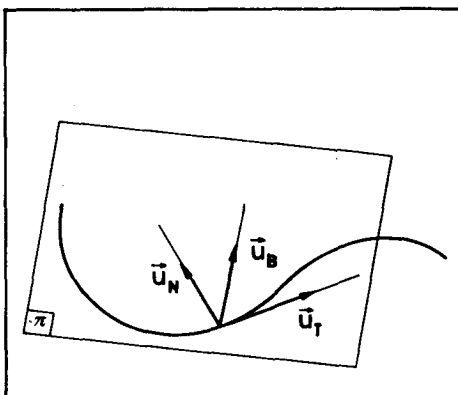
* Higidura zuzen eta uniforme

Kasu honetan $\vec{v} = k^{te}$ da. ($v = k^{te}$ eta $\vec{u}_T = k^{te}$)

Beraz, $a_T = 0$ eta $a_N = 0$

Generalean, edozein kurba alabeaturen kasuan ere defini daitezke $\vec{u}_T$ eta $\vec{u}_N$.

$\vec{u}_T$ eta $\vec{u}_N$ bektoreen artean plano bat definitzen da (π) ibilbidearen edozein puntutan. Plano hori plano muntzailea deitzen da.



Bi bektore horietan oinarriturik, triedro bat defini daiteke ibilbidearen edozein puntutan. Hi rugarren direkzioa binor mala deitzen da eta beraren bektore unitarioa honela definitzen da:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$$

Hiru direkzio hauek sistema intrintsekoa deiturikoa osotzen dute. Eta direkzio hauekiko edozein bektorek dituen osagaiak, osagai intrintsekoak deitzen dira.

Aurretik ikusi dugunez, azelerazioak ez du osagairik bi normalaren direkzioan. Azelerazioaren modulua hauex da:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

3.4 HIGIDURA ZIRKULARRA: ABIADURA ANGELUARRA ETA AZELERAZIO ANGELUARRA

Orain higidura berezi bat aztertuko dugu: ibilbidea zirkunferentzia bat da. Noski, abiadura denbora guztian tangentea izanen da. Bi magnitude berezi berri definituko ditugu: abiadura eta azelerazio angeluarrak.

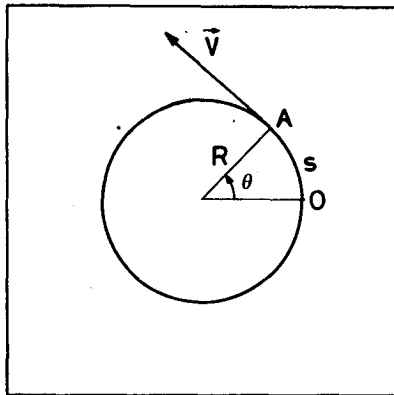
* Abiadura angeluarra. Lehen pauso batetan eskalarki definitu

ko dugu. Dakigunez, $\vec{v}$ bektorea erradioaren elkarzuta da. Haren modulua ondoko hau da:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

θ angelua radian unitatean neurturik,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{abiadura angeluarra (eskalarra) deituko dugu.}$$



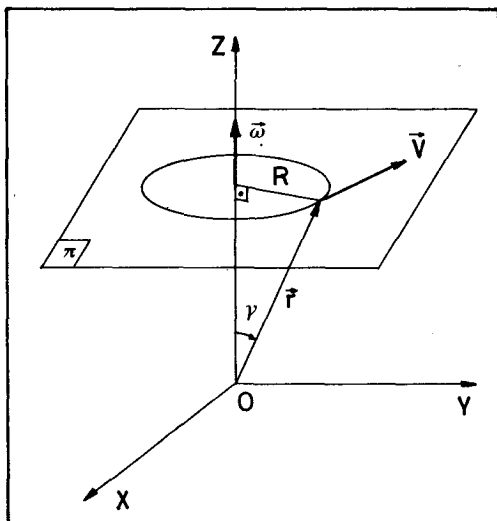
Magnitude berriaren unitatea ondoko hau da:

$$[\omega] = s^{-1}$$

Beraz, abiaduraren moduluaren eta abiadura angeluarraren arteko erlazioa hau da:

$$v = \omega R$$

Orain bektorialki definituko dugu:



Higidura π planoan gertatzen da. π planoak O_{xy} planoaren paraleloa dela pentsatuko dugu (beti aukera ditzakegu ardatz ego-kiak).

Kontsidera dezagun $\vec{\omega}$ bektorea.

. Direkzioa OZ ardatzarena da; beraz π planoaren perpendikularra.

$$\vec{\omega} \perp \pi$$

. Modulua $|\vec{\omega}| = \omega$

Baldintza hauekin, erraz froga daitekeenez, haxe gertatzen da:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Hau horrela da zeren

$$|\vec{v}| = v = |\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = \omega r \sin \gamma = \omega R = v$$

$\vec{v}$ -ren direkzioa: zirkunferentziaren tangentea

Honelatan, ba, $\vec{\omega}$ modu honetan definituz, abiadura lineal eta angeluarraren arteko erlazioa haxe da:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Adierazpen hau higidura zirkularrean beteko da soilik (r eta γ konstanteak izanik, eta hemendik $r \sin \gamma = R = k^{te}$).

Abiadura angeluarra ($\vec{\omega}$) sasibektore bat da izatez, zeren eta bere sentidoa hitzarmen batetan (torlojuarenean) finkatzen baita. Kasu honetan hitzarmen direktua erabili dugu.

* Kasu berezi gisa, higidura zirkular uniformeaz aztertuko dugu.

Uniformea bada, $\omega = k^{te}$, eta higidura hori periodikoa da.

Bira osoa emateko behar den denbora, periodoa deituko dugu eta P letraz adieraziko.

Denbora unitatean osotzen diren periodo eta zikloak adierazten dituen magnitudea, frekuentzia edo maiztasuna deitzen da eta ν letraz adierazten da.

Argi dagoenez
$$\nu = \frac{1}{P}$$

Magnitude hauen unitateak ondokoak dira

P	segundoa (s)
ν	hertz (ziklo segundoko) s^{-1}

Abiadura angeluarren modulua honela erlazionatzen da periodo eta frekuentziarekin

$$v = \frac{2 \pi R}{P} = \omega R$$

$$\omega = \frac{2 \pi}{P} = 2 \pi v$$

Bestalde, θ angeluarekin duen erlazioa kontsideratuz:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow d\theta = \omega dt$$

Eta integrazioari limite egokiak jarritz:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt = \omega \int_{t_0}^t dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega (t - t_0)$$

Hemen $\theta_0 = 0$ eta $t_0 = 0$ eginez

$$\theta = \omega t$$

* Azelerazio angeluarra

Magnitude bektorial honen definizioa ondoko hau da:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Hots, azelerazio angeluarra abiadura angeluarren denborarekiko deribatua da.

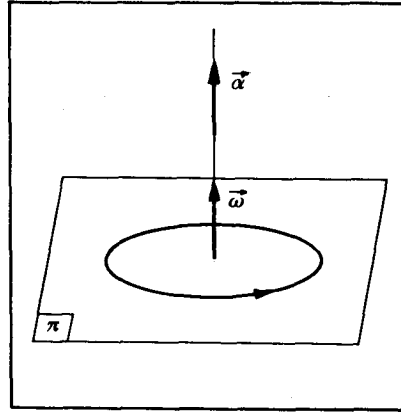
Azelerazio angeluarren dimentsio-ekuazioa hau da:

$$[\alpha] = \left[\frac{\omega}{t} \right] = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$$

Kasu honetan higidura laun eta zirkularra aztertzen ari

garenez, $\vec{\omega}$ bektorearen direkzioa ez da aldatzen. Beraz, kasu honetan $\vec{\alpha}$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen direkzioak berdinak dira; hain zuzen ere, higidura gertatzen deneko planoaren perpendikularrak dira. Hori kontutan harturik, azelerazio angeluarraren modulua ondokoa da:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Adibide gisa, α konstantea dela kontsideratuko dugu. Orduan:

$$d\omega = \alpha dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^t dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha (t - t_0)$$

$$d\theta = \omega dt = \omega_0 dt + \alpha (t - t_0) dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega_0 dt + \alpha \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2$$

Lorturiko formulak lehen azelerazio konstanteko higiduraren kasuan lorturikoen antzekoak dira.

* Azelerazio lineala. Bukatzeko, higidura zirkularraren azelerazio lineala aztertuko dugu.

Dakigunez, edozein higiduraren kasuan, azelerazioak bi osagai ditu: tangentiala eta normala

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N$$

Higidura zirkularra denez

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \alpha$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

Azken osagai hau azelerazio zentripetua deitzen da.

Higidura zirkular uniformearen kasuan:

$$\alpha = 0 \quad \text{zeren eta} \quad \omega = k^{te} \quad \text{baita}$$

$$\text{Beraz,} \quad a_T = 0 \quad \text{baina} \quad a_N \neq 0$$

Beste modu batetara ere idatz dezakegu bektorialki azelerazio bektoriala. Hara

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Eta $\vec{r}$ bektorea bira ardatzean hasten bada

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Beraz

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Azkenean hauxe eratzen da:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

Erraz ikus daitekeenez

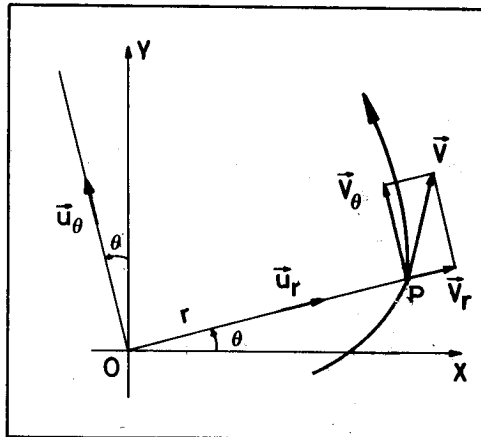
$$\vec{a} \wedge \vec{r} = \vec{a}_T \quad \text{osagai tangenziala}$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{a}_N \quad \text{osagai zentripetua}$$

3.5 HIGIDURA KURBATUA PLANOAN

Demagun partikula bat plano batetan higitzen. Bi koordenatuz (x,y) nahiko da, beraren posizioa ezagutzeko.

Dena den, (x,y) koordenatu cartesiarrak dira. Baina bestelako koordenatu modu batzu ere aukera daitezke, adibidez, koordenatu zilindriko edo esferikoak.



Guk, P puntuaren posizioa adierazteko, r eta θ erabiliko ditugu:

r : OP distantzia da

θ : OP zuzenak Ox ardatzarekin osotzen duen angelua.

Izatez koordenatu esferiko zein zilindroak dira, bi dimentsiotan. Bektore unitariogisa, espazioko, edo hobe esateko ibilbideko edozein punturentzat $\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_\theta$ hartuko ditugu.

$\vec{u}_r$: $\vec{OP}$ bektorearen direkziokoa

$\vec{u}_\theta$: direkzio perpendikularra, angelua hasten deneko sentidoan.

Horrela eginik, hauxe gertatzen zaigu

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad (\text{P puntuan, noski})$$

Deribatuz:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r \frac{dr}{dt}$$

Kalkula dezagun orain $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

$\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_\theta$ bektoreak O_x eta O_y ardatzen direkzioetan dituzten osagaien bidez idatziz:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{bien modulua} \\ 1 \text{ baita} \end{array}$$

Lehenengoa deribatuz:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{j} = \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

Beraz

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

Honela, ba, abiaduraren adierazpena eramanez

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

Beraz, espresio honek dioskunez, abiadurak bi osagai ditu. Osagai hauk honela deitzen dira:

$$\frac{dr}{dt} = v_r : \text{osagai erradiala, } \vec{r} \text{ erradioaren } (\vec{u}_r\text{-ren) direkzioa baitu. O puntuarekiko distantziaren aldaketa neurtzen du.}$$

$r \frac{d\theta}{dt} = v_{\theta}$: osagai transbertsala, hots, $\vec{u}_{\theta}$ -ren direkzioan.
 $\vec{r}$ bektorearen direkzioaren aldaketa neurtzen du.

Azkenez, $\vec{v}$ bektorea honela idatz dezakegu:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{\theta} = v_r \vec{u}_r + v_{\theta} \vec{u}_{\theta}$$

* Abiadura zirkularraren kasuan, jatorria zirkunferentziaren zentruan harturik, $r = R = k^{te}$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \qquad v_r = 0$$

Hots, abiadura erradiala nulua da

* Azelerazioaren osagai erradiala eta transbertsala ere berdin ki kalkula daitezke.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{\theta} \right)}{dt}$$

eta deribatuz

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{\theta} + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_{\theta} + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_{\theta}}{dt}$$

Hemen $\frac{d\vec{u}_{\theta}}{dt}$ ezagutzea falta zaigu. Aurreko orrialdean jarri ditugun $\vec{u}_r$ eta $\vec{u}_{\theta}$ bektoreen balorean finkatuz:

$$\frac{d\vec{u}_{\theta}}{dt} = - \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{i}_1 - \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{j} = - \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$$

Goiko expresiora eramanez eta osagaiak banatuz:

$$\begin{cases} a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

Abiaduraren osagaien kasuan bezala, hauk ere azelerazioaren osagai erradial eta transbertsala deitzen dira.

Noski, azelerazioa honela idaztēn da bektorialki:

$$\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta$$

4. GAIA - HIGIDURA ERLATIBOA

4.1. ABIADURAREN ETA AZELERAZIOAREN IZAERA ERLATIBOA

4.2. TRANSLAZIOZKO HIGIDURA ERLATIBOA

4.3. BIRAKETA UNIFORMEZKO HIGIDURA ERLATIBOA

4.4. HIGIDURA ERLATIBO OROKORRA

- CORIOLIS-EN AZELERAZIOA

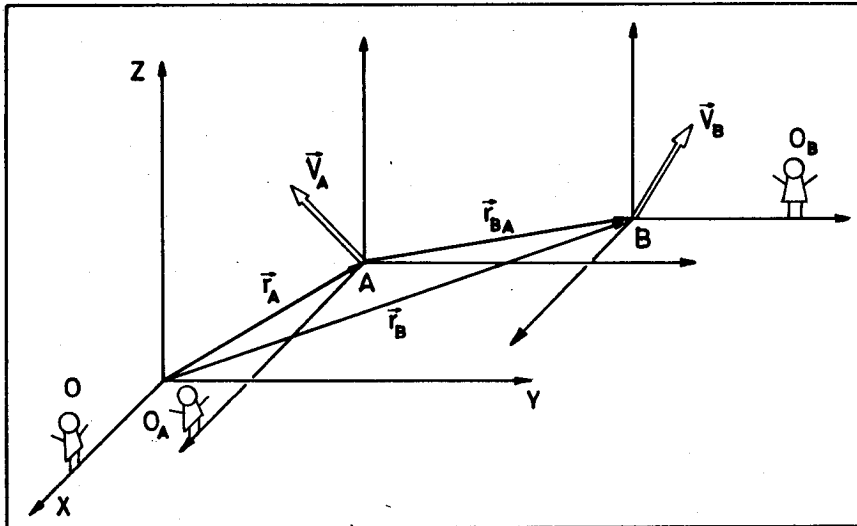
Aurreko gaian ikusi dugun bezala, higiduraren kontzeptua -eta halaber abiadura eta azelerazioarena- gauza erlatiboa da.

Erreferentziazko sistema desberdinetan dauden behatzai-leek, behaketa eta neurketa desberdinak egiten dituzte. Fisikariek ez dute beti erreferentziazko sistema berbera erabiltzen; aitzitik, kasu bakoitzean sistemarik egokiena eta sinpleena aukeratzera jotzen dute. Batzutan Lurrarekin batera doan sistema ez-inertziala -biraka ari baita- erabiltzen dute (hurrengo gaian ikusiko dugu sistema inertzial eta ez-inertzialak zer diren); bestetan, eguzkiarekin edo izar fixuekin doana; bestetan, estudiatzen ari den sistemaren masa-zentruarekin doana; eta abar.

Hala ere, gertakari fisikoak bakarrik dira, berberak dira, nahiz eta sistema desberdinetan itxura desberdinez ageri. Horregatik, sistema desberdinetatik egiten diren neurketa desberdinak elkarrekin erlazionatzea komeni da, sistema desberdinetako behaketak modu berean interpretatu ahal izateko.

Gaur eguneko fisikariek dakitenez, ez du zentzurik pausagunean dagoen sistema absoluturik edo pausagune absolutuan dagoen sistemarik bilatzeak. Sistema guztiak erlatiboki kontsideratu behar dira. Eta horregatik, garrantzi handikoa da, sistema desberdinetako neurketak konparatzen jakitea. Horixe da, hain zuzen ere, gai honetan eginen duguna; sistema desberdinetako neurketak (magnitudeak) erlazionatu.

4.1. ABIADURAREN ETA AZELERAZIOAREN IZAERA ERLATIBOA



Demagun A eta B puntuak higitzen ari direla. Demagun, bestalde, x y z erreferentzi sisteman dagoen O behatzailea.

Azter ditzagun, O_A eta O_B behatzaileek egiten dituzten neurketa zinatikoak, O behatzaileak egiten dituenekin konparatuz.

* Posizio-bektoreak

O behatzaileak A-ren posizio-bektorea: $\vec{r}_A$
 B-ren posizio-bektorea: $\vec{r}_B$

O_A behatzailea, jatorria A puntuan eta ardatzak x y z sistemaren paraleloak diren sistema batetan doa. Honek zera neurtzen du:

A-ren posizio-bektorea: $\vec{r}_{AA} = 0$
 B-ren posizio-bektorea: $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

O_B behatzaileak hauxe neurtzen du

$$\text{A-ren posizio-bektorea: } \vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$\text{B-ren posizio-bektorea: } \vec{r}_{BB} = 0$$

Argi ikusten denez

$$\vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$$

* Abiadurak

Denbora magnitude absolutu gisa jotzen da, hots, behatzaile guztiek modu berean neurtzen dute. Hasierako unean erlojuak sinkronizaturik egon badira, hauxe idatz dezakegu:

$$t = t_A = t_B \quad \text{eta} \quad dt = dt_a = dt_B$$

O behatzaileak:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{A puntua} \longrightarrow & \vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \\ \text{B puntua} \longrightarrow & \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \end{array} \right.$$

O_A behatzaileak:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{A puntua} \longrightarrow & \vec{v}_{AA} = 0 \\ \text{B puntua} \longrightarrow & \vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \end{array} \right.$$

Hauxe da B puntuak A puntuarekiko duen abiadura.

O_B behatzaileak:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A puntua} \longrightarrow \vec{v}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \\ \text{B puntua} \longrightarrow \vec{v}_{BB} = 0 \end{array} \right.$$

Argi ikusten denez:

$$\vec{v}_{BA} = - \vec{v}_{AB}$$

* Azelerazioak. Hauekin ere berdintsu gertatzen da.

O behatzaileak:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \\ \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \end{array} \right.$$

O_A behatzaileak:

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

O_B behatzaileak:

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{v}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} - \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

Hemen ere, argi dagoenez:

$$\vec{a}_{BA} = - \vec{a}_{AB}$$

Lorturiko erlazioak honela interpreta daitezke: Erreferen

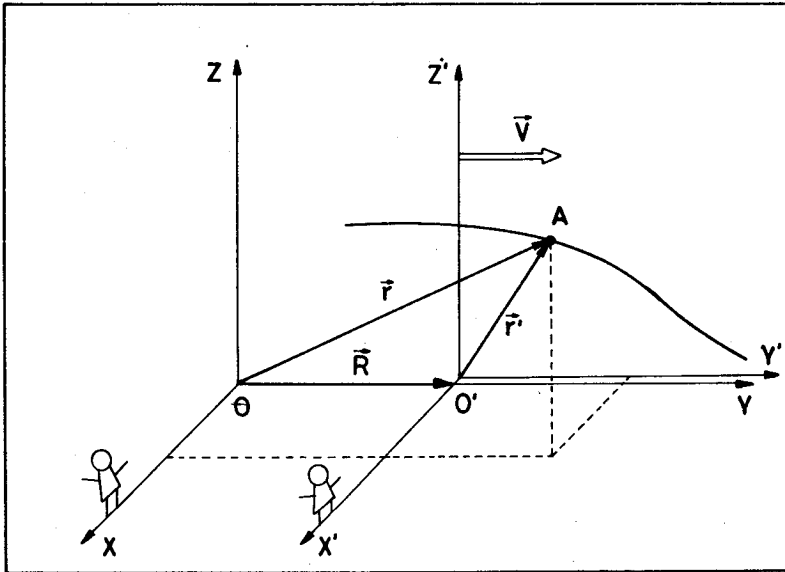
tzi sisteman geldi dagoen behatzailearekiko partikula bat $\vec{v}$ abiaduraz eta $\vec{a}$ azelerazioz higitzen bada, partikula horrekin batera eta paraleloki higitzen ari den beste erreferentzi sistema bat kontsideratuz, bertan doan behatzaileak, bere inguruko mundu osoko partikula guztiak, duten higiduraz gain, $-\vec{v}$ abiaduraz eta $-\vec{a}$ azelerazioz higitzen ikusten ditu. Hots, geldi dauden partikulak, $-\vec{v}$ abiaduraz eta $-\vec{a}$ azelerazioz hi gitzen direla ikusten ditu. Hauxe da trenean goazela gertatzen zaiguna: Geltokian trena higitzen hastean, kaiko pertsonak atze rantz doazela uste dugu, gu geldi gaudela pentsatuz.

Oharra: "Ikusi" baino "neurtu" idaztea hobe izango litza-teke, zeren abiadura erlatibo oso handiekin (argiaren abiadura rekin konparagarri direnekin) bi hitzen esangura desberdina bai ta, Erlatibitatearen Teorian ikusten denez. Hala ere, maila ho netan erabiliko ditugun abiaduren kasuan seinale-abiadura infi nituak kontsideratzen ditugunez, bi hitzok sinonimotzat har di tzakegu.

4.2. TRANSLAZIOZKO HIGIDURA ERLATIBOA

Elkarrekiko abiadura konstantez higitzen ari diren bi be hatzaile kontsideratuko ditugu. O sistemarekin doan behatzai-leak, $\vec{V}$ abiaduraz ikusten du higitzen O' sistema. Adibide gisa eta kalkuluak errazteko, bi sistemen ardatzak paraleloak direla kontsideratuko dugu, eta halaber, abiadurak $(\vec{V}-k)$ O_y ardatzaren direkzioa duela, eta $t_0 = 0$ aldiunean ardatz-sis-tema biek leku berean daudela.

A partikula puntualaren azterketa zinematikoa egingen du gu. Lehenik eta behin, erabiltzen ari garen nomenklatura azal duko dugu:



- Azenturik gabeko magnitudeak, $Oxyz$ sistematik neurtzen direnak dira. Neurri "absolutuak" deitzen dira.
- Majuskulaz idatzirik daudenak, O' puntuari dagozkio (sistemen jatorrien arteko higidura adierazten dute).
- Magnitude azentuatuk $O'x'y'z'$ sistematik neurtzen direnak dira. Neurri "erlatiboak" deritze.

Demagun bi behatzaileen erlojuak sinkronizaturik daudela. Beraz, $t = t'$ edozein unetan, hau da, denbora era berean iragaten da erreferentzi sistema bietan. Lehen unean (kalkuluak errazteko) $t_0 = 0$ hartuko dugu. Honela:

$$\vec{R} = \vec{OO'} = \vec{V} t \quad \text{zeren} \quad \vec{V} \quad \text{konstante baita.}$$

* Posizio-bektoreak. Bi sistemetan A partikulak dituen posizio-bektoreen arteko erlazioa, ondokoa da

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = \vec{V} t + \vec{r}'$$

Eta osagaien funtzioan ipiniz, $\vec{V} = V \vec{j}$ denez:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + V t \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Lau ekuazio eskalar hauek tranformazio galilear bat osotzen dute.

* Abiadura. Aurreko expresioa denborarekiko deribatuz

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

Hots:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

Eta osagaien arteko erlazioak hauek dira:

$$\begin{cases} v_x = v'_x, \\ v_y = V + v'_y, \\ v_z = v'_z, \end{cases}$$

* Azelerazioak. Berriro ere denborarekiko deribatuz:

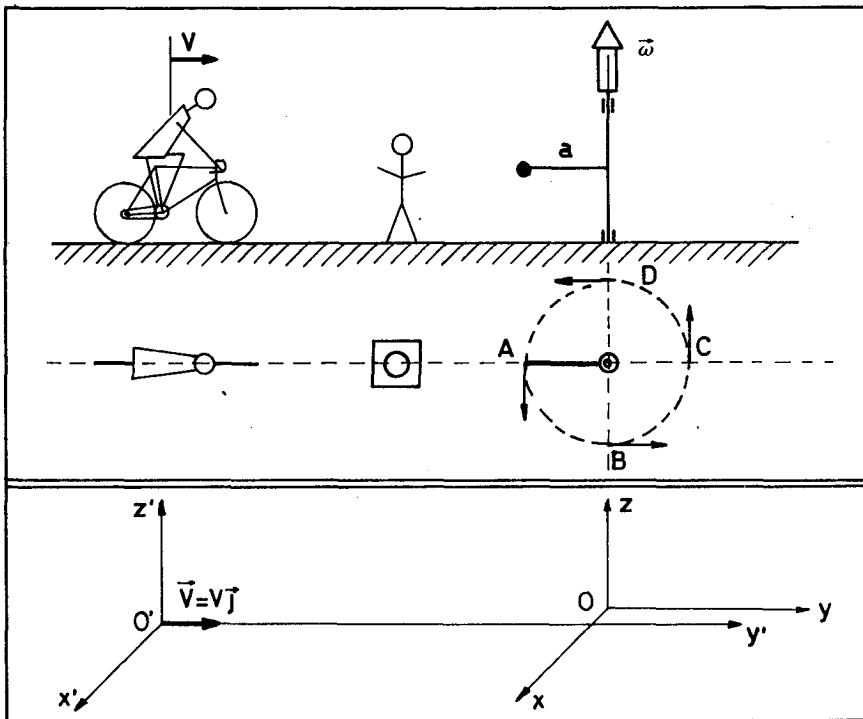
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'$$

($\vec{V}$ konstante baita)

Hau da: $\vec{a} = \vec{a}'$

Ikusten denez, bi behatzaileek azelerazio berbera neurtzen dute. Azelerazioa, ba, inbariantea da sistemen translazio uniformekiko ($\vec{V} = k^{te}$). Inbariantzia hau oso garrantzizkoa da Fisikaren arloan, eta inbariantzia galilearra deitzen da. Hurrengo gaian, Dinamikaren oinarrizko printzipioak lantzean, inbariantzia horretan finkatuko gara, bai indar kontzeptua definitzean eta bai inertzi sistemak definitzean ere. Inbariantzia hau oso baliagarria izanen da Mekanika Klasikoan zehar, nahiz eta Erlatibitate Teorian aldatu egin beharko den, Lorentz-en transformazioa sartuz.

Goiko sistemen arteko transformazioak nolakoak diren ulertzeko, adibide bat jarriko dugu.



Demagun abiadura konstantez higitzen ari den ziklista bat ($\vec{V} = k^{te}$). Beste behatzaile bat geldi dago.

Bi behatzaileek abiadura angeluar konstantez biratzen ari

den gorputz bat (geldi dagoen behatzailearen sisteman) ikusten ari dira.

Zeintzu dira bi behatzaileek neurtzen dituzten abiadurak, higitzen ari den gorputza A, B, C eta D puntuetan dagoenean?

Soluzioa lortzeko, bi koordenatu-sistema aukeratuko ditugu: Bata ziklistarekin doa ($O'x'y'z'$), eta bestea geldi dago ($Oxyz$). Bi sistemetako ardatz-bikoteak, elkarren paraleloak aukeratuko ditugu, irudian ikusten den legez.

$O'x'y'z'$ sistema $\vec{V} = v\vec{j} = k^{te}$ abiaduraz higitzen da sistemarekiko. Abiaduren arteko erlazioa ondokoa da, teoriaraz azaldu dugunaren arauera:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

* Azter dezagun, ba, A puntuaren kasua

- $Oxyz$ sisteman: $\vec{v} = \omega \vec{r}$, higidura

zirkularra baita.

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = k^{te}$$

$$\vec{v} = \omega a \vec{i}$$

$$\vec{r} = -a\vec{j}$$

- $O'x'y'z'$ sisteman: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

Beraz

$$\vec{v}' = \omega a \vec{i} - v\vec{j}$$

Honen modulua hauex da

$$v' = \sqrt{\omega^2 a^2 + v^2}$$

* Gauza bera egin dezakegu B puntuan

- O x y z sisteman:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \begin{cases} \vec{\omega} = \omega \vec{k} \\ \vec{r} = a \vec{i} \end{cases} \quad \vec{v} = a \omega \vec{j}$$

- O' x' y' z' sisteman: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$

$$\vec{v}' = \omega a \vec{j} - v \vec{j} = (\omega a - v) \vec{j}$$

Beronen modulua ondokoa da:

$$v' = \omega a - v$$

C puntuan

$$\vec{v} = -a \omega \vec{i}$$

$$\vec{v}' = -a \omega \vec{i} - v \vec{j}$$

Eta modulua $v' = \sqrt{a^2 \omega^2 + v^2}$

D puntuan

$$\vec{v} = -a \omega \vec{j}$$

$$\vec{v}' = (-a \omega - v) \vec{j}$$

$$v' = a \omega + v$$

Ikusten denez, nahiz eta behatzaile biak higidura berbera behatzen ari diren, gauza desberdinak neurtzen dituzte.

- Geldi dagoen behatzaileak, higidura zirkular uniformea ikusten du. $\vec{v}$ abiadurak modulu konstantea du, ωa halegia.

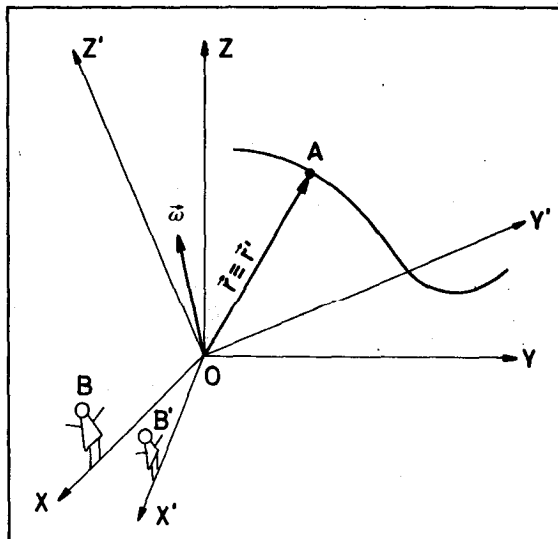
- Ziklistak neurtzen duen abiaduraren ($\vec{v}'$ -ren) modulua, ordea, aldatuz doa etengabe.

4.3. BIRAKETA UNIFORMEZKO HIGIDURA ERLATIBOA

Orain beste kasu berezi bat aztertuko dugu. Elkarrekiko biraka baina translazioz gabe higitzen ari diren bi sistema aztertuko ditugu. Higidura honen azterketa oso interesgarria da, Lurraren higidurari dagokiona baita. Beraz, demagun zera du gula:

- Batetik, $Oxyz$ sistema, non B behatzailea baitago. Sistema hau geldi dagoela kontsideratuko dugu.
- Bestetik, $O'x'y'z'$ sistema, B' behatzailearekin. Ikusten denez, sistema bien kasuan jatorri bakarra aukeratu dugu, kalkuluak errazteko. Bigarren sistema hau $\vec{\omega}$ abiadura ange, luarraz higitzen ari da lehen sistemarekiko. $\vec{\omega}$ hau, bektore konstantea dela kontsideratuko dugu, eta beronen direkzioa O puntutik iragaten da, noski.

Puntu material bat A delakoa- higitzen ari da. B eta B' behatzaileek higidura horren magnitude zinematikoak neurtzen dituzte. Guk horien artean dauden erlazioak kalkulatu nahi ditugu. Hau da, lehenago egin dugun bezala, bi behatzaileek neurtzen dituzten posizio-bektoreak, abiadurak eta azelerazioak elkarrekin erlazionatuko ditugu.



* Posizio-bektoreak. Jatorri bereko sistemak direnez gero,

$$\vec{r} \equiv \vec{r}'$$

Baina sistema desberdinak direnez, bektore honek osagai desberdinak ukanen ditu batean eta bestean:

$$Oxyz \text{ sisteman : } \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$O'x'y'z' \text{ sisteman: } \vec{r}' = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'$$

* Abiadurak.

Azter dezagun, lehenik, B behatzaileak ikusten duena

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_B \quad \text{Azpiindize horrekin, deribatzen duena B}$$

behatzailea dela esan nahi da. Beraz:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

zeren eta B behatzailearentzat

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \quad \text{baitira,}$$

B' behatzaileak honela deribatzen du denborarekiko:

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{B'} = \frac{d}{dt} (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'$$

zeren eta B' behatzailearentzat

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = 0$$

baitira, B' behatzaileak $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ eta $\vec{k}'$ konstanteak direla ikusten du eta. Zer esanik ez, eta Mekanika Erlatibistan sartu gabe, $t = t'$ dela kontsideratu dugu, hots, B eta B'-ren erlojuak

sinkronizaturik dabiltzala. Halaber, $dt = dt'$ izanen da.

Zer erlazio dago B-k eta B'-k neurtzen dituzten abiaduren artean, hau da $\vec{v}$ -ren eta $\vec{v}'$ -ren artean?

Dakigunez $\vec{r} = \vec{r}'$

B behatzaileak berdintza hau deribatuz:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_B = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_B$$

Kalkula dezagun $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_B$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_B &= \left[\frac{d}{dt} (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') \right]_B = \\ &= \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' + x' \left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_B + y' \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_B + z' \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_B \end{aligned}$$

$$\text{Hemen } \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' = \vec{v}'$$

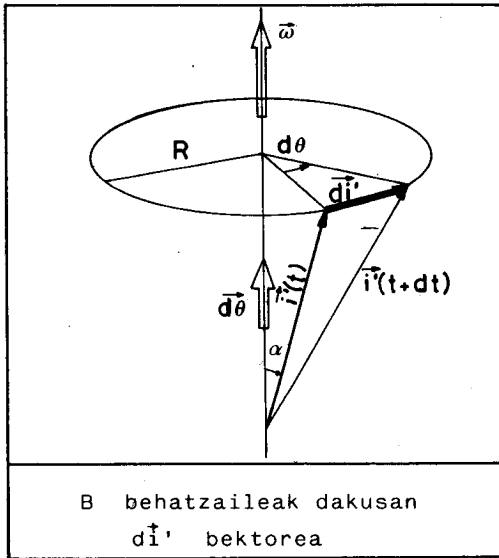
eta bestalde, B behatzailearekiko $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ eta $\vec{k}'$ konstante ez direnez, generalean

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_B \neq 0 \quad \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_B \neq 0 \quad \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_B \neq 0$$

dira.

Zenbat balio dute deribatu hauek?

B behatzailearen eritziz, $\hat{i}'$ (eta berdin $\hat{j}'$ eta $\hat{k}'$) bira
ka ari da, $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz. Beraz, dt denbora-tartean
duen aldakuntza, alboko irudian ageri dena da.



Ikusten denez

$$d\hat{i}' = d\vec{\theta} \wedge \hat{i}'$$

$d\vec{\theta}$ angelua bektore gisa
hartuz: $d\vec{\theta}$ (ikus 3.4. ata
la).

$$|d\vec{\theta} \wedge \hat{i}'| = d\theta \cdot 1 \cdot \sin = d\theta \cdot R$$

eta $d\hat{i}'$ bektorea,

$\hat{i}$ -k eta $d\vec{\theta}$ -k osotzen duten
planoaren perpendikularra
baita.

Beraz,

$$\left(\frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_B = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \wedge \hat{i}' = \vec{\omega} \wedge \hat{i}'$$

Modu berean

$$\left(\frac{d\hat{j}'}{dt} \right)_B = \vec{\omega} \wedge \hat{j}'$$

$$\left(\frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_B = \vec{\omega} \wedge \hat{k}'$$

Eta $\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_B$ delakoaren adierazpenean ordezkatzuz:

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_B = \vec{v}' + x'\vec{\omega} \wedge \hat{i}' + y'\vec{\omega} \wedge \hat{j}' + z'\vec{\omega} \wedge \hat{k}'$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}')$$

Hau da, azkenean zera geratzen zaigu:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Hau da, ba, B eta B' behatzaileek neurtzen dituzten abiaduren arteko erlazioa. Gure kasuan,

$$\vec{r} = \vec{r}' \quad \text{denez,}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

* Azelerazioak

B behatzaileak neurtzen duen azelerazioa hau da:

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

edo bestela idatzirik:

$$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

B' behatzaileak hau ikusten eta neurtzen du:

$$\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{B'} = \frac{dv'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dv'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dv'_z}{dt} \vec{k}'$$

Erlazionak ditugun B eta B' behatzaileen neurketak. Horretarako, abiaduren arteko erlazioa hartuko dugu

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Kontsidera dezagun B behatzaileak adierazpen honen parte biak deribatzen dituela.

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_B = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_B + \left[\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \right]_B$$

Eta $\vec{\omega}$ konstantea dela esan dugunez

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_B = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_B + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_B$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_B &= \left[\frac{d}{dt} (v'_{x'} \hat{i}' + v'_{y'} \hat{j}' + v'_{z'} \hat{k}') \right]_B = \\ &= \frac{dv'_{x'}}{dt} \hat{i}' + \frac{dv'_{y'}}{dt} \hat{j}' + \frac{dv'_{z'}}{dt} \hat{k}' + \\ &+ v'_{x'} \left(\frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_B + v'_{y'} \left(\frac{d\hat{j}'}{dt} \right)_B + v'_{z'} \left(\frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_B = \\ &= \hat{a}' + v'_{x'} \vec{\omega} \wedge \hat{i}' + v'_{y'} \vec{\omega} \wedge \hat{j}' + v'_{z'} \vec{\omega} \wedge \hat{k}' = \\ &= \hat{a}' + \vec{\omega} \wedge (v'_{x'} \hat{i}' + v'_{y'} \hat{j}' + v'_{z'} \hat{k}') \\ \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_B &= \hat{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \end{aligned}$$

Eta aurreko puntuan oinarriturik

$$\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_B = \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Eraitza hauk lehengo adierazpenera eramane:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_B = \vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

Eta azkenik

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

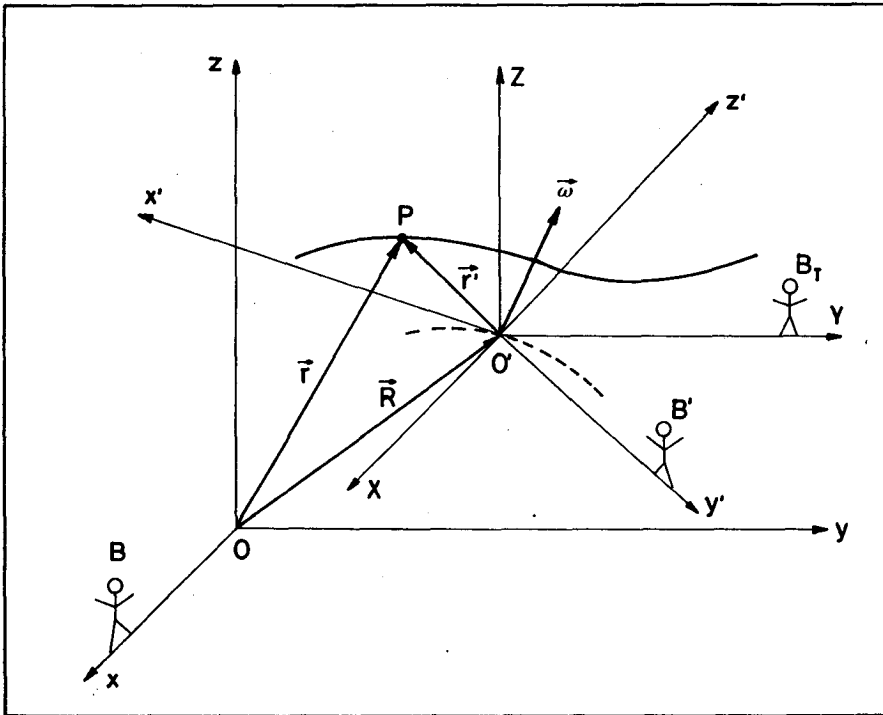
Hauze da, ba, B eta B' behatzaileek neurtzen dituzten azelerazioen arteko erlazioa. Termino horiei izen berezia ematen zaie:

$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$: azelerazio zentripetua

$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$: Coriolis-en azelerazioa

4.4. HIGIDURA ERLATIBO OROKORRA

Aurretik aztertu ditugun higidura erlatibo biak -translaziozkoak eta biraketazkoak- kasu partikular edo bereziak dira. Horregatik, kasurik generalena aztertzea ere komeni zaigu. Denaren maila honetarako korapilatsuegia denez, lortzen diren emaitzak eta planteamendu orokorra aztertuko ditugu soilik.



Kasurik orokorrenean B' behatzailea doaneko erreferentzi sistemaren jatorria (O') transladatu egiten da B behatzailea rekiko eta halaber, $O'x'y'z'$ sistema biraka ari da, abiadura angeluar ez-konstantez. Ondoko sistemak ditugu.

$Oxyz$: B behatzailea doaneko sistema.

$O'XYZ$: Beronen ardatzak eta $Oxyz$ sistemarenak paraleloak dira denbora guztian, baina jatorria (O') higitu egiten da B behatzailearekiko, edozein ibilbide edukiz. B_T behatzailearena.

$O'x'y'z'$: B' behatzailea doaneko sistema. $O'XYZ$ sistemaren jatorri berbera du, baina biraka ari da harekiko, $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz.

B eta B' behatzaileek egiten dituzten neurketa zinemati

koak azentuatu gabe eta azentuaturik agertuko dira errespekti boki. Bi behatzaile hauk P puntu materialaren higidura aztertzen ari dira zinematikoki. Aurkitzen eta neurtzen dituzten magnitude zinematikoen arteko erlazioak, ondokoak direla frogatu daitezke.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \\ \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \dot{\vec{\omega}} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \end{cases}$$

Adierazpen hauetan agertzeñ diren letrek orain arteko esan gura dute. Bi sinbolo berri daude, ondoko magnitudeak adieraziz:

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{hau da, O' puntuaren azelerazioa O puntuari- kiko, kasu orokorrean } \vec{v} \text{ ez baita konstantea.}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \quad \text{hots, O'x'y'z' sistemak O'XYZ sistemareki- ko duen azelerazio angeluarra, kasu orokorrean } \vec{\omega} \text{ ez baita konstantea.}$$

Ekuazio hauek edozein bi behatzaileren neurketa zinemati- koak erlazionatzeko balio digute. Adibide gisa, translaziozko eta birazko kasuak, kasu honen kasu bereziak direla ikusiko du gu.

* Translaziozko kasua. Kasu honetan $\vec{\omega} = 0$

eta bestalde, transaldapena uniforme bada, $\vec{A} = 0$

Beraz goiko ekuazioak honela geratzen zaizkigu

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

Hots, Galileoren transformazioaren kasuan lortzen genituen, expresio berberak.

* Biraketa uniformeazko kasua: Kasu honetan, sistemek jatorri berbera dutela kontsideratu dugu

$$\mathbf{O} \equiv \mathbf{O}' \implies \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{A}}$$

Eta biraketa uniformea denez

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad \frac{d\dot{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \dot{\dot{\boldsymbol{\omega}}} = \dot{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} = \mathbf{0}$$

Beraz hauxe geratzen zaigu:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' \\ \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' \\ \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}') + 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \dot{\mathbf{v}}' \end{cases}$$

Bukatzeko, iruzkin labur bat egingen dugu Coriolis-en azelerazioari buruz.

* Coriolisen azelerazioa.

Aurreko horrialde batetan esan dugun bezala, $2\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \dot{\mathbf{v}}'$ terminoari Coriolisen azelerazioa deritzo. Ikusten denez, biraka ari diren sistemekiko abiadura erlatiboa duten higiduren kasuan kontsideratu behar da soilik.

Lurrean bizi garenez, eta Lurra bere ardatzarekiko biraka ari delarik, Lurrean higitzen ari diren gorputzen kasuan, kontutan hartzekoa izanen da azelerazio hau. Hurrengo gaian partikularen dinamikaz hitz egitean ikusiko dugunez, Coriolisen efektuak garrantzi handia edukiko du haizeen higiduretan, zikloi eta antizikloiaren izaeran eta abarretan. Dena dela, aurrerago egiteko utziko dugu puntu hau.

5. GAIA - MEKANIKAREN PRINTZPIOAK: PARTIKULAREN DINAMIKA

- 5.1. INERTZIAREN PRINTZPIOA, NEWTONEN LEHEN LEGEA
 - GALILEOREN TRANSFORMAZIOA ETA INERTZIAREN PRINTZPIOA
- 5.2. MOMENTU LINEALA
- 5.3. MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOAREN PRINTZPIOA
- 5.4. INDAR KONTZEPTUAREN DEFINIZIOA: NEWTONEN BIGARREN ETA HIRUGARREN LEGEAK
- 5.5. KONTAKTU-INDARRAK: INDAR NORMALA ETA MARRUSKADURAZKO INDARRA
- 5.6. MARRUSKADURAZKO INDARRAK FLUIDOETAN
- 5.7. MOMENTU ANGELUARRA
- 5.8. INDAR ZENTRALAK
- 5.9. SISTEMA EZ-INERTZIALAK. INERTZI INDARRAK
- 5.10. LURRA ERREFERENTZIAZKO SISTEMA BEZALA

Aurreko gaietan partikularen higiduraren deskribapenaz arduratu izan gara. Eta sistema desberdinen arteko erlazioak ere lortu ukan ditugu. Hala ere, zinematikoki aztertu dugu soilik higidura, hau da, higidura horren zergatikoez kezkatu gabe. Oraingo gai honetan, higiduraren kausetaz arduratuko gara, hau da, Dinamikaren arloan arituko gara. Eta interakzioak aztertu-ko ditugu, edo beste hitz batez esateko, indarrak. Dinamika, azken batez, indarren eta higidur aldaketen arteko erlazioen azterketa da.

5.1. INERTZIAREN PRINTZIBIOA (NEWTON-EN LEHEN LEGEA)

Printzipio hau eman baino lehen, partikula askea zer den definitu behar dugu. Labur esanik, partikula askea, inolako elkarraziorik pairatzen ez duen partikula dela esan dezakegu, edo beste era batetara adieraziz, baldin eta unibertsoa beste partikulen edozein aldaketak partikula konkretu baten higidura ri inolako eraginik sortzen ez badio, partikula hori askea dela esango dugu. Zehazki hitz eginez, unibertsoan ez dago partikula askerik, denen arteko elkarrazioak baitaude, txikiak baidira ere. Gainera, partikula askeak ezin dirateke beha, zeren eta behaketan behatzaile eta partikularen arteko elkarrazioa baitago. Honela, ba, partikula askeak unibertsoatik aparte egon behar du edo guztiz isolaturik. Dena den, puntu teoriko horik alde batetara utzirik, praktikan partikula batzu askeak bailiren kontsidera ditzakegu, haien gainean egiten diren elkarrazioak mezpreziagarriak baitira. Oraingoz, ba, partikula askeak ezagutzen ditugula kontsideratuko dugu eta gerorako utziko dugu partikula horik zeintzu diren aurkitzea.

Partikula askeen higiduran finkatuz, inertziaren printzipioa (beste era batetara, Newton-en lehen legea deitua) adieraziko dugu. Hauxe da:

"Partikula askeak abiadura konstantez higitzen dira inertziako sistema erreferentzialekiko"

Beste modu batez esateko, partikula askeen azelerazioa nu lua da sistema inertzialekiko. Edozein modutan, higidura gauza erlatiboa dela dakigu -aurreko gaian aztertu dugunez-, eta horregatik sistema konkretu batetiko definitu beharko da, honela gero beste edozein sistemarekiko definitu ahal izateko. Lehen-txoago inertziazko sistema erreferentzialak aipatu ditugu. Bai na zer dira horik? Honela definituko ditugu:

"Erreferentziazko sistema inertzialak, partikula aske batekin loturik eta birarik gabe doazen sistemak dira"

Dena den, definizio hau ematean, gorpil ero bat sortu dugu zeren eta partikula askea sistema inertzial baten laguntzaz definitu dugu, eta berau partikula aske baten laguntzaz. Gorpil ero hau eteteko bide bakarra, partikula aske bat aurkitzea edo sistema inertzial bat definitzea da. Horretarako hitzarmen bat egin beharko dugu. Horixe da, hain zuzen ere, hurrengo pauso gisa egingen duguna.

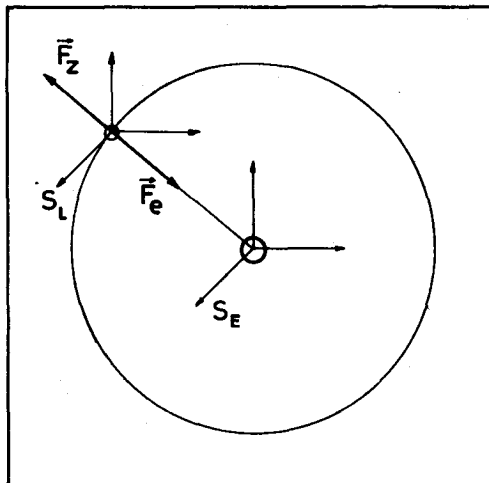
Gu Lurrean bizi gara, eta dakigunez, Lurra biraka ari da bere ardatzaren inguruan. Beraz, gurekin doan sistema ez da inertziala. Lehen sistema inertzial bat aurkitzeko izar fixu deitzen direnetara jo behar dugu. Izarrak elkarretik oso urrun daudela ba dakigu. Bestalde, Naturan ezagutzen ditugun hiru interakzio nagusiak -grabitatarena, elektromagnetikoa eta nuklearra- txikiagotu egiten dira, gutxienez distantziaren karratuaren arauera. Horrela, ba, izarrak partikula askeak bailiren kontsidera ditzakegu, eta horixe da prezeski, hitzarmenez egiten dena: hots, izar fixuekin doan sistema, inertziala dela onartzen da. Hurbilketa hau oso ona da, zeren eta beren galaxiaren zentruaren inguruan duten azelerazio zentripetua guztiz arbuia garria baita ($3 \times 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ordenekoa, eguzkiaren kasuan).

Eguzkia bera ere, izar bat den aldetik, azelerazio oso txiki z higitzen da galaxiaren zentruarekiko. Horrela, partikula asketzat jo dezakegu.

Modu honetan eginik, eguzkiarekin joanik eta izar fixuen

paraleloki higituz doan sistema (S_E delakoa) inertziala dela onartzen dugu.

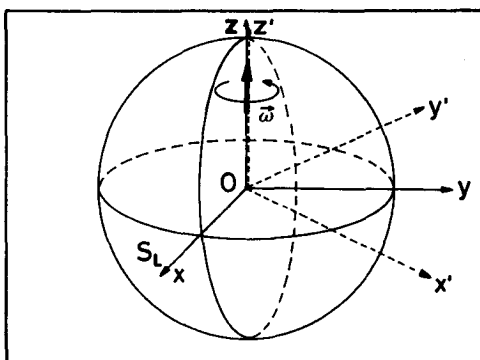
Eta Lurrean ba ote dago inertziazko sistemarik? Izatez, ez dago, zeren eta Lurrak eguzkiaren inguruan duen higidura eliptikoa (ia-ia zirkularra) baita, eta beraz, azelerazio zentripetua du behintzat:



$a \simeq 0,6 \text{ cm/s}^2$ eguzkirantz.

Hala ere, hurbilketa batez S_L sistema inertzializat har dezakegu. Eta zein da S_L sistema? S_L sistema Lurrarekin batera higitzen da, baina beraren ardatzak S_E sistemaren ardatzen paraleloak dira etengabeki. Honela izan arren, S_L sistema ez da inertziala, zeren eta beraren jatorriak elipse bat deskribatzen baitu. Exzentritate txikiko elipse hori zirkunferentzia dela kontsideratuz (hau hurbilketa nahiko egokia da), eta sistema ez-inertziala izanagatik agertzen den indar zentrifugo ($\vec{F}_Z$) eta eguzkiaren erakarpenaz sortutako indarra ($\vec{F}_e$) berdinak direla kontutan harturik, indar bi horik existituko ez bailiren lan eginez gero, S_L sistema inertziala dela esan dezakegu.

Honelatan, bi sistema kontsidera ditzakegu Lurrean. Bata S_L , "geldi" dagoena eta inertziala dena, eta bestea, $S(Ox'y'z')$ lehenarekiko biraka ari dena eta beraz ez-inertziala. Biraren abiadura angeluarra



$(\vec{\omega})$, egunean 2π radianetakoa (bira bat) da.

Edozein modutan, ikusi dugunez, sistema inertziala aukeratzeari hurbilketa bat egin dugu, sistemaren azelerazioa arbuia-tuz. Hurbilketa hori baliagarri izanen da, prezisio horrekin lan egitea nahiko den kasuetan. Bestela azterketa zehatzago ba-ten premia ukanen dugu.

Horixe da, azken batez, Fisika osoan egiten dena. Adieraz-pen eta formula matematikoak errealitatearen hurbilketa bat di-ra. Fenomenoak hurbilketa horrekin ongi ulertzen eta adieraz-ten badira, aurrera. Zehaztasun handiagoa behar izanez gero, teoria landuago bat eraiki behar.

Honela, makinen higidura aztertzean, nahikoa da Lurrare-kin doan sistema ($Ox'y'z'$) inertzialtzat hartzea; eta berdin gertatzen da alkantze txikiko projektilen kasuan. Hala ere hai-zeen higidura (zikloiak, antizikloiak, haize-korronteak eta beste aztertzeko), kontutan eduki behar da Lurraren bira-higi-dura, eta horrela ez du balio $Ox'y'z'$ sistema inertzialtzat hartzeak, $Oxyz$ sistema kontsideratzeak baizik.

* Galileoren transformazioa eta inertiaren printzipioa.

Aurreko gaian ikusi genuen bezala, Galileoren transforma-kuntza, translazio uniformeazko higidura erlatiboari dagokiona da. Kasu honetan zera geratzen zitzaigun:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Hau da, bi behatzaileek azelerazio berbera neurtzen dute. Eman dezagun, adibidez, bi behatzaileetako bat sistema iner-tzial batetan doala (B behatzailea, kasu). Horrela bada, B be-hatzaileak $\vec{a} = 0$ azelerazioaz ikusiko du higitzen partikula as-ke bat. Baina lehengo erlazioa erabiliz, $\vec{a}' = 0$ izanen da. Be-raz, B' behatzaileak ere uniformeki ikusiko du higitzen parti-kula askea, eta beraz, B' behatzailea ere inertziazkoa da eta

bera doaneko sistema, inertziala izanen da.

Beste hitzen bidez esanez, sistema bat inertziala bada, be rarekiko uniformeki transaldatzen diren beste sistema guztiak ere inertzialak dira.

5.2. MOMENTU LINEALA

Dinamikaren munduan abiatzeko, magnitude berri bat behar dugu: momentu lineala. Definizioz, momentu lineala masa eta abiadura biderkatuz lortzen den magnitudea da:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

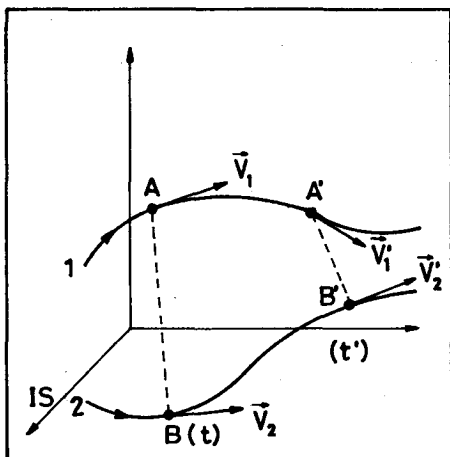
Momentu lineala $\vec{p}$ letraz adierazten da eta abiaduraren direkzio eta sentido berbera duen bektore bat da, $m > 0$ baita.

Mekanika Klasikoan masa (m) ez dela abiadurarekin aldatzen kontsideratuko dugü, hau da, pausagunean zein higituz, par tikulak beti masa berbera duela kontsideratuko dugu. Egia esan, zehatz-mehatz, ez dakigu "masa" delakoa zer den. Partikulak dau kan "materiarekin" erlazionatzen dugu, baina "materia" bera zer den ez dakigu. Dena den, partikula baten masa partikularen ezau garritzat hartuko dugu, eta Mekanika Klasikoan ari garen bitar tean, higiduraren independentea dela kontsideratuko dugu. Erla tibitatearen teoriaren arloan lan egitean -hots abiadura han- dien kasuan- ordea, hipotesi hori ez da erabilgarri izanen. De na den, gu Mekanika ez-erlatibistaren arloan ari garenez, m konstantetzat joko dugu.

Momentu linealaren definizioan finkatuz, honela defini de zakegu inertziaaren printzipioa:

"Partikula askeak momentu lineal konstantez higitzen dira sistema inertzialetan".

5.3. MOMENTU LINEALAREN KONTSERBAZIOAREN PRINTZIOPIOA



Kontsidera dezagun bi partikula osoturiko sistema isolatu bat, hau da, partikula horiek ez dute kanpo-indarren eraginik jasaten. Baina beraien artean elkarrazioa dago. Beraz, ez dira partikula askeak. Honela, kanpoko inertzi sistema batekiko (IS -kiko) partikulen higidura ez da uniformea izan, eta generalean, ez da zuzena izan.

t denbora unean, 1 partikula A puntuan dago eta $\vec{v}_1$ abiadura du; eta 2 partikula B puntuan, $\vec{v}_2$ abiaduraz higitzen da.

t' denbora unean, 1 partikula A' puntuan dago eta $\vec{v}_1'$ abiaduraz higitzen ari da; eta 2 partikula B puntuan eta $\vec{v}_2'$ abiaduraz.

Definizioz, bi partikulok osoturiko sistemaren momentu lineala, partikula bien momentu linealen batuketa da. Beraz, bi denbora unetan hauxe izanen da:

$$t : \quad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$t' : \quad \vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

Ikusten denez, adibide honetan m_1 eta m_2 masak konstante bezala jotzen ditugu.

Esperimentalki egin diren aproba guztietan ikusi denez,

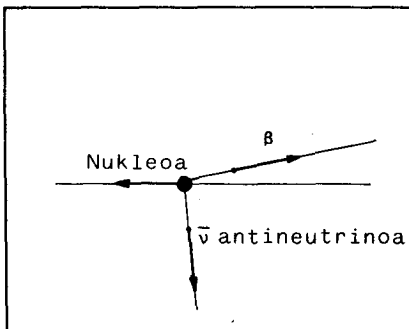
printzipio hau betetzen da:

"Partikula biek elkarren eragina baino pairatzen ez badute, hots, biek osoturiko sistema isolaturik badago, sistemaren momentu linealak konstante iraute du"

Printzipio hau momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa deitzen da. Gainera, printzipio hau ez da soilik bi partikularen kasurako betetzen, edozein partikula multzoz osoturiko sistema isolaturen kasuan ere betetzen baita.

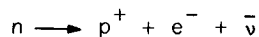
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_i + \dots = k^{te}$$

Esan bezala, orain arte ezagutzen diren fenomeno guztietan betetzen da printzipio hau. Inoiz betetzen ez dela pentsatu izan da, baina fenomeno ongi ezagutzen izan ez delako zela ikusi izan da.



Demagun adibidez β izpien kasua. Nukleo batzuren desintegrapenean agertzen diren β izpiak elektroiak dira, izatez. Dena den, Wilson-en kamaren bidez, hondar-nukleoa eta β izpia direkzio desberdinetan higitzen zirela ikusten zen. No la zitekeen hori? Sistema isolatu bat osotzen zutenez, mo-

mentu lineala kontserbatzeko, abiadura biek direkzio berberekoak eta aurrakoa sentidokoak izan behar zuten (baldin eta desintegrapena baino lehen nukleoa geldirik bazegoen). Ez ote zen, ba, momentu lineala betetzen? Arrazoia zera zen, alegia, orduarte ezagutzen ez zen partikula berri bat ere sortzen zela: antineutrinoa. Erreakzio hau xez



($\bar{\nu}$, antineutrinoa)

Antineutrinoaren momentu lineala kontutan hartuz, esandako printzipioa ongi betetzen zela ikusi zen.

Aurrera eginenez, azter dezagun gehitxoago partikula biren kasua:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = k^{te}$$

Hots:
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

Eta hemendik
$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$$

$$\Delta \vec{p}_1 = - \Delta \vec{p}_2$$

Ikusten denez, partikula bakoitzaren momentuaren aldakuntza bat agertzen da. Zergatik?. Partikulen artean elkarrazioa dagoelako, noski.

Asken adierazpen honek, masaren birdefinizio operazionala emateko balioko digu.

$$\Delta \vec{p} = \Delta (m \vec{v}) = m \Delta \vec{v}$$

Partikula bakoitzaren masa konstantetzat hartuz. Eta lehenago ikusi dugunaren arauera

$$\Delta \vec{p}_1 = - \Delta \vec{p}_2$$

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = - m_2 \Delta \vec{v}_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\Delta |\vec{v}_2|}{\Delta |\vec{v}_1|}$$

Formula honen arauera, m_1 masa-unitatea baldin bada (edo masa ezagun bat), erraz lortuko dugu m_2 masa, modu operazional batez.

5.4. INDAR KONTZEPTUAREN DEFINIZIOA: NEWTONEN BIGARREN ETA HIRUGARREN LEGEAK.

Espazioan partikula asko eta interrelazionatuak egon arren, partikula bakar bat aztertu nahi izaten da. Orduan ez dira kontsideratu behar espazioko beste partikulak. Baina, edozein modutan, hauek eragin bat dute partikula hartan. Eragin hori matematikoki materializatzeko, INDAR izeneko magnitudea definitzen da.

Indar kontzeptua, momentu linealaren kontserbapenaren printzipiotik aterako dugu.

Har dezagun, ba, lehen pauso batetan lehengo bi partikulen kasua. Ikusi dugunez:

$$\Delta \vec{p}_1 = - \Delta \vec{p}_2$$

Aldakuntza hau Δt denbora-tartean gertatzen bada:

$$\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = - \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

Eta limitean $\Delta t \rightarrow 0$ eginez

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = - \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Definizioz, denbora unitateko partikula batek duen momentu linealaren aldakuntza, edo hobeki esateko, partikularen momentu linealaren denborarekiko deribatua, INDARRA deitzen da.

$\vec{F}$ sinboloaz adierazi ohi da.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Lehen pauso batetan behintzat, deribatua sistema inertzial batetatik egiten dena da.

Izatez, definizio hori Newton-en bigarren legea deitzen da. Baina segitu dugun prozesua kontutan hartuz, legea baino areago definizio bat dela aitortu behar dugu, hain zuzen ere, indarraren definizio matematikoa.

Bestalde, masa konstante gisa harturik

$$\vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

Ekuazio hau Dinamikaren oinarrian dago. Ekuazio bektoriala da eta, beraz, bektorialki aplikatu behar da. Ikusten denez, bi modutara irakur daiteke:

- Partikula baten gainean indar batek eragitean, partikula horrek azelerazio bat pairatzen du, sistema inertzial batetatik neurtzean.
- Edo alderantziz esanik, partikula bat sistema inertzial batetatik azelerazioz higitzen ikusten bada, partikula horren gainean indar batek eragiten duelako da.

Noski, $\vec{F}$ konstantea bada, $\vec{a}$ ere konstantea izanen da. Eta $\vec{F} = 0$ bada (partikula askea bada), $\vec{a} = 0$ izanen da, edo bestela esanik $\vec{p} = k^{te}$ izanen da. Hots, Newtonen lehen legea agertzen zaigu.

Honelatan, indarra elkarrazioaren kontzeptua nolabait konkretatzeko erabiltzen den magnitudea baino ez da. Partikulen arteko elkarrazioak aztertzeke bestelako magnitude batzu

ere erabili arren, hala nola energia potentziala, oraingoz, na hiko izango dugu indarra deiturikoarekin.

Ikusten denez, ba, indarra elkarrazioari ematen zaion izen teknikoa da. Indarrrik ez badago, partikula askea dugu, el karraziorik gabea.

Emandako definizioaren arauera, 1 eta 2 partikulak bate-ra kontsideratzen baditugu:

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_{12}$: 1 partikularen gainean 2 partikulak egiten duen indarra.

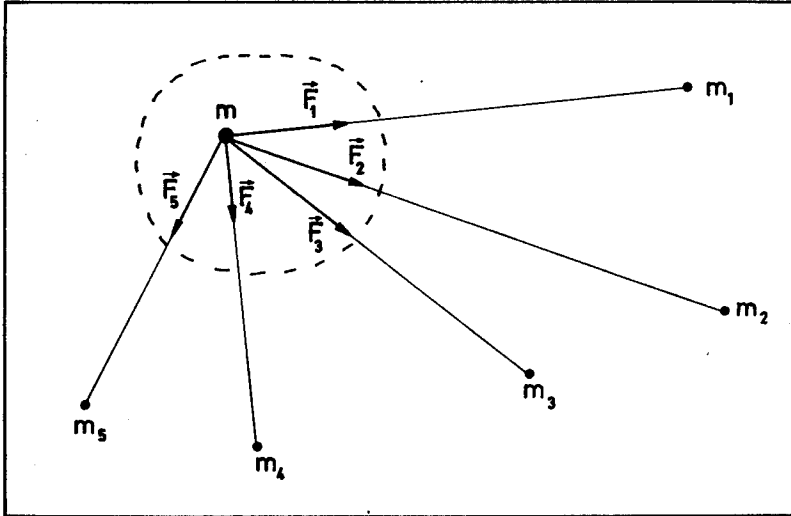
$\vec{F}_{21}$: 2 partikularen gainean 1 partikulak egiten duen indarra.

Hauxe da, prezeski, Newtonen hirugarren legea:

"Bi partikula elkarrekin interakzionatzean, lehenak bigarrenaren gainean sortzen duen indarra, bigarrenak lehenean egiten duen indarraren berdina da, baina aurkakoa sentidoa du"

Sarri, lege hau akzio-erreakzio legea deitzen da. Lege hau elkarrazioaren seinaleak abiadura infinituz higitzen badira beteko da. Baina, dakigunez, seinaleen abiadurak gorengo muga bat du: c, argiaren abiadura hutsean. Horregatik, zehatz hitz egin da, lege hau ez da betetzen, nahiz eta Mekanika klasikorako oso hurbilketa ona izan.

Masa batek beste masa askoren eragina jasaten badu bakoitzaren eraginari (hau da, bakoitzak egiten dion indarrari) momentu linealaren aldaketa bat dagokio. Honelako aldaketa bakoitza



$\vec{F}_i$ sinboloaz adieraziko dugu.

Denetara, ondoko momentu-aldaketa jasaten du m masak, gai nezarmentaren printzipioan oinarrituz:

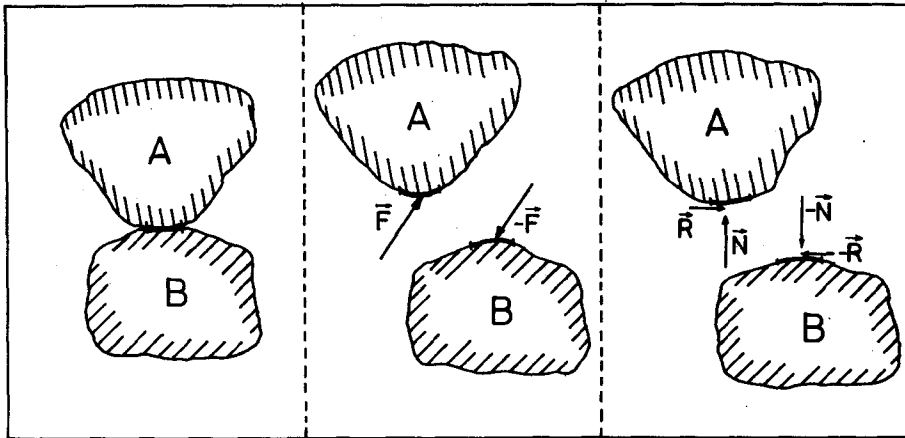
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

$\vec{F}$ delakoa indar erresultantea deitzen da, eta indar guztien batuketa bektorialaz lortzen da.

5.5. KONTAKTU-INDARRAK: INDAR NORMALA ETA MARRUSKADURAZKO INDARRA.

Partikulen dinamikan, indarrek partikulen posizio-bektore erlatiboaren dependentzia dute. Indarra elkarrakzioa da, distantzia batetara agertzen den elkarrakzioa. Partikulek ez dute elkar "ukitu" behar, beren arteko indarra ager dadin. Gehiago oraindik, partikula bien artean ez da egongo "kontaktu fisikorik", distantziara sortzen den interakzioa baizik. Honela, ba, atomoen artean indarrak sortzen dira "ukitzen" egon ez arren.

Gorputzen arteko "ukitzea" kontzeptu makroskopiko bat da. Atomo eta molekulen artean ez da beharrezkoa, eta horregatik, kasu honetan distantzia batetara eragiten duten indarrak kontsideratzen dira. Hala ere, gure giza-zentzumenean mailara pasatzean, gure begiek gorputz askok elkar ukitzen dutela ikusten dute. Ukitzean, kontaktuan egotean, elkarren aurkako indar bat sortzen da, bi gorputzak kontaktuan daudenean gainazalean.



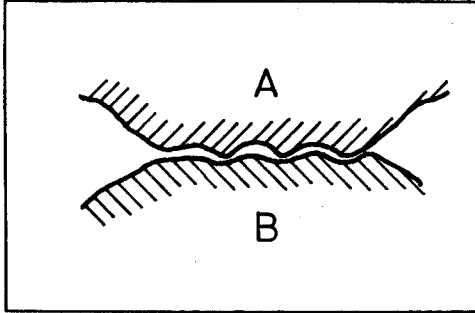
Akzio-erreakzio printzipioz, bi indar horik berdinak dira moduluz eta direkzioz, baina aurkako sentidoa dute. Honela B gorputzak A gorputzari $\vec{F}$ indarra egiten badio, A gorputzak $-\vec{F}$ indarra egiten dio B gorputzari denbora une berean. Indarrok, kontaktu-indarrak dira.

Bi osagaien bidez adieraz daitezke:

$\vec{N}$: Osagai normala. Gainazalen perpendikularra da. Gorputz bakoitzak besteari bere barnean sartzen ez uzteko jartzen dion eragozpenaren neurria da.

$\vec{R}$: Kontaktu-gainazalen tangentearen direkzioa du. Atxekiduraren eta gainazalen laztasunaren kausaz sortzen da. Marruskadurazko indarra deitzen da.

Ikus dezagun bi osagai hauen artean dagoen erlazioa zein den.



Marruskadurak bi gorputzen labaintze erlatiboaren aurka jotzen du. Lehen ikusaldi batetan gainazalak guztiz leunak direla pentsa dezakegu. Baina mikroskopioz begiratu, gorabehera nabariak dituztela ikusiko dugu.

Marruskadura-fenomenoa oso korapilatsua da eta estatistikoki aztertu behar da. Mikroskopikoki, marruskadura Van der Waals-en indarren kausaz gertatzen da. Haien kausaz, kontaktu puntuetan "soldadura hotzak" deritzenak agertzen dira eta honelako "soldadurak" apurtzeko, indarra egin behar da. Indar hori marruskadurazko indarraren berdina (baina aurkako sentidokoa) da. Zenbait faktorek garrantzi handia dute:

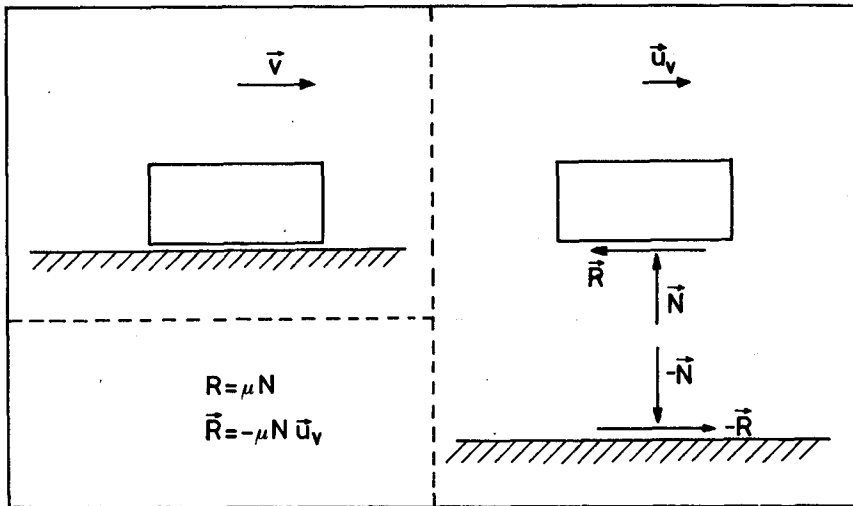
- materialeak zeintzu diren
- gainazalak nola landurik dauden (amaiera mikroskopikoa eduki behar da kontutan).

Edozein modutan, bi gainazal ezagun eta konkretu emanez, experimentalki ikusi eta frogatu denez, R eta N indarren artean proportzionalitate konstantea ageri da. Hain zuzen ere

$$R = \mu N$$

μ delako konstantea marruskadura-koefizientea deitzen da. eta, argi ikusten denez, adimentsionala.

Bestalde, $\vec{R}$ bektorearen sentidoa beti da gorputza erlatiboki higitzen denekoaren edo higitzeko joera duenekoaren aurkakoa. Adibidez:



Goiko irudian $\vec{v}$ bektoreak gorputzak zoluairekiko duen abiadura adierazten du, eta $\vec{u}_v$ delakoak, direkzio horretara ko bektore unitarioa.

Bi marruskadura-koefiziente mota desberdin kontsideratu behar ditugu:

* marruskadura-koefiziente estatikoa (μ_s) Bi gorputzak elkarre kiko geldirik daudenean agertzen dena. Izatez, μ_s koefiziente gorputzak justuki elkarrekiko higitzen hasten direnean definitzen da, une honetan "soldadura hotzak" desegiten hasi ko baitira. Limitera heldu aurreko marruskadura txikiagoa da eta, horregatik, honela adierazten da.

$$R \leq \mu_s N$$

Kasu honetan R indarra higitzen hastean hartuko lukeen sentidoaren aurkakoa da. Hau ulertzea, garrantzitsua da: $R = \mu_s N$ marruskadurazko indarraren gorengo muga da. Generalean, oroka apurtzeko unean ez bagaude $R < \mu_s N$ izango da.

* marruskadura-koefiziente zinetikoa (μ_k) Gorputzak elkarreki ko higitzen ari direnean. Lehenago esan dugun bezala

$$\vec{R} = - \mu_k N \vec{u}_v$$

Orain arte beti agertu izan denez (esperimentuetan)

$$\mu_k \leq \mu_s$$

Horrek esan nahi du ezen gehiago kostatzen dela gorputzak higri erazten hastea, higituz daudela higri erazten irautea baino. Beste era batetan esanda, soldadura hotzak apurtzea (pau~~s~~a gune erlatiboan egonik) geroko higidura erlatiboa mantentzea baino gehiago kostatuko zaigu.

Adibidea. Marruskadura kontzeptuak problemetan nola erabiltzen diren ikusteko, problema bat eginen dugu.

Demagun plano aldapatsu batetan dagoen 1kg-tako gorputz prismatiko bat (kaxa bat adibidez). Kaxa eta zoluaren ar~~te~~ t~~eko~~ marruskadura-koefizienteak ondokoak dira: $\mu_s = \mu_k = 0,3$

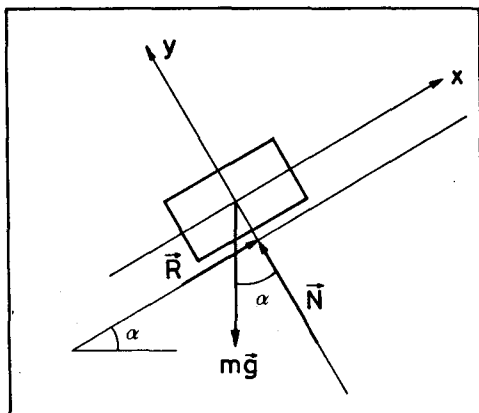
- a) Zein da plano horrek horizontalarekin forma dezakeen an~~g~~ulurik handiena, masa berez jaisten has ez dadin?
- b) Kaxa gainean eta planoaren direkzioan $F = 1$ N-eko indar bat eginez, zein izanen da angelurik handiena?
- c) Planoa 45° -z altxatuz eta $F = 1$ N indarra eginez, zein azelerazioz jaitsiko da?

- a) Geldi egon behar duenez

$$R \leq \mu N$$

Eta angelurik handienez

$$R = \mu N$$



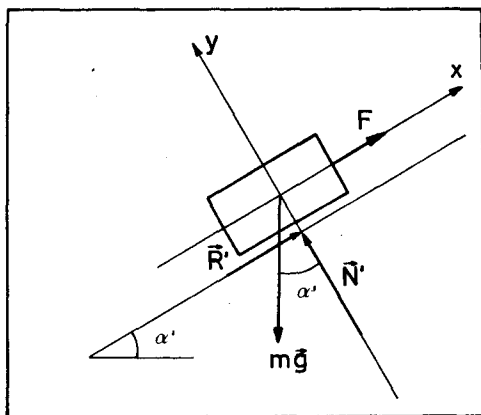
Bestalde, azelerazioa nulua da. Indarren osa gaiak adierazteko x eta y direkzioak hartuz.

$$\left. \begin{array}{l} \text{x direkzioan:} \quad -mg \sin \alpha + \mu N = 0 \\ \text{y direkzioan:} \quad N - mg \cos \alpha = 0 \end{array} \right\}$$

Hemendik: $-mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = 0$

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \longrightarrow \alpha = \arctan \mu = 16^\circ 42'$$

b)



Kasu honetan

$$R' = \mu N'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{x:} \quad \mu N' + F - mg \sin \alpha' = 0 \\ \text{y:} \quad N' - mg \cos \alpha' = 0 \end{array} \right.$$

$$\alpha' = 22^\circ 19'$$

c) Era bereko irudiak balio digu, $\alpha'' = 45^\circ$ eginez ($\alpha'' > \alpha'$ baita).

Oraingoan, ordea, a azelerazioa dugu x direkzioan

$$\begin{cases} x : R'' + F - mg \sin \alpha'' = m a \\ y : - mg \cos \alpha'' + N'' = 0 \end{cases}$$

$$N'' = 1 \cdot 9,8 \cos 45 = 9,8 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R'' = \mu N'' = 0,3 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Beraz} \quad m a = 1 \cdot a = -9,8 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0,3 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = -3,85 \text{ m/s}^2$$

Azelerazioaren zeinu negatiboak beherantz (x negatiborantz alegia) doala esan nahi du.

5.6. MARRUSKADURAZKO INDARRAK FLUIDOETAN

Experientziak frogatzen duenez, gorputz solido bat fluido baten barnean abiadura txikiz (erlatiboki) higitzen denean, bertan higiduraren kontra sortzen den marruskadurazko indarra abiaduraren proportzionala da, direkzio berekoa eta aurkako sentidokoa. Honela adieraz dezakegu marruskadurazko indarra:

$$\vec{F}_r = -k \eta \vec{v}$$

Hemen ageri diren k eta η koefizienteek ondoko esangura dute:

* k delakoak gorputzaren eitearen dependentzia du, eta bai formarekiko higitzen deneko direkzioarena.

Esferaren kasuan

$$k = 6 \pi R$$

Azken hau Stokes-en legea izenaz ezagutzen da. k delakoa marruskadura-koefizientea deitzen da eta ondoko dimentsio-
-ekuazioa du:

$$[k] = [6 \pi R] = [R] = L$$

Hots luzeraren dimentsioak ditu.

* η delakoak barne-marruskadura adierazten du eta biskositate-koefizientea deitzen da. Beronen dimentsioak ondokoak dira:

$$[\eta] = \left[\frac{F_r}{k v} \right] = \frac{M L T^{-2}}{L L T^{-1}} = M L^{-1} T^{-1}$$

Oharra: bigarren liburuan μ deitzen dugu, honela egiten baita Fluidoaren Menkanikan. Hala ere, hemen η ipini dugu aurreko μ letrarekin ez nahasteko.

Beraz unitateak ondokoak dira:

- MKSA sisteman, $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ edo $N \cdot s \cdot m^{-2}$
- cgs sisteman, $g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} = \text{Poise}$

Erraz ikusten denez:

$$1 \text{ kg} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = 10 \text{ g} \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} = 10 \text{ Poise}$$

Biskositate-koefizienteak fluidoaren tenperaturaren depen-
dentzia du

$$\eta = \eta(T)$$

Likidoen kasuan, tenperatura igotean biskositatea moteldu egiten da

$$T \uparrow \Rightarrow \eta \downarrow$$

Gasen kasuan ordea, tenperatura igotean biskositatea area gotu egiten da.

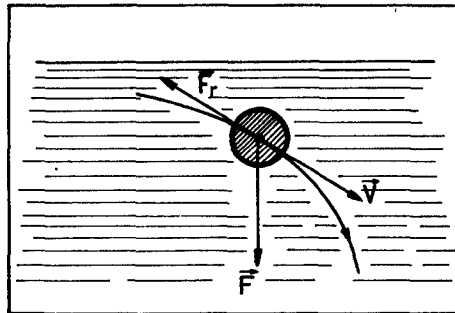
$$\tau \uparrow \Rightarrow \eta \uparrow$$

(honetaz 11.2. galdera ikus daiteke).

Fluido**en** barneko marruskadura nolakoa den ikusi ondoren, interesgarri gerta daiteke higidura-ekuazioa nolakoa den aztertzea.

Demagun gorputza $\vec{F}$ in darraren eraginpean higitzen ari dela. $\vec{v}$ abiaduraren kausaz, marruskadura sortzen da. Denetara gertzen den indar erresultantea hauxe da:

$$m \vec{a} = \vec{F} - k \eta \vec{v}$$



Azter dezagun, ekuazio honek denborarekin duen eboluzioa.

Demagun $\vec{F}$ konstantea dela (hauxe da, adibidez, atmosferan higitzen ari diren gorputzen kasua. Orduan $\vec{F} = m\vec{g}$ da, (Arkhimedesen indarra kontutan hartu gabe). Demagun, halaber, lehen unean $\vec{v} = 0$ dela.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) - Hasieran} \quad k \eta \vec{v} = 0 \\ m \vec{a} = \vec{F} \end{array} \right\}$$

Beraz, $\vec{v}$ handituz doa $\vec{F}$ -ren direkzioan.

II) - $\vec{v}$ handituz doanez, $k \eta \vec{v}$ ere handituz doa, eta $\vec{F}$ -ren direkzioa duenez,

$$\vec{F} - k \eta \vec{v} \quad \text{txikituz doa}$$

eta $\vec{F} - k_{\eta} \vec{v} = m \vec{a}$ denez, azelerazioa ere txikiagotuz doa, baina beti direkzio eta sentido berberaz, eta $\vec{v}$ han dituz doa.

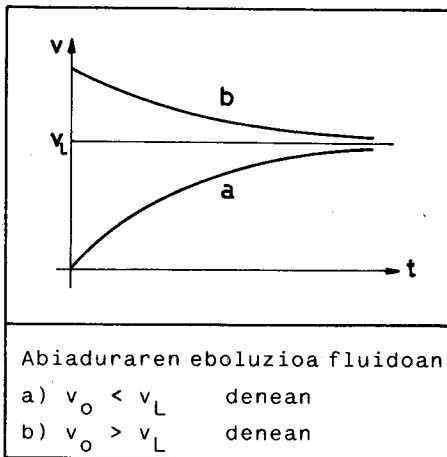
III) - Azkenean $\vec{F} - k_{\eta} \vec{v} = 0$ egiten da

Orduan $\vec{a} = 0$

Eta $\vec{v} = k^{te}$

Eta gero ere horrela irauten du. Beraz, abiadura limite bat dago, $\vec{F} - k_{\eta} \vec{v}_L = 0$ egiten duena hain zuzen ere:

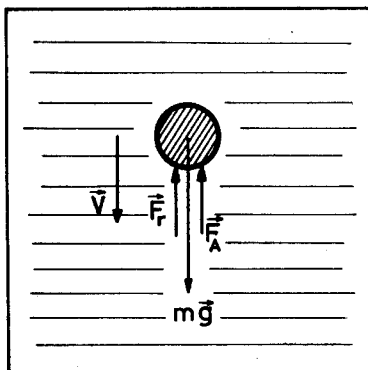
$$\vec{v}_L = \frac{\vec{F}}{k_{\eta}}$$



Lehen uneko abiadura, abia dura limitea baino handia goa bada, abiadura motel-duz doa abiadura limitera heldu arte.

Kasu bietan abiadurak den borarekin duen aldakuntza alboko irudian adierazten da.

Gorputza grabitatearen eraginpean jausten ari denean, Arkhimedes-en goranzko indarra ere eduki behar da kontutan. Bero-ri ia arbulagarria da airearen kasuan baina oso handia gerta daiteke likidoen kasuan.



Irudian bertikalki erortzen ari den gorputz baten kasua adierazten da.

$\vec{F}_A$ = flotatze-indarra edo bultzada (Arkhimides)

$$\vec{F}_A = -m_f \vec{g}$$

m_f : fluidoaren masa desplazatua.

Honela, higidur ekuazioa hauxe da:

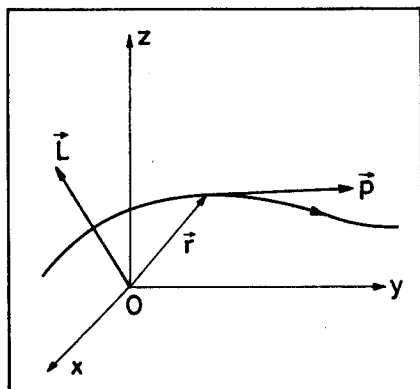
$$m\vec{g} - m_f \vec{g} - k \eta \vec{v} = m \vec{a}$$

Eta abiadura limitea:

$$v_L = \frac{(m - m_f) g}{k \eta}$$

Honetaz oso interesgarria gerta daiteke parakaidisten kasua.

5.7. MOMENTU ANGELUARRA.



Magnitude berri hau oso lagungarri gertatuko zaigu zenbait higiduraren dinamikaren azterketan. Ondoko eran definitzen da:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$\vec{L}_O$: puntu batetik momentu angeluarra da (O puntuarekiko).

Jatorriarekiko denean, erraztasuna gatik, ez dugu azpiindizerik ipini ko.

$\vec{r}$: posizio-bektorea

$\vec{p}$: momentu lineala

Hau da, ardatz sistemaren jatorriarekiko momentu angeluarra, partikularen posizio-bektorea eta momentu lineala bektorialki biderkatzean lortzen den magnitudea da.

Osagaien funtzioan honela idatz daiteke:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Azter dezagun magnitude honen balioa zenbait kasu berezitan.

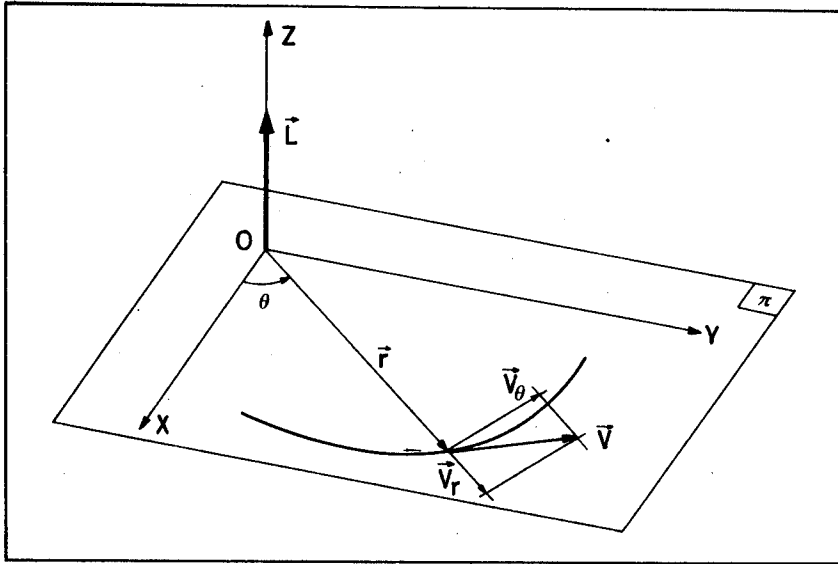
* Higidura launa (π plano)

Lehenik eta behin ardatz sistema egokia aukeratuko dugu

O x y plano π plano

O z ardatza π -ren perpendikularra

Honela eginik $\vec{r}$ bektorea planoan egonen da, eta bai halaber $\vec{v}$ bektorea ere.



Eta momentu angeluarra bai $\vec{r}$ -ren eta bai $\vec{p}$ -ren perpen-
dikularra denez, $\vec{L}$, π planoaren perpendikularra izanen da.
Hots, $\vec{L} \perp \pi$ eta gainera $\vec{L}$ -k soikik izanen du osagai bat, Oz
direkzioan alegia. Beste era batetara esanda, $\vec{L}$ bektorearen
direkzioak konstante irauten du higiduran zehar.

Bestalde, π planoan erreferentzi sistema polar bat aukera-
tuz gero, $\vec{v}$ abiadurak bi osagai ditu

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r : \text{osagai erradiala} \\ \vec{v}_\theta : \text{zeharkako osagaia} \end{array} \right\} \quad (\text{ikus 3. gaia})$$

Beraz:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \wedge \vec{v}_r + m\vec{r} \wedge \vec{v}_\theta$$

Baina $\vec{r} \wedge m\vec{v}_r = 0$ $\vec{r}$ eta $\vec{v}_r$ elkarren paraleloak baitira.

Honela, ba :

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}_\theta$$

Eta $\vec{v}_\theta$ eta $\vec{r}$ elkarren perpendikularrak direnez:

$$L = m r v_\theta \longrightarrow L = m r v_\theta \vec{k}$$

Eta 3. gaian ikusi genuenez,

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

Azkenean zera gertatzen zaigu

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

* Higidura zirkularra

Dakigunez, higidura honetan

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Beraz,

$$\vec{L} = m \vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

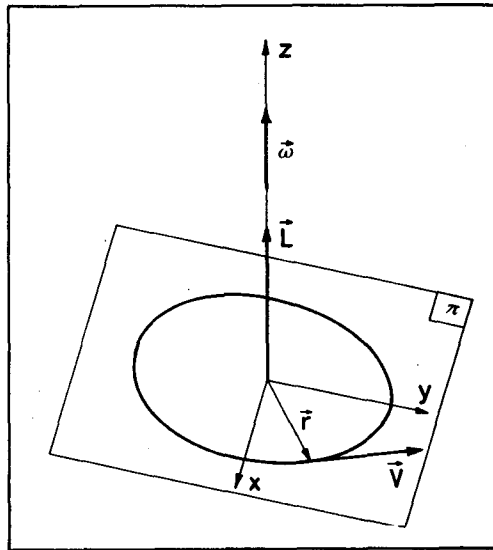
eta $m \vec{r}$ eta $\vec{\omega}$ perpendikularrak izanik,

$$L = m \omega r^2$$

Direkzioz, $\vec{L}$ eta $\vec{\omega}$ paraleloak dira

Beraz:

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}$$



Ikusitako kasu bereziak alde batetara utzirik, momentu angeluarra beste magnitude batzurekin duen erlazioa aztertzeraz gero, konkretuki, indarraren momentuarekin duena.

Dakigunez (ikus 2. gaia), honela definitzen da indar baten momentua puntu batekiko

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Kasu honetan sistemaren jatorriarekiko momentua kontsideratuko dugu ($\vec{\tau}_O$ edo $\vec{\tau}$).

Zer erlazio dago $\vec{\tau}$ eta $\vec{L}$ magnitudeen artean? Hau ikusteko, kalkula dezagun $\frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = 0 \quad \text{da zeren eta bi bektoreok paraleloak baitira.}$$

$$\text{Bestalde inertzia sistematan,} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Oharra: Sistema ez-inertzialen kasuan kontutan eduki beharko da puntu hau, interpretazio okerririk ez egiteko.

Beraz, hauxe geratzen zaigu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau}$$

Erlazio hau momentu angeluarraren teorema da.

Bi eratara irakur daiteke:

- I) "Partikula baten momentu angeluarraren denborarekiko deribatua, beraren gain eragiten ari den indarraren momentuaren berdina da".

Edo bestela esateko:

- II) "Partikula baten gainean egiten den indarraren momentuak, partikula horren momentu angeluarraren aldakuntza sortzen du". Zer esanik ez, momentu angeluarra eta indarraren momentua puntu berberarekiko kalkulatu behar dira.

Indarraren momentua nulua denean, $\vec{\tau} = 0$, goiko adierazpe na sinplifikatu egiten da:

$$\vec{\tau} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = k^{te} \text{ (bektorialki)}$$

Hauxe da, hain zuzen ere, momentu angeluarraren kontserbazioaren printzipioa:

- I) "Partikula baten gainean eragiten ari den indarraren momentua nulua bada (indarra nulua bada ere bai, noski), partikula horren momentu angeluarrak konstante irauten du". Kasu honetan ere puntu berberarekiko momentuez hitz egiten ari gara.

Edo beste esateko:

- II) "Partikula baten momentu angeluarrak konstante irauten badu, beraren gainean indarren momenturik ez du eragiten edo eragiten ari diren indarren momentua nulua da".

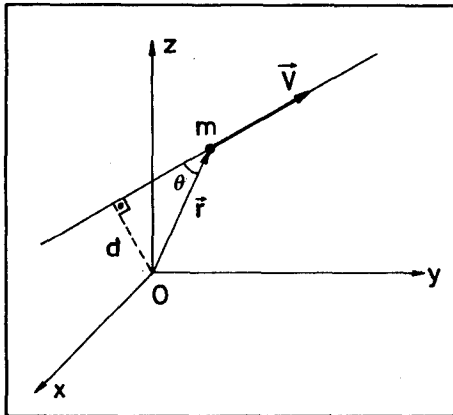
Beste kasu berezi bat aipatzearren, $\vec{F} = 0$ kontsideratuko dugu.

Batetik, higidura hori zuzena da, azeleraziorik ez baitu' (eta $\vec{v} = k^{te}$).

Bestetik,

$$L = m v r \sin \theta = m v d = k^{te}$$

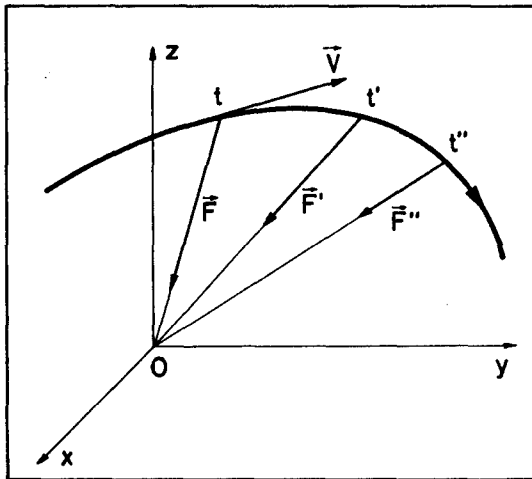
denez,



argi ikusten da d hori ere konstantea dela, bai na hau gauza agerikoa da, ibilbidea zuzena baita. Beraz, frogatzen aritu izan garen hau, ez zen zertan frogatu behar, bistakoa baitzen. Ala ez?

5.8. INDAR ZENTRALAK

Puntu honetan, Naturan sarri ageri den kasu bat aztertu ko dugu: indar zentralena. Ikusiko dugunez, indar zentralen eraginpean gertatzen den higidurak berezitasun interesgarriak ditu.



Lehenik eta behin de finitu eginen ditugu indar zentralak. Indar hauen direkzioa beti dago puntu konkretu bati zuzendurik. Puntu hori indarren zentrua deitzen da, eta gehienetan, kalkuluak errazteko, bertan kokatzen da ardatzen jatorria.

Esan bezala, ardatz sistemaren jatorria indar-zentruan harturik, indarraren momentua nulua da edozein denbora-unetan:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0 \quad \text{zeren} \quad \vec{r} \quad \text{eta} \quad \vec{F}$$

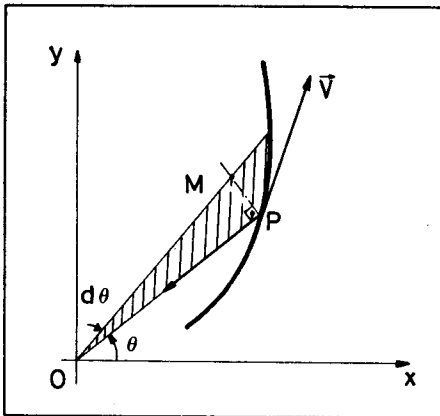
bektoreak elkarren paraleloak baitira.

Honela izateak, ondorio fisiko interesgarriak ditu, momentu angularraren kontserbazioaren printzipioaren arauera, zera geratzen baita:

$$\vec{L} = k \vec{e}$$

Eta $\vec{L} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$ delarik, $\vec{r}$ eta $\vec{L}$ elkarren perpendikularrak dira. Bestalde $\vec{L}$ delakoak direkzio konstantea duenez, $\vec{r} \perp \vec{L}$ izateak esan nahi du, $\vec{r}$ plano batetan dagoela, $\vec{L}$ -ren perpendikularra den eta indar-zentrua bere barnean daukan planoan hain zuzen ere.

Horrela, indar zentralen eraginpeko higidura, launa da. Eta azterketa errazteko, Ox eta Oy ardatzak plano horretan kontsideratuko ditugu.



Dakigunez, higidura launaren kasuan:

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Eta gainera $L = k \vec{e}$

Beraz,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k$$

Ikus dezagun konstante honen esangura zein den.

Irudiko $\widehat{OPM}$ triangeluak ondoko azalera du

$$dA = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$$

Hots, bigarren ordeneko infinitesimoak arbuaiatuz, irudian

marraturik ageri den azalerak balio hau du:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Eta dt elementuaz zatituz

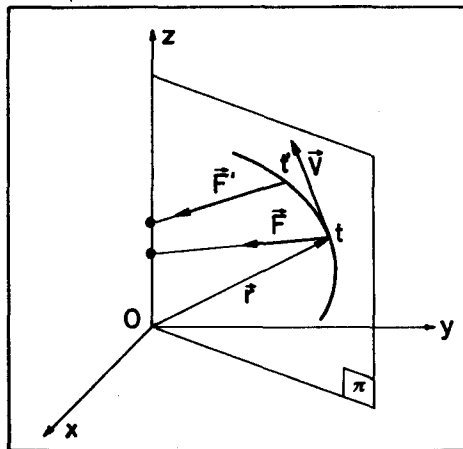
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = k^{te}$$

Baina, zer da $\frac{dA}{dt}$ deribatua? $\frac{dA}{dt}$ abiadura areolar izenaz ezagutzen da, posizio-bektoreak denbora-unitatean zapaltzen duen azalera adierazten du. Ikusten denez, ba, indar zentralen kasuan abiadura areolarra konstante irauten duen borarekin. Izatez, horixe da Kepler-en bigarren legea (ikus 14.3).

Indar zentralen kasua eguzki eta planeten artekoada, atomo ko elektroiena eta, hitz batez, bi gorputzen arteko problema mekanikoa adierazten duena.

Indar zentralen kasuaren jarraipen modura, ardatz-indarraren kasua ere aztertuko dugu.

Ardatz-indarrak (indar axialak)



Kasu honetan indarraren aplikazio-lerroa beti pasatzen da ardatz fixu batetik. Demagun, ardatz hori Oz ardatza dela, O puntua ardatz horretako edozein izanda.

Ikus dezagun, kasu honetan indarraren momentua nolakoa den:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Eta une bakoitzean partikula eta Oz ardatza dauzkan π plano bertikala kontsideratuz, bai $\vec{r}$ eta bai $\vec{F}$ plano horretan ikusten dugu. Horrela, $\vec{r}$ eta π planoak elkarren perpendikularrak dira, eta noski $\vec{r}$ eta Oz ardatza ere elkarren perpendikularrak dira.

Beraz, $\vec{r}$ momentuak Oz ardatzean duen osagaia nulua da.

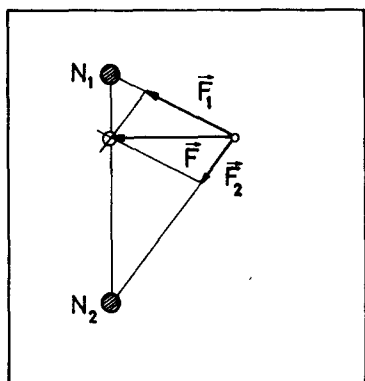
$$\tau_z = 0$$

Eta momentu angeluarraren printzipioaren arauera:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \tau \quad (\text{bektorialki})$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_z = \frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0$$

Expresio hau oso baliagarria gertatzen da.



Indar axialen kasua molekula biatomikoen elektroiekin gertatzen da. Irudian azaltzen da nolakoak diren indarrak

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

N_1 eta N_2 molekula osotzen duten bi atomoen nukleoak dira eta $\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ elektroiei egiten dizkioten indarrak.

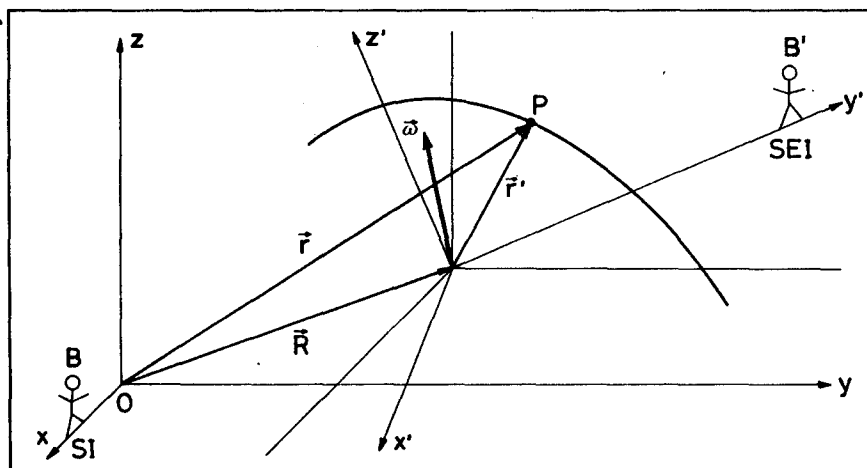
Ikusten denez, bi indar zentralen bilketaz sortzen da indar axiala.

5.9. SISTEMA EZ-INERTZIALAK, INERTZI INDARRAK

Zinematikaren arloan, eta konkretuki 4. gaian, edozein bi sistematatik eginiko behaketa zinematikoen arteko erlazioak lortzea saiatu izan ginen.

Goazen orain Dinamikaren arlora, eta demagun, sistema biek tariko bat inertziala dela. Gauzak konkretatzeko, har dezagun aurreko gaiko 4.4 puntuan ageri den kasurik generalena. Azentugabeko sistema, inertziala dela kontsideratuko dugu. Bestea -azelerazio desberdina neurtzen baitu- ez da inertziala, noski.

Lehen sisteman -azentugabekoan- zuzenki aplikatu ahal ukatzen dugu Newtonen bigarren legea, inertziala da eta. Hori egiaztatatzat joz, ikus dezagun orain, nola aplikatzen dituen Dinamikaren legeak, sistema ez-inertzialean doan behatzaileak.



4.4. puntuan aztertzen genuenez, ondoko erlazioa dago, behatzaile biek neurtzen dituzten azelerazioen artean:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Ikus dezagun, ba, nola aplikatzen dituzten Dinamikaren legeak B eta B' behatzaileek:

B behatzaileak: $\vec{F} = m \vec{a}$

B' behatzaileak neurtzen duena (zinematika) zera da:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}' - \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Eta B' behatzaileak, neurtzen duen higidura hori Newtonen bigarren legearen bitartez azaldu nahi badu, ondoko indarren eragina "ikusten" du.

$$\vec{F}' = m \vec{a}' = m \vec{a} - m \vec{A} - m \vec{\omega} \wedge \vec{r}' - m \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Azter ditzagun banan-banan indarrok:

$m \vec{a}'$: Hauxe da, sistema ez-inertzialean dagoen behatzaileak (B'-k) ikusten duen indar erresultantea

$$m \vec{a}' = \vec{F}'$$

$m \vec{a}$: Behatzaile inertzialak "ikusten" duen indar bakarra da ($\vec{F} = m \vec{a}$). Beste edozein sistematik -inertzial zein ez-inertzialetatik- ere "ikusten" da indar hau. Horregatik benetako indarra izenaz ezagutzen da.

Beste indar guztiak B' behatzaileak baino ez ditu "ikusten". Horregatik indar fiktizioak edo irudikoak direla esaten da. Sistemaren inertzialtasun gabeziak sortzen direnez gero, inertzi indarrak deitzen dira.

Inertzi indarren artean, bereziki aipatzea merezi duten bi indar daude: Coriolis-en indarra eta indar zentrifugoa.

$- 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$: Coriolisen indarra. Biraka ($\vec{\omega}$) ari diren sistema ez-inertzialetan, higitzen ari diren gorputzetan ($\vec{v}'$) ageri da.

- $2m\vec{\omega}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$: Indar zentrifugoa. Honela deitzen da zeren bi raketa-ardatzaren direkzio erradial, perpendikular eta kanpo alderanzkoa baita.

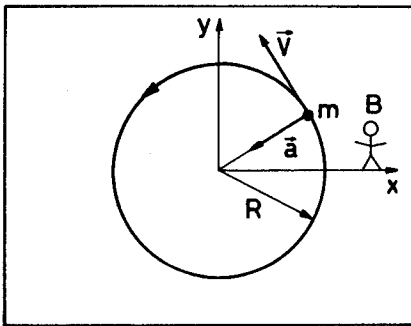
Puntu honetara helduz, argi utzi behar da zentrifugo eta zentripetu hitzen artean dagoen desberdintasun eta erlazioa. Erabiltzen diren kontzeptuak, indar zentrifugoa eta azelerazio zentripetua dira, eta orain ikusiko dugunez, txanponaren bi aurpegiak dira, nolabaiteko errealitatea ikuspuntu desberdinetatik adieraziz.

- * Indar zentrifugoa. Sistema ez-inertzialetan agertzen da. Inertizi indar bat da, hots, sistema ez-inertzialetan Newtonen bi garren legea zuzenki aplikatzean agertzen da.

- * Azelerazio zentripetua. Sistema inertzialetan, higidura zirkularra aztertzean, azelerazio bat dagoela ikusi genuen. Izatez, azelerazioa denez, kontzeptu zinematikoa da. Dena den, Dinamikaren arloan azelerazio hori sortzen duen indar bat kontsideratu behar da, eta nolabait egitearren, indar "zentripetua" deitu behar genuke. Indar hau "benetako" indar bat da, ordea, sistema guztietatik ikusten baita.

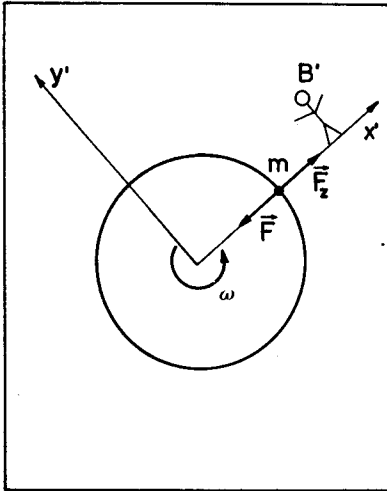
Adibide bat jarriko dugu:

Demagun higidura zirkular uniforme bat:



Azter dezagun, lehenik, sistema inertzial batetik. Partikula $\vec{v}$ abiaduraz higitzen ari da, ibilbide zirkularra osotuz. Hori posible izan dadin, partikulak azelerazio zentripetua du

$$\vec{a} = -\omega^2 R \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$



Eta hori sortzeko indar erradial zentripetu "erreal" bat dago

$$\vec{F} = -m \frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$

Har dezagun orain partikula-ren posizio-bektoreari loturik doan sistema. Sistema hau partikularekin biraka ari da $\vec{\omega}$ abiaduraz. Sistema honetan partikula gelditi dago $x' = R$, $y' = 0$ puntuan. Partikula orekan $a' = 0$ dago.

Baina zeintzu indar daude?

$$\vec{F} : \text{Benetako indarra} \quad \vec{F} = -m \frac{v^2}{R} \vec{i}' \quad (\vec{u}_r = \vec{i}')$$

$\vec{F}_z$: Inertzi indarra; indar zentrifugoa

$$\vec{F}_z = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\text{Eta } \vec{\omega} = \omega \vec{k} \text{ denez} \quad (\omega = \frac{v}{R} \text{ izanik}),$$

$$\vec{F}_z = m \omega^2 R \vec{i}' = m \frac{v^2}{R} \vec{i}'$$

Azken batez, B' behatzaileak ikusten duena, zera da:

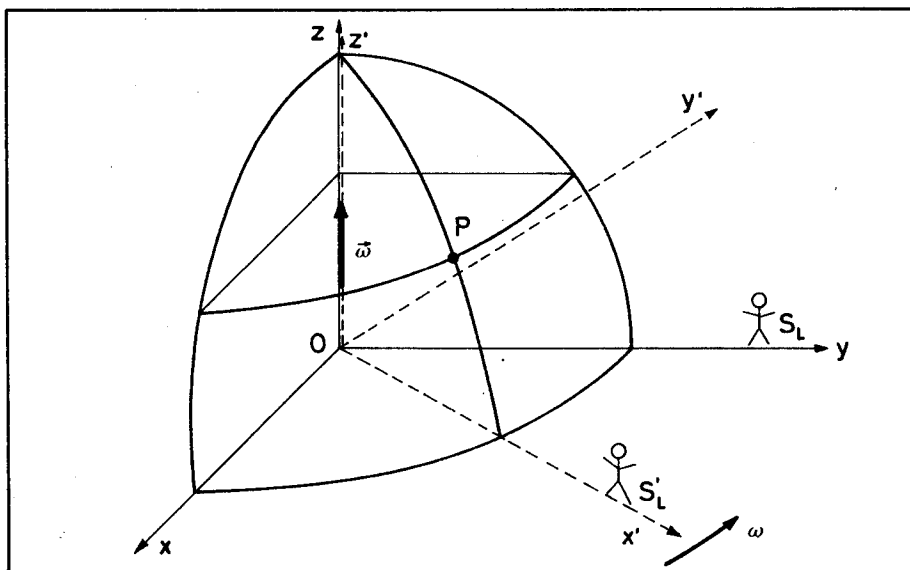
$$\vec{F} + \vec{F}_z = 0 = m \vec{a}'$$

5.10. LURRA ERREFERENTZIAZKO SISTEMA BEZALA

Gai honetako 5.1 puntuan ikusi dugunez, Lurrarekin bira

ka doan sistema $-S'_L$ ($Ox'y'z'$) delakoa- ez dela inertziala ikusi dugu. Hala ere, S_L ($Oxyz$) sistema inertzialtzat har deza keguna ikusi dugu.

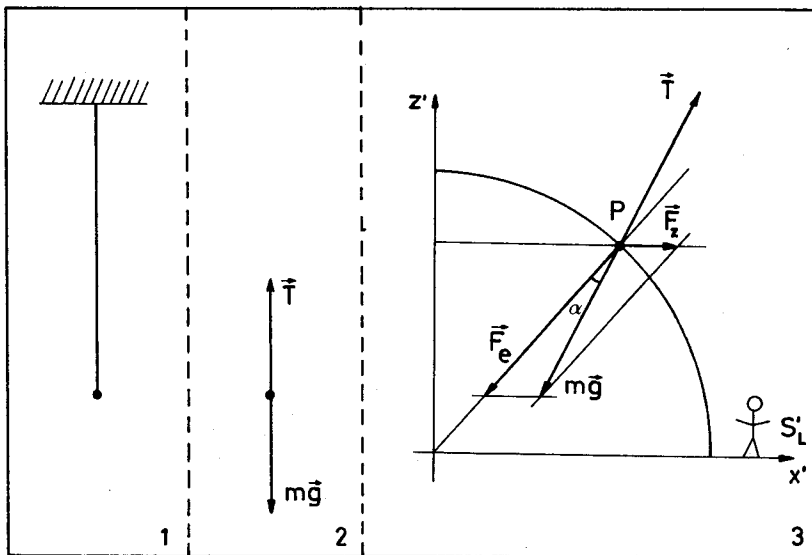
S_L sistemaren jatorria Lurraren zentruan dago eta beraren ardatzak eguzkian fixu daudenen (S_E -ren) paraleloak dira.



S_L delakoak jatorri berbera du eta O_z , ardatza O_z ardatz berbera da. Baina $\vec{\omega}$ abiadura angeluarra (bira oso bat eguneko) du S_L sistemarekiko.

Gu S'_L sisteman gaude; P puntuan hain zuzen ere. Beraz gure sistema ez da inertziala, eta inerti indarrak ere eduki beharko ditugu kontutan.

Hala ere, P puntuan gaudenez, ez dugu zuzenki S'_L sistema erabiltzen, gure latitudeari eta luzera geografikoari dagokien baizik. Normalki, z' ardatz gisa, tokiko bertikala hartzen dugu. Baina zein da bertikalaren direkzioa? $\vec{OP}$ delakoa ote? Ikusiko dugunez, ez.



Hizkuntza arruntean esaten denez, bertikala plomuak markatzen duen direkzioa da. Azter dezagun, ba, plomua S'_L sistematik (1,2,3 irudiak).

Bi indarrek eragiten dute: $\vec{T}$ eta $m\vec{g}$ direlakoek, sokaren tentsioak eta pisuak alegia. Baina zer da pisua?

Ipin dezagun, B' behatzaileak erabiltzen duen Dinamikaren ekuazioa:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} - m\vec{\omega} \wedge \vec{r}' - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Hemen

$$\begin{cases} \vec{A} = 0 \\ \dot{\vec{\omega}} = 0 & \text{biraketa uniforme baina} \\ \vec{v}' = 0 & \text{plomua geldirik baitago } S'_L \text{ sisteman} \\ \vec{a}' = 0 & \text{plomua geldirik baitago } S'_L \text{ sisteman} \end{cases}$$

Beraz:

$$0 = \vec{F} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

* $\vec{F}$: benetako indarren erresultantea. Bi indarrez osoturik da go:

$\vec{F}_e$: Lurraren erakartze-indarra. Grabitazio unibertsala ren kausaz sortua. Lurra esferikotzat hartuz, zentruarantzko direkzioa du (ikus 3. irudia).

$\vec{T}$: Sokaren tentsioa. Bertikalaren direkzioa definitzen du.

* $-m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \vec{F}_Z$: S'_L ez-inertziala delako ageri den indar zentrifugua.

Baina bestalde, 2. irudian ikusten denez:

$$\vec{T} + m\vec{g} = 0$$

$$\vec{F}_e - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \vec{T} = 0$$

Honek zera esan nahi du, alegia, grabitatearen indarra ($m\vec{g}$) Lurraren erakarpenaren ($\vec{F}_e$) eta indar zentrifugoaren ($-m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$) batuketaz sortzen dena dela.

3. irudian ikusten denez, bertikala desbidatu egiten da pixkatxo bat Lurraren erradioaren direkzioetik, α angelua hain zuzen ere. dena den, α angelua oso txikia da zeren eta $\vec{F}_e$ -ren modulua 1000koa izanik, $-m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$ delakoa $0 \div 5$ tartean dago Lurraren azalean. Horrela, lehen hurbilketa batetan, tokiko bertikalak Lurraren erradioaren direkzioa duela esan ohi da.

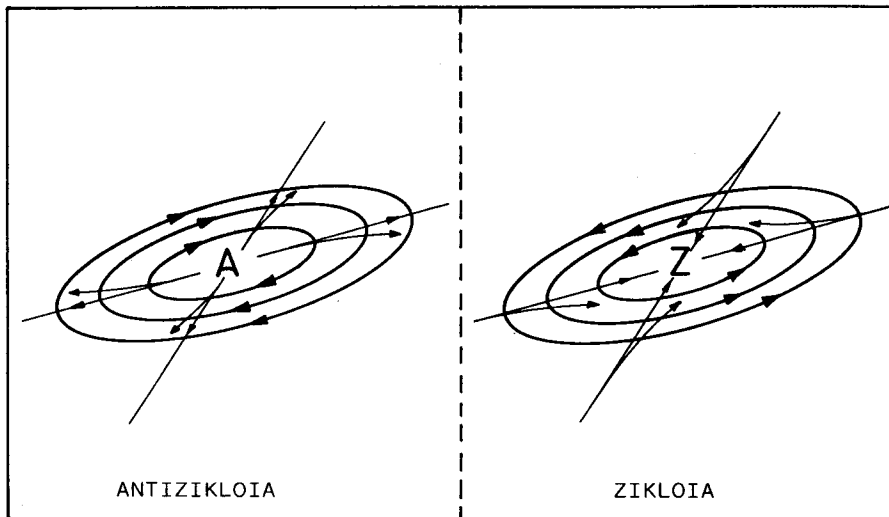
* Lurra eta Coriolis-en indarra.

Aurreko kasuan (plomuarenean), gorputza Lurrarekiko geldi zegoela ($\vec{v}' = 0$) kontsideratu dugu. Baina higitzen ari bada, Coriolis-en indarra kontsideratu behar da.

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Ikusten denez $\vec{F}_C$ eta $\vec{v}'$ perpendikularrak dira. Horrela Coriolisen indarrak desbidatu egiten ditu gorputzak beren direkzio zuzenetik.

Higidura horizontalari dagokionez, Ipar Hemisferioan higidura guztiak eskuinetarantz desbidatzen dira Coriolisen indarraren kausaz; Hego Hemisferioan, ordea, ezkerretarantz.



Arrazoi honengatik, Ipar Hemisferioan antizikloien inguruko haizeak torlojuaren sentidoan higitzen dira. Zikloien ingurukoak, alderantziz, noski.

6. GAIA - LANA ETA ENERGIA

- 6.1. INDAR BATEN BULKADA
- 6.2. INDAR BATEN LANA
- 6.3. POTENTZIA
- 6.4. ENERGIA ZINETIKOA
- 6.5. ENERGIA POTENTZIALA
- 6.6. ENERGIA MEKANIKOAREN KONTSERBAZIOA
- 6.7. FUNTZIO ESKALAR BATEN GRADIENTEA
- 6.8. INDAR ZENTRAL KONTSERBAKORREN PEKO HIGIDURA
- 6.9. INDAR EZ-KONTSERBAKORRAK
- 6.10. ENERGIA ETA OREKA

6.1. INDAR BATEN BULKADA

Partikularen Dinamikarekin segituz, gai honetan bestela ko magnitude dinamikoak aztertuko ditugu. Aurreko gaian esan dugunez, partikula horrek bere kanpoko unibertsoarekin dituen elkarrakzioak, indar terminoaz adierazten ditugu. Indar kontzeptuaren definizioa Newtonen bigarren legea dela ikusi dugu:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Kasu batzutan, indarrak denborarekiko duen aldaketa eta erlazioa ezagutzen dugu, hots, indarraren denborarekiko alda kuntza:

$$\vec{F} = \vec{F}(t) \text{ ezaguna}$$

Honela denean, zera egin dezakegu

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

Eta hau limite egokien artean integratuz,

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

$(t_0, \vec{p}_0)$ lehen uneko baldintzak dira, eta $(t, \vec{p})$ edozein aldian uneri dagozkionak. Azkenean:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{I}$$

$\int_{t_0}^t \vec{F} dt$ gaia inpultsua edo bulkada deitzen da eta $\vec{I}$ letraz

adierazten. Aurreko adierazpenean ikusten denez, bestalde:

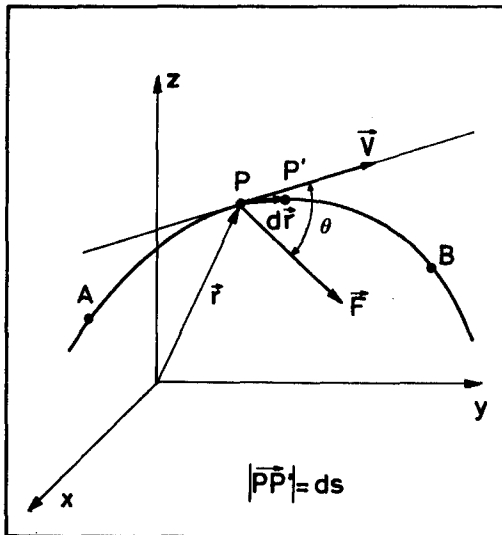
"Partikula baten momentu linealaren aldakuntzaren balioa, in

Honela, $\vec{F}(t)$ ezagutzen dugun kasuetan, metodo honetaz ebatz dezakegu problema:

1. Lehenik bulkada kalkulatz
2. Eta gero, inpultsuaren bidez momentu lineal berria lortuz

6.2. INDAR BATEN LANA

Hala ere, gehienetan ez dugu $\vec{F}(t)$ ezagutzen. Askoz ere normalagoa da, indarren eremua posizio-bektorearen funtzioan ezagutzea, hots, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ezagutzea, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ iza hik. Honelako kasuetan, bulkada erabili ordez, bestelako magnitude batzu erabiltzea komeni zaigu, hala nola lana eta energia. Goazen, ba, magnitude hark banan-banan definitzera eta kasu konkretutan erabiltzera.



Lehenik indar batek partikularen gainean eragitean egiten duen lana definituko dugu.

Demagun, $\vec{F}$ indarraren eraginpean higitzen ari den partikula bat. dt denbora-tartean, $d\vec{r}$ desplazamendua du. Bitartean, indarraren balioa $\vec{F}$ da, eta denbora-tarte infinitesimal horretan konstantetzat har daiteke.

Definizioz, denbora-tarte horretan indarrak eginiko lan infinitesimala, ondoko hau da:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{biderkadura eskalarra})$$

Erraz ikusten den bezala:

$$dW = F \, ds \, \cos \theta \quad \text{zeren } |d\vec{r}| \cong ds$$

Bi punturen arteko (A eta B'-ren arteko) lan osoa, bitartean egiten diren lan infinitesimal guztien batuketa (kasu honetan, integraketa) eginez lortzen da.

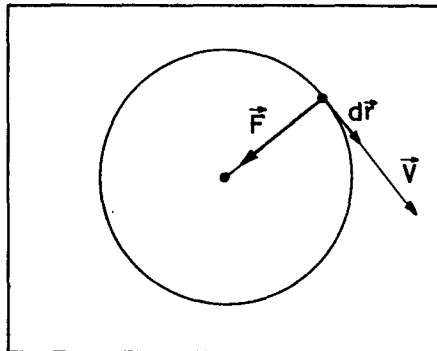
$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Emaniko definizioaren arauera, $\vec{F}$ delakoa ibilbidearen perpendikularra bada, ez du lanik egiten.

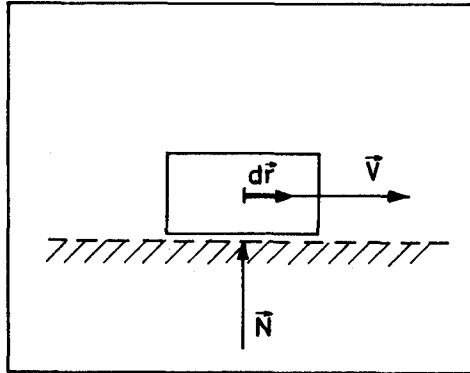
$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad \text{bada,} \quad \cos \theta = 0 \quad \text{eta } dW = 0$$

Honelako zenbait adibide jar ditzakegu.

- . Higidura zirkular uniformearen kasuan, $\vec{F}$ eta $d\vec{r}$ perpendikularrak dira ibilbide osoko puntu guzutietan. Hortaz, indar honrek ez du lanik egiten.



Gorputz bat gainazal baten gainean marruska durarik gabe higitzen bada, zoluak egiten duen indar bakarra, normala da, eta honek ez du lanik egiten, $\vec{N}$ eta $d\vec{r}$ etengabe perpendikularrak baitira.



Ikusten den bezala, $\vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen denean, erraz kalkula daiteke indar horrek egiten duen lana. Lan hau honela idazten da indarraren osagaien funtzioan.

$$W = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Puntu honekin bukatzeko, kontsidera dezagun partikula horren gainean indar askok eragiten dutela, eta kalkula dezagun guztien artean egiten duten lana, indarren erresultantearen funtzioan. Ohar gisa diogun ezen, puntu material baten dinamika aztertzen ari garenez, indar guztiak konkurrenteak direla.

Gainezarmenaren printzipioaren arauera, lan osoa indar guztiek egiten dituzten lanen batura izanen da.

$$W = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots$$

Partikula bat bakarra denez, higidura ere bat bakarra da, eta indar guztiak biderkatuz ageri den $d\vec{r}$ desplazamendua bat bakarra eta guztientzat berbera da. Faktore komuna eginik:

$$W = \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad \text{indar erresultantea da.}$$

Honela izanik: "Indar askok partikula batetan egiten duten lana, beraien erresultanteak egiten duen lanaren berdina da".

6.3. POTENTZIA

Indar batek egiten duen lana zein den jakitea interesgarri bada ere, honekin batera, lan hori zenbat denboratan egiten den jakitea ere komeni da, edo eta lana zein arintasunez egiten den. Horretarako lana eta denbora batera adierazten dituen magnitude berri bat erabiltzen da: Potentzia.

Definizioz, aldiuneko potentzia indarrak egiten duen lanaren denborarekiko deribatua da.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Definizio honetan finkatuz, eta $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ denez:

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Hitz batez, potentzia indarraren eta abiaduraren biderkaketa eskalarraz lortzen da.

Zer esanik ez, t denbora-tartean egiten den batezbesteko potentzia ($\overline{P}$), hauex da

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

Lanaren eta potentziaren dimentsio-ekuazioak eta unitateak ondokoak dira:

	Dimentsio- ekuazioak	Unitateak		Baliokideta- sunak
		MKS sistema	Bestelakoak	
Lana W	$[W] = [\vec{F}] \cdot [d\vec{r}]$ $[W] = ML^2 T^{-2}$	Joule (J) (N.m)	kilowatt-or- du (kW.h)	$1 kWh = 3,6 \times 10^6 J$
Potentzia P	$[P] = [\vec{F}] \cdot [\vec{v}]$ $[P] = ML^2 T^{-3}$	Watt (W) $(N \cdot \frac{m}{s} = \frac{J}{s})$	kilowatt(kW) zaldipoten- tzia (ZP edo HP)	$1 kW = 10^3 W$ $1 ZP = 735 W$

6.4. ENERGIA ZINETIKOA

Kalkula dezagun indar batek puntu biren artean egiten duen lana. Definizioz,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Erreferentziazko sistema inertziala bada

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Beraz:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int_A^B \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) dt = \\
 &= \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2
 \end{aligned}$$

Magnitude berri bat definituko dugu: energia zinetikoa. Definizioz, partikula baten energia zinetikoa (E_k) honela lortzen den magnitudea da:

$$E_k = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

Beronen dimentsioak, lanarenak dira

$$[E_k] = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = M L^2 T^{-2}$$

Lehengo adierazpenera pasatuz:

$$W = \int_A^B \frac{d}{dt} (E_k) dt = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Beraz, azken expresio hau irakurriz, zera ikus dezakegu: "Gorputz baten gainean egiten den lana, gorputz horren energia zinetikoa gehitzean erabiltzen da". Edo bestela esanik: "Gorputz baten gainean lana egitean, gorputz horren energia zinetikoa aldatu egiten da".

Puntu honetara heldurik, konparatu egingen ditugu ondorio hauk, bulkada aztertzean lortutakoekin.

$W = E_{k,B} - E_{k,A}$ Hemen espazioarekiko aldakuntza adierazten da. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen dugunean erabiltzen da. Nahiz eta $\vec{r}(t)$ izan, kasu honetan ez da dependentzia hori explizituki jartzen eta horrela, indarra osagai espazialen funtzioan ematen da. Ibilbideko bi punturen artean gertatzen da.

$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$ Itxura berdintsukoa da, baina denborarekiko aldakuntza adierazten du.

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen dugunean erabiltzekoa.

Dena den, gehienetan $\vec{F}(\vec{r})$ ezagutzen da, eta horregatik, energia zinetikoaren kontzeptua oso baliagarri gertatzen da praktikan.

6.5. ENERGIA POTENZIALA

Puntu honetan indar berezi batzu aztertuko ditugu: indar kontserbakorrak. Nolabait, berauen definiziotik hasiko gara.

Indarren eremu bat kontserbakorra dela esaten da, baldin eta soilik baldin indarrak egiten duen lana, $E_p(x,y,z)$ funtzio eskalar batek hasiera eta bukaerako puntuen artean duen aldatetaren bidez adieraz badadi. Honela hain zuzen:

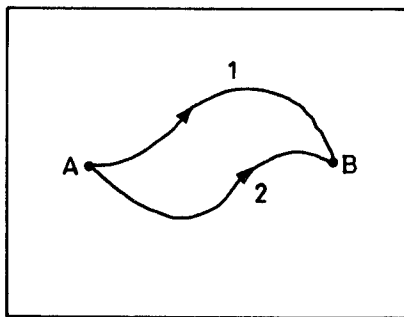
$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

E_p delako funtzio eskalar hori, energia potentziala deitzen da.

Ikusten denez, indar kontserbakorren kasuan, lana A eta B puntuetan E_p funtzioak hartzen duen baloreaz kalkulatzen da. Beraz, lanak ez du eramaten den bidearen dependentziarik, haste eta bukatze-puntuena baizik, hau da:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(1) (2)

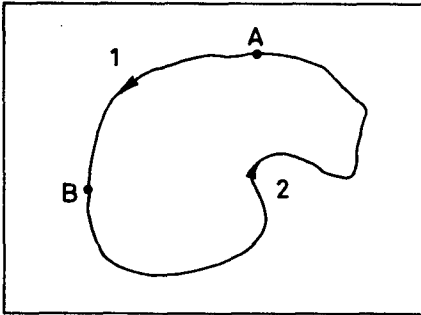


Energia potentziala konstante batetan indeterminaturik dago, zeren eta lana bi energiaren kenketaz lortzen baita

$$E_p = E_p(x, y, z) + k$$

$$W = (E_p + k)_A - (E_p + k)_B = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Konstante horrek balio desberdinak eduki ditzake, energia potentzialen zero mailaren hautatze-moduaren arauera.



Ibilbidea itxia denean, hots, A puntutik irten eta A puntura heltzen bada, ez da denetara lanik egiten indarrak kontserbakor direnean.

Ikus dezagun hori:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Praktikan, marruskadura edo igurtzimenduzko indarraketa Magnetikan agertzen direnak kenduta, besteak kontserbakor direla esan dezakegu. Horregatik, oso baliagarria gertatzen da energia potentziala.

6.6. ENERGIA MEKANIKOAREN KONTSERBAZIOA

6.4. galderan ikusi dugunez, partikula baten gainean eragiten duen indar erresultantea edozein motakoa izanik ere, beti betetzen da honako hau:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Bestetik, 6.5. galderan azaltzen den legez, $\vec{F}$ indarra kontserbakorra denean:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Horrelatan, ba, higitzen ari den partikula baten gaineko indar erresultantea kontserbakorra bada (eta soilik kasu honetan), zera idatz dezakegu, ibilbideko edozein puntu biren artean:

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$E_{k,B} + E_{p,B} = E_{k,A} + E_{p,A}$$

$$(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B$$

$E = E_k + E_p$ delako magnitudea energia mekanikoa deitzen da.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(x,y,z)$$

Indarrak kontserbakor direnean, partikularen energia mekanikoa berdina da ibilbideko puntu guztietan, hau da, energia mekanikoa konstante irauten du. Hortik datorkie, hain zuzen, kontserbakor izena.

Hemen, E_p delakoak eremu kontserbakor batetan partikulak duen energia potentziala adierazten du. Hurrengo gaianikusiko dugun bezala, sistemen dinamika aztertzean, beste termino bat ere

eduki beharko dugu kontutan: barne-energia, sistemaren barnean eragiten duten indarrek sorturikoa.

6.7. FUNTZIO ESKALAR BATEN GRADIENTEA

Energia potentziala definitu dugularik, Fisikaren hizkuntza matematiko gisa, oso baliagarri gertatuko zaigu funtzio eskalar baten gradientearen zer den adieraztea.

Lehenik eta behin eremu eskalarra definituko dugu. Espazioko puntu bakoitzean balore eskalarra duen funtzio bat (V) kontsideratuko dugu. Funtzio horrek puntuaren posizio-bektorearen dependentzia badu, espazioan eremu eskalar bat dugula esanen dugu eta honela adieraziko:

$$V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

Espazioko puntu bakoitzean, eremu eskalar horren gradientearen definizioa daiteke matematikoki, ondoko eragiketak eginez:

$$\vec{\text{grad}} V = \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

Ikusten denez, gradientearen definizioa espazioko puntu bakoitzean definitzen den bektore bat da. Nabla ($\vec{\nabla}$) izeneko operatzailearen bidez, eremu eskalarretik eremu bektorial bat lortzen da. $\vec{\nabla}$ operatzailea honela adierazten da:

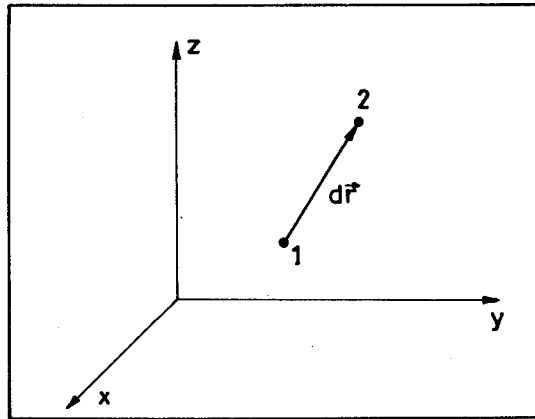
$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

eta kasu honetan V funtzioari aplikatzen zaio.

Ikus dezagun orain, gradientearen definizioa duen esangura fisikoa zein den. Definizioaren arauera, puntu bakoitzean gradientearen

tea bektore bat da. Nolakoa den ikusteko, direkzioa, modulua eta sentidoa zehaztu beharko ditugu.

Kalkula dezagun lehenik, bi puntu infinituki-hurbilen ar tean V funtzioak duen aldakuntza (dV alegia).



$$dV = V_2 - V_1 = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Baina bestalde:

$$\left| \begin{array}{l} \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \\ d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{array} \right.$$

Beraz:

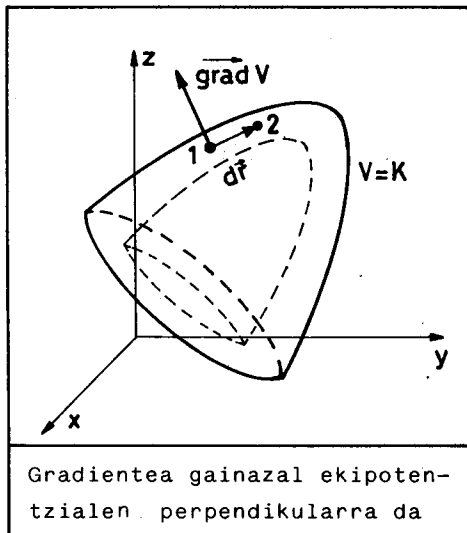
$$dV = \text{grad } V \cdot d\vec{r}$$

Honetan finkatuz, gradientearen direkzioa kalkulatuko du gu. Kontsidera ditzagun espazioan ondoko gainazalak.

$$V(x, y, z) = K^{\text{te}}$$

Konstantearen balore bakoitzeko, gainazal bat dugu.

Gainazal hauk, sestra-gainazalak edo gainazal ekipotentzialak ere deitzen dira.



Kontsidera ditzagun horrelako gainazal batetan dauden bi puntu, 1 eta 2:

Gainazal berekoak direnez

$$dV = 0 = \vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{r}$$

Bestalde, generalean

$$\vec{\text{grad}} V \neq 0 \quad \text{eta} \quad d\vec{r} \neq 0$$

Beraz hori gerta dadin, $\vec{\text{grad}} V$ eta $d\vec{r}$ direla-koek perpendikularrak izan beharko dute.

Hortaz, puntu batetan gradienteak duen direkzioa, puntu beretik iragaten den gainazal ekipotentzialaren perpendikularra da.

Kalkula dezagun orain gradientearen modulua.

Demagun $\vec{u}$ direkzioan lerrokaturik dauden bi puntu, 1 eta 2.

$$d\vec{r} = ds \vec{u}$$

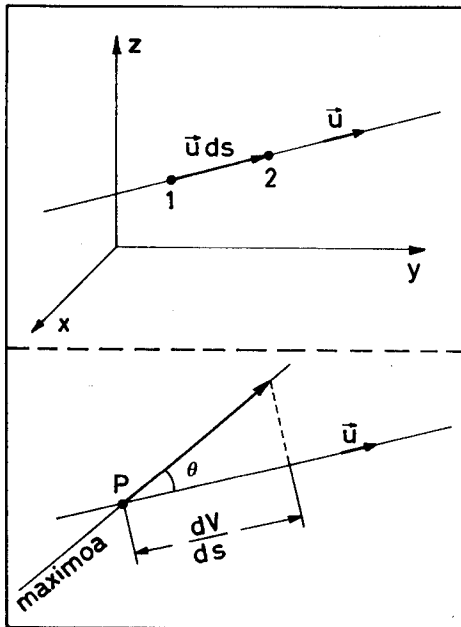
$\vec{u}$ bektore unitarioa izanik, noski.

Kasu honetan

$$dV = \vec{\text{grad}} V \cdot ds \vec{u}$$

$$dV = (\vec{\text{grad}} V \cdot \vec{u}) ds$$

$$\frac{dV}{ds} = \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{u} = |\vec{\text{grad}} V| \cos \theta$$



$\frac{dV}{ds}$ delakoa, $\vec{u}$ direkzioan eginiko deribatu direkzionala da. Honen balore maximoa $\cos \theta = 1$ denean lortu ko da.

Horretaz:

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_{\max} = | \text{grad } V |$$

Ikusten denez, deribatu direkzionalak, direkzio horretan gradienteak duen projekzioaren ($\text{grad } V \cdot \vec{u}$) balorea du. Honela gradientearen modulua deribatu direkzional handienaren berdina da; edo, beste modu batetara esanik, deribatu direkzional maximoa gainazal ekipotentzialen perpendikularren direkzioan lortzen da eta beraren balorea gradientearen moduluarena da.

Honela, ba, gradienteak era honetakoa da:

- Gradientearen direkzioa, gainazal ekipotentzialen perpendikularra da.
- Sentidoa, potentzialak haziz doazenekoa
- Eta modulua, deribatu direkzional maximoarena.

Gradientearen esangura fisikoa azaldu ondoren, Fisikaren elementu matematiko gisa duen garrantzia aipatuko dugu. Ener-

gia potentziala definitzean, eremu kontserbakorrak erabili di_tugu. Orain hauxe esanen dugu:

"Indarren eremua kontserbakorra izan dadin, baldintza beharrez_ ko eta nahikoa da, $\vec{F} = \text{grad } V$ izatea".

Guk ez dugu hemen frogatuko baldintza beharrezkoa denik, maila honetarako gehiegitxo gerta ez dadin. Dena den, erraz frogatu daiteke baldintza nahikoa dela. Hara

$\vec{F} = \text{grad } V$ baldin bada,

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{r} = \int_A^B dV = V_B - V_A$$

Beraz $\vec{F} = \text{grad } V$ bada, lanak ez du ibilbidearen dependentziarik, ibilbidearen muturren dependentzia soilak edukiz. Beraz, indarren eremua kontserbakorra da, frogatu nahi genuen legez.

Fisikaren arloan $\vec{F} = \text{grad } V$ egin beharrean, $\vec{F} = -\text{grad } E_p$ egiteko ohitura dago, gero energia mekanikoa energia zinetikoaren eta energia potentzialaren batura izan dadin. Zer esanik ez, horrek ez du esangurarik aldatzen, zeinu kontua hartzarmen bat baita.

* Adibideak: Aurrera segitu baino lehen eta gradientearen kontzeptua zerbait finkatzeko, adibide pare bat egingen dugu.

1.- Grabitatearen kausaz jasaten dugun indarra

$\vec{F} = -mg \vec{k}$ dela, eta grabitatearen indar-eremua kontserbakorra dela kontutan hartuz, zein da indar hori sortzen duen energia potentziala?

Errazki ikus daitekeenez, $E_p = m g z + K$ izan behar du, zeren eta kasu honetan

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -m g \vec{k}$$

2.- Demagun $V = x^2 y z^3$ delako eremu potentziala

- a) Lor bedi beraren gradientea edozein puntutan
- b) Zein da (1,0,1) puntuko gradientea?
- c) Zein da V-ren deribatua $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ direkzioan?
- d) Zenbat balio du deribatu horrek (1,0,1) puntuan?

$$a) \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = 2x y z^3 \vec{i} + x^2 z^3 \vec{j} + 3x^2 y z^2 \vec{k}$$

b) (1,0,1) puntuan

$$\text{grad } V = 0 \vec{i} + \vec{j} + 0 \vec{k} = \vec{j}$$

c) Lehenik direkzio horretako bektore unitarioa kalkulatu dugu:

$$\vec{u} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} + \frac{1}{3} \vec{k}$$

Eta teoria aplikatuz

$$\frac{dV}{ds} = \text{grad } V \cdot \vec{u} = \frac{4}{3} x y z^3 + \frac{2}{3} x^2 z^3 + x^2 y z^2$$

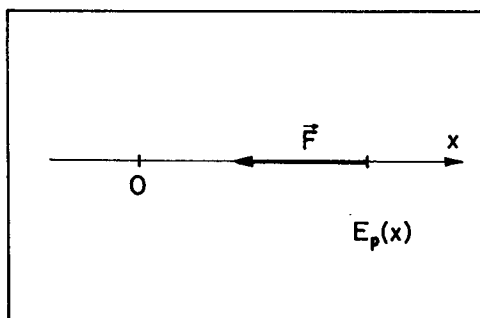
d) (1,0,1) puntuan

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_{(1,0,1)} = \frac{2}{3}$$

6.8. INDAR ZENTRAL KONTSERBAKORREN PEKO HIGIDURA

Kasu honetan, kontserbazio-printzipioak eta energiaren definizioak erabiliz, partikulen higidura aztertu nahi dugu. Bi pausotan egingen dugu azterketa hau: lehenik, dimentsio ba karreko problema batetan, eta bigarrenik, plano batetan, hots, bi dimentsiotan (kontutan har ezen indar zentralen eraginpean sortzen den higidura launa dela; honetaz, ikus 5.7. puntua).

Has gaitezen, ba, higidura zuzen kontserbakorra aztertzen. Dimentsio bakar bat kontsideratuko dugu: x



Indarren eremua kontserbakorra bada, eremu potentzial bat egon da: $E_p(x)$

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p$$

$$\vec{F} = - \frac{dE_p}{dx} \vec{i}$$

Indarra kontserbakorra izanik, energia mekanikoa kontserbatu egingen da:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(x) = \text{konstante}$$

Eta $v = \frac{dx}{dt}$ izanik

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + E_p(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_p(x)]}$$

Aldagaiak banatuz:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_p(x)]}} = dt$$

Ekuazio diferentzial honetan, aldagaiak bereizirik daude. Beraz, baldintza egokiak (hasierakoak eta edozein unetakoak) ipiniz, integratu eginen dugu:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_p(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

Modu honetan, ebatzirik geratzen da problema teorikoki, zeren eta, izatez, aurreko espresioan $x = x(t)$ lortu baitugu.

Honelatan, ba, energia mekanikoa (E), energia potentziala $E_p(x)$, eta hasierako baldintzak (t_0, x_0) ezagutuz, guztiz ebatzirik geratzen da problema, zeren eta $x = x(t)$ ezagutuz gero, erraz kalkula baitezakegu edozein unetako abiadura eta azelerazioa (indarra zuzenki ere ezaguna dugu, E_p -ren bidez).

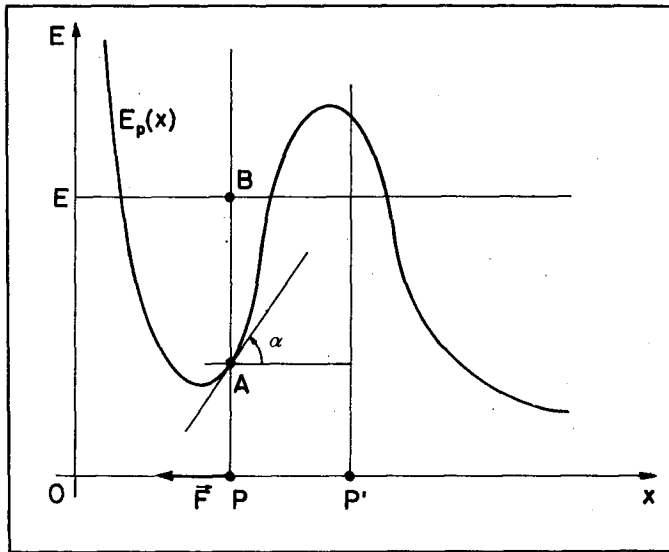
Problema hau analitikoki ebatzi ondoren, goazen orain grafikoki aztertzerara. Horretarako energia potentzialaren grafikoa erabiliko dugu. Ikus dezagun nola egiten den.

Alboko irudian zera adierazten dugu:

. Abszisatan partikularen posizioa.

. Ordenatueta energia

- $E_p(x)$ kurba



- $E = k$ energia mekaniko konstantea

Zer adierazten du irudiko elementu bakoitzak, partikula P puntuan dagoenean?.

- 0 puntua: Indarren zentrua.

- $\overline{OP} = x$

- $\overline{PA} = E_p(x) \longrightarrow$ energia potentziala

- $\overline{PB} = E \longrightarrow$ energia mekanikoa

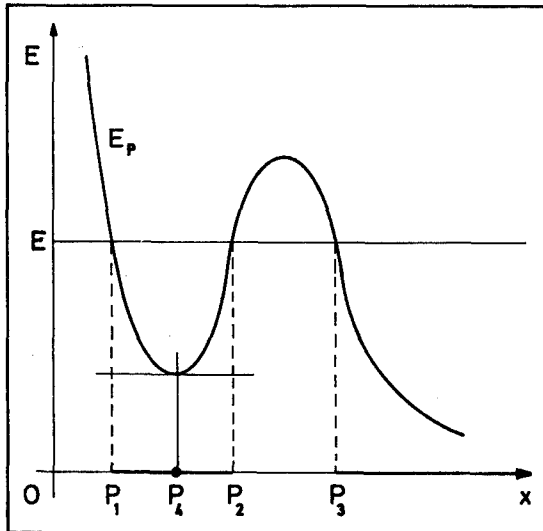
- $\overline{AB} = E_k(x) \longrightarrow$ energia zinetikoa $v = \sqrt{\frac{2 E_k}{m}}$

$$\left. \begin{aligned} - \vec{F} &= - \frac{dE_p}{dx} \vec{i} \\ \frac{dE_p}{dx} &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \quad \vec{F} = - \operatorname{tg} \alpha \vec{i}$$

Kasu honetan $\text{tg } \alpha > 0 \implies \vec{F}$ negatiboa.

Elementu hauen interpretazioan finkatuz, higidura nola-koa izanen den ikus dezakegu.

Partikula ezin egon daiteke P' puntuan, zeren eta kasu honetan $E_p > E$ denez, E_k negatiboa izanen bailitzateke; eta hori ez da posible, $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ baita, hots, E_k kantitateak positiboa izan behar baitu.



Horrela izanik, partikularen higidura $P_1 \leftrightarrow P_2$ $P_3 \leftrightarrow \infty$ tartetan baino ez da posible.

Eta $P_1 \leftrightarrow P_2$ tartean dagoen partikula, ezin pasa daiteke $P_3 \leftrightarrow \infty$ tartera. Horrelako tartearak, potentzial-putzuak deitzen dira.

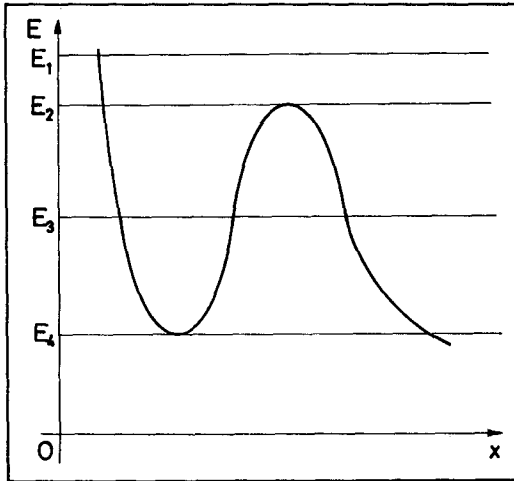
Mekanika Klasikoaren arloan ez da posible potentzial-putzuetatik irtetea. Mekanika Kuantikoan, ordea, bai (tunel efektua). Honelatan, gure kasuan, $P_1 \leftrightarrow P_2$ tartean dagoen partikula etengabe arituko da bi puntu horien artean higitzen, higidura periodikoz eta mutur bietan $E_k = 0$ eta E_p maximoa izanik.

- P_1 puntuan, abiadura zero izanen da, baina indarra, positiboa (P_2 -rantz).
- P_4 puntuan, abiadura maximoa izanen da; indarrrik ez da egon, ordea, $\frac{dE_p}{dx} = 0$ baita.

- P_2 puntuan, abiadura zero izanen da ($E_k = 0$) eta indarra, negatiboa (P_1 -erantz)

$P_3 \leftrightarrow \infty$ tartean dagoen partikula infiniturantz joanen da

- P_3 puntuan, abiadura zero da ($E_k = 0$) eta indarra, positiboa (∞ -rantz)
- Infinituan edukiko lukeen abiadura, ondokoa izanen litzateke.



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = E$$

zeren $E_p(\infty) = 0$ baita.

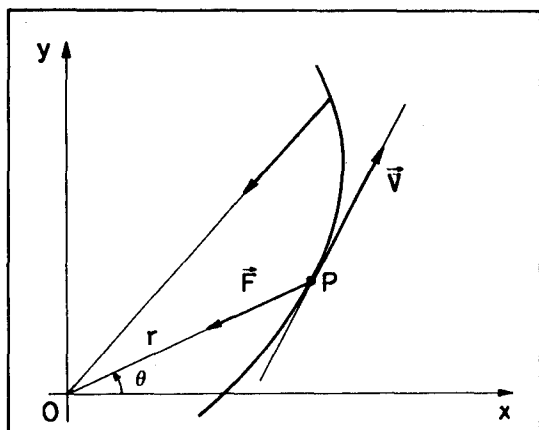
Ariketa modura, ikasleek E_1 , E_2 , E_3 eta E_4 energia osoen kasueta ko higidurak azter ditzakete.

Azter dezagun orain kasu orokorra, hots, bi dimentsiotakoa. Esan dugunez (ikus 5.7.), indar zentralen kasuan, higidura launa da.

Bi kontserbazio-printzipio daude:

I) Indar kontserbakorrak direnez

$$E = E_p + E_k$$



Gainera, kasu hone-
tan $E_p = E_p(r)$, in-
darra zentrala izan
dadin

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = F \vec{u}_r$$

Beraz

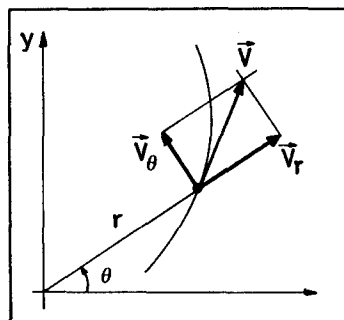
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \text{konstante} \quad [I]$$

(Oharra: Hemendik, E eta E_p ezagutuz, abiaduraren modulua kal-
kula dezakegu edozein puntutan).

II) Bestalde, indarzentrala izanik, momentu angeluarra ere
kontserbatzen da

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0 \quad \text{denez,} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} = k \vec{e}$$

Oharra:



koordinatu polarrak erabiliz (ikus 3.5. galdera)

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{dr}{dt} & v_\theta &= r \frac{d\theta}{dt} \\
 v^2 &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 & [II] \\
 \vec{L} &= \vec{r} \wedge m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \wedge m \vec{v}_\theta \\
 &\text{zeren eta } \vec{r} \text{ eta } \vec{v}_r \text{ paralelo baitira}
 \end{aligned}$$

Indar zentralen kasuan, ba, $\vec{L} = k^{te}$ (moduluz eta direkzioz). Modulua kontsideratuz, eta $\vec{r}$ eta $\vec{v}_\theta$ perpendikularrak direnez:

$$|\vec{L}| = L = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Hemendik

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Eta [II] expresiora eramanik:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Lorpen hau [I] expresiora eramanik

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r) \quad [III]$$

Hemen aldagai bakar bat ageri da: r delakoa.

Eta berau denborarekin erlazionaturik ageri zaigu. Geroa

go ikusiko dugun legez, $r = r(t)$ kalkula dezakegu adierazpen honetatik. Baina hori egin aurretik, lortutako adierazpen horren interpretazio fisikoa egingen dugu.

Direkzio bakarreko higidurarekin konparatuz, berdintsu agertzen zaigu baldin eta ondoko energia potentzial efektiboa kontsideratzen badugu.

$$E_{p,ef}(r) = \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

Ikusten denez, gehigarri gisa, $\frac{L^2}{2 m r^2}$ sartu dugu. Termino hau energia potentzial zentrifugoa deitzen da.

$$E_{p,z} = \frac{L^2}{2 m r^2}$$

Zergatik? Hara. Ikus dezagun, eremu potentzial horrek sorturiko indarrak zenbat balio duen.

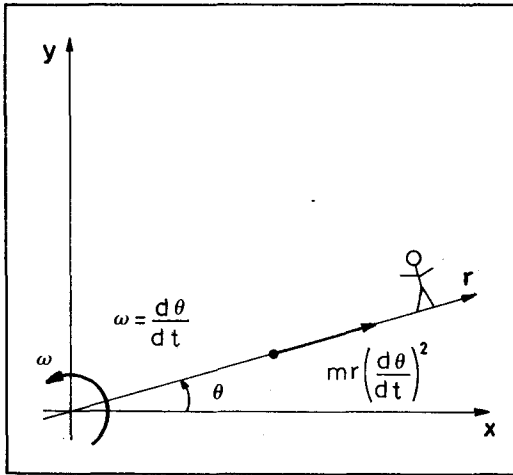
$$\vec{F}_z = - \frac{d E_{p,z}}{dr} \vec{u}_r \quad (\text{hots, erradioaren direkzioan})$$

$$F_z = - \frac{d E_{p,z}}{dr} = \frac{L^2}{m r^3}$$

$$\text{Eta } L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{delarik} \quad \left(\frac{d\theta}{dt} = \omega \right)$$

$$F_z = m r \omega^2 \quad \vec{F}_z = m r \omega^2 \vec{u}_r$$

Hau da, $\vec{F}_z$ indarrak indar zentrifugoaren antza du. Baina, zein indar zentrifugo?



Izatez, higidura lau na direkzio bakar ba tetan (r-renean) ikus ten duena, etengabe erradioarekin higitzen den behatzailea da. Baina berorren sistema ez da inertziala, biraka ari baita.

Beraz, inertzia indarrak kontsideratu behar ditu. Eta ardatzaren direkzioan ikusten duen inertzia indarra, indar zentrifugoa da (Coriolisenak beste direkzio bat du, partikula r-ren direkzioan higitzen baita). Bestalde, indar zentrifugo hau kontserbakortzat har dezakegu, $\frac{L^2}{2 m r^2}$ energia potentzialtzat hartuz.

Interpretazioarekin bukatuz, goazen orain [III] adierazpena integratzera.

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p, ef(r)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p, ef(r)}]}$$

Eta r eta t banatuz eta integratuz:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p, ef(r)}]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0 \quad [IV]$$

Honela $r = r(t)$ lortu dugu. Pixka bat ohartuz, dimentsio bakarreko kasuko prozesu berbera eraman dugula konturatuko gara.

Goikoan finkatuz, $\theta = \theta(t)$ ere lor dezakegu

$$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2} \quad (L = k^{te})$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^t \frac{L}{m [r(t)]^2} dt \quad [V]$$

$r(t)$ delarik, $\theta = \theta(t)$ lortuko dugu.

Kalkulu analitiko hauekin bukatzeko, ibilbidearen ekuazioa lortuko dugu.[IV] eta [V] erabiliz:

$$\left\{ \begin{array}{l} [IV] \longrightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p, ef}(r)]}} \\ [V] \longrightarrow dt = \frac{m r^2}{L} d\theta \end{array} \right.$$

Biak berdinduz, eta lorpena integratuz:

$$\int_{r_0}^r \frac{L dr}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E - E_{p, ef}(r)]}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

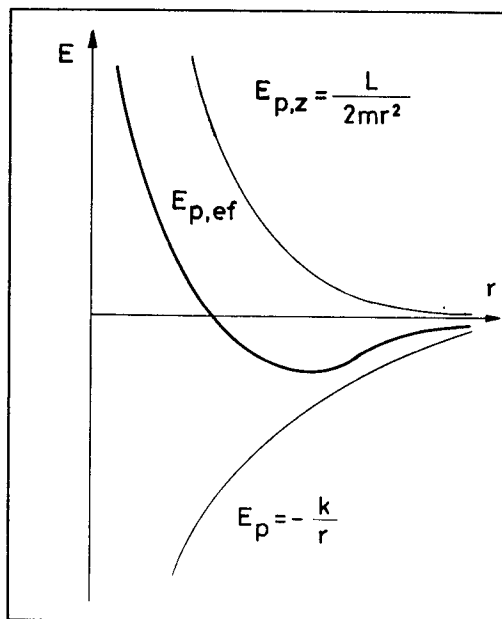
Horrela ibilbidearen ekuazioa lortu dugu, teorikoki behintzat:

$$r = r(\theta)$$

. Azken oharra

- Prozesu oso honetan bi kontserbazio-printzipio erabili di-tugu: energiarena eta momentu angularrarena.
- Aurreko kasuan bezala oraingo honetan ere potentzial-kur-ben bidez azter dezakegu higidura.

Direkzio bakar honetan egin behar da (r -renean) eta gero bi dimentsiotako interpretazioak problema bereziak ageri ditu. Ikus dezagun adibidez, nolakoa den potentzial-kur-ba grabitate indarren kasuan.



Energia potentzialak ze-ra balio du:

$$E_p = -\frac{k}{r}$$

Bestetik, dakigunez:

$$E_{p,z} = \frac{L}{2mr^2}$$

Azkenean, honela geratu-ko zaigu energia poten-tzial efektiboa.

$$E_{p,ef} = -\frac{k}{r} + \frac{L}{2mr^2}$$

6.9. INDAR EZ-KONTSERBAKORRAK

Indar guztiak ez dira kontserbakorrak. Egia esan, oina-rrizko indarrak kontserbakorrak dira, hots, Naturaren baitan, maila mikroskopikoan ez dago kontserbakor ez den indarrik. Ha

la ere, Mekanika maila makroskopiko eta praktikoan aztertzen ari gara, eta maila honetan zenbait indarrek ez-kontserbakor itxura erakusten digute. Izan ere, bostgarren gaian marruskadurazko indarrak aipatu ditugu. Hauen kasuan higiduraren aurkako indarra egiten da etengabe. Beraz, denbora guztian $\vec{F}_r \cdot d\vec{r} < 0$ enez ($\vec{F}_r$ marruskadurazko indarra), $\oint \vec{F}_r \cdot d\vec{r} \neq 0$ (eta gainera, negatiboa) eta horretan lana galtzen da.

Kasu honetan, eginiko kanpo-lan guztia energia zinetiko bihurtuko da, baina jadanik ezin gaitezke energia potentzialaz mintza, ez eta energia mekanikoaz.

Dena den, bi kontzeptu horik erabiltzeko ohitura dagoenez, kasurik orokorrean indar kontserbakor eta ez-kontserbakorrek daudela kontsideratzen da eta honela adierazten da lanaren eta energiaren arteko erlazioa.

$$W = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W'$$

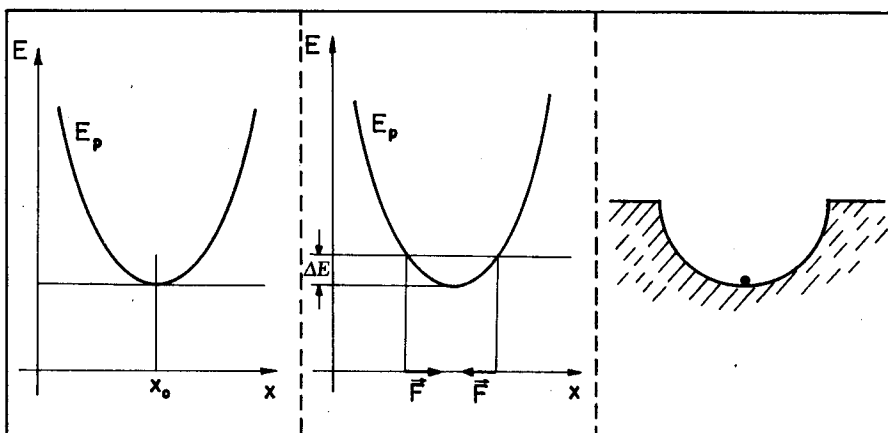
lan osoa	Hau beti esan daiteke	Indar kontserbakorrei dagokien energia potentziala	Indar ez-kontserbakorrek egiten duten lana
----------	-----------------------	--	--

Argi dagoenez, kasu honetan ezin mintza daiteke energia mekanikoaz. Baina, bertan indar kontserbakorrek soilik kontsideratuz eta $E_k + E_p$ eginez, sistemaren energia mekanikoa definitzen bada, energia hori ez dela kontserbatzen ikusiko da, W' terminoa aldatuz baitoa.

Nolabait esateko, "galtzen" den energia hori bero-energia eta deformazio-energia bilakatzen da. Eta zer esanik ez, energia mota hauk ere kontsideratuz, energia osoa kontserbatu egiten da.

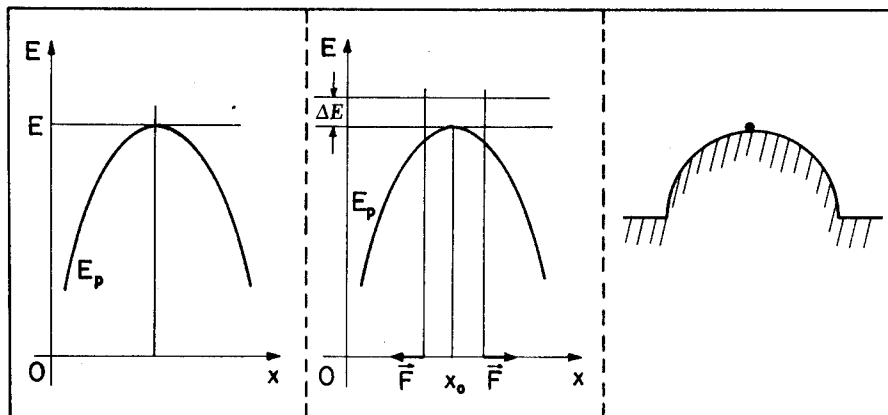
6.10 ENERGIA ETA OREKA

Eman dezagun partikula bat orekan dagoela, indarren eremu kontserbakor baten eragin pean. Energia potentzialaren kurbak aztertuz, oreka hori nolakoa den ikus dezakegu.

. Oreka egonkorra

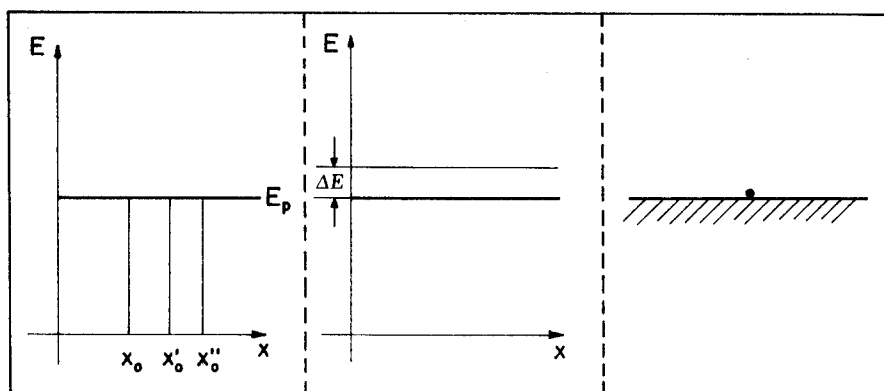
Oreka-posizioan potentzialaren kurbak minimo bat du. Honela izanik, perturbazio bat gertatzen bada (ΔE), partikula potentzial-putzu batetan dago irten ezinik, eta sortzen diren indarrek oreka-posizioerantzkoak dira. Horixe da lehen bi irudietan adierazten dena. Hirugarrenean analogia mekaniko bat egiten da, problema intuitiboki ulertu ahal izateko. Zer esanik ez, perturbazioaren ondoren oreka (geldiunea) lortzeko, marruskadurazko indarrek egon behar dute. Bestela, oreka-posizioaren inguruan arituko litzateke etengabe.

. Oreka ezegonkorra



Kasu honetan modu berean eramaten da arrazonamendua. Bai na perturbazioaren bidez guztiz apurtu egiten da oreka, indarrek x_0 -tik urruntzera baitaramate partikula.

. Oreka indiferentea



Guztiak dira oreka-posizioak

ΔE emanez, marruskadurarik ez balego, partikula abiadura konstantez higituko litzateke.

7. GAIA - PARTIKULA-SISTEMEN DINAMIKA

7.1. MASA-ZENTRUA ETA GRABITATE-ZENTRUA

7.2. PARTIKULA-SISTEMA BATEN MASA-ZENTRUAREN HIGIDURA

7.3. MASA LABURBILDU

7.4. MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMA

7.5. SISTEMA BATEN ENERGIA ZINETIKO ETA POTENTZIALA

- ENERGIA PROPIOA

- ENERGIA OSOA

7.6. TALKAK

Orain arteko gaietan partikula puntualak aztertu ukan ditugu. Gorputz finituak ere puntualak bailiren erabili ditugu.

Oraingo gai honetan, partikula askoz osaturiko sistemak aztertuko ditugu. Lehenik lotura berezirik gabe, eta gero solido zurrun gisa bildurik dauden partikula-sistemak (hurrengo bi gaietan).

7.1. MASA-ZENTRUA ETA GRABITATE-ZENTRUA

Partikula bat definitzean, beraren posizioa ezagutzeko, posizio-bektorearekin nahikoa zen. Orain partikula asko ditugularik, ezin azal dezakegu banan banan bakoitzaren posizio-bektorea. Bakoitzaren posizio-bektorea erabiltzea baino ego-kiago, beste puntu berezi batzu definitzea da: masa-zentrua eta grabitate-zentrua. Gero sistemaren higidura eta magnitude zinematikoak puntu berri horien funtzioan adieraziko ditugu.

* Masa-zentrua m_i ($i = 1, 2, \dots, n$, partikula desberdinak adierazteko) partikula $\vec{r}_i$ puntuan egonik, sistemaren masa-zentrua honela definitzen da.

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

M sistemaren masa osoa izanik,

$$M = \sum m_i$$

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Masa gauza jarrai gisa hartzen bada, elementu diferentzial

bakoitzaren masa dm izanen da, posizio-bektorea $\vec{r}$ eta aurreko batukaria integrala izanen da.

Orduan

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{M}$$

(Oharra: $\int \vec{r} \, dm$ integralak bere mugak ditu, noski, nolabait masa jarraia oso-osorik hartzekoak).

Bektore honen hiru osagai cartesiarrek hauxek dira:

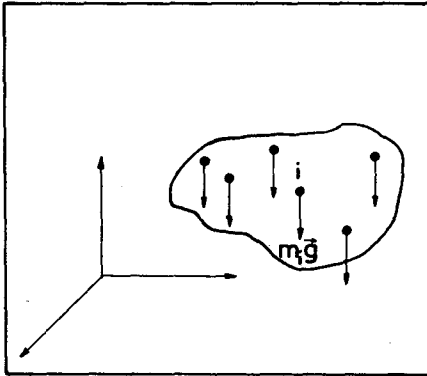
$$x_{MZ} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad y_{MZ} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad z_{MZ} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Eta masa jarraien kasuan:

$$x_{MZ} = \frac{\int x \, dm}{M} \quad y_{MZ} = \frac{\int y \, dm}{M} \quad z_{MZ} = \frac{\int z \, dm}{M}$$

- * Grabitate-zentrua. Masa-zentruaren kontzeptuaren antzerakoa da, guztiz berdina ez bada ere. Hara nola sortzen den.

Sistemako partikula bakoitzaren gainean, grabitateak $m_i \vec{g}$ indarra egiten du. $m_i \vec{g}$ bektoreez (kurtsoreez) osaturiko sistemaren erresultantea, $M\vec{g} = \sum_i m_i \vec{g}$ da, $M = \sum m_i$ izanik. Erresultante hau aplikatzen deneko puntua, sistemaren orientazioa zeingura delarik, grabitate-zentrua deitzen da.



$$M \vec{g} = \sum m_i \vec{g}$$

Grabitatearen azelerazioa bektore konstantea denean, masa-zentrua eta grabitate-zentrua puntu berebean daude, eta bi hitz hauk sinonimotzat har daitezke. Hauxe izanen da kasurik arruntena.

Dena den, $\vec{g}$ aldatuz doanean grabitate-zentruak eta masa-zentruak ez dute zertan puntu berebean egon behar.

Ikusi denez, ba, kontzeptualki, definizioaren arauera, bi gauza desberdin dira masa-zentrua eta grabitate-zentrua. Lehena, masen posizioen arauera matematikoki definitu dugun puntu bat da. Bigarrena, ostera, indar batzuren zentrua. Hala ere, praktikan berdintzat hartzen dira, zeren eta baldintzak oso arraz roak ez badira, biak puntu berean baitaude.

7.2. PARTIKULA-SISTEMA BATEN MASA-ZENTRUAREN HIGIDURA

Goazen orain masa-zentruarekin zerikusirik duten beste magnitude batzu aztertzerara. Masa-zentruaren abiadurarekin hasiko gara. Aurreko puntuan ikusi dugunez:

$$\vec{r}_{MZ} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Denborarekiko deribatuz:

$$\frac{d \vec{r}_{MZ}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \right) = \frac{m_i \frac{d \vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

Definizioz, deribatu hori masa-zentruaren abiadura da eta $\vec{v}_{MZ}$ ikurraz adierazten da. Beraz:

$$\vec{v}_{MZ} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

Erlaziona dezagun orain sistemaren momentu lineala masa-zentruaren abiadurarekin. Partikula bakoitzaren momentu lineala kontutan hartuz:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

Eta gainezarmenaren printzipioaz, haxe izanen da sistema osoaren momentu lineala:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{MZ}$$

(Azkenean masa-zentruaren abiaduraren definizioa erabili dugu)

Ikusten denez,

$$\vec{P} = M \vec{v}_{MZ}$$

Hau da, "Partikula-sistemaren momentu lineala, masa guztia masa-zentruan bildurik bailegoen kalkula daiteke".

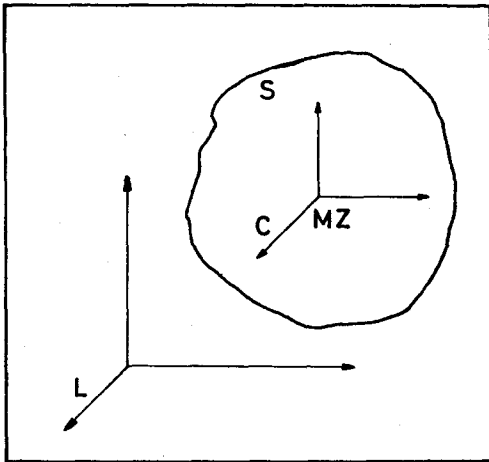
Hemendik ondorio interesgarriak atera daitezke.

Demagun S sistema isolaturik dagoela, hau da, sistemaren gainean ez du eragiten kanpoko indarrik. Momentu linealaren kontserbazioaren printzipioaren arauera:

$$\dot{\vec{p}} = k^{te}$$

Beraz:

$$M \vec{v}_{MZ} = k^{te} \implies \vec{v}_{MZ} = k^{te}$$



Hots, masa-zentrua abiaduraz konstantez higitzen da edozein inertzia sistemarekiko.

Bestalde, jatorria masa-zentruan duen erreferentziako sistema bat hartuz, lehengoaren paraleloa izanik, sistema berri hori ere inertziala da.

Masa-zentruan definitu dugun sistema inertzial hori, masa zentruaren sistema deitzen da eta C letraz adierazten. Sistema hau sarritan erabiltzen da Fisikan. Bertan,

$$\vec{v}_{MZ} = 0 \quad \text{da eta horrela}$$

$$\dot{\vec{p}} = 0$$

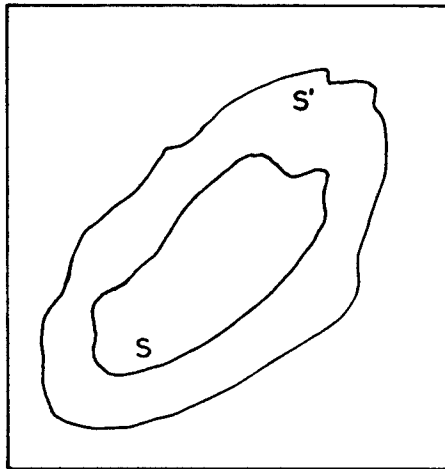
Partikula-sistematik aparte dagoen erreferentziako sistema, laborategiko sistema deitu ohi da eta L letraz adierazten.

* Azelerazioa eta indarra

Demagun, orain S sistema ez dagoela isolaturik. Beraz ezin aplikatu diezaiokegu aurreko lefroetan esanikoa.

Dena den, S' sistemarekin batera kontsideratuz, $S+S'$ sistema isolaturik dagoela esan dezakegu. (Oharra: beti egin dezakegu horrelako aukerarik; besterik ezean,

S' unibertsoa osotzeko falta den beste guztia izan daiteke).



Bi sistemek osoturiko multzoa hartuz,

$$\vec{P}_S + \vec{P}_{S'} = k^{te}$$

eta denborarekin gertatzen diren aldakuntzak aztertuz,

$$\Delta \vec{P}_S = - \Delta \vec{P}_{S'}$$

Denbora tarteaz zatituz eta limitera eramanez,

$$\frac{d \vec{P}_S}{d t} = - \frac{d \vec{P}_{S'}}{d t}$$

Bostgarren gaian emaniko definizioaren arauera (ikus 5.4 puntua)

$$\frac{d \vec{P}_S}{d t} = \vec{F}_k$$

$\vec{F}_k$ delakoa S sistemaren gain S' sistemak egiten duen indar osoa da. Kanpo-indar osoa deituko dugu. Baina

$$\vec{p}_S = M \vec{v}_{MZ}$$

denez gero,

$$\frac{d \vec{p}_S}{d t} = M \frac{d \vec{v}_{MZ}}{d t} = M \vec{a}_{MZ}$$

$$\vec{F}_k = M \vec{a}_{MZ}$$

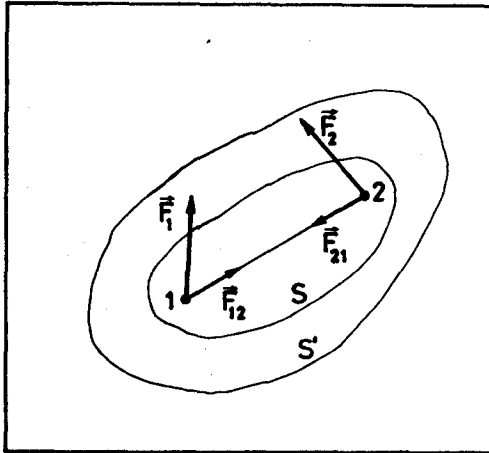
$\vec{a}_{MZ}$ masa-zentruaren azelerazioa da.

$$\vec{a}_{MZ} = \frac{d \vec{v}_{MZ}}{d t}$$

Honek zera esan nahi du: Sistema baten gainean kanpo-indarrak egiten ari diren kasuetan, sistemaren masa-zentrua, masa guztia bertan bildurik bailegoen eta indar bakarra erresultantea bailitzen higitzen da. Hau da, sistemaren masa bereko partikula bat kanpo-indar erresultantearen eragin pean eta masa-zentruan egonik, partikula horrek sistemaren masa-zentruak duen higidura berbera edukiko luke.

Gauzak errazago azaltzeko eta aurreko kontzeptuak adibide gisa erabiltzeko, bi partikulaz osaturiko sistema aztertuko dugu.

Bi partikula horiek (1 eta 2) kanpo eta barneko eragina pairatzen dute. S + S' sistemen multzoa isolaturik dago.



$\vec{F}_{12}$: 2-k 1-en gainean egiten duen indarra.

$\vec{F}_{21}$: 1-ek 2-ren gainean egiten duena.

$\vec{F}_{12}$ eta $\vec{F}_{21}$ barne-indarrak dira eta Newtonen hirugarren legea betetzen dute

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ kanpo-indarrak dira, S' sistemaren eraginez sortuak.

Kanpoko inertzi sistema batetan:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

$$\frac{d\vec{p}_S}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_k$$

Ikusten denez, kanpo-indar osoa, kanpo-indar guztien batura edo erresultantea da, barne-indarrak agertzen ez direla-

rik.

$$\vec{F}_k = \sum_i \vec{F}_i$$

7.3. MASA LABURBILDUA

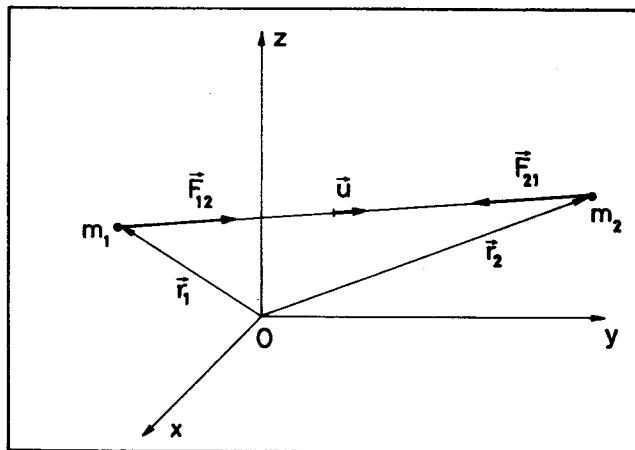
Demagun, orain, bi partikulaz osoturiko sistema isolatua. Barne-indarrek eragiten dute soilik. Demagun indar horiek akzio-erreakzioaren legea betetzen dutela eta horretaz gainera $\vec{r}_{12}$ delakoaren direkzioa dutela

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} = F_{12} \vec{u}$$

Kasu honetan

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$



Inertzi sistema batetan dagoen behatzaileak zera ikusten

du:

$$m_1 \frac{d \vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d \vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

Ekuazio bien kenketa eginik

$$\frac{d \vec{v}_1}{dt} - \frac{d \vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

Hortik zera lortzen da:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

Azter dezagun gehitxoago adierazpen hau

$$* \quad \frac{d}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{d \vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_{12}$$

4.1 puntuan azaldu genuen bezala, $\vec{a}_{12}$ delakoa m_1 masak m_2 masarekiko duen azelerazio erlatiboa da.

* Bestalde, $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ egiteko ohitura dago:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Honela sorturiko μ elementu berria, masa laburbildua

deitzen da. Erraz froga daitekeenez, masaren dimentsioa du. Ikus dezagun zein den horren esangura fisikoa.

* Goiko adierazpenera eramanik, hauxe geratzen da:

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12}$$

Hau da, "elkarrekiko, masa biak masa laburbildua bailuten higitzen dira, elkarrekizko indarraren eragin pean". Honela, bi gorputzen sistema, gorputz bakarraren sistemara laburbildu dugu. Sistema berri honetan, behaketak, partikula batekin eta inertzi sistemaz paraleloki higitzen den sistema batetatik egi ten dira; bertatik, beste partikularen higidura erlatiboa aztertzen da, beronen masa, masa laburbildua bailitzen.

Dena den, kasu batzutan, partikula baten masa bestearena baino askoz handiagoa denean, lehenengo partikularekin doan inreferentzi sistema inertzialtzat har dezakegu. Hara:

Imagun $m_2 \gg m_1$ dela. Argi dagoenez:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \approx m_1 \left(\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0 \text{ baita} \right)$$

eta adierazpen orokorrera eramanez:

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12} \approx m_1 \vec{a}_{12}$$

Baina $m_2 \gg m_1$ denez, momentu linealaren kontserbazioaren arauera:

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = - m_2 \Delta \vec{v}_2 \longrightarrow m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = - m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

Limitean:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} \longrightarrow 0$$

Hots: $|\vec{a}_2| \longrightarrow 0$

Hau da, m_2 masarekin doan erreferentzi sistemak ez du ia-ia azeleraziorik edo, bestela esanda, sistema inertzialtzat har daiteke. Sistema honetan finkaturik, m_1 masaren higidura azter dezakegu, beronen gainean eragiten duen indarra elkarrak ziozko indarra izanik ($\vec{F}_{12}$).

Bi gorputzen problema hau sarri ageri da Fisikan, problema korapilatsuagoren baten laburpen gisa. Honela Ilargia-Lurra sistema modu honetan azter daiteke Lurretik. Berdinki azter daiteke Eguzki inguruko sistema planetarioa edo eta hidrogenoaren atomoa (Mekanika Kuantikoan sartu gabe).

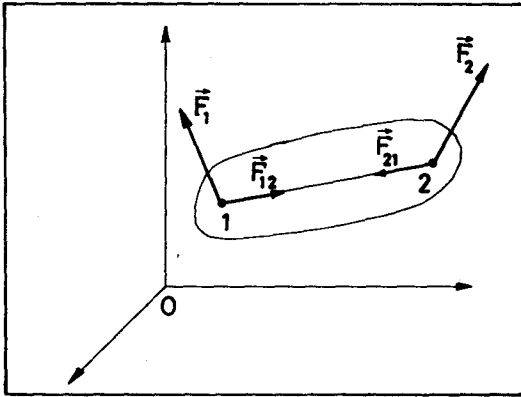
7.4. MOMENTU ANGELUARRAREN TEOREMA

Oraingo puntu honetan, partikula-sistema baten momentu angeluarraren teorema aztertzeraz saiatuko gara.

Argi dagoenez:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_i \vec{L}_i$$

Demagun bi partikulaz osaturiko sistema bat. Azterketa errazteko asmoz hartu dugu sistema sinple hau, baina arrazona mendua baliozkoa da edozein partikula-multzotarako.



Barne eta kanpo-indarrak
kontsideratuko ditugu

Barne-indarrak:

$$\vec{F}_{12} \quad \text{eta} \quad \vec{F}_{21}$$

Kanpo-indarrak:

$$\vec{F}_1 \quad \text{eta} \quad \vec{F}_2$$

Barne-indarrei dagokienez, akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen dutela kontsideratuko dugu, hots $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ dela; eta halaber, indar hauek $\vec{r}_{12}$ bektorearen direkzioa dutela, iru dian ageri den bezala.

Oxyz sistema, inertziala dela kontsideratuko dugu. Sistema honen jatorriarekiko momentuak kontsideratuz, eta partikulen momentu angularraren teorema (5.7) kontutan hartuz:

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{\tau}_1$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{\tau}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_1 \quad \text{eta} \quad \vec{L}_2 : 1 \quad \text{eta} \quad 2 \quad \text{partikulen momentu angularrak} \\ \vec{\tau}_1 \quad \text{eta} \quad \vec{\tau}_2 : 1 \quad \text{eta} \quad 2 \quad \text{partikuletan errespektiboki eragiten} \\ \quad \quad \quad \text{ari diren indarren momentuak.} \end{array} \right.$$

Bi adierazpen hauk batuz

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

Gainezarmenaren printzipioaren arauera, $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}$ de lakoa partikula-sistemaren momentu angeluar osoa da.

Ikus dezagun zenbat balio duen $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ delakoak:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1 \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{12}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2 \wedge (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{21}$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{12}$$

Eta $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{12} = \vec{r}_{12} \wedge \vec{F}_{12} = 0$; zeren eta $\vec{r}_{12}$ eta $\vec{F}_{12}$ paraleloak baitira.

Beraz haxe geratzen zaigu azkenean:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$$

Hau da, "bi partikulaz osoturiko sistema baten momentu angeluarraren aldakuntzak, kanpo-indarren momentuaren dependentzia du soilik".

Dena den, errazki frogatu daiteke beste edozein partikula-kopuruz osoturiko sistemaren kasurako ere.

Haxe da, hain zuzen ere, partikula-sistema baten momentu angeluarraren teorema:

"Partikula-sistema baten momentu angeluarraren aldakuntzak, kanpo-indarren momentuaren dependentzia du soilik".

Matematikoki esateko, momentu angeluarraren denborarekiko deribatua, kanpo-indarren momentuaren berdina da.

* Kanpo-indarren momentu osoa nulua bada

$$\vec{\tau} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} = \text{konstantea}$$

Kasu honetan, momentu angeluarrak konstante irauten du denboran zehar.

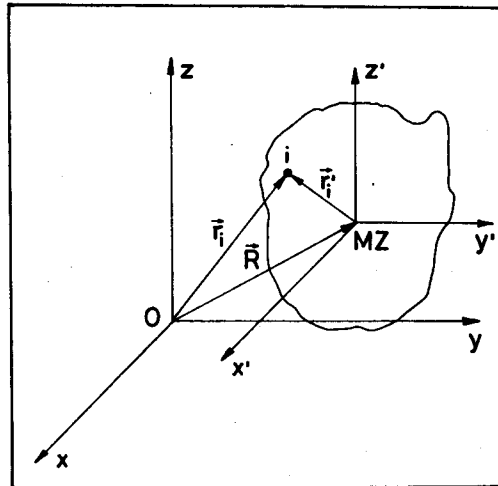
* Momentu angeluarraren adierazpena, masa-zentruaren koordena-tuen bidez.

Demagun Oxyz siste-ma inertziala. Beronen jatorriarekiko, partiku-la-sistemaren momentu an-geluarra ondokoa da:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

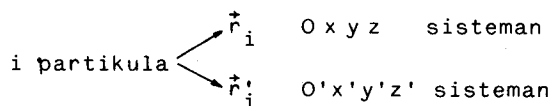
Hemen i delakoak partikula generiko bat adierazten du.

($i = 1, 2, \dots, n$)



Jatorria masa-zentruan duen beste sistema bat kontsidera-tuko dugu ($O'x'y'z'$), ($O' \equiv MZ$). Sistema honen ardatzek Oxyz sistemaren ardatzen paraleloak irauten dute denbora guztian.

Masa-zentruaren posizio-bektorea $\vec{R}$ deituko dugu. Oxyz sisteman egiten diren neurketak azenturik gabe adieraziko di-tugu, eta $O'x'y'z'$ sisteman egiten direnak, azentuarekin.



Irudian ikusten denez:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

Deribatuz eta O'x'y'z' sistemak birarik egiten ez duela kontutan hartuz:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$

$\vec{V}$ masa-zentruaren abiadura da ($\vec{V}$ hau aurreko $\vec{v}_{MZ}$ berbera da).

Momentu angeluarra honela azalduko da

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \wedge m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)$$

Adierazpen hau garatuz, lau eratako gaiak ageri zaizkigu:

$$\cdot \sum_i \vec{R} \wedge m_i \vec{V} = \vec{R} \wedge \left(\sum_i m_i \right) \vec{V} = \vec{R} \wedge M \vec{V}$$

$$\cdot \sum_i \vec{R} \wedge m_i \vec{v}'_i = \vec{R} \wedge \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right) = \vec{R} \wedge \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right)$$

Baina $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ zeren eta jatorria masa-zentruan duen sisteman masa-zentruaren posizio-bektorea nulua baita

$$\vec{r}'_{MZ} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{M} = 0 \implies \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$$

$$\cdot \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{V} = \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \wedge \vec{V} = 0$$

$$\cdot \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i$$

Azkenean zera geratzen zaigu

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i$$

Beraz, partikula-sistema baten momentu angeluarra masa-zentruaren koordinatuen bidez adieraztean, bi gaiz osotzen dela ikusten dugu. Lehen gaiak ($\vec{R} \wedge M \vec{V}$ delakoak) masa guztia puntualki masa-zentruan trinkoturik balego edukiko lukeen momentu angeluarra adierazten du. Bigarren gaiak ($\sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i$ delakoak) masa-zentruarekin doan sistemaren jatorriarekiko-masa-zentruarekiko alegia- duen momentu angeluarra adierazten du.

Honela ere idatz daiteke:

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{L}'_{MZ}$$

$\vec{L}'_{MZ}$ masa-zentruarekiko momentu angeluarra izanik

$$\vec{L}'_{MZ} = \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i$$

7.5. SISTEMA BATEN ENERGIA ZINETIKO ETA POTENTZIALA

Lehen pauso gisa, definitu eginen dugu energia zinetikoa, eta masa-zentruaren koordinatuen bidez adieraztera saiaturiko gara.

Definizioz, sistemaren energia zinetikoa, sistemako partikulen energia zinetikoen batura da

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Ipin dezagun hau masa-zentruaren koordinatuen bidez. Aurreko puntuan ikusi dugunez:

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$$

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{V} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{V} + \vec{v}'_i)$$

Beraz:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{V} + \vec{v}'_i)$$

Hau garaturik, ondoko gaiak geratzen zaizkigu:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \left(\sum_i m_i \right) = \frac{1}{2} M v^2 \\ \sum_i m_i \vec{V} \cdot \vec{v}'_i = \vec{V} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right) = \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) = 0 \\ \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \end{array} \right.$$

Azkenean hauxe geratzen zaigu:

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Momentu angeluarraren kasuan egin dugunaren antzera:

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 + E'_{k(MZ)}$$

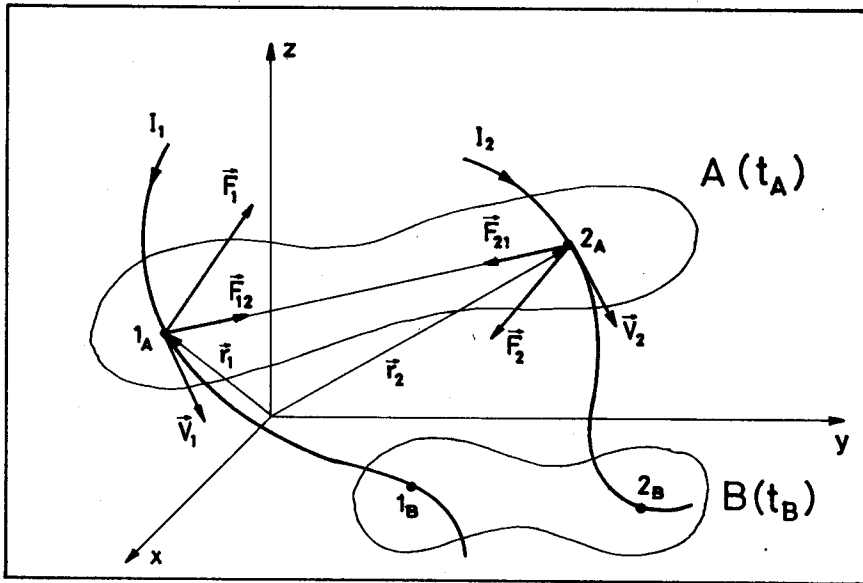
$$E'_{k(MZ)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad \text{izanik}$$

Hots, partikula-sistema baten energia zinetikoa bi gairen

batuketaz adierazten da. Lehenak, masa guztia masa-zentruan trinkoturik edukiko lukeen energia zinetikoa adierazten du, eta bigarrenak, sistemak masa-zentruaren inguruko higiduran duen energia zinetikoa.

Energia zinetikoaren adierazpena ezagutu ondoren, indarrek egiten duten lanaren eta sistemaren energia zinetikoaren artean dagoen erlazioa aztertuko dugu.

Azalpenak errazteko, bi partikulaz osaturiko sistema aztertuko dugu.



* t_A aldiunean sistema A egoeran dago, partikulak 1_A eta 2_A puntuetan daudelarik.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} \text{ eta } \vec{F}_{21} \text{ barne-indarrak dira} \\ \vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} \\ \vec{F}_1 \text{ eta } \vec{F}_2 \text{ kanpo-indarrak dira} \end{array} \right.$$

1 eta 2 partikulak higitzen ari dira.

* t_B aldiunean sistema B egoeran dago, partikulak 1_B eta 2_B puntuetan daudelarik.

I_1 eta I_2 direlakoak bi partikulen ibilbideak dira.

Oxyz, sistema inertziala dela kontsideratu dugu.

Aurreko gai batetik dakigunez (ikus 6.2) honela adierazten da indarrek egiten duten lana

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Beraz, sistema honetan indar guztiek egiten duten lana hauxe izanen da:

$$\begin{aligned} \text{1 partikulan: } & \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \cdot d\vec{r}_1 && (I_1 \text{ ibilbidean barre} \\ & && \text{na integraturik).} \\ \text{2 partikulan: } & \int_A^B (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \cdot d\vec{r}_2 && (I_2 \text{ ibilbidean barre} \\ & && \text{na integraturik).} \end{aligned}$$

Noski, generalean $d\vec{r}_1 \neq d\vec{r}_2$

Gai hauk honela bil ditzakegu

$$\int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = W_{kan}$$

Hau kanpo-indarrek egiten duten lana da.

Bestetik:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 &= \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 - \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = \\ &= \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = W_{\text{bar}} \end{aligned}$$

Hau barne-indarrek egiten duten lana da. Beraz, lan osoa kanpo-indarrek eta barne-indarrek egiten duten lanen batura izan da

$$W = W_{\text{kan}} + W_{\text{bar}}$$

Baina zertarako erabiltzen da lan hau? Hara! Kontsidera dezagun Newtonen bigarren legea, bi partikula horien kasurako.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2$$

Batuz eta integratuz:

$$\begin{aligned} \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \cdot d\vec{r}_2 &= W_{\text{kan}} + W_{\text{bar}} = \\ &= \int_A^B m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}$$

Kalkula dezagun azken gaien balioa

$$\begin{aligned}
& \int_A^B \underset{(I_1)}{m_1} \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \underset{(I_2)}{m_2} \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \\
& = \int_A^B m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_1 dt + \int_A^B m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \cdot \vec{v}_2 dt = \\
& = \int_A^B \frac{1}{2} m_1 d(v_1^2) + \int_A^B \frac{1}{2} m_2 d(v_2^2) = \\
& = \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right]_A^B = E_{k,B} - E_{k,A}
\end{aligned}$$

Hau da, energia zinetikoaren gehikuntza adierazten da.
Denetara haxe geratzen zaigu

$$W_{kan} + W_{bar} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Hots, barne eta kanpo-indarren artean egiten duten lana, sistemaren energia zinetikoa aldatzean erabiltzen da.

Esandakoak edozein indar-motaren kasurako balio du, kontserbakorrak izan zein izan ez.

7.5.1. Energia propioa. Demagun barne-indarrak kontserbakorrak direla. Kasu honetan barne-indarrek egiten duten lana funtzio potentzial baten bidez adierazi ahal izaten da.

$$W_{bar} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = E_{p,12,A} - E_{p,12,B}$$

Eta aurreko adierazpenera eramanik

$$(E_k + E_{p,12})_B - (E_k + E_{p,12})_A = W_{kan}$$

$(E_{p,12} + E_k)$ kantitatea energia propioa deitzen da eta U letraz adierazten.

Ikusten denez, barne-indarrak kontserbakorrak direnean definitzen da energia propioa. Bestalde, kasu honetan

$$W_{kan} = U_B - U_A = \Delta U$$

hots, kanpo-indarrek egiten duten lana energia propioa aldatzeko erabiltzen da.

Partikulen-sistema isolaturik badago (edo kanpo-indarrek lanik egiten ez badute):

$$W_{kan} = 0$$

$$U_B - U_A = 0$$

$$U_B = U_A = k^{te}$$

Hau da, sistema isolatuen kasuan, energia propioak kong tante irauten du.

Energia propioarekin bukatzeko, ohar bat egingen dugu. Orain arte, bi partikularen kasuan hitz egiten ari ga ra. Dena den, edozein partikula-kopururen kasurako ere defini daiteke energia propioa, barne-indarrak kontser bakorrak direnean. Honela:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i < j} E_{p,ij}$$

Bigarren batuketan konbinazio guztiak adierazi nahi dira, hau da, partikula-bikote guztiak.

7.5.2. Energia mekaniko osoa. Demagun orain, kanpo-indarrak ere kontserbakorrak direla

$$W_{kan} = E_{p,kan,A} - E_{p,kan,B}$$

Eta aurreko puntuko adierazpena eramanez

$$W_{kan} = U_B - U_A$$

$$(U + E_{p,kan})_A = (U + E_{p,kan})_B$$

Honela, denboran zehar konstante irauten duen magnitude berri bat sortzen da

$$E = U + E_{p,kan} = E_k + E_{p,bar} + E_{p,kan}$$

Magnitude berri hau sistemaren energia osoa deitzen da. Ikusi dugun legez, indar guztiak (barnekoak eta kanpokoak) kontserbakorrak direnean, partikula-sistemaren energia osoak konstante irauten du. Hauexek, energiaren kontserbazioaren teoremaren orokorpena da.

7.6. TALKAK

Hizkuntza arruntean talka hitzak esangura nahiko zehatza du: Bi gorputz desberdin higitzen ari dira erlatiboki eta une batetan elkar jo egiten dute; kolpearen ondoren deformaturik ager daitezke edo ez, baina hasieran zuten higidura-egoera al

daturik geratzen da.

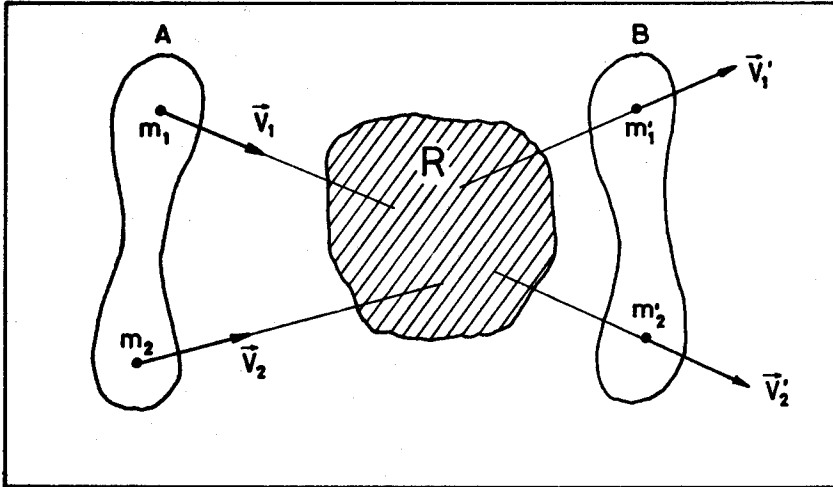
Fisikan ere horrelako zerbait adierazi nahi da. Dena den, ez da zertan gertatu behar "kontaktu edo ukipen fisikorik", iza tez, mikroskopikoki hitz horrek ez baitu zentzurik. Edozein mo dutan, bi gorputz edo partikula higitzen ari dira eta espazio-alde batetan bien arteko elkarrakzioa gertatzen da. Elkarrakzioaren kausaz, aldatu egin daitezke partikulak berak ere (berau hala-beharrezkoa izan ez arren) eta edonola ere, partikulen higidura aldatu egiten da. Kasu honetan talka bat gertatu dela esaten da.

Talka aurretik eta ondotik dauden partikulak berberak di renean, dispertsio edo sakabanatze izena ematen zaio talkari.

Talken azterketa oso garrantzizkoa da Fisikan. Hainbat gertakari talka gisa azter daitezke, hauen artean Fisika Atomoaren arlokoak nagusi direlarik. Hor ditugu partikula elementalekin egiten diren experimentu gehienak; izan ere oinarritz ko partikula gehienak talken bidez lortu eta aztertu izan dira.

Laborategietan talka gisa muntatzen diren experimentuetan, ikertzaileek alde aurretik ezagutzen dituzte talka aurreko ba l dintzak -zeintzu partikula diren eta zein abiaduraz higitzen di ren- zeren eta berek nahi duten moduan prestatzen baitute talka. Experimentua egitean, talka ondoko partikulak identifikatu behar izaten dituzte, beraien magnitude dinamikoak neurtuz eta arazoaren azterketa mekanikoa eginez.

Goazen, ba, talken azterketa fisikoa egitera. Demagun, talka aurretik m_1 eta m_2 masadun partikulak $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ abiadurez higitzen ari direla. R eremualdean bien arteko interak zioa gertatzen da; eta gero m_1' eta m_2' masadun partikulak ageri dira -lehengo berberak izan daitezke edo ez- $\vec{v}_1'$ eta $\vec{v}_2'$ abiadurez (ikus irudia).



Demagun, talka egiten duten partikulek sistema isolatua osotzen dutela. Barne-indarrrik baino ez dago. A delakoa, partikula-sistema talka aurrean da. B, talka ondoan.

Honetaz ohar bat egin behar da: Talken iraupena oso laburra ohi dela kontutan hartuz eta, bestalde, talken kausaz barne-indarrek hartzen dituzten baloreak kanpo-indarrenak baino askoz handiagoak ohi direla kontutan hartuz, arbuiatu egin ohi dira bigarren hauen ondorioak, lehenengoenekin konparatuz. Horrek ondoko kontsiderazioak egitera garamatza:

- Talkak irauten duen bitartean (hau da, oso denbora-tarte laburrean, ia-ia bapatean) partikula-sistema isolatua bailitzen har daiteke.
- Talkak irauten duen bitartean, arbuiatu egin daiteke kanpo-indarren lana, barne-indarren lanarekin konparatuz.

Sistema isolaturik egonik, momentu linealaren kontserbazioaren printzipioa betetzen da

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1' \vec{v}_1' + m_2' \vec{v}_2'$$

Modu berean $W_{kan} = 0$ da, isolaturik baitago. Beraz,

$$W_{bar} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Liburu batzutan, barneko indarrek egiten duten lan hori, Q letraz adierazten da. Q magnitude berri honen arauera, ondoko eran sailkatzen dira talkak.

$$* \quad Q = 0 \quad \text{denean,} \quad E_{k,B} - E_{k,A} = 0$$

$$E_{k,B} = E_{k,A}$$

Hau da, talkan kontserbatu egiten da sistemaren energia zinetikoa. Talka elastikoa izan dela esaten da.

$$* \quad Q \neq 0 \quad \text{denean,} \quad E_{k,B} \neq E_{k,A}$$

Talka inelastikoa dela esaten da. Bi eratako talka inelas tikoak daude

$Q < 0$ denean, talkan galdu egiten da energia zinetikoa. Talka endoergikoa dela esaten da.

$Q > 0$ denean, irabazi egiten da energia zinetikoa. Talka exoergikoa deitzen da.

Bukatzeko, zenbait ohar eginen ditugu:

a) Sistema isolatua bada, eta barne-indarrak kontserbakorrak badira, zera geratzen zaigu

$$E_{k,B} - E_{k,A} = W_{bar} = E_{p,bar,A} - E_{p,bar,B}$$

$$(E_k + E_{p,bar})_A = (E_k + E_{p,bar})_B$$

$$U_A = U_B$$

Hau da, kasu honetan, kontserbatu egiten da energia propioa.

- b) Puntu honetan egin dugun azterketan, laborategiko sistema erabili dugu behatze-sistema gisa, L sistema alegia. Dena den, berdin egin liteke, masa-zentruaren sistema erabiliz (C delakoa, alegia).

8. GAIA - SOLIDO ZURRUNA

- 8.1. LOTUR BALDINTZAK, SISTEMA BATEN ASKATASUN-GRADUAK
- 8.2. EULER-EN ANGELUAK
- 8.3. SOLIDO ZURRUN BATEN ABIADUR EREMUA, TRANSALDATZE
ETA BIRA HUTSAK
- 8.4. SOLIDOAREN MOMENTU ANGELUARRA, INERTZI TENTSOREA
- 8.5. INERTZI ARDATZ ETA MOMENTU NAGUSIAK
- 8.6. INERTZI ELIPSOIDEA
- 8.7. INERTZI MOMENTUEN KALKULUA
 - POINSOT-EN FORMULA
 - STEINER-EN FORMULA
 - INERTZI MOMENTU POLARRA

Aurreko gaian partikula-sistemen dinamika aztertu dugu, edozein sistema-motari buruzko magnitudeak aztertu ditugu. Oraingo gai honetan sistema konkretu bat aztertuko dugu: solido zurruna. Geroago zehazki definituko badugu ere, diogun ezen solido zurruna bere forma mantentzen duen partikula sistema de la. Ikusiko dugunez, sistema berezi honen azterketan teknika bereziak erabiltzen dira, eta kalkuluak bideratzeko, magnitude bereziak definitzen dira, hala nola inerti momentua. Solido zurrunari buruzko lehen gai honetan, magnitude berri horien prestaketan arituko gara, gero bigarren gai batetan solido zurrunaren dinamika aztertzeke.

8.1.- LOTUR BALDINTZAK, SISTEMA BATEN ASKATASUN-GRADUAK, SOLIDO ZURRUNA

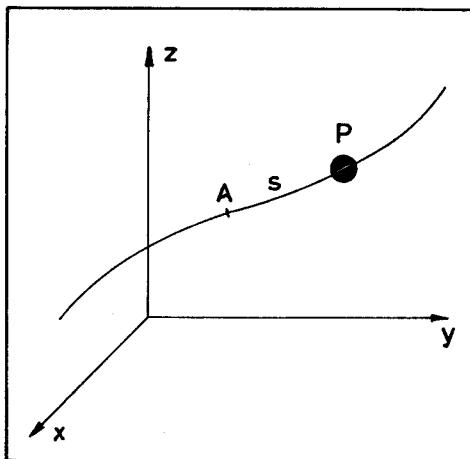
Sistema baten egoera adierazteko behar diren aldagai askatuak, sistema horren askatasun-graduak deitzen dira. Honela, sistema partikula bakar batez osoturik badago, 3 askatasun gradu dituela esanen dugu: partikularen hiru koordinatu cartesian rrak hain zuzen ere:

Baina demagun, partikula horren higidurari mugaren bat jartzen diogula. Kasu horretan 3 koordinatuak ezin daitezke edonolakoak izan; beren artean erlazio konkretu bat ageri da. Koordinatuen artean lotura bat jarri dugula esanen dugu. Lotura, ba, higidurari jartzen zaion muga edo baldintzabat da, eta horregatik lotur baldintzen bidez adierazten da.

Adibide batez, hobeki ulertuko dugu arazoa.

Demagun partikula bat dugula, eta partikula hori ibilbide konkretu batekin higitzera behartzen dugula. Ideia hau materialtzeko, burdin hari batetan barrena higitzen den bola zulu latu bat kontsidera dezakegu.

Berez, partikulak hi ru askatasun-gradu ditu: x, y, z . Baina kasu honetan ezin daiteke edozein modu tan higi: Burdin hariak mu gatu egiten du partikula-ren higidura. Horixe da, hain zuzen ere, partiku-lak duen lotura.



Lotura hau, matemati-koki, burdin hariak oso-tzen duen kurbaren ekuazioen bidez adierazten da. Dakigunez, kurba bat bi ekuazioen bidez adierazten da espazioan

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

Ekuazio hauk, x, y eta z koordenatuek bete behar dituzten lotur baldintzak dira. Halaber, burdin hariak partikularengain egiten duen indarra, lotur indarra deitzen da.

Lotur baldintzak direla kausa, x, y eta z ez dira jadanik askatu edo independenteak, beren artean bi lotur baldintza bai-taude. Beraz, jadanik askatasun-graduak ez dira 3 izanen 1 bai-zik ($3-2 = 1$). Prezeski, honela adierazten dira partikula ba-tek dituen askatasun-graduak:

$$\text{Askatasun-graduen kopurua} = 3 - \text{lotur baldintzen kopurua.}$$

Guk ipini dugun adibidean, argi dago, partikulak askata-sun-gradu bakarra duela, zeren puntu fixu batekiko (A) burdin ha-rian barrena dagoen distantzia ($AP = S$) emanez gero, guztiz definiturik geratzen baita partikularengain posizioa.

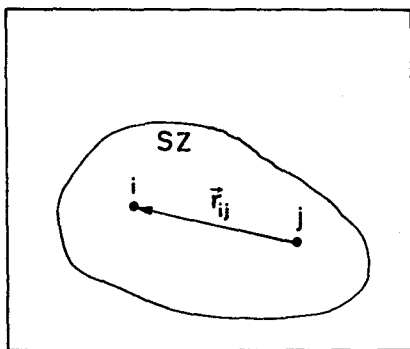
Demagun orain, n partikulaz osoturiko sistema bat. Loturarik gabe, $3n$ askatasun-gradu ditu. Sistema honek m lotur baldintza baditu, askatasun-graduen kopurua ondokoa izanen da.

$$\text{Askatasun-graduen kopurua} = 3n - m$$

Zer esanik ez, $m < 3n$ izan behar da.

$m = 3n$ bada, ez du higitzeko posibilitaterik eta sistema osoa eta partikula bakoitza gelditu egotera beharturik daude.

* Solido zurruna. Askatasun-graduak eta loturak zer diren azaldu ondoren, goazen orain solido zurruna definitzera. Zer da solido zurruna?



Solido zurruna n partikulaz (kontaezinak) osoturiko sistema bat da, edozein bi partikula laren arteko distantziak konstante irauten duelarik. Hots:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_{ij}| = k_{ij} = k^{\text{te}}$$

Naturan ez dago erabat zurrundun gorputzik, baina lehen hurbilketa batetan, solido deformagaitzak solido zurruntzat har ditzakegu.

Zenbat askatasun-gradu dituzte solido zurrunek?

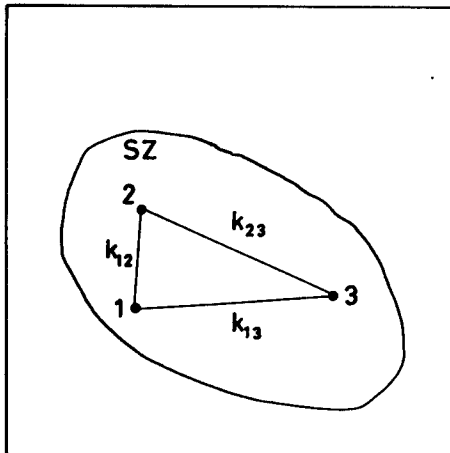
Hara! Batetik, n partikula izanik, $3n$ askatasun-gradu ditugu. Baina $|\vec{r}_{ij}| = k_{ij}$ erako lotur baldintzak ditugu tartean, eta hauk

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{dira}$$

Baina $\frac{n(n-1)}{2} \gg 3n$ n handia bada

Nola izan daiteke hori?

Arrazoa oso sinplea da. $|\vec{r}_{ij}| = k_{ij}$ baldintzak ez dira guztiak elkarrekiko independenteak. Solido zurrun baten posizioa finkatzeko, nahikoa da lerro zuzen berean ez dauden hiru puntu determinatzea, zeren eta lotur baldintzak kontutan edukirik, beste edozein puntu automatikoki lor baitaiteke hiru puntu horien funtzioan.



Hiru puntuok $3 \cdot 3 = 9$ askatasun-gradu dituzte, baina solido zurrun batetakoak izanik ondoko hiru lotur baldintzak daude

$$|\vec{r}_{12}| = k_{12}$$

$$|\vec{r}_{13}| = k_{13}$$

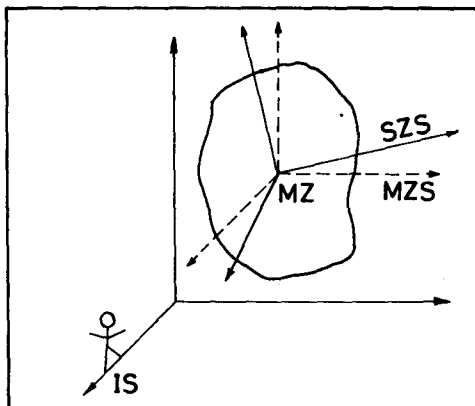
$$|\vec{r}_{23}| = k_{23}$$

Beraz, denetara, $9 - 3 = 6$ askatasun-gradu geratzen zaizkigu. Hots, solido zurrun askeak 6 askatasun-gradu ditu.

Gehienetan, honela aukeratzen dira askatasun-graduok:

3: masa-zentruaren koordinatu cartesiarrak

3: masa-zentruarekin eta inertzi sistemarekiko



paraleloki higitzen den sistemarekiko (MZS), solido zurrunarekin loturik doan sistemak (SZS delakoak) duen orientazioa adierazteko (normalki, hurrengo galderan ikusiko ditugun Euler-en angeluak dira).

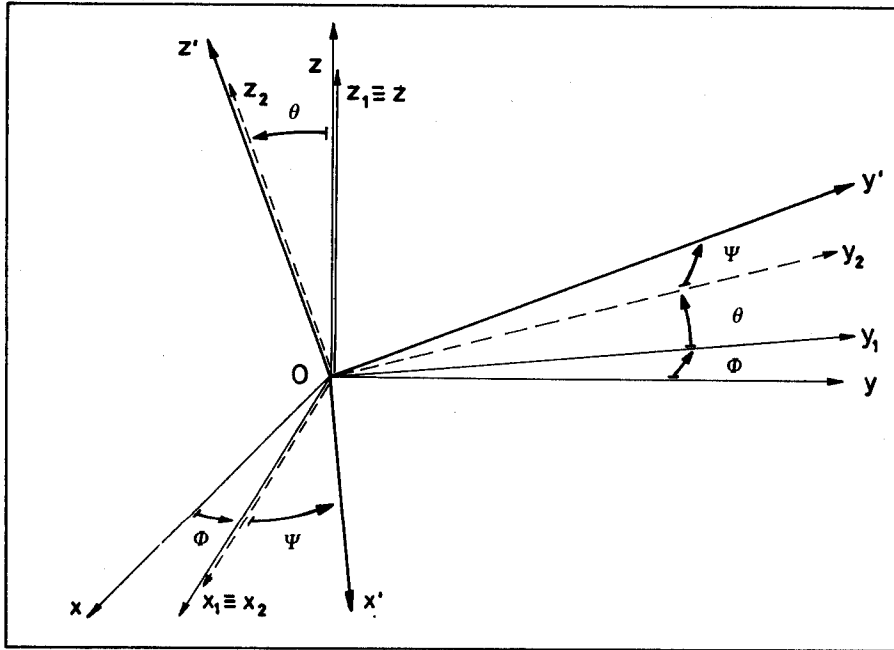
8.2. EULER-EN ANGELUAK

Solidoarekin loturik doan erreferentzi sistemaren orientazioa adierazteko erabiltzen dira. Solido zurrunaren sistema (SZS), solido zurrunean finkaturik dagoen sistema da. Beraren jatorria masa-zentruan dago, eta masa-zentruaren sistemarekiko definitzen da, hots, MZS-rekiko. Hiru dira orientazioa adierazten duten askatasun-graduak. Eta hiru magnitude independente definitu behar dira. Hiru magnitudeak modu desberdinez aukera daitezke, baina arruntena Euler-en angeluak aukeratzea da.

Honela definitzen dira Euler-en angeluak:

Irudian, Oxyz sistemak MZS adierazten du eta Ox'y'z' sistemak, SZS.

Ox'y'z' sistemaren orientazioa, hiru angelu independenten bidez adierazten da. Ikus dezagun, ba, nola hiru bira elkarren ondoan eginik, Oxyz sistematik Ox'y'z' sistemara pasatzen den.



- 1) Oz ardatzaren inguruan, ϕ balioko bira. Bira honen bidez, $Oxyz$ sistematik $Ox_1y_1z_1$ sistemara pasatzen da.
- 2) Ox_1 ardatzaren inguruan, θ balioko bira. Bira honen bidez, $Ox_1y_1z_1$ sistematik $Ox_2y_2z_2$ sistemara pasatzen da.
- 3) Oz_2 ardatzaren inguruan, ψ balioko bira. Bira honen bidez, $Ox_2y_2z_2$ sistematik $Ox'y'z'$ sistemara pasatzen da.

$$Oxyz \xrightarrow[\text{(z)}]{\phi} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\text{(x}_1\text{)}]{\theta} Ox_2y_2z_2 \xrightarrow[\text{(z}_2\text{)}]{\psi} Ox'y'z'$$

ϕ , θ eta ψ angeluak Euler-en angeluak dira. Ondoko izenak hartzen dituzte:

ϕ : Prezesio-angelua

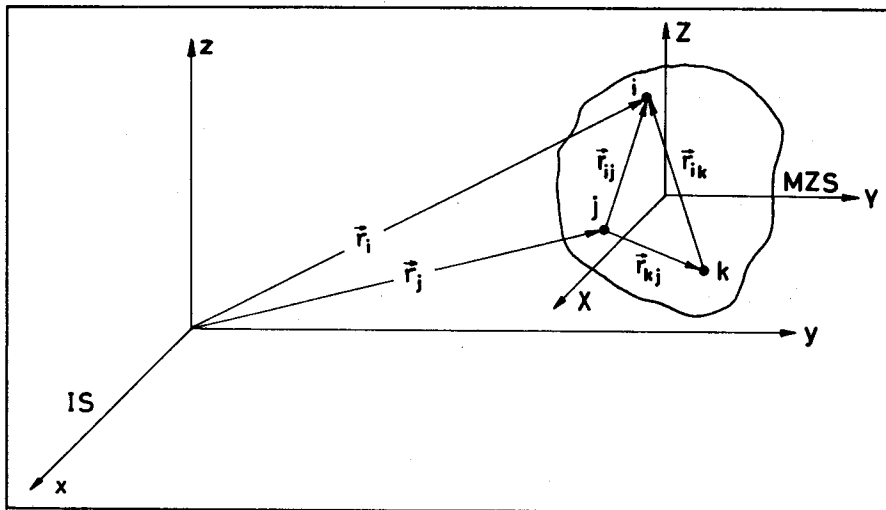
θ : Nutazio-angelua

ψ : Biraketa propioaren angelua

Hiru biraketa hauk sentido positiboan hartzen dira.

8.3.- SOLIDO ZURRUNAREN ABIADUREN EREMUA, TRANSLAZIO ETA BIRA HUTSAK

Solido zurrunaren puntuen abiadura eta abiadura hauen ar_ teko erlazioak aztertuko ditugu



Kontsidera ditzagun i eta j puntuak. Irudian ikusten den bezala:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_j + \vec{r}_{ij}$$

Denborarekiko deribatuz:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_j}{dt} + \frac{d\vec{r}_{ij}}{dt}$$

Baina

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad \text{eta} \quad \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{v}_j$$

Abiadura hauk inertzi sistemarekikoak dira noski.

Bestalde, solido zurrunaren puntuak izanik, $|\vec{r}_{ij}| = k^{te}$; eta 4.3 puntuan ikusi genuenez

$$\frac{d\vec{r}_{ij}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{ij}$$

Hemen $\vec{\omega}$, $\vec{r}_{ij}$ bektoreak pairatzen duen bira adierazten duen abiadura angeluarra da.

Denetara haxe geratzen zaigu:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{ij} \quad [1]$$

Arrazonamendu berdinari jarraituz, i eta k puntuen abiadurak erlazioa ditzakegu

$$\vec{v}_i = \vec{v}_k + \vec{\omega}' \wedge \vec{r}_{ik} \quad [2]$$

Hemengo formula honetan $\vec{\omega}'$ jarri dugu, ez baitakigu lehengo $\vec{\omega}$ berbera ote den. Dena den, orain $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ dela frogatuko dugu:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{kj} + \vec{r}_{ik} \quad [3]$$

Hemen [1] formulako $\vec{r}_{ij}$, [3] -ko baloreaz ordezkatzuz:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_{kj} + \vec{r}_{ik})$$

$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_j + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{kj}}_{\vec{v}_k} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{ik}$$

Beraz, zera geratzen zaigu:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_k + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{ik} \quad [4]$$

Eta [2] eta [4] adierazpenak konparatuz eta i eta k edozein bi puntu direla kontutan hartuz, $\vec{\omega}$ -k eta $\vec{\omega}'$ -k berdinak izan behar dutela ikusten dugu

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

Zer esan nahi du honek? Hitz arruntez esanik, solido zurruneke edozein puntutan abiadura angeluar berbera dagoela, hau da, solido zurruna multzo bat bezala $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz higitzen dela eta solido zurruna osotzen duten puntu guztiek parte hartzen dutela biraketa-higidura horretan.

Honela, ba, i puntuaren abiadura masa-zentruaren abiadura ren funtzioan adierazi nahi badugu, modu honetan egingen dugu

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{iMZ} = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'_i$$

Hemen $\vec{r}'_i$, i puntuak MZS sisteman duen posizio-bekto-rea da, noski. Eta

$$\vec{r}_{iMZ} = \vec{r}_i - \vec{r}_{MZ}$$

- * Konpara dezagun orain abiaduraren adierazpen hau kurtso-re-sistemak aztertzean (ikus 2.4 puntua) lortzen genuenarekin

SOLIDO ZURRUNAREN
ABIADUREN EREMUA

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{iMZ}$$

KURTSCOREEN SISTEMAK

$$\vec{\tau}_{O'} = \vec{\tau}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{O'} + \vec{R} \wedge \vec{O'O'}$$

Konpara ditzagun bi adierazpen hauk. Ikusiko dugunez funtzio berbera betetzen duten bi adierazpen analogo dira. Letra desberdinez, baina gauza berbera direla ikusiko dugu.

i eta MZ bi puntu dira

$\vec{\omega}$: solido zurruneke edozein puntutan balio berbera duen bektore bat da

$\vec{v}_i$ delakoa $\vec{v}_{MZ}$ delakoaren funtzioan adierazten da

O' eta O bi puntu dira

$\vec{R}$: espazioko inbariante bektoriala. Puntu guztietan balio berbera du

$\vec{\tau}_{O'}$ delakoa $\vec{\tau}_O$ delakoaren funtzioan adierazten da

Analogia honetan ondoko korrespondentziak daude

abiadura lineala $\vec{v}$

abiadura angeluarra $\vec{\omega}$

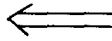
$\vec{r}_{iMZ}$

$\vec{\tau}$ momentua

$\vec{R}$ erresultantea

$\vec{O'O'}$

Beraz, kurtso-reen sistemak aztertzean ikusi genituen propietate eta ondorio guztiak aplikatu egin ahal ukanen ditugu solido zurrunaren abiaduren eremuaren kasuan ere:



inbariante bektoriala: $\vec{\omega}$

inbariante eskalarra: $\vec{\omega} \cdot \vec{v}$

$\vec{v}$ eta $\vec{\omega}$ paraleloak diren puntuetan, abiadura lineala minimoa izanen da. Puntu horiek $\vec{\omega}$ -ren direkzioa duen zuzen batetan daude. Nolabait sistemaren ardatz zentrala da

Sistema honen "momentu minimoa", labaintze-abiadura deitzen da: v_d

$\vec{R}$: inbariante bektoriala

$\vec{r} \cdot \vec{R}$: inbariante eskalarra

$\vec{r}$ eta $\vec{R}$ paraleloak diren puntuetan, momentua minimoa izanen da. Puntu horiek $\vec{R}$ -ren direkzioa duen zuzen batetan daude, eta zuzen hori ardatz zentrala deitzen da.

m : momentu minimoa

Solido zurrunaren abiaduren eremuan agertzen den ardatz zentrala biraketa eta labaintzearen aldiuneko ardatza deitzen da. Zergatik? Ardatz horretako puntuek $\vec{\omega}$ eta $\vec{v}_d$ dute, denek berdin; hau da, solidoak ardatz horrekiko bira bat ($\vec{\omega}$) du eta denbora berean ardatz horren direkzioan transladatzen ari da ($\vec{v}_d$). Nolabait biraketa-ardatzaren direkzioan labaintze bat gertatzen ari dela esan dezakegu.

Modu berean, aurreko adierazpenetan ikusten denez, solido zurrunaren higidura edozein puntutara (i) laburbil daiteke, biraketa baten ($\vec{\omega}$) eta abiadura lineal baten ($\vec{v}_i$) konposaketa bezala. Zer esanik ez, laburbilpena egiteko hartzen den puntua, masa-zentrua izan daiteke eta normalki horixe egiten da. Baina beste edozein puntu ere har daiteke, nahi edo komeni iza nez gero.

Azter ditzagun zenbait kasu berezi:

* $\vec{\omega} = 0$

Kasu honetan $\vec{v}_i = \vec{v}_{MZ}$

Puntu guztiek abiadura lineal berbera dute, eta gainera abiadura angeluarra nulua da edonon. Ez dago, beraz, birarik. Higidura hau transladatze hutsezko higidura da.

- * Demagun orain, puntu baten abiadura nulua dela denbora guztian (bestela esateko, puntu hori finko dagoela esan nahi du gu, geldi dagoela).

Kasu honetan $v_d = 0$ zeren etagutxienez puntu horretan $\vec{v} = 0$ baita.

Beraz bira eta labaintzearen aldiuneko ardatza puntu horretatik pasatzen da. Eta labaintze-abiadura zero denez, ardatz zentrolean ez dago labaintzerik, solido zurruna bira hutsez higituz, puntu finkotik pasatzen den ardatz baten inguruan.

- * Higidura launa. Puntu bakoitzaren higidura plano batetan gertatzen da. Puntu desberdinak; plano paralelotan higitzen dira. Beraz abiadura guztiak π plano baten paraleloa den direkzio batetan daude, eta abiadura angeluarrak plano horren perpendikularra izan behar du

$$\vec{\omega} \perp \pi$$

Beraz $\vec{\omega} \perp \vec{v}$

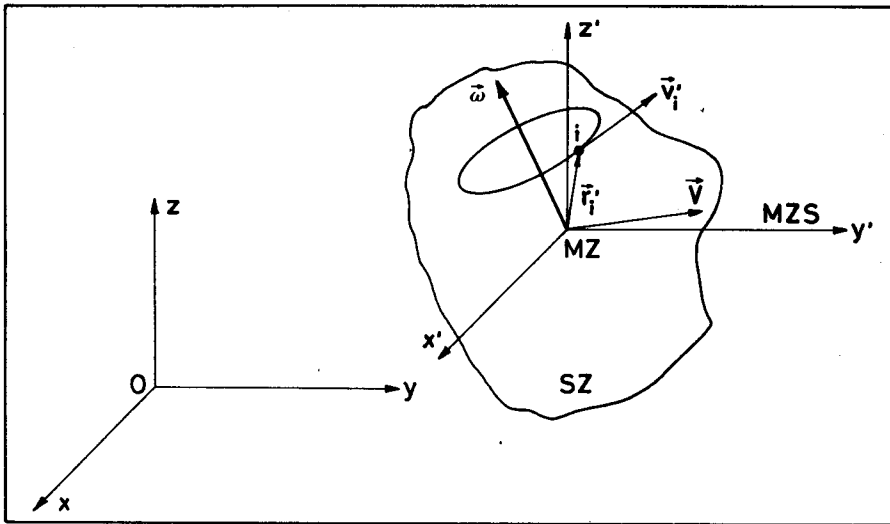
$$\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_d = 0$$

Hau da, labaintze-abiadura nulua da. Aldiune bakoitzean biraketa-ardatz bat dago. Eta biraketa-ardatz honek $\vec{\omega}$ delakoa ren direkzioa duenez, π planoaren perpendikularra da. Sistemaren higidura definitzeko, plano bat hartzen badugu, biraketa-ardatzak puntu batetan ebakiko du plano a aldiune bakoitzean. Puntu hori biraketaren aldiuneko zentrua deitzen da.

8.4. SOLIDOAREN MOMENTU ANGELUARRA, INERTZI TENTSOREA

Aurreko gaian ikusi dugunez (ikus 7.4), partikula-sistema baten momentu angeluarra modu honetan kalkula daiteke, sistemaren masa-zentrua kontutan harturik.

$$\vec{L}_O = \vec{R} \wedge M\vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i$$



Bestalde, aurreko puntuan ikusi dugunez (8.3), kutsoreen sistemen analogiaz, edozein puntutara laburbil dezakegu solido zurrunaren higidura. Puntu hori masa-zentrua izan daiteke. Masa-zentruak (MZ) $\vec{V}$ abiadura lineala du, eta beraren inguruan solido zurruna $\vec{\omega}$ abiadura angeluarraz higitzen ari da. ($\vec{V}$ eta $\vec{\omega}$ aldakorrak izan daitezke; dena den, aldiune bakoitzean balore konkretuak hartzen dituzte). Beraz, O puntuarekiko momentu angeluarra kalkulatzeko, lehen gaia ($\vec{R} \wedge M\vec{V}$) oso erraz lortzen da. Bigarren gaia ($\sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i$) zailagoa da kalkulatzeko.

Dena den, orain bigarren gai hori solidoaren abiadura angeluarren funtzioan kalkulatzera saiaturiko gara. Gai hau MZS sistemaren jatorriarekiko (masa-zentruarekiko) momentu angeluarra da eta $\vec{L}'$ deituko dugu.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Esan dugunez, masa-zentruaren inguruan solidoak $\vec{\omega}$ abiadura angeluarra du. Beraz:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)$$

Biderkaketa bektorial bikoitzak honela egin daitezke:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Honelatan, ba:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) &= (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \\ &= r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i \end{aligned}$$

Eta $\vec{L}$ -ren adierazpenean sartuz:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i \right]$$

Bektore honek $O'x'$, $O'y'$ eta $O'z'$ ardatzen direkzioetan (hots, Ox , Oy eta Oz direlakoenetan) dituen osagaiak, ondoko hauek dira:

$$\left\{ \begin{aligned} L'_x &= \omega_x \sum_i m_i (r_i'^2 - x_i'^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i' y_i' - \omega_z \sum_i m_i x_i' z_i' \\ L'_y &= -\omega_x \sum_i m_i y_i' x_i' + \omega_y \sum_i m_i (r_i'^2 - y_i'^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i' z_i' \\ L'_z &= -\omega_x \sum_i m_i z_i' x_i' - \omega_y \sum_i m_i z_i' y_i' + \omega_z \sum_i m_i (r_i'^2 - z_i'^2) \end{aligned} \right.$$

Puntu honetara helduz, izendaketa berri bat egingen dugu.

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_i m_i (r_i'^2 - x_i'^2) &= I_{xx} : x' \text{ ardatzarekiko inertzia mo-} \\ &\quad \text{mentua deituko dugu.} \\ -\sum_i m_i x_i' y_i' &= I_{xy} : O'x'y' \text{ planoarekiko inertzia} \\ &\quad \text{biderkadura deituko dugu.} \end{aligned} \right.$$

Eta berdin, koordenatuak aldatuz, beste ardatz eta planoekiko.

Izendaketa berriaren ondoren, honela idatziko ditugu momentu angeluarraren osagaiak:

$$\left\{ \begin{aligned} L'_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L'_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L'_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned} \right.$$

Zer esanik ez, planoekiko inertzia biderkaduren definizioa kontutan harturik:

$$I_{xy} = I_{yx}$$

$$I_{xz} = I_{zx}$$

$$I_{yz} = I_{zy}$$

Aurreko hiru osagaien itxura aztertuz, bertan $\vec{L}'$ eta ω bektoreen koordinatuen arteko erlazioa agertzen dela ikusiko dugu. Erlazio hori matrizialki idatz daiteke. Honela hain zu zen ere

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Edo laburturik:

$$\vec{L}' = \mathbb{I} \vec{\omega}$$

$\mathbb{I}$ delakoa zera izanik:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{I}$ delakoa bigarren ordeneko tentsore simetrikoko bat da eta inertzi tentsorea deitzen da. Momentu angeluarra eta abia dura angeluarra erlazionatzen ditu. Bi bektore hauek, bestalde, ez dute zertan direkzio berbera eduki behar, $\mathbb{I}$ ez baita eskalare bat tentsore bat baizik.

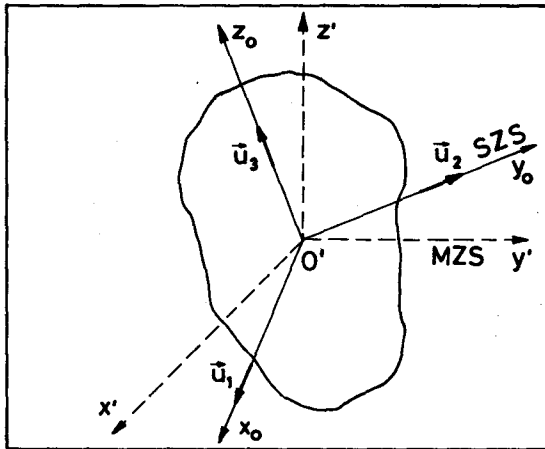
8.5. INERTZI ARDATZ ETA MOMENTU NAGUSIAK

Aurreko puntuan esan dugun bezala, kasu orokorrean $\vec{L}'$

eta $\vec{\omega}$ bektoreen direkzioak ez dira berdinak. Hala ere, $\vec{\omega}$ delakoak direkzio konkretu batzu hartzen dituenean, posible da $\vec{L}'$ -k eta $\vec{\omega}$ -k direkzio berbera edukitzea.

$\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen direkzioak berdinak direnean, $\vec{\omega}$ bektorearen direkzioa duen ardatza, INERTZI ARDATZ NAGUSIA dela esaten dugu.

Solido zurrunaren kasuan, eta masa-zentruari buruz lortu riko $\vec{L}'$ -ren kasuan, beti da posible, gutxienez hiru ardatz na gusi aurkitzea. Hiru ardatz hauk elkarrekiko perpendikularrak dira.



Guk ez dugu frogatu ko hori horrela denik, horretarako be har den tresna mate matikoa, goragoko maila batetakoa da eta. Baina ontzat har tuko dugu eta horre tan finkatuko gara, hurrengo azalpenak egitean.

Har dezagun orain, ardatz nagusiez osaturiko triedroa ($O'x_0y_0z_0$). Sistema hau solido zurrunean fixua da, eta solido zurrunaren sistematzat (SZS) hartuko dugu. Sistema honen ardatzen direkzioetako bektore unitarioak $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ dira. Saia gaitezen, $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreak sistema honetan dituzten osagaien bidez adieraztera. Modu berean, $\mathbb{I}$ inertzi tentsorea ere adierazi beharko dugu sistema berri honetan. Osagaiak $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ eta (L_1, L_2, L_3) deituko ditugu.

Demagun orain, $\vec{\omega}$ -k x_0 ardatzaren direkzioa duela, hots $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \vec{u}_1$, dela. Ardatz nagusia izanik, $\vec{L}'$ -k ere direkzio ber

bera eduki behar du: $\vec{L}' = L_1 \vec{u}_1$. Bestalde, 8.4 puntuan ikusi dugunez:

$$\vec{L}' = \mathbb{I} \vec{\omega}$$

SZS sisteman adierazpen honen osagaiak idatziz:

$$\begin{cases} L_1 = I_{x_0 x_0} \omega_1 + I_{x_0 y_0} \omega_2 + I_{x_0 z_0} \omega_3 \\ L_2 = I_{y_0 x_0} \omega_1 + I_{y_0 y_0} \omega_2 + I_{y_0 z_0} \omega_3 \\ L_3 = I_{z_0 x_0} \omega_1 + I_{z_0 y_0} \omega_2 + I_{z_0 z_0} \omega_3 \end{cases}$$

Eta $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen osagaien balioa kontutan hartuz

$$\begin{cases} L_1 = I_{x_0 x_0} \omega_1 \\ L_2 = 0 = I_{y_0 x_0} \omega_1 \\ L_3 = 0 = I_{z_0 x_0} \omega_1 \end{cases}$$

Beraz $I_{x_0 y_0} = I_{x_0 z_0} = 0$ izanen dira

$\vec{\omega}$ delakoari beste ardatz nagusi baten direkzioa emanik, $I_{y_0 z_0} = 0$ dela frogatu daiteke.

Honela, ba, ardatz nagusiek osoturiko erreferentzi sisteman (SZS delakoan), inertzia tentsoreko elementuen artean zero ez diren bakarrak $I_{x_0 x_0}$, $I_{y_0 y_0}$ eta $I_{z_0 z_0}$ dira. Hauk I_1 , I_2 eta I_3 deitu ohi dira.

Beraz, inertzi ardatz nagusiek osoturiko sisteman, hone_{la} idazten da inertzi tentsorea

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Hots, diagonalizaturik dago.

I_1 , I_2 eta I_3 inertzi ardatz nagusiekiko inertzi momentuak dira eta INERTZI MOMENTU NAGUSIAK deitzen dira.

Orain oso sinpleki adieraziko dugu $\vec{L}'$ eta $\vec{\omega}$ bektoreen arteko erlazioa SZS sisteman. Demagun, $\vec{\omega}$ -k edozein direkzio duela. $\vec{L}'$ -k ere beste direkzioren bat edukiko du. Bien osagaien arteko erlazioa hauxe izanen da:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Hau honela ere idatz daiteke:

$$\vec{L}' = I_1 \omega_1 \vec{u}_1 + I_2 \omega_2 \vec{u}_2 + I_3 \omega_3 \vec{u}_3 \quad \begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_3 = I_3 \omega_3 \end{cases}$$

Zenbait kasubereziren aipamena egingen dugu:

• $I_1 = I_2 = I_3$ denean, $\vec{L}' = \lambda \vec{\omega}$. Kasu hau ZIBA ESFERIKOA izenaz ezagutzen da.

Maila honetan frogatuko ez badugu ere, horrela definituriko P puntuen leku geometrikoa, elipsoide bat dela frogadaiteke.

Elipsoide hau masa-zentruan definitzen denean, masa-zentruko inertzi elipsoidea deitzen da. Beste edozein puntutan ere defini daiteke eta orduan inertzi elipsoide izenaz ezagutzen da, besterik gabe.

Irudian inertzi ardatz nagusiak hartu ditugu erreferentzi sistema bezala (x_o, y_o, z_o) . Bertan ikusten denez, elipsoidearen ardatz nagusiak inertziazko ardatz nagusiak dira (erraz frogadaiteke hau). Ardatz nagusien direkzioetan elipsoideak dituen erradioek (a, b, c) errespektiboki, ondoko balorea dute:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_1}} \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_2}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_3}}$$

Bestalde, hiru ardatz nagusiek osoturiko erreferentzi sistema, elipsoidearen ekuazioa ondokoa izanen da:

$$\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} + \frac{z_o^2}{c^2} = 1$$

Eta a, b eta c -ren balorea kontutan hartuz.

$$I_1 x_o^2 + I_2 y_o^2 + I_3 z_o^2 = 1$$

Hau da, ba, baldintza hauetan, elipsoidearen ekuazioa. Dena den, bestelako erreferentzi sistema bat hartuz, formula hori korapilatsuago agertzen da.

Bukatzeko, eta masa-zentruko inertzi elipsoidea kontside

ratuz, aipa ditzagun zenbait kasu berezi:

- . Ziba simetrikoaren kasuan, adibidez, $I_1 = I_2$ denean, $a = b$ da, eta beraz, inertzi elipsoidea erreboluziozkoa da, z_0 ardatzaren inguruan
- . Ziba esferikoaren kasuan, $I_1 = I_2 = I_3 = I$ denez, $a = b = c$ da, eta beraz, inertzi elipsoidea, izatez, esfera bat da:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$$

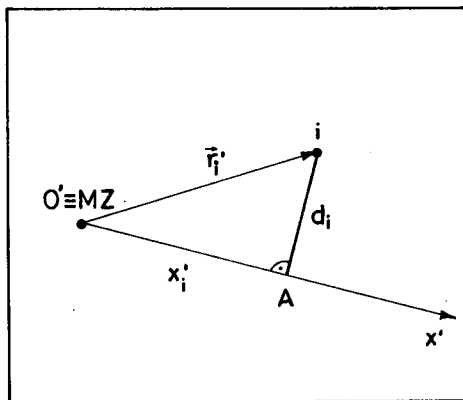
$$R = \frac{1}{\sqrt{I}} \quad \text{izanik}$$

8.7. INERTZI MOMENTUEN KALKULUA

8.4. puntuan ondoko modu honetan definitu genuen ardatz batekiko inertzi momentua (x' ardatzarekikoa)

$$I_{xx} = \sum_i m_i (r_i'^2 - x_i'^2)$$

Ikus dezagun orain, definizio honek duen esangura:



$\overline{OA}$, $O'x'$ ardatzaren perpen-
dikularra da. Beraz

$$r_i'^2 - x_i'^2 = \overline{OA}^2 = d_i^2$$

d_i , i puntutik $O'x'$ ardatze-
ra dagoen distantzia da. Be-
raz, inertzi momentua hone-
la lortzen da

$$I_{xx} = \sum_i m_i d_i^2$$

Edozein ardatzekiko ere, inertzia momentua partikulen masen eta berauetako bakoitzetik ardatzetara dagoen distantziaren koadratuaren biderkaketaz eta biderkaketa hauen batuketaz lortzen da.

$$I_e = \sum_i m_i d_i^2$$

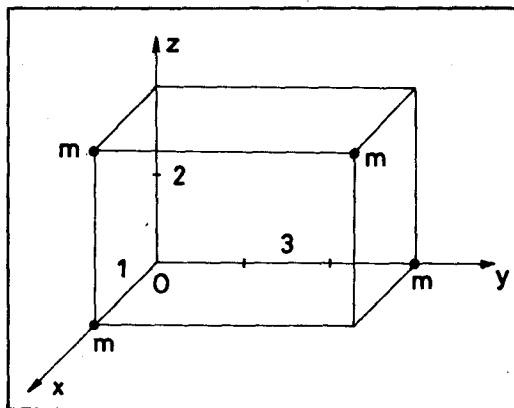
hemen d_i delakoa e ardatzera dagoen distantzia izanik.

Masa jarraia denean, honela egiten da kalkulua:

$$I_e = \int d^2 dm$$

Esandakoa argitzeko, adibide modura, bi partikula-sistemaren inertzia momentuak kalkulatu ditugu:

a) Masa diskretuz osaturiko sistema bat:



Lau masa berdin (m), er-tzak 1, 2 eta 3 metrota-koak dituen paralelepi-pedo baten lau erpine-tan daude, irudian age-ri den bezala. Hiru ar-datz koordinatuekiko inertzia momentuak lor-bi-tez. Halaber, inertzia tentsorea lor

$$I_{xx} = m \cdot 2^2 + m \cdot 0 + m \cdot 3^2 + m(3^2 + 2^2) = 26 m$$

$$I_{yy} = m \cdot 1^2 + m(1^2 + 2^2) + m \cdot 0 + m(1^2 + 2^2) = 11 m$$

$$I_{zz} = m \cdot 1^2 + m \cdot 1^2 + m(1^2 + 3^2) + m \cdot 3^2 = 21 m$$

Inertzi tentsorea kalkulatzeko (jatorrian noski), inertzi biderkadurak kalkulatu behar dira

$$I_{xy} = - \sum m_i x_i y_i = - (m \cdot 1.0 + m \cdot 1.0 + m \cdot 1.3 + m \cdot 0.3) = - 3m$$

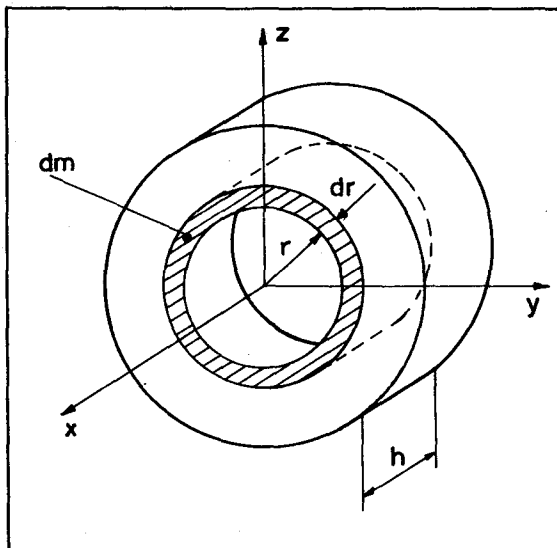
$$I_{xz} = - \sum m_i x_i z_i = - (m \cdot 1.2 + m \cdot 1.0 + m \cdot 1.2 + m \cdot 0.0) = - 4m$$

$$I_{yz} = - \sum m_i y_i z_i = - (m \cdot 0.2 + m \cdot 0.0 + m \cdot 3.2 + m \cdot 3.0) = - 6m$$

Beraz jatorriko inertzi tentsorea ondoko hau da:

$$I = \begin{pmatrix} 26m & -3m & -4m \\ -3m & 11m & -6m \\ -4m & -6m & 21m \end{pmatrix}$$

- b) Kalkula dezagun orain masa jarraia duen sistema baten inertzi momentua



h lodierako eta R erradiora duen disko zilindriko baten inertzi momentua kalkulatuko dugu x ardatzarekiko (ikus irudia)

$$I_{xx} = \int d^2 dm$$

dm elementuko partikula guztiek ardatzetik d distantzia berdina egon behar du te.

Irudian agertzen den dm elementuaren erakoak hartuko di

tugu, hau da ardatz gisa x ardatza duten eraztun finak (dr zabalera-koak). Materialearen dentsitatea ρ bada,

$$dm = \rho \, 2\pi \, r \, h \, dr$$

Eta elementu oso hau (dm) x ardatzetik r distantziara dagoenez,

$$I_{xx} = \int_0^R r^2 \rho \, 2\pi \, h \, r \, dr$$

$$I_{xx} = \rho \, 2\pi \, h \int_0^R r^3 \, dr = \rho \, 2\pi \, h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$I_{xx} = \rho \, 2\pi \, h \, \frac{R^4}{4}$$

Bestalde, disko osoaren masa ondokoa da:

$$M = \rho \, \pi \, R^2 \, h$$

Beraz

$$I_{xx} = \frac{1}{2} (\rho \, \pi \, R^2 \, h) \, R^2 \longrightarrow I_{xx} = \frac{1}{2} M \, R^2$$

* Biraketa-erradioa. Zenbait taulatan kontzeptu hau ageri da eta horregatik interesgarri da beraren esangura adieraztea. Gorputz batek biraketa-ardatz batekiko duen biraketa-erradioa zera da, gorputz horren masa guztia puntu batetan kontzentraturik balego, puntu horretatik ardatzera egon behar lukeen distantzia, puntuak ardatzarekiko duen inertzia momentua, gorputzak duen berbera izan dadin.

K biraketa-erradioa bada

$$M \, K^2 = I_e$$

Beraz,

$$K = \sqrt{\frac{I_e}{M}}$$

Adibidez, kalkula dezagun biraketa-erradioa lehengo diskoaren kasuan

$$I_e = \frac{1}{2} M R^2$$

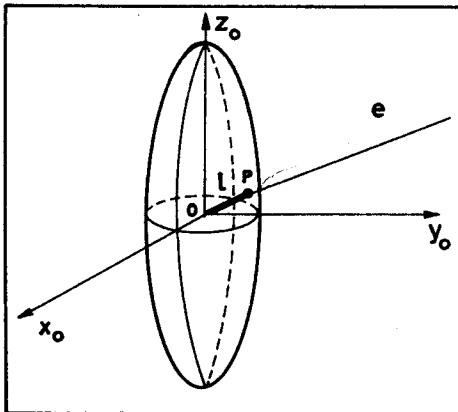
$$K = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} M R^2}{M}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Berdin kalkula daiteke beste edozein kasutan ere.

* Poinsot-en formula

Formula honen bidez, eta inertzi elipsoidean finkaturik, edozein direkzioarako ardatzarekiko inertzi momentua lortuko dugu, direkzio horren kosinu zuzentzaileen funtzioan.

Kalkuluak errazteko, masa-zentruko elipsoidea aztertuko dugu, eta erreferentzi gisa, ardatz nagusiak hartuko ditugu.



Demagun e direkzioa

$$\overline{OP} = 1 = \frac{1}{\sqrt{I_e}}$$

Bestalde, P puntuaren koordenatuak x_0 , y_0 , z_0 izanik, kosinu zuzentzaileak hauek dira:

$$\alpha_1 = \frac{x_0}{1} \quad \alpha_2 = \frac{y_0}{1} \quad \alpha_3 = \frac{z_0}{1}$$

Hemendik x_0 , y_0 eta z_0 bakanduz eta elipsoidearen ekuazio ra eramanez:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 l \\ y_0 = \alpha_2 l \\ z_0 = \alpha_3 l \end{cases} \quad I_1 x_0^2 + I_2 y_0^2 + I_3 z_0^2 = 1$$

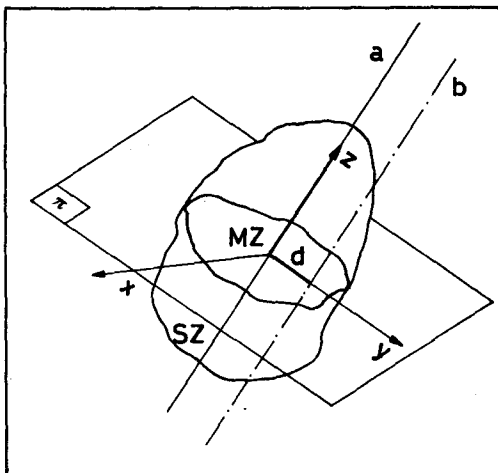
Beraz, azkenean hauxe geratzen zaigu

$$I_e = I_1 \alpha_1^2 + I_2 \alpha_2^2 + I_3 \alpha_3^2$$

Formula hau Poinsot-en formula deitzen da, eta ikusten denez, beronen bidez e ardatzarekiko inertzi momentua kalkula dai teke.

* Steiner-en formula

Formula honen bidez bi ardatz paralelorekiko inertzi momentuen arteko erlazioa adierazten da. Konkretuki, bi ardatzeta-tako bat masa-zentrutik pasatzen da.

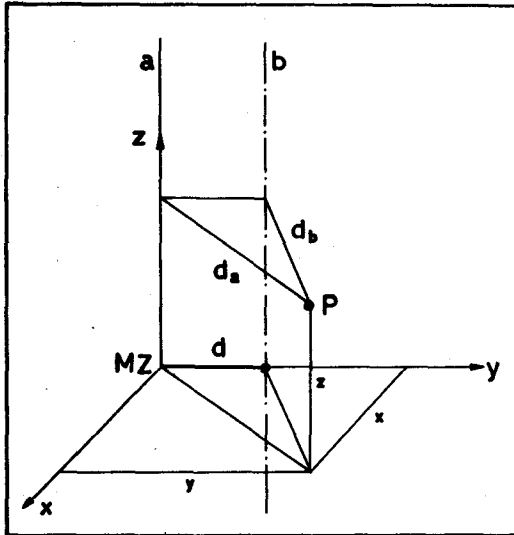


a ardatza masa-zentru tik iragaten da.

b ardatza a ardatzaren paraleloa da.

Hauen arteko distantzia d da. I_a eta I_b erlazio natu nahi ditugu.

* plano a eta b ardatzen perpendikularra da.



Problemaren formulazioa errazteko, a ardatza z ardatz gisa hartuko du gu. x eta y ardatzak planoko edozein ardatz perpendikular izan dai tezke, baina, berriro ere errazteko, y ardatza a eta b zuzen para leloek osotzen duten planoan hartuko dugu (Egindako errazpenek ez diote orokortasunik ken tzen gure problemari).

Honela eginik eta P delakoa solidoaren edozein puntu bat iza nik, puntu honetatik a eta b ardatzetara dauden distantziak, ondokoak dira:

$$\begin{cases} d_a^2 = x^2 + y^2 \\ d_b^2 = x^2 + (y - d)^2 \end{cases}$$

Eta inertzia momentuak:

$$\begin{cases} I_a = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i d_{ai}^2 \\ I_b = \sum_i m_i d_{bi}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2y_i d) \\ I_b = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_i m_i d^2 - 2d \sum_i m_i y_i \end{cases}$$

$$\sum_i m_i y_i = 0 \text{ jatorria masa-zentruan baitago}$$

Beraz:

$$I_b = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \left(\sum_i m_i \right)$$

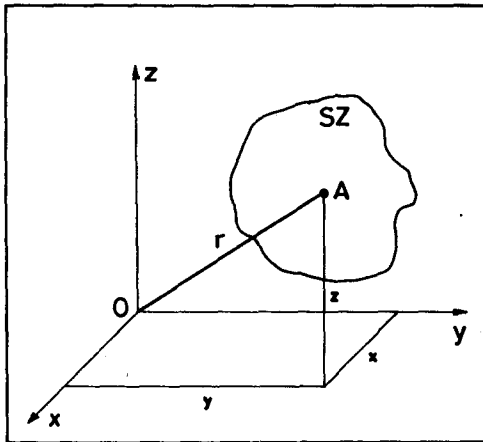
Azkenean zera geratzen zaigu:

$$I_b = I_a + M d^2$$

Hauxe da Steiner-en formula.

* Inertzi momentu polarra

Bukatzeko, magnitude berri bat definituko dugu, kalkulu asko tan lagungarri gertatzen baita: Puntu batekiko inertzi momentu polarra.



Demagun O puntuarekiko inertzi momentu polarra. Ondoko eran definitzen da:

$$I_{po} = \int r^2 dm$$

Hots, inertzi momentuak bezala baina puntu bate tarako distantziak jarrriz.

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dela kontutan edukiz, zenbait erlazio jar daitezke momentu polarraren eta ardatz koordenatuekiko inertzi momentuen artean:

$$I_{po} = I_{zz} + \int z^2 dm$$

$$I_{po} = I_{yy} + \int y^2 dm$$

$$I_{po} = I_{xx} + \int x^2 dm$$

$$3I_{po} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} + I_{po}$$

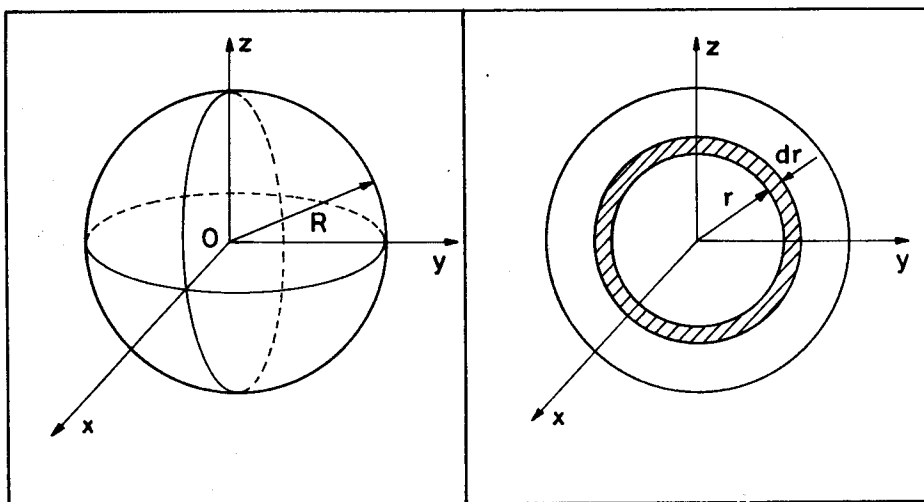
Hau da:

$$I_{po} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

Formula honek erraztu egiten du zenbait inertzi momenturen kalkulua.

Adibidea:

Kalkula bedi esfera homogeno batek bere zentrutik pasatzen den ardatz batekiko duen inertzi momentua



Simetria $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$

Beraz

$$I_{po} = \frac{1}{2} 3 I_{xx} \longrightarrow I_{xx} = \frac{2}{3} I_{po}$$

Lehenengo, ba, ardatzen jatorriarekiko inertzi momentu I_{po} larra kalkulatu dugu.

Horretarako, dm elementu gisa, r erradiodun eta dr lodieradun azal esferikoa hartuko dugu.

$$dm = \rho \, 4 \pi \, r^2 \, dr$$

Hortaz, hauxe izango da inertzi momentu polarra:

$$I_{po} = \int_0^R r^2 \, \rho \, 4 \pi \, r^2 \, dr = \rho \, 4 \pi \int_0^R r^4 \, dr$$

$$I_{po} = \rho \, 4 \pi \, \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} \left(\rho \, \frac{4}{3} \pi R^3 \right) R^2 = \frac{3}{5} M R^2$$

Azkenean, ardatzarekiko inertzi momentua ondokoa da:

$$I_{xx} = \frac{2}{3} \quad I_{po} = \frac{2}{5} M R^2$$

9. GAIA - SOLIDO ZURRUNAREN DINAMIKA

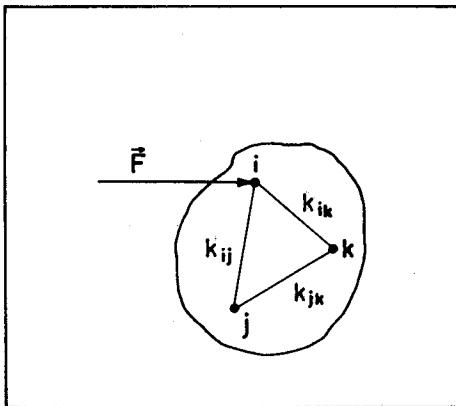
- 9.1. SOLIDOAREN DINAMIKAREN ECUAZIOAK, INDARREN SISTEMA
REN TORTSOREA
- 9.2. SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA ZINETIKOA
- 9.3. BIRAKETA ASKEA
- 9.4. ARDATZ FIXUAREN INGURUAN BIRATZEN ARI DEN SOLIDOA-
REN HIGIDURA
- 9.5. ZENBAIT ADIBIDE

Aurreko gaian solido zurrunaren definizioa eman dugu eta bide batez, solidoaren azterketa dinamikorako beharrezko diren magnitude berezi batzu definitu eta aztertu ditugu hala nola inertzi tentsorea, inertzi momentuak eta beste. Halaber, solidoaren abiaduren eremua aztertu dugu, hots, solido zurrunaren Zinematika. Baina abiadura hauk eta berauen aldakuntzak (azelerazioak alegia) ez ditugu erlazionatu solidoaren gainean eragiten ari diren indarrekin. Hauxe da, hain zuzen, oraingo gai honetan, solido zurrunaren Dinamika aztertzean, eginen duguna.

9.1. SOLIDOAREN DINAMIKAREN EKUAZIOAK. INDARREN SISTEMAREN TORTSOREA

Azter dezagun lehenik eta behin solidoan eragiten duten indarren konportamoldea eta eragina. Indar batek solidoaren puntu batetan eragitean, puntu horren higidura aldatzeko joera du. Baina solidoaren partikulen arteko distantziek konstante izan

behar dutenez, partikula guztiak indar horren eraginpean geratzen dira. Hau da, $\vec{F}$ indarrak i partikulan eragiten badu,



$$|\vec{r}_{ij}| = k_{ij} \quad \text{eta} \quad |\vec{r}_{ik}| = k_{ik}$$

direnez, eragina j eta k partikulek ere hedatzen da.

Hori dela eta, berezia gertatzen da solidoaren Dinamika, beste sistemenarekin konparatuz, eta horregatik kasu honetan teknika bereziak erabiltzen dira higiduraren azterketarako, hala nola, inertzi tentsorea eta beste.

Edozein modutan, gainezarmenaren printzipioan oinarrituz

eta indarrak kurtsorek direla kontutan hartuz, indar-sistema-ren eragina aztertzean, 2.4 galderan kurtsore-sistemak aztertzean ikusi genuen biltze-modua erabili behar dugu. Hau da, indar-sistema osoa solidoaren edozein puntutara laburbil daitenke, puntu horretan indar erresultantea ($\vec{F}$) eta momentu erresultantea ($\vec{\tau}$) emanik.

Kurtsore-sistemen propietateak kontutan edukiz, $\vec{F}$ eta $\vec{\tau}$ direlakoek ondoko berezitasunak dituzte:

- $\vec{F}$, espazioko inbariante bektoriala da
- $\vec{\tau}$ aldatuz doa puntuaren arauera. $\vec{\tau}_A$ A puntuarekiko momentua izanik, B puntuarekikoak balio hau du:

$$\vec{\tau}_B = \vec{\tau}_A + \vec{F} \wedge \vec{AB} = \vec{\tau}_A + \vec{F} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

- $\vec{F}$ -ren direkzioa duten zuzenak, $\vec{\tau}$ berdineko puntuen leku geometrikoak dira.
- $\vec{\tau} \cdot \vec{F}$, espazioko inbariante eskalarra da.
- Ardatz zentrolean $\vec{\tau}$ minimoa da eta $\vec{F}$ -ren direkzioa du.
- $\vec{\tau}$ eta $\vec{F}$ bikoteak tortsore izeneko multzoa osotzen du. Tortsore honek definitzen du solidoaren Dinamika, solidoak dituen loturekin batera.

Honela, ba, solido zurrunaren Dinamika aztertzeko, indar-sistemaren tortsorea kontsideratu behar dugu; hots, higidura-ren aldakuntzen sortzailea, $\vec{\tau}$ eta $\vec{F}$ bektoreek osoturiko tortsorea da.

Ikus dezagun orain nolako eragina duen tortsoreak. Solido zurruna, berez, partikula-sistema bat da. Beraz, 7. gaian partikula-sistemei buruz emandako legeak beteko ditu.

Erreferentziatzat, inertzi sistema bat hartzen badugu, 7.2 eta 7.4 puntuetan adierazitako legeak beteko ditu. Hau da:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{M} \frac{d\vec{v}_{MZ}}{dt} = M \vec{a}_{MZ}$$

Eta $\vec{L}$ eta $\vec{\tau}$, ardatzen jatorriarekiko momentu angeluarra eta indarren momentua izanik:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bi ekuazio hauk dira solido zurrunaren -eta beste edozein sistemen- Dinamikaren oinarritzko ekuazioak.

* Masa-zentruarekiko ekuazioak. Aurreko ekuazio biak inertzi sistema baten jatorriarekiko idatzirik daude. Hala ere, askoz ere praktikoago gertatzen da ekuazio horik masa-zentruarekiko idaztea eta horixe da orain egingen duguna.

Bi kasu aztertuko ditugu:

a) $\vec{F} = 0$ denean

Kasu honetan

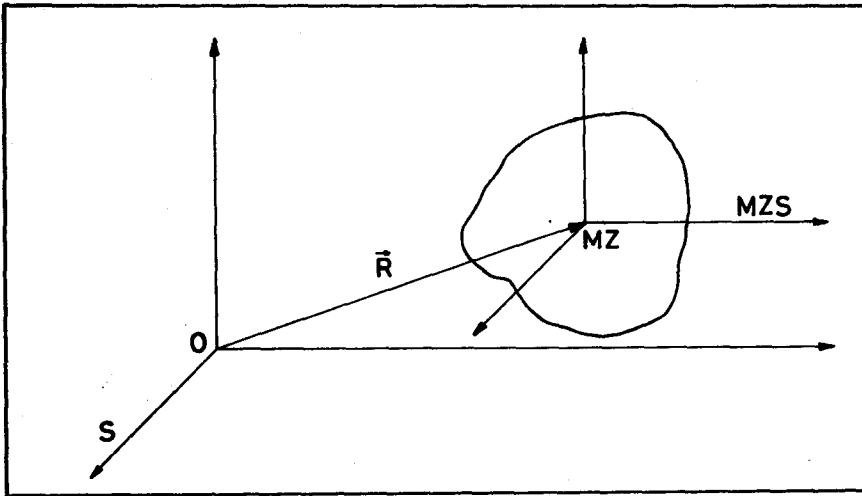
$$M \vec{a}_{MZ} = 0 \implies \vec{a}_{MZ} = 0$$

Beraz, jatorria masa zentruan edukiz eta inertzi sistemako ardatzen ardatz paraleloak dituen erreferentziazko sistema -7. gaian C deitzen genuen sistema-, sistema inertziala da. Beraz, masa-zentruarekiko,

$$\vec{\tau}_{MZ} = \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

erlazioa beteko da. (Aurreko gaian $\vec{\tau}_{MZ}$ eta $\vec{L}_{MZ}$ idatziz ordeztu, $\vec{\tau}'$ eta $\vec{L}'$ ipini dugu).

- b) $\vec{F} \neq 0$ denean. Kasu honetan masa-zentruarekin doan sistema, ez da inertziala; hori dela eta, ezin dezakegu aplikatu lehengo metodoa. Dena den, ondoko arrazonamenduaz ikusiko dugunez, ondorio berdintsura helduko gara.



Bi sistemetako ardatzak elkarren paraleloak dira binaka, S sistema inertziala da, MZS, ordea, ez da inertziala, jatorriak (MZ-k) azelerazioa baitu, Beraz:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

Baina $\vec{L}_O$ eta $\vec{\tau}_O$ ondoko moduan daude erlazionaturik $\vec{L}_{MZ}$ eta $\vec{\tau}_{MZ}$ direlakoekin

$$\vec{L}_O = \vec{R} \wedge M\vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{R} \wedge M\vec{V} + \vec{L}_{MZ}$$

$$\vec{\tau}_{MZ} = \vec{\tau}_O + \vec{F} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{MZ} + \vec{R} \wedge \vec{F}$$

Eta lehena denborarekiko deribatuz

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R} \wedge \vec{M}\vec{V} + \vec{R} \wedge M \vec{a}_{MZ} + \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Eta $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ denez, $\frac{d\vec{R}}{dt} \wedge \vec{M}\vec{V} = \vec{V} \wedge \vec{M}\vec{V} = 0$

Beraz,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{R} \wedge M \vec{a}_{MZ} + \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt} = \vec{R} \wedge \vec{F} + \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Eta $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{MZ} + \vec{R} \wedge \vec{F} \\ \vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \end{array} \right\}$ direla kontutan hartuz, az
kenean haxe geratzen zaigu

$$\vec{\tau}_{MZ} = \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt}$$

Hots, adierazpen hau beti betetzen da, masa-zentrua abia-
dura konstantez zein azelerazioz higitu arren. Baldintza baka-
rra zera da, masa-zentruarekin doazen ardatzek ez dezatela bi-
rarik egin.

Puntu honetan solido zurrunaren oinarritzko ekuazioak az-
tertu ditugu. Hauxek dira prezeski:

$$\begin{array}{l} \vec{F} = M \vec{a}_{MZ} \\ \vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \text{edo} \quad \vec{\tau}_{MZ} = \frac{d\vec{L}_{MZ}}{dt} \end{array}$$

Dena den, ekuazio hauk ez dira lehen ikustaldi batetan pentsa litekeen bezain sinpleak. Zailtasunen iturria, solido zurrunaren kasuan momentu angeluarrak abiadura angeluarraren funtzioan hartzen duen forma da. Aurreko gaitik dakigunez

$$\vec{L} = \mathbb{I} \vec{\omega}$$

Hemen, $\mathbb{I}$ delakoa inertzi tentsorea da (ez da, beraz, eskalare bat), eta horrela $\vec{L}$ eta $\vec{\omega}$ bektoreak ez dira direkzio berekoak generalean. Hori dela eta, kalkuluak konplikatu egiten dira kasurik orokorrean.

Guk, lehen maila honetan, zenbait kasu berezi aztertuko ditugu, adibide gisa. Hauen artean, biraketa askea eta ardatz fixuaren inguruan biratzen ari den solidoa. Ikusiko dugunez, kasu honetan kalkuluak erraztu egingen dira neurri batez.

Edozin modutan, eta solidoaren Dinamika aztertzen ari garen bezala, oso baliagarri gertatuko zaigu, solidoaren energia zinetikoak abiadura angeluarraren funtzioan hartzen duen adierazpena ikustea, eta horixe da hurrengo puntuan egingo duguna.

9.2. SOLIDO ZURRUNAREN ENERGIA ZINETIKOA

Solido zurruna partikula-sistema bat denez, honela adierazten da beraren energia zinetikoa masa-zentruaren koordentuen eta masa-zentruko sistemaren bidez (ikus 7.5)

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Bigarren gaia E_k' deituko dugu

$$E'_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Kalkula dezagun E'_k -ren balorea.

Gorputza solido zurruna denez, 8.4 puntuan ikusitakoaren arauera

$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i'$$

Bestalde

$$v_i'^2 = \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i' = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i') \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i')$$

Ondoko berdintza kontutan edukiz:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

zera geratzen zaigu:

$$v_i'^2 = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i') \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i') = \omega^2 r_i'^2 - (\omega_x x_i' + \omega_y y_i' + \omega_z z_i')^2$$

E'_k -ren adierazpenean ordezkatzuz, honela idatz dezakegu azkenean solido zurrunak masa-zentruarekiko duen energia zinetikoa:

$$E'_k = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 + 2I_{xy} \omega_x \omega_y + 2I_{xz} \omega_x \omega_z + 2I_{yz} \omega_y \omega_z)$$

Aukeratu dugun erreferentzi sistema masa-zentrutik iragaten den edozein izan daiteke. Bete behar duen baldintza bakarra zera da, erreferentzi sistema inertzial batekiko birarik ez egitea.

Ardatzak inertzi ardatz nagusiak badira, E'_k -ren adierazpena honela geratzen da, aurreko gaiko nomenklatura erabiliz (ikus 8.5 galdera)

$$E'_k = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

hemen

$$\left\{ \begin{array}{lll} I_{x_0 x_0} = I_1 & I_{y_0 y_0} = I_2 & I_{z_0 z_0} = I_3 \\ \omega_{x_0} = \omega_1 & \omega_{y_0} = \omega_2 & \omega_{z_0} = \omega_3 \end{array} \right\} \text{deituz}$$

eta bestalde

$$I_{x_0 y_0} = I_{x_0 z_0} = I_{y_0 z_0} = 0 \quad \text{baitira.}$$

Dena den, ardatz nagusiei buruzko adierazpena erabiltzen da ia beti. Kasu honetan, ba, demagun $\vec{\omega}$ bektoreak ardatz nagusi baten direkzioa duela etengabe (adibidez O'_{x_0} ardatzarena).

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = \omega_{x_0} = \omega \\ \omega_2 = \omega_{y_0} = 0 \\ \omega_3 = \omega_{z_0} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow E'_k = \frac{1}{2} I_1 \omega^2$$

$$\text{Biraketa-ardatza nagusia ez bada, } E'_k = \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

eta Poinot-en formulaz erraz lor daiteke I_e .

Ikusten denez, kasu honetan oso adierazpen erraza ageri da

energia zinetiko osoa adierazteko:

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

Bukatzeko, azter dezagun sistemaren gainean egiten den la naren eta energia zinetikoaren arteko erlazioa. 7.5 puntuan iku si genuenez, edozein partikula-sistemaren kasuan

$$W_{kan} + W_{bar} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Baina solidoak dituen loturak kontutan harturik, $W_{bar} = 0$ da.

Hots,

$$W_{bar} = \sum_{i,j} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0$$

zeren eta $\vec{F}_{ij}$ eta $\vec{r}_{ij}$ elkarren paraleloak direnez eta $|\vec{r}_{ij}| = c_{ij}$ denez, $\vec{F}_{ij}$ eta $d\vec{r}_{ij}$ perpendikularrak baitira eta, beraz, $\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0$ baita.

Honelatan

$$W_{kan} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Kanpo-indarrak kontserbakorrak izanik

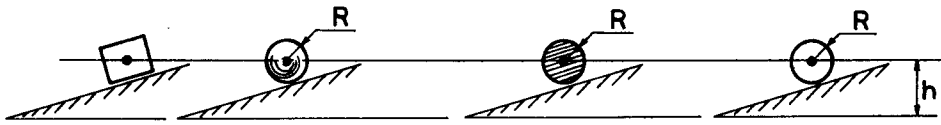
$$W_{kan} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Eta azkenik

$$(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = E$$

Hauxe energiaren kontserbazioaren printzipioa da, E_p delakoa kanpo-indarrei dagokien energia potentziala izanik.

* Adibidea: Masa bereko kuboak, esfera, zilindroak eta arrokak al-dapara ber batetan behera doaz. Kuboak labaindu egiten da maruskadurarik gabe. Beste hirurek errotatu egiten dute energiari galdu gabe. Zein ordenatan heltzen dira behekaldera?



1: kuboak	2: esfera	3: zilindroak	4: arrokak
$E_k = \frac{1}{2} M V^2$	$I_{MZ} = \frac{2}{5} M R^2$ $\omega = \frac{v}{R}$ $E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_{MZ} \omega^2$ $E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \frac{V^2}{R^2}$ $E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) M V^2$ $E_k = \frac{7}{10} M V^2$	$I_{MZ} = \frac{1}{2} M R^2$ $\omega = \frac{v}{R}$ $E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \frac{V^2}{R^2}$ $E_k = \frac{1}{4} M V^2$ $E_k = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) M V^2$ $E_k = \frac{3}{4} M V^2$	$I_{MZ} = M R^2$ $E_k = \frac{1}{2} (M R^2) \frac{V^2}{R^2}$ $E_k = \frac{1}{2} M V^2$

Beraz, zentruko abiadura berdinen kasuan (V)

$$E_{k_{\text{kuboak}}} < E_{k_{\text{esfera}}} < E_{k_{\text{zilindroak}}} < E_{k_{\text{arrokak}}}$$

Azter dezagun orain energiaren kontserbazioa. Lan egiten duen kanpo-indar bakarra grabitatearena da (hau da, kontserba

korra).

Beraz, $E_p = 0$ aldaparen behekaldean hartuz

$$E = E_p + E_k = \underbrace{M \cdot g \cdot h + 0}_{\text{goian}} = \underbrace{0 + E_k}_{\text{behean}}$$

Kasu guztietan, behean gorputzak duen energia (E_k) hauxe da:

$$E_k = M \cdot g \cdot h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kuboak:} \quad \frac{1}{2} M v_k^2 = M \cdot g \cdot h \\ \text{esferak:} \quad \frac{7}{10} M v_e^2 = M \cdot g \cdot h \\ \text{zilindroak:} \quad \frac{3}{4} M v_z^2 = M \cdot g \cdot h \\ \text{aroak:} \quad M v_a^2 = M \cdot g \cdot h \end{array} \right. \quad v_k > v_e > v_z > v_a.$$

Beraz, kuboak helduko da lehen, esfera bigarren, zilindroa hirugarren eta aroa azken.

9.3. BIRAKETA ASKEA

Solidoaren gainean inolako indarrik ez momenturik eragiten ez badu ($\vec{F} = 0$, $\vec{\tau} = 0$) solido hori libreki biratzen ari dela diogu. Kasu honetan ondoko ekuazioak betetzen dira

$$a) \quad \vec{F} = M \frac{d\vec{v}_{MZ}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{v}_{MZ} = k^{te}$$

Beraz masa-zentrua abiadura konstantez higitzen da eta bertan erreferentzi sistema inertziala aukera dezakegu

$$b) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = \vec{k}^{te}$$

Gainera, $\vec{F} = 0$ enez, $\vec{\tau}$ momentuak edozein puntutan balio du zero. Beraz edozein punturekiko momentu angeluarra ere konstante iruten du.

c) Kanpo-indarririk ez dagoenez,

$$W_{kan} = 0$$

Beraz

$$E_k = k^{te}$$

hots, energia zinetikoak konstante irauten du.

Hiru horik dira, ba, solidoaren higidura askearen oinarriko ekuazioak. Horik erabiliz ebazten da problema.

* Ikus dezagun $\vec{L}$ -ren eta $\vec{\omega}$ -ren arteko erlazioa. Dakigunez,

$$\vec{L} = \mathbb{I} \vec{\omega}$$

Baina hemen $\mathbb{I}$ inertzi tentsorea da, hots, ez da eskalare bat. Eta aurreko gaian ikusi genuenez -ikus 8.4- generalean $\vec{L}$ -k eta $\vec{\omega}$ -k direkzio desberdinak dituzte. Gainera, solidoa higitzen ari denez, $\mathbb{I}$ tentsorearen elementuak ere aldatuz doaz. Horrela, $\vec{L} = k^{te}$ izan arren, generalean $\vec{\omega} \neq k^{te}$ izaten da.

Hala ere, lehen uneko biraketa-ardatza inertzi ardatz nagusia bada, adibidez, $O'x_0$ ardatza, zera gertatzen da.

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}$$

Hemen $I_1 = I_{x_0 x_0}$, inertzia momentu nagusia da. Eta definituz, $\vec{\omega}$ eta $\vec{L}$ bektoreak direkzio berekoak dira.

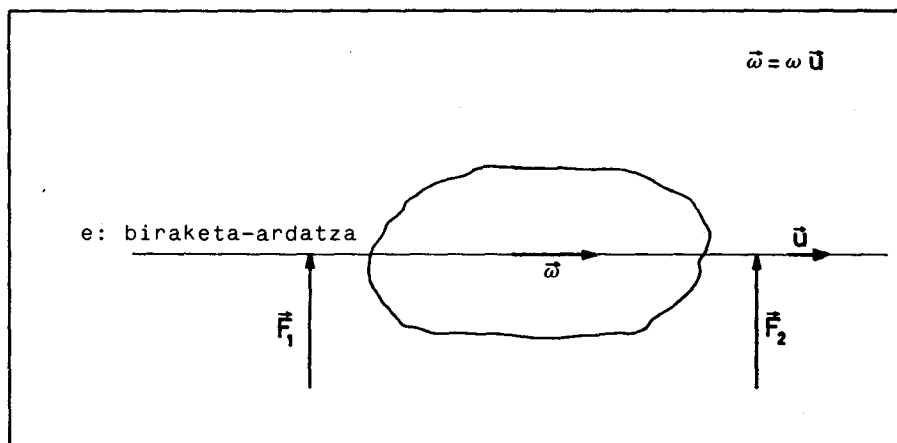
Eta $\vec{L} = k \vec{\omega}$ enez, ez dago arrazoi berezirik $\vec{\omega}$ -k ere konstante iraun ez dezan. Beraz, baldintza horik beteaz

$$\vec{\omega} = k \vec{e}$$

Ikusi dugunez, $\vec{\omega}$ konstante izan dadin, lehen uneko higidura angeluarra inertzia ardatz nagusi baten inguruan gertatu behar da.

9.4. ARDATZ FIXUAREN INGURUAN BIRATZEN ARI DEN SOLIDOAREN HIGIDURA.

Kasu honetan, kanpo-indarren bidez, behartu egiten da solidoa ardatz fixu baten inguruan biratzera. Beraz, biraketa hau ez da askea, eta generalean $\vec{F} \neq 0$ eta $\vec{\tau} \neq 0$ izanen dira.



Alboko irudiak $\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ bektoreek ardatzaren euskarrietan egiten diren indarrak adierazten dituzte (hemen kasu sinpleena aukeratu dugu, hau da, marruskadurarik gabe biratzen ari den solidoarena).

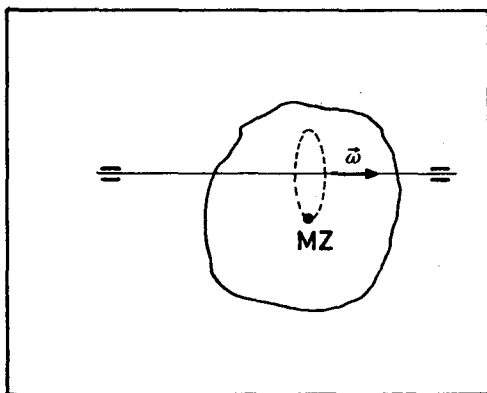
Horietaz gainera, bestelako indarrek ere eragin dezakete, hala nola grabitatearenak.

Zer esanik ez, nahiz eta irudian e ardatza horizontalki irudikatu dugun, biraketa-ardatzak edozein direkzio ukan dezake.

Azterketan 9.1 puntuko ekuazio berberak erabili behar dira, kasu orokorrean $\vec{F} \neq 0$ eta $\vec{\tau} \neq 0$ direla kontutan hartuz.

Ikus ditzagun gerta daitezkeen zenbait kasu berezi:

I. Masa zentrua ez dago biraketa-ardatzean.



Masa-zentruak ibilbide zirkularra du eta beraz

$$\vec{a}_{MZ} \neq 0$$

Eta

$$\vec{F} = M \vec{a}_{MZ} \neq 0$$

Kasu honetan konplikatu egiten da higiduraren azterketa.

II. Masa-zentrua biraketa-ardatzean dago.

Kasu honetan $\vec{a}_{MZ} = 0$

eta $\vec{F} = M \vec{a}_{MZ} = 0$

Nola interpretatzen da hau? Honela: Nahiz eta kanpo-indarrak eragiten egon, euskarriek egiten dituzten indarrek ($\vec{F}_1$ eta $\vec{F}_2$ direlakoek) orekatu egiten dute sistema -indarrei dagokien-

nez- eta erresultantea nulua da. Sistema estatikoki orekaturik dagoela esaten da.

Indarren erresultantea nulua izan arren, momentuak ez du zertan nulua izan behar. Edozein modutan, $\vec{F} = 0$ denez, $\vec{\tau}$ inbariantea da eta balio bera du espazioko edozein punturekiko. Ka su honetan bi azpikasu berezi aztertuko ditugu:

II.a) Biraketa-ardatza_inertzi_ardatz_nagusia_da.

Ardatz nagusia izanik

$$\vec{L} = I_e \vec{\omega} = I_e \omega \vec{u}$$

$$\text{Bestalde } \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_e \omega \vec{u})}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt} \vec{u}$$

zeren eta I_e eta $\vec{u}$ konstante baitira

Azelerazio angeluarraren definizioaren arauera

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u} = \alpha \vec{u}$$

Beraz

$$\boxed{\vec{\tau} = I_e \alpha \vec{u}}$$

Hemendik bi ondorio ateratzen dira:

- Euskarrietako indarrek hartzen dituzten baloreei esker, $\vec{\tau}$ momentuak biraketa-ardatzaren direkzioa du.
- Indarren momentuaren moduluak ondoko erlazioa du solidoaren azelerazio angeluarrarekin:

$$\tau_e = I_e \alpha$$

Bukatzeko, ikus dezagun $\tau_e = 0$ denean gertatzen dena:

$$\tau_e = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \longrightarrow \omega = k^{te}$$

Prozesu hau alderantziz ere azter daiteke, hau da,

$$\omega = k^{te} \text{ bada, } \tau_e = 0 \text{ da.}$$

Masa-zentrua biraketa-ardatzean egonik, biraketa-ardatz inertzia ardatz nagusia denean, ardatz fixuaren inguruan biratzen ari den solidoa, dinamikoki orekaturik dagoela esaten da.

Ardatza dinamikoki orekaturik dagoenean, euskarrietan egiten diren indarrek ez dute biraren abiadura angeluarren dependentziarik eta balio bera dute ω edozein izanik. Horregatik, makina eta motore guztietako errotoak orekatu egiten dira dinamikoki.

II.b) Biraketa-ardatza ez da inertzia ardatz nagusia

Momentu angeluarraren eta abiadura angeluarraren arteko erlazioa hau da

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Hemen $\vec{L}$ -k eta $\vec{\omega}$ -k direkzio desberdinak dituzte.

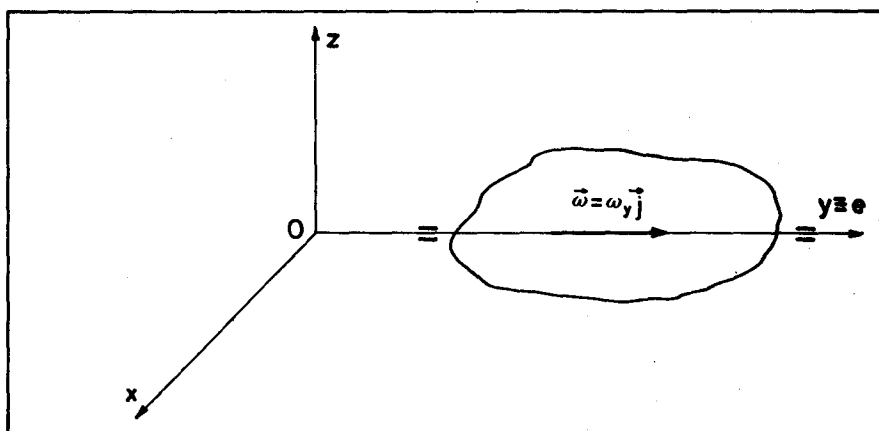
Dinamikaren ekuazioa hau da

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Momentuak e ardatzaren direkzioan duen osagaia kontsideratuz

$$\tau_e = \left(\frac{dL}{dt} \right)_e = \frac{dL_e}{dt}$$

Ikus dezagun zenbat balio duen L_e delakoak



Har dezagun, adibidez, Oy ardatza e ardatzean. Hori eginik:

$$L_e = L_y = I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \quad (\text{ikus 8.4})$$

Baina $\vec{\omega} = \omega_y \vec{j}$ denez ($\omega_x = \omega_z = 0$)

$$L_e = I_{yy} \omega_y = I_e \omega$$

Beraz

$$\tau_e = \frac{dL_e}{dt} = I_e \frac{d\omega}{dt}$$

Hots, kasu honetan ere

$$\tau_e = I_e \alpha$$

Noski, kasu honetan e ardatzarekiko osagaiak baino ez ditugu kontsideratzen adierazpen honetan. Beste direkzioetan bestelako erlazio batzu daude.

9.5. ZENBAIT ADIBIDE

Gai honen azalpenarekin bukatzeko, problema batzu egingen ditugu, aipaturiko puntu teorikoak praktikan nola aplikatzen diren ikusteko.

- I. || Gorputz solido bat indarrik eragiten ez duen eremu huts batetara jaurtikitzen da, lehen unean bere masa-zentruak $\vec{v}_{MZ}$ abiadura duelarik, eta abiadura angeluarra $\vec{\omega}$ balio duelarik. ||
- Zeintzu magnitude kontserbatuko dira jaurtiki ondoren?
 - Zeintzu baldintzatan kontserbatuko da $\vec{\omega}$?

Teorian aztertu dugun biraketa askeari dagokio problema hau.

$$\vec{F} = 0 \qquad \vec{\tau} = 0$$

Beraz

$$\vec{F} = M \vec{a}_{MZ} = 0 \longrightarrow \begin{aligned} \vec{a}_{MZ} &= 0 \\ \vec{v}_{MZ} &= k^{te} \end{aligned}$$

Hau da, masa-zentruaren abiadurak konstante iraungo du.

Bestalde,

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} = k^{te}$$

Momentu angeluarrak ere konstante iraungo du

$$W_{kan} = 0 \quad \text{denez,} \quad E_k = k^{te}$$

Hots, gauza bera gertatzen da energia zinetikoarekin.

Kasurik orokorrean ez da beste kontserbatze-legerik.
Abiadura angeluarrari dagokionez

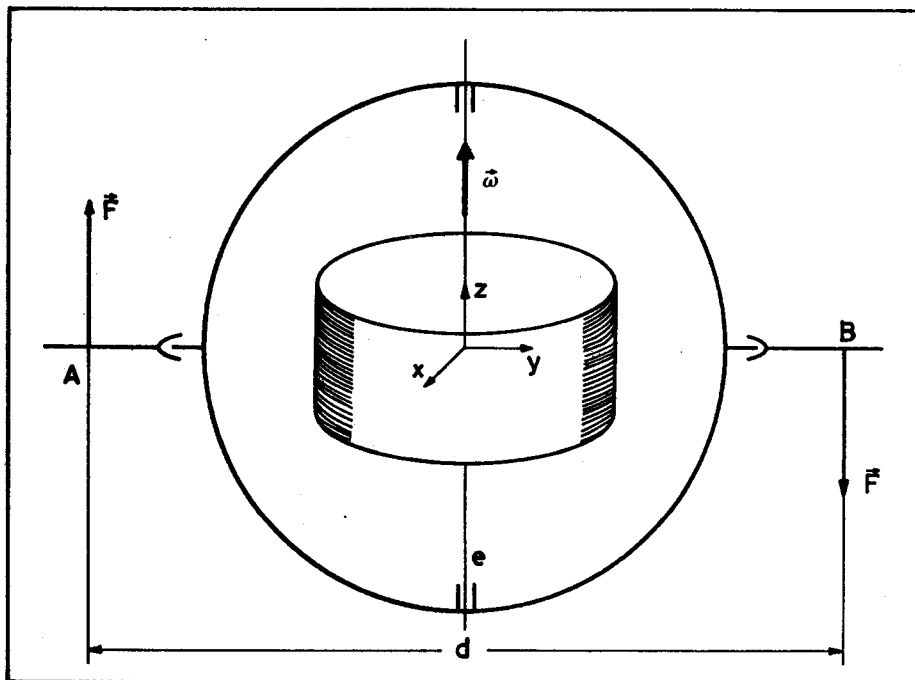
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Eta $\vec{L} = k^{te}$ denez, $\vec{\omega}$ -k ez du, generalean, konstante irauten (ikus 9.3c). Hala ere, hasierako $\vec{\omega}$ -k, ardatz nagusi baten direkzioa badu

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}$$

eta kasu honetan, $\vec{L}$ -k eta $\vec{\omega}$ -k direkzio berbera dutenez, $\vec{\omega}$ ere kontserbatu egiten da.

- II. || Alboko irudiak giroskopio bat adierazten du. Er
dian disko bat biratzen ari da $\vec{\omega}$ abiaduraz e ar
datz nagusiaren inguruan. Oreka dinamikoan da-
goelarik, A eta B puntuetan ($\vec{F}$, $-\vec{F}$) bikotea apli-
katzen da irudian azaltzen den eran. Nolakoa iza-
nen da, giroskopioak pairatuko duen higidur al-
daketa? ||



Arazoa kualitatiboki aztertzeke, diskoak baino ez duela masa kontsideratuko dugu.

Orekan diskoak duen momentu angeluarra hauxe da:

$$\vec{L} = \vec{I}_e \vec{\omega} = I_e \omega \vec{k}$$

zeren e ardatza inertziaiko nagusia baita.

Bestalde: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Indarren momentua hauxe da

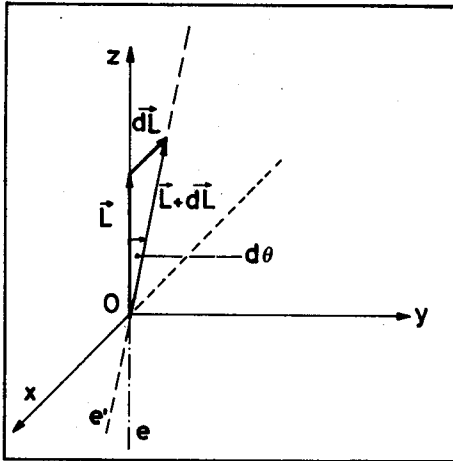
$$\vec{\tau} = -F d \vec{i}$$

Beraz momentu hau aplikatzean

$$-F d \hat{i} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{L} = -F d dt \hat{i}$$

Azken adierazpen honek argituko digu arazoa. $\vec{\omega}$ handia bada, $\hat{i}$ momentuak ez du $\vec{\omega}$ -ren modulua aldatuko. Bestalde $\vec{L}$ -k $\vec{\omega}$ -ren direkzioa ukanen du. Eta $d\vec{L}$ eta $\vec{L}$ elkarren perpendikularrak direnez, $\vec{L}$ -k modulu berbera ukanen du. dt denbora-tartea pasatu eta gero,



$(\vec{L} + d\vec{L})$ bektoreak $d\theta$ angelua osotuko du $\vec{L}$ bektorearekin XOZ planoan. Beraz, diskoaren ardatza XOZ planoan higituko da, Oy ardatzarekiko biratuz. Hori da e ardatzaren higidura.

Ikusten denez, sortzen den higidura, intuitiboki pentsa daitekeenaz bestelakoa da. Intuitiboki pentsatuz, lehen ikus taldi batetan e ardatzak Ox ardatzaren inguruan biratu behar duela dirudi; baina kalkuluak eginez, Oy ardatzaren in guruan biratzen duela ikusten da.

10. GAIA - ESTATIKA

10.1. PUNTU MATERIAL BATEN OREKA-BALDINTZAK

10.2. SOLIDO BATEN OREKA-BALDINTZAK

10.3. SOLIDOAK ETA LOTURAK

10.4. LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOA

Puntuaren eta partikula-sistemen Dinamika aztertzean, in darren eta higidur aldaketen arteko erlazioak aipatu ditugu. Orain Dinamikaren kasu berezi bat, mugako kasu bat aztertuko dugu: higidurarik ez dagoenekoa. Azterketa hau Estatika izene ko atalean egiten da. Hori da, hain zuzen ere, Estatika: Gorpu tzen pausagunea aztertzen duen Mekanikaren atala. Gai honetan ikusiko dugunez, Estatikaren muina, indar-sistemaren orekan da tza, bai partikularen kasuan eta bai solido zurrunaren kasuan.

Dena den, higidura kontzeptu erlatiboa dela dakigunez, er latibotasun hau kontutan eduki beharko dugu. Gainera, Newton-en printzipioak inertzi sistemekiko emanak direnez, kontutan eduki beharko da hau, inertziakoak ez diren sistemak erabil-tzean. Kasu honetan, 5. gaian ikusi genuen sistema ez-inertzia len Dinamikan (5.9.) finkatuko gara.

10.1. PUNTU MATERIAL BATEN OREKA-BALDINTZAK

Bi pausotan aztertuko dugu arazo hau: Lehenik, errefe-rentzi gisa sistema inertzial bat hartuz, eta gero, sistema ez-inertziala kontsideratuz.

a) Sistema inertziala

Partikula puntualari Newton-en legeak aplikatzen zaizkio. Orekan, $\vec{a} = 0$; beraz, indarrek bete behar duten baldintza hau-xe da:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Partikula puntual baten gainean eragiten ari direnez, in-darrak konkurrenteak dira, konkurrentzi puntua partikula bera izanik. Beraz, puntu horrekiko:

$$\vec{r} = 0$$

Baina baldintza hau ez dugu erabiliko, beti eta halabeharrez bete behar baita.

Beraz, indar erresultantearen baldintza baino ez dugu:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Eta baldintza hau bektoriala denez, hiru baldintza eskalar ageri dira

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{iz} = 0$$

Baldintza honetaz gainera -hots $\vec{a} = 0$ - puntua geldi egon dadin abiadurak ere nulu izan behar du:

$$\vec{v} = 0$$

Dena den, abiaduraren erlatibotasuna kontutan hartuz, $\vec{v} = k^{te}$ ere orekatzat hartu behar dugu, kasu honetan ere indar-sistema orekan baitago.

b) Sistema ez-inertziala

Kasu honetan indar "errealez" gainera, indar "fiktizioak" hartu beharko ditugu kontutan, hau da, inertzi indarrak. Sistema ez-inertzialen dinamika aztertzean (5.9.), partikularen higidura arautzen duen ekuazioa, ondokoa dela ikusi genuen:

$$m \vec{a}' = m \vec{a} - m \vec{A} - m \vec{\omega} \wedge \vec{r}' - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Estatikan ari garenez, $\vec{a}' = 0$

Ekuazio honetan, gaiek esangura hau dute:

$m\vec{a}$: Edozein inertzi sistematik neurtzen den indarra. "Benetako" indarra edo indar erresultante "erreala" deitzen da.

$$-m\vec{A} ; -m\vec{\omega} \wedge \vec{r}' , -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \text{ eta } -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

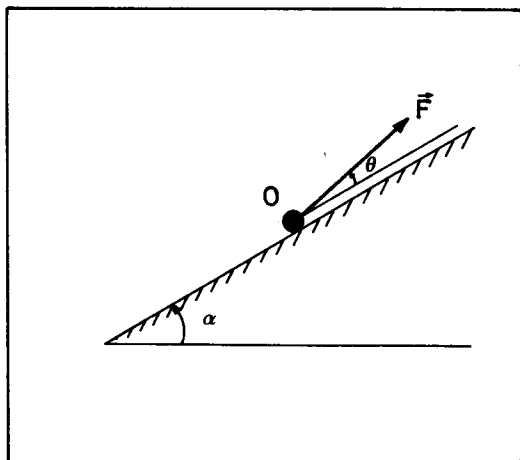
Hauk guztiok inertzi indarrak ditugu.

Estatika ez-inertzialean partikularen oreka baldintzak hauek dira:

$$\sum \vec{F}_{\text{erreal}} + \sum \vec{F}_{\text{fiktizio}} = 0$$

* Zenbait adibide. Aurreko lerroetan ikusitakoa hobeki ulertzeko, partikularen Estatikari buruzko adibide pare bat jarriko dugu. Lehena, inertzi sistema batekikoa, eta bigarrena sistema ez-inertzial batekikoa.

"Plano aldapatu batetan m masako partikula bat dago marruskadurarik gabe. Planoak α angelua osotzen du horizontalarekin. Zer modulu eduki behar du planoarekin θ angelua osotzen duen $\vec{F}$ indarrak, partikula geldi egon dadin?".

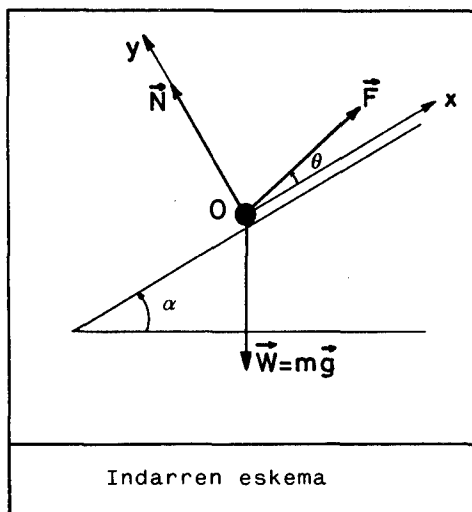


Eragiten ari diren indarrak (partikularen gainean, noski) hauek dira:

$$\vec{W} = m\vec{g} : \text{pisua}$$

$\vec{N}$: planoaren normala (ez baita go marruskadurarik)

$\vec{F}$: kalkulatzeko eskatzen den indarra.



Hirurak planokideak eta konkurrenteak dira. Beraz, oreka-baldintzen arauera:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Kalkuluak errazteko, irudian ageri den XOY sistema hartuko dugu erreferentziatzat.

$$\sum F_{ix} = 0 \longrightarrow F \cos \theta - mg \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \longrightarrow N + F \sin \theta - mg \cos \alpha = 0$$

Sistema honetatik F eta N kalkula ditzakegu.

Lehen ekuaziotik: $F = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \theta}$

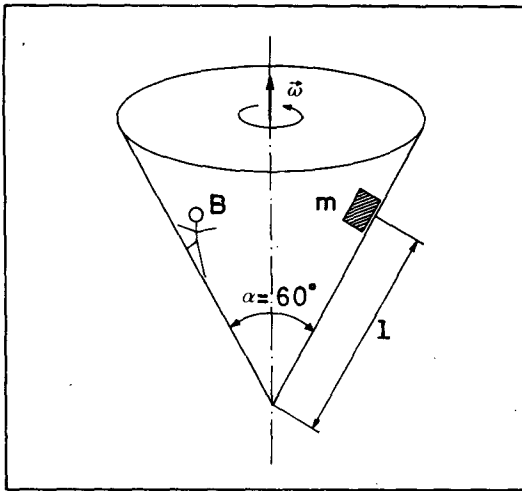
Bigarrenetik:

$$N = mg \cos \alpha - F \sin \theta = mg \cos \alpha - \frac{mg \sin \alpha \sin \theta}{\cos \theta}$$

edo laburtuz

$$N = \frac{mg \cos(\alpha + \theta)}{\cos \theta}$$

"m masako gorputz bat, erpinean $\alpha = 60^\circ$ -tako angelua duen kono baten barnean dago, erpinetik l distantziara. Konoa biraka ari da bere ardatzaren inguruan ω abiadura angeluarraz. Konoaren eta gorputzaren arteko marruskadura-koefiziente estatikoa $\mu = 0,25$ da. Zertzu mugen artean alda daiteke konoaren abiadura angeluarra, gorputza konoarekiko geldiegon dadin?"



Kasu hau sistema ez-inertzial batekiko estatikarena da. $\vec{\omega}$ konstante dela kontsideratuko dugu, inertzia indarren kalkulua errazteko.

I) Beherantz jausten hasten deneko muga aztertuko dugu lehenik. Konoarekin higitzen den behatzaileak (B delakoak) geldirik dakusa m masa. Beraz, indarrak (benetakoak eta inertzia-koak) orekan daude, behatzaileak erabiltzen duen erreferentzi sisteman.

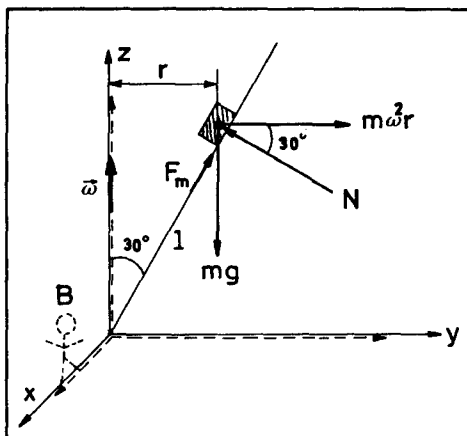
Inertzia indar bakarra indar zentrifugoa da, zeren eta

$$\vec{A} = 0$$

$$\vec{\omega} = 0$$

$$\vec{v}' = 0$$

baitira



Bestalde, marruskadura-in darraren balorea hauxe da

$$F_m \leq \mu N$$

Mugan $\rightarrow F_m = \mu N = 0,25 N$

Eta gorputza beherantz erortzeko mugan dagoenez, indar honen sentidoa goranzkoa da.

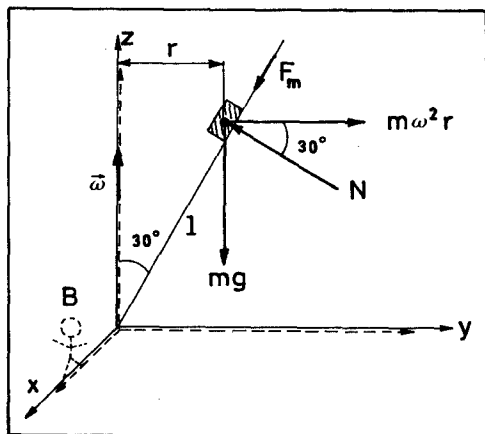
Oreka-baldintzak hauxek dira:

$$y : m \omega^2 r - N \cos 30 + 0,25 N \sin 30 = 0$$

$$z : -mg + N \sin 30 + 0,25 N \cos 30 = 0$$

Bi ekuazio hauetatik ω eta N kalkula ditzakegu. ω hau ω_1 deituko dugu eta behera jausteko muga adierazten du.

Beraren balorea hauxe da: $\omega_1 \cong 1,43 \sqrt{\frac{g}{l}}$



II) Kasu honetan, gorantz higitzen hasteko muga adierazten ari garenaz, F_m delakoak beheranzko sentidoa edukiko du eta beraren modulua hauxe izango da:

$$F_m = \mu N = 0,25 N$$

(Oharra: Oraingo normalaren balioa eta lehengoarena desberdinak dira. Berdin gertatzen da ω -rekin).

Oreka-baldintzak hauek dira:

$$y : \quad m \omega^2 r - N \cos 30 - 0,25 N \sin 30 = 0$$

$$z : \quad -mg + N \sin 30 - 0,25 N \cos 30 = 0$$

Sistema honetatik ω eta N kalkulatuko ditugu. ω hau ω_2 deituko dugu eta goiko muga adierazten digu. Kasu honetan

$$\omega_2 \approx 2,64 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Beraz, partikula geldi egon dadin, abiadura angeluarraren balioak ondoko eran egon behar du mugaturik

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$$

10.2. SOLIDO BATEN OREKA-BALDINTZAK

Dakigunez, bi dira solidoaren dinamika arautzen duten ekuazioak:

$$- \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_{MZ} \quad \text{Indarren erresultanteak translada-} \\ \text{tzezko higidura-aldaketa sortzen du.}$$

$$- \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{Biraketazko higidura-aldaketa sor-} \\ \text{tzen dutenak, indarren momentuak} \\ \text{dira.}$$

Beraz, oreka lortzeko, bi baldintza behar dira:

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i &= 0 \\ \sum_i \vec{\tau}_i &= 0\end{aligned}$$

Zer esanik ez, indar erresultantea nulua bada, indarren momentu erresultanteak balio berbera du puntu guztietan; eta batetan nulua bada, beste guztietan ere nulua da.

Idatzitako baldintzak bektorialak direnez, izatez, espazioan sei baldintza eskalar ditugu:

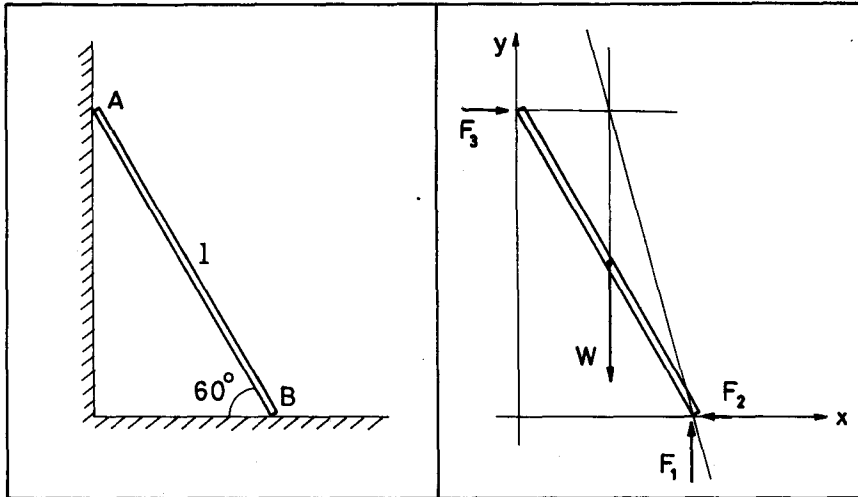
$$\begin{aligned}\sum_i F_{ix} &= 0 & \sum_i F_{iy} &= 0 & \sum_i F_{iz} &= 0 \\ \sum_i \tau_{ix} &= 0 & \sum_i \tau_{iy} &= 0 & \sum_i \tau_{iz} &= 0\end{aligned}$$

Indar guztiak planokideak direnean, sei baldintza horik hirutara laburtzen dira. XOY ardatzak aipaturiko planoan harturik, hiru baldintza hauk geratzen zaizkigu:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{ix} &= 0 \\ \sum_i \tau_{iz} &= 0 & \sum_i F_{iy} &= 0\end{aligned}$$

* Adibideak

"Eskilara bat marruskadurarik ez duen horma baten kontra dago, horizontalarekin 60°-tako angelua osotuz. Zolua-
ren marruskadurari esker, eskilara ez da erortzen. Eski-
lararen pisua W bada, zenbat balio dute horma eta zo-
luak egiten dizkioten indarrek?"



Eskuineko irudian eskilararen gainean eragiten duten indarrak adierazten dira:

W : pisua (masa-zentruan)

F_1 eta F_2 : B puntuan eragiten duen indarraren osagai bertikal eta horizontala. De netara, hauxe da zoluak egiten duen indarra. Honek ez du normalaren direkzioa, marruskadura baitago.

F_3 : A puntuan hormak egiten duen indarra. Hormaren perpendikularra da, ez baita go marruskadurarik.

Indar guztiak planokideak dira:

$$\sum F_{ix} \longrightarrow F_3 - F_2 = 0$$

$$\sum F_{iy} \longrightarrow -W + F_1 = 0$$

$$\sum (\tau_{iB})_z \longrightarrow W \frac{l}{2} \cos 60 - F_3 l \sin 60 = 0$$

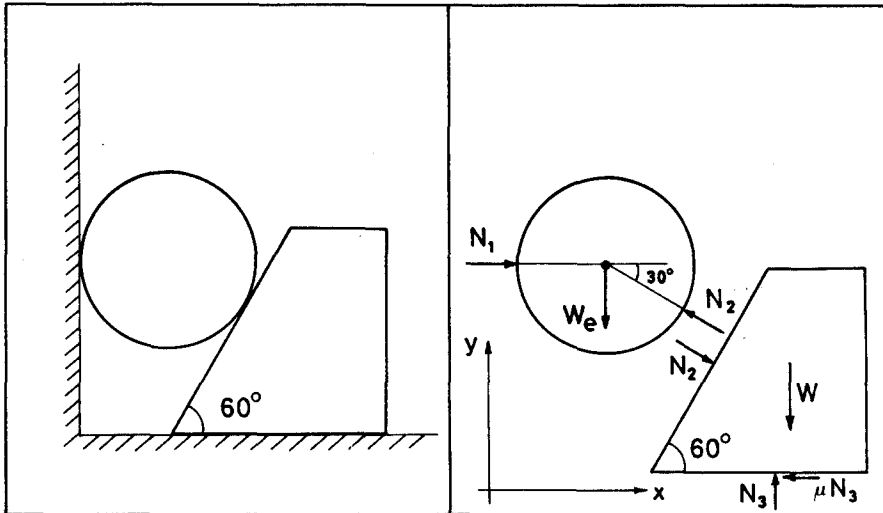
Sistema honetatik F_1 , F_2 eta F_3 kalkula daitezke

$$F_1 = W$$

$$F_2 = \frac{W \cotg 60}{2} = 0,29 W$$

$$F_3 = \frac{W \cotg 60}{2} = 0,29 W$$

"Irudiko ziriak 10 kg-tako masa du, lurrarekin duen ma
rruskadura-koefiziente estatikoa $\mu = 0,3$ izanik. Kal
kula bedi esferak ukan dezakeen masarik handiena, zi-
ria higi ez dadin. Zirria ez dela irauliko onartzen da".



Eskuineko eskeman bi solidoen gainean eragiten duten indar
rak adierazten dira. Bi solidoek orekan egon behar dute.

- a) Esfera: Hiru indarrek konkurrenteak izan behar dute,
esfera orekan baitago. Beraz nahikoa da $\sum \vec{F}_i = 0$ egi-
tea

$$x : N_1 - N_2 \sin 60 = 0$$

$$y : N_2 \cos 60 - W_e = 0$$

b) Ziria: Irauliko ez dela dakigunez, ez dugu zertan $\sum \vec{r} = 0$ baldintza erabili behar. N_3 delakoak oreka lortzeko behar duen posizioa hartuko du.

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{eginez}$$

$$x : N_2 \sin 60 - \mu N_3 = 0$$

$$y : -N_2 \cos 60 + N_3 - W = 0$$

Honela lau ekuazio ditugu, lau ezezagunekin:

$$N_1, N_2, N_3 \text{ eta } W_e$$

Sistema ebatziz, erraz lor dezakegu W_e -ren balioa.

Emaitza hauk lortzen dira:

$$N_1 = 3,63 \text{ Kg} \quad N_2 = 4,19 \text{ Kg}$$

$$N_3 = 12,1 \text{ Kg} \quad W_e = 2,1 \text{ Kg}$$

10.3. SOLIDOAK ETA LOTURAK

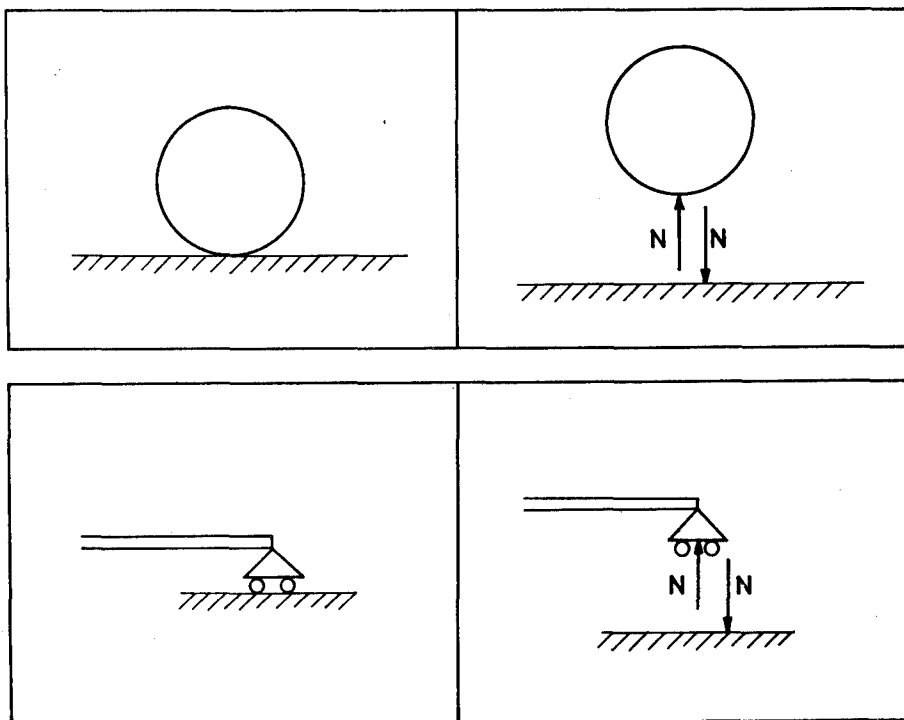
Solidoek harreman edo lotura bereziak ukan ditzakete beste gorputzekin. Lotura hauen bidez mugatu egiten da nolabait solidoareen higidura. Edozein modutan problemak ebazteko, kendu egiten dira loturak eta haien orde, beste gorputzek loturetan solidoari egiten dizkioten indarrak jartzen dira. Zer esanik ez, loturetako indarrek bete egiten dute akzio - erreakzioaren

printzipioa, solidoen arteko kontaktuz sortutako indarrak baitira.

Galdera honetan lotura-moten sailkapena eginen dugu, bi-
de batez mota bakoitzari dagozkion lotura-indarrak adieraziz:

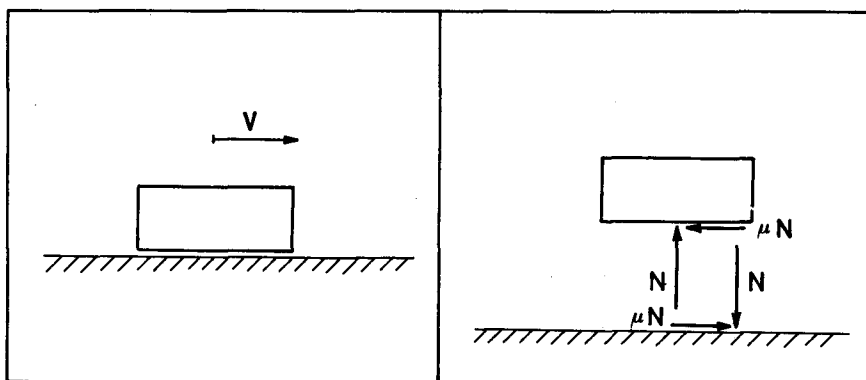
a) Kontaktu hutsezko loturak; Bi solido elkar ukitzen daude.
Kontaktu hau marruskaduraz edo marruskadurarik gabe izan
daitekeenez, bi azpimota daude.

a.1) Marruskadurarik gabe. Kasu honetan lotura-indarrek gai-
nazalen perpendikularraren direkzioa dute.



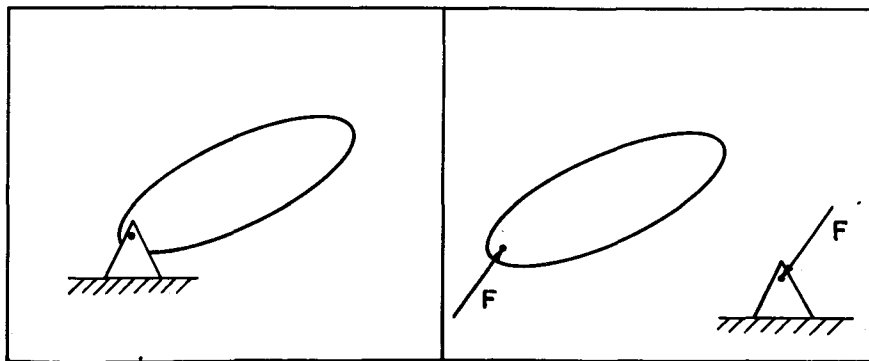
a.2) Marruskaduraz. Kasu honetan indarrak ez du normalaren direkzioa. Bi osagai jartzen dira:

- N normala
- $F_m \leq \mu N$ (estatikan) gainazalaren tangentea eta higitzera jotzen dueneko sentidoaren kontrakoa, gainazalaren elkarrekiko higidura erlatibo posiblearen aurkakoa, jakina.



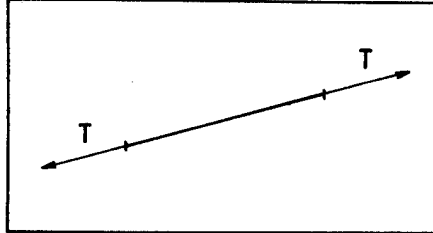
Normalaren kokatzearen arazoa ez da problema, gorputza iraultzen ez bada. Behar den lekuan egonen da, $\sum \vec{\tau} = 0$ izan dadin.

b) Puntu fixua duen solidoa. Indarrak edozein direkzio har dezake, puntu fixutik pasatuz noski.

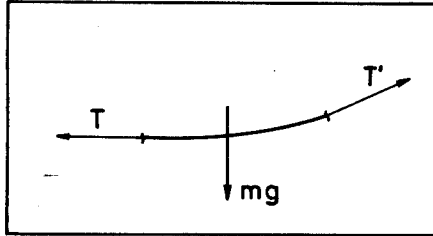


Kalkuluak errazteko, indar horren osagaiak erabiltzen dira gehienetan F_x , F_y

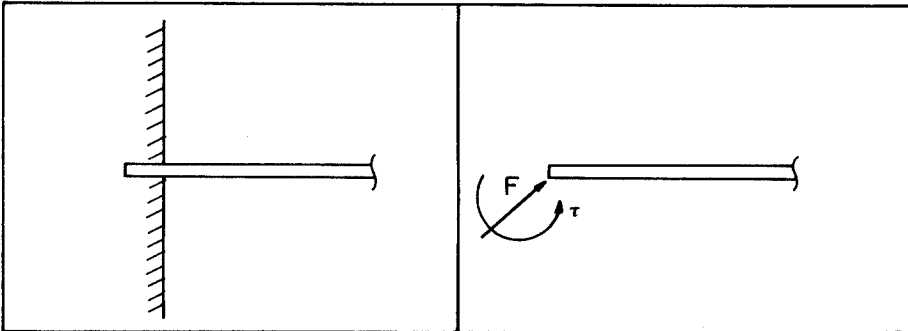
- c) Sokak. Masa gabeko soken kasuan, sokak zuzentzat hartzen ditugu. Tentsio-indarra ager daiteke soilik, eta tentsio horrek balio berbera du sokaren edozein puntutan.



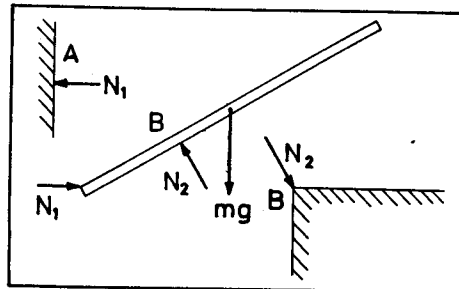
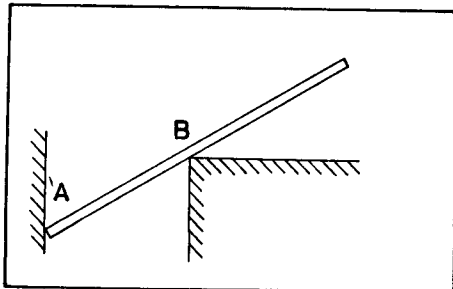
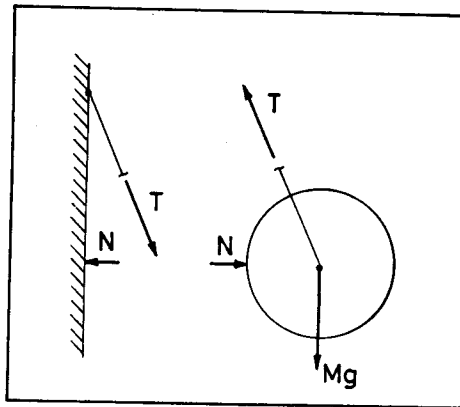
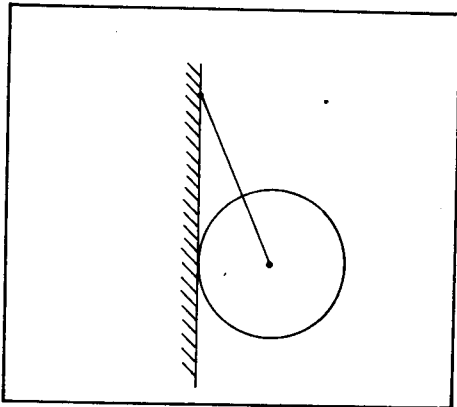
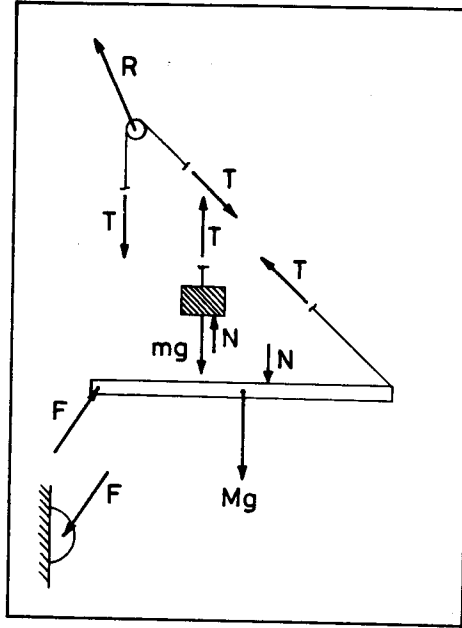
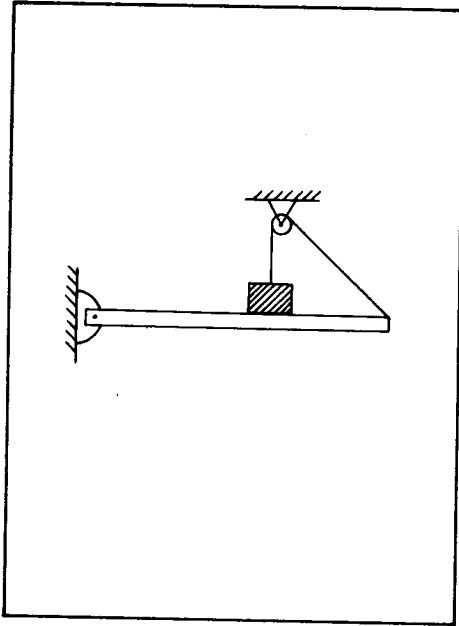
Sokaren masa kontutan hartzean, tentsioa aldatuz doa puntutik puntura.



- d) Barrak. Kasu honetan tentsio eta konpresio-indarrak egin ditzakete, eta bai beste edozein sentidotan ere, barra zurruna bada.
- e) Barra ongi enprotaturik badago, indarraz gainera momentu bat ere ematen du loturak.



Galdera honi amaiera emateko, zenbait kasutako indarren eskemak adieraziko ditugu. Kasu hauetan guztietan, loturak di-tuen solido baten estatika aztertzen da.



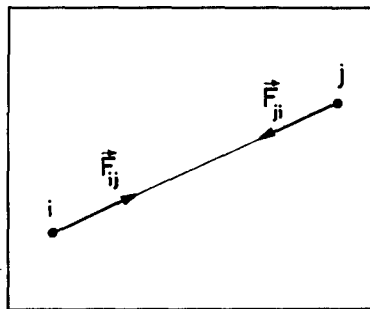
10.4. LAN BIRTUALEEN PRINTZPIOA

Oraingo sail honetan, solidoez osoturik dauden eta marruskadurarik gabekoak diren sistemen oreka aztertzean interes garri gerta daitekeen ebazpide bat azaltzen da. Ebazpide honek ez die ezer kentzen ez gehitzen, aurreko sailetan ikusi ditugun ekuazio orokorreari; izan ere, horik kasu guztietan aplikagarri baitira. Ebazpide honen interesgarritasuna honetan dattza, alegia, zenbait problema bereziren ebazpena nabariki errazten duela, besterik ez.

Demagun orekan dagoen sistema mekaniko bat. Oro har, solidoez osoturik dagoela kontsideratuko dugu, eta solido horien artean lotura batzu daudela. Orekan egonik, sistema horretako partikula guztiak ere orekan daude. Sistema horretako i partikularen gainean hiru eratako indarrek eragiten dute:

$\vec{F}_i^{(kan)}$ Kanpotik eragiten ari diren indarrak

$\vec{F}_i^{(bar)}$ Barne-indarrak. Sistemako beste partikulen kausaz sortutakoak. i partikulari j partikulak egiten dion indarra $\vec{F}_{ij}$ deituko dugu, $\vec{F}_{ji}$, i partikulak j partikulari egiten dio-na izanik.



$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ dela suposatuko dugu eta gainera, indar hauek $\vec{r}_{ij}$ bektorearen direkzioa dutela (hots, akzio-erreakzioaren printzipioa)

$$\vec{F}_i^{(bar)} = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

$\vec{F}_i^{(l)}$ Loturetan sistemari egiten zaizkion indarrak.

Zer esanik ez, orekan

$$\vec{F}_i^{(kan)} + \vec{F}_i^{(bar)} + \vec{F}_i^{(l)} = 0$$

Kontsidera dezagun orain kontzeptu berri bat: desplazamendu birtual infinitesimala. Berau, loturak apurtu gabe gerta daitekeen desplazamendua da. Zer esanik ez, sistema orekan dagoenez, desplazamendu hori ez da goiko indarrek sortua. Nola-bait esateko, asmapen matematikoa da; eta horregatik deitzen da birtual eta ez erreal.

i partikularen posizio-bektorea $\vec{r}_i$ izanik, desplazamendu birtual infinitesimala $\delta \vec{r}_i$ izendatuko dugu.

$\delta \vec{r}_i$ infinitesimala denez, eta loturak apurtzen ez direnez (definizioz), desplazamendu birtual horretan egiten den lan birtuala haxe izanen da (i partikulan):

$$\delta W = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 = (\vec{F}_i^{(kan)} + \vec{F}_i^{(bar)} + \vec{F}_i^{(l)}) \cdot \delta \vec{r}_i$$

Eta sistema osoarena:

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(kan)} + \vec{F}_i^{(bar)} + \vec{F}_i^{(l)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Azter ditzagun banan-banan gai hauk:

- $\sum_i \vec{F}_i^{(bar)} \cdot \delta \vec{r}_i$: Indar hauk guztiok ij bikoteka bil ditzakegu. Honela

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j &= \vec{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i - \vec{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_j = \\ &= \vec{F}_{ij} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) = \vec{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{ij} \end{aligned}$$

Eta solidoak aztertzen ari garenez, i eta j partikulen arteko distantziak konstante iraun behar du, $\vec{F}_{ij}$ eta $\delta \vec{r}_{ij}$ perpendikularrak gertatzen direlarik. Beraz

$$\vec{F}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{ij} = 0$$

Eta denetara

$$\sum_i \vec{F}_i^{(\text{bar})} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$-\sum_i \vec{F}_i^{(1)} \cdot \delta \vec{r}_i$: Desplazamendu birtualak loturak apurtu gabe direnez, $\vec{F}_i^{(1)}$ indarrek desplazamenduen perpendikularrak dira, loturetan marruskadurarik ez badago. Kasu honetan lotur indarrek ez dute lanik egiten. Beraz:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(1)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

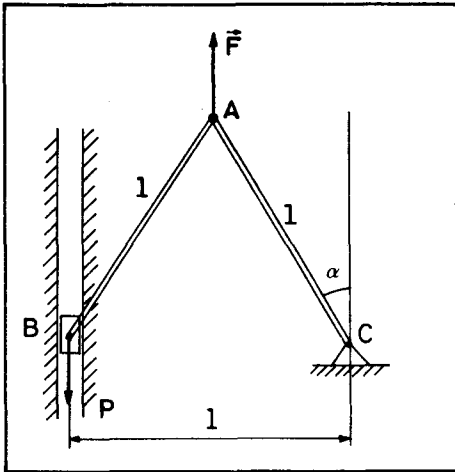
Honela, azkenean geratzen zaiguna, zera da:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(\text{kan})} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Hauxe da, hain zuzen ere, lan birtualen printzipioa: "Ore kan dagoen eta solido zurrunez osaturikoa den sistema batetako loturetan marruskadurarik ez badago, kanpo-indarrei dagokien lan birtuala, nulua da".

Printzipio honen aplikamodua adierazteko, adibide batzu jarriko ditugu.

- ① || "Lan birtualen printzipioa erabiliz, kalkula ezazue $\vec{F}$ eta $\vec{P}$ -ren arteko erlazioa, oreka-posizioan $\alpha = 30^\circ$ izan dadin". ||



Oharra: Barrek pisurik ez dutela eta loturetan (A, B eta C puntuetan) marrus kadurarik ez dagoela onartzen da.

Oharretako puntuak betetzen badira, lan birtualen printzipioa aplikatu daiteke.

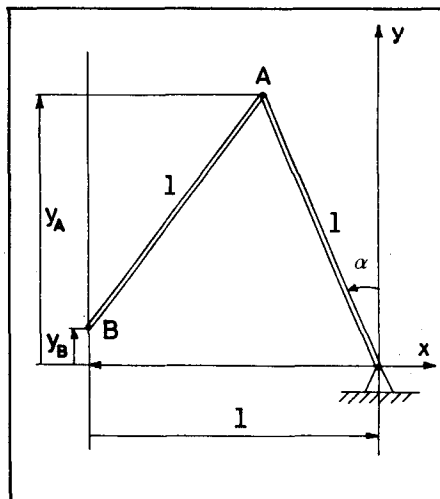
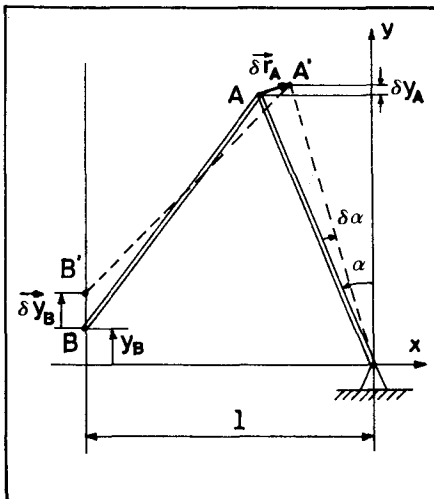
$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Kanpo-indarrak F eta P dira. Beraz

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A = 0$$

Eta $\vec{P}$ -k eta $\vec{F}$ -k bertikalaren direkzioa dutenez, hurrengo irudiko erreferentzi sistema hartuz, honela geratzen zaigu:

$$-P \delta y_B + F \delta y_A = 0$$



Beraz, δy_B eta δy_A kalkulatu ditugu α -ren funtzioan, eta horretarako, lehenik y_A eta y_B kalkulatu behar ditugu.

$$y_A = 1 \cos \alpha$$

$$y_B = 1 \cos \alpha - \sqrt{1^2 - (1 - 1 \sin \alpha)^2} = 1 \left[\cos \alpha - \sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha} \right]$$

Desplazamendu birtual infinitesimalak hauek dira:

$$\delta y_A = -1 \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_B = -1 \left[\sin \alpha + \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}} \right] \delta \alpha$$

P-ren eta F-ren arteko erlazioa hauxe da:

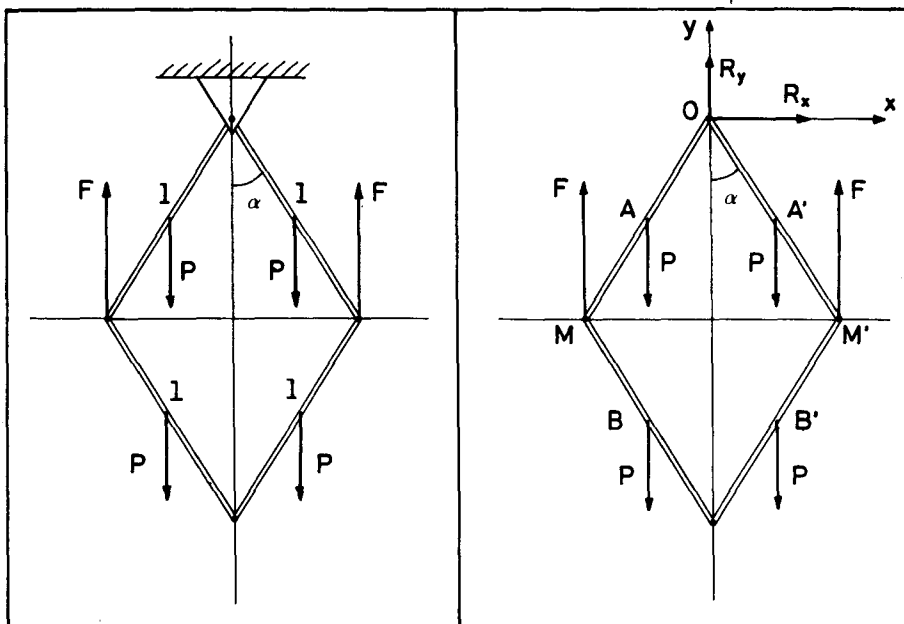
$$\frac{P}{F} = \frac{\delta y_A}{\delta y_B} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)}{\sqrt{2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha}}}$$

Eta orekan $\alpha = 30^\circ$ dela esan digutenez

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{2}$$

Hau da $F = 2P$

- ② "Irudiko lau barrak berdinak dira eta beren artean giltzaturik daude plano bertikal batetan, marruska durarik gabe. Lor bedi ezker eta eskuinaldeko giltzaduretan egin behar diren F indar bertikal berdinen balorea, irudiko jarreraren sistemak orekan iraun dezan. Zein izango da O puntuko giltzaduran egiten den erreakzioa?"



Irudietan sistema mekaniko horren gainean egiten diren in darrak adierazten dira. Lan birtualen printzipioak dioen legez:

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r}_M + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_{M'} + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_{A'} + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_{B'} = 0$$

edo:

$$\vec{F} \cdot \delta (\vec{r}_M + \vec{r}_{M'}) + \vec{P} \cdot \delta (\vec{r}_A + \vec{r}_{A'} + \vec{r}_B + \vec{r}_{B'}) = 0$$

Irudiko erreferentzi ardatzez baliaturik, behar ditugun bektoreen adierazpenak idatziko ditugu:

$$\vec{F} = F \vec{j}$$

$$\vec{P} = -P \vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_M + \vec{r}_M' = -2 \, l \cos \alpha \, \vec{j} \\ \vec{r}_A + \vec{r}_A' + \vec{r}_B + \vec{r}_B' = -4 \, l \cos \alpha \, \vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \delta(\vec{r}_M + \vec{r}_M') = 2l \sin \alpha \, \delta \alpha \, \vec{j} \\ \delta(\vec{r}_A + \vec{r}_A' + \vec{r}_B + \vec{r}_B') = 4l \sin \alpha \, \delta \alpha \, \vec{j} \end{cases}$$

Lan birtualen ekuaziora itzuliz:

$$(F \, \vec{j}) \cdot (2l \sin \alpha \, \delta \alpha \, \vec{j}) + (-P \, \vec{j}) \cdot (4l \sin \alpha \, \delta \alpha \, \vec{j}) = 0$$

$$F \, 2l \sin \alpha \, \delta \alpha - P \, 4l \sin \alpha \, \delta \alpha = 0$$

$$F = 2P$$

O puntuko giltzadurako erreakzioa lortzeko, ezin dezake gu lan birtualen printzipioa erabil, zeren aipaturiko puntua finko dagoenez gero, ez baitauka desplazamendurik egiteko aukerarik. Beraz, estatikako lehenengo legea aplikatuko dugu, hau da:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$-4P \, \vec{j} + 2 \cdot 2P \, \vec{j} + R_x \, \vec{i} + R_y \, \vec{j} = 0$$

Hemendik emaitza hau lortzen dugu

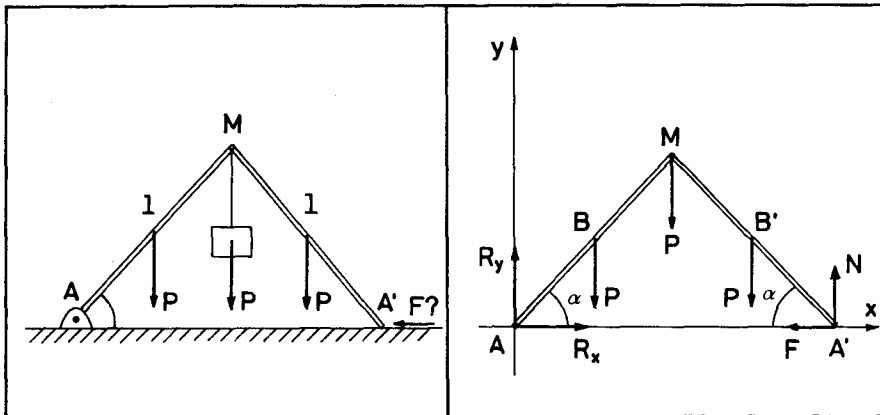
$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$$

Beraz O puntuan ez dago erreakziorik, hots, bertako euskarria kenduko bagenu ere, sistemak orekan iraungo luke berdindin.

3

"Irudian adierazten diren MA eta MA' barrak guztiz berdinak dira eta M puntuan giltzaturik daude. Puntu horretatik zintzilik, barren pisu bereko zama bat jartzen da. A puntuan giltzadura finko bat dago eta A' puntuan eskuineko barra zolu gainean apuiazten da. Ez dago inolako marruskadurarik.

Lor bedi A' puntuan egin behar den F indar horizontala, irudian erakusten den posizioan sistema mekanikoa orekan egon dadin.



Alboko eskeman, sisteman eragiten duten indarrak ikusten dira. Aplika dezagun lan birtualen printzipioa:

$$\vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_M + \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_{B'} + \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_{A'} + \vec{N} \cdot \delta \vec{r}_{A'} = 0$$

$$\vec{P} \cdot \delta (\vec{r}_B + \vec{r}_M + \vec{r}_{B'}) + (\vec{F} + \vec{N}) \cdot \delta \vec{r}_{A'} = 0$$

Erreferentzi ardatzen bidez, honela adieraziko ditugu bektore horiek:

$$\vec{P} = -P \vec{j}$$

$$\vec{F} = -F \vec{i}$$

$$\vec{N} = N \vec{j}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{r}_B + \vec{r}_M + \vec{r}_{B'} &= \frac{1}{2} (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + 1 (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + \\ &\quad + \left(\frac{3}{2} l \cos \alpha \vec{i} + \frac{1}{2} l \sin \alpha \vec{j} \right) \\ \vec{r}_B + \vec{r}_M + \vec{r}_{B'} &= 3l \cos \alpha \vec{i} + 2l \sin \alpha \vec{j} \\ \vec{r}_{A'} &= 2l \cos \alpha \vec{i} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(\vec{r}_B + \vec{r}_M + \vec{r}_{B'}) &= (-3l \sin \alpha \vec{i} + 2l \cos \alpha \vec{j}) \delta \alpha \\ \delta \vec{r}_{A'} &= -2l \sin \alpha \delta \alpha \vec{i} \end{aligned} \right.$$

Lan birtualen ekuaziora eramanez:

$$-P \vec{j} \cdot (-3l \sin \alpha \vec{i} + 2l \cos \alpha \vec{j}) \delta \alpha + (-F \vec{i} + N \vec{j}) \cdot (-2l \sin \alpha \delta \alpha \vec{i}) = 0$$

$$-2l P \cos \alpha \delta \alpha + 2l F \sin \alpha \delta \alpha = 0$$

$$F = P \cotg \alpha$$

Berez, hauxe da probleman eskatzen digutena. Baina lan birtualen printzipioa aplikatu ondoren, ikus dezagun nola izango litzatekeen ebazpena, estatikako funtsezko ekuazioak erabiliz:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0 \\ \sum_i F_{iy} &= 0 \\ \sum_i \tau_{iz} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} R_x - F &= 0 \\ R_y + N - 3P &= 0 \\ N \cdot 2l \cos \alpha - P \frac{3}{2} l \cos \alpha - P l \cos \alpha - \\ &\quad - P \frac{1}{2} l \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ikusten denez, hiru ekuazio eta lau ezezagun daude, R_x , R_y , N eta F alegia. Hortaz, beste ekuazio bat falta zaigu, problema hau matematikoki ebatzirik gera dadin. Hori egiteko eskuinaldeko barraren oreka aztertu beharko genuke, adibidez, M puntuarekiko momentuak hartuz. Honela:

$$-F \cdot l \sin \alpha + N l \cos \alpha - P \frac{l}{2} \cos \alpha = 0$$

Ekuazio honetatik eta aurreko multzoko azkenetik, erraz atera daiteke F indarraren balorea

$F = P \cotg \alpha$

Zer esanik ez, lehengo balore berbera lortzen da. Hala ere, bistakoa denez, estatikako funtsezko printzipioak erabiltzean, lau ekuazio planteatu ditugu, lehenengo biak alferrik gertatzen zaizkigularik. Kasu honetan, metodoak alderatuz, argi eta garbi nabari da lan birtualen printzipioaren erabilpenak daukan ahalmena, F indarraren balorea zuzenki ematen baitu.

B I B L I O G R A F I A

1. M. ALONSO, E.J. FINN : "Física". Vol I "Mecánica". Vol II "Campos y Ondas". Vol III "Fundamentos Cuánticos y Estadísticos". Ed. Fondo Educativo Interamericano. 1970.
2. C. KITTEL, W.D. KNIGHT, M.A. RUDERMAN : "Berkeley Physics Course", Vol I : Mecánica. Ed. Reverte 1968.
3. PURCELL : "Berkeley Physics Course". Vol. 2 "Electricidad y Magnetismo".
4. CRAWFORD : "Berkeley Physics Course". Vol 3. "Ondas y oscilaciones".
5. H.E. WHITE : "Física Moderna". UTEHA. 1965.
6. V.L. STREETER : "Mecánica de los Fluidos" Ediciones del Castillo. Madrid 1967.
7. J. BRICARD, H. BENOIT : "Physique". Editions Medicales Flammarion. Paris 1966.
8. J. MANAS, R. MARTINEZ AGUIRRE : "Física General". 1967.
9. H.B. CALLEN : "Thermodynamics". 1960.
10. SEARS, ZEMANSKY : "Física".