

udako
euskal
unibertsitatea

KONMUTAZIOA:
SISTEMA DIGITALAK

IRUINEA 1980



Banco de Vizcayak

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya

UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA

IRUÑEA 1980

KONMUTAZIOA:
SISTEMA DIGITALAK

PRESTATZAILEAK: MIKEL ALKORTA
MIKEL IRIONDO
KEPA SARASOLA

1. Lan honen bidez, eman nahi dugu
Konmutazioaren barri.
Beste lan sakon baten aurrean
izan daiteke oinarri.
Nahiz eta egun, teknika hauek
baztertuta egon sarri;
haseran hala, egiten zenez
ditugu hemen ezarri.
Zuen ustetan, faltatzen dena
mintegi honetan jarri.

2. Hiru aldetan, zatitu dugu
lantxo apal honen martxa:
Lehenengoa gerta daiteke
luze, neke eta gatxa.
Mahatsondo gabe sortzen ez denez
udaberriko mahatsa;
era berean, guk behar dugu
Boolear Algebra latza.
Algebra honetan, kokatzen baita
konmutazioaren saltxa.

3. Batu eta ken, konpara eta
biderkatu nahi badugu,
bigarren sailaz baliaturik
dena egin dezakegu.
Multiplexore deitu sistemak
erabili ditzakegu
MaClausky eta Karnaugh-en mapak
guzti hori bait dakigu
Nahi dugun dena eraikitzeke
modu onean gaude gu.

4. Azken aldean, landu ditugu
sistema sekuentzialak;
kontutan hartzen ditugu hemen
ordularien pultsoak.
Sistema hauen irteerak dira
aurrekoen menpekoak,
horregatikan esaten dugu
direla memoriadunak;
honelakoak eraikitzeke
behar ditugu FLIP-FLOP-ak.

5. Lan honek ditu, bere atzetik
hiru lagun, ikaskide;
laugarrenaren izena ere
isiltzea ez da bide.
Joserra izan dugunez gero
euskararen zuzentzaile,
baita gainera, azken orduan,
irudi hauen egile.
Guretzat beti izango zara
irakasle eta lankide.

AURKIBIDEA

Lehenengo atala:	1
I. Konmutaziozko aldagaiak, eragiketak eta funtzioak	3
II. Minimizazioa	40
Bigarren atala:	65
Zirkuitu errepikakorrak	66
Hirugarren atala:	97
I. Zirkuitu sekuentzialak	99
II. Kontagailuak	114
III. Desplazamendu-erregistroak	124

LEHENENGO ATALA

- I. Konmutaziozko aldagaiak,
eragiketak eta funtzioak.
- II. Minimizazioa.

I. KONMUTAZIOZKO ALDAGAIK, ERAGIKETAK ETA FUNTZIOAK

1. DEFINIZIOAK

1.1 Konmutaziozko aldagaiak

1.2 Eragiketa logikoak

1.3 Funtzio logikoak

2. ERAGIKETA LOGIKOAK

2.1 ETA eta EDO eragiketen propietateak

2.2 Bestelako eragiketak bi aldagairekin

2.3 N aldagairekin egindako eragiketak

3. FUNTZIO LOGIKOAK

3.1 Mintermak

3.2 Maxtermak

3.3 Funtzio baten definizioa minterm eta maxterm bidez

3.4 Funtzioaren arteko eragiketak

II. MINIMIZAZIOA

1. MINIMIZAZIOARI BURUZKO OHAR OROKORRAK

1.1 Planteiamendua

1.2 Kostu-funtzioa

1.3 Karnaugh-en taulak

1.4 Mintermen balore logiko mugagabeak

2. FORMA MINIMOA LORTZEKO BIDE SISTEMATIKOA

2.1 Metodoen beharra

2.2 Inplikatzaille lehenen metodoa. Beraien sorketa

2.3 Inplikatzaille lehenen aukerapena

I. KONMUTAZIOZKO ALDAGAIK, ERAGIKETAK ETA FUNTZIOAK

1. DEFINIZIOAK

1.1. Konmutaziozko Aldagaiak

Aldagai logikoak ere deitzen dira.

Konmutaziozko aldagai batek balore logiko bi bakarrik har ditzake. Eta gainera, balore bietako bat hartzen ez badu, bestea hartu du la esan ahal izango dugu beti.

Adibidez, etengailu baten egoera kontsideratuko dugu: zabalik ala itxita egon behar du.

Beste adibide bat: zirkuitu elektriko bateko puntu baten potentziala. (Zero izatea ala "ez-zero" izatea balore logikotzat har dezakegu).

Har ditzakeen bi balore logikoak hauek dira: Potentziala zero izatea eta potentziala zero ez izatea (edo "ez-zero" izatea).

Balore logiko bi horik adierazteko, ikur edo sinbolo bi ipiniko ditugu: 0 eta 1.

0 eta 1 ez dira zenbaki bezalakoak hartu behar, ikur bezala baizik. Ikurrak ipintzeko erizpidea alda egin dezakegu. Erizpide bat hartzen badugu logika positiboa erabiltzen dugula esango dugu. Aurkako erizpidea hartzen dugunean, logika negatiboa erabiltzen dugula esango dugu.

-Etengailuen kasuan erabiltzen den erizpidea, ondokoa izaten da.


0 - zabalik


1 - itxita

-Puntu baten potentzialerako: $\begin{cases} 0 \rightarrow V = 0 & \text{baldin bada} \\ 1 \rightarrow V \neq 0 & \text{baldin bada} \end{cases}$

1.2 Eragiketa logikoak

Aldagai bakarrekin EZ eragiketa definitzen dugu. Lerro horizontal batekin adierazten dugu.

$\bar{0} = 1$ ($\bar{0}$: "ez zero" irakurtzen da)

$\bar{1} = 0$ ($\bar{1}$: "ez bat" irakurtzen da)

A aldagaiaren balore logikoa	$\bar{A}$ aldagaiaren balore logikoa
0	1
1	0

($\bar{A}$: "ez A" irakurtzen da)

Bi aldagairekin, eragiketa erabilienak batuketa logikoa eta biderkaketa logikoa izaten dira

Batuketa logikoa "+" ikurrarekin adierazten da.

Biderkaketa logikoa "." ikurrarekin adierazten da.

Ondo definitzeko, kontsidera ditzagun aldagaien balore logikoekin dauden posibilitate guztiak.

BATUKETA LOGIKOA

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

BIDERKAKETA LOGIKOA

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

. Zergatik batuketa izen hori?

0 eta 1 direlakoak, ikurrak dira. Baina zenbaki bezala hartu izan bagenitu, eragiketa honek, eta zenbaki hauekin egindako batuketak lortzen dituen baloreak, berdinak izango ziratekeen.

Hau ez da guztiz zehatza ($1 + 1 = 1$ delakoa ez baita egia zenbakitan), baina izen honekin intuitiboki ikusiko dugu eragiketa hau.

"EDO" eragiketa ere deituko dugu, zeren 1 balorea hartzeko, A edo B aldagaietako batek behintzat 1 balorea hartu behar baitu.

Zergatik biderkaketa izen hori?

Lehen bezala, 0 eta 1 direlakoak zenbaki bezala hartu izan bagenu, azkeneko honek eta zenbaki hauekin egindako biderkaketak lortzen dituen emaitzak, berdinak izango ziratekeen.

"ETA" eragiketa ere deituko dugu, zeren 1 balorea hartzeko, A eta B aldagaiek 1 balorea hartu behar baitute biek batera.

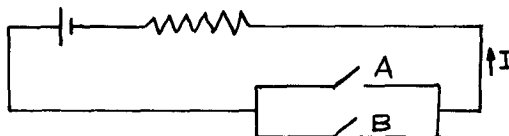
1.3 Funtzio logikoak

Orain arte aldagai logikoak eta hauen arteko eragiketa batzu de finitu ditugu.

Aldagai batzuren artean erlazioak egon daitezke. Hau da, aldagai batzuren balore logikoak jakinez, beste aldagai baten balore logikoa jakingo dugu. Azkeneko aldagai hau beste aldagaiei funtzioa dela esango dugu.

Gehienetan, funtzio hori eragiketa logikoen bidez defini daiteke.

Adibidea : Kontsidera dezagun ondoko zirkuitu elektrikoa.



Hiru aldagai logiko ikusten ditugu: A, B eta I.

$\left\{ \begin{array}{ll} A = 0 \Leftrightarrow A & \text{etengailua zabalik dago} \\ A = 1 \Leftrightarrow A & \text{etengailua itxita dago} \end{array} \right.$

$\begin{cases} B = 0 \Leftrightarrow B & \text{etengailua zabalik dago} \\ B = 1 \Leftrightarrow B & \text{etengailua itxita dago.} \end{cases}$

$\begin{cases} I = 0 \Leftrightarrow \text{Zirkuituko intentsitatea nulua da.} \\ I = 1 \Leftrightarrow \text{Intentsitatan ez da nulua.} \end{cases}$

A eta B-ren balore logikoak ezagutzen baditugu (zabalik edo itxita dauden), zirkuituko intentsitatea nulua den ala ez ja kingo dugu.

Intentsitatea hutsa izan ez dadin, A etengailua edo B etengai lua itxita egon behar dira.

Kontsidera ditzagun kasu guztiak:

A	B	I
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A zabalik, B zabalik; intentsitatea hutsa da.

A itxita; Intentsitatea ez da hutsa.

A itxita; Intentsitatea ez da hutsa.

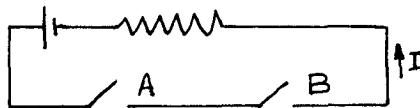
A eta B itxita; Intentsitatea ez da hutsa.

Funtzio hori "EDO" eragiketarekin defini dezakegu.

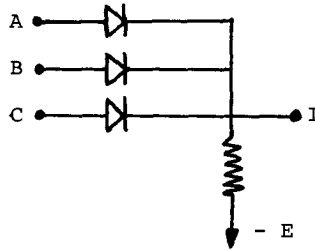
$$I = A + B$$

OHARRA.- Logika negatiboan A, B eta I-ren balore logikoak alderantziz hartuko lirateke, eta funtzioa $I = \underline{A.B}$ izango litzateke.

Problema. Froga ezazu $I = A.B$ dela ondoko zirkuituan.



Adibidea: Kontsidera dezagun ondoko zirkuitua:



A, B, C eta I direlakoak, aldagai logikoak dira:

$\begin{cases} A = 0 & \text{zirkuituko A puntuko potentziala } -E \text{ baldin bada} \\ A = 1 & \text{zirkuituko A puntuko potentziala } +E \text{ baldin bada} \end{cases}$

I, B eta C-rekin erizpide bera erabiliko dugu.

A, B edo C puntuetako potentzialen bat positiboa bada, dagokion diodoak eroan egingo du, eta I irtekinaren potentziala ere positiboa izango da, potentzial-jauskera guztia erresistentzian gertatzen da eta.

A, B. eta C puntuetako potentzialak negatiboak badira, diodo batek ere ez du eroango. Erresistentzian ez da jauskerarik egongo. I irtekinaren potentziala ere negatiboa izango da.

A	B	C	I
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A, B eta C puntuetako potentzialak negatiboak dira.

I irtekinare ere negatiboa da.

C puntuko potentziala positiboa I positiboa.

B " " " I positiboa.

B eta C puntuetako potentzialak positiboak I posit.

A puntuko potentziala positiboa I positiboa

A eta C puntuetako potentzialak positiboak I posit.

A eta B " " " I posit.

A, B eta C puntuetako potentzialak positiboak.

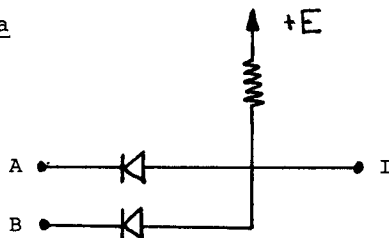
I positiboa.

EDO eragiketarekin defini dezakegu funtzio hori:

$$I = A + B + C$$

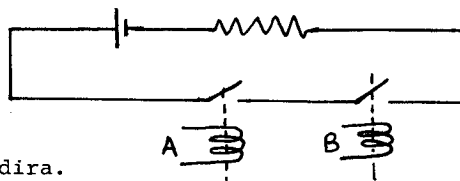
OHARRA.- Aurkako logikan $I = A.B.C$ izango da funtzioa.

Problema



Froga ezazu $I = A.B$ dela ondoko zirkuituan.

Adibidea: Ondoko zirkuituan A eta B errele bi dira



Aldagai logikoak A, B eta I dira.

$A = 0 \rightarrow$ A erreletik ez da intentsitatearik igarotzen; horregatik, goiko etengailua zabalik dago.

$A = 1 \rightarrow$ A erreletik intentsitatea pasatzen da; horregatik, goiko etengailua itxita dago.

B errelearekin erizpide berbera erabiliko dugu.

I aldagaiarentzako erizpidea, intentsitatearekin aurreko adibide-etan erabili duguna izango da.

Errele biek pizturik egon behar dute intentsitatea pasa dadin.

A	B	I
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\rightarrow$ Errele biak piztu gabe daude $\rightarrow I = 0$
 $\rightarrow$ A errelea piztu gabe dago $\rightarrow I = 0$
 $\rightarrow$ B errelea piztu gabe dago $\rightarrow I = 0$
 $\rightarrow$ Errele biak pizturik daude $\rightarrow I = 1$

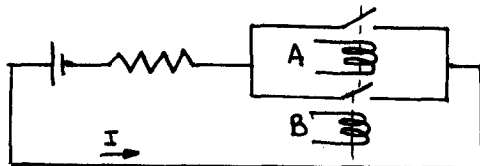
ETA eragiketarekin defini dezakegu funtzioa:

$$I = A \cdot B$$

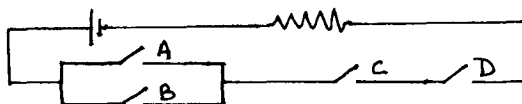
OHARRA: Aurkako logikan $I = A + B$ izango da funtzioa.

Problema

Froga ezazu $I = A + B$ dela alboko zirkuituan.



Adibidea



Zirkuitu honetan bost aldagai logiko daude: A, B, C, D eta I. A, B, C, edo D aldagaitako bat zero denean, berari dagokion etengailua zabalik dago; eta bat denean, itxita.

- $\left\{ \begin{array}{l} I = 0 \Leftrightarrow \text{korronterik ez dago.} \\ I = 1 \Leftrightarrow \text{ba dago korrontea.} \end{array} \right.$

I aldagai logikoa besteekin erlazioan dago. Bat balore logikoa har tzeko, C eta D itxita egon behar dira eta A edo B ere bai. Erlazio hori funtzio baten bidez adierazten dugu, eta funtzio hori adierazte ko ETA eta EDO eragiketak erabiliko ditugu.

$$I = (A + B) \cdot C \cdot D$$

Adibidea: Semaforo baten argiak eta autoen pasaketa.

Aldagai logikoak:

Argiak: Gorria (G), Berdea (B) eta Laranja (L)

- $\left\{ \begin{array}{l} G = 1 \Leftrightarrow \text{argi gorria piztuta dago.} \\ G = 0 \Leftrightarrow \text{argi gorria amatuta dago.} \end{array} \right.$

B eta L argien aldagaiekin gauza bera egiten dugu.

- Pasaketa: $\left\{ \begin{array}{l} P = 1 \Leftrightarrow \text{autoak pasatu egiten dira.} \\ P = 0 \Leftrightarrow \text{autoak geldirik daude.} \end{array} \right.$

Autoak pasatzeko Berde edo Laranja argiek piztuta egon behar du te. Bata edo bestea edo biak batera.

$$I = B + L.$$

Beste modutara: Autoak pasatzeko, gorria amatuta egon behar da.

$$I = \bar{G}.$$

Modu biak gauza berbera dira, $B + L = \bar{G}$ egia da eta. Berdea edo laranja pizturik daudenean gorria amatuta dago eta.

2. ERAGIKETA LOGIKOAK

2.1 ETA eta EDO eragiketen propietateak

ETA, EDO eta EZ eragiketak definituak ditugu. Definizio horrekin propietate edo teorema hauk froga daitezke:

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| 1. $x + 0 = x$ | 1'. $x \cdot 1 = 1$ |
| 2. $x + 1 = 1$ | 2'. $x \cdot 0 = 0$ |
| 3. $x + \bar{x} = 1$ | 3'. $x \cdot \bar{x} = 0$ |

De Morgan-en teoremak:

- | | |
|---|--|
| 4. $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ | 4'. $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ |
|---|--|

Iden-potentziazko propietateak:

- | | |
|----------------|---------------------|
| 5. $x + x = x$ | 5'. $x \cdot x = x$ |
|----------------|---------------------|

Inboluzioa:

6. $\overline{(\bar{x})} = x$

Elkartze-propietateak:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 7. $x + (y + z) = (x + y) + z$ | 7'. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ |
|--------------------------------|---|

Trukatze-propietatea:

- | | |
|--------------------|-----------------------------|
| 8. $x + y = y + x$ | 8'. $x \cdot y = y \cdot x$ |
|--------------------|-----------------------------|

Absortziozko legeak:

- | | |
|-----------------|---------------------------|
| 9. $x + xy = x$ | 9'. $x \cdot (x + y) = x$ |
|-----------------|---------------------------|

Banatze-propietateak:

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 10. $xy + \bar{x}y = y$ | 10'. $(x + y)(\bar{x} + y) = y$ |
|-------------------------|---------------------------------|

Propietate banakorra:

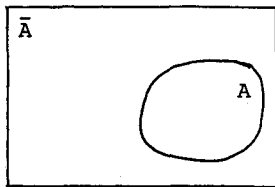
11. $x(y + z) = xy + xz$

Kontzentzuzko propietatea:

12. $xg + \bar{x}h = xg + \bar{x}h + gh$

Venn-en diagrametan aldagai logikoak multzo baten barnekotasunez definitzen ditugu. Honela:

Multzo unibertsala



Puntu edo elementu bat hartzen da.

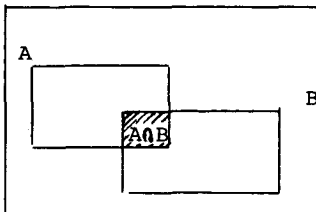
A multzoa kontsideratzen dugu.

Aldagai logikoa A-ren barnekotasuna izango da. B_A sinboloaz adieraziko du gu aldagaia.

$B_A = 1$ puntu hori A multzokoa da.

$B_A = 0$ puntu hori ez da A multzokoa.

Ondo ulertzen denean, B_A aldagai horri A ere deitzen diogu. Horrela egitea laburrago izango zaigu.



Kontsidera dezagun $A \cap B$

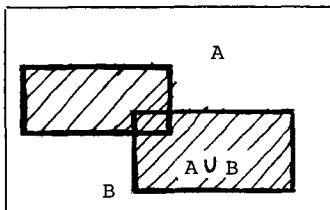
(A ebaki B) multzoa. Beraren barneko tasuna, aldagai logikotzat hartuko dugu.

$$B_{A \cap B} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} B_A = 1 \\ B_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B_A \cdot B_B = 1$$

Orduan Venn-en diagrama batetan A.B aldagaia ($B_A \cdot B_B$ aldagaiaren berdina da) $A \cap B$ multzoaren barnekotasuna da.

Orain kontsidera dezagun $A \cup B$ (A bil B) multzoa.

Beraren barnekotasuna aldagai logikotzat hartuko dugu.



$$B_{A \cup B} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} B_A = 1 \\ B_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B_A + B_B = 1$$

Propietate edo teorema hauk frogatzeko, frogabide bi dauzkagu: egitaula bidezkoa eta geometrikoa.

1. Egitaularen bidez

Egitaula batetan aldagaien balore logikoen arteko konbinazio guztiak hartzen dira. Funtzio bi baliokideak izateko, beraien baloreek berberak izan behar dute konbinazio guztietarako.

Orduan, propietateak frogatzeko, propietateetako atal bakoitza bere aldetik kalkulatu dugu. Konbinazio berdinetan berdinarak badira, atal biak berdinarak izango dira.

Adibidea: Froga dezagun $(x+yz) = (x+y)(x+z)$

x	y	x	yz	x + yz	x + y	x + z	(x+y) · (x+z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Atal biek kasu guztietan emaitza berbera ematen dute; beraz, baliokideak dira.

Adibidea: Froga dezagun $x + x = x$

x	x + x	
0	0	$0 + 0 = 0$
1	1	$1 + 1 = 1$

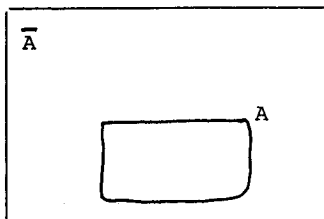
Ikusten denez, baliokideak dira.

2. Frogabide geometrikoa

Frogabide honetan Venn-en diagramak erabiltzen dira.

Orduan Venn-en diagrama batetan $A + B$ aldagaia ($B_A + B_B$ aldagaiaren berdina da) $A \cup B$ multzoaren barnekotasuna da.

Kontsidera dezagun $\bar{A}$ (A-ren multzo osagarria).



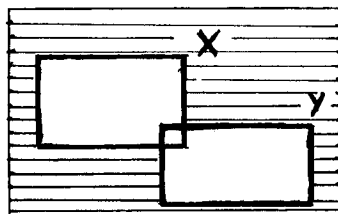
$$\left. \begin{array}{l} B_A = 1 \Leftrightarrow B_{\bar{A}} = 0 \\ B_A = 0 \Leftrightarrow B_{\bar{A}} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow B_A = \overline{B_{\bar{A}}}$$

Orduan Venn-en diagrama batetan $\bar{A}$ aldagai logikoa A-ren multzo osagarriaren barnekotasuna da.

Hau ikusi eta gero, Venn-en diagrama, lehen aipatutako propietateak frogatzeko erabil dezakegu. Aldagaiak eta eragiketak Venn-en diagrametaz adierazten bait dakigu.

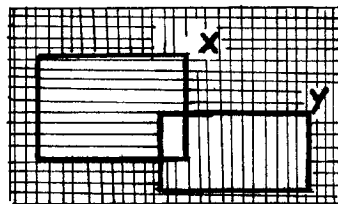
Adibidea: Froga ditzagun De Morgan-en teorema bide honetatik

Hau da, froga dezagun $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ dela, edo berdindena $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x + y$



Alboko irudian:

$\overline{x \cup y}$ zuriz dago
 $\overline{x \cup y}$ multzo marratua da.



Alboko irudian $\bar{x}$ multzoa marra bertikalez dago, eta $\bar{y}$ multzoa marra horizontalez $\bar{x} \cap \bar{y}$ delakoak bi motetako marrak dauzka.

Ikusten denez, irudi bietan multzo berbera da. Orduan aldagaiak berdinak dira. Eta terorema frogatua da.

OHARRA: Ezkerreko teoremei De Morgan-en teorema aplikatzen badiegu, eskuineko teoremak lortzen ditugu.

Teoremak binaka eman dira, antzekoak dira eta. Ezkerrekoak lortzeko, eskuinekoetan aldaketa hauk egin behar dira: zeroaren ordezkari bat; bataren ordezkari zeroa; biderkaketaren ordezkari batuketa logikoa; eta batuketaren ordezkari biderkaketa logikoa.

2.2 Bestelako eragiketak bi aldagairekin

Bi aldagairen artean posible diren eragiketa logiko guztiak ezagutu nahi ditugu. Horretarako posibilitate guztiak ipiniko ditugu taula batetan.

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Hamasei eragiketa horien erabilgarritasuna banan banan azter dezagun.

f_0)

A	B	f_0
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

f_0 eragiketak beti ematen du zero balore logikoa, A eta B aldagaiei edozein balore tarako.

f_0 -ren balorea esagutzen dugunean, A eta B aldagaiei baloreei buruz ez dakigu ezer. Horregatik, eragiketa hau ez da erabilgarria.

Berdin gertatzen da f_{15} eragiketarekin.

A	B	f_{15}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

f_{15} -ren baloren 1 izango da beti.

f_{15} eragiketa ez da erabilgarria.

f_1)

A	B	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f_1 eragiketa, lehen definitu dugun biderkaketa logikoa da.

f_2)

A	B	f_2
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

f_2 eragiketaren eraitza 1 izateko, A aldagaiak 1 balorea eta B aldagaiak 0 balorea hartu behar dute. Honek ez du interes handirik.

f_2 delakoak ez du zentzurik eragiketa bezala.

f_3)

A	B	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

f_3 eragiketak A aldagaiaren balore berberak hartzen ditu.

Emaitza hori lortzeko, A aldagaia bakarrik ipini ko dugu eta hola sinpleago izango da.

f_4)

A	B	f_4
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

f_2 -ren antzekoa da.

f_4 eragiketak ez du zentzurik.

f_5)

A	B	f_5
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

f_3 -ren antzekoa da. B aldagaiarekin batera doa. Sinpletasunagatik, ez dugu erabiliko.

f_6)

A	B	f_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

f_6 eragiketaren emaitza 1 izaten denean, A eta B aldagaien baloreak desberdinak dira. Hau interesagarria da.

Hala ikurtuko dugu.

$A \oplus B$ edo $A \nabla B$.

ALA eragiketa deituko dugu, zeren 1 balore logikoa hartzeko A ala B aldagaietako batek bakarrik 1 balore logikoa hartu behar baitu.

f_7)

A	B	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lehen definitu dugun batuketa logiko berbera da hau.

$f_8)$

A	B	f_8	A+B
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Ikusten ahal denez, $f_8 = \overline{A+B}$ da.

NOR eragiketa deituko dugu. (ingelesetik NO-OR, hau da ez-edo). Hala ikurtuko dugu $A \downarrow B$.

Gero ikusiko dugunez, NOR eta NAND eragiketen bidez edozein funtzio lor daiteke.

Transistore batekin nahiko errazki lortzen dira eragiketa hauk. Horregatik, oso garrantzizkoak dira.

$f_9)$

A	B	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f_9 eragiketaren emaitza 1 izateko, A eta B aldagaien baloreek berdinak izan behar dute.

IDENTITATE eragiketa deituko dugu eta $A \oplus B$ sinboloaz ikurtuko dugu.

$f_{10})$

A	B	f_{10}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f_{10} = \overline{B}$

Bi aldagairen arteko eragiketa bezala hartzeak ez du zentzurik.

$f_{11})$

A	B	f_{11}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

f_{11} delakoa 1 denean, ikurrak zenbaki bezala hartuko bagenitu, $A \geq B$ dela esan ahalko genuke.

$(A \geq B) = \overline{A}B + A$ adieraz daiteke.

Ez da asko erabiltzen eragiketa hau.

f_{12})

A	B	f_{12}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f_{12} = \bar{A}$$

Bi aldagairen arteko eragiketa bezala hartzeak ez du zentzurik.

f_{13})

A	B	f_{13}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

f_{13} eragiketa f_{11} -ren antzekoa da, 1 balorea hartzen duenean. Zenbakitan $A \leq B$ izango litzateke.

Ez da asko erabiltzen eragiketa hau.

f_{14})

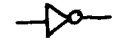
A	B	f_{14}	A.B
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Ikusi ahal denez, $f_{14} = \overline{A.B}$ da. NAND eragiketa deituko dugu. (Ingelesetik NO-AND, hau da ez ETA).

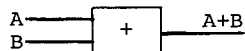
Hola ikurtuko dugu $A \uparrow B$

NOR eta NAND eragiketekin edozein funtzio lor dezakegu.

Eta gainera transistore batekin nahiko errazki lortzen dira eragiketa horik, gauza bi hauengatik garrantzizkoak dira.

ERAGIKETA	IKURRA	Batuketa eta biderkaketa- ren bidezko adierazpena	IKUR (1) GRAFIKOA	INGELESEZKO IZENA	IRAKURTZEKO MODUA
Batuketa logikoa EDO	$A + B$ (2)	$A+B$		Logic sume OR	A gehi B (4) A edo B
Biderkaketa logikoa ETA	$A \cdot B$ (3) AB	$A \cdot B$		Logic product AND	A bider B (4) A eta B AB
EZ	$\bar{A}$	$\bar{A}$		NO	EZ A
NAND	$A \uparrow B$	$\overline{A \cdot B}$		NAND	A nand B
NOR	$A \downarrow B$	$\overline{A+B}$		NOR	A nor B
ALA	$A \oplus B$ $A \neq B$	$A\bar{B} + \bar{A}B$		EXOR	A ala B
IDENTITATEA	$A \ominus B$	$AB + \bar{A}\bar{B}$			A identitate B

(1) Simpleago eta erabilgarriagoa da, eragiketa guztietarako lauki batetan bere ikurra ipintzea.
Adibidez:



(2) Beste ikur batzu ere erabiltzen dira: $A \vee B$

(3) Beste ikur batzu ere erabiltzen dira: $A \wedge B$

(4) Normalean "A edo B" eta "A eta B" irakurri beharko ditugu, baina nahasteak izango genituzke hizkeran. Beste irakurterak: "A batuketa logiko B", "A biderkaketa logiko B" luzeegiak izan daitezke; horregatik logikan gaudela dakigunean, "A gehi B" eta "A bider B" irakurtzen dugu.

2.3 N Aldagairekin egindako eragiketak

Bi aldagaitarako definitu ditugun eragiketak, n aldagairen kasurako zabalduko ditugu.

BIDERKAKETA LOGIKOA

$A.B.C....$ F eragiketak 1 balore logikoa hartzeko, aldagai guztiek 1 izan behar dute. Bestela, zero izango da. Aldagai bakar batek 0 balore logikoa hartzen badu, emaitza zero izango da.

BATUKETA LOGIKOA

$A+B+C+....+F$ eragiketak 0 balore logikoa hartzeko, aldagai guztiak zero izan behar dute. Bestela, emaitza 1 izango da. Aldagai bakar batek 1 balore logikoa hartzen badu, batuketaren emaitza 1 izango da.

NAND

$A \uparrow B \uparrow C \uparrow \uparrow F$ edo $\uparrow(A, B, C, ..., F)$ eragiketaren emaitza, aldagai guztien biderkaduraren ezezkoa da. Hau da:

$$\uparrow(A, B, C, ..., F) = \overline{A.B.C. F}$$

Eragiketa honek ez du propietate trukatorra, eta elkartzekoa ere ez.

NOR

$A \downarrow B \downarrow C \downarrow \downarrow F$ edo $\downarrow(A, B, C, ..., F)$ eragiketaren emaitza, aldagai guztien batuketaren ezezkoa da. Hau da:

$$\downarrow(A, B, C, ..., F) = \overline{A+B+C+ ... +F}$$

Eragiketa honek ere ez du trukatortasunaren propietatea, eta ez elkartzekotasunaren propietatea ere.

Ariketak: Froga bedi De Morgan-en teorema egिताularen bidez.

$$\overline{x + y} = \overline{x} . \overline{y} \quad \text{edo} \quad \overline{x . y} = \overline{x} + \overline{y}$$

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x+y$	$\overline{x+y}$	$\bar{x}.\bar{y}$	$x.y$	$\overline{x.y}$	$\overline{x+y}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Ikusten denez $\overline{x+y} = \bar{x}.\bar{y}$ eta $\overline{x.y} = \bar{x}+\bar{y}$

Ariketa: Froga bedi 10' teorema, 10 teorema hartuz eta De Morgan-en teorema aplikatuz.

$$\left. \begin{array}{l} xy + \bar{x}y = y \\ \overline{x.y} = \bar{x}+\bar{y} \end{array} \right\} \Rightarrow (x+y)(\bar{x}+y) = y$$

Lehenengo gaia honela geratzen da, De Morgan-en teorema aplikatuz:

$$\begin{aligned} xy + \bar{x}y &= \overline{\overline{xy}} + \overline{\overline{\bar{x}y}} = (\overline{\overline{xy}} . \overline{\overline{\bar{x}y}}) = \overline{(\overline{\overline{xy}})(\overline{\overline{\bar{x}y}})} = \\ &= \overline{(\bar{x}+\bar{y})(x+y)} \end{aligned}$$

10 teorema erabiliz: $xy+\bar{x}y = y$

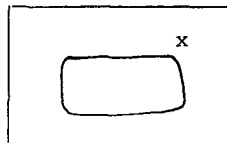
$$\text{Orduan } \overline{(\bar{x}+\bar{y})(x+y)} = y \Rightarrow (\bar{x}+\bar{y})(x+y) = \bar{y}$$

$\bar{x} = z$ eta $\bar{y} = v$ eginez

$$(z+v)(\bar{z}+v) = v$$

Eta hau da 10' teorema

Ariketa: Froga bedi $x+0 = x$ dela, Venn-en diagrama erabiliz.

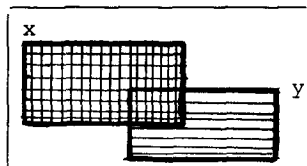


Zero multxoa multzo hutsa da.

Eta $x \cup \emptyset = x$ (multzo teoriaren arauera).

Orduan $x + 0 = x$

Ariketa: Froga bedi $x(x+y) = x$ dela, Venn-en diagramak erabiliz



$x \cap (x \cup y) = x$ (Multzo teoriaren arauera)

Honela ere egin ahal dugu:

x marra bertikalez adierazirik

$x \cup y$ marra horizontalez.

$x \cap (x \cup y)$ delakoak era bietako marrek izango ditu.

Era bietako marrek dituen multzoa, x da.

Ariketa: Ondoko adierazpenak batuketa eta biderkaketa logikoen funtzioan ipin, eta gero sinplifika itzazue.

a) $(A \uparrow B) \uparrow (B \uparrow \bar{A})$

b) $(A \downarrow \bar{B}) \downarrow (\bar{A} \downarrow B)$

c) $(A \oplus B) (A \leq B)$

d) $[(A \ominus B) \uparrow C] \downarrow (A \leq B)$

a) $(A \uparrow B) \uparrow (B \uparrow \bar{A}) = (\bar{A}\bar{B}) \uparrow (\bar{B}\bar{A}) = \overline{AB} \cdot \overline{BA} = \overline{AB} + \overline{BA} = AB + B\bar{A} = B(A + \bar{A}) = B \cdot 1 = B$

b) $(A \downarrow \bar{B}) \downarrow (\bar{A} \downarrow B) = \overline{(A + \bar{B})} \downarrow \overline{(\bar{A} + B)} = \overline{(A + \bar{B})} + \overline{(\bar{A} + B)} = \overline{A + \bar{B}} \cdot \overline{\bar{A} + B} = (\bar{A} + B)(A + \bar{B}) = A\bar{A} + AB + \bar{B}\bar{A} + \bar{B}B = 0 + AB + \bar{B}\bar{A} + 0 = AB + \bar{B}\bar{A} = A \oplus B$

c) $(A \oplus B) (A \leq B) = (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B) (B + \bar{A}\bar{B}) = \bar{A}\bar{B}B + \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{B} + \bar{A}BB + \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{B} = A\bar{B} \cdot 0 + 0 \cdot \bar{B} + \bar{A}B + \bar{A} \cdot 0 = \bar{A}B$

d) $[(A \ominus B) \uparrow C] \downarrow (A \leq B)$

$(A \ominus B) \uparrow C = (AB + \bar{A}\bar{B}) \uparrow C = \overline{(AB + \bar{A}\bar{B})} \cdot C = \overline{ABC + \bar{A}\bar{B}C}$

$[(A \ominus B) \uparrow C] \downarrow (A \leq B) = \overline{(ABC + \bar{A}\bar{B}C)} \downarrow (B + \bar{A}\bar{B}) = \overline{(ABC + \bar{A}\bar{B}C)} + \overline{(B + \bar{A}\bar{B})} = \overline{(ABC + \bar{A}\bar{B}C)} \cdot (\bar{B} + \bar{A}\bar{B}) = (ABC + \bar{A}\bar{B}C) \cdot \bar{B} \cdot (A + B) = (ABC\bar{B} + \bar{A}\bar{B}C\bar{B})(A + B) = (0 + \bar{A}\bar{B}C)(A + B) = \bar{A}\bar{B}CA + \bar{A}\bar{B}CB = 0 + 0 = 0$

Ariketa: Froga bedi kontzentzuaren teorema

$$xg + \bar{x}h = xg + \bar{x}h + gh$$

Teorema hau asko erabiliko da, adierazpenak sinplifikatze ko.

Hori frogatzeko, 3. propietatea erabiliko dugu, hau da $x + \bar{x} = 1$

$$xg + \bar{x}h + gh \quad \begin{array}{c} \text{3.} \\ \text{propietatea} \end{array} \quad xg + \bar{x}h + (x+\bar{x})gh \quad \begin{array}{c} \text{banakorra} \\ \text{banakorra} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{banakorra} \end{array} xg + \bar{x}h + xgh + \bar{x}gh \quad \begin{array}{c} \text{trukakorra} \\ \text{trukakorra} \end{array} \quad xg + xgh + \bar{x}h + \bar{x}gh = \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{banakorra} \end{array} x(g+gh) + \bar{x}(h+gh) \quad \begin{array}{c} \text{Absorziozko} \\ \text{legeak} \end{array} \quad xg + \bar{x}h$$

Frogatu nahi genuen bezala

Ariketa: Lau lagunek zinera joan nahi dute. Baina beren arteko erlazioak ez dira onak. Zinera joateko, baldintza hauk dituzte:

- a. A eta D haserre daude beren artean. Bietako bat joaten bada, bestea ez da joango. Ez doaz elkarrekin, baina bietako bat joango da.
 - b. A edo D joaten badira, C ez da joango. Eta alderantziz, C joaten bada, D eta A ez dira joango.
 - c. A-k eta B-k gauza berbera egingo dute, biok joan edo bestela bietako inor ez.
 - d. B joan dadin, C-k joan behar du
- Nortzuk joango dira zinera?.

Lagun bakoitzaren jokaera aldagai logikotzat hartzen dugu.

$$\begin{cases} A = 0 \Leftrightarrow A \text{ laguna ez doa zinera.} \\ A = 1 \Leftrightarrow A \text{ laguna zinera doa} \end{cases}$$

Eta besteekin berdin.

Baldintza horik logikoki azalduz:

- a. $A \neq D = 1$
- b. $C \neq (A+D) = 1$
- c. $A \oplus B = 1$
- d. $(B \leq C) = 1$

Denak batera betetzeko, beren biderkadura logikoaren balorea 1 izango da.

$$(A \neq D) \cdot [C \neq (A+D)] \cdot (A \oplus B) \cdot (B \leq C) = 1$$

Sinplifikatu egiten dugu biderkadura hori:

$$(A\bar{D} + \bar{A}D) \cdot [\bar{C}(A+D) + C(\bar{A} + \bar{D})] \cdot (AB + \bar{A}\bar{B}) \cdot (C + \bar{B}\bar{C}) = 1$$

$$(A\bar{D} + \bar{A}D) (\bar{C}A + \bar{C}D + C\bar{A} + C\bar{D}) (AB + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{B}\bar{C}) = 1$$

$$(A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}) (ABC + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{B}\bar{C}) = 1$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D = 1$$

Hau da: A,B eta C ez dira joango, D bakarrik joango da.

Ariketa: Froga bitez ondoko desberdintzak:

- a. $(A \uparrow B) \uparrow C \neq A \uparrow (B \uparrow C)$
- b. $(A \downarrow B) \downarrow C \neq A \downarrow (B \downarrow C)$

a. Alde batetik $(A \uparrow B) \uparrow C = (\bar{A}\bar{B}) \uparrow C = \overline{(\bar{A}\bar{B})C} = \overline{\bar{A}\bar{B}} + \bar{C} = AB + \bar{C}$
 Beste aldetik $A \uparrow (B \uparrow C) = A \uparrow (\bar{B}\bar{C}) = \overline{A(\bar{B}\bar{C})} = \overline{\bar{A} + \bar{B}\bar{C}} = \bar{A} + BC$
 Beraz, ez dira berdinak.

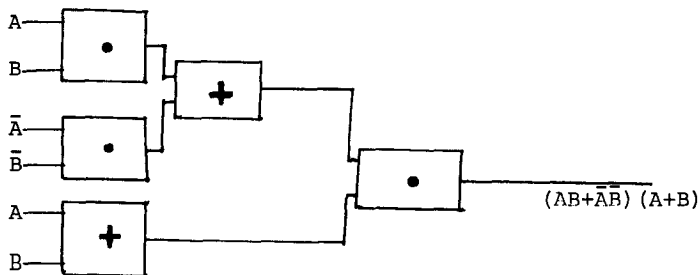
b. Alde batetik $(A \downarrow B) \downarrow C = \overline{(A+B)} \downarrow C = \overline{(A+B)} + C = \overline{(A+B)} \cdot \bar{C} = \overline{(A+B)\bar{C}}$
 Beste aldetik $A \downarrow (B \downarrow C) = A \downarrow (\bar{B} + \bar{C}) = \overline{A(\bar{B} + \bar{C})} = \overline{\bar{A} + \bar{B}\bar{C}} = \bar{A} + BC$
 Beraz, ez dira berdinak.

Ariketa: Sinplifika bitez ondoko adierazpenak, eta irudika bitez etengailuen zirkuituen bidez adierazpen sinplifikatuak eta sinplifikatu gabekoak.

- a. $(AB + \bar{A}\bar{B}) \cdot (A+B)$
- b. $ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$

a. $(AB + \bar{A}\bar{B})(A+B) = AB.A + AB.B + \bar{A}\bar{B}A + \bar{A}\bar{B}B = AB + AB + 0 + 0 = AB + AB = AB$

Sinplifikatu gabekoa:

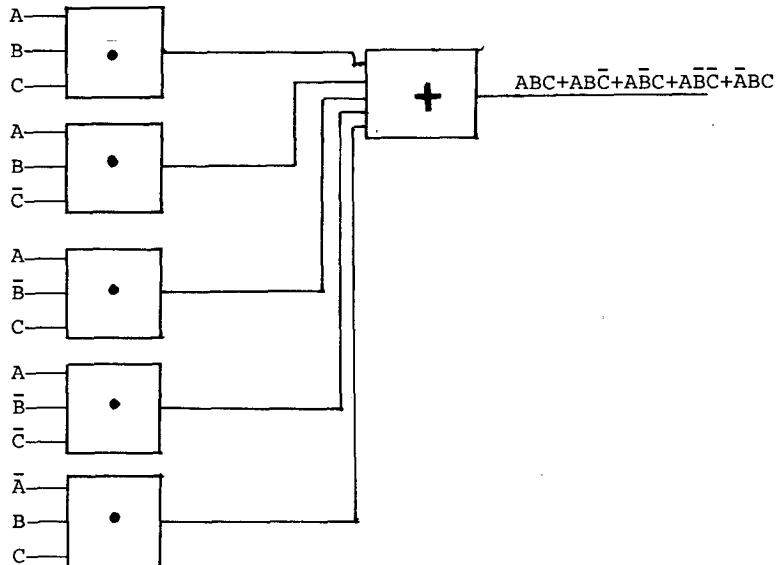


Sinplifikatua

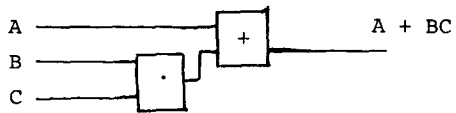


b. $ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC = AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) + ABC + \bar{A}BC = AB + A\bar{B} + BC(A + \bar{A}) = A(B + \bar{B}) + BC = A + BC$

Sinplifikatu gabekoa:



Simplifikatua



3. FUNTZIO LOGIKOAK

3.1 Mintermak

Azter dezagun egitaula hau:

A B C	A B C	A B $\bar{C}$	A $\bar{B}$ C	A $\bar{B}$ $\bar{C}$	$\bar{A}$ B C	$\bar{A}$ B $\bar{C}$	$\bar{A}$ $\bar{B}$ C	$\bar{A}$ $\bar{B}$ $\bar{C}$	f'	f
0 0 0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	f_0
0 0 1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	f_1
0 1 0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	f_2
0 1 1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	f_3
1 0 0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	f_4
1 0 1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	f_5
1 1 0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	f_6
1 1 1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	f_7

$\bar{A}BC, A\bar{B}C, \dots, \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ funtzioei MINTERM deituko diegu.

f' funtzioa edozein funtzio da. Dena dela, kasu honetan, adibide modura, zera dugu.

$$f' = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

Generalean, f funtzio generala daukagu; $f_0, f_1, \dots, f_7$ direlakoek zero edo bat balio dezakete.

f funtzioa mintermen batuketa bezala ipin daiteke.

Honela:

$$f = f_0 \cdot \bar{A}\bar{B}\bar{C} + f_1 \bar{A}\bar{B}C + f_2 \bar{A}B\bar{C} + f_3 \bar{A}BC + f_4 A\bar{B}\bar{C} + f_5 A\bar{B}C + f_6 AB\bar{C} + f_7 ABC$$

$f_0 = 1$ baldin bada, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ mintermak parte hartzen du funtzioan

$f_0 = 0$ baldin bada, minterm hori ez dago funtzioan.

ABC minterma 111 dela ikusiz, eta bitar sisteman 111 delakoa 7 dela kontutan hartuz, m_7 ikurrarekin adieraziko dugu.

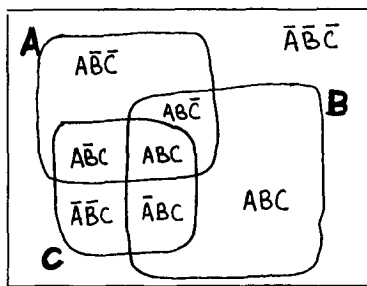
Arrazoi berberagatik, $AB\bar{C}$ minterma (110) m_6 ikurraz adieraziko dugu.

Era berean:	$\bar{A}\bar{B}\bar{C} = m_0$	$A\bar{B}\bar{C} = m_4$
	$\bar{A}B\bar{C} = m_1$	$AB\bar{C} = m_5$
	$\bar{A}BC = m_2$	$ABC = m_6$
	$A\bar{B}C = m_3$	$ABC = m_7$

f funtzio generala mintermen batukari bat da:

$$f = \sum_{i=0}^7 f_i m_i$$

Zergatik minterm izena?



Ingelesatik dator izena:

MIN_imal TERM (gai txikiena)

Ven-en diagraman multzo txikienak dira hain zuzen ere, irudian argi ikusten den bezala.

Orain arte, mintermak hiru aldagaitarako erabili ditugu, n aldagai-
ren kasurako antzekoak izango dira.

Hiru algairekin 8 minterm zeuden; n-rekin 2^n izango dira.

n aldagaitako f funtzio generala era mintermen batukaria izango da:

$$f = \sum_{i=0}^{2^n - 1} f_i m_i$$

3.2 Maxtermak

Azter ezazu ondoko egitaula:

A B C	A+B+C	A+B+C	A+B+C	A+B+C	A+B+C	A+B+C	A+B+C	A+B+C	f'	f
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	F_7
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	F_6
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	F_5
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	F_4
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	F_3
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	F_2
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	F_1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	F_0

$A+B+C$, $A+B+\bar{C}$, ..., $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ funtzioei MAXTERM deituko diegu.

f' funtzioa honela defini dezakegu:

$$f' = (A+B+\bar{C}) (A+\bar{B}+\bar{C}) (\bar{A}+B+\bar{C})$$

Egitaulan dauden $F_0, F_1, \dots, F_7$ direlakoak zero edo bat izan daiteke. Horregatik, f funtzioa funtzio general bat da.

f funtzio general hau maxtermen biderkaketa bezala ipini daiteke.

$$f = F_0 + (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}) \cdot F_1 + (\bar{A}+\bar{B}+C) \cdot F_2 + (\bar{A}+B+\bar{C}) \cdot F_3 + (\bar{A}+B+C) \cdot F_4 + (A+\bar{B}+\bar{C}) \cdot F_5 + (A+\bar{B}+C) \cdot F_6 + (A+B+\bar{C}) \cdot F_7 + (A+B+C)$$

$F_2 = 0$ baldin bada, berarekin doan $(\bar{A}+B+\bar{C})$ maxtermak parte hartuko du funtzioan.

$F_2 = 1$ baldin bada, maxterm hori ez dago funtzioan.

Beste koefizienteekin gauza berbera gertatzen da.

Mintermekin egin dugun bezala eginez:

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = M_0$$

$$A + \bar{B} + \bar{C} = M_4$$

$$\bar{A} + \bar{B} + C = M_1$$

$$A + \bar{B} + C = M_5$$

$$\bar{A} + B + \bar{C} = M_2$$

$$A + B + \bar{C} = M_6$$

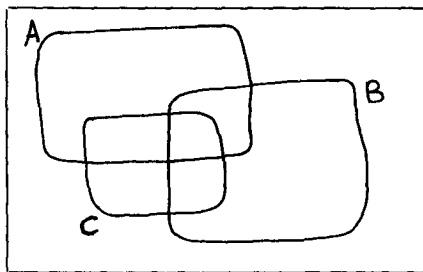
$$\bar{A} + B + C = M_3$$

$$A + B + C = M_7$$

f funtzio generala maxtermen biderkari bat da.

$$f = \prod_{i=0}^7 (F_i + M_i)$$

Zergatik maxterm izena?



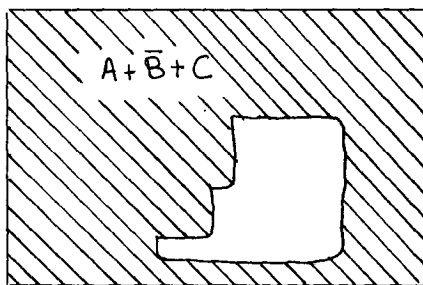
Multzo unibertsala.

Ingelesetik dator izena:

MAX imal TERM

Euskaraz, gai handiena

Hain zuzen ere, Venn-en diagraman multzo handienak baitira. (Multzo unibertsala kendurik).



kontura zaitez zera betetzen dela:

$$(A + \bar{B} + C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

Hots:

$$\bar{M}_5 = m_2 = m_{(2^3-1)-5}$$

n aldagaiekin 2^n maxtermak izango dira, eta funtzio generala:

$$f = \prod_{i=0}^{2^n-1} (F_i + M_i)$$

3.3 Funtzio baten definizioa Minterm eta Maxterm adierazpidez

Bai mintermen bidez, bai maxtermen bidez, n aldakaritako funtzio generala lortu dugu.

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i m_i = \prod_{i=0}^{2^n-1} (F_i + M_i) \quad (F_i + M_i)$$

Funtzio konkretu bat definitzeko, f_i guztiak edo F_i guztiak ezagutzea nahiko zaigu.

Adibidea: Mintermekin. Demagun, koefiziente hauk ditugula.

$$\begin{array}{ll} f_0 = 0 & f_4 = 1 \\ f_1 = 0 & f_5 = 0 \\ f_2 = 0 & f_6 = 0 \\ f_3 = 1 & f_7 = 0 \end{array}$$

$$f = 0. \bar{A}\bar{B}\bar{C} + 0. \bar{A}\bar{B}C + 0. \bar{A}B\bar{C} + 1. \bar{A}BC + 1. A\bar{B}\bar{C} + 0. A\bar{B}C + 0. AB\bar{C} + 0. ABC = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}. \text{ Beraz, } f \text{ definitua da.}$$

f_i guztiak laburrago definitzeko, bektorialki egiten da:

$$f = (f_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 f_7)$$

$$\text{gure adibidean } f = (0011000)_m$$

Mintermak direla jakiteko, ipintzen da m txiki hori.

Edo oraindik laburrago: $f = (34)_m$. Hau da; funtzioan agertzen diren mintermen zenbakiak ipintzen dira.

Adibidea: Maxtermekin. Demagun ondoko koefizienteak ditugula:

$$\begin{array}{ll} F_0 = 0 & F_4 = 1 \\ F_1 = 1 & F_5 = 1 \\ F_2 = 0 & F_6 = 1 \\ F_3 = 0 & F_7 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f &= (0+A+B+C) (1+A+B+C) (0+A+B+C) (0+A+B+C) \cdot (1+A+B+C) (1+A+B+C) (1+A+B+C) \cdot \\ &\quad \cdot (0+A+B+C) = (A+B+C) \cdot 1 \cdot (A+B+C) (A+B+C) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (A+B+C) = \\ &= (A+B+C) (A+B+C) (A+B+C) (A+B+C) \end{aligned}$$

f definitua da.

Laburrago egingo dugu, bektorialki definituz:

$$f = (F_0 \ F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7) \ M$$

$$\text{gure adibidean } f = (01001110) \mathbf{M}$$

Maxtermak direla jakiteko ipintzen da M handi hori.

Edo oraindik laburrago, $f = (0237) \mathbf{M}$; hau da, funtzioan agertzen diren maxtermen zenbakiak ipintzen dira.

Aurreko puntuak ikusi ondoren, problema bi agertzen zaizkigu:

Batetik, f funtzio bat mintermen adierazpidez ezagututa, maxtermen adierazpidez ipintzea; eta bestetik, alderantzizko problema.

f funtzio generala, mintermen eta maxtermen adierazpidez, ondokoa da:

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i f_i = \prod_{j=0}^{2^n-1} (F_j + M_j)$$

De Morgan-en teoremaren bidez, minterm eta maxtermen arteko erlazioak aurkituko ditugu:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= A + B + C = \overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{M_7} \\ m_1 &= A + B + C = \overline{A \cdot B \cdot \overline{C}} = \overline{M_6} \\ m_2 &= A + B + C = \overline{A \cdot \overline{B} \cdot C} = \overline{M_5} \\ \dots & \\ \dots & \\ \dots & \\ m_7 &= A + B + C = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{M_0} \end{aligned} \right\} \text{hots, } m_i = \overline{M_{7-i}} = \overline{M_{2^n-1-i}}$$

f-ren mintermen adierazpideari, De Morgan-en teorema aplikatuko diogu:

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i f_i = \left[\prod_{i=0}^{2^n-1} (\overline{m_i} + \overline{f_i}) \right]$$

Ikusi dugunez, $m_i = \overline{M_{2^n-1-i}}$

$$f = \left[\prod_{i=0}^{2^n-1} (M_{2^n-1-i} + \overline{f_i}) \right]$$

Azpindizea aldatuko dugu: $j = 2^n-1-i$ $i = 2^n-1-j$

$$f = \left[\prod_{i=0}^{2^n-1} (M_j + \overline{f_{2^n-1-j}}) \right]$$

gai bietako funtzio osagarriak berdinak dira:

$$\overline{f} = \left[\prod_{i=0}^{2^n-1} (M_j + \overline{f_{2^n-1-j}}) \right]$$

Beste alde batetik:

$$f = \prod_{j=0}^{2^n-1} (M_j + F_j) \implies \overline{f} = \prod_{j=0}^{2^n-1} (M_j + \overline{F_j})$$

f funtzioan dauden maxtermak, $\overline{f}$ dira agertzen f-ren funtzio osagarrian; eta alderantziz ere.

$\overline{f}$ -ren maxtermen adierazpide biek gauza berbera izan behar dute. Horregatik

$$\overline{f_{2^n-j-1}} = \overline{F_j} \implies \boxed{F_j = f_{2^n-1-j}}$$

$$\text{Edo gauza bera dena} \implies \boxed{f_i = F_{2^n-1-i}}$$

Adibidea: $f = (01011011)_m$ maxterm eta mintermen adierazpidez eman.

f_i -ak ezagutzen ditugu.

$$(f_j) = (f_{2^n-1-j}) = (11011010)$$

$$f = (01011011)_m = (11011010)_M$$

$$\begin{aligned} \text{Beraz: } f &= \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC = \\ &= (\overline{A}+B+\overline{C}) (A+\overline{B}+C) (A+B+C) \end{aligned}$$

Adibidea: $f=(10001100)_M$ maxterm eta mintermen adierazpidez eman.

$$(f_i) = (f_{2^n-1-i}) = (00110001)$$

$$f = (00110001)_m = (10001100)_M$$

$$\begin{aligned} \text{Beraz: } f &= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + ABC = \\ &= (\overline{A}+\overline{B}+C) (\overline{A}+B+\overline{C}) (\overline{A}+B+C) (A+B+\overline{C}) (A+B+C) \end{aligned}$$

OHARRA: Lehenengo adibidean maxtermen adierazpidea laburragoa da; bigarrenean, alderantziz gertatzen da.

Ariketa: Ondoko egitaula ikusiz, idatz itzazu f_1, f_2, f_3 , funtzioak A,B,C aldagaien mintermen eta maxtermen bidez.

A	B	C	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0

Orain arte esandakoa kontutan hartuz, mintermen bidez honela geratuko zaigu:

$$f_1 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$$

$$f_2 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

$$f_3 = A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

Eta Maxtermen bidez:

$$f_1 = (A+B+\bar{C}) (\bar{A}+B+\bar{C}) (\bar{A}+\bar{B}+C) (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

$$f_2 = (A+\bar{B}+\bar{C}) (\bar{A}+B+C) (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

$$f_3 = (A+B+C) (A+B+\bar{C}) (A+\bar{B}+C) (A+\bar{B}+\bar{C}) (\bar{A}+\bar{B}+C) (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

Ariketa: Lehenengo f_1, f_2, f_3 funtzioak bektorialki adieraz itzazu:

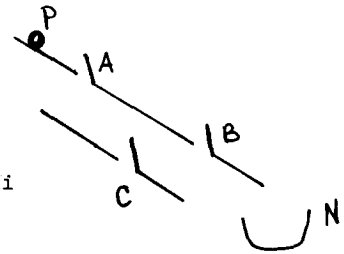
$$f_1 = (10111000)_m = (0234)_m = (11100010)_M = (0126)_M$$

$$f_2 = (11100110)_m = (01256)_m = (10011000)_M = (034)_M$$

$$f_3 = (00001100)_m = (45)_m = (11001111)_M = (014567)_M$$

Ariketa: Kontsidera itzazu P puxtarria;
ohol bi, A, B eta C ateekin;
eta azkenez N, ontzi bat.

Kontsidera itzazu ondoko aldagai
logikoak:



$A, B, C = 1$ atea itxita dago

$A, B, C = 0$ atea irekita dago

$N = 1$ Puxtarria ontziraino helduko da

$N = 0$ Puxtarria ez da helduko ontziraino

N aldagai logikoa besteen funtzioa da. Funtzio hori aurkitzeko, azter itzazu ateen konbinazio guztiak. Ia bakoitzean heltzen den ala ez.

Zein da funtzio hori?.

Egitaula bat egingo dugu.

A	B	C	N	
0	0	0	0	→ A atetik joaten da puxtarria eta ez da ontzi ra heltzen.
0	0	1	0	→ Berdin gertatzen da.
0	1	0	0	→ Berdin gertatzen da.
0	1	1	0	→ Berdin gertatzen da.
1	0	0	0	→ B atetik joaten da eta ez da ontzira heltzen
1	0	1	0	→ Berdin gertatzen da.
1	1	0	1	→ Heltzen da.
1	1	1	1	→ Heltzen da.

Orduan $N = A\bar{B}\bar{C} + ABC$

edo, $N = (A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$

$$N = (00000011)_m = (00111111)_M$$

Sinplifikatuz: $N = AB$

Hau da, A eta B atek itxita daudenean, puxtarria ontziraino heltzen da; bestela ez.

3.4 Funtzioen arteko eragiketak

Hasieran, aldagai logikoen baloreen arteko eragiketak definitu genituen. Gero hauen bidez funtzioak definitu genituen. Orain, funtzioen arteko eragiketak ikusiko ditugu. Eragiketak berdinak izango dira, baina funtzioekin eginak. Zelan egingo dugu?. Modu errazenaz. Funtzio bakoitza bere aldagaietan ipintzen da eta funtzioen eragiketa, aldagai logikoen arteko eragiketa bezala hartzen da.

Edozein funtzio bi f eta g, mintermen batukari bezala ipin dezakegu.

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i f_i \quad g = \sum_{j=0}^{2^n-1} m_j g_j$$

Funtzio biren batura beste funtzio bat izango da. Zeintzu izan-go dira beraren mintermen koefizienteak?. Azter ditzagun:

$$F = f+g = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i f_i + \sum_{j=0}^{2^n-1} m_j g_j = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i (f_i + g_i)$$

Orduan $f = (f_i)$; $g = (g_i)$ baldin badira.

$$F = f + g = (f_i + g_i)$$

Adibidea: $f = (01567)_m = (11000111)_m$

$$g = (2367)_m = (00110011)_m$$

$$F = f+g = (11110111)_m = (0123567)_m$$

Modu berean, funtzio biren biderkadura beste funtzio bat izango da, eta beraren mintermen koefizienteak ezagutu nahi ditugu.

$$F_b = f.g = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i f_i \right) \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} m_j g_j \right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i f_i g_i$$

Biderkaketa egitean kontutan hartu dugu:

ezen $m_i.m_j = 0$ dela, $i \neq j$ baldin bada eta

$m_i.m_j = m_i$ dela, $i=j$ baldin bada.

Orduan, $f=(f_i)$; $g = (g_i)$ baldin badira.

$$F_b = f.g = (f_i.g_i) \quad \text{da}$$

Adibidea: $f = (01567)_m = (11000111)_m$

$$g = (2367)_m = (00110011)_m$$

$$F_b = f . g = (00000011)_m$$

$$1 . 0 = 0$$

$$1 . 0 = 0$$

$$0 . 1 = 0$$

$$0 . 1 = 0$$

$$0 . 0 = 0$$

$$1 . 0 = 0$$

$$1 . 1 = 1$$

$$1 . 1 = 1$$

Beste eragiketaren kasuan berdintsu gertatuko da.

$$f \oplus g = f\bar{g} + g\bar{f} = \sum m_i (f_i g_i + \bar{g}_i \bar{f}_i) = \sum m_i (f_i + g_i)$$

$$f \uparrow g = \overline{f \cdot g} = \overline{\sum m_i (f_i g_i)} = \sum m_i (\overline{f_i g_i}) = \sum m_i (f_i + g_i)$$

eta abar.

Maxtermekin ere gauza berbera egin daiteke. Eta hauxe geratuko litzateke:

$$f + g = \prod_{i=0}^{2^n-1} (M_i + F_i) + \prod_{j=0}^{2^n-1} (M_j + G_j) = \prod_{i=0}^{2^n-1} [M_i + (F_i + G_i)]$$

$$f \cdot g = \prod_{i=0}^{2^n-1} (M_i + F_i) \cdot \prod_{j=0}^{2^n-1} (M_j + G_j) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (M_i + F_i G_i)$$

$$f \oplus g = \prod_{i=0}^{2^n-1} [M_i + (F_i \oplus G_i)]$$

$$f \uparrow g = \prod_{i=0}^{2^n-1} [M_i + (F_i \uparrow G_i)]$$

eta abar.

II. MINIMIZAZIOA

1. MINIMIZAZIOA

1.1 Planteiamendua

Demagun funtzio logiko bat defirrituta daukagula, eta elektronika-ko elementuen bidez sintetizatu nahi dugula. Funtzioa sintetizatzeke, aukera asko dago. Bai erabiltzen diren eragiketagatik (NAND, NOR, EDO eta ETA, ALA, edo besteak), bai eragiketa horik lortzeko moduarengatik (etengailuz, diodoz, transistorez, ...), bai beste faktorerengatik.

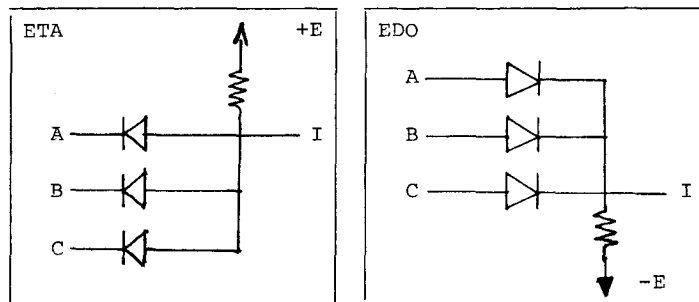
Aukera guztien artean, zein hartuko dugu?.

Hau mugatzeko erizpide asko dago, baina normalean merketasunarena erabiltzen da.

Erabakitzeke bide honi, minimizazioa deitzen zaio.

Oso konplikatua izan daiteke. Hau azaltzeko, adibide bi ikusiko ditugu.

1. ADIBIDEA: ETA eta EDO eragiketako blokeekin sintetizatu nahi dugu funtzioa, eta blokeak ondokoak dira:



Erresistentziak, loturak eta blokeen montaketa merkeak dira. Diodoak ez. Beraz, minimizatzeke, diodo gutxi erabiltzea bilatuko dugu.

2. ADIBIDEA: Zirkuitu integratuz egina.

Zirkuitu integratuen diseinua oso garestia da. Askotan lotura bat egitea elementu bat lortzea baino garestia izaten da.

Ikusten denez, minimizatzeko faktoreak ez dira berdinak adibide bietan.

Gehienetan, minimizatzeko aldagaiak asko dira, eta minimizazioa oso gaitza bihurtzen da.

Gaitzegi izan ez dadin bide hestuago bat hartuko dugu. Minimizatu egingo dugu, baina eremu txikiago batetan.

Hartzen dugun eremua, ondoko baldintzek mugatzen dute:

- Blokeen kopurua txikituko dugu, eta horrela egitean, lotura eta sarrera gutxiago izango dira.
- Loturak blokeak baino askoz merkeagoak dira.
- ETA eta EDO eragiketez osoturiko blokez sintetizatuko dugu. Lortuko dugun emaitza, NAND eta NOR eragiketez osoturiko blokeetarako ere balio izango du.

1.2 Kostu-funtzioa

ETA eta EDO blokeak diodo eta erresistentziak erabiliz egingo dugu. Kasu honetan bloke bakoitzak erresistentzia bat darama eta blokeren sarrera bakoitzak diodo bat darama.

Hemen,

F_c : funtzioaren kostua

a : diodoren salneurria

b : erresistentziaren salneurria

N_a : sarreraren kopurua

N_b : blokeen kopurua

baldin badira, orduan, kostu-funtzioa ondokoa izango da.

$$F_c = aN_a + bN_b$$

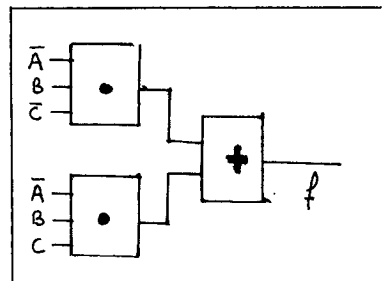
Normalean N_a (sarreraren kopurua) funtzioaren letren kopurua gehi blokeen kopurua izaten da (Aldakari bakarretako gairen bat dagoenean izan ezik).

1.3 Karnaugh-en taulak

Adibidea: Demagun ondoko funtzioa:

$$f = (2 \ 3)_m = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC$$

Alboko irudian adierazten den bezala lortzen badugu, hiru bloke eta zortzi sarrera behar ditugu.

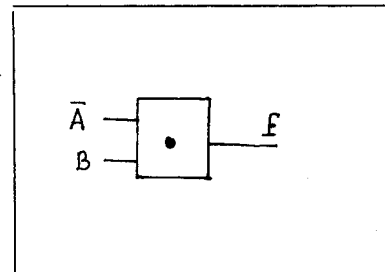


Ikusi genituen teoremak aplikatuz, f funtzioa beste era batetara ipiniko dugu.

$$f = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC = \bar{A}B(\bar{C}+C) = \bar{A}B \cdot 1 = \bar{A}B$$

Horrela egiten badugu, blo ke bat eta bi sarrera bakar rik behar ditugu.

Merkeago izango litzateke, noski.



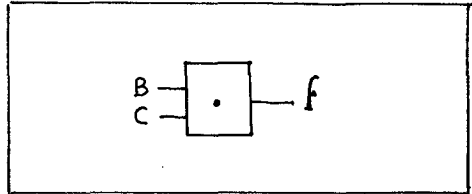
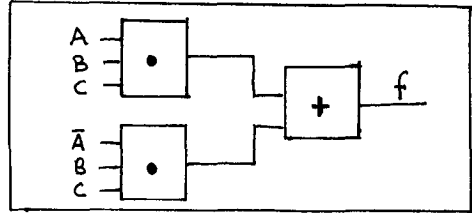
Adibidea: $f = ABC + \bar{A}BC$

Sinplifikatu gabe
hiru bloke eta
sortzi sarrera ditu

Sinplifikatuz:

$$\begin{aligned} f &= ABC + \bar{A}BC = (A + \bar{A})BC = \\ &= 1 \cdot BC = BC \end{aligned}$$

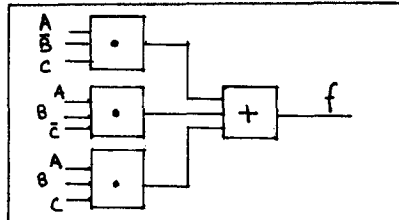
Bloke bat era sarrera
bi bakarrik behar
ditugu.



Ikusten denez, bi mintermak ia berdinak badira (aldagai desberdin
bakarra dutenean) sinplifikapen oso handia egin dezakegu.

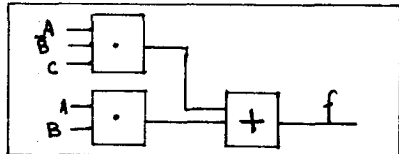
Adibidea: $f = (567)_m = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} +$
 $+ABC.$

Sinplifikatu gabe, lau
bloke eta hamabi sarrera
ditu.



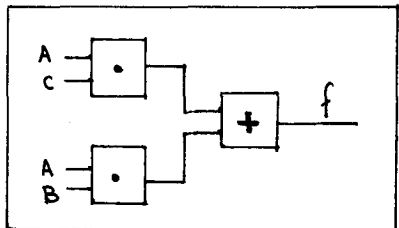
Sinplifikatuz:

$$\begin{aligned} f &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC = AB(\bar{C} + C) + \\ &+ \bar{A}\bar{B}C = AB + \bar{A}\bar{B}C \end{aligned}$$



Sinplifikatu eta gero, hiru bloke eta zazpi sarrera
geratzen zaizkigu. Baina beste sinplifikapen bat dago:

$$\begin{aligned} f &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC = \\ &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC + \\ &+ ABC = \\ &= \bar{A}\bar{B}C + ABC + A\bar{B}\bar{C} + ABC = \\ &= AC(\bar{B} + B) + AB(\bar{C} + C) = \\ &= AC \cdot 1 + AB \cdot 1 = AC + AB \end{aligned}$$



Modu honetan ere hiru bloke
dauzkagu, baina sei sarrera
bakarrik. Beraz, zerbait ira
bazi dugu.

Ikusten denez, $\bar{x}f + xf = f$, eta $f + f = f$, teorema erabiliz lortzen
ditugun funtzio bailiokideak, merkeagoak izaten dira.

Teorema bi horik erabiliz eta funtzioak minimizatzeko, KARNAUGH-en
taulak egiten dira.

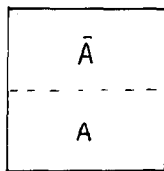
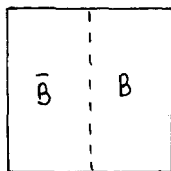
Izatez Venn-en diagrama bereziak dira.

■ Hasteko bi aldagaitarako egingo dugu:

Hauxe da Karnaugh-en taula:

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

Argiago ikusteko, A eta B zeintzu diren, azalduko dugu hurrengo bi
irudietan:



Taulan lau kaxa dago. Kaxa bakoitza minterm bati dagokio.

		$\bar{B}$		B	
		0		1	
$\bar{A}$	0	00 $\bar{A}\bar{B}$	01 $\bar{A}B$		
	1	10 $A\bar{B}$	11 AB		

Kaxa bakoitzaren koordenatuak eta dagokion mintermaren zenbaki bitarra berdinak dira.

Alde bat elkar ukitzen daukaten mintermek, aldagai desberdin bakarra dute. Lehen ikusi dugunarengatik, funtzio batek hauzo-minterm bi baditu, biok batera hartuz, minimizatu egingo dugu funtzio hori.

Minterm bat birritan har dezakegu bikoteak egiteko, $f + f = f$ dela baitakigu.

Adibidea: $f = (0\ 13)_m = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB$

Karnaugh-en taula egingo dugu

		$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	1	1	
	0		
A	0		1
	1		

Bi bikote egin ditugu. Bikote horizontala $\bar{A}$ da, eta bertikala B .

Orduan $f = \bar{A} + B$.

Hiru aldagairi dagokien Karnaugh-en taula hauxe izango da:

A, B eta C argiagi ikusteko:

$\bar{A}$		
A		

$\bar{B}$	B

$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

$\bar{C} = \bar{C}' \cup \bar{C}''$

Zergatik ez dugu, adibidez, ondoko modutara egin?

		B			
		00	01	11	10
A	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
	1	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC

	01	10	
	ABC	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	

Eta horrela eginez, ordenean agertzen dira.

Arrazoi erraza da:

Honela egitean, hauzo-minterm batzuk bi aldagaitan desberdintzen direlako. Eta horrela, sinplifikapena gaitzago ikusten da.

Kontura zaitez ezkerreko mintermak eta eskuineko mintermak hauzoak direla. Aldagai desberdin bakarra baitute.

Hasteko, bikoteak egingo ditugu minterm guztiekin, gero bikote bik alde bat osoa elkarren alboa badute, sinplifikatu egiten dira. Funtzio minimoa idazteko, minterm guztiak hartu behar ditugu, baina posible diren bloke handienetan.

Adibidea: $f = (0 \ 1 \ 4 \ 5)_m$

	$\bar{B}$	B	
	1	1	
	1	1	

$f = \bar{B}$

Lortzen den funtzio minimoa, ez da zertan bakarra izan behar.

Adibidea: $f = (0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 7)_m$

1	1		1
	1	1	

$f = AC + \bar{A}\bar{C} + \bar{E}C$

Beste modu batetara esanda:

1	1		1
	1	1	

$$f = AC + \bar{A}B + \bar{A}\bar{C}$$

Modu bietan funtzio minimoak lortzen dira; baina desberdinak.

Ariketa: $f = (0\ 1\ 3\ 5\ 6\ 7)_m$

1	1	1	
	1	1	1

$$f = C + \bar{A}\bar{B} + AB$$

Ariketa: $f = (0\ 1\ 2\ 3\ 4)_m$

1	1	1	1
1			

$$f = \bar{A} + \bar{B}\bar{C}$$

Ariketa: $f = (0\ 1\ 2\ 3\ 5\ 7)_m$

1	1	1	1
	1	1	

$$f = \bar{A} + C$$

Ariketa: $f = (0\ 1\ 5\ 7)_m$

1	1		
	1	1	

$$f = \bar{A}\bar{B} + AC$$

Ariketa: $f = (0 \ 1 \ 7)_m$

1	1		
		1	

$$f = \bar{A}\bar{B} + ABC$$

* Oharra: Hemen 49. eta 50. horrialdeak tartekatuta behar dira

Ariketa: $f = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4)_m$ funtzioa minimizatuko dugu.
Mintermekin.

1	1	1	1
1			

$$f = \bar{A} + \bar{B}\bar{C}$$

$$\text{Maxtermekin } f = (01234)_m = (0 \ 1 \ 2)_M$$

1	1		1

$$f = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{C})$$

Ikusten denez, forma biak baliokideak dira:

$$(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + \bar{C}) = \bar{A} + \bar{B}\bar{C}$$

Mintermekin, eragiketako bi bloke eta lau sarrera behar ditugu.

Maxtermekin, eragiketako hiru bloke eta sei sarrera behar ditugu.

Beraz, mintermen adierazpidez sintetizatuko dugu, merkeago baita.

* Oharra: 51. horrialdean segi.

Lau aldagairekin, hauxe da Karnaughen taula:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

Diagram illustrating a 4-variable Karnaugh map (K-map) for variables A, B, C, and D. The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The cells are numbered 0 through 15. Brackets indicate groupings: A (rows 11 and 10), B (columns 11 and 10), and D (columns 01 and 11).

Kaxa bakoitzak dagokion mintermaren zenbakia darama, A, B, C eta D argiago ikusteko:

	$\bar{A}$	
	A	

	B'	
	B	
	B''	

	$\bar{C}$	C

	D'	D	D''

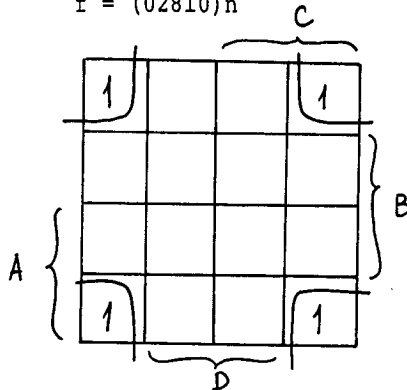
$$\bar{B} = B' \cup B''$$

$$\bar{D} = D' \cup D''$$

Ezkerreko mintermak eta eskuinekoak hauzokoak dira. Eta bai goiko mintermak eta behekoak ere

Adibidea

$$f = (02810)n$$



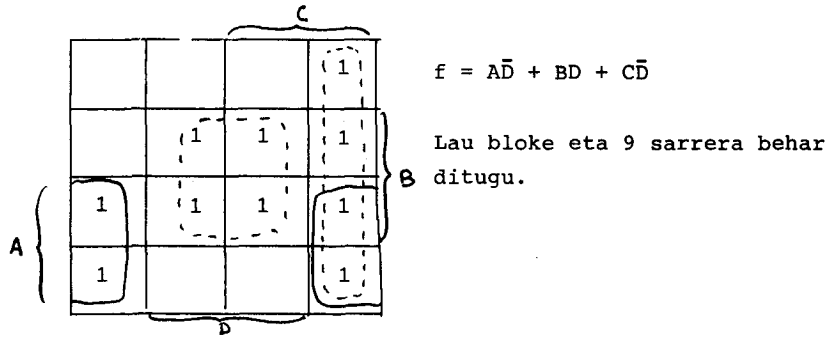
$$f = \bar{B} \bar{D}$$

Lau aldagairekin, zortzi kaxatako blokeak ere atera daitezke

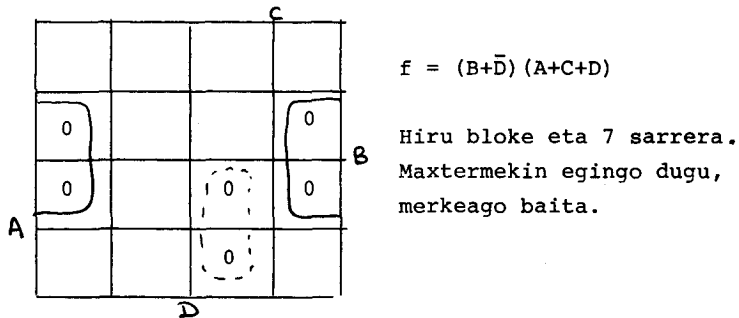
Lau kaxatako bloke biek alde bat osoa elkarrekin badute, sinplifikatu. egiten dira eta zortzi kaxatako bloke bat ateratzen da

* Oharra: Berrir 48. horrialdera pasa

Adibidea: Minimiza bedi: $f = (2 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 10 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15)_m$, funtzioa
Mintermekin



Maxtermekin $f = (2 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 10 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15)_m =$
 $= (4 \ 6 \ 11 \ 12 \ 14 \ 15)_M$



Lehen bezala, funtzio minimoa (edo funtzio minimo bat) idazteko, minterm guztiak hartu behar ditugu, baina posible diren bloke handienetan.

Bost eta sei aldagaitarako karnaugh-en taulak noizean behin erabiltzen dira. Sei baino aldagai gehiagotarako, gaitzegi bihurtzen dira.

Bost aldagairen kasuan, lau aldagaitarako egiten diren taulen antzerako bi taula egiten dira; eta sei aldagaitarako, horietako lau taula.

Orain arte karnaugh-en taulak mintermekin bakarrik erabili ditugu. Maxtermekin ere erabili behar dira. Izatez, funtzio logiko bat mintermen eta maxtermen adierazpidez defini daiteke. Funtzioa

sintetizatzeko, adierazpide biak minimizatuko ditugu, eta gero bien arteko merkeena hartuko dugu.

Maxtermen adierazpidearen minimizazioa eta mintermena berdintsuak dira. Bertan erabiltzen diren teorema eta mintermen kasukoak analogoak dira.

$$(x+f) (\bar{x}+f) = f$$
$$f \cdot f = f$$

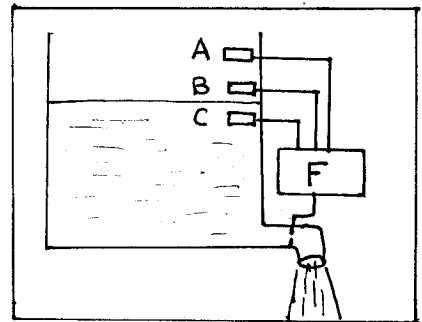
Maxtermen zako karnaugh-en taula eta mintermen zakoa berdina da. Desberdintasun bakar bat dago: blokeak egin eta gero, funtzioa lortzeko, mintermen kasuan blokeak gehitu egiten dira, eta maxtermen kasuan biderkatu egiten dira.

1.4 Mintermen balore logiko mugagabeak

Batzutan, funtzio bat sintetizatzeko, bere mintermenen batek hartzen duen balore logikoa, mugagabekoa da: Berdin zaigu "0" edo "1" izatea. Sinplifikatzeko onena dena, horixe hartuko dugu.

Adibidea: Ur-biltegi batetan hiru sentzore jartzen ditugu: A, B eta C.

Biltegiako txorretak ura bota dezan, A-ren gainean edo B eta C-ren artean egon behar da uraren maila kalkula ezazu F funtzioa:



Sentsoreak uretan daudenean, "1" seinalea bidaltzen dute. Uretatik kanpoan daudenean, "0" bidaltzen dute.

Txorrotak ura bota dezan, "1" heldu behar zaio. Bestela itxita egongo da.

Azter dezagun funtzioa minterm guztietarako. Lau kasu ezinezkoak dira, zeren sentsore batek "1" emateko bera baino beherago daudenak ere 1 eman behar dute.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	-
0	1	1	0
1	0	0	-
1	0	1	-
1	1	0	-
1	1	1	1

Mugagabeko horik ikurtzeko "-" edo "Ø" ikurrak erabiltzen dira. Laburki, lehenengoz bat direnak ipintzen dira eta gero mugagabekoak, hauen aurrean k bat jarriz.

$$F = (01-0---1) = (17) + k(2456)$$

Sinplifikatuz:

			B
	0	1	0
A	-	-	1
			C

"1" balore logikoa duten mintermak hartu behar ditugu, baina bloke handienetan.

Kasu honetan honela izango da:

$$F = A + \bar{B}C$$

$$\text{Maxtermekin } F = (0---1-01)_M = (47) + k(1235)$$

0	-	-	-
1	-	1	0

$$F = C(A + \bar{B})$$

Berdin zaigu maxtermekin edo mintermekin egitea. Modu bietan bloke bi eta lau sarrera dauzkagu.

Mintermen bidez sinplifikatutako funtzioa eta maxtermen bidezkoa ez dira berdinak.

$$F_m = A + \bar{B}C \neq C(A+B) = F_M$$

Bide batez eta bestez mugagabekoei balore batzu jarri dizkiegu, baina kasu bietan ez dira berdinak izan. Horrexegatik funtzio sinplifikatuak desberdinak dira.

Adibidea: Askotan ikusi ditugu hamar zenbakiak zazpi zuzenkiekin eginak:

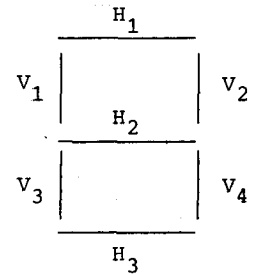
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Egin dezagun tresna bat hori lortzeko. Sarrerak zenbakiak izango dira, bitar sistemaz emanak. Horregatik lau sarrera izango ditugu A,B,C, eta D.

Zuzenki bakoitzerako funtzio bat aurkitu behar dugu. Zuzenki bat, sarrerako zenbakian dagoenean, beraren funtzioak "1" balore logikoa hartuko du.

Beraz, egitaula hau izango da:

Zenbakia	A B C D	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	H ₁	H ₂	H ₃
0	0 0 0 0	1	1	1	1	1	0	1
1	0 0 0 1	0	1	0	1	0	0	0
2	0 0 1 0	0	1	1	0	1	1	1
3	0 0 1 1	0	1	0	1	1	1	1
4	0 1 0 0	1	1	0	1	0	1	0
5	0 1 0 1	1	0	0	1	1	1	1
6	0 1 1 0	1	0	1	1	1	1	1
7	0 1 1 1	1	1	0	1	1	0	0
8	1 0 0 0	1	1	1	1	1	1	1
9	1 0 0 1	1	1	0	1	1	1	0
	1 0 1 0	-	-	-	-	-	-	-
	1 0 1 1	-	-	-	-	-	-	-
	1 1 0 0	-	-	-	-	-	-	-
	1 1 0 1	-	-	-	-	-	-	-
	1 1 1 0	-	-	-	-	-	-	-
	1 1 1 1	-	-	-	-	-	-	-



Kasu honetan mugagabeko asko dago. Hamar zenbaki bakarrik agertu-ko dira sarreran; besteak ez dira agertuko. Beraien emaitzek, funtzioen bidez, ez digute ardurarik. Bat edo beste izan daitezke

Har dezagun V_1 funtzioa:

$$V_1 = (0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9) \overset{+}{\underset{C}{}} k(10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15) \overset{+}{\underset{m}{}}$$

	1	0	0	0
	1	1	1	1
	0	0	0	0
A	1	1	0	0

D

B $V_1 = A + B + \bar{C}\bar{D}$

Maxtermekin $V_1 = (12 \ 13 \ 14) + k(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$

	0	0	0	0
	0	0	0	0
	1	1	0	1
A	0	0	0	0

D

B $V_1 = (B+\bar{C}) (A+B+\bar{D})$

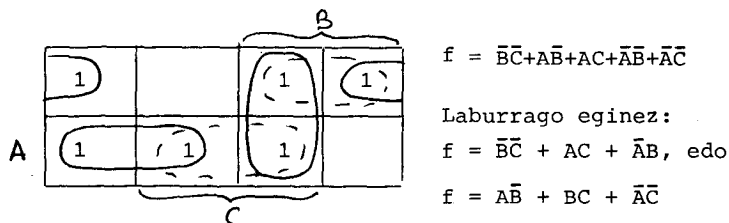
Horrela egin dezakegu beste funtzioetarako ere

2. FORMA MINIMOA LORTZEKO BIDE SISTEMATIKOA

2.1 Metodoen beharra eta planteiamendua.

Lehenago ikusi genuenez, karnaugh-en taula erabiliz minimizatu egiten ditugu funtzio logikoak, baina lortzen den funtzio minimoa ez da beti bakarra izaten. Beste aldetik taula horretan ematen diren urratsak, ia intuitiboak dira askotan, aldagai asko dagoenean batez ere.

Adibidea: $f = (0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 7)_m$



Ondoan azaltzen dugun metodoa, sistematikoagoa da.
Forma minimoa lortzeko urrats bi emango ditugu:

1. Implikatzaile lehenen sorketa.
2. Implikatzaile lehenen aurkerapena

Baina zertzu dira implikatzaile lehenak?

f eta g direlakoak bi funtzio baldin badira, eta g funtzioa "1" denean f ere "1" bada, orduan g funtzioa f funtzioaren inplikatzailerik bat dela esango dugu.

Hau da: $g(A, B, \dots, N) = 1 \Rightarrow f(A, B, \dots, N) = 1$

Beraz, funtzio baten mintermak beraren inplikatzailerik dira. Bestalde, Mintermen artean kontzentzuaren teorema erabiliz, beste inplikatzailerik batzu atera ditzakegu.

Adibideak: $f = ABC + \bar{A}BC$
 $xg + \bar{x}h = xg + \bar{x}h + gh$ } $\Rightarrow f = ABC + \bar{A}BC + BC = BC$

$$\left. \begin{array}{l} f' = ABC + \bar{A}BD \\ xg + \bar{x}h = xg + \bar{x}h + gh \end{array} \right\} \Rightarrow f' = ABC + \bar{A}BD + BCD$$

Mintermak binaka konparatuz, aldagai baten "zeinua" izan ezik aldagai berdinak dauzkatenean, funtzioaren sinplifikazio sistema tikoa egin dezakegu.

Ateratzen dugun inplikatzaile berria, beste bi mintermak baino merkeago izango da, aldagai bat gutxiago du eta. Horrexegatik dira interesgarriak, forma minimoa lortzeko.

Posible izango den aldi guztietan erabiliko dugu kontzentzuaren teorema inplikatzaileen artean.

Berriz erabiltzerik izango ez dugunean, inplikatzaile lehenak sortuko ditugu. Zeintzu izango dira?. Beste inplikatzaile bat ateratzeko erabili ez ditugun inplikatzaileak (kontzentzuaren teorema erabiliz, noski).

2.2. Inplikatzaile lehenen sorketa

Metodo bi daukagu inplikatzaile lehenak sortzeko: Mac Cluskey-rena eta Karnaugh-ena. Hauxek dira:

a. Mc Cluskey-ren Metodoa

Funtzioaren mintermak edo maxtermak jakinez, dagozkien zenbakiak taldeka ipintzen dira. Zenbakiak, bitar sisteman daude eta lehenengo taldean zeroa ipintzen da (baldin badago), bigarren taldean "1" bakarria daukaten zenbakiak, hirugarren taldean "1" bi daukatenak, eta horrela minterm edo maxterm guztiak ipini arte.

Ondoren, lehenengo eta bigarren taldeen zenbakiak konparatu egiten dira. Desberdintasun bakarria dutenean ateratzen dira eta desberdintasunean marra bat ipintzen da (horrela egitean kontzentzuaren teorema erabili dugu).

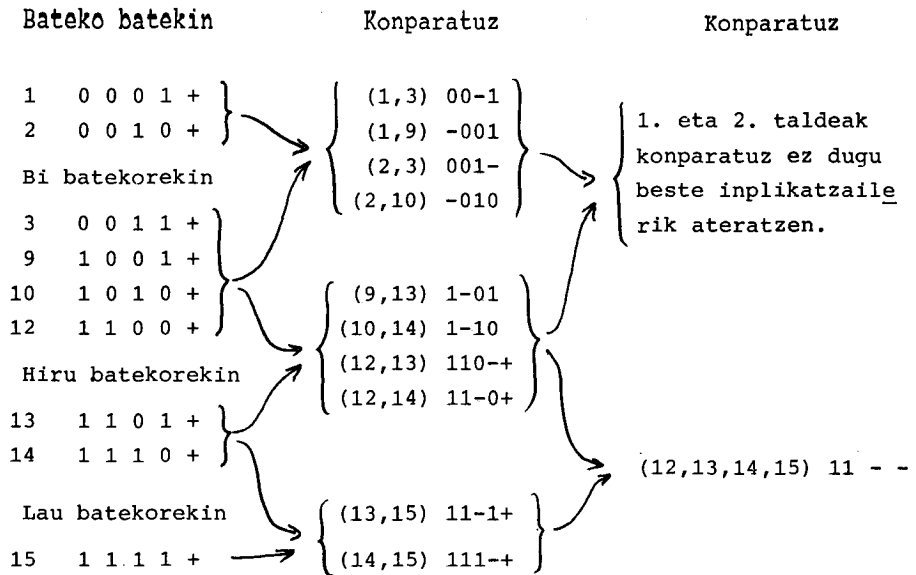
Gero, bigarren eta hirugarren taldeen arteko konparaketa; hirugarren eta laugarren artekoa; eta modu berean, dena amaitu arte.

Marra dutenekin gauza bera egiten da (kontzentzuaren teorema erabiliz), bi-marradunak ateratzeko.

Eta berriz bi-marradunekin, hiru-marradunekin, ..., guztiekin amaitu arte.

Azkenean, beste bat ateratzeko erabili ez ditugunak, horiek dira inplikatzaille lehenak.

Adibidea: $f = (1\ 2\ 3\ 9\ 10\ 12\ 13\ 14\ 15)$



Beste inplikatzaille bat sortzeko erabili ditugun zenbakiei, gurutze bat ipini diegu. Horik ez baitira lehenak.

Inplikatzaille lehenak hurrengoak dira:

(1,3)	00-1	$\bar{A}\bar{B}D$
(1,9)	-001	$\bar{B}\bar{C}D$
(2,3)	001-	$\bar{A}\bar{B}C$
(2,10)	-010	$\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
(9,13)	1-01	$A\bar{C}D$
(10,14)	1-10	$AC\bar{D}$
(12,13,14,15)	11--	AB

b. Karnaugh-en taularekin

Inplikatzaile lehenak Karnaugh-en taularekin ere atera daitezke. Horretarako, posible diren bikote, laukote eta zortzikoteak egiten dira. Horik dira inplikatzaileak. Baina beste bloke handiago batetan sartuak direnak, horik ez dira lehenak.

Adibidea: Lehengo adibide berbera aztertuko dugu.

$$f = (1 \ 2 \ 3 \ 9 \ 10 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15)_m$$

	1	1	1
1	1	1	1
	1		1

Zeintzu dira inplikatzaileak? Mintermak, bikote eta laukote guztiak.

Zeintzu dira inplikatzaile lehenak? Mintermak ez behintzat, bikotetan sartuak dira eta.

Bikote guztiak bai, ABC , ABC , izan ezik, hauk AB laukotean sartuak baitira.

Inplikatzaile lehenak ondokoak dira:
 $\bar{A}BD$, $\bar{A}BC$, $\bar{B}CD$, AB , $A\bar{C}D$, $AC\bar{D}$

Bide bietatik emaitza berbera lortu dugu.

2.3 Inplikatzaile lehenen aukerapena

Karnaugh-en taularekin ikusi dugunez, modu nahikotara lor daiteke funtzio bat, bere inplikatzaile lehenak erabiliz.

Modurik onena aukeratzeko, modu bakoitzaren kostua kontsideratuko dugu. Lehenengo modu guztiak aurkituko ditugu, eta gero, bakoitzaren salneurria ikusiz, merkeena aukeratuko.

Funtzioa lortzeko modu guztiak aurkitzeko, taula bat egingo dugu. Taulan inplikatzaille lehenak ipiniko ditugu eta bai estaltzen dituzten mintermak edo maxtermak ere.

Lehengo adibidean:

$$f = (1 \ 2 \ 3 \ 9 \ 10 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15)_m$$

	1	2	3	9	10	12	13	14	15
$X_1 = ABD \ (1,3)$ $X_2 = \overline{B}\overline{C}D \ (1,9)$	x		x	x					
$X_3 = \overline{A}\overline{B}C \ (2,3)$ $X_4 = \overline{B}C\overline{D} \ (2,10)$		x	x		x				
$X_5 = A\overline{C}D \ (9,13)$ $X_6 = A\overline{C}\overline{D} \ (10,14)$				x	x		x	x	
$X_7 = AB(12,13,14,15)$						x	x	x	x

Funtzioa lortzeko beraren minterm edo maxterm guztiak hartu behar dira. Eta minterm bat hartzeko, minterm hori estaltzen duen inplikatzaille bat edo beste aukera dezakegu.

Hau da, beste funtzio logiko bat defini dezakegu. Funtzio berri hori mintermak aukeratzeko balio du.

Hirugarren minterma artzeko, X_1 inplikatzaillea edo X_3 inplikatzaillea hartuko dugu.

X_1 inplikatzaillea hartzen dugunean, X_1 aldagai logikoak "1" balore logikoa izango du, bestela "0" balorea izango du. Beste inplikatzailleekin gauza bera egingo dugu.

Orduan, hirugarren minterma hartzeko, $(X_1 + X_3) = 1$ berdintza bete behar da.

Lehenengo minterma hartzeko, $(X_1 + X_2) = 1$ berdintza bete behar da Horrela egiten da beste mintermekin ere.

f funtzioa lortzeko minterm guztiak hartu behar dira. Beraz, berdintza guzti horik batera bete behar dira; hau da: beraien berdin tzen biderkadura logikoa 1 izango da.

$$F = (X_1 + X_2) (X_3 + X_4) (X_1 + X_3) (X_2 + X_5) (X_4 + X_6) (X_7) (X_5 + X_7) (X_6 + X_7) X_7 = 1$$

$$\text{Sinplifikatuz: } X_7 (X_5 + X_7) (X_6 + X_7) X_7 = X_7$$

$$(X_1 + X_2) (X_1 + X_3) = X_1 + X_2 X_3$$

$$(X_3 + X_4) (X_4 + X_6) = X_4 + X_3 X_6$$

$$F = (X_1 + X_2 X_3) (X_4 + X_3 X_6) (X_2 + X_5) X_7 =$$

$$\begin{aligned} &= X_1 X_2 X_4 X_7 + X_1 X_5 X_4 X_7 + X_2 X_3 X_4 X_7 + X_1 X_2 X_6 X_7 + X_1 X_5 X_6 X_7 + \\ &+ X_2 X_3 X_6 X_7 = 1 \end{aligned}$$

$F = 1$ izateko nahiko da batugai bakarrek "1" balorea hartzea. Beraz, sei modu hauekin lor dezakegu funtzioa.

Gai bakoitzaren salneurria kalkulatzeko da. Merkeena interesatzen zaigu.

Gai baten salneurria kalkulatzeko, beraren inplikatzaille lehenen salneurriak gehitu egiten dira.

Ariketa: Minimiza ezazu ondoko funtzioa, Mc-Cluskey-ren metodoa erabiliz.

$$f = (0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 6 \ 7 \ 10 \ 14)_{16}$$

Inplikatzaille lehenak ateratzeko, Mc Cluskey-ren taula egingo dugu.

Mintermak	Konparatuz	Konparatuz
0 0000 X (0,1) (0,2)	000- 00-0	1 eta 2 taldeak kontaratuz ez dugu beste inplikatzaille rik ateratzen. (2,6,10,14) -- 10
1 0001 X		
2 0010 X		
(1,5)	0-01	
5 0101 X (2,6)	0-10 X	
6 0110 X (2,10)	-010 X	
10 1010 X		
(5,7)	01-1	
7 0111 X (6,7)	011-	
14 1110 X (6,14)	-110 X	
(10,14)	1-10 X	

Inplikatzaille lehenak hauxek dira: ABC, ABD, ACD, ABD, ABC eta CD

f funtzioa lortzeko modu guztiak sortzeko, beste taula hau egingo dugu.

	0	1	2	5	6	7	10	14
$X_1 = ABC (0,1)$	x	x						
$X_2 = ABD (0,2)$	x		x					
$X_3 = ACD (1,5)$		x		x				
$X_4 = ABD (5,7)$				x		x		
$X_5 = ABC (6,7)$					x	x		
$X_6 = CD (2,6,10,14)$			x		x		x	x

f funtzioa betetzeko.

$$F = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_6)(X_3 + X_4)(X_5 + X_6)(X_4 + X_5)X_6X_6 = 1$$

$$F = X_1 X_4 X_6 + X_1 X_3 X_5 X_6 + X_2 X_3 X_4 X_6 + X_2 X_3 X_5 X_6 = 1$$

Mintermez eginez, lau aukera dauzkagu:

$$f_1 = X_1 X_4 X_6 = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BD + C\bar{D}$$

$$f_2 = X_1 X_3 X_5 X_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC + C\bar{D}$$

$$f_3 = X_2 X_3 X_4 X_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BD + C\bar{D}$$

$$f_4 = X_2 X_3 X_5 X_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC + C\bar{D}$$

Lehenengoa da merkeena.

Orain maxtermen bidez egin behar dugu.

$$f = (0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 6 \ 7 \ 10 \ 14)_m = (1110011100100010)_m = \\ = (0100010011100111)_M = (0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 11 \ 12)_M$$

Inplikatzaile lehenak sortuko ditugu:

Maxtermak	Konparatuz		Konparatuz
0 0000 X	(0,2)	00-0 X	(0,2,4,6) 0--0
	(0,4)	0-00 X	
2 0010 X			
4 0100 X	(2,3)	001- X	(2,3,6,7) 0-1-
3 0011 X	(2,6)	0-10 X	
6 0110 X	(4,6)	01-0 X	
12 1100 X	(4,12)	-100	2. eta 3. taldeak konparatuz ez dugu beste inplikatzaile- rik ateratzen.
7 0111 X	(3,7)	0-11 X	
11 1011 X	(3,11)	-011	
	(6,7)	011- X	

Inplikatzaile lehenak ondokoak dira:

$$x_1' = (4, 12) = (B + \bar{C} + \bar{D})$$

$$x_2' = (0, 2, 4, 6) = (\bar{A} + \bar{D})$$

$$x_3' = (2, 3, 6, 7) = (\bar{A} + C)$$

$$x_4' = (3, 11) = (\bar{B} + C + D)$$

f funtzioa lortzeko modu guztiak sortzeko taula, hauxe da:

	0	2	3	4	6	7	11	12
$x_1' = (B+C+D) (4, 12)$				x				x
$x_2' = (A + D) (0, 2, 4, 6)$	x	x		x	x			
$x_3' = (A + C) (2, 3, 6, 7)$		x	x		x	x		
$x_4' = B+C+D (3, 11)$			x				x	

f funtzioa betetzeko, maxterm guztiak hartu behar ditugu. Ondoko F' funtzioak "1" balore logikoa eduki behar du.

$$F' = x_2' (x_2' + x_3') (x_3' + x_4') (x_1' + x_2') (x_2' + x_3') x_3' x_4' x_1' = 1$$

Sinplifikatuz:

$$F' = x_1' x_2' x_3' x_4' = 1$$

Hau da, maxtermen bidez eginez, aukera bakarra dago.

$$f_1' = (B+\bar{C}+\bar{D}) (\bar{A}+\bar{D}) (\bar{A}+C) (\bar{B}+C+D)$$

Mintermez egindako aukera merkeena eta maxtermen bidezkoa konparatu egingo ditugu. Bien arteko merkeena hartuko dugu geure soluziotzat.

BIGARREN ATALA

Zirkuitu errepikakorrak.

ZIRKUITU ERREPIKAKORRAK

0. SARRERA

1. BATUGAILUA

1.1. Batugailu bitarra

1.2. Batugailu hamartarra

2. BATU-KENGAILUA

3. GONBARAGAILUA

4. BIDERKAGAILUA

5. MULTIPLEXOREAK

S A R R E R A

Nahiz eta aurreko lana aspergarri eta luzeegi irudi, horri esker gaude une honetan praktikan baliagarri gerta dakizkigukeen sistemak eraikitzeke prest. Beraz, aurretik azaldu denaren beharra eta balioa, aurrerantzean adieraziko ditugun ataletan agertuko zaigu.

Oraingo biderako oinarriak ondo menperaturik ez edukitzeak, traba eta nekeak dekarzkiguke; guk orain agertzen ditugun adibideak, zeuk bakarrik eta zeure aldetik egiteko gauza zarela esango genizuke.

Bestalde, atal honek titulutzat beste asko ere har zitzakeen, baina "errepikakor" hitza hautatzeak zera adierazi nahi digu: sis tema hauetan zati bat hartzen dela oinarri bezala eta nahi adina bider errepikatzen dela.

Guzti hau adibide baten bidez garbiago azalduko dugu; eta hain zuzen ere, adibide gisa batugailua hautatu dugu.

1. B A T U G A I L U A

Demagun, 5+6 batuketa egin nahi dugula. Bi zenbakiok kodu hamartarrean emanak ditugu, baina kodu bitar naturalean jarri behar ditugu, zeren eta erabiliko diren unitate fisikoak bi estatu desberdin baino ez baitituzte bereizten.

Koduetaz luze mintza gintezkeen, baina bi ohar besterik ez ditugu egingo:

- kodu bitar desberdinak agertzen zaizkigu, kodu gaia aztertzerakoan. Sistema digitaletan, eta kalkulagailuetan bereiziki, kodu bitar naturala gehien erabiltzen dena denez, guk hau bakarrik aipatuko dugu; eta, laburtuz, honela deituko dugu: kodu bitarra.
- Era berean jokatuko dugu kodu hamartarrarekin. BCD aipatzen dugunean zera adierazi nahi dugu: kodu bitarra dela baina digituak launaka biltzen ditugula eta honela zenbakia hamartar bezala adierazten dugula.

Adibidez:

Eman dezagun 15 zenbakia kasu guztiotan

kodu bitar (naturalean)	BCD koduan
1 1 1 1	0001 0101

Beraz, batugailuak ere koduen arauera klasifika genitzake. Guk ondoko biok bakarrik aztertuko ditugu:

1.1 Batugailu bitarra.

1.2 Batugailu hamartarra.

1.1 Batugailu bitarra

Lehen bezala, demagun 5+6 batuketa egin nahi dugula. Batugaiok 10-0inarrian daude eta guk 2-oinarrira pasa behar ditugu. Hau berau beste era honetara esan genezake: kodu hamartarretik kodu bitarrera iragan nahi dugula.

	kodu hamartarra	kodu bitarra
(-1)	5	1 0 1
	6	1 1 0

Egin dezagun batugai hauen batuketa

	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
(-2)			1	0	1	A_i
			1	1	0	B_i
			0	1	1	$A_i \oplus B_i$
		1	0	0		C_i
	0	1	0	1	1	
	0	0	0	0		
		1	0	1	1	

Zutabe bakoitzaren gainean ipini dugun zenbakiak, zutabe horretan dauden biten pisua adierazten digu.

Dakigunez, edozein zenbaki era honetan adieraz genezake:

$$(-3) \quad A_0 a^0 + A_1 a^1 + A_2 a^2 + \dots + A_n a^n$$

a: oinarria izanik
 a^i : bitaren pisua
 A_i : bitaren balioa.
 0 ala 1.

baina, ezpresio hau baliagarria dugu edozein oinarritik 10-oinarrira iragateko, noski.

Gure kasuan,

(-4)

kodu bitarra $A_3 A_2 A_1 A_0$		kodu hamartarra $A_1 A_0$
1 0 1	$1.2^0 + 2^1 + 2^2 =$	5
1 1 0	$0.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 =$	6
1 0 1 1	$1.2^0 + 1.2^1 + 0.2^2 + 1.2^3$	1 1

(-2) taulan dakusagunez, $5 + 6 = 11$ eragiketa egiteko honako prozedura segitu dugu:

a. Pisu berdina duten biten batuketa. Lehenengo pauso hau betetzeko, honelako egitaula bat erabili dugu.

(-5)

A_i	B_i	$S_i = A_i \oplus B_i$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Dakusagunez, S_i emaitzak "ALA" eragiketaren egitaula berbera du. Beraz, $S_i = A_i \oplus B_i$ idatz genezake.

b. Baina arrastera, bururakoa, kontutan hartuko bagenu, $4 + 4 = 0$ denik ez baitugu onartzen, honela osotu beharko genuke aurreko egitaula.

(-6)

A_i	B_i	S_i	C_i
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

C_i irteera arrastera (bururakoa) izanik

C_i aldagaiak hartzen duen balore logikoa, $A_i \oplus B_i$ emaitzaren azpian jartzen dugu, baina digitu edo bit bat ezkererantz desplazaturik.

d. Eta lorturiko bi emaitzak, esandako ordenan jarririk noski, batugaiak bihurtzen dira eta a) eta b) puntuetan aipaturiko prozedura berberaz segitzen dugu.

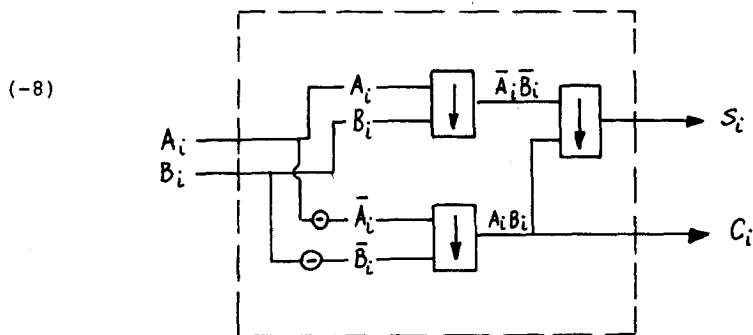
e. Batuketa amaitutzat jotzen dugu, C_i arrasterek zero balore logikoa hartzen dutenean.

(-6) egitaulan duguna funtzio eran adierazten dakigu:

$$\begin{aligned} S_i &= \bar{A}_i B_i + A_i \bar{B}_i = A_i \oplus B_i = (\bar{A}_i + \bar{B}_i)(A_i + B_i) = \\ &= (\bar{A}_i \downarrow \bar{B}_i) \downarrow (A_i \downarrow B_i) \end{aligned}$$

$$C = A_i B_i = \bar{A}_i \downarrow \bar{B}_i$$

Beraz, NOR ate logikoak erabiltzen baditugu, zera lortzen dugu:



Honi, semibatugailua deituko diogu

$\oplus$ ikurrarekin konplementagailua adierazten dugu. Semibatugailuan ikusten dugunez, $\ominus$ sistemaren sarrera A_i denean, irteera

$\bar{A}_i$ da.

Beraz, era askotara eraiki genezake konplementagailua. Egin dezagun, bada, NOR ate logikoekin jarraituz.

$$A_i \downarrow A_i = \bar{A}_i \bar{A}_i = \bar{A}_i$$

Horregatik, konplementagailua beste NOR ate logiko bat izan daiteke, bi sarrerak berdinak izanez.

Semibatugailu deritzogun honek, bit bakarra duten zenbakiak batzeko balio duela bistan dago, baina nahi adinbat bit dituzten zenbakiak erabiltzen ditugunez, beste bide laburrago bat aurkeztu ten saiatuko gatzazkizue.

Lehen C_i arrastera irteera bezala kontsideratu dugu. Oraingo honetan sarrera bezala hartuko dugu. Honela, aurreko bitetan gertatu dena ere kontutan harturik, sistema konposatu bat eraikitzeko bidean abiatzen gara, eta, hain zuzen ere, hori lortu nahi dugu.

Beraz, egitaula berriaren aldagaiak A_i , B_i , eta $A_{i-1}B_{i-1}$ bietan lorturiko arrastera izango dira.

(-9)

A_i	B_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Egitaula hau beste era honetan ere ager dezakegu:

$$(-10) \quad \begin{cases} S_i = \bar{A}_i \bar{B}_i C_{i-1} + \bar{A}_i B_i \bar{C}_{i-1} + A_i \bar{B}_i \bar{C}_{i-1} + A_i B_i C_{i-1} \\ C_i = \bar{A}_i B_i C_{i-1} + A_i \bar{B}_i C_{i-1} + A_i B_i \bar{C}_{i-1} + A_i B_i C_{i-1} \end{cases}$$

Bi funtzio hauen sinplifikazioak egiteko, KARNAUGH-en mapak erabiliko ditugu.

a. S_i funtzioa

(-11)

$\begin{matrix} B_i C_{i-1} \\ A_i \end{matrix}$		00		01		11		10	
		0	1	2	3	4	5	6	7
0									
1									

b. C_i funtzioa

(-12)

$\begin{matrix} B_i C_{i-1} \\ A_i \end{matrix}$		00		01		11		10	
		0	1	2	3	4	5	6	7
0									
1									

Mapotan zera dakusagu: S_i irtekinak adjerentziarik ez duela, eta, beraz, bide honetatik behintzat sinplikaziorik egitea ez zaigu posible. Baina C_i funtzioarekin ez da berdina gertatzen.

$$(-13) \quad \begin{cases} S_i = \bar{A}_i \bar{B}_i C_{i-1} + \bar{A}_i B_i \bar{C}_{i-1} + A_i \bar{B}_i \bar{C}_{i-1} + A_i B_i C_{i-1} \\ C_i = A_i B_i + A_i C_{i-1} + B_i C_{i-1} \end{cases}$$

Baina S_i funtzioa beste era honetan ere idatz daiteke:

$$(-14) \quad S_i = C_{i-1} (\bar{A}_i \bar{B}_i + A_i B_i) + \bar{C}_{i-1} (\bar{A}_i B_i + A_i \bar{B}_i)$$

$\bar{A}_i B_i + A_i \bar{B}_i = \psi$ egiten badugu eta De-Morgan-en Teorema aplikatuz, zera ikusten dugu:

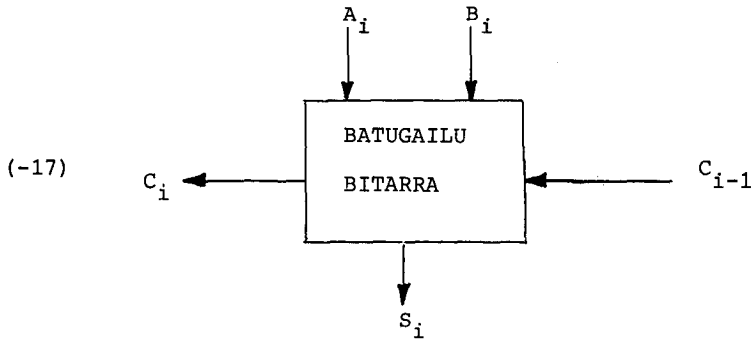
$$(-15) \quad \bar{\psi} = \overline{(\bar{A}_i B_i + A_i \bar{B}_i)} = (\bar{A}_i + \bar{B}_i) (A_i + B_i) = A_i B_i + \bar{A}_i \bar{B}_i = \bar{\psi}$$

Beraz, $\psi = \bar{A}_i B_i + A_i \bar{B}_i = A_i \oplus B_i$ "ala" eragiketa definitzen baita.

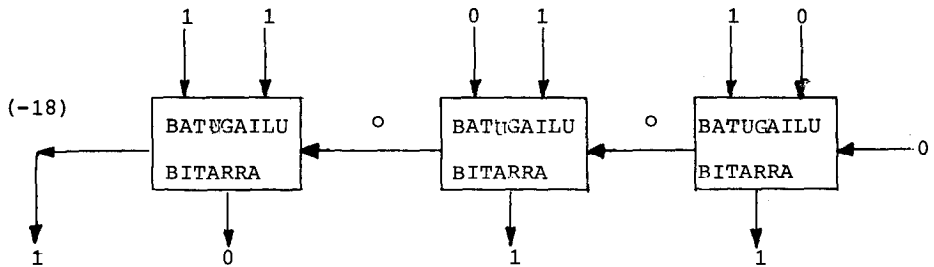
Azken batez, (-13) ekuazioak honela geratzen dira:

$$(-16) \quad \begin{cases} S_i = A_i \oplus B_i \oplus C_{i-1} \\ C_i = A_i B_i + A_i C_{i-1} + B_i C_{i-1} \end{cases}$$

A_i, B_i, C_{i-1} , aldagaiak sarrera bezala harturik, eta S_i eta C_i irteerako funtzio bezala kontsideratzen baditugu, honelako bloke bat dugu definiturik.



Egin dezagun, bada, 5+6 eragiketa



Dakusagunez, berdin zaigu 3 ala 11 bitez osoturiko zenbakien arteko batuketara egitea, beti bloke berdina errepikatzen baita.

Horregatik era honetan osotutakoak, "zirkuitu errepikakorrak" deitzen ditugu.

1.2 Batugailu hamartarra

Orain arte ikusitako batugailuak zenbaki bitar naturalak batzen zituen. Adibidez:

(-19)

	Kodu hamartarra	Kodu bitarra	BCD kodua
Batugaiak	8	1 0 0 0	1 0 0 0
	1 0	1 0 1 0	1 0 0 0 0
Emaitza	1 8	1 0 0 0 0	1 1 0 0 0

19. taulan garbi dakusagu, BCD koduan emanikako zenbakiak batzeko ere, bitarrentzat erabili dugun blokeak ere neurri batetan balio dezakeela, zeren eta digitu bitarren batuketa ere egiten baita.

Ikus dezagun orain nola iragan gaitezkeen kodu bitarretik BCD delako kodura.

BCD koduan eta kodu bitar naturalean 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zenbakiak berdin adierazten dira. Arazoa hamarretik aurrera agertzen zaigu. Egin dezagun, bada, honako taula hau.

	Kodu bitar naturalean	B C D
(-20)	10	1 0 1 0
	11	1 0 1 1
	12	1 1 0 0
	13	1 1 0 1
	14	1 1 1 0
	15	1 1 1 1
	16	1 0 0 0 0
	17	1 0 0 0 1

Nola lor genezake batetik besterako pausoa?

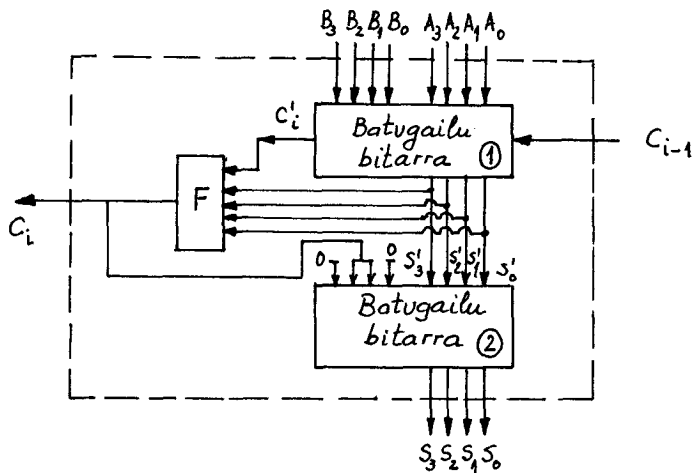
16 eta 17 konfigurakuntzetan ikusten dugunez, nahikoa dugu bitar konfigurakuntzari 0 1 1 0 konfigurakuntza batzea, BCD koduan duguna lortzeko. Baina lege hau baino handiagoko konfigurakuntza guztietan betetzen da. Adibidez:

1 1	1 0 1 1
+ 6	0 1 1 0
	1 0 0 0 1

Konfigurakuntza honek BDC koduan

11 zenbakia adierazten digu.

Hurrengo pausoa batugailu hamartarra erakitzea izango da, baina batugailu bitarrak erabiliz. Lau bitetako batugailu bitarra erabiliko dugu. Batugailu hau lau batugailu bitar sinplez osatu ko da eta lauron loturak (-18) irudiaren antzera eginak egongo dira.



F funtzioak bat balore logikoa hartuko du, ① batugailuaren arrasterak bat balore logikoa hartzen duenean eta $S'_3 S'_2 S'_1 S'_0$ konfigurakuntza 9 baino handiagoa denean. Bi kasu hauetan $S'_3 S'_2 S'_1 S'_0$ konfigurakuntzari 0 1 1 0 zenbaki bitarra batzen diogu, BCD delako kodura iragateko hain zuzen.

Azter dezagun F funtzioa:

. ① batugailuaren arrastera bat denean,

$$F = C'_1$$

. $S'_3 S'_2 S'_1 S'_0$ konfigurakuntzak 9 baino gehiago balio duenean. Kasu hau (10, 11, 12, 13, 14, 15) mintermak agertzen direnean gertatzen da.

Beraz, $F = (10, 11, 12, 13, 14, 15)_m$

Egin dezagun funtzio honen sinplifikazioa

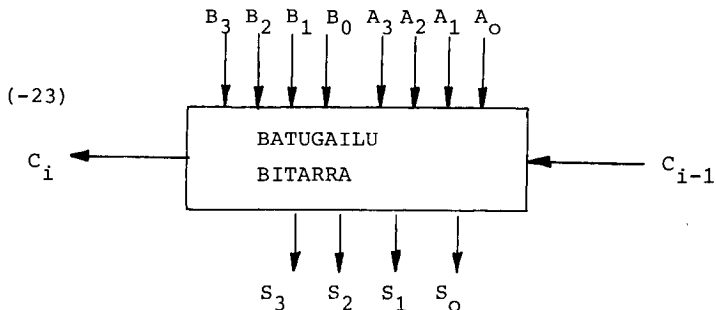
$S'_3 S'_2 S'_1 S'_0$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12 x	13 x	15 x	14 x
10	8	9	11 x	10 x

$$F = S'_3 S'_2 + S'_1 S'_3$$

Beraz, bi kasuok elkarturik

$$(-22) \quad F = S'_3 S'_2 + S'_1 S'_3 + C'_i$$

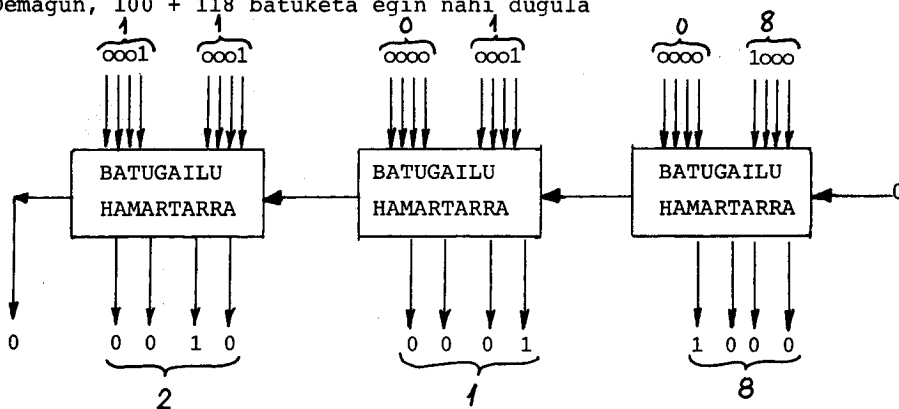
Honela, bi batugailu bitarrekin eta F delako funtzioarekin batugailu hamartarra ere definiturik eta eraikita geratzen zaigu. Horregatik aurrerantzean era honetan adieraziko dugu (-21) irudian dugun sistema osoa.



$B_3 B_2 B_1 B_0$ eta $A_3 A_2 A_1 A_0$ konfigurakuntzek bi digitu hamartar adierazten dizkigute. Digitu hauek BCD delako koduan emanak daude.

(~23) blokea nahi adinbat aldiz errepikaturik edozein zenbaki hamartar batuko duen sistema eraikitzeko aukera dugu. Ikus dezagun adibide bat:

Demagun, $100 + 118$ batuketa egin nahi dugula



2. BATU - KENGAILUA

Kenketa eta batuketaren arteko erlazioak zelakoak diren aztertzea, guztiz interesgarria gerta dakigu. Honela, batugailuan erabili dugun bloke berbera erabiltzea posiblea izango zaigu.

Demagun, A eta B lau bitez osaturiko zenbaki bitarrak direla, eta batuketa nahiz kenketa egiteko sistema eraiki nahi dugula.

Zenbakiok erlazio hauek betetzen dituzte:

- (1) A gehi $\bar{A} = 1111$
- (2) A gehi $\bar{A}$ gehi 1 = 1111 gehi 0001 = 10000
Beraz, A = 10000 ken $\bar{A}$ ken 1
- (3) Honela, (B ken A) = (B gehi $\bar{A}$ gehi 1) ken 10000

Azken ekuazio honek, (B ken A) eragiketa egiteko (B gehi $\bar{A}$ gehi 1) egitea nahikoa zaigula eta "ken 10000" terminoak (B gehi $\bar{A}$ gehi 1) batuketaren bostgarren bita arbuia genezakeela, adierazten digu.

Adibidez: Demagun, B=1100 eta A=1001 direla eta B-A eragiketa egin nahi dugula.

$$B-A = 0011$$

$$B+A+1 = 1000 + 0110 + 0001 = 0011 \quad \text{Hemen ere, bostgarren bita arbuiatu egin dugu.}$$

Baina metodo hau B zenbakia A baino handiago denean bakarrik erabil daiteke. Kasu honetan arrasterak, aipaturiko bostgarren bit honek beti "1" balore logikoa hartzen du. B zenbakia A baino txikiago denean, arrasterak beti "0" balore logikoa hartzen du.

Har dezagun berriro (3) ekuazioa

$$(3) \quad (B \text{ ken } A) = (B \text{ gehi } \bar{A} \text{ gehi } 1) \text{ ken } 10000 \\ \text{baina, } 0001 = 10000-1111$$

$$(4) \quad (B \text{ ken } A) = (B \text{ gehi } \bar{A}) \text{ ken } 1111 = \\ = \text{ken } \left[1111 \text{ ken } (B \text{ gehi } \bar{A}) \right] = \text{ken } \overline{(B \text{ gehi } \bar{A})}$$

Beraz, arrasterarik ez dugunean, kenketaren emaitza lortzen dugu. Kasu hau B zenbakia A baino txikiago denean gertatzen zaigu.

Demagun, kenketak eta batuketak egiten dituen sistema bar eraiki nahi dugula. Horretarako, M aldagai berri bat sartzen dugu.

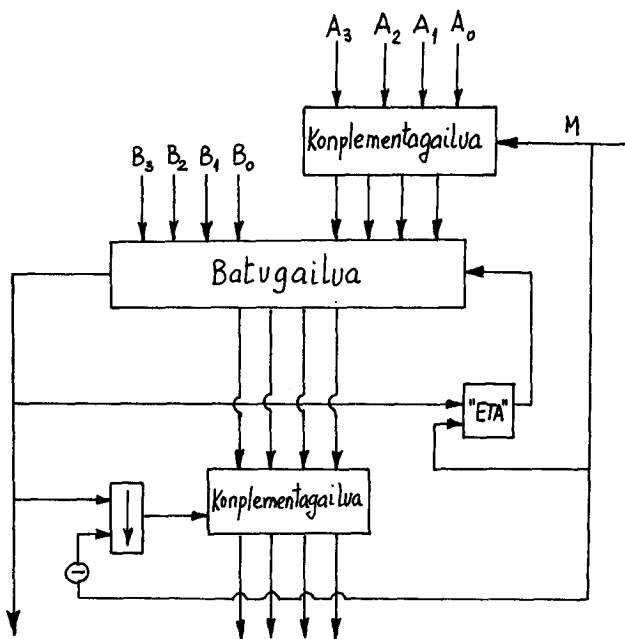
$M = 0$ denean, sistemak batuketa egingo du. $B + A$.

$M = 1$ denean, sistemak kenketa egingo du. $B - A$.

$M = 1$

$\begin{cases} B > A \text{ denean, } B + \bar{A} + 1 \text{ lortu behar dugu.} \\ B < A \text{ denean, } B + \bar{A} \text{ lortu behar dugu.} \end{cases}$

Baldintza guzti hauek kontutan harturik, batu-kengailua eraikitzeko prest gaude.



Batugailuaren arrasterak kenketaren zeinua emango digu: zero denean, negatiboa, eta bat denean, positiboa.

$M = 0$ denean, sistemak kenketa egingo du, eta horretarako A lortu behar dugu. A konplementagailuaren bidez lor genezake. Nahikoa zaigu, NAND ate logikoak erabiltzea, zeren eta $a_0 \uparrow M$ eragiketaren emaitza, M bat denean, $\bar{a}_0$ baita, eta M zero denean, a_0 berbera lortzen baitugu.

Arrastera dugunean eta kenketa egiten ari garenean, bat gehitzen diogu batuketaren emaitzari, (3) ekuazioan frogatu dugun bezala. Arrazoi horregatik $M.C_i = C_{i-1}$ egiten dugu, "ETA" ate logikoaz baliaturik.

Kenketa egiten dihardugunean eta arrasterak zero balore logikoa hartzen duenean, batugailuaren emaitza konplementatu egin behar dugu. Kasu hau $M=1$ eta $C_i = 0$ direnean bakarrik gertatu behar du. $\bar{A}$ lortzeko erabili dugun konplementagailu berbera hartu nahi badugu. $M=1$ eta $C_i=0$ direnean konplementagailu horren sarrera bat izan behar du. Hau betetzeko, $\bar{M} \downarrow C_i$ funtzioa definitu dugu. Funtzio honek $M=1$ eta $C_i = 0$ direnean bakarrik hartzen du "1" balore logikoa.

Honela, batu-kengailua ere eraikirik dugu.

3. G O N B A R A G A I L U A

Informatikan sarri egiten den eragiketa bat, ondoko hau izaten da: kontagailu edo memoriako posizio batetan dugun zenbaki bitarra beste "memori-hitz" batekin gonbaratzea. Gonbaraketa honen emaitzak programaren posizio desberdinetara eraman gaitzake.

Adibidez: A eta B zenbaki bitarrak gonbaratzean, hiru emaitzok lor ditzakegu:

$A > B$ (orduan programaren posizio batetara salto egingo genuke.

$A < B$ (kasu honetan saltoa beste posizio batetara egingen da).

$A = B$ (programaren sekuentzia normala segituko genuke).

Beraz, zirkuitu logikoetan gonbaragailuak nahiko erabiliak direnez gero, eta bloke independente bezala edukitzeak bere abantailak dakartzanez, zirkuitu erreplikakorretan gonbaragailua ere aztertua izango da.

Zirkuitu erreplikakorrek aztertzen gabiltzanez, bi digitu bitar gonbaratuko dituen blokea bakarrik definituko dugu eta bloke hori erreplikatz, nahi adinbat digitu gonbaratzen duen sistema eraikitzaera saiaturako gara.

Demagun a_i eta b_i , A eta B zenbaki bitarren bi digitu direla. Gonbara ditzagun beren artean:

a_i	b_i	H_i	T_i	I_i
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

$H = 1 \Rightarrow a_i, b_i$ baino handiagoa ; $I = 1 \Rightarrow a_i = b_i$
 $T = 1 \Rightarrow a_i, b_i$ baino txikiagoa

Honela bi digituok gonbaraturik ditugu, baina bi digitu baino gehiago gonbara nahi ditugunez, beste aldagai berri bat sartu ko dugu.

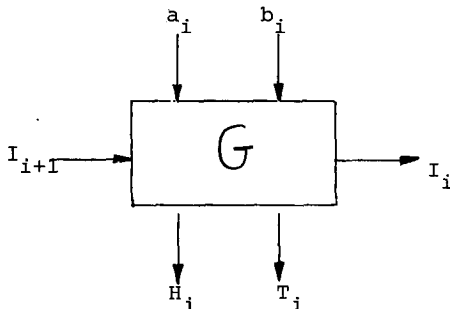
Aldagai berri hau I_{i+1} deitzen dugu. Azpiindizeak garbi azaltzen digu, I_i+1 delakoa a_{i+1} eta b_{i+1} biten arteko gonbaraketaren emaitza dela. I_{i+1} irteerak balore logikotzat zero hartzen duenean, gonbaraketa amaitutzat jotzen dugu, zeren eta bi zenbaki bitar-natural elkarren desberdinak izateko, beraien digitu bat desberdina edukitzea nahikoa baita.

Beraz, egitaula honela geratzen zaigu:

I_{i+1}	a_i	b_i	H_i	T_i	I_i
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Dakusagunez, $I_{i+1} = 0$ denean hiru irtekin-funtzioek zero balore logikoa hartzen dute eta honela adierazten dugu praktikoki, gonbaraketa amaitu dugula.

Aurreko egitaulan honelako bloke bat definitzen dugu:



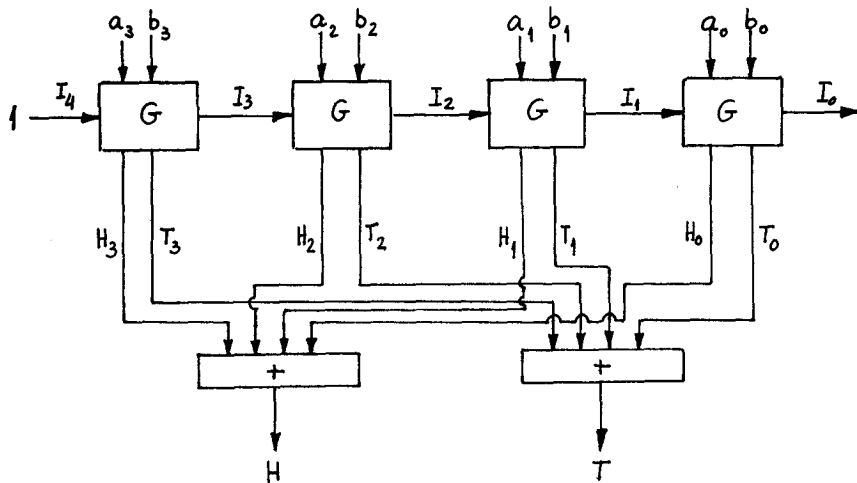
$$H_i = a_i \bar{b}_i I_{i+1}$$

$$T_i = \bar{a}_i b_i I_{i+1}$$

$$I_i = \bar{a}_i b_i I_{i+1} + a_i b_i I_{i+1}$$

Honelako blokeak errepikatuz, n-digitu bitar gonbaratzen dituen gonbaragailua eraiki dezakegu.

Adibide bezala, 4 biteko gonbaragailua adieraziko dugu.



Bi zenbaki bitar hauek gonbaratu ditugu

$$A = a_3 a_2 a_1 a_0$$

$$B = b_3 b_2 b_1 b_0$$

$I_0 = 1$ bada, bi zenbakiok berdina dira.

$I_0 = 0$ bada, H eta T emaitzak aztertu behar ditugu.

$$H = H_3 + H_2 + H_1 + H_0$$

$$T = T_3 + T_2 + T_1 + T_0$$

Dakusagunez, nahikoa da, H_3 edo H_2 edo H_1 edo H_0 "1" balore logikoa hartzea, H emaitzak ere balore logiko berbera hartzeko.

Berdin gertatzen da T emaitzarekin.

4. B I D E R K A G A I L U A

Demagun, A eta B zenbaki bitar naturalak biderkatu nahi ditugula. Demagun, halaber, bi zenbakiok hiru bitez osoturik daudela, eta A delakoa biderkagaia eta B biderkatzaile bezala hartzen ditugula.

$$\left. \begin{array}{l} A = a_2 a_1 a_0 \\ B = b_2 b_1 b_0 \end{array} \right\} \quad a_i \text{ eta } b_i, A \text{ eta } B \text{ zenbakien bitak izanik.}$$

Beraz, biderkaketa era honeta egingo genuke:

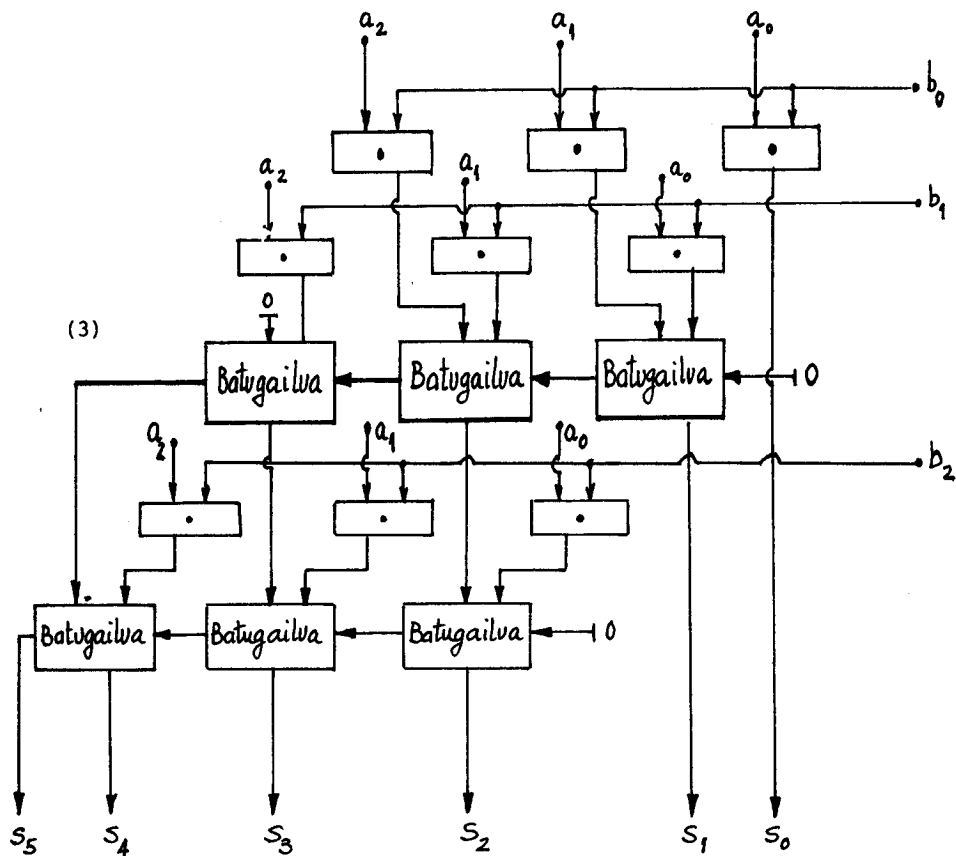
$$(1) \quad \begin{array}{r} \begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} a_2 b_2 & a_1 b_0 & a_0 b_0 \\ a_2 b_1 & a_1 b_1 & a_0 b_1 \\ a_2 b_2 & a_1 b_2 & a_0 b_2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{array} \end{array}$$

Dakusagunez, nahikoa zaigu bi digituren biderkaketak aipaturiko eran batzea, bilatzen dugun emaitza lortzeko. Beraz, bi digitu bitarren arteko biderkaketa definitzea, beharrezkoa zaigu; eta honelako egitaula baten bidez egin dezakegu.

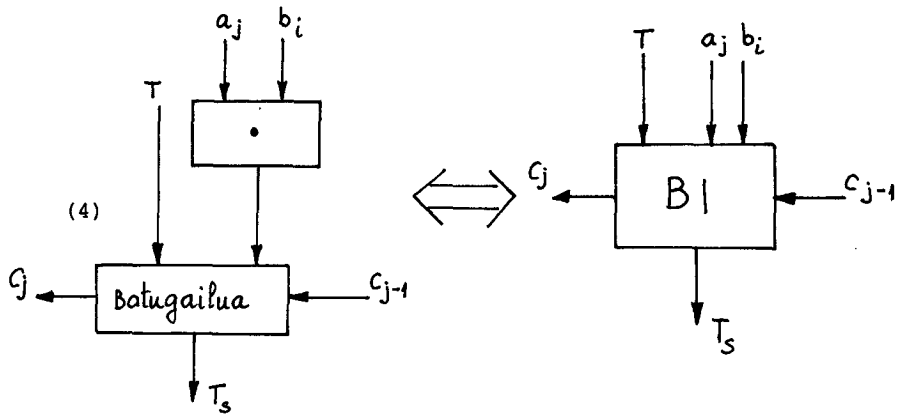
(2)

a_i	b_i	B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

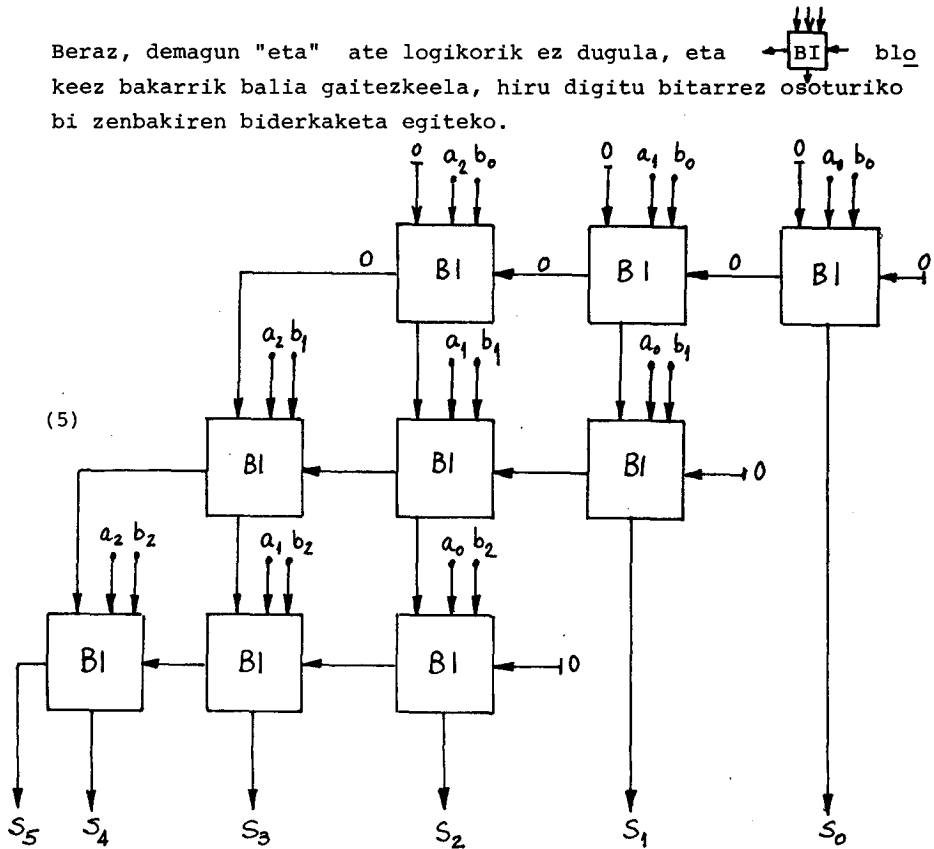
Egitaula hau "ETA" eragiketaren berbera dugu; beraz, "ETA" ate logikoekin bi digituren biderkaketa egin dezakegu. Bestalde, batu gailua ere definiturik dugunez, ez dugu oztoporik, hiru digituz osoturiko biderkagailua eraikitzeko.



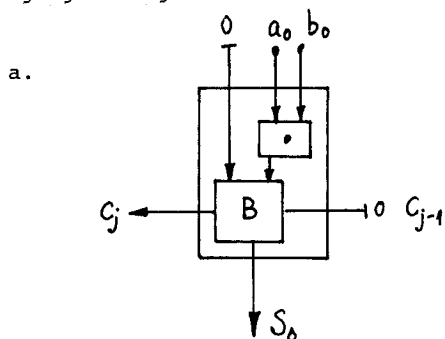
Aurreko sisteman, lehenengo mailan izan ezik, b_0^* A biderkaketa partzialean halegia, bloke konposatu bat errepikatzen dela, begi bistan dugu. Errepikatzen den blokea hauxe da:



Beraz, demagun "eta" ate logikorik ez dugula, eta blo keez bakarrik balia gaitzkeela, hiru digitu bitarrez osoturiko bi zenbakiren biderkaketa egiteko.



(3) eta (5) eraikuntzak berdinak direla frogatzeko, ohar batzu egingo ditugu



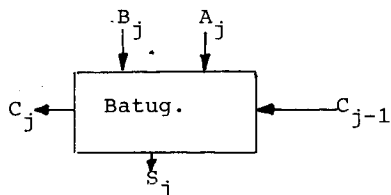
T eta C_{j-1} sarrerek "0" balore logikoa dutenez gero, $a_0 \cdot b_0$ bat denean bakarrik izango da bat batugailuaren emaitza. Honela,

$$S_0 = a_0 \cdot b_0$$

b. Bestalde, C_{j-1} eta T "0" direnean, batugailuaren C_j arrasterak beti "0" balore logikoa hartuko du. Beraz, egin dugun aldaketak justifikaturik dugu

c. $b_0 \cdot A$ egiten den mailan, **BT** blokeen arteko geziak ere soberan daude, beti zero baitira; baina sistemak maila guztietan simetria ukan dezan jarriak izan dira.

Saia gaitezen, biderkagailuaren irteera-funtzioak adierazten. Horretarako, batugailua aztertzerakoan lortu genituen ekuazioak behar ditugu. (-16)



$$S_j = A_j \oplus B_j \oplus C_{j-1}$$

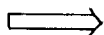
$$C_j = A_j B_j + A_j C_{j-1} + B_j C_{j-1}$$

Biderkagailuaren kasuan, zera betetzen da:

$$A_j = a_j b_i$$

$$S_j = T_s$$

$$B_j = T$$



$$T_s = a_j b_i \oplus T \oplus C_{j-1}$$

$$C_j = a_j b_j (T + C_{j-1}) + T C_{j-1}$$

Bi funtzio hauek NAND, NOR edo beste edozein ate logikorekin eraiki genitzake.

5. M U L T I P L E X O R E A K

Multiplexore deituriko sistemak, sistema konbinatzaileak dira, eta beraz, orain arte ikusitakoen antzerakoak: "ETA" eta "EDO" eragiketen bidez egindako aldagaien konbinaketak. Oraingoz, denbora-pultsuak ez dira kontutan hartzen.

Multiplexoreek bi sarrera-mota dituzte:

- a. Sarrera kontrolatuak edo kanaleak.
- b. Sarrera kontrolatzaileak edo selekzio-sarrerak.

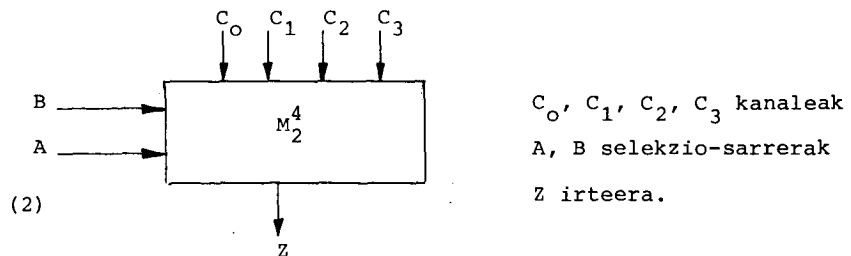
Sarrera kontrolatuak edo kanaleak n badira, sarrera kontrolatzaileen kopuruak (m) erlazio hau bete behar du:

$$(1) \quad 2^m = n$$

Beraz, kanaleak lau balira, aldagai kontrolatzaileak 2 lirateke, eta kanaleak zortzi balira, kontrolatzaileak kasu honetan hiru lirateke.

Honela eman genezake multiplexoreen definizioa: "Selekzio-sarreen konbinaketa bitar bakoitzaren kasuan, kanale baten informazioa bakakarrik ematen duen sistema".

Demagun $m = 2$ dela, selekzio-sarrerak bi direla halegia, eta kanaleak lau izango dira (1) erlazio bete dadin.



Multiplexoreak honelako egitaula betetzen du:

(3)

A	B	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	Z
0	0	0	X	X	X	0 1
0	1	X	0 1	X	X	0 1
1	0	X	X	0 1	X	0 1
1	1	X	X	X	0 1	0 1

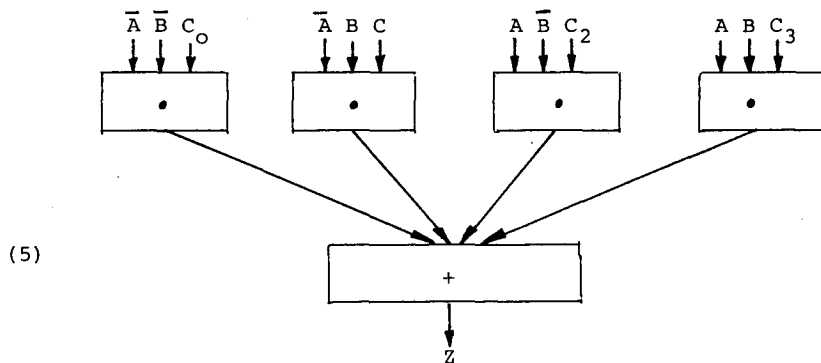
Egitaula hau analitikoki honela adieraz genezake:

(4)

$$Z = \bar{A}\bar{B}C_0 + \bar{A}BC_1 + A\bar{B}C_2 + ABC_3$$

X ikurriak zera adierazten digu: aldagai horrek zero zein bat (baina bietako bat) balore logikoak har ditzakeela, Z funtzioaren balioa aldatu gabe.

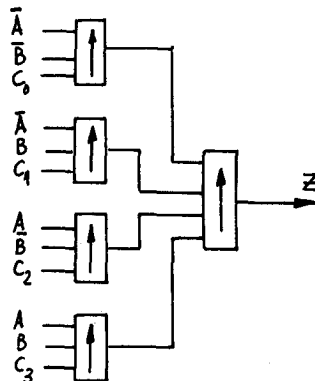
"ETA" (AND) eta "EDO" (OR) ate logikoak erabiliz, honelako eran eraiki dezakegu multiplexore hau:



NAND ate logikoak erabiltzen baditugu, Z funtzioa honela idazten dugu:

$$z = (\bar{A}\bar{B}\uparrow C_0) \uparrow (\bar{A}\bar{B}\uparrow C_1) \uparrow (A\bar{B}\uparrow C_2) \uparrow (A\bar{B}\uparrow C_3)$$

(6)



APLIKABIDEAK:

1. Bi selekzio-sarrera eta lau kanale dituen multiplexore batekin, hiru aldagai dituen edozein funtzio logiko eraiki genezake. Egin dezagun, bada.

Hiru aldagaietako funtzio baten garapen kanonikoa hauxe dugu:

$$(7) \quad Z = \bar{A}\bar{B}\bar{C}f_0 + \bar{A}\bar{B}Cf_1 + \bar{A}B\bar{C}f_2 + \bar{A}BCf_3 + A\bar{B}\bar{C}f_4 + A\bar{B}Cf_5 + AB\bar{C}f_6 + ABCf_7$$

($f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$) direlakoak funtzio honen mintermak izanik.

Amankomuneko faktoreak kontutan hartuz.

$$(8) \quad Z = \bar{A}\bar{B}(\bar{C}f_0 + Cf_1) + \bar{A}B(\bar{C}f_2 + Cf_3) + A\bar{B}(\bar{C}f_4 + Cf_5) + AB(\bar{C}f_6 + Cf_7)$$

Multiplexoreen funtzioarekin konparatuz, (8) = (3) eginez halegia, zera lortzen dugu:

$$(9) \quad C_0 = \bar{C}f_0 + Cf_1$$

$$C_1 = \bar{C}f_2 + Cf_3$$

$$C_2 = \bar{C}f_4 + Cf_5$$

$$C_3 = \bar{C}f_6 + Cf_7$$

Demagun, mintermen bidez emanikako $f = (3, 4, 6, 7)$ funtzio logikoa multiplexoreen bidez eraiki nahi dugula.

$f = (3, 4, 6, 7)$ delakoak zera esan nahi du:

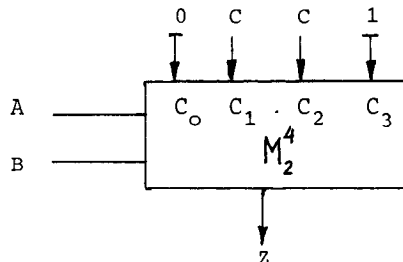
$f_3 = f_4 = f_6 = f_7 = 1$ direla, $f_0 = f_1 = f_2 = f_5 = 0$ izanik.

Baloreok (9) erlazioetara eramaten baditugu, hauxe lortzen dugu:

$$\begin{aligned}
 (10) \quad C_0 &= 0 \\
 C_1 &= C \\
 C_2 &= \bar{C} \\
 C_3 &= 1
 \end{aligned}$$

Bi selekzio-sarreratako eta lau kanaletako multiplexorea hartzen badugu eta M_2^4 deitzen badugu, bilatu nahi dugun funtzioa honela eraikitzen da:

$$Z = f(3, 4, 6, 7)$$



2. Era berean, hiru selekzio-sarrera eta zortzi kanale dituen-arekin, lau aldagaiez osoturiko edozein funtzio logiko eraikitzea ere posiblea zaigu. Lau aldagaitako funtzio baten garapen kanonikoa hauxe da:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad Z = & \bar{A}\bar{B}\bar{C}(\bar{D}X_0 + DX_1) + \bar{A}\bar{B}C(DX_2 + DX_3) + \bar{A}B\bar{C}(DX_4 + DX_5) + \bar{A}B C(\bar{D}X_6 + DX_7) \\
 & + A\bar{B}\bar{C}(\bar{D}X_8 + DX_9) + A\bar{B}C(\bar{D}X_{10} + DX_{11}) + AB\bar{C}(\bar{D}X_{12} + DX_{13}) + \\
 & + ABC(\bar{D}X_{14} + DX_{15})
 \end{aligned}$$

Garapen kanoniko honetan, amankomuneko faktoreak kontutan harturik daude.

Zortzi kanale eta hiru selekzio-sarrera dituen M_3^8 multiplexore baten ekuazioa, hauxe da:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad Z = & \bar{A}\bar{B}\bar{C}f_0 + \bar{A}\bar{B}Cf_1 + \bar{A}B\bar{C}f_2 + \bar{A}B C f_3 + A\bar{B}\bar{C}f_4 + A\bar{B} C f_5 + A B \bar{C} f_6 + \\
 & + A B C f_7
 \end{aligned}$$

(11)=(12) eginez gero, zera lortzen dugu:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \bar{D}X_0 + DX_1 \\
 f_1 &= \bar{D}X_2 + DX_3 \\
 f_2 &= \bar{D}X_4 + DX_5 \\
 f_3 &= \bar{D}X_6 + DX_7 \\
 (13) \quad f_4 &= \bar{D}X_8 + DX_9 \\
 f_5 &= \bar{D}X_{10} + DX_{11} \\
 f_6 &= \bar{D}X_{12} + DX_{13} \\
 f_7 &= \bar{D}X_{14} + DX_{15}
 \end{aligned}$$

f_i ; $i : 0, 1, \dots, 7$; M_3^8 multiplexoaren kanaleak izanik.

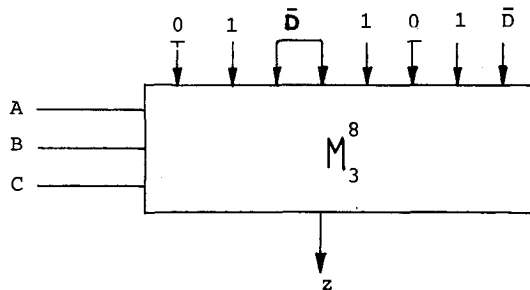
X_j ; $j : 0, 1, \dots, 7$; lau aldagaitako edozein funtzioaren mintermak izanik.

Adibidez, demagun $f = (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 14)_m$ funtzioa eraiki nahi dugula. Kasu honetan

$$\begin{aligned}
 X_2 = X_3 = X_4 = X_6 = X_9 = X_{12} = X_{13} = X_{14} &= 1 \\
 X_0 = X_1 = X_5 = X_7 = X_{10} = X_{15} &= 0
 \end{aligned}$$

Balore hauek (13) ekuazioetara eramaten baditugu, honako hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 0 \\
 f_1 &= 1 \\
 f_2 &= \bar{D} \\
 f_3 &= \bar{D} \\
 f_4 &= 1 \\
 f_5 &= 0 \\
 f_6 &= 1 \\
 f_7 &= \bar{D}
 \end{aligned}$$



Beraz, eraiki nahi genuen funtzioa lortu dugu.

3, Aurretik definitu diren funtzio guztiak, multiplexoreen bidez ere eraiki genitzake.

Adibide modura, batugailu bitar baten sistesia azalduko dugu.

Batugailuaren egitaula: (-9)

A_i	B_i	C_{i-1}	S_i	C_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S_i = \bar{A}\bar{B}C_{i-1} + \bar{A}B\bar{C}_{i-1} + A\bar{B}\bar{C}_{i-1} + ABC_{i-1}$$

$$C_i = \bar{A}\bar{B}C_{i-1} + \bar{A}BC_{i-1} + A\bar{B}C_{i-1} + ABC_{i-1}$$

S_i , C_i irteera -funtzio hauek mintermen adierazpidez idaz ditzakegu:

$$S_i = f(1,2,4,7)$$

$$C_i = f(3,5,6,7)$$

Demagun, M_2^4 motako bi multiplexore ditugula; horregatik, (9) ekuazioak hartuko ditugu.

$$C_0 = \bar{C}f_0 + Cf_1$$

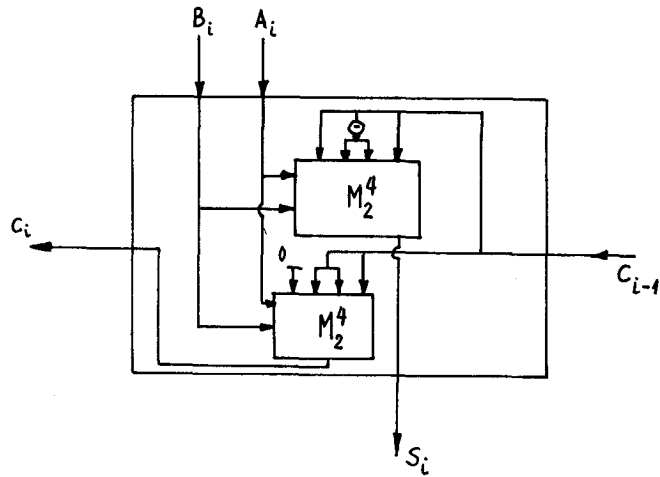
$$C_1 = \bar{C}f_2 + Cf_3$$

$$C_2 = \bar{C}f_4 + Cf_5$$

$$C_3 = \bar{C}f_6 + Cf_7$$

$$S_i = f(1,2,4,7) \implies \begin{aligned} C_0 &= C \\ C_1 &= \bar{C} \\ C_2 &= \bar{C} \\ C_3 &= C \end{aligned}$$

$$C = f(3,5,6,7) \implies \begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= C \\ C_2 &= C \\ C_3 &= 1 \end{aligned}$$



⊖ ikurrak, inbertsore edo konplementagailu bat jartzen dugula agertzen digu.

HIRUGARREN ATALA

- I. Zirkuitu sekuentzialak
- II. Kontagailuak
- III. Desplazamendu-erregistroa.

I ZIRKUITU SEKUENTZIALAK

1. IDEIA OROKORRAK
2. FLIP-FLOP-ak:
 - a. T Flip-Flopa
 - b. D Flip-Flopa
 - c. R-S Flip-Flopa
 - d. J-K Flip-Flopa
3. ZIRKUITU SEKUENTZIALAREN SINTESIA

II KONTAGAILUAK

1. IDEIA OROKORRAK
2. KONTAGAILU SINKRONOEN DISEINUA
3. KONTAGAILU ASINKRONOEN SINTESIA

III DESPLAZAMENDU-ERREGISTROA

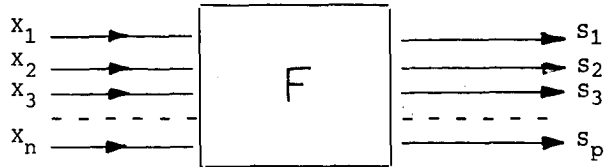
1. DESPLAZAMENDU-ERREGISTROA ZER DEN
2. ARIKETAK.

I. ZIRKUITU SEKUENTZIALAK

1. IDEIA OROKORRAK

Sistema askotan ez dugu kontutan hartzen denborazko aldagaia eta orduan, irteerako egoera logikoa bakarrik sarrerako egoeraren menpean aurkitzen da, kontutan hartu gabe aurreko irteeraren egoera; honelako sistemei SISTEMA LOGIKO KONBINAZIONALAK deitzen zaie.

Pentsa desagun F sistema dugula:



$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sarrerako aldagaiak

$(S_1, S_2, \dots, S_p)$ irteerako aldagaiak

Sistema logiko konbinazionaletan:

$$S_i = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

SISTEMA SEKUENTZIALAK sarrerako egoera aldiune batetan gordetzen dute eta geroago hartzen dute, irteera berria emateko, sarrerako egoera aldatzen denean. Irteerako baloreak aldiune batetan sarrerako egoeraren eta barne-egoeraren menpean aurkitzen dira.

Hau da:

$$(S_i)_{t+1} = F(X_1, X_2, \dots, X_n, (S_i)_t)$$

Sistema sekuentzial guztiek ondoko ezaugarriak dituzte:

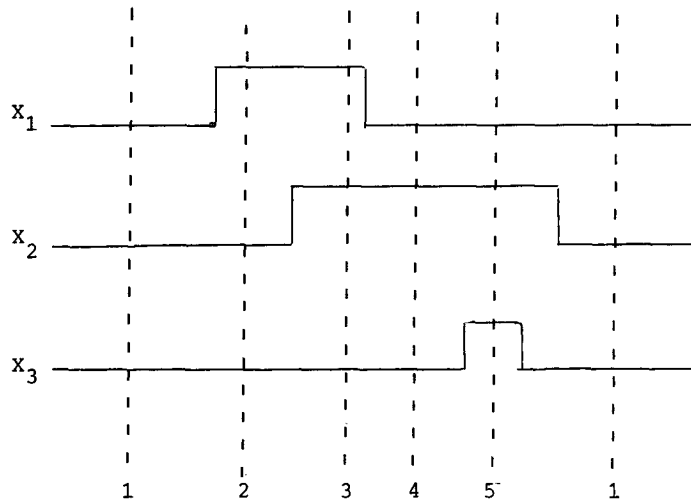
a) 2^n sarrerako egoera . n delakoa sarrerako aldagaien kopurua da: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

b) 2^m barne-egoera . m delakoa barne-egoeren aldagaien kopurua
da: $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$.

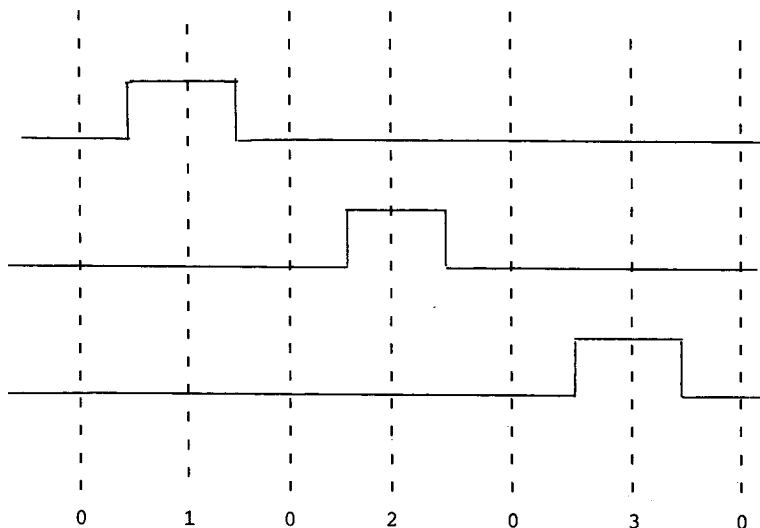
c) 2^p irteerako egoera . p delakoa irteerako aldagaien kopurua
da: $(S_1, S_2, \dots, S_p)$.

Sistema sekuentzialen sarrerako seinaleak honelakoak izan daitezke:

A. Egoerak edo Mailak: Sarrera balore batetik bestera pasatzen
da kontinuitaterik gabe.



B. Impultsuak: Sarrerako bi egoeraren artean, gelditasun-egoera
bat dago eta egoera honetan aldagai guztiak zero logikoa har
tzen dute.



Irteerako aldagaiak egoerak edo mailak zein inpultsuak izan daitezke.

Sistema sekuentzialak honelakoak izan daitezke:

- A. ASINKRONOAK: Kanpoko kontrol gabe egiten dute lan, eta sarrera ko aldagaien konbinazio baterako, Y_{t+1} eta Y_t konbinazioak berdinak dira; orduan, sistemak balore iraunkor bat hartzen du.
- B. SINKRONOAK: Sistema sekuentzialen barne-egoera generadore (edo erloju) baten inpulstu bat aplikatzen dugunean aldatzen da bakarrik.

2. FLIP - FLOPak

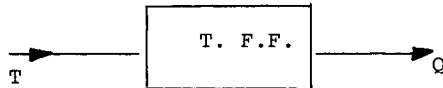
Sistema edo zirkuitu sekuentzialek memoria dutela esaten dugu, irteerako funtzio edo baloreek aurreko irtekina kontutan hartzen dute eta.

Bi edo sarrera gehiago eta irteera bat dituzten zirkuitu logikoak, MEMORIAZKO ELEMENTUAK edo FLIP-FLOPak (F.F.) deitzen ditugu. Flip-Flopak zenbakikuntz sistema bitarrean lan egiten dute beti.

Flip-Floppen motak:

• T FLIP-FLOPa

Sarrera eta irteera bat du.



T sarrera exzitatzen denean (sarrera = 1), hurrengo tarte-digituaren aldatzen da (tarte-digitua: irtekin seinale eta hurrengo seinalearen artean dagoen tarte), hau da Q_t irteera 0 bada, Q_{t+1} irteera 1 izango da; eta alderantziz, T sarrera exzitatzen ez badugu (sarrera = 0), irteera aurreko tarte-digituaren egoera izango da.

Esate baterako:

- sarrera = 1 $\Rightarrow Q_{t+1} = \bar{Q}_t$
- sarrera = 0 $\Rightarrow Q_{t+1} = Q_t$

Flip-Flop honen funtzionamenduaren egitaula:

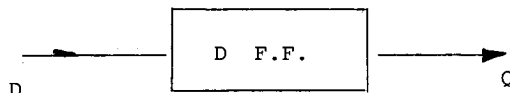
T	Q_t	Q_{t+1}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Egitaulatik T Flip-Floppen ekuazioa ateratzen dugu:

$$T \bar{Q}_t + \bar{T} Q_t = Q_{t+1}$$

• D FLIP FLOPa

Sarrera eta irteera bat du.



D sarrera exzitatzen denean ($sarrera = 1$), irteera 1 izango da beti; eta D exzitatuta ez dagoenean ($sarrera = 0$) irteera 0 izango da beti.

Hau da:

- $sarrera = 1 : (D = 1) \Rightarrow Q_{t+1} = 1$
- $sarrera = 0 : (D = 0) \Rightarrow Q_{t+1} = 0$

Funtzionamenduaren egitaula hauxe da:

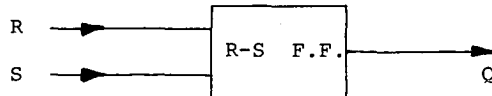
D	Q_t	Q_{t+1}
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

eta ekuazioa:

$$D = Q_{t+1}$$

• R-S FLIP-FLOPa

Irteera bat era sarrera bi ditu.



R sarrera exzitatzen denean, hurrengo tarte-digituan irteera 0 izango da; eta S sarrera exzitatzen denean, hurrengo tarte-digituan irteera 1 izango da.

Ikusten dugunez, R eta S ezin dira batera exzitatatu.

R-S Flip-Floppen egitaula ondokoa da:

S	R	Q_t	Q_{t+1}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	X

eta ekuazioak:

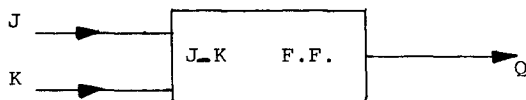
$$S + \bar{R} Q_t = Q_{t+1}$$

$$(RS)_t = 0$$

• J-K FLIP-FLOPa

R-S Flip Flopean ikusi dugun bezala, R eta S biak batera exzitatzen baditugu, irteeran kontradizioa sortuko da. Hau erabakitze-ko, J-K Flip-Flopa erabiltzen da.

J-K Flip-Flopak irteera bat eta sarrera bi ditu.



K sarrera exzitatzen dugunean (sarrera = 1), hurrengo tarte-digituan irteera 0 izango da; J sarrera exzitatzen dugunean, hurrengo tarte-digituan irteera 1 izango da. J eta K batera exzitatzen baditugu, hurrengo tarte-digituaren egoera aldatzen da.

Hau da:

$$\begin{cases} J = 1 \Rightarrow Q_{t+1} = 1 \\ K = 1 \Rightarrow Q_{t+1} = 0 \\ J \text{ eta } K=1 \Rightarrow Q_{t+1} = \bar{Q}_t \end{cases}$$

J-K Flip-Floparen egitaula ondoko hau da:

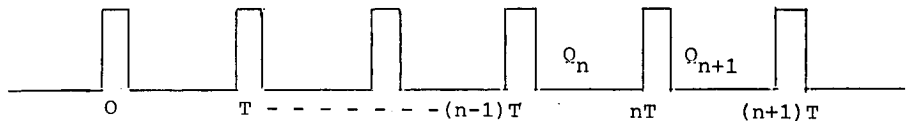
J	K	Q_t	Q_{t+1}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

eta funtzionamenduaren ekuazioa:

$$J\bar{Q}_t + \bar{K}Q_t = Q_{t+1}$$

F-F.ak, zirkuitu sekuentzialak bezala, asinkronoak edo sinkronoak izan daitezke.

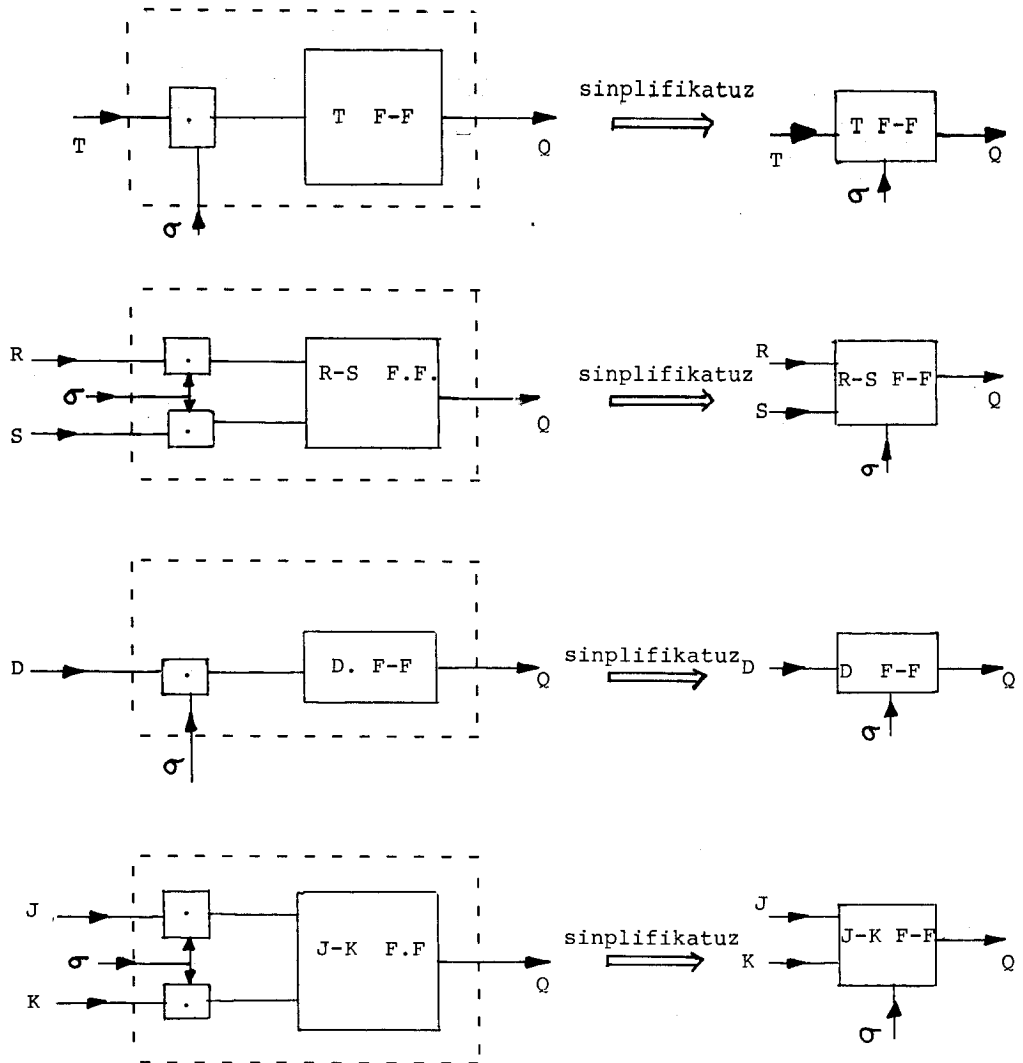
F-F sinkronoak, T periodoko inpultsu-tren betekin sinkronizatuta lan egiten dute, erloju-sistema deitzen dugu eta σ letrarekin adieraziko dugu:



(1 - irudia)

Irteerako balore bitarrak inpultsu bitartean konstanteak suposatuko ditugu. Egoera batetik beste batera pasatuko dugu inpultsu bat aplikatzen dugunean. 1-Irudian ikusten dugunez, Q_n egoeratik Q_{n+1} egoerara pasatzeko, erlojuko n inpultsua aplikatu behar dugu.

F-F sinkronoak beheko irudietan dagoen bezala adieraziko ditugu:



3. ZIRKUITU SEKUENTZIALAREN SINTESIA

Flip-Flop batek azaltzen duen sekuentzia jakin nahi dugu. Hau da, F-F aren funtzionamendua azaltzen duten ekuazioak ezagutzen baditugu, azaltzen den sekuentzia zein izango den jakin nahi dugu.

Segituko dugun metodoa hauxe da:

- F-Faren ekuazioak mintermarekin sintetizatuko ditugu.
(Karnaughen taularen bidez).
- Zero egoeratik hasiko gara eta FFaren ekuazioarekin sekuentzia aterako dugu.

Adibidez:

Pentsa dezagun D Flip-Flop.en ekuazioak hauek direla:

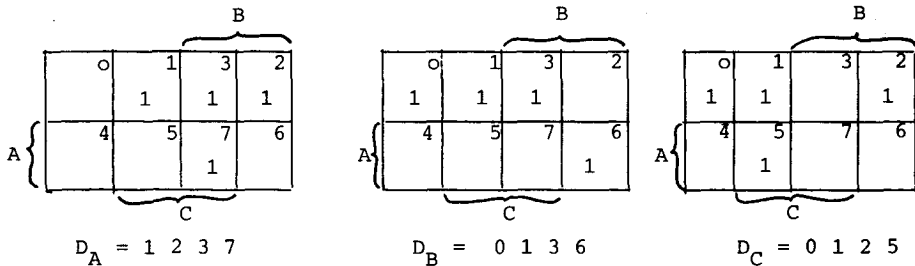
$$D_A = \bar{A}C + \bar{A}B + BC$$

$$D_B = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + ABC$$

$$D_C = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}C$$

eta FF horrek azaltzen duen sekuentzia jakin nahi dugula.

- Mintermekin sintetizatuko dugu Karnaughen taularen bidez:



- FFen sekuentzia aterako dugu:

A	0	0	1	0	1	0	1	1	0	{	0	B	eta	C.en	dago	$\Rightarrow$	B=1	C=1
B	0	1	1	1	0	0	1	0	0		3	A	eta	B.en	dago	$\Rightarrow$	A=1	B=1
C	0	1	0	0	1	1	0	0	6		B.en	dago	$\Rightarrow$	B=1				
									:::									
									:::									

mintermak 0 3 6 2 5 1 7 4 0

Zirkuitu honen sekuentzia hauxe da:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Orain pentsa dezagun T delako FF.en ekuazioak ezagutzen ditugula:

$$\begin{cases} T_A = BC \\ T_B = C \\ T_C = I \text{ (multzo unibertsala).} \end{cases}$$

(a) Mintermarekin sintetizatuko dugu:

		B							
		0	1	3	2				
				1					
A	4	5	7	6					
			1						
		C							

- (a) Zenbat FF erabili behar ditugun jakiteko, zera egingo dugu:

$$2^{m-1} < n + 1 \leq 2^m$$

eta

n : Kontatu behar dugun zenbaki handiena.

m : Behar dugun FF en kopurua

oraingo kasuan $n = 7$

$$2^{m-1} < 8 \leq 2^{m+1} \Rightarrow \underline{m = 3}$$

orduan 3F.F erabili behar ditugu.

- (b) Sekuentziaren taula hauxe da:

A	0	0	0	0	1	1	1	1	0
B	0	0	1	1	1	1	0	0	0
C	0	1	1	0	0	1	1	0	0
	0	1	3	2	6	7	5	4	0

R-S erako FF aren definizioa aplikatuz:

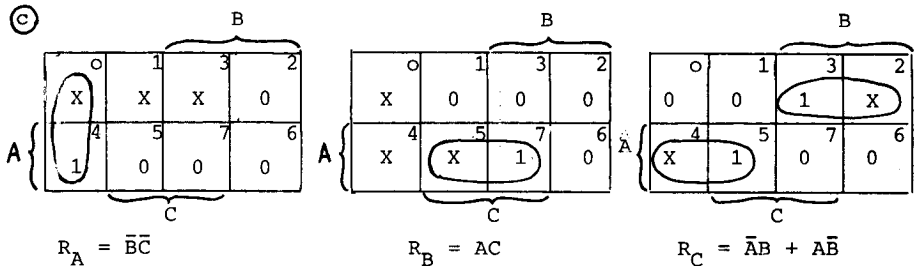
$$R_A = 4 + k(013) ; R_B = 7 + k(540)$$

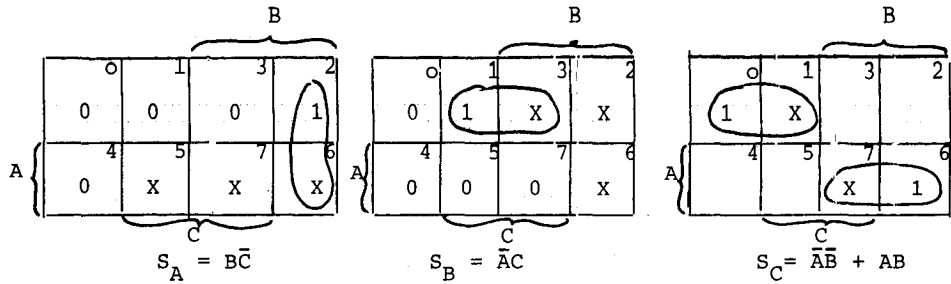
$$S_A = 2 + k(675) ; S_B = 1 + k(326)$$

$$R_C = 35 + k(24)$$

$$S_C = 06 + k(17)$$

Gai gainezkoak, Karnaughen tauletan Xekin adieraziko ditugu, eta 1 edo 0 balio dezake.





Kasu berezia agertzen da sekuentzi bar osorik ez badago; adibidez, $S = (0,3,5,7,6)$ kasuan. Ikusten dugunez sekuentzia honen sintesia egiteko hiru F.F behar ditugu, baina inoiz agertzen ez diren hiru egoera daude, eta egoera horik debekatuak deituko ditugu, eta D letrarekin adieraziko ditugu. Oraingo kasuan $D = (1,2,4)$.

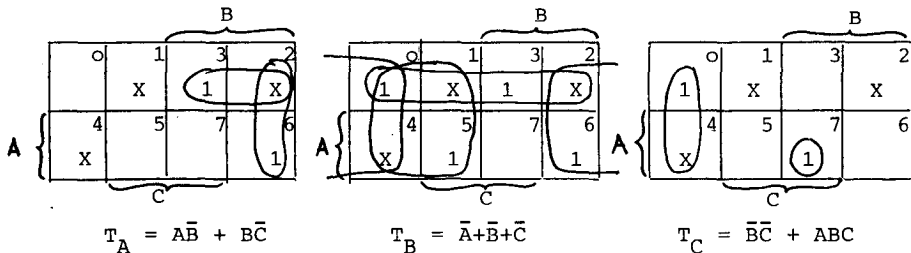
T erako FF.ekin sekuentzi honen sintesia egiten badugu:

A 0 0 1 1 1 0
 B 0 1 0 1 1 0
 C 0 1 1 1 0 0
 0 3 5 7 6 0

T erako FFen definizioa aplikatuz:

$T_A = 3, 6 + D(1, 2, 4)$
 $T_B = 0, 3, 5, 6 + D(1, 2, 4)$
 $T_C = 0, 7 + D(1, 2, 4)$

Karnaughen taulaz:



Askotan beharrezkoa da FFak bata bestearen menpean ipintzea. Honela FF batekin funtzio baten sintesia egiten badugu, zuzenki egin dezakegu beste FF.ekin ere.

• T erako FFa.

T erako FFak Derako FFekin erlazionako ditugu:

Terako FFen ekuazioa: $T\bar{Q} + \bar{T}Q = Q_{t+1}$

D erako FFen ekuazioa: $D = Q_{t+1}$

orduan:

$$T\bar{Q} + \bar{T}Q = D.$$

ekuazio honen askaketa egiten badugu:

$$(T\bar{Q} + \bar{T}Q)\bar{D} + (\bar{T}Q + TQ)D = 0$$

$$T\bar{D}\bar{Q} + \bar{T}\bar{D}Q + \bar{T}D\bar{Q} + TDQ = 0$$

$$T(\bar{D}\bar{Q} + DQ) + \bar{T}(\bar{D}Q + D\bar{Q}) = 0$$

$$T(1001) + \bar{T}(0110) = 0$$

$$T(1001) = \bar{D}Q + D\bar{Q}$$

$$T = \bar{D}Q + D\bar{Q}$$

• J-K erako FFa

Lehen bezala:

J-K erako FFen ekuazioa hauxe da: $\bar{K}Q + J\bar{Q} = A_{t+1}$

Derako FFen ekuazioa : $D = Q_{t+1}$

orduan:

$$\bar{K}Q + J\bar{Q} = D$$

ekuazio honen askaketa egiten badugu:

$$(\bar{K}Q + J\bar{Q})\bar{D} + (KQ + \bar{J}\bar{Q})D = 0$$

$$\bar{K}\bar{D}Q + J\bar{D}\bar{Q} + K D Q + \bar{J} D \bar{Q} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{K}\bar{D}Q + K D Q = 0 \\ J\bar{D}\bar{Q} + \bar{J} D \bar{Q} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{K}(0100) + K(0001) = 0 \\ J(1000) + \bar{J}(0010) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K=(\emptyset 1 \emptyset 0)=\bar{D}Q+K(\bar{Q}) \\ J=(0 \emptyset 1 \emptyset)=D\bar{Q}+K(Q) \end{array} \right\}$$

K(Q) eta K($\bar{Q}$) dakigunez gai gainezkoak

dira, beste aldetik $\emptyset$ 1 edo 0 izan daiteke.

$$K = \bar{D}Q + K(\bar{Q})$$

$$J = D\bar{Q} + K(Q)$$

Adibidez: $S = (0,1,3,5,4,2,6,7)$ sekuentzia badugu,

orduan:

$$D_A = 5 \ 3 \ 2 \ 6$$

$$D_B = 4 \ 1 \ 2 \ 6$$

$$D_C = 0 \ 1 \ 3 \ 6$$

J-K erako eta T erako FFekin sintetizatu nahi baldin badugu, aurreko ekuazioak aplikatuz:

$$J_A = D_A \bar{A} + K(A) = (2,3,5,6)(0,1,2,3) + K(4,5,7,6) = 2,3 + K(4,5,6,7)$$

$$K_A = \bar{D}_A A + K(\bar{A}) = (0,1,4,7)(4,5,6,7) + K(0,1,2,3) = 4,7 + K(0,1,2,3)$$

↪ A-ko bai eta D_A -ko ez diren gaiak

$$J_B = D_B \bar{B} + K(B) = (4,1,2,6)(0,1,4,5) + K(2,3,6,7) = 1,4 + K(2,3,6,7)$$

$$K_B = \bar{D}_B B + K(\bar{B}) = (0,3,5,7)(2,3,6,7) + K(0,1,4,5) = 3,7 + K(0,1,4,5)$$

$$J_C = D_C \bar{C} + K(C) = (0,1,3,6)(0,2,4,6) + K(1,3,5,7) = 0,6 + K(1,3,5,7)$$

$$K_C = \bar{D}_C C + K(\bar{C}) = (2,4,5,7)(1,3,5,7) + K(0,2,4,6) = 5,7 + K(0,2,4,6)$$

• T erako FFekin

$$T_A = \bar{D}_A A + D_A \bar{A} = (0,1,4,7)(4,5,6,7) + (2,3,5,6)(0,1,2,3) = 4,7,2,3$$

$$T_B = \bar{D}_B B + D_B \bar{B} = (0,3,5,7)(2,3,6,7) + (4,1,2,6)(0,1,4,5) = 3,7,1,4$$

$$T_C = \bar{D}_C C + D_C \bar{C} = (2,4,5,7)(1,3,5,7) + (0,1,3,6)(0,2,4,6) = 5,7,0,6$$

Orain R-S erako FFen ekuazioak:

Dakigunez:

$$\left. \begin{array}{l} S + \bar{R}Q = Q_{t+1} \\ R S = 0 \\ Q_{t+1} = D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S + \bar{R}Q = D \\ R S = 0 \end{array}$$

Ekuaizio hauek askatzen baditugu:

$$(S + \bar{R}Q)D + \bar{S}(R + \bar{Q}) + RS = 0$$

$$S\bar{D} + \bar{R}\bar{D}Q + R\bar{S}D + \bar{S}D\bar{Q} + RS = 0$$

$$\bar{R}\bar{S}(\bar{D}Q + D\bar{Q}) + \bar{R}S\bar{D} + R\bar{S}D + RS = 0$$

$$\bar{R} [\bar{S}(\bar{D}Q + D\bar{Q}) + S\bar{D}] + R(\bar{S}D + S) = 0$$

$$\bar{S}D\bar{Q} + S\bar{D} = 0$$

$$S(1,1,0,0) + \bar{S}(0,0,1,0) = 0 \Rightarrow S = (001\emptyset) = D\bar{Q} + K(D) = D$$

$$\bar{S} = (110\bar{\emptyset})$$

$$\bar{R} [(110\bar{\emptyset})(0110) + (001\emptyset)(1100)] + R [(110\emptyset)(0011) + (001\emptyset)] = 0$$

$$\bar{R}(0100) + R(0011) = 0$$

$$R = (\emptyset 100) = \bar{D}Q + K(\bar{D}\bar{Q}) = \bar{D}$$

Orduan:

$$R = \bar{D}Q + K(\bar{D}\bar{Q}) = \bar{D}$$

$$S = D\bar{Q} + K(D) = D$$

II. KONTAGAILUAK

1. IDEIA OROKORRAK

Kontagailuak sistema sekuentzialak dira, sarrerako inpultsu batekin eta beraren barne-egoera, momentu bakoitzean, sarreran aplikatu dugun inpultsu-kopuruak ematen digu.

Honela deituko ditugu:

X = barne-egoeren kopurua

Y = kontatu behar dugun inpultsu handiena.

Hauxe egiaztatuko da:

$$X = Y + 1$$

Y = 1 jartzen dugu, inpultsu handiena eta gero hasierako egoera etortzen delako; eta, orduan, kontatzen amaitu dugula esan nahi du.

Adibidez: Zerotik hasi eta zazpiraino kontatu nahi badugu (0,1,2,3,4,5,6,7) azken barne-egoera ez da zazpi izango zero baizik (1,2,3,4,5,6,7,0).

Kontagailuak egiteko, flip-flop sinkronoak erabiltzen dira.

A. KONTATU BEHAR DIREN INPULTSUEN ARTEKO FREKUENTZIA HANDIENA

Parametro hau, erabili behar dugun FFen teknologiak determinatzen du:

<u>Teknologia</u>	<u>FFen frekuentzi handiena</u>
DTL	7 MHz.
TTL	30 MHz
TTL Schottky	120 "
HTL	500 "
ECL	600 "
MOS	10 "
CMOS	20 "

B. FLIP-FLOPEN MOTA

FF determinatu batekin lana egitea agintzen ez badigute,
NOR edo NAND ate gutxien erabiltzen duena hartuko dugu.

C. KONTATZEKO KODUA

Bitar Koduak erabiltzen dira.

D. KONTAGAILUAREN AHALMENA

Kontatu behar dugun zenbaki handiena (inpultsu-kopurua) da.
Zenbaki honek zenbat FF erabili behar ditugun esaten digu.

Honela deituko ditugu:

n : kontatu behar dugun zenbaki handiena.

m : behar dugun FFen Kopurua.

Zera egiaztatu behar da:

$$2^{m-1} < n+1 \leq 2^m$$

Adibidez:

a. Zazpiraino kontatu nahi badugu, hiru FF erabili behar ditugu:

$$2^{3-1} < 7 + 1 \leq 2^3$$

b. Bederatziraino kontatu nahi badugu, lau FF erabili behar ditugu:

$$2^{4-1} < 9 + 1 \leq 2^4$$

E. ERAGIKETAKO MODUA

Kontagailuak sinkronoak edo asinkronoak izan daiteke.

a. Sinkronoak: Egoera-aldaerak guztiak batera aldatzen dira;
horretarako FF guztien σ sarreran inpultsu
kontatzaileak aplikatzen dira.

- b. Asinkronoak: Egoera-aldagaiak ez dira denak batera aldatzen. Inpultsu kontatzaileak ez dira FF guztietako σ sarreran aplikatzen, lehenengoko FFen bakarrik baizik; eta beste guztietako σ sarreran aurreko FFen irtekina sartzen dugu.

2. KONTAGAILU SINKRONOEN DISEINUA

Flip-Flop guztietako σ sarreran inpultsuak aplikatzen dira eta sarreraren kontrola deduzitu behar dugu.

Metodo posible bat hau da:

- A. Kontagailuko funtzionamenduaren egitaula egiten da.
- B. Karnaugh-en taulaz ateratzen ditugu Flip-Flopen ekuazioak (ateratzen ari gareneko FFa, biderketa guztietan agertu behar da).
- C. Ekuazio hau FFen ekuazio karakteristikoarekin konparatzen dugu eta sarrerako ekspresio logikoak ateratzen ditugu.

Adibidez: Egin dezagun 7-rainoko kontagailu bat J-K Flip-Flopen bidez.

$$\text{Hiru Flip-Flop behar ditugu: } 2^{3-1} < 7+1 \leq 2^3$$

Bi metodorekin egingo dugu:

Lehenengo metodoa

Goian deskribitu dugun metodoa da; orduan:

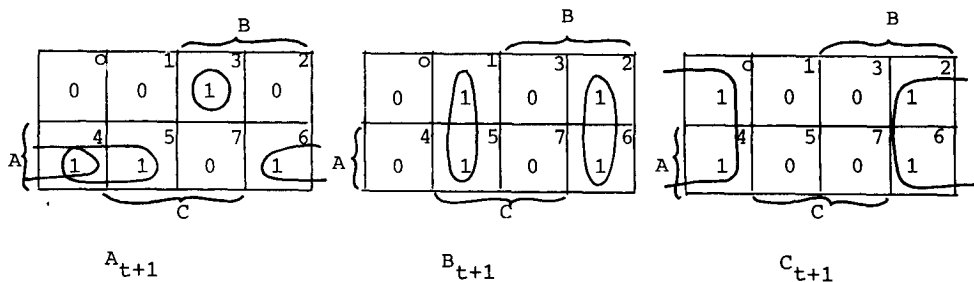
- A. Kontagailuaren Egitaula:

t			t+1		
A	B	C	A	B	C
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

B. Karnaugh-en taulaz FFen ekuazioak aterako ditugu.

Egitaulan ikusten dugunez:

t		$t+1$	t		$t+1$	t		$t+1$
0	egoeran	A=0	0	egoeran	B=0	0	egoeran	C=1
1	"	A=0	1	"	B=1	1	"	C=0
2	"	A=0	2	"	B=1	2	"	C=1
3	"	A=0	3	"	B=0	3	"	C=0
,		,	,		,	,		,
,		,	,		,	,		,
,		,	,		,	,		,



Karnaugh-en tauletan ikusten dugunez:

$$\begin{cases} A_{t+1} = A\bar{B} + A\bar{C} + \bar{A}BC = A(\bar{B} + \bar{C}) + \bar{A}BC \\ B_{t+1} = B\bar{C} + \bar{B}C \\ C_{t+1} = \bar{C} \end{cases}$$

C. J-K FFen ekuazio karakteristikoa:

$$Q_{t+1} = J\bar{Q}_t + \bar{K}Q_t$$

Koefizienteak berdintzen baditugu:

$$\begin{cases} J_A = BC \\ \bar{K}_A = \bar{B} + \bar{C} \longrightarrow K_A = BC \\ J_B = C \\ \bar{K}_B = \bar{C} \longrightarrow K_B = C \end{cases} \quad \begin{cases} J_C = 1 \\ \bar{K}_C = 0 \longrightarrow K_C = 1 \end{cases}$$

Bigarren Metodoa

Kontagailuaren sekuentzia:

A	0	0	0	0	1	1	1	1	0
B	0	0	1	1	0	0	1	1	0
C	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	0

D. FFen definizioa goiko taulan aplikatzen badugu:

$$\begin{cases} D_A = 3, 4, 5, 6 \\ D_B = 1, 2, 5, 6 \\ D_C = 0, 2, 4, 6 \end{cases}$$

Dakigunez:

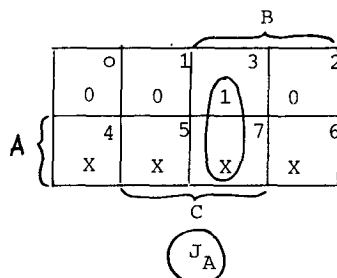
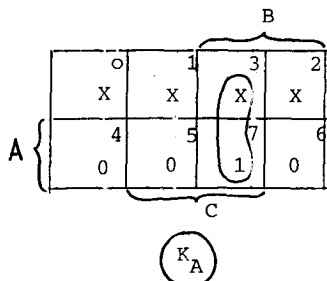
$$K = \bar{D}Q + K(\bar{Q})$$

$$J = D\bar{Q} + K(Q)$$

Gure kasuan:

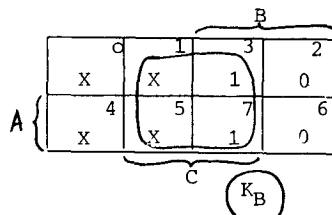
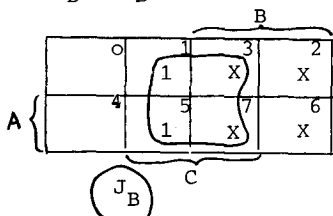
$$K_A = \bar{D}_A \cdot A + K(\bar{A}) = (0, 1, 2, 7) (4, 5, 6, 7) + K(0, 1, 2, 3) = 7 + K(0, 1, 2, 3) = BC$$

$$J_A = D_A \cdot \bar{A} + K(A) = (3, 4, 5, 6) (0, 1, 2, 3) + K(4, 5, 6, 7) = 3 + K(4, 5, 6, 7) = BC$$



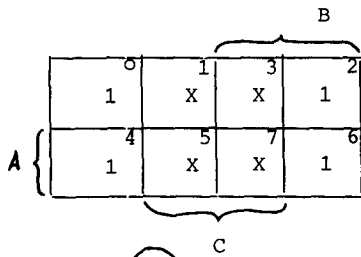
$$J_B = \bar{D}_B \cdot \bar{B} + K(B) = (1, 2, 5, 6) (0, 1, 4, 5) + K(2, 3, 6, 7) = 15 + K(2, 3, 6, 7) = C$$

$$K_B = \bar{D}_B \cdot B + K(\bar{B}) = (0, 3, 4, 7) (2, 3, 6, 7) + K(0, 1, 4, 5) = 37 + K(0, 1, 4, 5) = C$$



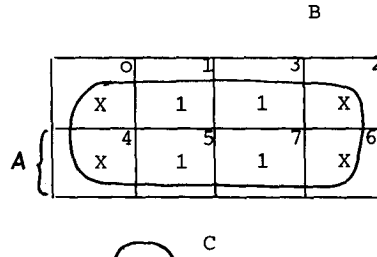
$$J_C = D_C \cdot \bar{C} + K(C) = (0, 2, 4, 6) (0, 2, 4, 6) + K(1, 3, 5, 7) = (0, 2, 4, 6) + K(1, 3, 5, 7) = 1$$

$$K_C = \bar{D}_C \cdot C + K(\bar{C}) = (1, 3, 5, 7) (1, 3, 5, 7) + K(0, 2, 4, 6) = (1, 3, 5, 7) + K(0, 2, 4, 6) = 1$$

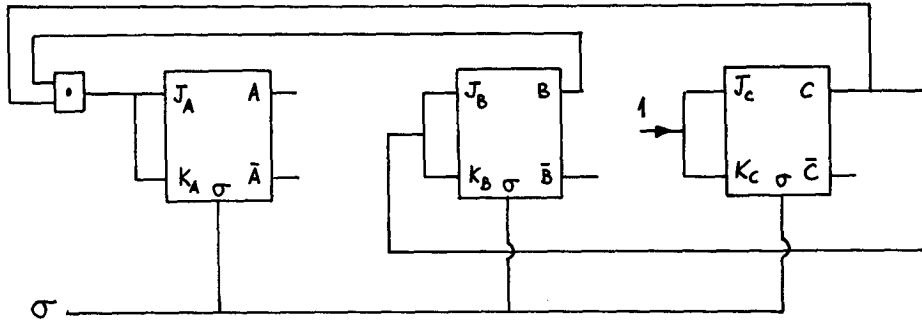


J_C

Kontagailuaren eskema:



K_C



3. KONTAGAILU ASINKRONOEN SINTESIA

Kontagailu asinkronoetan inputsu kontatzaileak lehenengoko FFen σ sarreraren aplikatzen ditugu eta beste FFak aurreko FFen irtekinarekin akzionatzen dira.

Sintetizatzeko metodoa hau da:

A. Kontagailuaren egitaula ateratzen dugu.

B. Karnaugh-en taulaz FFeko sarreraren ekuazioak lortzen ditugu.

C. FF bakoitzaren σ sarrera gobernatzen duen seinalea aurkitu

behar dugu.

Lehenengoko FFak inpultsu kontatzaileak hartuko ditu eta egitaulan beste FFen egoeren aldakuntzak geziaren bidez azaltzen ditugu.

Esan dugun bezala, FFen sarrera, aurreko FFen irtekinaren bidez gobernatua izango da eta FF honek bere egoera aldatzen duenean besteak ere aldatu behar du eta beti sentido berarekin, hau da, 0-tik 1-era edo 1-etik 0-ra.

- D. Karnaugh-en taularekin atera ditugun ekuazioak, FFen ekuazio karakteristikoarekin konparatzen ditugu eta kontagailuaren ekuazioak eta zirkuitua lortzen ditugu.

Adibidez: Egin dezagun 9-rainoko kontagailu bat BCD 1245 koduan eta J-K FFen bidez sintetizatuz.

BCD 1245 kodua hauxe da:

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0

- A. Kontagailuaren egitaula hauxe da:

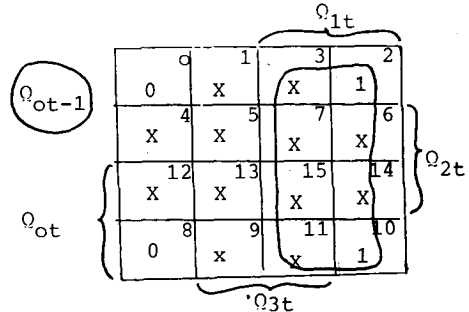
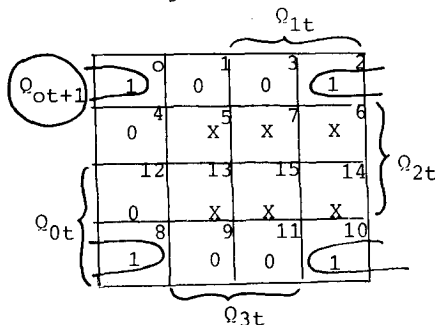
t				t + 1			
Q_3	Q_2	Q_1	Q_0	Q_3	Q_2	Q_1	Q_0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	X	X	X	X
0	1	1	0	X	X	X	X
0	1	1	1	X	X	X	X
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	X	X	X	X
1	1	1	0	X	X	X	X
1	1	1	1	X	X	X	X

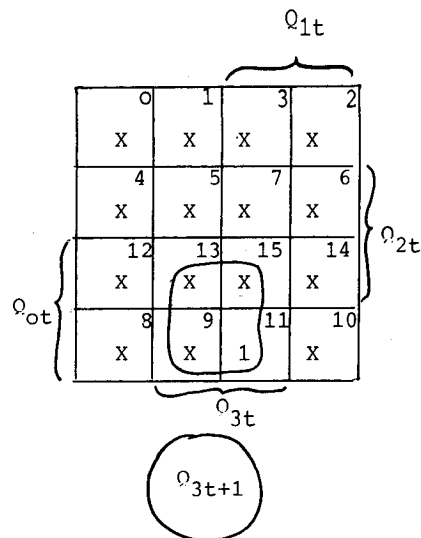
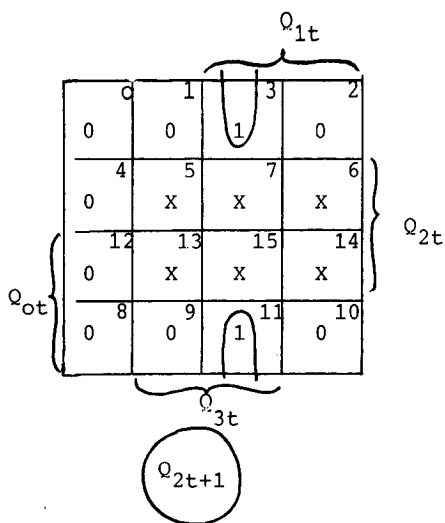
Q_1 Ffa lehenengo Q_0 irtekinarekin kontrolatua izan daiteke, Q_1 aldatu behar denean Q_0 1-etik 0-ra aldatzen baita.

Q_2 Ffa ezin da kontrolatu ez Q_1 eta ez Q_0 -rekin. Kontadorea 1100 egoeratik 0000 egoerara pasatzen denean, Q_2 1-etik 0-ra pasatzen baita eta Q_1 eta Q_0 ez baitira aldatzen. Horregatik, Q_2 -ko sarreran inpultsu kontatzaileak sartuko ditugu.

Q_3 Ffa, ikusten dugunez, Q_2 aren bidez kontrolatua izan daiteke, Q_2 1-etik 0-ra aldatzen da Q_3 egoera aldatu behar dugunean.

B. Karnaugh-en taulak:





Q_{ot+1}: Egitaulan ez ditugu kontutan hartzen X-ekin agertzen diren egoerak. Beste egoera guztietan inpulstu kontatzaileak 1-etik 0-ra aldatzen dute egoera.

Q_{1t+1}: Egitaulan ez ditugu kontutan hartzen X-ekin agertzen diren egoerak eta ez hurrengo Q_o-ren egoera 1-etik 0-ra aldatzen ez dutenak ere. Egoera hauk izango dira 0000, 0010, 1000, 1010, 0100 eta 1100.

Q_{2t+1}: Q_{ot+1} delakoaren berdina da.

Q_{3t+1}: Q_{2t+1} delakoa gobernatzen du, kontutan hartzen ditugu 1100 eta 0100 egoerak, egoera hauk Q₂ 1-etik 0-ra aldatzen baitute.

Lortzen ditugun ekuazioak hauxek dira:

$$Q_{ot+1} = \bar{Q}_3 \bar{Q}_2 \bar{Q}_o + \bar{Q}_3 \bar{Q}_2 Q_o$$

$$Q_{1t+1} = Q_{1t}$$

$$Q_{2t+1} = Q_1 Q_3 \bar{Q}_2$$

$$Q_{3t+1} = Q_o Q_3$$

J-K FFen ekuazio karakteristikoarekin konparatzen baditugu:

$$Q_{t+1} = J\bar{Q}_t + \bar{K}Q_t$$

$$J_0 = \bar{Q}_3\bar{Q}_2$$

$$\bar{K}_0 = \bar{Q}_3\bar{Q}_2 \longrightarrow K_0 = Q_3 + Q_2$$

$$J_1 = 0$$

$$\bar{K}_1 = 1 \longrightarrow K_1 = 0$$

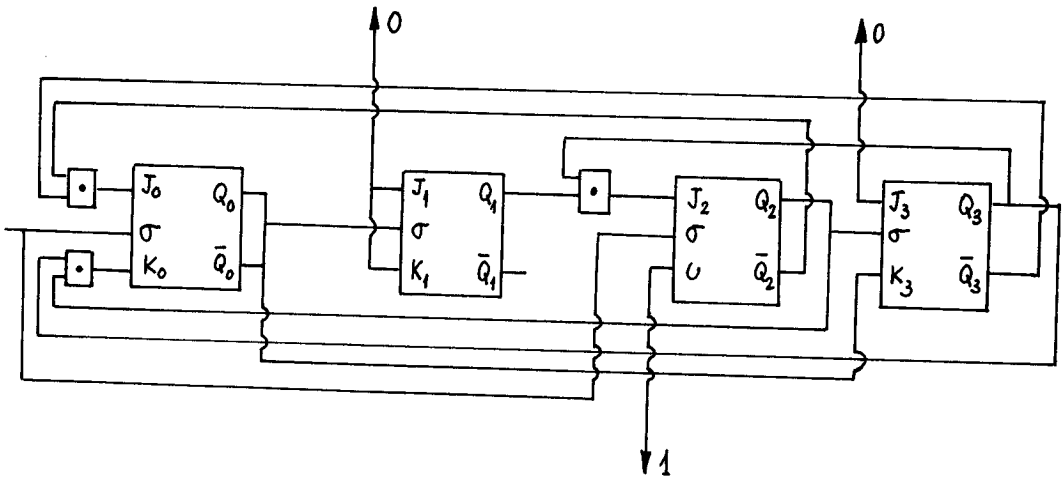
$$J_2 = Q_1 Q_3$$

$$\bar{K}_2 = 0 \longrightarrow K_2 = 1$$

$$J_3 = 0$$

$$\bar{K}_3 = Q_0 \longrightarrow K_3 = \bar{Q}_0$$

Zirkuituaren eskema ondokoa da:



III. DESPLAZAMENDU - ERREGISTROA

1. DESPLAZAMENDU-ERREGISTROA ZER DEN

Dakigunez, FFa bit bateko memoria da; orduan, n FFekin n biteko informazioa gorde dezakegu. Konbinaketa honi ERREGISTRATZAILE deitzen diogu; n biteko informazioa seriez irakur dezakegu erregistratzaile batetan, FF bateko irteera hurrengo FF.aren sarrera-rekin lotzen badugu. Honelako sistemari DESPLAZAMENDU-ERREGISTROA deituko diogu.

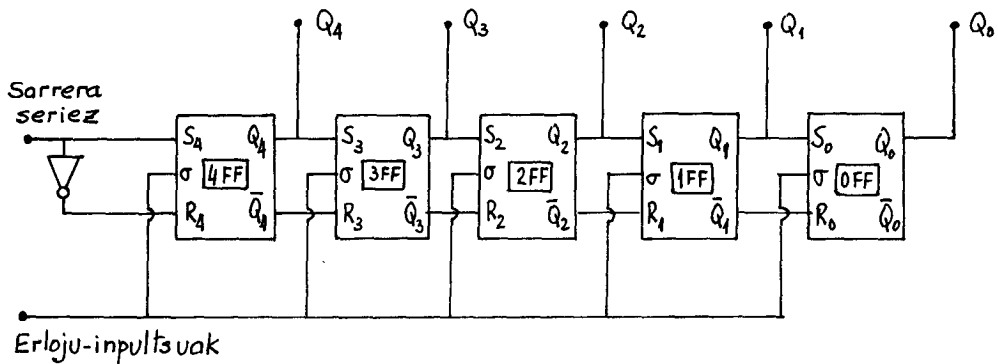
Orduan Desplazamendu-Erregistroak sistema sekuentzialak direla esan dezakegu, FF sinkronizatuekin eta bata besteari elkar lotuta eratuak.

Erabiltzen ditugun FFek ez dute denak batera egoera aldatzen, bestela atzerapen-arazoak agertuko bailirateke eta ordena-jarraitzaileak deitzen dira.

Adibidez: Pentsa dezagun 01011 seriea erregistratu nahi dugula. Bost FF beharko ditugu eta hasieran denak zero izango dira.

Orain datuak eta erloju-inputtsu sinkronizatuak aplikatzen ditugu.

Eskema ondokoa izango da:



Lehenengo bita (1) 4garren FF.ean D FF bitartez, sartzen da lehenengo erloju-inputsuarekin. Erloju-inputtsua eta gero, $Q_4 = 1$ eta beste irteera guztiak zero izango dira ($Q_3=Q_2=Q_1=Q_0=0$)

Bigarren erloju-inputtsua heltzen denean Q_4 egoera 3 FF.era transmititzen da, R-S FF bitartez eta 4 FF.ean datorren datua (1) sartzen da. Bigarren erloju-inputtsu eta gero, $Q_4 = 1$, $Q_3 = 1$, eta $Q_2 = Q_1 = Q_0 = 0$ izango dira.

Erloju=inputtsu bakoitza eta gero, erregistratzailearen taula hauxe izango da:

Erloju-inputtsua	Informaziozko bita	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Q_0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	1	0
5	0	0	1	0	1	1

Taulan ikusten dugunez hirugarren inputtsua eta gero, Q_3 tik $\rightarrow Q_2$ ra pasatzen da, Q_4 tik $\rightarrow Q_3$ ra eta informaziozko hirugarren bita (0) 4 FFean sartzen da.

Sarrerak seriez eta irteerak paraleloz dituenaz, erregistratzaile honi serie-paralelo deituko diogu. Modu berean, Serie Serie erregistratzailea, Paralelo-Paralelo eta abar daude.

Erregistratzaileak aplikazio asko dituzte eta honela beraien bidez sekuentzi sorkailuak, kontagailu itxiak (eraztun-kontagailuak) eta abar egin ditzakegu.

2. ARIKETAK

1. Zirkuitu batek 0,1,2,3,4,5,6,7,2,3,4,5,6,7,..., egoerak segidan presentatzen ditu. D FFekin, T FFekin eta RS FFekin zirkuitu honen sintesia egin ezazu.

EBAZPENA:

Zirkuitu horren sekuentzia hauxe da:

A	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
C	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5

FFen definizioak aplikatuz:

$$D_A = 3, 4, 5, 6 = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}BC + AB\bar{C}$$

$$D_B = 1, 2, 5, 6, 7 = \bar{B}C + B\bar{C} + AB$$

$$D_C = 0, 2, 4, 6 = \bar{C}$$

$$T_A = 3, 7 = BC$$

$$T_B = 1, 3, 5 = \bar{A}C + \bar{B}C$$

$$T_C = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 = I \text{ (multzo unibertsala)}$$

$$R_A = 7 + K(0, 1, 2) = ABC$$

$$S_A = 3 + K(4, 5, 6) = \bar{A}BC$$

$$R_B = 3 + K(0, 4) = \bar{A}BC$$

$$S_B = 1, 5 + K(2, 6, 7) = \bar{B}C$$

$$R_C = 1, 3, 5, 7 = C$$

$$S_C = 0, 2, 4, 6 = \bar{C}$$

Modu berean egin dezakegu beheko ekuazioak aplikatuz:

$$T = \bar{B}Q + D\bar{Q}$$

$$R = \bar{D}Q + K(\bar{D}\bar{Q})$$

$$S = D\bar{Q} + K(D)$$

orduan:

$$T_A = \bar{D}_A A + D_A \bar{A} = (0, 1, 2, 7) (4, 5, 6, 7) + (3, 4, 5, 6) (0, 1, 2, 3) = 7 + 3 = 73 = BC$$

$$T_B = \bar{D}_B B + D_B \bar{B} = (0, 3, 4) (2, 3, 6, 7) + (1, 2, 5, 6, 7) (0, 1, 4, 5) = 3 + 15 = 315 = \bar{A}C + \bar{B}C$$

$$T_C = \bar{D}_C C + D_C \bar{C} = (1, 3, 5, 7) (1, 3, 5, 7) + (0, 2, 4, 6) (0, 2, 4, 6) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 = I \text{ (multzo unibertsala)}$$

$$R_A = \bar{D}_A A + K(\bar{D}_A \bar{A}) = 7 + K(0, 1, 2) = ABC$$

$$S_A = D_A \bar{A} + K(D_A) = 3 + K(4, 5, 6) = \bar{A}BC$$

$$R_B = \bar{D}_B B + K(\bar{D}_B \bar{B}) = 3 + K(0, 4) = \bar{A}BC$$

$$S_B = D_B \bar{B} + K(D_B) = 1, 5 + K(2, 6, 7) = \bar{B}C$$

$$R_C = \bar{D}_C D + K(\bar{D}_C \bar{C}) = 1, 3, 5, 7 = C$$

$$S_C = D_C \bar{C} + K(D_C) = 0, 2, 4, 6 = \bar{C}$$

2^{na}. RS FFen ekuazioak hauek dira:

$$\begin{array}{ll} R_A = (0, 4, 7) & S_A = (1, 3) \\ R_B = (2, 3) & S_B = (1, 4, 6) \\ R_C = (1, 5) & S_C = (0, 6, 7) \end{array}$$

Azaltzen duen sekuentzia atera.

$$(EMAITZA: S = 0, 1, 6, 7, 3, 5, 4, 2)$$

3^{na}. S = 1, 3, 7, 0, 2, 5 sekuentzia RS FFekin sintetizatu.

$$(EMAITZA: R_A = A; S_A = \bar{A}B; R_B = A + B\bar{C}; S_B = \bar{A}\bar{B}; R_C = AB; S_C = \bar{A}\bar{B})$$

4^{na}. Beheko ekuazioaren askaketa egin:

$$S + T\bar{Q} + \bar{R}\bar{T}Q = D.$$

$$RS + RT + ST = 0$$

EBAZPENA:

"0 eksklusiboa" delako eragiketa aplikatzen badugu:

$$\bar{S}(\bar{T}+Q)(R+T+\bar{Q})D + S\bar{D} + T\bar{D}\bar{Q} + \bar{R}\bar{T}Q\bar{D} + RS + RT + ST = 0$$

$$\bar{S}\bar{T}RD + \bar{S}\bar{T}\bar{D}Q + \bar{S}Q\bar{R}D + \bar{S}Q\bar{T}D + S\bar{D} + T\bar{D}\bar{Q} + \bar{R}\bar{T}Q\bar{D} + RS + RT + ST = 0$$

$$\bar{S}\bar{R}\bar{T}(\bar{Q}D + Q\bar{D}) + \bar{S}\bar{R}T(QD + \bar{Q}\bar{D}) + \bar{S}R\bar{T}D + \bar{S}RT + S\bar{R}\bar{T}\bar{D} + S\bar{R}T + S\bar{R}\bar{T} + SRT = 0$$

$$\bar{S} \left[\bar{R}\bar{T}(\bar{Q}D + Q\bar{D}) + \bar{R}T(QD + \bar{Q}\bar{D}) + R\bar{T}D + RT \right] + S \left[\bar{R}\bar{T}\bar{D} + \bar{R}T + R\bar{T} + RT \right] = 0 \quad (1)$$

$$\text{Hemn } P.Q = 0 \text{ eginez: } \bar{R}\bar{T}Q\bar{D} + \bar{R}T(QD + \bar{Q}\bar{D}) + R\bar{T}D + RT = 0$$

$$\bar{R} \left[\bar{T}Q\bar{D} + T(QD + \bar{Q}\bar{D}) \right] + R(\bar{T}D + T) = 0 \quad (2)$$

Berriro $P.Q = 0$ eginez:

$$T (QD + \bar{Q}\bar{D}) = 0$$

$$T (1001) = 0$$



$$T = (0\bar{\theta}\bar{\theta}0)$$

$\bar{\theta}$: 0 edo 1 balio dezake.

Emaitza hau (2) ekuazioan sartuz:

$$\bar{R} \left\{ (1\bar{\theta}\bar{\theta}1) (0010) + \overbrace{(0\bar{\theta}\bar{\theta}0)}^{(1001)} \right\} + R \left\{ (1\bar{\theta}\bar{\theta}1) (0101) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right\} = 0$$

$$\bar{R} (00\bar{\theta}0) + R(01\bar{\theta}1) = 0$$

$$R = (\bar{\theta} \ 0 \ \bar{\theta} \ 0)$$

Emaitza bi hauk (1) ekuazioan sartuz:

$$\bar{S} \left\{ (\bar{\theta}1\bar{\theta}1) \left[(1\bar{\theta}\bar{\theta}1) (0110) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) (1001) \right] + (\bar{\theta}0\bar{\theta}0) \left[(1\bar{\theta}\bar{\theta}1) (0101) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right] \right. \\ \left. + S \left\{ (\bar{\theta}1\bar{\theta}1) \left[(1\bar{\theta}\bar{\theta}1) (1010) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right] + (\bar{\theta}0\bar{\theta}0) \left[(1\bar{\theta}\bar{\theta}1) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right] \right\} \right\} = 0$$

$$\bar{S} \left\{ (\bar{\theta}1\bar{\theta}1) \left[(0\bar{\theta}\bar{\theta}0) + (0000) \right] + (\bar{\theta}0\bar{\theta}0) \left[(0\bar{\theta}01 + 0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right] \right\} + \\ + S \left\{ (\bar{\theta}1\bar{\theta}1) \left[(10\bar{\theta}0) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right] + (\bar{\theta}0\bar{\theta}0) \left[(1\bar{\theta}\bar{\theta}1) + (0\bar{\theta}\bar{\theta}0) \right] \right\} = 0$$

$$\bar{S}(0\bar{\theta}00) + S(1\bar{\theta}10) = 0 \Longrightarrow S = (0\bar{\theta}0\bar{\theta})$$

5^{na}. T FFen bidez D FF atera.

6^{na}. Kontagailu bat egin, 0 tik 7raino aurrerantz eta atzerantz kontatzeko. Hau da, D bit bat hartu eta 0 baldin bada, 0 tik 7raino kont dezala; eta D 1 baldin bada, 7 tik 0raino kont dezala.

EBAZPENA:

Kontagailu sinkronoen bigarren metodoarekin egingo dugu.

D=0 denean, kontagailuaren sekuentzia ondokoa izango da:

A	0	0	0	0	1	1	1	1	0
B	0	0	1	1	0	0	1	1	0
C	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	0

T FFen definizioa goiko taulan aplikatuz:

$$T_A = BC = 3\ 7$$

$$T_B = C = 1, 3, 5, 7$$

$$T_C = I \text{ (multzo unibert[†]sala)}$$

D = 1 denean, kontagailuaren sekuentzia:

$$A \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1$$

$$B \quad 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$C \quad \underline{1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1}$$

$$7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 7$$

T FF en definizioa aplikatuz:

$$T_A = (4, 0) = \bar{B}\bar{C}$$

$$T_B = (6, 4, 2, 0) = \bar{C}$$

$$T_C = I \text{ (m. unibertsala)}$$

Biak batera hartuz:

$$T_A = B\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D$$

$$T_B = C\bar{D} + \bar{C}D$$

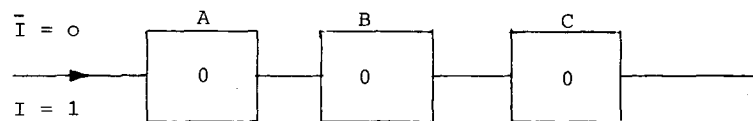
$$T_C = I \text{ (m.un.)}$$

Ariketa bezala, orain lehenengo metodoarekin egin daiteke.

- 7^{na}. 9rainoko kontagailu sinkronoa eta asinkronoa egin, JK FFak erabiliz.

$$\text{EMAITZA: } \begin{pmatrix} J_0 = D & J_1 = AD & J_2 = AD & J_3 = A \\ K_0 = D & K_1 = D & K_2 = AD & K_3 = \bar{B} + \bar{C} \end{pmatrix}$$

- 8^{na}. Egin dezagun desplazamendu-erregistro bat'



A,B eta C.en 0 dugunean eta $\bar{I}$ sartzen dugunean, 0 egoeran segituko dugu; I sartzen badugu, 4 egoeran geldituko gara.

A,B eta C.en 1 dugunean $\left\langle \begin{array}{l} \bar{I} \text{ sartzen dugunean} \rightarrow 2 \text{ egoeran} \\ I \text{ sartzen dugunean} \rightarrow 6 \text{ egoeran} \end{array} \right\rangle$
gelditzen gara.

Hau da:

$$S_{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} t+1 \\ t \end{matrix}$$

D. FFarekin sintetizatzen badugu:

$$D_A = (0,1,2,3,4,5,6,7) = I \text{ (m. un.)}$$

$$D_B = (4,5,6,7)\bar{I} + (4,5,6,7)I = A\bar{I} + AI = A$$

$$D_C = (2,3,6,7)\bar{I} + (2,3,6,7)I = B(\bar{I}+I) = B$$

BIBLIOGRAFIA :

- ENRIQUE MANDADO. "Sistemas electrónicos digitales"
Ed. Marcombo (1977 3^a edición)
- HILL AND PETERSON "Introduction to circuits switching
theory" Ed. J. Willey
- MC CLUSKEY "Introduction to the theory of circuits swit_
ching" Ed. Mc Graw-Hill
- HUMPHREY "Switching Circuit" Ed. McGraw-Hill
- MONTGOMERY "Logical design of digital computer"
- JACOB MILLMAN CHRISTOS C HALKIAS "Electronica integrada"