MATEMATIKA OROKORRA I

I. PARTEA

Egilea: M. J. ZARATE AZKUNA

2.argitaraldia - 1983ko Azaroa

udako euskal unibertsitatea



Aurrerki Kutxa Munizipalak

Babestutako argitarapena

Edición patrocinada por la

Caja de Ahorros Municipal
de San Sebastian

MATEMATIKA OROKORRA I

I.PARTEA

EGILEA: M.J.ZARATE AZKUNA

2.ARGITARALDIA - 1983KO AZAROA

Jabegoa: UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA
ISBN : 84-86158-22-2
Lege Gordailua : SS-594/83
Inprimategia : Donosti Aurrezki Kutxa

HITZAURREA

Lan hau Leioako Zientzi Fakultatean burutu da, 1979-80 ikasturtean.

Ikasturte horretan, lehen mailako talde berezi bat antolatu izan da euskara hutsez emateko, talde hori espezialitate desberdinetako ikaslez osoturik izanik. Lan hau talde horretan erabilitako apunteen bilduma da.

Zientzi Fakultatean Biologia, Geologia eta Kimikazko espezialitatetako lehen ikasmailako Matematika Generaleko programek 20 gai amankomun dituzte, eta Kimikazko espezialitatean hauetatik aparte beste 6 gai berri ematen dira. Programa hauk abiaburu bezala hartu ditugu, eta lan honetan, esandako lehen amankomuneko 20 gaiak azaltzen dira. Gure asmoa, geratzen diren 7 gaiak datorren urtean argitaratzea da.

Kontutan hartu hemen agertzen dena apunteak baizik ez direla, beraz, gauza asko hobegarri eta osogarri izango direla.

Bukatu aurretik eskerrak eman behar dizkiogu zenbait pertsonari:

- Isabel Larrauri idazkariari, borondatez gaiak makinatzen eman dituen orduengatik.

- J.R. Etxebarria irakasleari, euskara aldetik lan hau zuzentzen pasatu dituen orduengatik.

- Begoña Karraskal, Edurne Biritxinaga eta Karmele Castillo irakasleei, eman didaten laguntzagatik.

Bilbon, 1980.eko apirilaren 20 an

Mari Jose Zarate

AURKIBIDEA

1. GAIA: R MULTZOAREN TOPOLOGIA 1

Multzo bornatuak. Tarteak. Inguruneak. Multzo baten metatze-puntuak eta multzo deribatua. Multzo baten puntu atxekiak eta isolatuak. Borne-, kanpo-, eta muga-puntuak. R-ren multzo irekiak eta itxiak. Borel-Lebesgueren teorema. Multzo trinkoak. Zenbaki errealezko multzo baten goiko eta beheko muturrak. Bolzano-Weierstrass-en teorema.

2. GAIA: ZENBAKI ERREALEN SEGIDAK 15

Definizioa. Segida bornatu eta monotonoak. Segida baten limitea. Limitearen bakartasuna. Segida monotono eta bornatuak. Segida konbergenteen eta metatze-puntuen arteko erlazioak. Cauchy-ren konbergentzi erizpidea eta Cauchy-ren segidak. Segida konbergenteen limiteekiko eragiketak. Indeterminazioak. Azpisegidak. Segida baten goi- eta behe-limitea.

3. GAIA: ZENBAKI ERREALEN SERIEAK 33

Definizioa. Serie konbergente, dibergente eta oszilanteak. Cauchy-ren erizpidea eta ondorioak. Serieen propietate generalak. Serie geometrikoa. Serie hipergeometrikoa. Beste serie-tipo bat.

4. GAIA: GAI POSITIBOTAKO SERIEAK 47

Gai posotibotako serieen propietate generalak. Serie baten serie majoratzaile eta minoratzaileak. Gauss-en konparaziozko teorema eta korolarioa. Serie harmoniko orokorra. D'Alembert-en erizpidea. Cauchy-ren erizpidea. Pringsheim-en erizpidea. Raaberen erizpidea.

5. GAIA: GAI POSITIBO ETA NEGATIBOTAKO SERIEAK 67

Serie erabat konbergenteak. Serie kondizionalki konbergenteak. Serie konbergenteeen eta erabat konbergenteen arteko erlazioa. Serie erabat konbergenteen propietateak. Serie alternatuak. Leibniz-en teorema.

6. GAIA: ALDAGAI ERREALEN FUNTZIOAK. LIMITEA 73

Funtzio baten definizioa. Existentzi eremua. Oinarrizko funtzio nagusiak. Funtzio konposatua. Funtzio monotonoak: gorakorrak eta beherakorrak. Funtzio periodikoak. Funtzio bikoiti eta bakoitiak. Funtzio inbertsoa. Funtzio bornatuak. Funtzio baten limitea. Limitearen unizitatea. Albo-limiteak. Limitea duten funtzioen propietate batzu.

7. GAIA: LIMITEEN PROPIETATEAK 87

Infinitesimoak. Limitea duten funtzioen eta infinitesimoen arteko erlazioa. Funtzio bornatu baten eta infinitesimo baten biderkadura. Limiteen oinarrizko propietateak (batura, biderkadura eta zatidura).

8. GAIA: INFINITESIMOAK ETA INFINITUAK 97

Infinitesimoak. Infinitesimoen arteko konparaketa. Infinitesimo baten ordena. Infinitesimo baliokideak. Baldintza beharrezkoa eta nahikoa. Infinitesimoen aplikazioa limiteen kalkuluan. Infinitesimo arruntenak. Infinituak. Infinituen ordena. Infinitesimo eta infinituen arteko erlazioa.

9. GAIA: FUNTZIO JARRAIAK (I) 105

Definizioa. Batura, biderkadura eta zatiduraren jarraitasuna. Funtzio jarraien konposaketa. Albo-jarraitasuna. Funtzio baten etenguneak.

10. GAIA: FUNTZIO JARRAIAK (II) 113

Funtzio uniformeki jarraia. Zuzenki batetango funtzio jarraien propietate garrantzizkoenak: Heine-ren teorema, Weierstrass-en teorema, Bolzano-ren teorema eta Darboux-en propietatea. Funtzio inbertsoaren jarraitasuna.

11. GAIA: DERIBATUAK ETA DIFERENTZIALAK 125

Funtzio baten deribatua puntu batetan. Adierazpen geometrikoa. Funtzio deribatua. Funtzio baten albo-deribatuak puntu batetan. Funtzio deribagarrien jarraitasuna. Funtzio deribagarria oinarrizko propietateak (batura, biderkadura, zatidura). Funtzio konposatuaren deribatua. Funtzio inbertsoaren deribatua. Funtzio elementalen deribatuak. Funtzio baten diferentziala pun-

tu batetan. Adierazpen geometrikoa. Diferentzialen propietateak. Goi-ordenako deribatuak eta diferentzialak.

12. GAIA: FUNTZIO DERIBAGARRIEI BURUZKO TEOREMAK... 149

Rolle-ren teorema. Cauchy-ren teorema. Langrange-ren teorema. L'Hopital-en erregela. Forma indeterminatuak. Taylor-en formula.

13. GAIA: FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA 169

Funtzio baten gorapen eta beherapenak. Maximo eta minimo erlatiboak. Ahurdura eta ganbiltasuna. Inflexio-puntuak. Asintotak.

14. GAIA: INTEGRAL EZMUGATUAK 187

Jatorrizko funtzioak eta integral ezmugatua. Integral ezmugatuen taula. Integral ezmugatuen propietateak. Aldagai aldaketazko integrazioa. Zatikazko integrazioa. Funtzio razionalak: Funtzio razional sinpleen integrazioa; Funtzio razional generalen integrazioa. $ax^2 + bx + c$ expresioa daukaten funtzio batzuren integrazioa. Funtzio irrazionalen integrazioa. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ motako integralak. Integral binomikoen integrazioa. Funtzio trigonometrikoen integrazioa.

15. GAIA: INTEGRAL MUGATUA EDO RIEMANN-EN INTEGRALA. 227

Problemaren planteiamendua. Beheko eta goiko baturak. Integral mugatua eta integrazio-baldintza. Integral mugatuen oinarrizko

propietateak. Goiko muga aldakorreko integral mugatua. Newton-Leibniz-en formula edo Barrow-ren erregela. Integral mugatu batetan aldagai-aldaketazko integrazioa. Zatikazko integrazioa.

16. GAIA: INTEGRALEN APLIKAZIO GEOMETRIKOAK 249

Azaleren kalkulua koordenatu cartestarretan. Era parametrikoan emandako funtzioak. Ekuazio parametrikoetan emandako kurba batek mugatutako trapezio kurbatuaren azalera. Koordenatu polarren sistema. Koordenatu polarretan emandako sektore kurbatu baten azalera. Koordenatu cartestarretan emandako kurba-arku baten luzera. Ekuazio parametrikotan emandako kurba-arku baten baten luzera. Gorputzen bolumenaren kalkulua, sekzio paraleloen azaleren funtzioan. Biraketa-gorputzen bolumena. Biraketa-gorputzen azalera.

17. GAIA: INTEGRAL INPROPIOAK 273

Integral inpropioak tarte infinitu batetan: Integral konbergente eta dibergenteak. Konbergentzia eta dibergentziarako baldintza nahikoak. Integral erabat konbergentea eta erabateko konbergentziarako baldintza nahikoa.

Funtzio etenen integral inpropioak: Integral konbergente eta dibergenteak. Konbergentzia eta dibergentziarako baldintza nahikoak. Integral erabat konbergentea eta erabateko konbergentziarako baldintza nahikoa.

18. GAIA: EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK 285

Ekuazio linealen sistemak. Definizioak. Matrizeak. Matrize-eragiketak. Emandako matrize batu dagozkion matrizeak eta matrize-motak. Ekuazio sistemen planteiamendua, era matrizialean. Gauss-en ezabatze-metodoa. Sistema homogenoak.

19. GAIA: DETERMINANTEAK ETA CRAMMER-EN ERREGELA... 303

Matrize karratuaren determinantea. Determinanteen propietateak. Determinante baten garapena. Goi-ordenako determinante baten kalkulua. Crammer-en erregela eta matrize inbertsoaren kalkulua. Matrize baten heina. Ekuazio linealetako sistemen eztabaida eta ebazpena.

20. GAIA: KOADRIKAK 331

Definizioa. Elipsoidea. Horri bateko hiperboloidea. Horri biko hiperboloidea. Paraboloide eliptikoa. Paraboloide hiperbolikoa. Gainazalak: bigarren ordenako konoa eta bigarren ordenako zilindroa.

B I B L I O G R A F I A

SALAS, S.L. eta HILLE, E. "Calculus" (tomo bi). Reverté. España, 1.982.

SPIVAK, M. "Calculus" (tomo bi) Reverté. Barcelona 1.972.

PISKUNOV, N. "Calculo diferencial e integral". Montaner y Simon. Barcelona, 1.978.

MARTINEZ SALAS, J. "Elementos de Matemáticas". Valladolid.

DEMIDOVICH, B.P. "5.000 problemas de Análisis Matemático". Paraninfo. Madrid, 1.976.

R.A.E.C. "Problemas de cálculo infinitesimal". Madrid, 1.971.

1. GAIA:

R MULTZOAREN TOPOLOGIA

Multzo bornatuak. Tarteak 3

Inguruneak 4

Multzo baten metatze-puntuak 5

Multzo deribatua. Puntu atxekiak eta isolatuak 6

Barne-, kanpo-, eta muga-puntuak 7

R-ren multo irekiak eta itxiak 7

Borel-Lebesgueren teorema 9

Multzo trinkoak 11

Zenbaki errealezko multzo baten muturrak 11

Bolzano-Weierstrass-en teorema 13

1. G A I A

R MULTZOAREN TOPOLOGIA

Dakigunez, multzoen estruktura algebraikoak oso baliotsu dira, multzoen propietate batzu ikasteko; baina beste klase batetako propietateak aztertzeko, ez digute balio, eta horretarako estruktura berri batzu, topologiko izenekoak, sartu behar dira. Horrela, espazio topologikoak eraikitzen dira eta espazio hauen artean R delakoa da erabilgarriena. Aurrerantzean, R eta beraren azpimultzoekin lan egingo dugu.

Multzo bornatuak

E multzoa goitik (edo behetik) bornatua dago, R-n beraren elementu guztiak baino handiago (edo txikiago) den elementu bat existitzen denean. Hots, $\exists\, x \in R \;/\; \forall a \in E,\ x \geq a$ (edo $x \leq a$).

Goitik eta behetik bornatua izanez, multzoa bornatua dela esanen dugu. Biz $M \in R$. M-k E multzoa goitik (edo behetik) bornatzen badu, M E-ren goiko (edo beheko) bornea edo majorante (edo minorante) dela esanen dugu. Bornea, bornatzen duen multzoan ez dagoenean, multzo hori herstuki bornatzen duela esanen dugu.

Tarteak

a eta b R-ko bi elementu badira, $a < x < b$ baldintza betetzen duten x elementuen multzoa, tarte ireki bat dela esaten dugu,

eta (a,b) idazten.

Aldiz, $a \leq x \leq b$ baldintza betetzen denean, tartea itxia izanen da, eta $[a,b]$ idatziko dugu.

Modu berean:

$$(a,b] = \{ x \in R \mid a < x \leq b \}$$

$$[a,b) = \{ x \in R \mid a \leq x < b \}$$

tarte hauk ere defini ditzakegu, eta erdi irekiak edo erdi itxiak direla esan.

Orain arte definitu ditugun tarte guztiak, bornatuak izan dira, baina ba daude ez-bornatuak direnak ere, adibidez:

$$(a,\infty) = \{ x \in R \mid a < x < \infty \}$$

$$(-\infty,b] = \{ x \in R \mid -\infty < x \leq b \}$$

Inguruneak

Puntu bat bere barnean daukan tarte ireki batek, puntu honen ingurune bat da; halegia:

Bira $x_0 \in R$ eta I tarte irekia, non x_0 I-n baitago; orduan I x_0-ren ingurune bat da.

Puntu baten ingurunean artean, moeta berezi bat kontsidera dezakegu: ingurune simetrikoena, hau da: $(x_0-\varepsilon , x_0+\varepsilon)$ forma dutenak. Tarte hauk ere, $B(x_0,\varepsilon)$ idatzi ohi ditugu, eta kasu honetan, x_0 ingurune honen zentrua da eta ε, erradioa.

x_0 elementuaren ingurune bati x_0 elementua kentzen badiogu, in

rune hori laburtua dela esanen dugu.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ x-en inguruneak badira, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ x-en ingurune bat da.

Frogapena

$\forall\, 1 \leq i \leq n \qquad U_i = (a_i, b_i)$ izango da.

$a_i < x < b_i \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n$

zeren $x \in U_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$ eta $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = (\max_{1 \leq i \leq n} a_i, \min_{1 \leq i \leq n} b_i)$

orduan $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ eta multzo hau tarte ireki bat da, beraz x-en ingurune bat da.

Multzo baten metatze-puntuak

Biz E R-ren azpimultzo bat.

Definizioa

a puntuaren ingurune guztiek, a ez den E-ren elementu bat gutxienez daukatenean, a E-ren metatze-puntu bat da.

a-k ez du zertan E-ren elementua izan behar.

Definizioaren ondorioa

a E-ren metatze-puntua bada, halabeharrez, a-ren ingurune guztiek E-ren elementuen kopuru infinitua daukate.

Frogapena

Absurdura eramanez, suposa dezagun a-ren ingurune batetan, A delakoan, E-n dauden elementuen kopurua finitua dela.

Bira $a_1, \ldots, a_n$ A-n eta E-n batera dauden elementuak, a izan ezik; a eta a_i arteko distantzia d_i deituko dugu, hots, $d_i = |a - a_i|$

Biz $d = \min_{1 \leq i \leq n} d_i$. B(a,d) a-ren ingurune bat da, eta ez dauka E-ren elementurik, hipotesiaren aurka.

Multzo deribatua

E multzoaren metatze-puntuen multzoa, E-ren multzo deribatua da. E' idatziko dugu.

Puntu atxekiak

Biz E R-ren azpimultzo bat. a puntuaren ingurune guztiek E-ren elementu bat gutxienez daukatenean, a E-ren puntu atxeki bat da. E-ren elementu atxeki guztiek beraren multzo atxekia osotzen dute.

Multzo baten puntu isolatuak

a puntua E-ren puntu atxekia bada, eta ez metatze-puntua, E-ren puntu isolatua deituko dugu. Hots, a puntu isolatua da a-ren ingurune bat existitzen bada, non ingurunearen eta E-ren ebakidura {a} baita.

Barne-, kanpo-, eta muga-puntuak

E barnean dagoen a-ren ingurune bat existitzen bada, E-ren barne-puntua dela diogu.

Beste aldetik, a-ren ingurune bat, I, non $I \cap E = \emptyset$ den existitzen bada, a E-ren kanpo-puntu izango da.

a puntuaren edozein ingurunek E eta E^C delakoen elementu bana badauzka, a E-ren muga-puntu izango da.

Hau da, a puntua, batera, E eta E^C-ren puntu atxekia denean.

R-ren multzo irekiak eta itxiak

A multzoak bere puntu bakoitzaren ingurune bat gutxienez barnean duenean, irekia izango da.

Aldiz, bere metatze-puntu guztiak dauzkan multzoa, itxia deituko dugu.

Teorema

E multzoa, irekia (edo itxia) bada, E^C itxia (edo irekia) da.

Frogapena

a) Biz E multzo ireki bat. Absurdura eramanez, suposa dezagun E^C ez dela itxia. Hau da, existitzen da E^C-ren metatze-puntu bat, x, non x ez baitago E^C delakoan. Orduan, x E-n egongo da; hipotesiz, E irekia denez, ba dago x-en ingurune bat, U, non $U \subset E$ baita.

Halabeharrez $U \cap E^C = \emptyset$ izango da, baina hau absurdua da, zeren x E^C-ren metatze-puntu baita.

b) Suposa dezagun, orain, E itxia dela.

Biz $x \in E^C$, orduan $x \notin E$ eta E itxia denez, x ez da izango E-ren metatze-puntu bat.

Ondorioz, x delakoak ba du ingurune bat, U, non $U \cap E = \emptyset$ den. Halabeharrez $U \subset E^C$ da, hots, E^C irekia da, zeren beraren edozein elementutarako ingurune bat aurki baikemezake, E^C barnean egonez.

Zer dira espazio topologikoak?

Teorema

Bedi $\mathcal{A}$ R-ren multzo irekien familia.

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) $R \in \mathcal{A}$

iii) $\mathcal{A}$-ren edozein azpifamiliaren bildura, $\mathcal{A}$-n dago. Hau da:

$$A_i \in \mathcal{A} \quad \forall i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

iv) $\mathcal{A}$-ren edozein azpifamilia finituren ebakidura, $\mathcal{A}$-n dago.

Hau da:

$$\forall i \ / \ 1 \leq i \leq n, \quad A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

Frogapena

i) Nola multzo hutsak elementurik ez duen, bistakoa da $\emptyset$ irekia dela.

ii) $\forall x \in R \quad \exists (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset R$ eta $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

iii) Bira $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ eta $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$

halabeharrez, $\exists i_0 \in I$ non $x \in A_{i_0}$ baita

A_{i_0} irekia denez $\exists U$, x-en ingurune bat dena eta

$$U \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i .$$

iv) Bira $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{A}$ eta $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Honelatan, ba, $x \in A_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$, A_i irekia denez,

$\exists U_i \,/\, x \in U_i \subset A_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$. Orduan

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \text{ eta lehen ikisu genuenez, } \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

x-en ingurunea da.

R-n egin dugun bezala, edozein multzotan egin liteke; honela sortu da Matematikaren adar berri bat: Topologia.

X multzoa badugu, eta $\mathcal{T}$ X-en azpimultzoaren familia bat bada, $\mathcal{A}$-k betetzen zituen lau propietateak $\mathcal{T}$-k betetzen dituenean, topologia bat dela esaten dugu. $(X, \mathcal{T})$ bikotea espazio topologikoa deitu ohi da.

Borel-Lebesgueren teorema

Definizioak

Bira E eta $\{A_i\}_{i \in I}$. $\{A_i\}_{i \in I}$ E-ren estalki bat dela esaten dugu $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ dugunean.

Baldin $\exists I_0 \subset I$ non $E \subset \bigcup_{i \in I_{i_0}} A_i$ den, $\{A_i\}_{i \in I_0}$ $\{A_i\}_{i \in I}$-ren azpiestalki bat dela esaten dugu.

I_o multzo finitua denean, $\{A_i\}_{i \in I_o}$ azpiestalki finitua dela esango dugu.

Teorema

Biz E R-ren azpimultzo bornatu eta itxia. E-ren tarte irekien edozein estalkitatik azpiestalki finitu bat atera liteke.

Frogapena

E multzo finitua balitz, teorema hau argi legoke. Suposa dezagun orain, E-k elementuak kopuru infinituan dituela eta biz $\mathcal{A}$ E-ren estalki bat.

E bornatua denez, $\exists [a,b]$ non $E \subset [a,b]$ baita. Absurdura eramanez, suposa dezagun $\mathcal{A}$-tik ezin dugula atera E-ren estalki finiturik.

Biz a_1, $[a,b]$ tartearen erdiko puntua. Bira $E_1 = E \cap [a,a_1]$ eta $F_1 = E \cap [a_1,b]$, nola E-k $\mathcal{A}$-ren estalki finiturik ez duenez gero, gutxienez hauetariko batek ez du edukiko estalki finiturik, adibidez E_1.

Biz a_2, $[a,a_1]$ tarteaten erdiko puntua. Lehen bezala, edo $E_2 = E_1 \cap [a,a_2]$ delakoak edo $F_2 = E_1 \cap [a_2,a_1]$ delakoak ez dute estalki finiturik.

Honela jarraituz, tarte-segida bat lortzen dugu: E_1, E_2, ..., eta existitzen da tarte itxien segida bat, $\{S_i\}_{i \in I}$, non $\forall i \in N$ $E_i \subset S_i$ eta luzera $S_i = \frac{b - a}{2^i}$.

Adibidez, $S_1 = [a,a_1]$, $S_2 = [a,a_2]$ edo $S_2 = [a_2,a_1]$, eta abar. Cantor-en teoremaren bidez, $\bigcap S_i = \{\alpha\}$, $\alpha \in R$.

Biz I edozein tarte ireki bat, $\alpha \in I$ izanik. Luzera $S_i \longrightarrow 0$ denez, $\exists n \,/\, S_n \subset I$. S_n-ek bere barnean E_n multzoa du eta honek ez du $\mathcal{A}$-ren azpiestalki finiturik. Hau dela eta, E_n-k E-ren elementuak kopuru infinituan ditu. Beraz, α E-ren metatze-puntu bat da; eta E itxia zenez, $\alpha \in E$. $\mathcal{A}$ E-ren estalki bat izanez, $\exists A \in \mathcal{A} / \alpha \in A$ eta lehen bezala $\exists S_{n_o} / \alpha \in S_{n_o} \subset A$. Baina, $E_{n_o} \subset S_{n_o} \subset A$, hots, E_{n_o}-k ba du $\mathcal{A}$-ren estalki finitu bat, $\{A\}$ hipotesiaren aurka.

Multzo trinkoak

Definizioa

E multzoaren tarte irekien edozein estalkitatik azpiestalki finitu bat atera ahal badugu, E multzoa trinkoa deituko deituko dugu.

Borel-Lebesgueren teoremaren bidez, R-ren edozein multzo itxi eta bornatu, trinkoa da.

Proposizioa

E multzoa goitik (edo behetik) bornatua izanik, E multzoaren goiko (edo beheko) borneen multzoak minimo (edo maximo) bat du.

Frogapena

i) E multzoa finitua bada, E-ren elementurik handiena goiko bornea

da eta gainera, goiko bornerik txikiena.

ii) E-ren elementu bat E-ren goiko bornea bada, hori izango da goiko borneen minimoa.

iii) Suposa dezagun E-ren goiko borne guztiak E^c-n daudela; biz M E-ren goiko borne bat eta $a \in E$.

Biz $S_0 = [a,M]$, $S_0 \cap E \neq \emptyset$ zeren $a \in E \cap S_0$ dugun. m_0 S_0-ren erdiko puntua bada, $S_0 = I_0 \cup J_0$ non $I_0 = [a,m_0]$ eta $J_0 = [m_0,M]$ baitira.

Orduan $J_0 \cap E = \emptyset$ balitz, $I_0 \cap E \neq \emptyset$ izan beharko luke, zeren bestela, $S_0 \cap E = \emptyset$ izanen bailitzateke, suposatu dugunaren aurka; eta azken kasu honetan, $I_0 = S_1$ izango da.

S_1 delakoak ondoko propietateak betetzen ditu:

1) Luzera $S_1 = \dfrac{\text{luzera } S_0}{2}$

2) $S_1 \cap E \neq \emptyset$

3) E-n ez dago S_1 goitik herstuki bornatzen duen elementurik.

Metodo honi jarraituz, $\{S_1, S_2, \ldots\}$ tarte itxiren segida lortzen dugu, eta $\forall n \in N$ kasurako hauxe ukanen dugu:

1) Luzera $S_n = \dfrac{\text{luzera } S_{n-1}}{2} = \dfrac{\text{luzera } S_0}{2^n}$

2) $S_n \cap E \neq \emptyset$

3) E-n ez dago S_n goitik herstuki bornatzen duen elementurik.

Cantor-en teoremaren bidez, $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{\mu\}$, non $\mu \in R$ baita.

Froga dezagun μ dela E-ren majorante txikiena:

$x > \mu$ izanik $x \in E$ egongo balitz, luzera $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ denez, $\exists\, n_0 \in N$, non luzera $S_{n_0} < x - \mu$ den. Baina hau 3. propietatearen aurka doa. Beraz, μ E-ren majorante bat da.

α E-ren goiko borne izanik, $\alpha < \mu$, existituko balitz, lehen bezala, $n_0 \in N$ non luzera $S_{n_0} < \mu - \alpha$; 2. propietatearen aurka beraz. Honeal, frogaturik dago, μ E-ren majorante txikiena dela.

Simetrikoki frogatzen da, ezen behetik mugatua dagoen multzo batek, minorante bat, m, duela.

Definizioak

E multzoaren goiko bornerik txikiena, μ , goiko muturra deitzen dugu eta $\mu = \sup E$ idazten.

E multzoaren beheko bornerik handiena, m, beheko muturra deitzen dugu eta $m = \inf E$ idazten.

Bolzano-Weierstrass-en teorema

Biz A R-ren azpimultzo infinitu eta bornatu bat; orduan, $A' \neq \emptyset$, hau da, A-k ba du gutxienez metatze-puntu bat.

Frogapena

Absurdura eramanez, $A' = \emptyset$ dela suposa dezagun; halabeharrez,

A itxia da eta, hipotesiz, mugatua denez, trinkoa da.

Edozein multzoaren elementu guztiak, berarekiko atxekiak dira. A-ren metatze-puntuak ez izanik, puntu isolatuak dira. Beraz, $\forall x \in A \ \exists V_x$, x-en ingurune irekia dena, non $A \cap V_x = \{x\}$ den. Argi dago, $\{V_x \mid x \in A\}$ A-ren estalki irekia dela eta A trinkoa izanik, Borel-Lebesgue-ren teoremaz, azpiestalki finitu bat aurki dezakegu, baina, hau ezinezkoa da, A infinitu baita.

Hots, $A' \neq \emptyset$ izango da.

2. GAIA:

ZENBAKI ERREALEN SEGIDAK

Segida baten definizioa. Segida bornatuak 17

Segida monotonoak. Segida baten limitea 18

Limitearen bakartasuna 20

Segida monotono eta bornatuak 21

Segida konbergenteen eta metatze-puntuen arteko erlazioak .. 21

Cauchy-ren konbergentzi erizpidea 24

Cauchy-ren segidak 26

Segida konbergenteen limiteekiko eragiketak 26

Indeterminazioak 29

Azpisegidak 30

Segida baten goi- eta behelimiteak 30

2. G A I A

ZENBAKI ERREALEN SEGIDAK

2.1. Definizioa

Zenbaki errealen $\{x_n\}$ segida N multzotik R multzora doan aplikazioa da. x_n gaiari, segidaren gai generala deituko diogu.

Segidaren gai generala emanez, segida edozein elementu kalkulatzea posible egiten duen legea ematen dugu.

Adibidez,

$$x_n = \frac{2n}{2n - 1}$$

Orduan, $n = 1,2,3,\ldots$ eginez, segidaren elementu guztiak lortzen ditugu:

$$x_1 = \frac{2}{1}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \frac{6}{5}$$

$$\vdots$$

2.2. Definizioa : Segida bornatuak

$\{x_n\}$ segida bornatua dela esango dugu, baldin $M > 0$ existi

tzen bada, non

$$|x_n| \leq M \quad \forall n \quad \text{baita.}$$

Adibidez, definizio honen arabera, ondoko segidak bornatuak dira:

$$\{\frac{1}{n}\}, \quad \{(-1)^n\}$$

2.3. Definizioa: Segidak monotonoak

$\{x_n\}$ segida monotono gorakorra dela esango dugu, ondokoa betetzen duenean:

Baldin $n' > n$ bada, orduan $x_{n'} \geq x_n$ da.

$\{x_n\}$ segida monotono beherakorra dela esango dugu, ondokoa betetzen danean:

Baldin $n' > n$ bada, orduan $x_{n'} \leq x_n$ da.

Era berean, $n' > n \quad x_{n'} > x_n$ denean, $\{x_n\}$ segida herstuki monotono gorakorra dela diogu.

$n' > n \quad x_{n'} < x_n$ denean $\{x_n\}$ segida herstuki monotono beherakorra dela diogu.

2.4. Definizioa: Segida baten limitea

$\{x_n\}$ segidak, $n \to \infty$ denean, l zenbakia limitetzat duela esango dugu (l zenbaki erreal bat izanik) eta $\lim_{n \to \infty} x_n = l$ idatziko, ondoko baldintza betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, / \forall n > n_0 \qquad |x_n - 1| < \varepsilon$$

limite finitua duen edozein segida, konbergentea dela esango dugu. Adibidez:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{dela dakigu;}$$

beraz, $\{\frac{1}{n}\}$ segida konbergentea da.

2.5. Definizioa

$\{x_n\}$ segidak limite infinitua duela esango dugu, ondoko baldintza betetzen denean:

$$\forall M > 0, \quad \exists n_0 ,/ \forall n > n_0 \qquad |x_n| > M$$

Honela idatziko dugu:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$$

Baldin $x_n > M$ bada, limitea $+\infty$ dela esango dugu.

Baldin $x_n < -M$ bada, limitea $-\infty$ dela esango dugu.

Limite infinitua duen segida bati, dibergentea dela esango diogu. Segidaren limitearen konzeptua azaltzeko, lehen erabili dugunetik kanpora, beste definizio baliokide batzu ere eman ditzakegu. Hauetariko bat, ondokoa da:

Zenbaki bat (berdin finitua nahiz infinitua izan), $\{x_n\}$ segidaren limitea dela esango dugu, bere edozein inguruneren barnean segidaren ia puntu guztiak badaude, kopuru finitu bat izan ezik.

2.6. Definizioa

Limiterik ez daukaten segidak, oszilanteak direla esango dugu. Adibidez, $\{(-1)^n\}$ segida, oszilantea da.

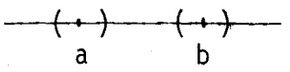
2.7. Teorema

Segida konbergente baten limitea, bakarra da.

Frogapena

Suposa dezagun, $\{x_n\}$ delakoa, limite desberdin bi, a eta b $(a \neq b)$, dituen segida dela. a, $\{x_n\}$ segidaren limitea izanik, bere edozein ingurunek, segidaren ia puntu guztiak, kopuru finitu bat izan ezik, bere barnean ditu.

Berdin esan dezakegu b zenbakiari buruz, $\lim_{n \to \infty} x_n = b$ baita.



Kontutan har dezagun $\frac{|b - a|}{4}$ luzera.

a zentrudun eta $\frac{|b - a|}{4}$ luzeradun erradioa duen a-ren inguruneak, segidaren ia puntu guztiak bere barnean ditu, kopuru finitu bat izan ezik.

Era berean, bardintsu esan dezakegu, b zentrudun eta $\frac{|b - a|}{4}$ erradiodun b-ren ingurunueari buruz.

Baina hau ezinezkoa da, ingurune bi hauk desberdinak baitira.

Beraz, kontraesan batetara heldu gara, eta teorema frogaturik geldi-tzen da.

Ikus dezagun orain, zer esan daitekeen $\{x_n\}$ segidaren metatze-puntuei buruz. (Kontsideratuko dugu, $\{x_n\}$ segidan ez dagoela infinitu bider agertzen den elementurik). **(2.9 - 2.10)**

2.8. Teorema

Segida gorakor (beherakor) bat goitik (behetik) bornaturik badago, konbergentea da.

Frogapena

Suposa dezagun $\{x_n\}$ delakoa segida gorakor bat dela eta segida honen goiko muturra M dela, hots, $x_n \leq M$.

M goiko muturra denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_{n_0} \in \{x_n\} \ / \ x_{n_0} > M - \varepsilon$$

Bestalde, $x_n \geq x_{n_0}$ $n > n_0$ denean.

Azken desberdintza bi hauen ondorioz:

$x_n > M - \varepsilon$ $n > n_0$ denean, hau da, $|x_n - M| < \varepsilon$ $n > n_0$ denean $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} x_n = M.$

2.9. Teorema

Aipaturiko baldintzetan dagoen $\{x_n\}$ segida, konbergentea izango da, baldin eta soilik baldin bornatua bada eta metatze-puntu bakar bat badauka.

Frogapena

Froga dezagun lehenik, baldintza beharrezkoa dela. Hau da, $\{x_n\}$ konbergentea bada eta limitetzat l badu, orduan bornatua da eta metatze-puntu bakar bat du. $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ dugu.

Beraz, l, $\{x_n\}$ segidaren metatze-puntua da, zeren definizioz, beraren edozein ingurunek, segidaren puntuak bere barnean ditu.

Ikus dezagun metatze-puntu bakarra dela.

l' beste metatze-puntu bat balitz, kontsidera dezagun l zen trudun eta $\varepsilon < |l - l'|$ erradiodun l-ren ingurunea. Ingurune honen barnean, segidaren ia puntu guztiak egon behar dira, kopuru finitu bat ezan ezik. Baina hau kontraesan bat da, l' ere metatze-puntua baita.

Froga dezagun orain, $\{x_n\}$ segida bornaturik dagoela:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \ (\equiv)_{def} \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 / \ \forall n > n_0 \quad |x_n - l| < \varepsilon$$

Badakigu ondokoa gertatzen dela:

$$|x_n| - |l| \leq |x_n - l| < \varepsilon \implies |x_n| < |l| + \varepsilon$$

Beraz,

$$|x_n| < |l| + \varepsilon \qquad \forall n > n_0$$

$M = \max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |l| + \varepsilon\}$ hartzen badugu, orduan zera daukagu:

$$|x_n| < M + 1, \qquad \forall n$$

Beraz, $\{x_n\}$ segida bornatua da.

Ikus dezagun, bigarren, baldintza nahikoa dela. Hau da, $\{x_n\}$ segida bornatua bada eta metatze-puntu bakar bat badu, orduan konbergentea da. Eman dezagun metatze-puntua, l zenbakia dela.

Froga dezagun $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ dugula. $\{x_n\}$ segidaren limitea l ez bada, orduan, l-ren $\mathcal{E}(l)$ ingurunea existitzen da, zeinen barnean ez dauden segidaren infinitu elementu. Beraz, $\mathcal{E}(l)$ ingurunearen barnean ez dauden elementuen S multzoa, infinitua da. Gainera, $S \subset \{x_n\}$ eta $\{x_n\}$ bornaturik dagoenez, S multzoa ere bornaturik egongo da.

Orduan, Bolzano-Weierstrass-en teorema aplikatuz, l' existitzen da, non $l' \in S$ $\{x_n\}$ segidaren metatze-puntua baita, $l \neq l'$ izanik.

Beraz, l, $\{x_n\}$ segidaren limitea ez balitz, metatze-puntu bat baino gehiago egongo litzateke, hipotesiarekin aurka.

Beraz, l, $\{x_n\}$ segidaren limitea da eta, ondorioz, $\{x_n\}$ konbergentea dela esan dezakegu.

2.10. Teorema

a, $E \subset R$ multzo baten metatze-puntua bada, orduan $x_n \neq a$ betetzen duten E multzoko puntuz formaturiko $\{x_n\}$ segida existitzen da, non $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ baita.

Frogapena

a puntua, E multzoaren metatze-puntua izanik, gutxienez $x_1 \in E$

($x_1 \neq a$) puntu bat existitzen da, non x_1, ε_1 erradiodun a-ren $\mathcal{E}_1(a)$ ingurunean baitago. Arrazoi beragatik, gutxienez $x_2 \in E$ ($x_2 \neq a$) puntu bat existitzen da, non x_2, $\varepsilon_2 = \frac{|x_1 - a|}{2}$ erradiodun $\mathcal{E}_2(a)$ ingurunean baitago.

Era berean, $x_3 \in E$ ($x_3 \neq a$) existitzen da, non x_3, $\varepsilon_3 = \frac{|x_2 - a|}{2}$ erradiodun a-ren $\mathcal{E}_3(a)$ ingurunean baitago.

Prozesu hau jarraituz lortzen dugun $\{x_n\}$ segida, a-gandik desberdin diren E-ko puntuz formaturik dago, eta a zenbakia du limitetzat (zeren a-ren edozein ingurunek, $\{x_n\}$ segidaren ia puntu guztiak bere barnean baititu, kopuru finitu bat izan ezik).

2.11. Teorema : Cauchy-ren konbergentzi erizpidea

Zenbaki errealen $\{x_n\}$ segida konbergentea dela esango dugu, baldin eta soilik baldin ondoko baldintza betetzen bada:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_o \in N, / \forall p,q \in N \qquad p,q > n_o \Longrightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Frogapena

1) Ikus dezagun lehenik, baldintza beharrezkoa dela.

Eman dezagun $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ dela. Orduan, definizioz,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_o \in N, / \forall n > n_o, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x_p - x_q = (x_p - a) - (x_q - a)$$

$$|x_p - x_q| = |(x_p - a) - (x_q - a)| \leq |x_p - a| + |x_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$p,q > n_o$$

2) Ikus dezagun orain, baldintza nahikoa dela:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall p,q \in N \quad p,q > n_0 \quad |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Kontsidera dezagun orain q ($q > n_0$) finkoa dela eta p aldakorra dela. $\{x_n\}$ konbergentea dela ikusiko dugu, bornatua eta metatze-puntu bakarduna dela frogatuz.

$$|x_p| = |x_p - x_q + x_q| \leq |x_p - x_q| + |x_q| < |x_q| + \varepsilon , \qquad p > n_0$$

$M = \max \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |x_q| + \varepsilon\}$ hartzen badugu, orduan $|x_n| \leq M$, $\forall n$. Beraz, $\{x_n\}$ segida bornatua da.

Bestalde, $\{x_n\}$ multzo infinitu eta bornatua delarik, Bolzano-Weierstrass-en teorema aplika dezakegu: $\{x_n\}$ multzoak metatze-puntu bat dauka gutxienez.

Ikus dezagun metatze-puntu hau bakarra dela.

a',a" metatze-puntu desberdinak balira, ε erradiodun $\mathcal{E}(a')$, $\mathcal{E}(a")$ inguruneak kontutan izanik, $\exists x_p \in \mathcal{E}(a'), \exists x_q \in \mathcal{E}(a")$

$$|a' - a"| = |a' - x_p + x_p - x_q + x_q - a"| \leq |a' - x_p| + |x_p - x_q| + |x_q - a"| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$$x_p \in \mathcal{E}(a') \Longrightarrow |x_p - a'| < \varepsilon$$

$$x_q \in \mathcal{E}(a") \Longrightarrow |x_q - a"| < \varepsilon$$

Hau horrela izan behar litzateke edozein $\varepsilon > 0$-rentzat.

Baina $\varepsilon < \frac{|a' - a''|}{3}$ hartzen badugu, kontraesan batetara heltzen gara, zeren eta:

$$|a' - a''| < \frac{3\,|a' - a''|}{3}$$

desberdintza faltsua baita. Beraz, metatze-puntua bakarra izan behar da.

Honekin, teorema guztiz frogaturik gelditzen da.

2.12. Definizioa

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, / \forall p,q \in N, \quad p,q > n_0 \quad |x_p - x_q| < \varepsilon$$

baldintza betetzen duen segida, Cauchy-ren segida dela esango dugu.

Definizio hau eman ostean, aurreko teorema honela eman dezakegu:

Zenbaki errealen edozein segida konbergentea izango da, baldin eta soilik baldin Cauchy-ren segida bada.

OHARRA: Edozein zenbaki errealen Cauchy-ren segida konbergentea denez gero, R osoa dela diogu.

2.13. Segida konbergenteen limiteekiko eragiketak

1) Segida konbergente biren batura, beste segida konbergente bat da. Azken honen limitea, aurrekoen limiteen batura da.

Frogapena

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \; (\equiv)_d \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N \; / \; \forall n > n_0 \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \ (\equiv)_d \forall \varepsilon>0,\ \exists n_1 \in N \ / \ \forall n > n_1 \quad |y_n - y| < \varepsilon$$

$n_2 = \max(n_0, n_1)$ hartzen badugu, orduan zera dugu:

$$|(x_n + y_n) - (x+y)| = |(x_n - x)+(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$\forall n > n_2 , \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$

2) Segida konbergente biren biderkadura, segida konbergentea da. Azken honen limitea, aurrekoen limiteen biderkadura da.

Frogapena

Suposa dezagun $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ eta $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ditugula.

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \leq$$

$$\leq |x_n(y_n - y)| + |y(x_n - x)| < M_1\varepsilon + M_2\varepsilon = (M_1 + M_2)\varepsilon ,$$

$$\forall n > n_2 , \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

$\{x_n\}$, konbergentea izanik, bornaturik dago: $\exists M_1 \ (M_1 > 0) \ /$

$|x_n| \leq M_1 \quad \forall n$

y zenbaki erreala denez, $|y| = M_2$ dei dezakegu. Beraz,

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$$

3) $\{y_n\}$ segida $(y_n \neq 0, \forall n)$ konbergentea bada, beraren limitea $y \neq 0$ izanik, orduan $\{\frac{1}{y_n}\}$ segida ere konbergentea da eta $\frac{1}{y}$ du limitetzat.

Frogapena

$y_n \neq 0 \quad \forall n \longrightarrow \{\frac{1}{y_n}\}$ segida existitzen da.

Adibidez, $y_3 = 0$ balitz, orduan $\frac{1}{y_3} = \infty$ eta hau ez da zenbaki erreala. Era berean, $y \neq 0$ denez, $\frac{1}{y}$ zenbaki erreala izango da.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \ (\equiv)_d \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n'_o \in N, / \ \forall n > n'_o \quad |y_n - y| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y_n y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n||y|}$$

Kontsidera dezagun $\mathcal{E}(y)$, $r = \frac{|y|}{2}$ erradiodun y-ren ingurunea. Orduan, $\{y_n\}$ segidaren ia puntu guztiak, kopuru finitu bat izan ezik, ingurunearen barnean egongo dira.

$$\exists n''_o \in N, / \ \forall n > n''_o \qquad y_n \in \mathcal{E}(y)$$

Beraz,

$$|y_n| > \frac{|y|}{2} \quad \forall n > n''_o \qquad \left(\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|}\right)$$

Izenda dezagun $|y| = N$

$n_o = \max\{n'_o, n''_o\}$ hartzen badugu, orduan

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| < \frac{2\varepsilon}{|y||y|} = \frac{2\varepsilon}{N^2}, \quad \forall n > n_o, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Beraz, aipaturiko baldintzetan, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$ betetzen da.

4) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ $(y \neq 0)$ betetzen duten $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ segida biren zatidura, segida konbergentea da. Azken honen limitea, aurrekoen limiteen zatidura da.

Frogapena

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

Indeterminazioak

1) $\frac{x_n}{y_n}$ $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ sinbolikoki $\frac{0}{0}$

2) $\frac{x_n}{y_n}$ $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow \infty$ " $\frac{\infty}{\infty}$

3) $x_n \cdot y_n$ $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow \infty$ " $0 \cdot \infty$

4) $x_n - y_n$ $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow \infty$ " $\infty - \infty$

5) $x_n^{y_n}$ $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow o$ " ∞^0

6) $x_n^{y_n}$ $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ " 0^0

7) $x_n^{y_n}$ $x_n \longrightarrow 1$, $y_n \longrightarrow \infty$ " 1^∞

2.14. Azpisegidak

Biz $\{x_n\}$ segida, zeinen elementuak $x_1, x_2, x_3, \ldots$ baitira. Har dezagun segida honetako elementuak kopuru infinitu batetan, adibidez, $x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots$

Elementu hauek segida berri bat $\{x'_n\}$ osotzen dute, zeinetan elementu guztiak $\{x_n\}$ segidarenak baitira eta honen ordena gordetzen baitute.

$\{x'_n\}$ segida $\{x_n\}$ segidaren azpisegida bat da.

$\{x_n\}$ segida konbergentea bada eta beraren limitea l bada, beraren azpisegida guztiak ere konbergenteak direla eta limitetzat l dutela froga daiteke. (Berdin $\{x_n\}$ dibergentea denean).

Adibidez, har dezagun $\{\frac{1}{n}\}$ segida, hau da, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ segida $\{\frac{1}{n}\}$ segidaren azpisegida bat da; gainera, $\{\frac{1}{n}\}$ segida konbergentea denez eta beraren limitea zero denez, azpisegida ere konbergentea da eta zero du limitetzat.

Segida baten goi- eta behelimitea

2.15. Definizioa

$\{x_n\}$ segida baten behelimitea x dela esaten dugu eta $\underline{\lim}\, x_n = x$ idazten, ondoko propietateak betetzen direnean:

i) $\forall a < x \quad \exists n_o \in N$ non $x_n > a$ baita $\forall n > n_o$

ii) $\forall a' > x$ n-ren infiniru balio existitzen dira, zeintzuentzat $x_n < a'$ baita.

2.16. Definizioa

$\{x_n\}$ segidaren goilimitea y dela esaten dugu eta $\overline{\lim}\, x_n = y$ idazten, ondoko porpietateak betetzen direnean:

i) $\forall a' > y \quad \exists n_1 \in N$ non $x_n < a'$ baita $\forall n > n_1$

ii) $\forall a < y$ n-ren infinitu balio existitzen dira, zeintzuen tzat $a < x_n$ baita.

3. GAIA:

ZENBAKI ERREALEN SERIEAK

Serie baten definizioa 35

Serie konbergente, dibergente eta oszilanteak 35

Cauchy-ren erizpidea 36

Cauchy-ren erizpidearen ondorioak 37

Serieen propietate generalak 38

Serie geometrikoa 42

Serie hipergeometrikoa 43

Beste serie-tipo bat 45

3. G A I A

ZENBAKI ERREALEN SERIEAK

3.1. Definizioa

Biz $\{a_n\}$ zenbaki errealen segida bat, hots: a_1, a_2, a_3, ... $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ expresioa zenbakizko serie a deitzen da eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ idazten.

a_1, a_2, a_3, ... zenbakiak seriaren gaiak deitzen dira eta a_n gai generala.

3.2. Definizioa

Lehen n gaien batura, s_n, seriearen n. batura partziala deitzen da:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Kontsidera ditzagun batura partzialak:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Batura partzialek segida bat, $\{s_n\}$, osotzen dute. $\{s_n\}$ segidak limite finitua badu,

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

orduan, limite honi seriearen batura deitzen zaio, eta seriea konbergentea dela esaten da.

$\{s_n\}$ segidak limite infinitua badu,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$$

orduan, $\sum a_n$ seriea dibergentea dela esaten da.

$\{s_n\}$ segidak limiterik ez badu, $\sum a_n$ seriea oszilantea dela esaten da.

Ondorioz, $\sum a_n$ seriea konbergente, dibergente edo oszilantea da, batura partzialen segida, $\{s_n\}$, konbergente, dibergente edo oszilantea denean.

3.3. Teorema: Cauchy-ren erizpidea

$\sum a_n$ seriea konbergentea da baldin eta soilik baldin

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in N \ / \ \forall p,q > n_o \quad (p < q) \quad |a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q| < \varepsilon$$

Frogapena

$\sum a_n$ konbergentea da $\iff$ $\{s_n\}$ konbergentea da $\iff$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o \in N \ / \ \forall p,q > n_o \quad |s_q - s_p| < \varepsilon .$$

Baina,

$$s_q - s_p = (a_1+a_2+\ldots+a_q) - (a_1+a_2+\ldots+a_p) = a_{p+1}+ a_{p+2}+\ldots+ a_q$$

3.4. Cauchy-ren erizpidearen ondorioak

a) $\sum a_n$ konbergentea $\Longrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Frogapena

Aplika dezagun Cauchy-ren erizpidea $q = p+1$ kasuan:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall p > n_0 \quad |a_{p+1}| < \varepsilon$$

eta honek, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ dela esan nahi du.

b) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ $\not\Longrightarrow$ $\sum a_n$ konbergentea

Frogapena

Adibide batez frogatuko dugu:

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ da eta $\sum \frac{1}{n}$ dibergentea da.

c) $\sum a_n$ konbergentea da $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$

Frogapena

$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ batura infinitua seriearen n-garren hondarra deitzen da. $\sum a_n$ konbergentea da $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall p,q > n_0 \quad |a_{p+1}+ a_{p+2}+\ldots+ a_q| < \varepsilon$$

p finkatzen badugu eta q infiniturantz jotzen badu, ondokoa atera daiteke:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall p > n_0 \quad \left| a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots \right| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall p > n_0 \quad |R_p| < \varepsilon \iff \lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

3.5. Teorema

Serie baten izaera ez da aldatzen, beraren lehen p elementuak kentzen baditugu. Horretaz gainera, $\sum a_n$ konbergentea bada eta A beraren batura (s_p delakoa p. batura partziala izanik), serie berria ere konbergentea izango da eta $A-s_p$ beraren batura.

Frogapena

Biz $\sum b_n$ lortu dugun seriea, $\sum a_n$ serieari lehen p gaiak kentzean

$s_n \longrightarrow \sum a_n$ seriearen n. batura partziala

$s'_n \longrightarrow \sum b_n$ seriearen n. batura partziala

Finka dezagun n zenbakia, $n > p$ izanik.

Hipotesiz: $b_n = a_{n+p} \quad \forall n.$

$$s'_{n-p} = b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-p} = a_{p+1}+ a_{p+2}+ a_{p+3}+\ldots+ a_n = s_n - s_p$$

s_p zenbakia finkoa denez, $\{s_n\}$ eta $\{s_n - s_p\}$ segidek izaera berbera dute; eta $\{s'_{n-p}\}$ eta $\{s_n - s_p\}$ segida berberak direnez, $\{s_n\}$ eta $\{s'_{n-p}\}$ delakoek izaera berbera dute.

Bestalde, segida bati lehen p gaiak kendu ahal dizkiogu beraren izaera aldatu gabe; beraz, $\{s'_n\}$ eta $\{s'_{n-p}\}$ segidek izaera berbera dute.

Azkenez, $\{s_n\}$ eta $\{s'_n\}$ segidek izaera berbera dutela ateratzen da; beraz, $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ serieek izaera berbera dutela frogatu dugu.

Suposa ditzagun orain, $\sum a_n$ seriea konbergentea dela eta A dela beraren batura

$$\sum b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \ldots =$$

$$= (a_1 + \ldots + a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots) - (a_1 + \ldots + a_p) =$$

$$= A - s_p.$$

3.6. Teorema

Serie baten izaera ez da aldatzen, bere gai guztiak $\lambda \neq 0$ konstante batez biderkatzen baditugu.

$\sum a_n = A$ bada, serie berriak λA batura izando du.

Frogapena

Bira $\sum a_n$ dugun seriea eta $b_n = \lambda a_n \quad \forall n$.

$s_n \longrightarrow \sum a_n$ seriearen n. batura partziala

$s'_n \longrightarrow \sum b_n$ seriearen n. batura partziala

$$s'_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \ldots + \lambda a_n =$$

$$= \lambda(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lambda \cdot s_n$$

$\{s_n\}$ eta $\{\lambda s_n\}$ segidek izaera berbera dute, eta gainera, $\{s'_n\}$ eta $\{\lambda s_n\}$ delakoek segida berbera direnez, $\{s_n\}$ eta $\{s'_n\}$ segidek izaera berbera dutela ateratzen da. Beraz, $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ serieek izaera berbera dute.

Suposa dezagun $\sum a_n = A$ dela, orduan,

$$\sum b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \ldots =$$

$$= \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) = \lambda A.$$

3.7. Teorema

Serie konbergente edo dibergente baten izaera ez da aldatzen, ondoz-ondoko gaien taldeen ordez beraien baturak jartzen badira.

Gainera, $\sum a_n$ serie konbergentea eta beraren batura A zen bakia bada, serie berria konbergentea izango da eta A izango da beraren batura.

Frogapena

Biz $\sum b_n$ serie berria, non beraren gaiak ondorengoak izango baitira:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$$

$$b_2 = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j \qquad (i < j)$$

$$b_3 = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_k \qquad (j < k)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$s_n \longrightarrow \sum a_n$ seriearen n. batura partziala

$s'_n \longrightarrow \sum b_n$ seriearen n. batura partziala

Honelatan, ba,

$$s'_1 = b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_i = s_i$$

$$s'_2 = b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + \ldots + a_j = s_j$$

$$s'_3 = b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = s_k$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Ikusten dugunez, $\{s'_n\}$ segida, $\{s_n\}$ segidaren barnean dago, zeren bere gai guztiak $\{s_n\}$ segidaren gaiak baitira.

Dakigunez, segida konbergente edo dibergente baten edozein azpisegida ere konbergentea edo dibergentea da. Horregatik, $\sum a_n$ konbergente edo dibergentea bada, $\sum b_n$ konbergente edo dibergentea izango da, eta gainera batura berberaz.

Oharra

$\sum a_n$ seriea oszilantea balitz, $\sum b_n$ seriea ez litzateke beti oszilantea izango.

Adibidez, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ seriea oszilantea da, baina hartzen badugu:

$$\underset{\downarrow b_1}{-1} + \underset{\downarrow b_2}{(1-1)} + \underset{\downarrow b_3}{(1-1)} + \ldots$$

$\sum b_n$ seriea konbergentea da eta beraren batura -1 da.

3.8. Serie geometrikoa

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriea non $a_n = a \cdot q^{n-1}$ baita, a eta q konstante nuluak ez izanik, serie geometrikoa deitzen da. q zenbakia arrazoia deitzen dugu.

Azter dezagun gehiago serie geometrikoak

$$a_1 = a \cdot q^0 = a$$

$$a_2 = a \cdot q^1 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a \cdot q^2 = a_2 \cdot q$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$\{a_n\}$ segida q arrazaoidum progresio geometrikoa da eta honela:

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a - aq^{n-1} \cdot q}{1 - q} = a \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

$q = 1 \Longrightarrow s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a + a + \ldots + a = n\,a$

$q = -1 \Longrightarrow s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a - a + \ldots \Longrightarrow$

$\Longrightarrow s_n = a$ edo $s_n = 0$.

Azter ditzagun eman daitezkeen hiru kasuak:

a) $|q| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a \frac{1 - q^n}{1 - q} = a \frac{1}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$$

zeren eta $|q| < 1 \Longrightarrow q^n \longrightarrow 0$ baita. Kasu honetan, $\sum a\, q^{n-1}$

seriea konbergentea da eta beraren batura $\sum a\, q^{n-1} = \dfrac{a}{1-q}$ izan go da.

b) $|q| > 1$

Hemen bi kasu ditugu:

i) $q > 1 \Longrightarrow q^n \to \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = a \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = +\infty$

$\{s_n\}$ dibergentea denez, $\sum aq^{n-1}$ ere dibergentea da.

ii) $q < -1 \Longrightarrow \{q^n\}$ segida oszilantea da.

Halabeharrez, $\left\{ a\,\dfrac{1-q^n}{1-q} \right\}$ segida, hau da, $\{s_n\}$ segida oszilantea izango da; beraz, $\sum aq^{n-1}$ seriea oszilantea da.

c) $|q| = 1$

Hemen ere bi kasu ditugu:

i) $q = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot a = +\infty$

$\{s_n\}$ segida eta $\sum aq^{n-1}$ seriea dibergenteak dira.

ii) $q = -1 \Longrightarrow s_1 = a,\ s_2 = 0,\ s_3 = a,\ \ldots$

Beraz, $\{s_n\}$ oszilantea denez, $\sum aq^{n-1}$ seriea ere oszilantea da.

3.9. Serie hipergeometrikoa

$\sum a_n$ seriea hipergeometrikoa deitzen dugu, ondoko berdintza betetzen duenean:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha \cdot n + \gamma}$$

non α, β, γ zenbakiak ez baitira batera nuluak. Idatz dezagun aurreko berdintza beste era batetan:

$$a_n(\alpha \cdot n + \beta) = a_{n+1}(\alpha \cdot n + \gamma)$$

Beraz,

n = 1	$a_1(\alpha + \beta) = a_2(\alpha + \gamma)$
n = 2	$a_2(2\alpha + \beta) = a_3(2\alpha + \gamma)$
....	... ...
n-1	$a_{n-1}[(n-1)\alpha + \beta] = a_n[(n-1)\alpha + \gamma]$

Berdintzen zati bien batuketa eginez eta sinplifikatuz:

$$(\alpha + \beta)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = (a_2 + \ldots + a_n)\gamma + a_n(n-1)\alpha$$

$$(\alpha + \beta)\, s_{n-1} = (s_n - a_1)\gamma + a_n(n-1)\alpha$$

$$(\alpha + \beta)\, s_n - (\alpha + \beta)a_n = s_n\gamma - a_1\gamma + a_n(n-1)\alpha$$

$$s_n = \frac{a_n(n\alpha + \beta) - a_1\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

Serie honen izaera aztertzeko, nahikoa dugu $\{ s_n \}$ segidaren izaera aztertzea, eta hau konbergentea bada, serieraren batura $\lim_{n \to \infty} s_n$ izango da.

Adibidea

Biz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Ikus dezagun serie hipergeometriko bat dela

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

Kasu honetan $\alpha = 1$, $\beta = 0$ eta $\gamma = 2$ dira.

$$s_n = \frac{a_n(n\alpha+\beta) - a_1\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}n - \frac{1}{2}\cdot 2}{1+0-2} = \frac{\frac{1}{n+1} - 1}{-1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Beraz, emandako seriea konbergentea da eta beraren batura 1 da.

3.10. Beste serie-tipo bat

Azter dezagun $\sum a_n$ seriea, non a_n gai generala ondorengo espresioaren bidez ipin baitaiteke:

$$a_n = g(n+1) - g(n)$$

g(n), n aldagaiaren funtzio konkretu bat izanik. Har ditzagun beraren batura partzialak,

$$s_1 = a_1 = g(2) - g(1)$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = g(3) - g(2) + g(2) - g(1) = g(3) - g(1)$$

$$s_3 = g(4) - g(1)$$

... ...

$$s_n = g(n+1) - g(1)$$

Beraz,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left[g(n) - g(1) \right] = \lim_{n \to \infty} g(n) - g(1)$$

$\{ s_n \}$ konbergentea bada, beraren limitea seriearen batura da.

4. GAIA:

GAI POSITIBOTAKO SERIEAK

Gai positibotako serieen propietate generalak 49

Serie baten serie majoratzaile eta minoratzaileak 52

Gauss-en konparaziozko teorema 52

Korolarioa 53

Serie harmoniko orokorra 54

D'Alembert-en erizpidea 57

Cauchy-ren erizpidea 59

Pringsheim-en erizpidea 62

Raabe-ren erizpidea 63

4. G A I A

GAI POSITIBOTAKO SERIEAK

Demagun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriea, non gai batetik aurrera bere gai guztiak positiboak baitira; serie baten aldaezinezkotasunaren izaera kontutan edukirik, ondoko kasu honetara eraman dezakegu kasu hau: seriearen gai guztiak positiboak diren kasura.

$\sum a_n$ seriea, non $a_n \geq 0 \quad \forall n$ baita, gai positibotako seriea deitzen da.

Ikus ditzagun gai positibotako serieen propietate batzu.

4.1. Teorema

Gai positibotako serie bat konbergentea edo dibergentea izango da, baina inoiz ez oszilantea.

Frogapena

Bira: $s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2 \geq a_1 = s_1 \Longrightarrow s_2 \geq s_1$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq a_1 + a_2 = s_2 \Longrightarrow s_3 \geq s_2$

... ...

eta honela jarraituz: $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_n \leq s_{n+1} \quad \ldots$.

Beraz, gai positibotako serie baten batura partzialen segida, $\{s_n\}$,

gorakorra denez, ezin daiteke inoiz oszilantea izan, konbergentea edo dibergentea baizik.

4.2. Teorema

Gai positibotako serie batetan ondoz-ondoko gaiak elkartuz lortzen den serieak, emandando seriearen izaera berbera du.

Frogapena

Gai positibotako serie bat beti da konbergentea edo dibergentea; beraz, 3.5. teoremaren bidez propietate hau frogaturik dago.

Ondorioa

Gai positibotako serie baten gai bakoitza edonolako gai positibo batzuetan deskonposa daiteke, seriearen izaera aldatu gabe. Serieak konbergentak badira, batura berbera dute.

4.3. Teorema

Gai positibotako edozein berrordenamenduk, ez du aldatzen seriearen izaera.

Frogapena

a) Biz $\sum a_n$ gai positibotako serie konbergente bat, beraren batura A izanik: $\sum a_n = A$.

Biz $\sum b_n$, $\sum a_n$ seriearen berrordenamendu bat.

$s_n \longrightarrow \sum a_n$ seriearen n. batura partziala.

$s'_n \longrightarrow \sum b_n$ seriearen n. batura partziala.

$\sum a_n$ konbergentea eta $\sum a_n = A \iff$

$\iff \{s_n\}$ konbergentea eta $\lim_{n \to \infty} s_n = A \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad |s_n - A| < \varepsilon \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad A - s_n < \varepsilon$

Hartzen badugu γ zenbaki arrunta, $\gamma > n_0$ izanik, ondokoa betetzen da:

$$A - s_\gamma < \varepsilon \implies A - \varepsilon < s_\gamma$$

Biz μ zenbaki arrunta, non s'_μ delakoak s_γ batura partzialaren batugai guztiak bere barnean baititu; beraz,

$$s_\gamma \leq s'_\mu$$

$m > \mu$ denean, $s'_\mu < s'_m$ denez,

$$A - \varepsilon < s'_m < A \implies -\varepsilon < s'_m - A < 0 \implies 0 < A - s'_m < \varepsilon \implies$$

$$\implies |A - s'_m| < \varepsilon$$

Beraz, A zenbakia $\sum b_n$ seriearen batura da, zeren:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mu \ / \ \forall m > \mu \quad |A - s'_m| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \lim_{n \to \infty} s'_n = A \iff \sum b_n = A.$$

b) Biz $\sum a_n$ serie dibergentea. $\sum b_n$ dibergentea ez balitz, konbergentea baizik, orduan $\sum a_n$ delakoa $\sum b_n$ seriearen berrordenamendu bezala konsideratuz, $\sum a_n$ konbergentea dela ondorioztatuko litzateke hipotesiaren aurka. Beraz, $\sum b_n$ seriea dibergentea da.

4.4. Definizioa

Bira $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positibotako bi serie; n_o existitzen bada, non $\forall n \geq n_o \quad a_n \leq b_n$ betetzen baira, orduan $\sum a_n$ seriea $\sum b_n$ seriearen minoratzailea eta $\sum b_n$ seriea $\sum a_n$ seriearen majoratzailea direla esaten da.

4.5. Gauss-en konparaziozko teorema

a) $\sum a_n$ serie batek serie konbergente majoratzaile bat onartzen badu, $\sum a_n$ seriea konbergentea izango da.

b) $\sum a_n$ serie batek, serie dibergente minoratzaile bat onartzen badu, $\sum a_n$ seriea dibergentea izango da.

Frogapena

$s_n \longrightarrow \sum a_n$ seriearen n. batura partziala.

$s'_n \longrightarrow \sum b_n$ seriearen n. batura partziala.

a) $\sum b_n$ seriea, $\sum a_n$ seriearen majoratzaile bat bada,

$$\forall n \geq n_o \quad a_n \leq b_n \Longrightarrow \quad \forall \ n \geq n_o \quad s_n \leq s'_n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} s_n \leq \lim_{n \to \infty} s'_n$$

Hipotesiz, $\sum b_n$ konbergentea bada, $\lim_{n \to \infty} s'_n$ zenbaki finitu bat izango da; beraz, $\lim_{n \to \infty} s_n$ finitua da; hau da, $\sum a_n$ konbergentea da.

b) $\sum b_n$ seriea $\sum a_n$ seriearen minoratzaile bat bada,

$$\forall n \geq n_o \quad a_n \geq b_n \Longrightarrow \forall n \geq n_o \quad s'_n \leq s_n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} s'_n \leq \lim_{n \to \infty} s_n$$

Hipotesiz, $\sum b_n$ dibergentea denez, $\lim_{n \to \infty} s'_n = \infty$ da; beraz, $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$ da; halabeharrez, $\sum a_n$ dibergentea.

4.6. Korolarioa

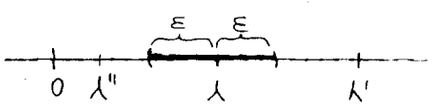
$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segidek, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$ berdintza betetzen badute, $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ serieek izaera berbera dute.

Frogapena

$\lambda > 0$ da, a_n eta b_n positiboak direlako.

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in N \ / \ \forall n > n_o \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon$$



$$\exists\, \lambda', \lambda'' > 0 \quad / \quad \lambda'' < \frac{a_n}{b_n} < \lambda' \qquad \forall n > n_o \implies$$

$$\implies \exists\, \lambda', \lambda'' > 0 \quad / \quad \lambda'' b_n < a_n < \lambda' b_n \qquad \forall n > n_o$$

Suposa dezagun, $\sum b_n$ konbergentea dela:

$$\left.\begin{array}{l} a_n < \lambda' b_n \implies \sum \lambda' b_n \text{ seriea } \sum a_n \text{ seriearen majoratzailea} \\ \sum b_n \text{ konbergentea} \implies \sum \lambda' b_n \text{ konbergentea} \end{array}\right\} \implies$$

$$\overset{4.5}{\implies} \sum a_n \text{ konbergentea da.}$$

Suposa dezagun, $\sum b_n$ dibergentea dela:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'' b_n < a_n \implies \sum \lambda'' b_n \text{ seriea } \sum a_n \text{ seriearen minoratzailea} \\ \sum b_n \text{ dibergentea} \implies \sum \lambda'' b_n \text{ dibergentea} \end{array}\right\} \implies$$

$$\overset{4.5}{\implies} \sum a_n \text{ dibergentea da.}$$

4.7. Serie harmoniko orokorra

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ serieari serie harmoniko orokorra deitzen zaio, α edozein zenbaki finko bat izanik.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seriea serie harmonikoa deitzen da.

Teorema

Serie harmoniko orokorra

i) konbergentea da, $\alpha > 1$ denean.

ii) dibergentea da, $\alpha \leq 1$ denean.

Frogapena

ii) $\alpha \leq 1$ kasua.

$$\alpha \leq 1 \Longrightarrow n^{\alpha} \leq n \Longrightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n} \Longrightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ seriea } \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$$

seriearen minoratzaile bat da.

Dakusagun, $\sum \frac{1}{n}$ dibergentea dela. Cauchy-ren teoremak hauxe esaten digu:

$$\sum a_n \text{ konbergentea} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ / \ \forall p,q > n_0 \ (p < q)$$

$$\left| a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q \right| < \varepsilon.$$

Bira $p = 2^m$ eta $q = 2^m + 2^m$. $\sum \frac{1}{n}$ seriean:

$$a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q = \frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 2} + \ldots + \frac{1}{2^m + 2^m} >$$

$$> \frac{1}{2^m + 2^m} + \frac{1}{2^m + 2^m} + \ldots + \frac{1}{2^m + 2^m} = \frac{2^m}{2^m + 2^m} = \frac{1}{2}$$

Beraz, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ den kasurako, aipatutako baldintza betetzen ez denez, $\sum \frac{1}{n}$ dibergentea da. Honelatan, ba, Gauss-en teorema erabiliz, $\alpha \leq 1$ denean, $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ seriea dibergentea dela ikusten da.

i) $\alpha > 1$ kasua.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \ldots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \ldots$$

$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \ldots$ seriea $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ arrazoidun serie geometriko bat da

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha - 1 > 0 \Longrightarrow 2^{\alpha-1} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$$

Serie geometrikoaren arrazoia bat baino txikiagoa denean, serie hori konbergentea da. Eta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ seriearen majoratzaile bat serie geometriko hori denez, Gauss-en erizpidea erabiliz, $\alpha < 1$ denean, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ seriea konbergentea dela ateratzen da.

Adibidea

Azter dezagun $\sum \frac{1}{n^3 + 2}$ seriearen izaera.

$\frac{1}{n^3+2} \leqslant \frac{1}{n^3}$, eta $\sum \frac{1}{n^3}$ konbergentea da, zeren $\alpha > 1$ duen serie harmoniko bat baita $\overset{4.5}{\Longrightarrow} \sum \frac{1}{n^3+2}$ konbergentea.

KONBERGENTZI ERIZPIDEAK

4.8. D'Alembert-en erizpidea (edo zatidurarena)

Biz $\sum a_n$ gai positibotako serie bat, eta suposa dezagun

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ existitzen dela, l finitua izanik.

i) $l < 1$ bada, $\sum a_n$ seriea konbergentea da.

ii) $l > 1$ bada, $\sum a_n$ seriea dibergentea da.

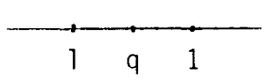
$l = 1$ bada, ezin da erabaki seriearen izaera. Kasu honi zalantzazko kasua deitzen zaio.

Frogapena

i) $l < 1$ kasua

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$$



Har dezagun q zenbaki bat, non $l < q < 1$ baita. Biz $\varepsilon = q-l$. Limitearen definizioa ε honi aplikatzen bazaio, zera daukagu:

$$\exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < q-l \implies$$

$$\implies \exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies$$

$$\Longrightarrow \quad \exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \qquad a_{n+1} < q \cdot a_n$$

Desberdintza hau n_0+1, n_0+2, ... balioentzat idatz daiteke:

$$n = n_0 + 1 \ : \qquad a_{n_0+2} < a_{n_0+1} \cdot q$$

$$n = n_0 + 2 \ : \qquad a_{n_0+3} < a_{n_0+2} \cdot q < a_{n_0+1} \cdot q^2$$

$$n = n_0 + 3 \ : \qquad a_{n_0+4} < a_{n_0+3} \cdot q < a_{n_0+1} \cdot q^3$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Beraz,

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots <$$

$$< a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+1} \cdot q + a_{n_0+1} \cdot q^2 + \ldots$$

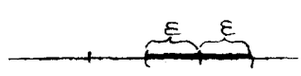
$a_{n_0+1} + a_{n_0+1} \cdot q + a_{n_0+1} \cdot q^2 + \ldots$ seriea, $q < 1$ arrazoidun serie geometriko bat da; orduan, serie hau konbergentea da.

3.3 propietatearen bidez, $a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+1} \cdot q + \ldots$ seriea konbergentea da, eta $\sum a_n$ seriea majoratzen du; beraz, $\sum a_n$ serie konbergentea da.

ii) $l > 1$ kasua

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad \text{denez,}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n > n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$$



Beraz,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n > n_0 \implies a_{n+1} > a_n \quad \forall n > n_0$$

Seriearen gai bat emanik, hurrengo gai guztiak positiboak dira eta haziz doaz; beraz, $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ da. Honelatan, ba, $\sum a_n$ seriea dibergentea da.

Oharra

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ bada, teorema honek ez digu ematen inolako segurtasunik eta beste erizpide bat erabili behar da seriea aztertzeko.

Baina $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ bada $n > n_0$ denean, $\sum a_n$ seriea dibergentea da.

4.9. Cauchy-ren erizpidea (edo erroarena)

Biz $\sum a_n$ gai positibotako serie bat eta suposa dezagun $l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ existitzen dela, l finitua izanik.

i) $l < 1$ bada, $\sum a_n$ seriea konbergentea da.

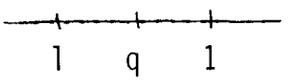
ii) $l > 1$ bada, $\sum a_n$ seriea dibergentea da.

$l = 1$ zalantzazko kasua da.

Frogapena

i) $l < 1$ kasua

Har dezagun q zenbaki bat, non $l < q < 1$ baita.



$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon$$

$\varepsilon = q-l$ kasuan baldintza hau honela idatz daiteke:

$$\exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < q-l \implies$$

$$\implies \exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} < q \implies$$

$$\implies \exists n_0 \in N \ / \ \forall n > n_0 \quad a_n < q^n$$

Desberdintza hau n_0+1, n_0+2, ... balioari aplikatuz,

$$n = n_0 + 1 : \quad a_{n_0+1} < q^{n_0+1}$$

$$n = n_0 + 2 : \quad a_{n_0+2} < q^{n_0+2}$$

$$n = n_0 + 3 : \quad a_{n_0+3} < q^{n_0+3}$$

... ...

Beraz,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + q^{n_0+3} + \dots$$

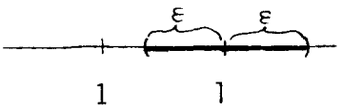
$q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + q^{n_0+3} + \dots$ seriea $q < 1$ arrazoidun serie geometrikoa denez, konbergentea da.

Beraz, $a_1 + a_2 + \dots + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \dots$ seriea konbergentea da eta $\sum a_n$ seriearen majoratzailea denez, $\sum a_n$ seriea konbergentea izango da $l < 1$ kasuan.

ii) $l > 1$ kasua.

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \ . \ \exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \quad \left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon$$



Beraz, ε nahiko txikia hartuz,

$\exists n_0 / \sqrt[n]{a_n} > 1$, $n > n_0$ denean $\Longrightarrow$ $a_n > 1$, $n > n_0$ denean $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum a_n$ serie dibergentea da.

Oharra

$l = 1$ kasuan posible da, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ berdintza betetzen duten serie konbergente eta dibergenteak aurkitzea.

4.10. Pringheim-en erizpidea (edo biderkadurarena)

Biz $\sum a_n$ gai positibotako serie bat eta suposa dezagun $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot a_n = \lambda$ existitzen dela, λ finitua izanik.

a) $\lambda \neq 0$ bada $\begin{cases} \alpha > 1 & \text{denean, } \sum a_n \text{ konbergentea da.} \\ \alpha \leq 1 & \text{denean, } \sum a_n \text{ dibergentea da.} \end{cases}$

b) $\lambda = 0$ eta $\alpha > 1$ badira, $\sum a_n$ konbergentea da.

c) $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot a_n = \infty$ eta $\alpha \leq 1$ badira, $\sum a_n$ dibergentea da.

Frogapena

a) $$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^{\alpha}} = \lambda \qquad (\lambda \neq 0)$$

4.6 korolarioaren bidez $\sum a_n$ eta $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ serieek izaera berbera dute.

$\alpha > 1$ bada, $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ konbergentea da $\overset{4.6}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ konbergentea da

$\alpha \leq 1$ bada, $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ dibergentea da $\overset{4.6}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ dibergentea da.

b) $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot a_n = 0$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \quad |n^{\alpha}\cdot a_n| < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \ / \ \forall n > n_0 \quad a_n < \frac{\varepsilon}{n^{\alpha}}$$

$\sum \frac{\varepsilon}{n^{\alpha}}$ seriea $\sum a_n$ seriearen majoratzaile bat da. Baina, $\alpha > 1$ bada, $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ konbergentea da $\overset{3.4}{\Longrightarrow}$ $\sum \frac{\varepsilon}{n^{\alpha}}$ konbergentea da.

Gauss-en teoremaren bidez, $\sum a_n$ konbergentea da.

c) $\lim_{n \to \infty} n^{\alpha} \cdot a_n = \infty$ denez,

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \ / \ |n^{\alpha} a_n| > M \quad n > n_0 \text{ denean} \implies$$

$$\implies a_n > M \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad n > n_0 \text{ denean}$$

$\sum M \frac{1}{n^{\alpha}}$ seriea $\sum a_n$ seriearen minoratzailea da. $\alpha \leq 1$ bada,

$\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ dibergentea $\implies \sum M \frac{1}{n^{\alpha}}$ dibergentea.

Gauss-en teoremaren bidez, $\sum a_n$ dibergentea da.

4.11. Raabe-ren erizpidea

$n = p$ baliotik aurrerantz,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq k > 1$$

desberdintzak betetzen badira, $\sum a_n$ seriea konbergentea da.

Bestalde,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$$

desberdintza betetzen bada, $\sum a_n$ seriea dibergentea da.

Frogapena

a) Lehen kasuan $k = 1 + \delta$ ipin dezakegu $\delta > 0$ izanik; eta $n > p$ denean, ondoko desberdintza dugu:

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq 1 + \delta$$

hau da,

$$(n-1)a_n - n\,a_{n+1} \geq \delta \cdot a_n$$

n delakoak p+1, p+2, ..., p+N balioak hartzen dituenean, aurreko desberdintza ondokoetan konkretatzen da:

$n = p+1 \qquad p\,a_{p+1} - (p+1)\,a_{p+2} \geq \delta \cdot a_{p+1}$

$n = p+2 \qquad (p+1)\,a_{p+2} - (p+2)\,a_{p+3} \geq \delta\, a_{p+2}$

... ...

$n = p+N \qquad (p+N-1)\,a_{p+N} - (p+N)\,a_{p+N+1} \geq \delta \cdot a_{p+N}$

Desberdintza hauen batuketa eginda:

$$p\,a_{p+1} - (p+N)\,a_{p+n+1} \geq \delta\,(s_{p+N} - s_p)$$

non

$$s_{p+N} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p+N}$$

$$s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$$

Hau da,

$$s_{p+N} - s_p \leq \frac{p\,a_{p+1} - (p+N)\,a_{p+N+1}}{\delta} \leq \frac{p\,a_{p+1}}{\delta}$$

$$s_{p+N} \leq \frac{p \cdot a_{p+1}}{\delta} + s_p$$

Baina p finkoa eta N edozein direnez gero, $\sum a_n$ seriearen batura partzialak bornaturik daude, eta segida gorakor bat osotzen dutenez gero, $\sum a_n$ seriea konbergentea da.

b) Bigarren kasuan hauxe edukiko dugu:

$$(n-1)\,a_n \leq n\,a_{n+1} \qquad (n > p \text{ denean})$$

eta n delakoatentzat lehen erabili ditugun balioak erabiliz, ondokoa ateratzen da:

$$pa_{p+1} \leqslant (p+1)a_{p+2} \leqslant (p+2)a_{p+3} \leqslant \cdots \quad (p+N)a_{p+N+1} \leqslant (p+N+1)a_{p+N+1}$$

ondorioz,

$$\lim_{n \to \infty} n\, a_n \geqslant p \cdot a_{p+1} > 0$$

eta Pringsheim-en erizpidearen bidez, $\sum a_n$ seriea dibergentea da.

Erregela praktikoa

Frogatu dugun teorematik, erregela praktiko hau atera daiteke:

$\sum a_n$ gai positibotako serien kasuan $\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$ existitzen bada, orduan:

i) $l < 1$ bada, $\sum a_n$ dibergentea da.

ii) $l > 1$ bada, $\sum a_n$ konbergentea da.

$l = 1$ bada, ezin daiteke erabaki generalki, $\sum a_n$ seriearen izaera; eta $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ mantentzen bada, seriea dibergentea izango da.

5. GAIA:

GAI POSITIBO ETA NEGATIBOTAKO SERIEAK

Serie erabat konbergenteak 69

Serie kondizionalki konbergenteak 69

Serie konbergenteen eta erabat konbergenteen arteko erlazioa 69

Serie erabat konbergeteen propietateak 70

Serie alternatuak. Leibniz-en teorema 71

5. G A I A

GAI POSITIBO ETA NEGATIBOTAKO SERIEAK

Biz serie bat, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; a_n zenbaki positiboa edo negatiboa izan daiteke.

5.1. Definizioa

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seriea konbergentea denean, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriea erabat konbergentea deitzen da.

5.2. Definizioa

Serie bat konbergentea baina ez erabat konbergentea baldin bada, kondizionalki konbergentea deitzen da.

5.3. Teorema

$\sum |a_n|$ serie konbergentea baldin bada, $\sum a_n$ seriea konbergentea da. Beste era batetan esanda, serie bat erabat konbergentea baldin bada, konbergentea ere ba da.

Frogapena

$\sum |a_n|$ konbergentea bada, Cauchy-ren erizpidea erabiliz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \ / \quad \forall p,q > n_0 \quad (p < q) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \ldots + |a_q| < \varepsilon$$

Baina,

$$|a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q| \leq |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \ldots + |a_q|$$

Beraz, $\sum a_n$ konbergentea da Cauchy-ren erizpidea betetzen duelako.

Oharra

Alderantzizko propietatea ez da betetzen; serie bat konbergentea izan arren, ez du zertan erabat konbergentea izan beharrik.

5.4. Teorema

$\sum a_n$ serie erabat konbergentearen edozein berrordenamendu, $\sum b_n$, ere, erabat konbergentea da, beraz, konbergentea; eta gainera, batura berbera du.

5.5. Riemann-en teorema

$\sum a_n$ seriea konbergentea baina ez erabat konbergentea baldin bada, beraren berrordenamendu konbergenteak edozein baturarekin lor daitezke, eta bai berrordenamendu dibergente eta oszilanteak ere.

SERIE ALTERNATUAK

5.6. Definizioa

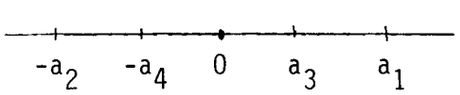
Zenbakizko serie bat alternatua da, beraren gaiak txandaka positiboak eta negatiboak direnean.

5.7. Teorema (Leibniz)

Biz serie alternatu bat, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \quad (a_n > 0)$ (edo baita ere, $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$).

Seriearen gaiak balio absolutuan segida beherakorra osotzen baldin badute, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$, eta $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ baldin bada, orduan seriea konbergentea da eta beraren batura, S, positiboa eta a_1 baino txikiagoa.

Frogapena



Lehenik, ordena bikoitiko batura partzialen segida aztertuko dugu

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \geq 0 \implies$$

$$\implies s_{2m} \geq 0 \qquad \forall\, m \in N$$

Bestalde, s_{2m} handitzen da m gehitzen denean.

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad s_{2m} < a_1 \qquad \forall m \in N \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ s_{2m} \right\} \text{ segida bornatua da.}$$

Dakigunez, zenbaki errealezko segida bat gorakorra eta bornatua bal din bada, segida hau konbergentea da eta beraren limitea bornea bai no txikiagoa. Hau dela eta, $\left\{ s_{2m} \right\}$ segida konbergentea da, eta $\lim_{m \to \infty} s_{2m} = s$ izango da, $s < a_1$ izanik.

Aztertuko dugu orain ordena bakoitiko batura partzialen segi da, $\left\{ s_{2m+1} \right\}$:

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1}$$

$$\lim_{m \to \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} s_{2m} + \lim_{m \to \infty} a_{2m+1} = s + 0 = s$$

Era honetan, batura partzialen segida, $\left\{ s_n \right\}$, konbergentea da, $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ izanik; hau da, emandako seriea konbergentea da, beraren batura s, a_1 baino txikiagoa izanik.

6. GAIA:

ALDAGAI ERREALEN FUNTZIOAK. LIMITEA

Funtzio baten definizioa. Existentzi eremua 75

Oinarrizko funtzio nagusiak 75

Funtzio konposatua 77

Funtzio monotonoak. Funtzio periodikoak 78

Funtzio bakoiti eta bikoitiak 79

Funtzio inbertsoa 79

Funtzio bornatuak 79

Funtzio baten limitea 80

Limitearen unizitatea 81

Albo-limiteak 82

Limitea duten funtzioen propietate batzu 83

6. G A I A

ALDAGAI ERREALEN FUNTZIOAK. LIMITEA

6.1. Definizioa

x aldagaiaren balio bakoitzari y aldagaiaren balio bat dagokionean, y delakoa x-en funtzioa dela esaten da eta $y = f(x)$ idazten.

x delakoa aldagai independentea deitzen da, eta y delakoa menpeko aldagaia.

6.2. Definizioa

x aldagairen balioek, zeintzuentzat $y = f(x)$ delakoak balio errealak hartzen baititu, funtzioaren existentzi eremua, D, osotzen dute. Beraz, $f: D \longrightarrow R$ idatz dezakegu eta f(D) irudi multzoa deitzen da.

Adibidez, $y = \sin x$ funtzioaren existentzi eremua R da, eta $y = \sqrt{x+1}$ funtzioaren existentzi eremua $[-1,\infty)$ da.

6.3. Oinarrizko funtzio nagusiak

1.- Funtzio potentziala: $y = x^a$ $(a \in R)$

2.- Funtzio exponentziala: $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

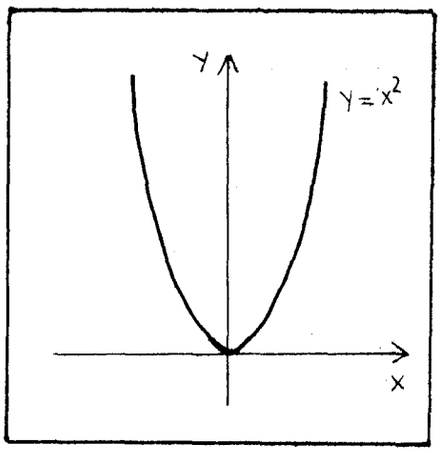
3.- Funtzio logaritmikoa: $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

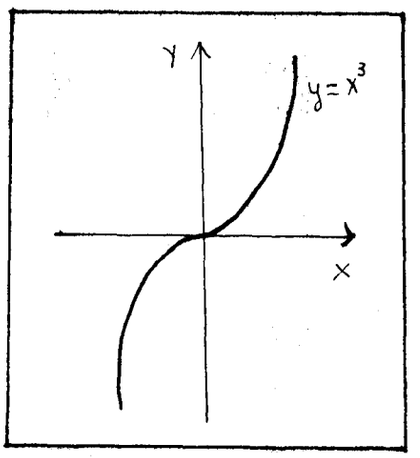
4.- Funtzio trigonometrikoak: $y = \sin x$, $y = \cos x$, ...

5.- Funtzio trigonometriko inbertsuak: $y = \text{arc sin } x$, ...

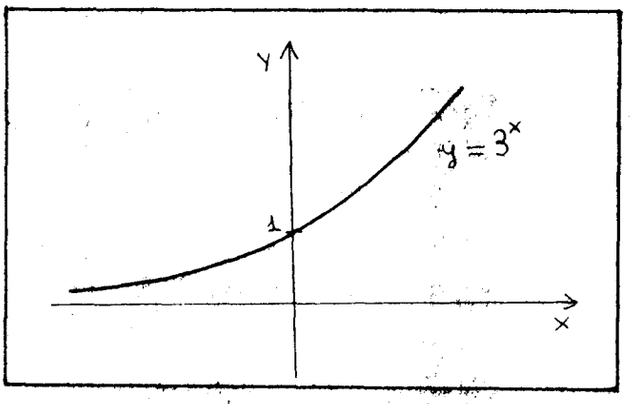
Adierazpen geometrikoak

1.- Funtzio potentziala

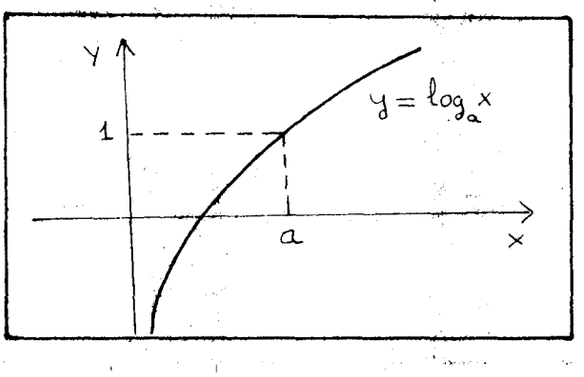




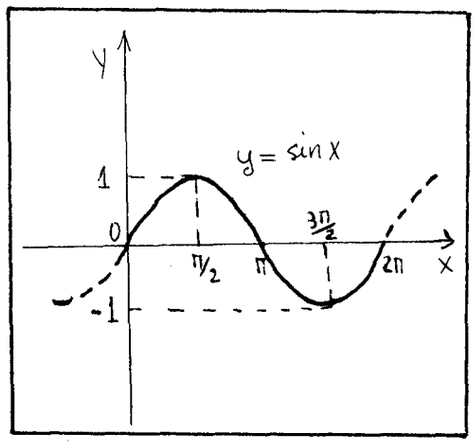
2.- Funtzio exponentziala

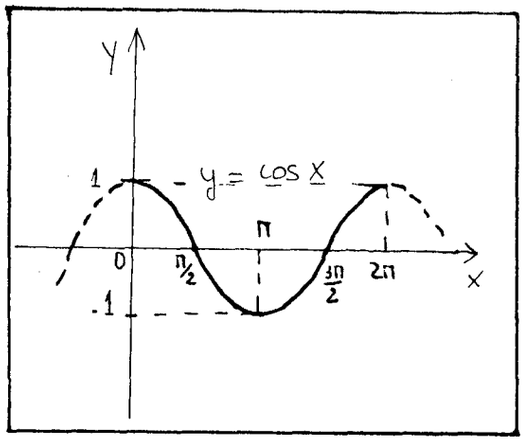


3.- Funtzio logaritmikoa

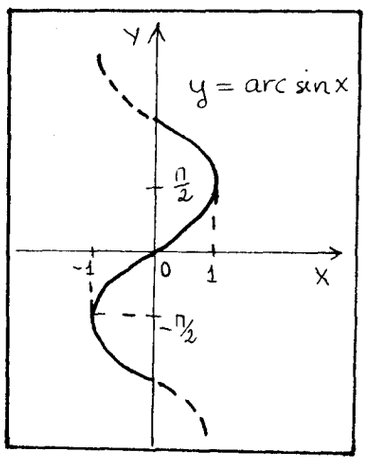


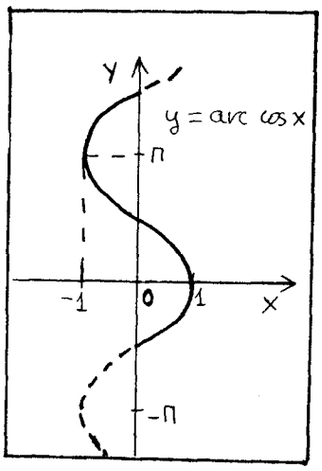
4.- Funtzio trigonometrikoak





5.- Funtzio trigonometriko inbertsoak





6.4. Definizioa

Bira $f: A \longrightarrow R$ eta $g: B \longrightarrow R$ aldagai errealen funtzio bi, $A \subset R$ eta $B \subset R$ izanik.

Suposa dezagun $f(A) \cap B \neq \emptyset$ dela. Kasu honetan, funtzio berri bat, h, ondoko eran defini dezakegu:

$$\forall x \in A \ / \ f(x) \in B \ , \quad h(x) = g\left[f(x)\right]$$

h funtzioa, g-ren eta f-ren funtzio konposatua da eta $g \bullet f = h$ idazten da, eta "f konposatu g" irakurtzen.

Adibidea

Bira $f: R - \{0\} \longrightarrow R$ eta $g: R \longrightarrow R$

$x \rightsquigarrow 1/x$ $\qquad$ $x \rightsquigarrow 2x$

$h(x) = g \bullet f(x) = g\left[f(x)\right] = g(1/x) = 2(1/x) = 2/x.$

6.5. Definizioa

Funtzio bat, f(x), gorakorra deitzen da, ondoko propietatea betetzen duenean:

$$\forall x_1, x_2 \qquad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

eta f(x) beherakorra deitzen da, ondoko propietatea betetzen duenean:

$$\forall x_1, x_2 \qquad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

Desberdintzak hertsiak direnean, propietate hauk hertsiki betetzen dira.

6.6. Definizioa

Funtzio bat, f(x), periodikoa deitzen da ondoko berdintza betezen duenean:

$$\forall x \in D \qquad f(x + T) = f(x)$$

Berdintza hau betetzen duen konstanterik txikiena T bada, T delakoa periodoa deitzen da.

Adibidea

$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \sin x \quad \forall x \in R$

$\sin x$ funtzioa periodikoa da eta bere periodoa $T = 2\pi$ da.

6.7. Definizioa

$f(x)$ funtzioa bikoitia da $f(x) = f(-x)$ bada edozein x-eta rako.

Alderantziz, $f(x) = -f(-x)$ bada $f(x)$ funtzio bakoitia da.

6.8. Definizioa

Dakigunez, $y = f(x)$ funtzio batek, x_0 bakoitzari balio bat, y_0, bakarrik lotzen dio. Funtzio honen korrespondentzia inbertsoak y_0 bakoitzari balio bat baino gehiago lot diezaioke. Adibidez, $f(x) = x^2$ funtzioaren korrespondentzia inbertsoak $y_0 = 4$ balioari balio bi, -2 eta +2, lotzen dizkio.

Honegatik, ba, korrespondentzia inbertso hau ez da beti funtzio bat, zentzu zehatz batetan behintzat. Askotan, funtzio multiforme bat da, baina funtzio inbertsoa deitzen zaio eta $x = f^{-1}(y)$ idazten da.

6.9. Definizioa

$f(x)$ funtzioa bornatua dela esaten da, $M > 0$ zenbaki bat existitzen bada, non $|f(x)| \leq M$ baita $\forall x \in D$.

FUNTZIOEN LIMITEAK

6.10. Definizioa

f(x) funtzioak a puntuan (edo x delakoa a-rantz doanean), limite finitua, l, du ondoko erlazioak betetzen badira:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

$l = \lim_{x \to a} f(x)$ idatziko dugu eta "l berdin limite f(x) x a-rantz doanean" irakurriko dugu. Inguruneen bidez ere defini daiteke f(x) funtzioren limitea; honela:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in \mathcal{E}^*(a,\delta) \implies f(x) \in \mathcal{E}(l,\varepsilon)$$

Intuitiboki, a puntuan f-ren limitea l izateak, hauxe adierazten du gu: x delakoa a-ri hurbilduz, f(x) funtzioa l-ra nahi dugun beste hurbilduko dela.

a eta l, berdin ∞ ere izan daitezke. Kasu honetan, honela geratuko litzateke definizioa:

i) $|a| < +\infty$, $l = \infty$ kasuan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \iff$$

$$\iff \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)| > M$$

ii) $|l| < +\infty$, $a = \infty$ kasuan:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \ / \ |x| > M \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

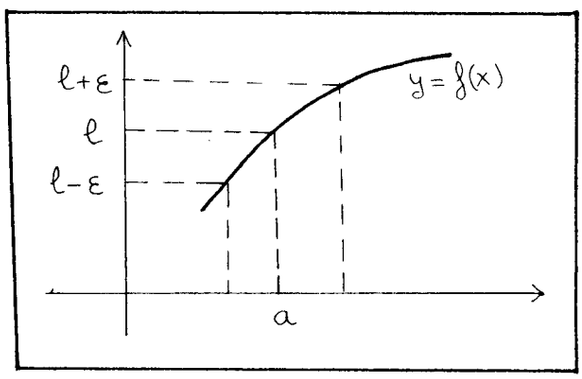
iii) $a = l = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff$$

$$\iff \forall M > 0 \quad \exists N > 0 \,/\, |x| > N \implies |f(x)| > M$$

6.11. Limitearen adierazpen geometrikoa

Suposa dezagun $\lim_{x \to a} f(x) = l$ dela. Kontsidera dezagun $y = l$ puntuaren ε erradiodun ingurune simetrikoa (ε delakoa guk nahi dugun bezain txikia da). $\lim_{x \to a} f(x) = l$ bada, beti x ardatzean a puntuaren ingurune laburtu bat lor daiteke, zeinen puntuen irudiak, f funtzioaren bidez, l-ren ingurunean baitaude.



6.12. Teorema: Limitearen unizitatea

Funtzio batek puntu batetan limitea badu, limite hau bakarra da.

Frogapena

Absurdura eramanez, suposa dezagun a puntuan f(x) funtzioak bi limite, l_1 eta l_2, dituela ($l_1 \neq l_2$ izanik)

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = l_2$$

Biz $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$

l_1 eta l_2 funtzioaren limiteak direnez, honetarako ondoko erlazioak idatz daitezke:

$$\exists \delta_1 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |f(x) - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Biz $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; orduan, aurreko bi desberdintzak betetzen dira; beraz,

$$|f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2} = |l_1 - l_2|$$

Baina

$$|f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \geq |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| = |l_1 - l_2|$$

Eta hau ezinezkoa denez, zeren zenbaki erreal bat ezin da bera baino txikiago izan, suposizioa faltsua da eta teorema hau frogaturik geratzen da.

6.13. Definizioa

Biz f(x) funtzioa, (a, b) ingurunean definitua. a puntuan f-ren eskuinlimitea l dela diogu, propietate hau betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \;/\; 0 < x-a < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

non $x \in (a, b)$ baita. Kasu honetan, $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ idatziko dugu.

Biz f(x) funtzioa, (c, a) ingurunean definitua. a puntuan f-ren ezkerlimitea l dela diogu, propietate hau betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \;/\; 0 < a-x < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

non $x \in (c, a)$. Kasu honetan, $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ idatziko dugu.

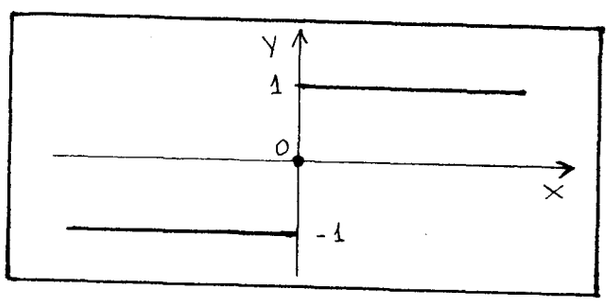
Adibidea

Biz f(x) funtzioa, honela definitua:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \text{ denean} \\ 0 & x = 0 \text{ denean} \\ -1 & x < 0 \text{ denean} \end{cases}$$

$\lim_{x \to o^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to o^-} f(x) = -1$



6.14. Teorema

Puntu batetan funtzio baten limitea existitzen da, baldin eta soilik baldin, bi alboetako limiteak existitzen badira, biak berdinak izanik.

(Frogapena bistakoa da, definizioak kontutan hartzen baditugu).

6.15. Teorema

f(x) funtzioak a puntuan l limite finitua badu, f(x) funtzioa a-ren ingurune laburtu batetan bornaturik dago.

Frogapena

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$ kasurako:

$$\exists\, \delta_1 > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < 1$$

Biz $I = \{x \;/\; 0 < |x-a| < \delta_1\}$.

I multzoa a puntuaren ingurune laburtu bat da, eta hauxe idatz dezakegu:

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - l| < 1 \implies$$

$$\implies \forall x \in I \qquad |f(x)| < |l| + 1 = M$$

Beraz, f(x) funtzioa bornatua da a puntuaren I ingurune laburtuan.

6.16. Teorema

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ bada, $l > 0$ izanik, orduan a puntuaren ingurune laburtu bat existitzen da, non $f(x) > 0$ baita. Bestalde, $l < 0$

bada, a puntuaren ingurune laburtu bat existitzen da, non $f(x) < 0$ baita.

(Hori frogatzeko, nahikoa da, lehen kasuan $\varepsilon = 1$ eta bigarren kasuan $\varepsilon = -1$ hartzea).

6.17. Teorema

Bira $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a puntuaren ingurune laburtu batetan eta $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 1$. Era honetan, $\lim_{x \to a} h(x) = 1$ izango da.

Frogapena

$\lim_{x \to a} f(x) = 1$ eta $\lim_{x \to a} g(x) = 1$ direnez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\exists \delta_2 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - 1| < \varepsilon$$

Har dezagun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, eta aurreko erlazio biak batera betetzen dira honetarako.

Bestalde,

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Longrightarrow f(x) - 1 \leq h(x) - 1 \leq g(x) - 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon < h(x) - 1 < \varepsilon \Longrightarrow |h(x) - 1| < \varepsilon$$

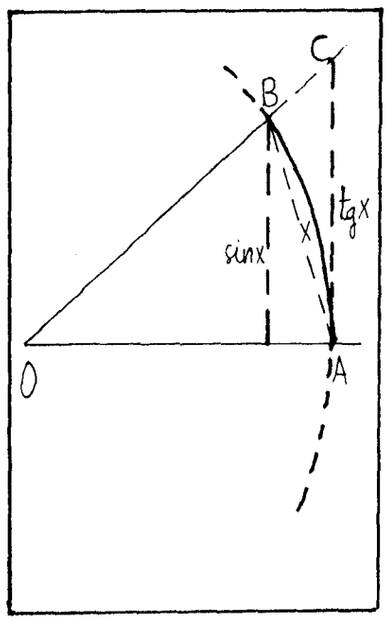
Hau da,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |h(x) - 1| < \varepsilon$$

eta teorema frogaturik geratzen da.

Ondorioa: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\widehat{AB}$ arkuaren neurria radianetan x deituko dugu eta har dezagun $|\overline{OA}| = 1$



$\widehat{AOB}$ azalera < $\overset{\frown}{AOB}$ azalera < $\widehat{AOC}$ azalera $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\ x}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin x < x < tg\ x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{tg\ x}{\sin x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Hau $x > 0$ kasuan egina da, baina berdin egin daiteke $x < 0$ kasuan.

Eta $\lim_{x \to 0} 1 = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$ denez, azkeneko teoremaren bidez,

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dela frogatzen da.

7. GAIA:

LIMITEEN PROPIETATEAK

Infinitesimoak 89

Limitea duten funtzioen eta infinitesimoen arteko erlazioa.. 89

Funtzio bornatu baten eta infinitesimo baten biderkadura ... 90

Limiteen oinarrizko propietateak (batura, biderkadura, zatidura)..... 91

7. G A I A

7.1. Definizioa

Biz $y = f(x)$ funtzio erreal bat; baldin $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ bada, a puntuan y infinitesimoa dela esaten da.

7.2. Teorema

Bira $f(x)$ funtzioa, b zenbaki erreala eta $\alpha(x)$ infinitesimoa a puntuan. Baldin $f(x) = b + \alpha(x)$ bada, orduan,

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ izango da.

Alderantziz, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ bada, halabeharrez, a puntuan infinitesimo bat, $\alpha(x)$, existitzen da, non $f(x) = b + \alpha(x)$ baita.

Frogapena

a) $f(x) = b + \alpha(x) \implies |f(x) - b| = |\alpha(x)|$

a puntuan $\alpha(x)$ infinitesimoa denez

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Aurreko berdintza kontutan hartuz,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

hau da,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

b) Hipotesiz, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-b| < \varepsilon$$

Biz $\alpha(x) = f(x) - b$.

$\alpha(x)$ delakoa infinitesimo bat dela frogatu behar dugu. Baina, $|\alpha(x)| = |f(x)-b|$ da; honeal, ondokoa atera daiteke:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |\alpha(x)| < \varepsilon$$

Hau da,

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

eta $\alpha(x)$ infinitesimo bat da, frogatu nahi genuenez.

Adibidea

Har dezagun $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ da, eta benetan, $f(x) = 1 + \alpha(x)$ da, non $\alpha(x) = \frac{1}{x}$

infinitesimoa den $x = \infty$ puntuan.

7.3. Teorema

Funtzio bornatu baten eta infinitesimo baten biderkadura infinitesimo bat da.

Frogapena

Bira $f(x)$ infinitesimoa a puntuan, eta $g(x)$ funtzio bornatua a puntuaren I ingurunean.

Biz M delakoa g(x)-en bornea.

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-x_0| < \delta \implies |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Eta $|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$ denez gero,

$$\forall x \in I \ / \ 0 < |x-x_0| < \delta \quad |f(x)g(x)| \leq M|f(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

ukanen dugu.

Hots, $f \cdot g$ delakoaren limitea zero da. Beraz, $f \cdot g$ infinitesimo bat da.

LIMITEEN OINARRIZKO PROPIETATEAK

7.4. Teorema

Bira $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ eta $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$, l_1 eta l_2 finituak izanik. Orduan,

$$\lim_{x \to a} \left(f_1(x) + f_2(x)\right) = l_1 + l_2$$

Frogapena

l_1 eta l_2, $f_1(x)$ eta $f_2(x)$-en limiteak direnez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f_1(x)-l_1| < \varepsilon/2$$

$$\exists \delta_2 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |f_2(x)-l_2| < \varepsilon/2$$

Bestalde, balio absolutaren propietateak erabiliz,

$$\left|(f_1(x) + f_2(x)) - (l_1 + l_2)\right| \leq \left|f_1(x) - l_1\right| + \left|f_2(x) - l_2\right|$$

Biz $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

δ honetarako aurreko erlazio biak betetzen dira; beraz,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; 0 < |x-a| < \delta \implies$$

$$\implies \left|(f_1(x) + f_2(x)) - (l_1 + l_2)\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(f.n.g.)

Ondorioa

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ eta k konstante erreala badira,

$$\lim_{x \to a} (k + f(x)) = k + l_1$$

7.5. Teorema

Baldin $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ eta $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ badira, l_1, l_2 finituak izanik, zera betetzen da:

$$\lim_{x \to a} \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = l_1 \cdot l_2$$

Frogapena

a puntuaren ingurune batetan $f_1 = 0$ edo $f_2 = 0$ balira, teorema bistakoa izango litzateke. Ikus dezagun, ea zer pasatzen

den beste kasuetan.

$$f_1(x)\cdot f_2(x) - l_1\cdot l_2 = f_1(x)\cdot f_2(x) - f_1(x)\cdot l_2 + f_1(x)\cdot l_2 - l_1\cdot l_2 =$$

$$= f_1(x)\cdot\left(f_2(x) - l_2\right) + l_2\cdot\left(f_2(x) - l_1\right)$$

Balio absolutuz:

$$\left|f_1(x)\cdot f_2(x) - l_1\cdot l_2\right| \leq \left|f_1(x)\right|\left|f_2(x) - l_2\right| + \left|l_2\right|\left|f_1(x) - l_1\right|$$

$f_1(x)$ funtzioak a puntuan limite finitua duenez, bornatua izango da a puntuaren ingurune laburtu batetan, $\mathcal{E}_1^*(a)$; hots,

$\left|f_1(x)\right| \leq M_1 \quad \forall x \in \mathcal{E}_1^*(a)$.

Biz $M = \max (M_1, |l_2|)$

l_1 eta l_2, $f_1(x)$ eta $f_2(x)$-en limiteak direnez:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f_1(x) - l_1| < \varepsilon/2M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |f_2(x) - l_2| \ \varepsilon/2M$$

Biz $\delta = \min (\delta_1, \delta_2)$

δ honetarako aurreko erlazio biak betetzen dira; beraz,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |f_1(x)\cdot f_2(x) - l_1\cdot l_2| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

(f.n.g.)

Ondorioa

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ bada eta k konstante erreala:

$$\lim_{x \to a} \left[k \cdot f_1(x)\right] = k \cdot l_1$$

7.6. Teorema

Baldin $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1 \neq 0$ bada, orduan,

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{l_1}$$

izango da. Ondorioz, $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ bada,

$$\lim_{x \to a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{l_2}{l_1}$$

izango da.

Frogapena

a)

$$\left| \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{l_1} \right| = \left| \frac{l_1 - f_1(x)}{f_1(x) \cdot l_1} \right| = \frac{|f_1(x) - l_1|}{|f_1(x)| \cdot |l_1|} < \frac{|f_1(x) - l_1|}{M \cdot |l_1|}$$

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1 \neq 0$ denez, $|f_1(x)| > M$ da a puntuaren ingurune laburtu batetan. Hau erabiliz, azkeneko desberdintza ateratzen da.

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ denez,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f_1(x) - l_1| < M \cdot |l_1| \cdot \varepsilon$$

Beraz,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies$$

$$\implies \left| \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{l_1} \right| < \frac{M \cdot |l_1| \cdot \varepsilon}{M \cdot |l_1|} = \varepsilon$$

b)

$$\lim_{x \to a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \to a} \left[\frac{1}{f_1(x)} \cdot f_2(x) \right] =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{f_1(x)} \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) = \frac{1}{l_1} \cdot l_2 = \frac{l_2}{l_1}$$

8. GAIA:

INFINITESIMOAK ETA INFINITUAK

Infinitesimoak 99

Infinitesimoen arteko konparaketa 99

Infinitesimo baten ordena 100

Infinitesimo baliokideak 100

Baldintza beharrezkoa eta nahikoa 101

Infinitesimoen aplikazioa limiteen kalkuluan 102

Infinituak 103

Infinituen ordena 103

Infinitesimo eta infinituen arteko erlazioa 104

8. G A I A

INFINITESIMOAK eta INFINITUAK

8.1. Definizioa

Biz $y = f(x)$ funtzio erreal bat. Baldin $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ bada, y infinitesimo bat dela esaten da (a puntuan, halegia). Adibidea: $y = (x-1)^2$ infinitesimo bat da $x = 1$ puntuan.

8.2. Infinitesimoen arteko konparaketa

Bira y eta z infinitesimoak, a puntuan.

a) Baldin $\lim_{x \to a} \frac{y}{z} = 0$ bada, y-ren ordena z-rena baino handiagoa dela esaten da.

Adibidea: x^3-ren ordena x-ena baino handiagoa da $x = 0$ puntuan, $\lim_{x \to a} \frac{x^3}{x} = 0$ delako.

b) Baldin $\lim_{x \to a} \frac{y}{z} = k$ bada, $k \in R$ eta $k \neq 0$ izanik, y eta z-ren ordenak berdinak dira.

Adibidea: sin x eta x ordena bereko infinitesimoak dira $x = 0$ puntuan, zeren $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ baita.

c) Baldin $\lim_{x \to a} \frac{y}{z} = \infty$ bada, y-ren ordena z-rena baino txikiagoa da.

Adibidea: x-en ordena x^3-rena baino txikiagoa da $x = 0$ puntuan.

d) $\lim_{x \to a} \frac{y}{z}$ existitzen ez bada, y eta z infinitesimoak ez dira konparagarriak $x = a$ puntuan.

8.3. Infinitesimo baten ordena

Har dezagun infinitesimo bat unitate bezala, α adibidez.

$\lim_{x \to a} \frac{y}{\alpha^r} = l$ izanik, $l \in R^*$ existitzen bada, r delakoa y-ren ordena dela esaten dugu.

$l \cdot \alpha^r$ delakoa y infinitesimoaren zati nagusia deitzen da, eta α delakoa infinitesimo nagusia .

Normalki, $a \neq \infty$ denean, $\alpha = x-a$ hartzen da, eta $a = \infty$ kasuan, $\alpha = 1/x$.

8.4. Infinitesimo baliokideak

Baldin bi infinitesimoren arteko zatiduraren limitea 1 bada, infinitesimo hauk baliokideak direla esaten dugu.

y eta z baliokideak badira, $y \sim z$ idatziko dugu. Adibidea: sin x eta x baliokideak dira $x = 0$ puntuan.

8.5. Teorema

Bi infinitesimo baliokideak dira, baldin eta soilik baldin beraien arteko kenduraren ordena beraiena baino handiagoa bada.

$y \sim z \iff$ (y-z)-ren ordena z eta y-rena baino handiagoa.

Frogapena

($\Longrightarrow$) Suposa dezagun $\lim_{x \to a} \frac{y}{z} = 1$ dela.

Halabeharrez,

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{y}{z} - 1 \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{y - z}{z} \right) = 0$$

Beraz, (y-z)-ren ordena z-rena baino handiagoa da. Berdin frogatzen da, (y-z)-ren ordena y-rena baino handiagoa dela, zeren $\lim_{x \to a} \frac{y}{z} = 1$ bada, $\lim_{x \to a} \frac{z}{y} = 1$ ere izango baita.

($\Longleftarrow$) (y-z)-ren ordena z-rena baino handiagoa bada,

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{y - z}{z} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{y}{z} - 1 \right) = 0$$

izango da.

Halabeharrez,

$$\lim_{x \to a} \frac{y}{z} = 1 \quad \text{da.}$$

8.6. Teorema

Funtzio batetan biderkatzaile (edo zatitzaile) infinitesimo baten ordez, beraren infinitesimo baliokide bat ipintzen badugu, funtzioaren limitea ez da aldatzen.

Frogapena

Biz $f = r \cdot y$, y infinitesimoa izanik; biz z, y-ren infinitesimo baliokide bat

$$\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to a} (r \cdot y) = \lim_{x \to a} (r \cdot y) \cdot 1 = \lim_{x \to a} (r \cdot y) \cdot \lim_{x \to a} \frac{z}{y} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(r \cdot y \cdot \frac{z}{y}\right) = \lim_{x \to a} r \cdot z$$

Aldiz, $f = \frac{r}{y}$ balitz,

$$\lim_{x \to a} f = \lim_{x \to a} \frac{r}{y} = \lim_{x \to a} \frac{r}{y} \cdot 1 = \lim_{x \to a} \frac{r}{y} \cdot \lim_{x \to a} \frac{y}{z} = \lim_{x \to a} \frac{r}{y} \cdot \frac{y}{z} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{r}{z} .$$

8.7. Infinitesimo arruntenak

a zenbaki erreala bada, $a \neq \infty$ izanik, hauk dira gehien erabiltzen diren infinitesimo baliokideak a puntuan:

$$\sin (x-a) \sim (x-a)$$

$$\text{arc sin } (x-a) \sim (x-a)$$

$$\text{tg } (x-a) \sim (x-a)$$

$$\text{arc tg } (x-a) \sim (x-a)$$

$$e^{x-a} - 1 \sim (x-a)$$

I N F I N I T U A K

8.8. Definizioa

Biz $y = f(x)$ funtzio erreal bat; a puntuan y infinitu bat dela esaten dugu, $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ denean.

8.9. Infinituen ordena

Biz z infinitua; lehen egin dugun bezala, z delakoa unitate bezala hartzen badugu, y infinituaren ordena r izango da, bal din existitzen bada

$$\lim_{x \to a} \frac{y}{z^r} = l , \qquad l \in R \quad \text{eta} \quad l \neq 0 \quad \text{izanik.}$$

Kasu honetan, $l \cdot z^r$ delakoa y-ren zati nagusia deitzen da, eta z infinitu nagusia.

Normalki, $a \neq \infty$ denean, $z = \frac{1}{x - a}$ hartzen da, eta $a = \infty$ kasuan, $z = x$.

8.10. Teorema

y infinitua bada, $\frac{1}{y}$ infinitesimoa izango da. Alderantziz, y infinitesimoa bada, $\frac{1}{y}$ infinitua izango da.

Frogapena

Bigarren zatia frogatuko dugu

$\lim_{x \to a} y = 0$ denez gero,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies |y(x)| < \varepsilon$$

Baina,

$$|y(x)| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{y(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

ε delakoa guk nahi dugun bezain txikia denez, M delakoa guk nahi dugun bezain handia izango da. Honelatan, ba, aurrekoa honela idatz daiteke:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \implies \left|\frac{1}{y(x)}\right| > M$$

hau da,

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{y(x)} = \infty$$

beraz, $\frac{1}{y(x)}$ infinitu bat da $x = a$ puntuan.

9. GAIA:

FUNTZIO JARRAIAK (I)

Definizioa 107

Batura, biderkadura eta zatiduraren jarraitasuna 108

Funtzio jarraien konposaketa 108

Albo-jarraitasuna 109

Funtzio baten etenguneak 110

9. G A I A

FUNTZIO JARRAIAK (I)

Funtzio batek x_0 puntuan duen limitea aztertzen denean, ez da beharrezkoa, funtzioa puntu horretan definiturik egotea. Orain, x_0 puntu batetan funtzio jarraiak ikusterakoan, funtzioa x_0 delakoan definiturik dagoela suposatuko dugu.

9.1. Definizioa

Funtzio bat, $f(x)$, x_0 puntuaren ingurune batetan definitua, x_0 puntuan jarraia dela esango dugu, x_0 puntuan limitea badu eta limite hori $f(x_0)$ bada. Hots,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Beste era batetara:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ |x-x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Tarteak erabiltzen baditugu, $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan jarraia dela esango dugu, baldin $y_0 = f(x_0)$ zentruz duen edozein tarte ireki ba

ten kasuan, I_{y_0}, x_0 zentruz duen tarte ireki bat, I_{x_0}, existitzen bada, non $f(I_{x_0}) \subset I_{y_0}$ baita

$$\forall I_{y_0} \quad \exists I_{x_0} \ / \quad f(I_{x_0}) \subset I_{y_0}$$

9.2. Teorema

Bira f(x) eta g(x) bi funtzio jarrai x_0 puntuan; orduan, f+g, f·g, f/g ($g(x_0) \neq 0$ denean) funtzioak ere jarraiak dira x_0 puntuan.

Frogapena

x_0 puntuan f(x) eta g(x) jarraiak direnez:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) , \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Beste kasuak ere berdin frogatzen dira.

9.3. Teorema: Funtzio jarraien konposaketa.

Bira f(x) funtzioa x_0 puntuan jarraia eta g(x) funtzioa $y_0 = f(x_0)$ puntuan jarraia, non g(x) funtzioa y_0-ren ingurune bate

tan definiturik baitago; beraz, $g \circ f$ funtzio konposatua jarraia da x_0 puntuan.

Frogapena

Biz I_{z_0}, z_0 puntuaren ingurune bat, non $z_0 = (g \circ f)(x_0)$ den.

y_0 puntuan g(x) funtzioa jarraia denez,

$$\exists I_{y_0} \quad / \quad g(I_{y_0}) \subset I_{z_0}$$

eta x_0 puntuan f(x) funtzioa jarraia denez,

$$\exists I_{x_0} \quad / \quad f(I_{x_0}) \subset I_{y_0}$$

Beraz,

$$(g \circ f)(I_{x_0}) = g\left[f(I_{x_0})\right] \subset g(I_{y_0}) \subset I_{z_0}$$

Hau da,

$$\forall I_{z_0} \quad \exists I_{x_0} \quad / \quad (g \circ f)(I_{x_0}) \subset I_{z_0}$$

eta frogatu dugu $g \circ f$ funtzioa jarraia dela x_0 puntuan.

9.4. Definizioa: Albo-jarraitasuna.

Biz f(x) funtzioa $[x_0, x_0 + \delta)$ tartean definitua; f(x) funtzioa x_0 puntuaren eskuinetik jarraia dela esango dugu, baldin

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ bada.

Biz f(x) funtzioa (x_0- , x_0 tartean definitua; f(x) funtzioa x_0 puntuaren ezkerretik jarraia dela esango dugu, baldin

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ bada.

f(x) funtzioa x_0 puntuaren ezkerretik eta eskuinetik jarraia bada, x_0-n jarraia izango da.

Eskuineko eta eskerreko jarraitasunak albo-jarraitasunak deitu ko ditugu.

FUNTZIO BATEN ETENGUNEAK

9.5. Definizioa

a puntua f(x) funtzioaren etengune bat dela esaten dugu, puntu honetan f(x) funtzioak jarraitasunaren baldintzaren bat betetzen ez badu; hau da, a puntuan definiturik ez badago edo f(x) funtzioaren limitea existitzen ez bada, edo $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ bada.

Etenguneak era desberdinetakoak izan daitezke:

1) Gaindi daitezkeen etenguneak

l finitua izanik $\lim_{x \to a} f(x) = l$ existitzen bada, baina f(x) funtzioa a puntuan definiturik ez badago edo $f(a) \neq l$ bada, a puntua etengune gaindidarria dela esaten da.

Etengune hau honela gaindi dezakegu:

$\varphi(x)$ funtzioa definitzen dugu ondoko era honetan,

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) , & x \neq a \text{ denean} \\ 1 , & x = a \text{ denean} \end{cases}$$

$\varphi(x)$ funtzioa jarraia da eta f(x) funtziotik eratua.

2) Lehen mailako etenguneak

a puntua f(x) funtzioaren lehen mailako etengunea da, hautariko propietateren bat betetzen badu:

i) a puntuan f-ren albo-limiteak existitzen dira, baina desberdinak dira

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x), \quad \exists \lim_{x \to a^-} f(x) , \quad \lim_{x - a^+} f(x) \neq \lim_{x - a^-} f(x)$$

Kasu honetan, $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$ kendura, funtzioaren saltoa deitu ohi da.

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existitzen da, baina $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$ da.

3) Bigarren mailako etenguneak

a puntua f-ren bigarren mailako etengunea da, gutxienez albo-limiteren bat existitzen ez bada.

10. GAIA:

FUNTZIO JARRAIAK (II)

Funtzio uniformeki jarraia 115

Heine-ren teorema 116

Weierstrass-en teorema 118

Bolzano-ren teorema 119

Darboux-en propietatea 120

Funtzio inbertsoaren jarraitasuna 121

10. G A I A

FUNTZIO JARRAIAK (II)

10.1. Definizioa

Biz f(x) funtzioa D tartean definitua; f(x) funtzioa uniformeki jarraia dela esaten dugu, hauxe betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ / \ (\forall x'x'' \in D) \ \wedge \ |x'-x''| < \delta \implies$$

$$\implies \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \ .$$

Ondorioak

a) Funtzio bat D tartean uniformeki jarraia bada, jarraia da D tartean edozein puntutan.

(Hau frogatzeko, aski da $x'' = a$ konsideratzea).

b) Baina alderantzizko propietatea faltsua da. Adibidez,

$f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioa $(0,1]$ tartean definiturik dago era jarraia da tarte horretako puntu guztietan. Ikus dezagun ez dela uniformeki jarraia:

Bistakoa da $\delta < 1$ izan behar duela.

Bira $x' = \delta$ eta $x'' = \frac{\delta}{11}$

$$|x' - x''| = \delta - \frac{\delta}{11} = \frac{10}{11}\delta < \delta$$

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{11}{\delta}\right| = \frac{10}{\delta} > 10$$

Eta $\varepsilon = 10$ hartzen badugu, $\frac{1}{x}$ ez dela uniformeki jarraia ikusten da.

Hala eta guztiz ere, tarte itxi eta bornatu batetan jarraia den f(x) funtzioa, uniformeki jarraia da, Heine-ren teoreman ikusiko dugunez.

10.2. Heine-ren teorema

f(x) funtzioa $[a,b]$ tarte itxi eta bornatuan jarraia bada, $[a,b]$ tartean uniformeki jarraia izango da.

Frogapena

$[a,b]$ tarteko edozein x puntutan f(x) funtzioa jarraia denez

(1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;/\; \forall \xi \in (x-\delta, x+\delta) \quad |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon/2$

Kontsidera dezagun $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$ eratako tarte irekien multzoa. Multzo honek $[a,b]$ tartea estaltzen du; beraz, $[a,b]$ tartearen

estalki bat da. Baina, Borel-Lebesgueren teoremaren bidez, azpiestalki finitu bat existitzen dela dakigu; hau da,

$$(x_k - \frac{\delta k}{2} , x_k + \frac{\delta k}{2}) \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

tarte irekiak ere, $[a,b]$ multzoa estaltzen dute. Biz λ , tarte ireki hauen luzerarik txikiena. Har ditzagun $[a,b]$ tartearen edozein bi puntu x',x'', non $|x'-x''| < \frac{\lambda}{2}$ baitira.

x' puntua $(x_k - \frac{\delta k}{2} , x_k + \frac{\delta k}{2})$ tarteren batetan egongo da; beraz, $|x' - x_k| < \frac{\delta k}{2}$

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x'')|$$

Baina (1) baldintza kontutan hartuz, lehen batugaia $\varepsilon/2$ baino txikiagoa da.

Baina x'' ere $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$ tartean dago, zeren:

$$|x''-x_k| \leq |x''-x'| + |x'-x_k| < \frac{\lambda}{2} + \frac{\delta k}{2} < \delta_k$$

Beraz, bigarren batugaia ere $\varepsilon/2$ baino txikiagos da. Honela,

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eta $f(x)$ uniformeki jarraia da.

10.3. Proposizioa

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxi batetan jarraia bada, bornaturik dago tarte honetan.

Frogapena

Kontsidera dezagun, $[a,b]$ tartea estaltzen duten $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$ eratako tarte irekien familia finitua. (Aurreko teoreman familia hau existitzen dela ikusi dugu).

(1) baldintza idazteko, $\varepsilon = 2$ dela suposatuko dugu, hots,

$$|f(x) - f(x_k)| < 1$$

Biz μ, $|f(x_k)|$ delakoaren baliorik handiena:

$$|f(x)| < |f(x_k)| + 1 \leq \mu + 1$$

Honela, $f(x)$ bornatua dela ikusi dugu.

10.4. Weierstrass-en teorema

$[a,b]$ tarte itxi batetan $f(x)$ funtzioa jarraia bada, tarte honetan gutxienez balio maximo bat eta balio minimo bat admititzen ditu.

Frogapena

10.3. proposizioa ikusi dugunez, $[a,b]$ tarte itxian $f(x)$ jarraia bada, bornaturik dago $[a,b]$ tartean (edo $f([a,b])$ multzo bornatua da); beraz, goitik eta behetik bornaturik dago.

f(x) funtzioa $[a,b]$ tartean goitik bornaturik dagoenez, 1. gaian ikusi dugunez, goiko muturra, M, admititzen du.

M delakoa f-ren balio bat bada, frogatua dugu teorema.

M, f-ren balio bat ez balitz, $\forall \varepsilon > 0$ existituko litzateke $f(x_0)$ balio bat, non $M-\varepsilon < f(x_0) < M$ baita. Beraz, M-ren inguru ne guztiek f-ren balioak dauzkate beren barnean, balio hauk eta M desberdinak izanik; honek esan nahi du, M delakoa f($[a,b]$) multzoaren metatze-puntu bat dela.

2.10. teoremaren bidez, f($[a,b]$) multzoan M limite duen segida bat, $\{f(x_n)\}$, existitzen da.

Bestalde, $\{x_n\}$ segida multzo infinitu eta bornatua da (zeren $[a,b]$ tartean baitago) eta Bolzano-Weierstrass-en teoremaren bidez gitxienez metatze-puntu bat, x', du; eta $[a,b]$ tarte itxia denez, x' puntua $[a,b]$ tartean dago.

f jarraia denez, x' metatze-puntuaren irudiak, f(x') delakoak, M-ren berdina izan behar du. Beraz, M beti izango da f-ren balio bat.

Eta M f-ren balio bada, f-ren maximoa da.

Modu berean frogatzen da, f(x) funtzioak minimo bat admititzen duela.

10.5. Bolzano-ren teorema

[a,b] tarte itxian f(x) funtzioa jarraia bada eta a eta b puntuetan f-ren balioek kontrako zeinua badute, orduan gutxienez

puntu bat, c, existitzen da, $a < c < b$ izanik, non $f(c) = 0$ baita.

Frogapena

Suposa dezagun, $f(a) < 0$ eta $f(b) > 0$ direla. f funtzioa $[a,b]$ tarteko erdiko puntuan, $\frac{a+b}{2}$, anulatzen bada, teorema frogaturik dago.

Honela ez bada, suposa dezagun, adibidez, $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ dela. $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ tarteko muturretan f funtzioaren balioek kontrako zeinua dute. f funtzioa tarte honetako erdiko puntuan anulatzen bada, teorema frogaturik dago.

Honela ez bada, aurreko tartearen luzaeraren erdia duen tarte berri bat hartzen dugu, zeinen muturretan f-ren balioek kontrako zeinua baitute.

Honela jarraituz, f funtzioa tarte bateko erdiko puntuan anulatzen bada, teorema frogaturik dago; hau gertatzen ez bada, tarte guztien puntu amankomun bat, I, existitzen da, non f funtzioa anulatzen baita; zeren, adibidez, $f(I) > 0$ bada, I-ren ingurune batetan f funtzioaren balioak positiboak izan behar dira; baina ezkerreko muturrean f negatiboa denez, absurdu batera heldu gara.

10.6. Darboux-en propietatea

Biz f(x) funtzio jarraia $[a,b]$ tartean; f(a) eta f(b) balioak desberdinak badira, orduan, $f(a) < \mu < f(b)$ betetzen duen

edozein μ zenbakirako, existitzen da gutxienez $x = c$ puntu bat, $a < c < b$ izanik, non $f(c) = \mu$ baita.

Frogapena

$g(x) = f(x) - \mu$ funtzioa jarraia da $[a,b]$ tartean eta $g(a) = f(a) - \mu$, $g(b) = f(b) - \mu$ balioek kontrako zeinua dute.

$g(x)$ funtzioari Bolzano-ren teorema aplikatuz, $\exists\ x = c$ puntua $(a < c < b)$ / $g(c) = 0$. Hau da,

$$f(c) - \mu = 0 \implies f(c) = \mu$$

FUNTZIO INBERTSOAREN JARRAITASUNA

10.7. Proposizioa

Biz $y = f(x)$ funtzio jarraia eta herstuki garakorra $[a,b]$ tartean; x aldagaiak $[a,b]$ tartearen balioak korritzen dituenean, $f(x)$-ek $[f(a),f(b)]$ tartearen y balio bakoitza gutxienez behin (jarraitasunagatik) eta behin bakarrik (f herstuki monotonoa delako) hartzen du. Honelatan, ba, $x \in [a,b]$ balioen eta $y \in [f(a),f(b)]$ balioen arteko f korrespondentzia biunibokoa da; beraz, korrespondentzia inbertsoa definiturik dago.

f^{-1} korrespondentzia inbertsoan, y delakosk aldagai independente bezala, eta x delakoak menpeko aldagai bezala jokatzen dute; f^{-1} korrespondentzia f-ren funtzio inbertsoa deitzen da: $x = f^{-1}(y)$.

f funtzioa herstuki beherakorra denean ere, aurrean esan duguna esan daiteke, $[f(a),f(b)]$ delakoaren ordez $[f(b),f(a)]$ jarriz.

10.8. Teorema

i) $[a,b]$ tartean $y = f(x)$ funtzioa herstuki gorakorra eta jarraia bada, $x = f^{-1}(y)$ funtzioa ere herstuki gorakorra eta jarraia da $[f(a),f(b)]$ tartean.

ii) $[a,b]$ tartean $y = f(x)$ funtzioa herstuki beherakorra eta jarraia bada, $x = f^{-1}(y)$ funtzioa ere herstuki beherakorra eta jarraia da $[f(b),f(a)]$ tartean.

Frogapena

Suposa dezagun f herstuki gorakorra dela eta har ditzagun f^{-1} funtzioaren existentzi eremuaren bi puntu, $y' < y''$. Puntu hauekin erlazionaturik, $[a,b]$ tarteko bi puntu, x' eta x'' existitzen dira, non $y' = f(x')$ eta $y'' = f(x'')$ baitira. Eta f herstuki gorakorra denez, $x' < x''$ izango da; beraz, f^{-1} funtzioa herstuki gorakorra da.

Orain, $\left[f(a),f(b)\right]$ tartean f^{-1} funtzio jarraia dela ikusi behar dugu. Har ditzagun, $(f(a),f(b))$ tarteko puntu bat, y_0, eta $\varepsilon > 0$ zenbaki bat

$$f^{-1}(y_0) = x_0$$

$$f(x_0 - \varepsilon) = y'$$

$$f(x_0 + \varepsilon) = y''$$

$y' < y < y''$ badugu

$$f^{-1}(y') < f^{-1}(y) < f^{-1}(y'')$$

hau da,

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

eta azkenez,

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

Suposa dezagun, $y_0 - y'$ eta $y'' - y_0$ balioetariko txikiena δ dela. Beraz, $|y - y_0| < \delta$ den kasu guztietan, $\left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon$ izango da, frogatu nahi genuenez.

Berdin frogatzen da bigarren kasua.

11. GAIA:

DERIBATUAK ETA DIFERENTZIALAK

Funtzio baten deribatua puntu batetan 127

Adierazpen geometrikoa 128

Funtzio deribatua 129

Albo-deribatuak puntu batetan 129

Funtzio deribagarrien jarraitasuna 130

Funtzio deribagarrien oinarrizko propietateak 131

Funtzio konposatuaren deribatua 135

Funtzio inbertsoaren deribatua 138

Funtzio elementalen deribatuak 139

Funtzio baten diferentziala puntu batetan 144

Adierazpen geometrikoa 145

Goi-ordenako deribatuak 147

Goi-ordenako diferentzialak 148

11. G A I A

DERIBATUAK ETA DIFERENTZIALAK

11.1. Definizioak

Bira $f: (a,b) \longrightarrow R$ funtzioa eta $x_0 \in (a,b)$

a) f funtzioa deribagarria da x_0 puntuan, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

delako limite finitua existitzen denean; limite hau $f'(x_0)$ idazten da, hots,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ zenbakia, f-ren deribatua x_0 puntuan deitzen da. Aurreko limitea beste era batzutan ere adieraz daiteke

$x - x_0 = \Delta x$ eta $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ badira,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

eta

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

formula baliokideak lortzen ditugu.

Eta $x-x_0 = h$ baldin bada,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

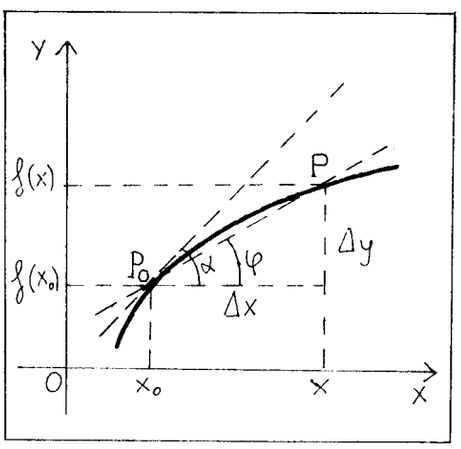
b) f funtzioa, (a,b) tarteko puntu guztietan deribagarria denean, (a,b) tartean deribagarria dela esaten da.

Adibidea

Kalkula dezagun $f(x) = x^2$ funtzioaren deribatua x_0 puntuan

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

11.2. Adierazpen geometrikoa



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$P_0(x_0, f(x_0))$ puntu finkoa da.

φ: horizontalak eta P_0P zuzenak osatzen duten angelua.

α: $y = f(x)$ kurbaren zuzen ukitzaileak eta OX ardatzerdi positiboak x_0 puntuan osotzen duten angelua.

$$\text{tag } \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \text{tag } \varphi = \text{tag } \alpha$$

beraz,

$$f'(x_0) = \text{tag } \alpha$$

tag α balioa, P_0 puntuan $y = f(x)$ kurbaren zuzen ukitzailearen malda da.

11.3. Definizioa

Biz $f(x)$ funtzioa deribagarria (a,b) tartean; $f'(x)$ funztio berri bat defini daiteke, honela:

$$f': (a,b) \longrightarrow R$$
$$x_0 \rightsquigarrow f'(x_0)$$

Dakigunez, $f'(x_0)$ zenbakia, f-ren deribatua x_0 puntuan da.

$f'(x)$ funtzioa, $f(x)$ funtzioaren funtzio deribatua deitzen da.

11.4. Definizioa

Bira $f: (a,b) \longrightarrow R$ funtzioa eta $x_0 \in (a,b)$

a) f, ezkerretik deribagarria da x_0 puntuan, $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ezkerlimite finitua existitzen denean; limite hau, $f'(x_0,-)$ sinbo-

loaz adierazten da

$$f'(x_0,-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Eta $f'(x_0,-)$ zenbakia, f-ren ezkerderibatua x_0 puntuan deitzen da.

b) f, eskuinetik deribagarria da x_0 puntuan, $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ eskuinlimite finitua existitzen denean; limite hau $f'(x_0,+)$ sinbo loaz adierazten da

$$f'(x_0,+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0,+)$ zenbakia, f-ren eskuinderibatua x_0 puntuan deitzen da.

11.5. Proposizioa

f funtzioa deribagarria da x_0 puntuan, baldin eta soilik baldin, x_0 puntuan ezkerretik eta eskuinetik deribagarria bada eta $f'(x_0,+) = f'(x_0,-)$ bada.

(Frogapena bistakoa da)

11.6. Teorema

Funtzio bat, f(x), deribagarria x_0 puntuan baldin bada, puntu honetan jarraia da.

Frogapena

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ dela ikusi nahi dugu.

$f(x)$ funtzioa x_0 puntuan deribagarria denez, $f'(x_0)$ zenbakia existitzen da:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eta

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x-x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Beraz, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ dugu, eta $f(x)$ jarraia da.

11.7. Funtzio deribagarrien oinarrizko propietateak

Bira $f(x)$ eta $g(x)$ funtzio deribagarriak x_0 puntuan

i) $f+g$ funtzioa deribagarria da x_0 puntuan eta hauxe betetzen da:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ii) $f \cdot g$ funtzioa deribagarria da x_0 puntuan eta hauxe betetzen da:

$(f\cdot g)'(x_0) =$

iii) $g(x_0) \neq 0$ bada,

tuan eta hauxe beteta:

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\ g(x_0) - f(x_0)\ g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Frogapena

i) $(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0).$$

ii) $(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\ g(x) - f(x_0)\ g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\left[g(x) - g(x_0)\right]}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0)\left[f(x)-f(x_0)\right]}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)$$

iii) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0)\left[f(x)-f(x_0)\right] + f(x_0)\left[g(x_0)-g(x)\right]}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \left[g(x_0) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \right] =$$

$$= \frac{1}{\left[g(x_0)\right]^2} \left[g(x_0)\cdot f'(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0) \right] =$$

$$= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$$

Ondorioa

Bistakoak dira ba, funtzio deribatuen arteko propietate hauk:

i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ii) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$ $\qquad \left(g(x) \neq 0\right)$

11.8. Adibide sinpleak

a) Konstante baten deribatua zero da.

b) $f(x) = x$ baldin bada, $f'(x) = 1$ da $\forall x \in R$.

c) f funtzioa x_0 puntuan deribagarria eta k, konstantea baldin badira, $k\cdot f$ funtzioa deribagarria da x_0 puntuan eta

$$(k\cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$$

d) x^n, deribagarria da R-ren puntu guztietan.

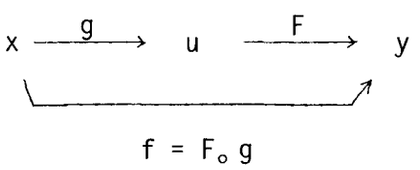
e) Polinomioak deribagarriak dira R-ren puntu guztietan.

f) Funtzio razionalak deribagarriak dira, zatitzailea zero egiten ez den puntu guztietan.

(Puntu hauen frogapena ariketa bezala uzten da)

11.9. Funtzio konposatuaren deribatua: "Katearen erregela"

Bira $y = F(u)$ eta $u = g(x)$ funtzioak. Dakigunez, funtzio konposatua, $f = F \circ g$, honela definitzen da



$$y = f(x) = (F \circ g)(x) = F(g(x))$$

Suposa dezagun, $u_0 = g(x_0)$ dela eta g funtzioa deribagarria dela x_0 puntuan eta F funtzio deribagarria, u_0 puntuan; orduan, funtzio konposatua, f, deribagarria da x_0 puntuan eta hauxe betetzen du:

$$f'(x_0) = F'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Frogapena

g(x) funtzioa x_0 puntuan deribagarria denez,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right] = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) = a(x)$$

non $\lim_{x \to x_0} a(x) = 0$ baita.

F(u) funtzioa u_0 puntuan deribagarria denez,

$$\lim_{u \to u_0} \frac{F(u) - F(u_0)}{u - u_0} = F'(u_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{F(u) - F(u_0)}{u - u_0} - F'(u_0) = b(u)$$

non $\lim_{u \to u_0} b(u) = 0$ baita.

Berdintza hauk kontutan hartuz,

$$f(x) - f(x_0) = F(g(x)) - F(g(x_0)) = F(u) - F(u_0) =$$

$$= (u-u_0)\left[F'(u_0) + b(u)\right] = \left(g(x) - g(x_0)\right)\left[F'(g(x_0) + b(g(x))\right]$$

Baina, $\lim_{x \to x_0} b(g(x)) = \lim_{u \to u_0} b(u) = 0$ da, zeren $u = g(x)$

x_0 puntuan deribagarria denez, jarraia baita; beraz, $u \longrightarrow u_0$ betetzen da x, x_0-rantz doanean. Honelatan, ba,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[g'(x_0) + a(x)\right]\left[F'(g(x_0)+b(g(x))\right] =$$

$$= F'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Ondorioa

$\forall x \in (a,b)$ puntuk aurreko x_0-ren baldintzak betetzen baditu,

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Adibidea

Har dezagun $y = \sin x^2$ funtzio konposatua

$$y = F(u) = \sin u \quad ; \quad F'(u) = \cos u$$
$$u = g(x) = x^2 \quad ; \quad g'(x) = 2x$$

Beraz, $y' = \cos u \cdot 2x = \cos x^2 \cdot 2x$.

11.10. Funtzio inbertsoaren deribatua

Suposa dezagun $y = f(x)$ funtzioak funtzio inbertsoa duela $x = f^{-1}(y)$ eta $f'(x_0) \neq 0$ eta $f(x_0) = y_0$ direla; era honetan, $x = f^{-1}(y)$ funtzio inbertsoa deribagarria da y_0 puntuan eta hauxe betetzen da:

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Frogapena

$$f^{-1'}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{y-y_0}{x-x_0}} \overset{(1)}{=\!=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(1): f deribagarria x_0 puntuan $\Longrightarrow$ f jarraia x_0 puntuan $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $y \longrightarrow y_0$, x, x_0-rantz doanean.

11.11. Funtzio elementalen deribatuak

1) y = konstante $\qquad y' = 0$

2) $y = \sin x \qquad y' = \cos x$

3) $y = \cos x \qquad y' = -\sin x$

4) $y = \text{tag } x \qquad y' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

5) $y = \text{cotag } x \qquad y' = \dfrac{-1}{(\sin x)^2}$

6) $y = \text{arc sin } x \qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $y = \text{arc cos } x \qquad y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $y = \text{arc tag } x \qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

9) $y = \text{arc cotag } x \qquad y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

10) $y = \log_a x \qquad y' = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$

11) $y = \ln x \qquad y' = \dfrac{1}{x}$

12) $y = x^a \quad (a \in R)$ $\qquad y' = a \cdot x^{a-1}$

13) $y = a^x \quad (a \in R)$ $\qquad y' = a^x \cdot \ln a$

14) $y = e^x$ $\qquad y' = e^x$

15) $y = u(x)^{v(x)}$ $\qquad y' = v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x) +$

$$+ u(x)^{v(x)} \cdot v'(x) \cdot \ln u(x)$$

Frogapena

1) Bistakoa da.

2) $$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin (x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x \,(1-\cos \Delta x) + \cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x \,(2 \sin^2 \Delta x/2) + \cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x = 0 + \cos x = \cos x.$$

3) $(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos (x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x(2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \sin x =$$

$$= 0 - \sin x = - \sin x$$

4) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

6) $y = \operatorname{arc} \sin x \longrightarrow x = \sin y$

$$x' = \cos y \Longrightarrow y' = \frac{1}{x'} \Longrightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7) $y = \arccos x \longrightarrow x = \cos y$

$$x' = -\sin y \Longrightarrow y' = \frac{-1}{\sin y}$$

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

8) $y = \operatorname{arc\,tag} x \longrightarrow x = \operatorname{tag} y$

$$x' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tag}^2 y \Longrightarrow y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tag}^2 y} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

10) $y = \log_a x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to o} \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})^{x/\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

11) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$

12) $y = x^a \Longrightarrow \ln y = a \ln x$. Berdintza honen atal biak x-ekiko deribatuz,

$$\frac{1}{y} \cdot y' = a \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = a \cdot \frac{1}{x} \cdot y \Longrightarrow y' = a \cdot x^{a-1}$$

13) $y = a^x \Longrightarrow \ln y = x \ln a$. Berdintza hau x-ekiko deribatuz,

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \Longrightarrow y' = y \cdot \ln a \Longrightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

14) $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$

15) $y = u(x)^{v(x)} \Longrightarrow \ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$

Azkeneko berdintza x-ekiko deribatuz,

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right]$$

$$y' = u(x)^{v(x)} \cdot v'(x) \cdot \ln u(x) + u'(x) \cdot v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1}$$

DIFERENTZIALAK

11.12. Definizioa

Biz $y = f(x)$, funtzio deribagarria $[a,b]$ tartean; beraz, $[a,b]$ tartean edozein x puntutarako:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \iff$$

$$\iff \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \,, \qquad \alpha \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0 \quad \text{izanik}$$

$$\iff \Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (1)$$

x delakoa, $[a,b]$ tarteko edozein puntu finko bat denez, $f'(x)$ delakoa zenbaki erreal bat da eta $\Delta x \longrightarrow 0$; beraz $f'(x) \cdot \Delta x$ infinitesimoa da, eta beraren ordena eta Δx gehikuntzarena berdinak dira, $f'(x) \neq 0$ denean.

$f'(x) \cdot \Delta x$, f-ren diferentziala deitzen da, eta dy edo df(x) idazten; hau da:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Har dezagun orain, $y = x$ funtzioa.

$y' = x' = 1$ denez gero, $dy = dx = \Delta x$ edo $dx = \Delta x$ dugu. Beste era batetan esanda, aldagai independentearen diferentziala eta gehikuntza, gauza berbera dira. Hauxe kontutan hartuz, dy modu

honetan ere defini daiteke:

$$dy = f'(x)\,dx$$

eta

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Funtzio baten deribatua, funtzioaren diferentzialaren eta aldagai independentearen diferentzialaren arteko arrazoia da.

Bestalde, (1) formula honela idatz daiteke:

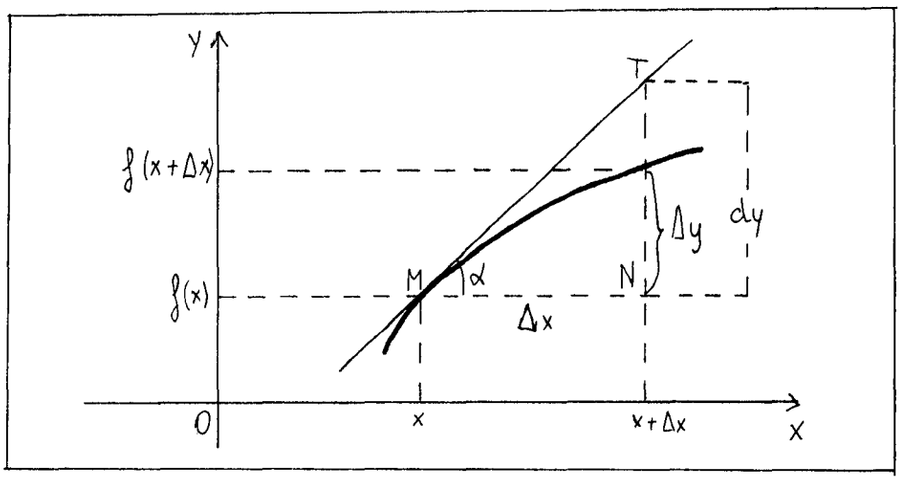
$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$$

eta ikusten denez, funtzio baten diferentziala eta gehikuntza desberdinak dira, baina infinitesimo baliokideak dira, $f'(x) \neq 0$ denean:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{f'(x) \cdot \Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1$$

11.13. Adierazpen geometrikoa

Bira $y = f(x)$ funtzioa eta $M(x,y)$ kurba honen puntu finko bat. M puntuan kurbak duen zuzen ukitzaileak eta OX-eren ardatzerdi positiboak osotzen duten angelua, α deituko dugu.



$$\text{tag } \alpha = \frac{NT}{MN}$$

Baina $\text{tg } \alpha = f'(x)$ da eta $MN = \Delta x$; beraz,

$$NT = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

hots,

$$dy = NT$$

x puntuan f(x) funtzioaren diferentziala, M puntuango kurbaren zu zen ukitzaileko ordenatuaren gehikuntza da.

11.14. Diferentzialen propietateak

Deribatuek betetzen dituzten propietate eta teorema gehienak, diferentzialek ere betetzen dituzte, zeren hauk deribatuen bitartez definitzen baitira. Adibidez:

1) $d(u+v) = du + dv$

2) $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

4) $y = \sin u \longrightarrow dy = \cos u \cdot du$

5) $y = f(u)\ ,\ u = g(x)\ ,\ y = f\left[g(x)\right]$

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot g'(x)$$

$$dy = f'_u(u) \cdot g'(x) \cdot dx$$

$$dy = f'_u(u) \cdot du$$

Ikusten dugunez, funtzio konposatuetan deribatuek eta diferentzialek ez dute berdin jokatzen. Diferentzialen kasuan, aldagai independente eta menpeko aldagaien artean ez dago desberdintasunik.

11.15. Goi-ordenako deribatuak

Suposa dezagun $[a,b]$ artean $f(x)$ funtzioa deribagarria dela. Beste funtzio bat, $f'(x)$, defini daiteke honela:

$$f' : [a,b] \longrightarrow R$$

$$x_0 \rightsquigarrow f'(x_0)$$

$f'(x)$ funtzioak $[a,b]$ tarteko edozein x_0 punturi, $f'(x_0)$ balioa lotzen dio; $f'(x)$ delakoa f-ren funtzio deribatua deitzen da eta $f'(x)$ edo y' idazten. f'-ren funtzio deribatua, f-ren bigarren ordenako deribatua edo deribatu bigarrena deitzen da, eta $f''(x)$ edo y'' idazten.

Berdin, $f^{(n-1)}$-ren funtzio deribatua, f-ren n-ordenako deribatua edo deribatu n-garrena deitzen da, eta $f^{(n)}(x)$ edo $y^{(n)}$ idazten.

11.16. Goi-ordenako diferentzialak

Demagun $y = f(x)$ funtzioa deribagarria dela $[a,b]$ tartean. $[a,b]$ tarteko edozein x_0 punturi $dy_0 = f'(x_0)\,dx_0$ balioa lotzen dion funtzioa, f-ren funtzio diferentziala deitzen da, eta dy edo df(x) idazten.

$$dy = f'(x)\,dx$$

dy funtzioaren funtzio diferentziala, f-ren diferentzial bigarrena deitzen da, eta d^2y edo $d^2f(x)$ idazten.

$$d^2y = d(dy) = \left[f'(x)dx\right]' dx = f''(x) \cdot (dx)^2$$

$d^{n-1}y$ funtzioaren funtzio diferentziala, f-ren diferentzial n-garrena deitzen da, eta d^ny edo $d^nf(x)$ idazten.

12. GAIA:

FUNTZIO DERIBAGARRIEI BURUZKO TEOREMAK

Rolle-ren teorema 151

Cauchy-ren teorema 153

Lagrange-ren teorema 154

L'Hopital-en erregela. Forma indeterminatuak 154

Taylor-en formula 160

12. G A I A

FUNTZIO DERIBAGARRIEI BURUZKO TEOREMAK

12.1. Rolle-ren teorema

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ jarraia } [a,b] \text{ tartean} \\ f(x) \text{ deribagarria } (a,b) \text{ tartean} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b): \; f'(\xi) = 0$$

Frogapena

a) $[a,b]$ tartean $f(x)$ konstantea bada, $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) = 0$ izango da, eta teorema frogaturik dago.

b) Suposa dezagun orain, $[a,b]$ tartean $f(x)$ ez dela konstantea. $[a,b]$ tartean $f(x)$ jarraia denez, $[a,b]$ tartean gutxienez f-ren balio maximo bat, M, existitzen da eta bai minimo bat, m, ere. Eta $f(x)$ konstantea ez denez, $M \neq m$ izango da; beraz, M eta $f(a)$, edo m eta $f(a)$ balio desberdinak dira.

Suposa ditzagun, adibidez, $M \neq f(a)$ dela, hau da $M > f(a)$ dela, eta $f(x)$ funtzioak balio maximoa ξ puntuan hartzen duela : $f(\xi) = M$. Honelatan, ba, $f(a) = f(b)$ denez, $\xi \neq a$ eta $\xi \neq b$ izango da; beraz, $\xi \in (a,b)$.

f-ren balio maximoa $f(\xi)$ denez,

$$\frac{f(\xi+\Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \quad \begin{array}{ll} \leq 0 \text{ da}, & \Delta x > 0 \text{ denean} \\ \geq 0 \text{ da}, & \Delta x < 0 \text{ denean.} \end{array}$$

Orduan, trakzio honen ezkerlimitea $\Delta x \longrightarrow 0$ egitean, zero edo zero baino handiagoa izan beharko litzateke; eta eskuinlimitea ze

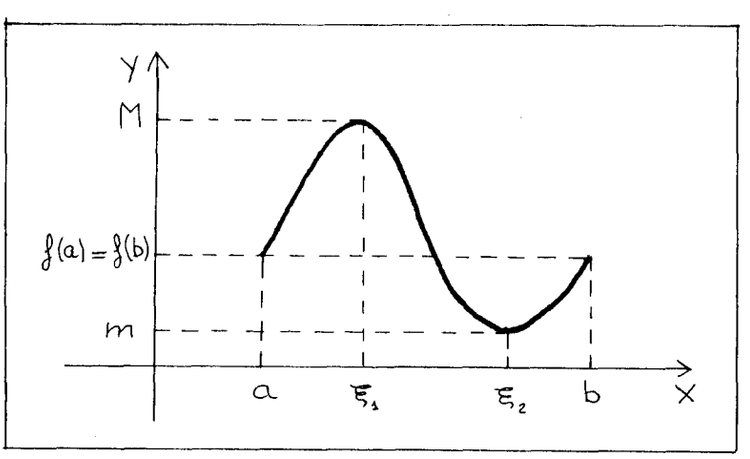
ro edo zero baino txikiagoa.

Dakigunez, ξ puntuan f deribagarria denez, existitu egiten da frakzio honen limitea $\Delta x \longrightarrow 0$ egitean; hau da, ezker eta eskuinlimitea berdinak izan behar dira. Beraz, zera idatz daiteke:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'(\xi) = 0$$

Frogatua dugu, ba, Rolle-ren teorema.

Adierazpen geometrikoa



f(a) = f(b) izanik, [a,b] tartean kurba jarraia badugu, eta kurbaren edozein puntuk zuzen ukitzaile bat badu, gutxienez kurbaren puntu bat existitzen da, zeinetan zuzen ukitzailea OX ardatzaren paraleloa den. Puntu horren abzisa, ξ , $a < \xi < b$ da.

12.2. Cauchy-ren teorema

$$\left.\begin{array}{l} f,g \text{ jarraiak } [a,b] \text{ tartean} \\ f,g \text{ deribagarriak } (a,b) \text{ tartean} \\ g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b): \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Frogapena

Notazioa laburtzeko, Q deituko dugu ondoko frakzioa

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$g(b) - g(a) \neq 0$ da, zeren $g(b) = g(a)$ izango balitz Rolle-ren teoreman ikusi dugunez, $\xi \in (a,b)$: $g'(\xi) = 0$ existituko litzateke, hipotesiaren aurka.

Zera definitzen dugu:

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q(g(x) - g(a))$$

$F(a) = 0$

$F(b) = 0$

$F(x)$ funtzioak Rolle-ren hipotesiak betetzen dituenez, $\exists \xi \in (a,b)$: $F'(\xi) = 0$. Baina,

$$F'(x) = f'(x) - Qg'(x)$$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - Qg'(\xi) = 0 \Longrightarrow Q = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

eta honela, teorema frogaturik gelditzen da.

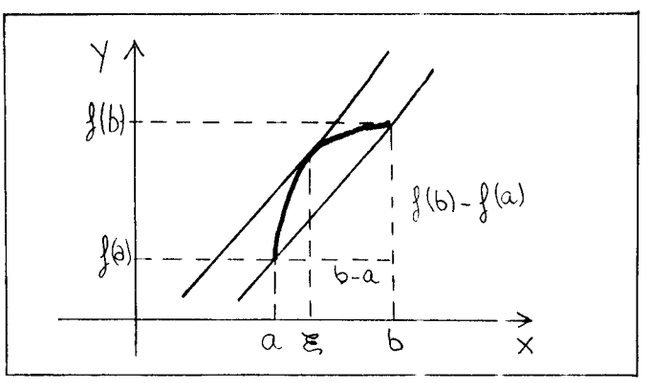
12.3. Lagrange-ren teorema

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ jarraia } [a,b] \text{ tartean} \\ f \text{ deribagarria } (a,b) \text{ tartean} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b): \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Frogapena

Aski da $g(x) = x$ hartzea eta aurreko teorema aplikatzea.

Adierazpen geometrikoa



12.4. L'Hopital-en erregela. Forma indeterminatuak

a) $\frac{0}{0}$ indeterminazioa.

12.4.1. L'Hopital-en erregela

Bira $f(x)$ eta $g(x)$ $[a,b]$ tartean Cauchy-ren teoremaren hipotesiak betetzen dituzten funtzio bi, eta $f(a) = g(a) = 0$. Honelatan, ba, $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada, halaber, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ exis

tituko da, eta gainera,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Frogapena

$[a,b]$ tartean puntu bat, $x \neq a$, hartzen dugu. $[a,x]$ tartean Cauchy-ren teorema aplikatuz,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \xi \in (a,x)$$

Baina $f(a) = g(a) = 0$ denez,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$a < \xi < x$ desberdintzak ditugunez, $x \longrightarrow a$ badugu, $\xi \longrightarrow a$ ere ba dugu; honela $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existitzen bada, halaber,

$\lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$ izango da.

Azkeneko ondorioagatik zera esan daiteke:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Oharra

L'Hopital-en erregela betetzen da, modu berean, nahiz eta $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $x = a$ puntuan definitugabeak izan, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ denean. (Nahiko da $f(a) = g(a) = 0$ definitzea).

Oharra

Halaber, L'Hopital-en erregela balioduna da, $a = \infty$ denean, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ badugu.

(Frogatzeko $x = \frac{1}{t}$ aldaketa egiten da).

b) $\frac{\infty}{\infty}$ indeterminazioa

12.4.2. Teorema

Bira $f(x)$ eta $g(x)$ funtzio jarraiak, deribagarriak a puntuaren $\mathcal{E}^*(a)$ ingurune laburtu batetan, eta $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{E}^*(a)$. Era honetan, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ badugu eta $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existitzen bada, orduan $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ere existituko da, eta gainera,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Frogapena

Har ditzagun $\mathcal{E}(a)$ inguruneko bi puntu, x eta α, non $\alpha < x < a$ baitira.

Cauchy-ren teoremaren bitartez,

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \alpha < \xi < x$$

$$\| \qquad \| \qquad \| \qquad \|$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}$$

Berdintza hauetatik,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \qquad (1)$$

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ denez gero, a-tik aski hurbil dagoen ξ bateta rako ondokoa dugu:

$$A - \varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon \qquad (2)$$

Bestalde, $\lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$ denez,

$$\left| \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \right| < 1 + \varepsilon$$

betetzen da, aurreko ε -erako eta a-tik aski hurbil dagoen x ba tetarako. Hau da,

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon \qquad (3)$$

(2) eta (3) biderkatzean ondoko desberdintzak sortzen dira:

$$(A - \varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f'(\xi)}{f'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1+\varepsilon)$$

baina (1) berdintza kontutan hartuz,

$$(A - \varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (A + \varepsilon)(1+\varepsilon)$$

hau da,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Oharra

Aurreko teorema baliagarria da $A = \infty$ denean.

(Aski da, frakzio inbertsoa kontsideratzea)

Oharra

$x \longrightarrow \infty$ egitean ere, teoremak balio du.

(Nahikoa da, $x = \frac{1}{t}$ aldaketa egitea)

c) $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞°, 1^∞ indeterminazioak

Indeterminazio hauk aurreko kasuetara eramaten dira, ondoko moduetan:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ eta $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

iii) 0^0, ∞°, 1^∞ indeterminazioak askatzeko, neperiar noak hartzen dira

$$y = \lim_{x \to a} \left[f(x)\right]^{g(x)}$$

$$\ln y = \lim_{x \to a} \left[g(x) \cdot \ln f(x)\right]$$

Adibidea

$$y = \lim_{x \to 0} x^x \qquad (0^0)$$

$$\ln y = \ln \lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} \ln x^x = \lim_{x \to 0} (x \cdot \ln x) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

Azkenez, $y = e^0 = 1$.

12.5. Taylor-en formula

Atal honetan zeregina ondoko hau izango da: Nola hurbil dai tekeen funtzio deribagarri bat a puntuan, polinomio baten bidez eta a-ren ingurune batetan.

a) Biz $f(x)$ $(n+1)$ ordenarainoko funtzio deribagarria, $x = a$ puntua bere barnean daukan tarte batetan. Zera bilatu nahi dugu: n gradu edo n gradu baino gutxiagoko polinomio bat, $P_n(x)$, prezeski polinomio horrek

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \ldots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (1)$$

berdintzak betetzen dituelarik.

Bilatzen ari garen polinomiak, era honetakoa izatea nahi dugu:

$$P_n(x) = K_o + K_1(x-a) + K_2(x-a)^2 + \ldots + K_n(x-a)^n$$

non K_o, K_1, ..., K_n, konstante errealak baitira.

Konstante hauen balioak lortuko ditugu, $P_n(x)$ delakoaren ondoz-ondoko deribatuak kalkulatu ondoren eta hauei (1) berdintzak betetzea exigituz

$$P_n'(x) = K_1 + 2K_2(x-a) + 3K_3(x-a)^2 + \ldots + nK_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2K_2 + 3\cdot 2K_3(x-a) + \ldots + n(n-1)\,K_n(x-a)^{n-2}$$

... ...

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2 \cdot 1\ K_n = n!\ K_n$$

eta,

$$P_n(a) = K_o = f(a)$$

$$P'_n(a) = K_1 = f'(a)$$

$$P''_n(a) = 2K_2 = f''(a)$$

.....

$$P_n^{(n)}(a) = n!\, K_n = f^{(n)}(a)$$

hau da,

$$K_o = f(a)$$

$$K_1 = f'(a)$$

$$K_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

.....

$$K_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Honela, bilatzen ari garen polinomioa, ondokoa da:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

b) Biz $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) =$$

$$= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$$

$R_n(x)$ delakoa gai osagarria deitzen da. Gai osagarriaren balioa kalkulatzeko, honela idatziko dugu:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$$

Orain, Q(x) delakoaren balioa lortu behar dugu.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$$

x eta a balio finkoak direnean, Q(x) funtzioak hartzen duen balioari, Q deituko diogu (Q zenbakia da).

x finkoa izanik, ondoko funtzioa definituko dugu:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{(x-t)}{1!} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q$$

Ikus daitekeenez, F(t) funtzioak Rolle-ren teoremaren hipotesiak betetzen ditu [a,x] tartean:

$$F(x) = 0$$

$$F(a) = 0$$

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1!} f''(t) + \frac{(x-t)}{1!} f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) +$$

$$\ldots + n \frac{(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + (n+1)\frac{(x-t)^n}{(n+1)!} Q$$

Hau da,

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + (n+1)\frac{(x-t)^n}{(n+1)!} Q$$

F'(t) funtzioa edozein t puntutan definituta dagoenez gero, F(t) deribagarria da [a,x] tartean, eta Rolle-ren teoremaren bidez,

$$\exists \xi \in (a,x): \quad F'(\xi) = 0$$

hau da,

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(n+1)!} Q = 0 \implies$$

$$\implies \quad Q = f^{(n+1)}(\xi) \qquad (a < \xi < x)$$

Azkenez,

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$\xi = a + \theta(x-a)$ idatz daiteke, non $0 < \theta < 1$ baita,

$a < \xi < x$ delako. Honela,

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

Formula hau, f(x) funtzioaren Taylor-en formula deitzen da.

Eta $a = 0$ denean,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Formula hau, Mac Laurin-en formula deitzen da.

Gai osagarriaren azterketa

Froga dezagun, edozein balio finkotarako —x delakorako—

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

dela.

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|$$

x zenbaki finko bat denez, zenbaki arrunt bat, N delakoa, existitzen da, $|x| < N$ izanik.

Egin dezagun $\frac{|x|}{N} = q$. Orduan, $0 < q < 1$ dela kontutan hartuz, $n = N+1, N+2, N+3, \ldots$ izanik, ondoko hau idatz dezakegu:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\ \ldots\ \frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\ \ldots\ \left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\ \ldots\ \left|\frac{x}{n}\right|\cdot\left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\ \ldots\ \frac{|x|}{N-1}\ q\cdot q\ \ldots\ q = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\ q^{n-N+2}\ ,$$

zeren

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q\ ;\quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < q\ ;\ \ldots\ ;\quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < q$$

baitira.

Baina $\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}$ expresioa n-rekiko konstante bat da, hau da, ez du n-ren dependentziarik; eta $n \longrightarrow \infty$ egitean, q^{n-N+2} expresioak zerorantz jotzen du. Beraz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Beraz, a puntuaren ingurune batetan f(x) funtzioa infinitu bider deribagarria bada, eta ingurune honetan ondoz-ondoko deribatuak funtzio bornatuak badira, $n \longrightarrow \infty$ egitean, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)$ gai osa

garriak zerorantz jotzen du, zeren $f^{(n+1)}(\xi)$ expresioa bornaturik baitago eta $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ zatidurak zerorantz jotzen baitu.

Hemendik hauxe atera dezakegu: "Tipo honetako funtzio baten lorpena, gik nahi dugun bezain beste hurbil daiteke Taylor-en polinomioaren bidez".

13. GAIA:

FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA

Funtzio baten gorapen eta beherapenak 171

Maximo eta minimo erlatiboak 173

Ahurdura eta ganbiltasuna 177

Inflexio-puntuak 180

Asintotak 182

13. G A I A

FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA

13.1. Gorapenak eta beherapenak

Definizioa

$f(x)$ funtzioa x_0 puntuan hertsiki gorakorra da, baldin x_0-ren ingurune batetan ondoko erlazioak betetzen badira

$$f(x_0) > f(x) \qquad x < x_0 \quad \text{denean}$$

$$f(x_0) < f(x) \qquad x > x_0 \quad \text{denean}$$

Funtzio hertsiki beherakorrak alderantzizko desberdintzaz definitzen dira x_0 puntuan.

Desberdintzak hertsiak ez direnean, funtzioak gorakorrak eta beherakorrak soil-soilik deitzen dira.

Teorema

$f'(x_0) \neq 0$ baldin bada,

i) $f(x)$ hertsiki gorakorra da x_0 puntuan, baldin $f'(x_0) > 0$ bada.

ii) $f(x)$ hertsiki beherakorra da x_0 puntuan, baldin $f'(x_0) < 0$ bada.

Frogapena

$$\text{i)}\quad f'(x_0) > 0 \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} f(x_0) > f(x) & x < x_0 \quad \text{denean} \\ f(x_0) < f(x) & x_0 < x \quad \text{denean} \end{cases}$$

ii) Era berean frogatzen da.

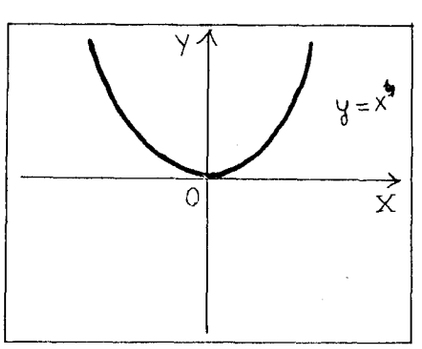
Ondorioa

(a,b) tartean dagoen edozein x puntutarako, $f'(x) > 0$ baldin bada, f(x) funtzioa (a,b) tartean hertsiki gorakorra da.

Adibidea

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 > 0$ $x > 0$ denean; beraz, $y = x^4$ funtzio hertsiki gorakorra da $\forall x > 0$.



13.2. Maximo eta minimo erlatiboak

Definizioak

a) $f(x)$ funtzioak maximo erlatiboa du x_1 puntuan, baldin $\forall x \in \mathcal{E}(x_1)$ izanik $f(x_1) > f(x)$ bada.

b) x_2 puntuan minimo erlatiboa du, baldin $\forall x \in \mathcal{E}(x_2)$ izanik $f(x_2) < f(x)$ bada.

Maximoak eta minimoak muturrak deitzen dira.

Teorema (Baldintza beharrezkoa mutur baten existentziarako)

$f(x)$ funtzioak x_0 puntuan muturra badu, $f'(x_0) = 0$ izango da.

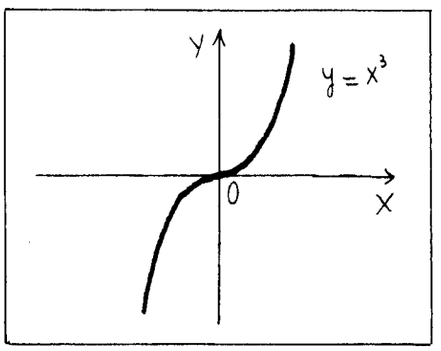
Frogapena

$f'(x_0)$ zenbakia zero baino handiagoa edo txikiagoa baldin bada, x_0 puntuan $f(x)$ beherakorra edo gorakorra izango da, hipotesiaren aurka.

Oharra

Nahiz eta $f'(x_0) = 0$ izan, $f(x)$ funtzioak ez du zertan x_0 puntuan muturra eduki behar. Adibide bat ipin dezakegu: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(o) = 0$. Baina $x = 0$ puntuan ez dago mutu rrik grafikoan ikusten denez



Teorema (Baldintza nahikoa mutur baten existentziarako)

Izan bedi $f'(x_0) = 0$. $f'(x)$ funtzioak x_0-ren ezkerretik eskuinera pasatzean zeinua aldatzen ez badu, orduan x_0 puntuan ez dago muturrik. Baina, $f'(x)$ delakoa zeinu positibotik negatibora igarotzen bada, x_0 puntuan maximoa dago; eta alderantziz gertatzen bada (negatibotik positibora), x_0 puntuan minimoa dago.

Frogapena

Lehen kasuan $f(x)$ gorakorra da x_0 puntuaren ezkerretik eta beberakorra eskuinetik; beraz, x_0 puntuan maximoa dago.

Bigarren kasua berdin froga daiteke.

Adibidea

Ikus dezagun, ondoko funtzioaren maximo eta minimoak zeintzu diren.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

x_1 eta x_2 puntuek muturrak izateko baldintza betetzen dute, baina ikus dezagun, baldintza nahikoa ere betetzen duten

$$\left.\begin{array}{l} x \gtrsim 1 \quad \text{denean, } f'(x) < 0 \\ x < 1 \quad \text{denean, } f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{puntuan maximoa dago}$$

$$\left.\begin{array}{l} x < 3 \quad \text{denean, } f'(x) < 0 \\ x > 3 \quad \text{denean, } f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = 3 \quad \text{puntuan minimoa dago.}$$

Teorema (Beste baldintza nahiko bat)

Biz $f'(x_0) = 0$. x_0 puntuan zero egiten ez den lehenengo deribatuak orden bikoitia baldin badu, x_0 puntuan f(x) funtzioak muturra du. Gainera, zeinu negatiboa badu, muturra maximoa da ; eta positiboa badu, minimoa da.

Baina, x_0 puntuan zero egiten ez den lehenengo deribatuak or den bikoitia ez baldin badu, x_0 puntuan ez du muturrik edukiko.

Frogapena

Demagun $f(x)$ funtzioak n ordenarainoko deribatu jarraiak dituela, eta $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ betetzen dela.

Suposa dezagun, x_0 puntuan zero egiten ez den lehenengo deribatua $f^{(n)}(x)$ dela. Kasu honetan, Taylor-en formula honela geratzen da:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{n!}(x - x_0)^n$$

$f^{(n)}(x)$ jarraia denez gero,

$$\text{zeinu}\left[f^{(n)}(x_0)\right] = \text{zeinu}\left[f^{(n)}(x_0 + \Theta(x-x_0))\right]$$

Bira n zenbakia bikoitia eta zeinu $\left[f^{(n)}(x_0)\right] > 0$

$$x < x_0 \Longrightarrow (x-x_0)^n > 0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$$

$$x > x_0 \Longrightarrow (x-x_0)^n > 0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$$

beraz, x_0 puntuan minimoa dago.

Bira n zenbakia bikoitia eta zeinu $\left[f^{(n)}(x_0)\right] < 0$

$$x < x_0 \Longrightarrow (x-x_0)^n > 0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$x > x_0 \Longrightarrow (x-x_0)^n > 0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0)$$

beraz, x_0 puntuan maximo bat dago.

Biz n zenbaki bakoitia:

x_0 puntuaren ezkerretik eskuinera igarotzean, $f(x) - f(x_0)$ kenduraren zeinua aldatzen denez gero, kasu honetan x_0 puntuan ez dago ez maximo ez minimorik.

13.3. Ahurdura eta ganbiltasuna

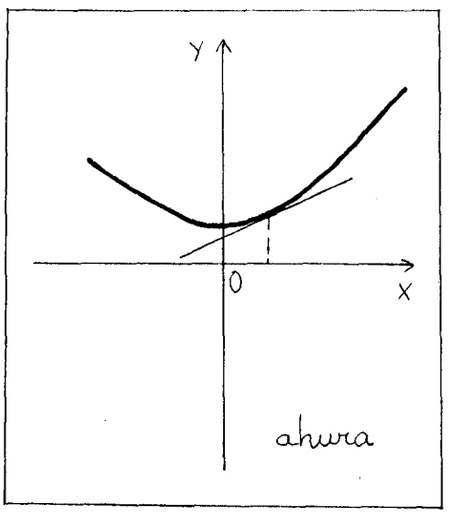
Ikusi dugunez, funtzio baten puntu batetango deribatu lehenaren zeinuak, puntu horretan funtzioa gorakorra edo beherakorra den adierazten digu. Puntu batetango bigarren deribatuaren zeinuak, esandako puntuan funtzioa ahura edo ganbila den adieraziko digu.

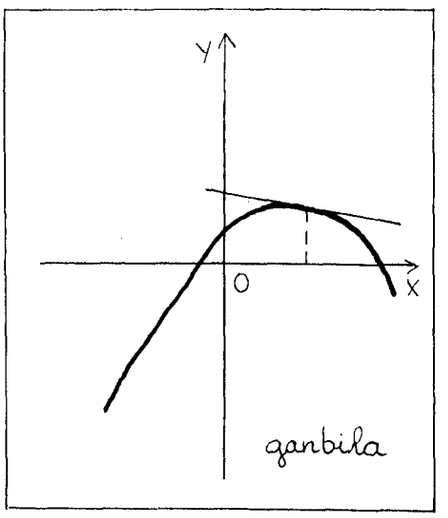
Definizioak

a puntuko $y = f(x)$ kurbaren zuzen ukitzailea kontsidera dezagun.

a puntuan f(x) funtzioa ahura da, a-ren ingurune laburtu bat existitzen bada, zeinen puntuetan kurbaren ordenatuak zuzen ukitzailearenak baino handiagoak baitira.

Alderantziz, a puntuaren ingurune laburtu bat existitzen bada, zeinen puntuetan kurbaren ordenatuak zuzen ukitzailearenak baino txikiagoak baitira, f(x) ganbila da a puntuan.





Definizioa

Tarte batetan $f(x)$ ahura da, tarte honetako puntu guztietan ahura denean.

Berdin, ganbilen kasuan.

Teorema

(a,b) tarteko edozein x puntutarako $f''(x) < 0$ baldin bada, $f(x)$ ganbila da (a,b) tartean.

Frogapena

Biz x_0 (a,b) tarteko edozein puntu, eta kontsidera dezagun $y = f(x)$ kurbaren x_0 puntuango zuzen ukitzailea. (a,b) tartean edozein puntutarako kurbaren ordenatua, y, zuzen ukitzailearen ordenatua, $\bar{y}$, baino txikiagoa dela frogatu nahi dugu.

Kurbaren ekuazioa: $y = f(x)$

Zuzen ukitzailearena: $\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

x puntu finko baten kasuan kurbaren eta zuzen ukitzailearen ordenatuen arteko kendura, hauxe da:

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Lagrange-ren teoremaren bidez,

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x-x_0) \quad \text{non} \quad c \in (x_0,x) \text{ den.}$$

Honela,

$$y - \bar{y} = f'(c)\,(x-x_0) - f'(x_0)\,(x-x_0)$$

$$y - \bar{y} = \left[f'(c) - f'(x_0)\right] \cdot (x-x_0)$$

Berriro ere, $f'(c) - f'(x_0)$ kendurari Lagrange-ren teorema aplikatuz,

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0) \qquad c_1 \in (x_0,c) \text{ izanik.}$$

Har dezagun lehenengo $x > x_0$ kasua:

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 > 0 \\ c - x_0 > 0 \\ \text{Hipotesiz, } f''(c_1) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y - \bar{y} < 0$$

Har dezagun orain $x < x_0$ kasua:

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 < 0 \\ x < c < c_1 < x_0 \Longrightarrow c - x_0 < 0 \\ \text{Hipotesiz, } f''(c_1) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad y - \bar{y} < 0$$

Honela, zera frogatu dugu, kurbaren ordenatua, y, zuzen ukitzaliearena, $\bar{y}$, baino txikiagoa dela (a,b) tarteko edozein puntu batetan. Hau da, (a,b) tartean f(x) ganbila dela.

Teorema

(a,b) tartearen edozein x puntutarako $f''(x) < 0$ bada, (a,b) tartean f(x) ahura da.

(Aurreko teoremaren eran frogatzen da).

Adibidea

Bereiz ditzagun ahudura eta ganbiltasunezko tarteak $y = 2 - x^2$ funtzioan.

$y'' = -2 < 0$ da edozein x-en kasuan; beraz, kurba ganbila da puntu guztietan.

13.4. Inflexio-puntuak

Definizioa

Kurba baten parte ahur eta parte ganbilaren arteko muga-puntua, inflexio-puntua deitzen da.

Teorema (Inflexio-puntua izateko baldintza beharrezkoa)

a puntuan f(x) funtzioak inflexio-puntu bat badu, $f''(a) = 0$ izango da.

Frogapena

Ikusi dugunagatik, $f''(a) \neq 0$ izango balitz, a delakoa ahurdura edo ganbiltasunezko puntua izango litzateke, hipotesiaren kontra.

Teorema (Baldintza nahikoa)

$f''(a) = 0$ izanik, a puntuaren ezkerretik eskuinera pasatzean $f''(x)$ funtzioaren zeinua aldatzen bada, orduan a puntuan f(x) funtzioak inflexio-puntua du.

Frogapena

Har dezagun, adibidez, kasu hau:

$$f''(x) < 0 \qquad x < a \quad \text{denean}$$

eta

$$f''(x) > 0 \qquad x > a \quad \text{denean.}$$

Beraz, a puntuaren ezkerretik f(x) ganbila da eta ahura eskuinetik. Honelatan, ba, f(x) funtzioak inflexio-puntu bat du.

Teorema (Beste baldintza nahiko bat)

f'(a) = 0 izanik, (f'(a)-ren baliotik aparte) a puntuan zero egiten ez den lehenengo deribatuaren ordena bakoitia bada, a puntuan f(x) funtzioak inflexio-puntu bat du.

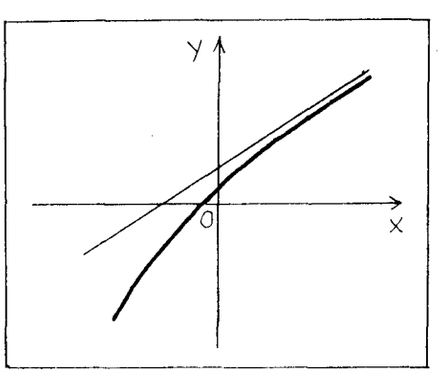
(Ez dugu frogatuko).

13.5. Asintotak

Kurbak aztertzen ari garenean, sarritan aurkitzen ditugu puntu batzu, zeintzuen abzisa edo ordenatua (edo biak) infiniturantz jotzen baitute.

Definizioa

Eman ditzagun zuzen bat eta y = f(x) kurba bat; eta kurba honetako puntu aldagarri bat M dei dezagun. M infiniturantz doanean zuzenaren eta M puntuaren arteko distantziak zerorantz jotzen badu, zuzen hau asintota deitzen da.



Asintota bertikalak

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ bada, $x = a$ zuzena $y = f(x)$ kurbaren asintota bertikal bat da; eta alderantziz.

Adibidea

Har dezagun $y = \frac{2}{x - 5}$ kurba.

$\lim_{x \to a} \frac{2}{x - 5} = \infty$ denez, $x = 5$ asintota bertikala da.

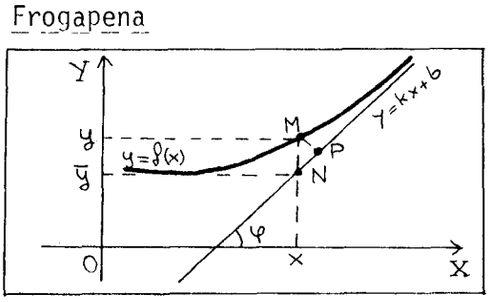
Asintota zehiarrak

$y = kx + b$ zuzena $y = f(x)$ kurbaren asintota bat da, baldin eta soilik baldin, ondoko expresioa betetzen bada,

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0$$

k eta b konstante errealak izanik.

Frogapena



Bira $M(x,y)$ kurbaren puntu bat, eta $N(x,\bar{y})$ asintotarena.

Izan bedi $\overline{MP}$, M-tik P-ra doan zuzenkiaren luzera, hots, M(x,y) puntutik asintotara dagoen distantzia.

$y = kx + b$ zuzena asintota denez gero,

$$\lim_{x \to \infty} \overline{MP} = 0 \qquad (1)$$

Asintota eta OX ardatzerdi positiboaren arteko angelua φ deitzen dugu, eta $\widehat{NMP}$ triangelutik ondoko berdintza atera daiteke:

$$\overline{NM} = \frac{\overline{MP}}{\cos \varphi}$$

φ konstantea eta $\varphi \neq \pi/2$ denez gero,

$$\lim_{x \to \infty} \overline{NM} = 0 \qquad (2)$$

$\overline{NM} = |y-\bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$ eta expresio honi (2) aplikatuz,

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0 \qquad (3)$$

$y = kx + b$ asintota bada, $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0$ dela frogatu dugu.

Era berean, $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0$ bada, orduan $y = kx + b$ asintota dela frogatzen da.

b eta k nola kalkula

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0 \implies \lim_{x \to \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Eta $x \longrightarrow \infty$ denez gero, aurreko berdintzatik hau atera daiteke:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Baina $\lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} = 0$ denez,

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0$$

beraz,

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right] = b}$$

Kasu partikularra: asintota horizontala

$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ da, baldin eta soilik baldin, $y = a$ asintota horizontala bada.

Adibidea

$y = e^{-x} \sin x + x$ funtzioak ez du asintota bertikalik. Asin

tota zeiharra ondoko eran lortzen da:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{e^{-x} \sin x}{x} + 1 \right] = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (e^{-x} \sin x + x - x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} \sin x = 0$$

$y = x$ asintota zeiharra da.

Oharra

$y = f(x)$ delakoa funtzio bikoitia baldin bada, nahikoa da funtzioaren grafikoa balio positiboentzat soilik lortzea, zeren funtzioa ordenatu-ardatzarekiko simetrikoa baita.

$y = f(x)$ funtzio bakoitia baldin bada, nahikoa da, modu berean, balio positiboetarako grafikoa lortzea, zeren $y = f(x)$ funtzioa koordenatu-jatorriarekiko simetrikoa baita.

14. GAIA:

INTEGRAL EZMUGATUAK

Jatorrizko funtzioak eta integral ezmugatua 189

Integral ezmugatuen taula 192

Integral ezmugatuen propietateak 193

Aldagai aldaketazko integrazioa 195

Zatikazko integrazioa 196

Funtzio razionalak: Funtzio razional sinpleen integrazioa;

Funtzio razional generalen integrazioa 198

$ax^2 + bx + c$ expresioa daukaten funtzio batzuren integrazioa 207

Funtzio irrazionalen integrazioa 209

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ motako integralak 212

Integral binomikoen integrazioa 215

Funtzio trigonometrikoen integrazioa 219

14. G A I A

INTEGRAL EZMUGATUAK

14.1. Jatorrizko funtzioak eta integral ezmugatuak

Orain arte ondoko problema hau ikusi dugu: funtzio bat, $F(x)$, emanda, beraren deribatua bilatzea, hau da, $f(x)$ funtzioa bilatzea, non $f(x) = F'(x)$ baita.

14.1.1. Definizioa

$[a,b]$ tarte baten puntu guztietan $F'(x) = f(x)$ ekuazioa betetzen bada, $F(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzioa deitzen da.

Adibidea

Biz $f(x) = x^2$ funtzioa. $F(x) = x^3/3$ funtzioa f-ren jatorrizko funtzio bat da, zeren $(x^3/3)' = x^2$ baita.

Erraz ikusten denez, $f(x)$ funtzioak jatorrizko funtzio bat badu, funtzio hori ez da bakarra. Esate batetarako, adibide honetan $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ eta $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ funtzioak ere f-ren jatorrizko funtzioak dira.

Generalean, k edozein konstante izanik, $F(x) = \frac{x^3}{3} + k$ funtzioa f-ren jatorrizko funtzioa da, zeren $(\frac{x^3}{3} + k)' = x^2$ baita.

Bestalde, x^2 funtzioaren jatorrizko funtzio guztiak $(\frac{x^3}{3} + k)$ formatakoak dira, hurrengo teoreman ikusiko dugunez.

14.1.2. Teorema

$[a,b]$ tartean $F_1(x)$ eta $F_2(x)$ funtzioak f-ren jatorrizko bi funtzio badira, beraien arteko kendura konstante bat da.

Frogapena

$F_1(x)$ eta $F_2(x)$, f-ren jatorrizko funtzioak direnez,

$$F_1'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$F_2'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Demagun, $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$$g'(x) = \left[F_1(x) - F_2(x)\right]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

$x \in [a,b]$ denean. Baina $g'(x) = 0$ bada, $[a,b]$ tartearen edozein x delakoren kasuan, $g(x)$ funtzioak konstantea izan behar du, frogatu nahi genuenez.

Ondorioa

$F(x)$ funtzioa f-ren jatorrizko funtzio bat bada, f-ren bes

te edozein jatorrizko funtzio, $F(x) + k$ eratakoa da, k konstante izanik.

14.1.3. Definizioa

$F(x)$ funtzioa f-ren jatorrizko funtzio bat bada, $F(x) + k$ expresioa f(x) funtzioaren integral ezmugatua deitzen da eta $\int f(x)\,dx$ sinboloaren bidez adierazten da

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

Kasu honetan, f(x) funtzioa "integrakizuna" edo integralaren ikurazpiko funtzioa deitzen da; $f(x)\,dx$ integrazio-elementu, eta $\int$ sinboloa integrazio-ikurra.

Ondorioa

Integral ezmugatu baten deribatua integrakizuna da, zeren $F'(x) = f(x)$ denez, orduan,

$$\left(\int f(x)\,dx \right)' = (F(x) + k)' = f(x)$$

Bakoitzak bere buruari ondoko galdera hau planteia diezaioke: Edozein funtziok jatorrizko funtziorik eta beraz, integral ezmugaturik ote du? Erantzuna ezezkoa da. Hala eta guztiz ere, frogapenik gabe esan dezagun ondoko hau: "Edozein funtzio jarraik $[a,b]$ tartean, jatorrizko funtzioa du, eta beraz, integral ezmugatua".

Gai honeta, zenbait funtzioren jatorrizko funtzioak (eta beraz, integral ezmugatuak) kalkulatzeko metodoak aztertuko ditugu.

14.2. Integral ezmugatuen taula

Deribatuz, erraz ikusten da ondoko berdintzak betetzen direla:

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad (\alpha \neq -1)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + K$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + K$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + K$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + K$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + K$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + K$

8. $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\sin x| + K$

9. $\int e^x\,dx = e^x + K'$

10. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + K$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a} + K$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + K$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin } \frac{x}{a} + K$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + K$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + K$

14.3. Integral ezmugatuen propietateak

14.3.1. Teorema

Funtzio bi edo gehiagoren baturaren integral ezmugatua, integralen batura da; hots,

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx$$

Frogapena

Aurreko berdintzaren gai bakoitza deribatzen badugu,

$$\left(\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx \right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \right)' = \left(\int f_1(x)dx \right)' + \left(\int f_2(x)dx \right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

14.1.2 teoremaren arauera, frogatzen ari garen berdintzaren atal biak, konstante batetan desberdintzen dira. Eta hauxe da, hain zuzen, berdintzak duen esan nahaia.

14.3.2. Teorema

Biderkagai konstanteak ikur integraletik kanpo atera daitezke, hots,

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

Frogapena

Bi atalak deribatzen baditugu,

$$\left(\int a\, f(x)\, dx \right)' = a\, f(x)$$

$$\left(a \int f(x)\, dx \right)' = a\left(\int f(x)\, dx \right)' = a\, f(x)$$

Aurreko teoremaren kasuan bezala, frogatu nahi genuen berdintza ateratzen da.

Adibidea

$$\int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x})\, dx = \int 2x^3\, dx - \int 3 \sin x\, dx + \int 5\sqrt{x}\, dx =$$

$$= 2 \int x^3\, dx - 3 \int \sin x\, dx + 5 \int x^{1/2}\, dx =$$

$$= 2\,\frac{x^4}{4} - 3(-\cos x) + 5\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + K = \frac{1}{2}\,x^2 + 3 \cos x + \frac{10}{3}\,x\sqrt{x} + K$$

14.4. Aldagai aldaketazko integrazioa

Demagun $\int f(x)\,dx$ integrala kalkulatu nahi dugula, baina f-ren jatorrizko funtzioa lortzen ez dakigula, nahiz eta existitzen dela jakin.

Egin dezagun aldagaiaren aldaketa bat, ondoko era honetan:

$$x = g(t) \qquad (1)$$

g(t) funtzioa eta beraren deribatua jarraiak izanik; gainera, g(t) funtzioak funtzio inbertsoa ukanen du. Orduan,

$$dx = g'(t)\,dt$$

Froga dezagun ondoko berdintza hau betetzen dela:

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[g(t)\right] g'(t)\,dt \qquad (2)$$

Hau frogatzeko, x-ekiko berdintzaren gai bakoitzeko deribatuak berdinak direla ikusi behar dugu

$$\left(\int f(x)\,dx \right)'_x = f(x)$$

Deriba dezagun orain bigarren gaia x-ekiko.

(1) berdintzatik hau ateratzen da: $\frac{dx}{dt} = g'(t)$. Beraz, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g'(t)}$ da.

t delakoa x-en funtzioa denez, katearen erregela erabiliz,

$$\left(\int f\left[g(t)\right] g'(t)\, dt \right)'_x = \left(\int f\left[g(t)\right]\ g'(t)\, dt \right)'_x \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \left[f\left[g(t)\right] \cdot g'(t) \right] \cdot \frac{1}{g'(t)} = f\left[g(t)\right] = f(x)$$

beraz, teorema frogaturik geratzen da.

(2) formularen bigarren gaian agertzen den integral ezmugatua, lehenengo gaian agertzen dena baino errazago kalkulatzeko izan dadin, $x = g(t)$ aukeratzen da.

Adibideak

a) $$\int \sqrt{\sin x}\ \cos x\, dx \underset{\uparrow}{=\!=} \int \sqrt{t}\ dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + k =$$

$t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$ } aldaketa eginez

$$= \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + K$$

b) $$\int \frac{x}{1 + x^2}\, dx \underset{\uparrow}{=\!=} \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + k =$$

$t = 1+x^2$, $dt = 2x\, dx$ } aldaketa eginez

$$= \frac{1}{2} \ln \left| 1 + x^2 \right| + K$$

14.5. Zatikazko integrazioa

Bira u eta v bi funtzio deribagarri; u·v biderkaduraren diferentziala hauxe da:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Berdintza hau integratzen badugu,

$$u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

halabeharrez,

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Azkeneko formula, zatikazko integrazioaren formula deitzen da.

Adibidea

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

$u = x$ $\qquad$ $du = dx$

$dv = \sin x \, dx$ $\qquad$ $v = \int \sin x \, dx = -\cos x$

beraz,

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + K$$

v kalkulatzerakoan, konstantea zero bezala hartu dugu, zeren emaitzan influentziarik ez duenez, konstanterik sinpleena hartzea komeni baita.

Metodo hori ondoko eratako integralak kalkulatzeko erabiltzen da:

$$\int x^k \sin ax \, dx \qquad \int x^k \cos ax \, dx$$

$$\int x^k \cdot e^{ax} \, dx \qquad \int x^k \ln x \, dx$$

14.6. Funtzio razionalak: Funtzio razional sinpleen integrazioa. Funtzio razional generalen integrazioa

$P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioak badira, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ funtzio razionala propioa da, izendatzailearen gradoa zenbatzailearena baino txikiagoa denean.

14.6.1. Funtzio razional sinpleen integrazioa

I : $\frac{A}{x - a}$

$$\int \frac{A}{x - a}\,dx = A \int \frac{1}{x - a}\,dx = A \ln |x-a| + K$$

II: $\frac{A}{(x - a)^k}$ $\quad (k \geqslant 2)$

$$\int \frac{A}{(x - a)^k}\,dx = A \int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + K =$$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + K$$

III: $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, $x^2 + px + q$ polinomioaren erroak konplexuak izanik.

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{x^2 + px + q}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q}\, dx + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln \left| x^2 + px + q \right| + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} =$$

$x + \frac{p}{2} = t$ aldaketa eginez,

$$= \frac{A}{2} \ln \left| x^2 + px + q \right| + \frac{2B + Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + K$$

IV: $\frac{Ax + B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geqslant 2$ eta x^2+px+q polinomioaren erroak konplexuak izanik.

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2+px+q)^k}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^k}\, dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2+px+q)^k} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

Lehenengo integralean $x^2+px+q = t$ eta $2(x+p)dx = dt$ aldaketa eginez:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{dt}{t^k} = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + K = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + K$$

Biz I_k bigarren integrala; honela.

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})\right]^k} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ q-\frac{p^2}{4} = m^2 \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2+m^2-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt$$

Azkeneko integrala kontsideratuz,

$$\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt = \int \frac{t \cdot t}{(t^2+m^2)^k}\,dt =$$

$$u = t \qquad du = dt$$

$$dv = \frac{t\,dt}{(t^2+m^2)^k} \qquad v = -\frac{1}{2} \frac{1}{(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}$$

$$- - \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right]$$

Beraz,

$$I_k = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right] =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}$$

Hau da, I_k integrala I_{k-1} integralaren funtzio bezala adierazi dugu.

Prozedura hau k bider erabiliz, ezagutzen dugun ondoko integral hau lortuko dugu:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \text{ arc tg } \frac{t}{m} + K$$

Orain m eta t delakoaren ordez beren balioak ipintzen baditugu, IV. integralaren emaitza lortuko dugu.

14.6.2. Funtzio razional baten deskonposaketa

Jakina dugunez, funtzio razional bat bi polinomioren zatidura besterik ez da, hots,

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Arrazonamenduaren generalitatea murriztu gabe, Q(x) eta P(x) polinomioek erro komunik ez dutela eman dezakegu.

Izendatzailearen gradua zenbatzailearena baino txikiagoa ba da, frakzioa propioa deitzen da; ostearentzean, inpropioa.

Frakzioa inpropioa bada, funtzio hau polinomio bat, M(x), eta frakzio propio baten batura bezala adieraz daiteke, hots,

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{P(x)}$$

Polinomioen integrazioak problemarik ez duenez, gure azterketa frakzio propioak integratzeko moduari bereiziki zuzendua izango da.

Biz $\frac{F(x)}{P(x)}$, erro komunik ez duen frakzio propio bat. Esate baterako, $P(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)(x^2+px+q)^{\beta}(x^2+rx+s)$ eratakoa bada, x^2+px+q eta x^2+rx+s polinomioak erro errealik gabekoak izanik, orduan, $\frac{F(x)}{P(x)}$ funtzioa ondoko era honetan frakzio sinpleren baturan deskonposa daitekela froga daiteke,

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)} + \frac{B}{x-b} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2+px+q)^{\beta}} +$$

$$+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{M_{\beta}x + N_{\beta}}{(x^2+px+q)} + \frac{Px + Q}{x^2+rx+s}$$

non $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}, B, M_1, N_1, \ldots, M_{\beta}, N_{\beta}, P, Q$ delakoak ondoko forma honetan finkatu beharko diren konstanteak baitira. Zatitzaile komunera eramaten dira bigarren atalaren frakzioak; honela, lehenengo eta bigarren atalaren izendatzaileak polinomio identikoak dira. x-en berretzaile berbera dituzten gaien koefizienteak

berdinduz, $A_1, \ldots, A_\alpha, B, M_1, N_1, \ldots, M_\beta, N_\beta, P, Q$ konstanteak kalkulatzeko ekuazio-sistema bat lortzen dugu.

14.6.3. Funtzio razionalen integrazioa

Demagun $\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$ kalkulatu nahi dugula. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ frakzio inpropioa bada, orduan $\frac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{P(x)}$ da; beraz,

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \int M(x)\,dx + \int \frac{F(x)}{P(x)}\,dx$$

$\int M(x)\,dx$ kalkulatzea erraza da, $M(x)$ polinomioa delako; kalkula dezagun, ba, $\int \frac{F(x)}{P(x)}\,dx$.

$\frac{F(x)}{P(x)}$ frakzioa integratzeko, frakzio sinpletan deskonposatuko dugu. Ondoko kasu hauk azal daitezke:

1. kasua: $P(x)$ izendatzaileaten erroak errealak eta sinpleak dira

$$P(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d)$$

orduan,

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d}$$

beraz, integral sinple hauk I tipokoak direnez,

$$\int \frac{F(x)}{P(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d}\,dx =$$

$$= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \ldots + D \ln|x-d| + K$$

2. Kasua: $P(x)$ izendatzailearen erroak errealak dira baina batzu anizkoiak. Adibidez,

$$P(x) = (x-a)^{\alpha}$$

orduan,

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{x-a}$$

eta frakzio sinple hauk I eta II tipotakoak direnez, ba dakigu nola integratzen diren.

Adibidea

Kalkula dezagun $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}$$

$$A = -1, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{9}, \quad D = \frac{2}{9}$$

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + K =$$

$$= \frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + K$$

3. Kasua: $P(x)$ izendatzaileak erro konplexu sinpleak ditu.

Adibidez,

$$P(x) = (x^2+px+q)(x-a)\ldots$$

orduan,

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{A}{x-a} + \ldots$$

Hau da, III klaseko frakzio sinpleak agertzen dira, eta baita ere, I eta II klasetakoak ager daitezke. Beraz, ba dakigu nola integratzen diren.

Adibidea

Kalkula dezagun $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Longrightarrow x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)$$

A, B eta C konstanteak x delakoari balioak emanez kalkula daitezke,

$x = 1$ denean, $1 = 2C \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$

$x = 0$ denean, $0 = -B+C \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$

x^2 delakoaren koefizienteak berdinduz, $0 = A + B \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$.

Beraz,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + K.$$

4. Kasua: $P(x)$ izendatzaileak erro konplexu anizkoak ditu.

Adibidez,

$$P(x) = (x^2+px+q)^{\beta} \ \ldots$$

orduan,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2+px+q)^{\beta}} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{M_{\beta}x + N_{\beta}}{(x^2+px+q)} + \ldots$$

Hau da, IV klaseko frakzio sinpleak agertzen dira, eta baita ere, I, II eta III klaseetakoak ager daitezke. Beraz, badakigu nola integratzen diren.

Adibidea

Kalkula ezazu $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx.$

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} + \frac{E}{x+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$

$$= (Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1) + E(x^2+2x+3)^2$$

eta koefizienteak berdinduz,

$$A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = 0 \qquad D = 0 \qquad E = 1$$

beraz,

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{x-2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \ln|x+1| + K.$$

Honelatan, ba, funtzio razional sinpleak integratzen jakinez gero, edozein funtzio razional integratzen dakigu.

14.7. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ expresioa daukaten funtzio batzuren integrazioa

a) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Integral hau kalkulatzeko, lehenik, ax^2+bx+c ekuazioaren karratu perfektua bilatzen da; eta gero, emandako integrala aldagai-alda

ketaren bidez ondoko era hauetako integraletara eramaten da:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm a^2}} \quad \text{edo} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$. Eta integral hauk kalkulatzen ba dakigu.

Adibidea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x + 10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 6}} = \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 6 \\ x+2 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 6}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2+6} \right| + K =$$

$$= \ln \left| x+2 + \sqrt{x^4+4x+10} \right| + K.$$

b) $$I = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Ax + B expresioa batura batetan deskonposatzen da, non lehenengo batugaia konstante bat bider errokizunaren deribatua baita, eta bigarren batugaia, konstante bat.

$$I = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + (B - \frac{Ab}{2a}) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Azkeneko bigarren integrala a) kasuan bezala ebazten da. Lehenengoa ebazteko, $ax^2 + bx + c = t$ aldaketa eginez, berehalako integral bat ateratzen zaigu, hots,

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + K = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + K$$

Adibidea

$$\int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} =$$

$$= \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln \left| x+2+\sqrt{x^2+4x+10} \right| + K.$$

14.8. Funtzio irrazionalen integrazioa

Funtzio irrazional baten integrala oinarrizko funtzioen bidez adieraztea, ez da beti posible izango.

Atal honetan funtzio irrazional batzu ikasiko ditugu, zeintzuen integralak aldagai-aldaketa egoki batzuren bidez, funtzio ra

zionalen integraletan bihurtzen baitira; eta azken hauen integrazioa nola egiten den, ezaguna dugu.

a) Demagun $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})\, dx$ integrala, non R delakoak parentesi barnean agertzen diren aldagaien funtzio razional bat adierazten duen.

Biz k zenbakia $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ frakzioen zatitzaile komuna. $x = t^k$ aldaketa eginez, x aldagaiaren berredura frakzionario bakoitza t aldagaiaren berredura oso batetan bihurtzen da. Beraz, integrakizuna t delakoaren funtzio razional bat denez, lehen ikusi dugun bezala integratzen da.

Adibidea

Kalkula ezazu $\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4} + 1}\, dx$

$\frac{1}{2}$ eta $\frac{3}{4}$ frakzioen izendatzaile komuna 4 da. Beraz, ondoko aldaketa hau egiten da:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3\, dt \end{array}\right\}$$

$$\int \frac{x^{1/2}\, dx}{x^{3/4} + 1} = 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1}\, t^3\, dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1}\, dt =$$

$$= 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1}\right) dt = 4 \int t^2\, dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1}\, dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t^3 + 1 = y \\ 3t^2 dt = dy \end{array}\right\} = 4 \int t^2 dt - \frac{4}{3} \int \frac{dy}{y} =$$

$$= 4\,\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln|y| + K = \frac{4}{3}\left(x^{3/4} - \ln\left|x^{3/4}+1\right|\right) + K.$$

b) Har ditzagun orain, $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right) dx$

moetako integralak.

Biz k zenbakia, $\frac{m}{n}$, ..., $\frac{r}{s}$ frakzioen zatitzaile komuna. Integral hau, $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ aldaketaren bidez, t-ren funtzio razional baten integralera eramaten da.

Adibidea

Kalkula ezazu $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$ integrala.

Zenbakitzailean $\frac{1}{2}$ berretzailea dugunez, k = 2 izango da zatitzaile komuna.

$$\left.\begin{array}{l} x+4 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right\} \text{ aldaketa eginez,}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt =$$

$$= 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4}$$

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}, \qquad A = -\frac{1}{4} \qquad B = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+2} + 2\int \frac{dt}{t-2} =$$

$$= 2t - 2\ln|t+2| + 2\ln|t-2| + K =$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + K.$$

14.9. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ moetako integralak

Integral hau Euler-en aldaketen bidez, funtzio razional baten integralera eramaten da.

Euler-en lehen aldaketa

$a > 0$ denean,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$$

aldaketa egiten da.

Adibidez, $\sqrt{a}$ delakoaren aurrean + zeinua har dezagun. Orduan,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\,xt + t^2$$

x delakoa t-ren funtzio razional bezala askatuz,

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t}$$

beraz,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\ x + t = \sqrt{a}\ \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\ t} + t$$

Honela, x, dx eta $\sqrt{ax^2+bx+c}$ expresioak t-ren funtzio razional bezala adieraz daitezkeenez, emandako integrala t-ren funtzio razional baten integrala bihurtzen da.

Adibidea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ c}}$$ $a = 1 > 0$ eta orduan,

$$\sqrt{x^2+ c} = -x + t$$

$$x^2+ c = x^2 - 2xt + t^2$$

$$x = \frac{t^2- c}{2t} \qquad dx = \frac{t^2+ c}{2t^2}\ dt$$

beraz,

$$\sqrt{x^2+ c} = -x+t = -\frac{t^2- c}{2t} + t = \frac{t^2+ c}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ c}} = \int \frac{\frac{t^2+ c}{2t^2}}{\frac{t^2+ c}{2t}}\ dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + K =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+ c}\right| + K.$$

Euler-en bigarren aldaketa

$c > 0$ denean,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

aldaketa egiten da. Orduan,

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2x\,t\,\sqrt{c} + c$$

(+ zeinua hartzen dugu). Aurreko berdintzan x askatuz,

$$x = \frac{2\sqrt{c}\ t - b}{a - t^2}$$

x, dx eta $\sqrt{ax^2+bx+c}$ expresioak t-ren funtzio razionalak bezala adieraz daitezkeenez, t-ren funtzio razional baten integrala lortzen da.

Euler-en hirugarren aldaketa

Demagun α eta β zenbakiak ax^2+bx+c trinomioaren erro erreal lak direla. Orduan,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\,t$$

aldaketa egiten da. $ax^2+bx+c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ izanik, ondoko hau dugu:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\,t$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2\,t^2$$

eta x aldagaia t-ren funtzioan askatuz,

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$$

Honelatan, ba, emandako integrala, t-ren funtzio razional baten integrala bihurtzen da.

Adibidea

Kalkula ezazu $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ denez,

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = (x+4)t$$

aldaketa egin behar dugu.

14.10. Integral binomikoen integrazioa

$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ moetako integrala binomikoa deitzen da, baldin m, n, p, a eta b konstanteak badira.

Teorema

m, n eta p zenbaki razionalak badira, integral binomikoa funtzio razional baten integralera eraman daiteke, ondoko hiru kasu hauetan:

1) p zenbakia osoa denean

2) $\frac{m+1}{n}$ zenbakia osoa denean

3) $p+\frac{m+1}{n}$ zenbakia osoa denean

Frogapena

Egin dezagun emandako integralean ondoko aldaketa hau:

$$x = z^{1/n} \qquad \text{edo} \qquad x^n = z$$

$$dx = \frac{1}{n}\, z^{\frac{1}{n}-1}\, dz$$

Orduan,

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p\, dz = \frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz \quad (1)$$

non $q = \frac{m+1}{n} - 1$ baita.

1) Biz p delakoa zenbaki osoa.

q zenbakia razionala denez, dei dezagun $\frac{r}{s}$. Kasu honetan, (1) integrala ondoko eratakoa da:

$$\int R(z^{r/s}, z)\, dz$$

eta integral hau 8. atalean ikusitakoa da; $z = t^s$ aldaketa eginez, t-ren funtzio razional baten integrala bihurtzen da.

2) Biz $\frac{m+1}{n}$ delakoa zenbaki osoa.

Orduan, $q = \frac{m+1}{n} - 1$ zenbakia ere osoa da. p delakoa zenbaki razional denez gero, $\frac{\lambda}{\mu}$ frakzioaren bidez idazten dugu. Kasu honetan, (1) integrala ondoko tipokoa da

$$\int R\left(z^q, (a+bz)^{\lambda/\mu}\right) dz$$

eta integral hau 8. atalean ikusi genuenez, $a + bz = t^{\mu}$ aldaketaren bidez ebazten da.

3) Biz $\frac{m+1}{n} + p$ delakoa zenbaki osoa.

Orduan, $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ zenbakia ere osoa da.

$$\int z^q(a+bz)^p\, dz = \int z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

non $q+p$ zenbakia osoa baita eta p razionala, beraz, $\frac{k}{e}$ erakoa.

Azken integrala ondoko tipokoa da:

$$\int R\left(z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{k/e}\right) dz$$

eta 8. atalean ikusi dugun arauera, $\frac{a+bz}{z} = t^e$ aldaketaren bidez ebazten da.

Adibidea

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\ (1+\sqrt[3]{x^2})} = \int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\, dx$$

$p = -1$ zenbaki osoa da.

$x^{2/3} = z$ aldaketaren bidez,

$$x = z^{3/2} \qquad \text{eta} \qquad dx = \frac{3}{2}\, z^{1/2}\, dz\ ,$$

$$\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}\, dx = \int z^{-1}(1+z)^{-1}\, \frac{3}{2}\, z^{1/2}\, dz =$$

$$= \frac{3}{2} \int z^{-1/2}\,(1+z)^{-1}\, dz = \left\{ \begin{array}{l} z^{1/2} = t \\ z = t^2 \\ dz = 2t\, dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{3}{2} \int t^{-1}\,(1+t^2)^{-1}\, 2t\, dt = 3 \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 3 \text{ arc tg } t + K = 3 \text{ arc tg } z^{1/2} + K = 3 \text{ arc tg } \sqrt[3]{x} + K.$$

Adibidea

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int x^3\,(1-x^2)^{-1/2}\, dx$$

$m = 3 \qquad n = 2 \qquad p = -\frac{1}{2}$

$\frac{m+1}{n} = 2$ zenbakia osoa denez, $z = x^2$ aldaketa eginez,

$$x = z^{1/2} \qquad \text{eta} \qquad dx = \frac{1}{2}\, z^{-1/2}\, dz\ ,$$

$$\int x^3(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \int z^{3/2}\,(1-z)^{-1/2}\,\frac{1}{2}\,z^{-1/2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-1/2}\,dz = \left\{\begin{array}{l}(1-z)^{1/2} = t\\ z = t^2-1\\ dz = 2t\,dt\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int 2(t^2-1)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + K = \frac{(1-z)^{3/2}}{3} - (1-z)^{1/2} + K =$$

$$= \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} - (1-x^2)^{1/2} + K$$

Adibidea

Kalkula ezazu $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Oharra

p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ zenbakietariko bat ere osoa ez bada, orduan integrala ezin daiteke oinarrizko funtzioen bidez adierazia izan.

14.11. Funtzio trigonometrikoen integrazioa

Ikusitako integralak moeta algebraikoak dira (razionalak edo irrazionalak). Orain moeta trigonometrikoak ikusiko ditugu.

Kontsidera dezagun ondoko integrala:

$$\int R\,(\sin x,\ \cos x)\ dx$$

eta ikus dezagun aurreko integral hori,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

delako aldaketaren bidez, t aldagaiaren funtzio razional baten integrala bihurtzen dela.

Adieraz ditzagun sin x eta cos x expresioak $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ expresioaren funtzioan, hau da, t aldagaiaren funtzioan

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Gainera, $x = 2 \operatorname{arc\,tg}\, t$ denez, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ da. Honelatan, ba,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\ dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ aldaketaren bidez, R(sin x, cos x) tipoko edozein funtzio integra daiteke; beraz, aldaketa hori aldaketa trigonometriko unibertsala deitzen da.

Adibidea

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + K = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + K$$

Batzutan, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ aldaketak zailegiak diren funtzio razionaletara eramaten duenez, aldaketa unibertsalaz gain, beste aldaketa batzu ezagutzea komeni da.

Beste aldaketa batzu

1) Integrala $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ erakoa bada, orduan

$\sin x = t$ aldaketa egiten da.

2) Integrala $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ erakoa bada, orduan

$\cos x = t$ aldaketa egiten da.

Adibidea

$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx$. Integral hau $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ erakoa da.

Beraz, $\cos x = z$ aldaketa egiten dugu eta $-\sin x\,dx = dz$ da.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\,dx =$$

$$= -\int \frac{1-z^2}{2+z}\,dz = -\int \left(z - 2 + \frac{3}{2+z}\right)dz =$$

$$= -\frac{z^2}{2} + 2z - 3 \ln \left| 2+z \right| + K =$$

$$= -\frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x - 3 \ln \left| 2+\cos x \right| + K.$$

3) Integrakizunean $tg\ x$ funtzioa soilik agertzen bada, $tg\ x = t$ aldaketa egiten da. Orduan, $x = arc\ tg\ t$ eta $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

4) Integrakizunak $R(\sin x, \cos x)$ forma badu, non $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen berredura guztiak bikoitiak baitira, $tg\ x = t$ aldaketa egiten da, zeren $\sin^2 x$ eta $\cos^2 x$ funtzioak $tg\ x$ delakoaren funtzioan ipin baitaitezke

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2\ x}{1 + tg^2\ x} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$x = arc\ tg\ x \implies dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

Adibidea

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$$ $tg\ x = t$ aldaketa eginez,

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ arc\ tg\ \frac{t}{\sqrt{2}} + K =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ arc\ tg\ \left(\frac{tg\ x}{\sqrt{2}} \right) + K$$

5) Suposa dezagun, integrakizunak $\sin^m x \cdot \cos^n x$ forma duela, m eta n zenbakiak osoak izanik. Hiru kasu bereiztuko ditugu:

a) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ non m eta n zenbaketako bat behintzat bakoitia baita. Demagun n bakoitia dela; orduan $\sin x = t$ aldaketa egingo dugu; m bakoitia balitz, $\cos x = t$ aldaketa egingo genuke.

Adibidea

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x} dx =$$

$$\sin x = t , \quad \cos x \, dx = dt$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$$

$$= \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + K = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + K$$

b) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, non m eta n zenbakiak positibo edo nulu eta bikoitiak baitira. Kasu honetan ondoko formula trigonometrikoak erabili behar ditugu

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Adibidea

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \frac{\sin 4x}{4} + K$$

c) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ integralean m eta n bikoitiak izanik, hauetariko bat gutxienez negatiboa denean, $tg\ x = t$ aldaketa egiten da.

Adibidea

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$$ (ariketa bezala uzten da).

6) Kontsidera ditzagun, azkenik, ondoko era hauetako integralak:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx\ , \quad \int \sin mx \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx \sin nx\, dx$$

non $m \neq n$ baita.

Aurreko integralak erraz ebazten dira, ondoko formula trigonometrikoak kontutan harturik:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos (m+n)x + \cos (m-n)x\right]$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin (m+n)x + \sin (m-n)x\right]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x\right]$$

Adibidea

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (-\cos 8x + \cos 2x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\sin 8x}{8} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2} + K$$

15. GAIA:

INTEGRAL MUGATUA EDO RIEMANN-EN INTEGRALA

Problemaren planteiamendua. Beheko eta goiko baturak 229

Integral mugatua eta integrazio-baldintza 231

Integral mugatuen oinarrizko propietateak 235

Goiko muga aldakorreko integral mugatua 240

Newton-Leibniz-en formula edo Barrow-ren erregela 242

Aldagai-aldaketazko integrazioa 244

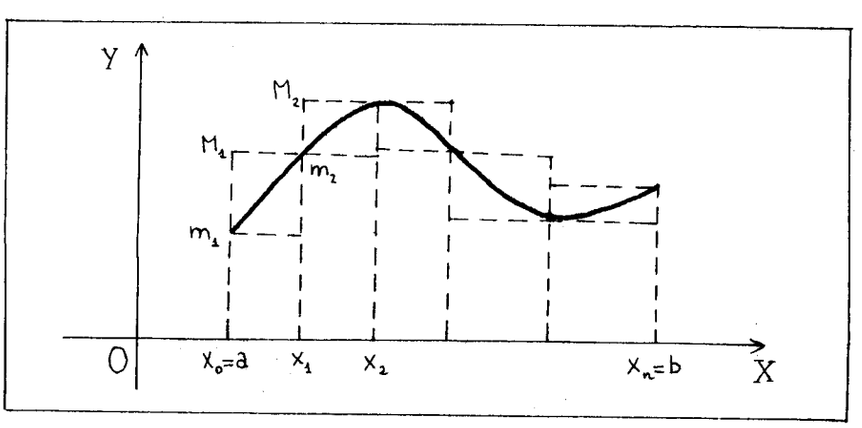
Zatikazko integrazioa 246

15. G A I A

INTEGRAL MUGATUA edo RIEMANN-EN INTEGRALA

15.1. Problemaren planteiamendua. Beheko eta goiko baturak

Integral mugatua bai matematikan, eta bai mekanikan eta zientzietan, ikerketaren bide indartsua da. Azal makurdunek mugatutako azalerak, arkuen luzerak, bolumenak, inertzi momentuak eta abar kalkulatzeko, integral mugatua erabiltzen da.



Biz $y = f(x)$, $[a,b]$ tartean definituriko funtzio jarraia. Bira m eta M errespektiboki f-ren balio minimoa eta maximoa tarte honetan. Egin dezagun,

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

zenbakien bidez $[a,b]$ tartearen partiketa bat, non $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$ baita.

Izan bitez $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

Eman ditzagun orain f(x) funtzioaren balio minimo eta maximoak,

$[x_0,x_1]$ tartean m_1 eta M_1 direla,

$[x_1,x_2]$ tartean m_2 eta M_2 direla,

... ...

$[x_{n-1},x_n]$ tartean m_n eta M_n direla.

Kontsidera ditzagun ondoko batura hauk:

$$\underline{s_n} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{s_n} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$\underline{s_n}$ beheko batura eta $\overline{s_n}$ goiko batura deitzen dira. $f(x) \geq 0$ ba da, beheko batura, $\underline{s_n}$, irudi mailakatu eta inskribatuaren azalera da eta $\overline{s_n}$ aldiz, irudi mailakatu eta zirkunskribatuaren azalera.

Goiko eta beheko baturen propietateak

1) Edozein i-tarako ($i = 1,2,\ldots,n$) $m_i \leq M_i$ denez, $\underline{s_n} \leq \overline{s_n}$ da.

2) $m_1 \geq m$, $m_2 \geq m$, ..., $m_n \geq m$ direnez, non m $[a,b]$ tarteango f-ren balio minimoa den,

$$\underline{s_n} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n \geq$$

$$\geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \ldots + m \Delta x_m = m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) =$$

$$= m(b-a)$$

da, orduan $\underline{s_n} \geq m(b-a)$ propietatea betetzen da.

3) $M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$, ..., $M_n \leq M$ direnez, non M $[a,b]$ tarteango f-ren balio maximoa den,

$$\overline{s_n} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n \leq$$

$$\leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \ldots + M \Delta x_n = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) =$$

$$= M(b-a)$$

da, orduan $\overline{s_n} \leq M(b-a)$ betetzen da.

Eta asken bi desberdintzak batera hartuz,

$$m(b-a) \leq \underline{s_n} \leq \overline{s_n} \leq M(b-a)$$

betetzen da.

15.2. Integral mugatua. Integrazio-baldintza

Segi dezagun, aurreko atalean planteiatutako problema aztertzen. Hauta ditzagun $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{n-1},x_n]$ tartean puntu bana, puntu horik ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n errespektiboki deituko ditugularik.

$$x_0 < \xi_1 < x_1 , \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \ \ldots, \ x_{n-1} < \xi_n < x_n$$

Ondoko expresio hau,

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$[a,b]$ tartean f-ren batura integrala deitzen da.

Edozein i-rentzat $(i = 1,2,\ldots,n)$ $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ denez,

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

izango da, eta $\Delta x_i > 0$ denez,

$$m_i \, \Delta x_i \leq f(\xi_i) \, \Delta x_i \leq M_i \, \Delta x_i .$$

Beraz,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$$

hau da,

$$\underline{s_n} \leq s_n \leq \overline{s_n} \ .$$

Batura integrala goiko eta beheko baturen artean dago; s_n batura integralaren balioa $[a,b]$ tarteko partiketaren funtzioan dago eta baita ere, ξ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ hautatutako puntuen funtzioan.

$[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{n-1},x_n]$ tarteen luzerarik handiena $\max_i \Delta x_i$ deitzen dugu.

Kontsidera dezagun $[a,b]$ tarteko partiketa-segida bat, non $\max \Delta x_i \longrightarrow 0$ den. Argi dago, segida honetan partiketek gero eta puntu gehiago dituztela eta puntu hauen kopuruek infiniturantz jotzen dutela. Partiketa bakoitzaren kasuan, ξ_i puntuak hautatuz, batura integral bat, s_n, dugu. Beraz, partiketa-segida honi loturik, batura integralen segida bat dugu. Batura integralen segida honek I balio batetarantza jo dezake.

$[a,b]$ tarteko edozein partiketa-segidatarako, non $\max \Delta x_i \longrightarrow 0$ den, ξ_i puntuak edozeintzu izanik,

$\left\{ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \right\}$ batura integralen segidak I limite berberetarantz jotzen badu, orduan f(x) integragarria da $[a,b]$ tartean eta esandako limitea, I, $\int_a^b f(x)\, dx$ idazten da.

Beraz, ondoko hau betetzen da:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

non a eta b, beheko eta goiko mugak deitzen baitira. $[a,b]$ integrazio-tartea eta x integrazio-aldagaia direla diogu.

Teorema

f(x) funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada, orduan integragarria da esandako tartean.

(Ez dugu frogatuko).

Oharra

Funtzio etenen arteko batzu integragarriak dira, beste batzu aldiz, ez.

Oharra

f(x) funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada, eta $[a,b]$ tartearen partiketa-segida bat hartzen badugu, non $\max \Delta x_i \longrightarrow 0$

den, erraz ikus daiteke, $\{\underline{s}_n\}$ beheko baturen segidak eta $\{\overline{s}_n\}$ goiko baturen segidak I limite berberarant jotzen dutela, hau da, f-ren integral mugaturantz.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

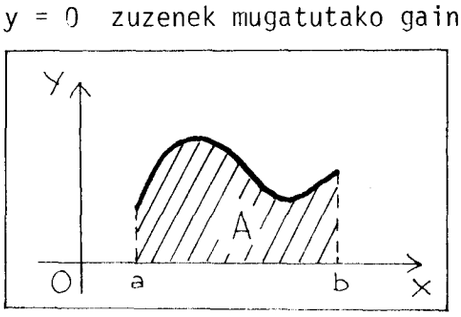
Oharra

Integral mugatua definitu dugunean, $a < b$ dela suposatu dugu; $b < a$ bada, definizioz,

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \qquad \text{dugu.}$$

Adierazpen geometrikoa

$f(x) \geq 0$ izanik, $y = f(x)$ funtzioaren grafikoa indikatezen badugu, $\int_a^b f(x)\, dx$ integrala $y = f(x)$ kurbak eta $x = a$, $x = b$, $y = 0$ zuzenek mugatutako gainazalaren azalera da.



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Oharra

Jakina, b = a bada, irudiaren azalerak zero balio du, eta beraz, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ da.

Integral mugatuen kalkulua batura integralen limiteen bidez egitea oso zaila izaten da eta beste metodo erosoagoren bat bilatzea planteiatzen da. Hauetako metodo bat, gai honetan ikusiko duguna, Newton-ek eta Leibniz-ek aurkitutakoa da.

15.3. Integral mugatuen oinarrizko propietateak

1. Propietatea

Edozein biderkagai konstante, A, integral mugatutik kanpora atera daiteke:

$$\int_a^b A\,f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$$

Frogapena

$$\int_a^b A\,f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A\,f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Propietatea

Funtzio bi edo gehiagoren baturaren integral mugatua, fun-

tzio horien integral mugatuen batura da; hots, baturen integrala integralen batura da

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$$

Frogapena

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)\right] \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\, \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\, \Delta x_i \right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\, \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

3. Propietatea

$[a,b]$ tartean, $(a < b)$, $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioek $f(x) \leq g(x)$ baldintza betetzen badute, orduan

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Frogapena

$$\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[g(\xi_i) - f(\xi_i) \right] \Delta x_i$$

Hemen, $g(\xi_i) - f(\xi_i)$ kendura bakoitza zero edo zero baino handiagoa da; beraz, batura eta beraren limitea zero edo zero baino handiagoa da, eta

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

denez, frogatu dugu propietatea.

4. Propietatea

$[a,b]$ tartean, $(a < b)$, f-ren balio maximo eta minimoa M eta m baldin badira, ondoko erlazioa betetzen da:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Frogapena

Hipotesiaren arauera, $m \leq f(x) \leq M$.

3. propietatea erabiliz,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Baina, $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ eta $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ direnez, aurreko baldintzan ordezkatuz, frogatzen da propietatea.

5. Propietatea. Batezbestekoaren teorema

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada, orduan tarte honetan gutxienez puntu bat, ξ, dago, non

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

den.

Frogapena

Eman ditzagun $a < b$ dela eta f-ren balio maximo eta minimoa $[a,b]$ tartean M eta m direla.

4. propietatearen arauera,

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Dei dezagun $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \mu$, non $m \leqslant \mu \leqslant M$ den.

$f(x)$ funtzioa jarraia denez, m minimoaren eta M maximoaren arteko balio guztiak hartzen ditu. Beraz, gutxienez $[a,b]$ tarteko puntu bat, ξ, dago, zeinentzat $\mu = f(\xi)$ den. Honelatan, ba,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

6. Propietatea

a, b eta c zenbaki errealak badira,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

berdintza betetzen da, integral hauek existitzen direla suposatuz.

Frogapena

Eman dezagun, $a < c < b$ dela eta har dezagun, $f(x)$ funtzioaren batura integrala.

Batura integralen limitea $[a,b]$ tartea zatitzearen eraz independentea denez, c delakoa partiketa guztien zatitze-puntu bezala hartzen dugu.

Bana dezagun, $[a,b]$ tarteari dagokion batura integrala, $\sum_a^b$, bi baturetan: batura bat, $\sum_a^c$, $[a,c]$ tarteari dagokiona, eta bestea, $\sum_c^b$, $[c,b]$ tarteari dagokiona. Beraz,

$$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Eta $\max \Delta x_i \longrightarrow 0$ denean, limiteak hartuz, frogatu nahi genuen berdintza lortzen dugu.

Eman dezagun, orain, $a < b < c$ dela. Frogatu dugunagatik hauxe idatz dezakegu:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

edo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

Baina, $\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$ denez,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

Berdin frogatzen da, a, b eta c puntuen beste edozein ordenamendu tarako.

15.4. Goiko muga aldakorreko integral mugatua

Kontsidera dezagun, $\int_a^x f(t)\,dt$ integrala, non beheko muga, a, finkoa baita, baina goiko muga, x, aldakorra. Integral honen balioa x-ekin aldatuz doa; hau da, emandako integrala x-en funtzio bat da eta $\Phi(x)$ deituko dugu

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Orduan, $\Phi(x)$ funtzioaren deribatuaz hitz egitea, goiko mugarekiko integralaren deribatuaz mintzatzea da.

Teorema

f(x) funtzioa jarraia bada eta $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, orduan ondoko berdintza hau betetzen da:

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Beste era batetan esanda, goiko mugarekiko integral mugatu baten deribatua integrakizuna da, zeinetan goiko muga, x, t integrazio aldagaiaren ordez ipintzen da.

Frogapena

Izan bedi Δx, x-en edozein gehikuntza positibo edo negatiboa. 6. propietatearen bidez,

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)\,dt$$

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Integral honi batezbestekoaren teorema aplikatuz,

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x+\Delta x-x) = f(\xi)\,\Delta x$$

non $\xi \in [x,\ x+\Delta x]$ den. Beraz,

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$$

Honelatan, ba,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)$$

Baina, $\Delta x \longrightarrow 0$ egitean $\xi \longrightarrow x$ denez,

$$\lim_{\Delta x \to o} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

berdintza dugu, eta f(x) jarraia denez,

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

Honelatan, ba, $\Phi'(x) = f(x)$ dela frogatu dugu.

Oharra

Aurreko teorematik ondorio hau ateratzen da: f(x) funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia bada, beti du funtzio jatorrizko bat,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{halegia.}$$

15.5. Teorema. Newton-Leibniz-en formula edo Barrow-ren erregela

F(x) funtzioa f(x) funtzio jarraiaren funtzio jatorrizkoa bada, ondoko berdintza betetzen da:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Formula hori Newton-Leibniz-ena deitzen da.

Frogapena

Izan bedi F(x) funtzioa f(x)-en jatorrizko funtzio bat. Aurreko teoremaren arauera, $\int_a^x f(t)\,dt$ funtzioa ere f(x)-en jatorrizko funtzioa da. Baina emandako funtzioaren edozein bi jatorriz

ko funtzio, konstante batetan, K, desberdintzen dira; i raz

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + K$$

Ikus dezagun, K horrek zenbat balio behar du. Honetarako egin dezagun $x = a$; orduan,

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + K,$$

hau da,

$$0 = F(a) + K,$$

beraz,

$$K = -F(a).$$

Honelatan, ba,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

$x = b$ eginez, Newton-Leibniz-en formula edo Barrow-ren erregela lortzen dugu:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Kontura gaitezen, $F(b) - F(a)$ kendura, hartutako jatorrizko funtzioaren independentea dela, zeren jatorrizko funtzio guztiak konstante batetan egiterakoan desagertu egiten baita. $F(b) - F(a)$ kendura ondoko era honetan idatzi ohi da:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Integrakizunaren jatorrizko funtzio bat ezagutzen denean, Newton-Leibniz-en formulak integral mugatuak kalkulatzeko metodo bat ematen digu.

15.6. Integral mugatu batetan aldagai-aldaketazko integrazioa

Teorema

Eman dezagun $\int_a^b f(x)\,dx$ integrala, $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraia izanik . Sar dezagun integralean aldagai berri bat, t, $x = \varphi(t)$ formularen bidez. Demagun, φ funtzioak ondoko baldintza hauk betetzen dituela:

1) $\varphi(\alpha) = a$ eta $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ eta $\varphi'(t)$ funtzioak jarraiak dira $[\alpha,\beta]$ tartean

3) $f[\varphi(t)]$ delakoa jarraia da $[\alpha,\beta]$ tartean.

Orduan,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt$$

formula betetzen da.

Frogapena

$F(x)$ funtzioa $f(x)$-en jatorrizko funtzio bat bada, ondoko berdintza idatz dezakegu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K$$

Baina $x = \varphi(t)$ denez, $dx = \varphi'(t)\,dt$ izango da; eta aurreko formulan aldagaia aldatuz,

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt = F\left[\varphi(t)\right] + K$$

Bestalde, aurreko berdintza bi hauekin eta Newton-Leibniz-en formula kontutan hartuz,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

eta

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a)$$

formulak ditugu; eta hemendik,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt$$

frogatu nahi genuen formula lortzen dugu.

Adibidea

Kalkula ezazu $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ integrala.

$x = r \sin t$, $dx = r \cos t\,dt$ aldaketa egiten dugu eta integrazio-muga barriak lortu:

$x = 0$ $\quad t = 0$ baliorako

$x = r$ $\quad t = \frac{\pi}{2}$ baliorako.

Orduan,

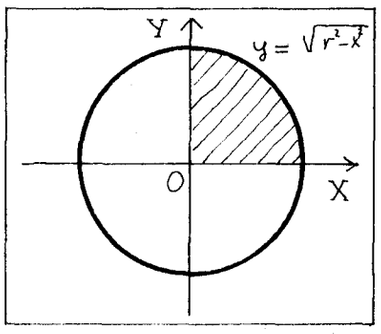
$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r \cos t\, dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t\, dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{4}$$

Kalkula dugun formulak, ikuspuntu geometrikotik, $x^2 + y^2 = r^2$ zirkunferentziak mugatutako zirkulu laurdenaren area adierazten du.



15.7. Zatikako integrazioa

Bira x-ekiko deribagarriak diren bi funtzio, u eta v. Orduan:

$$(u\,v)' = u'v + uv'$$

Berdintza honen atalak integratuz, a eta b mugen artean, ondoko hau lortzen dugu:

$$\int_a^b (u \cdot v)' \, dx = \int_a^b u'v \, dx + \int_a^b u\,v' \, dx$$

Baina $\int_a^b (u \cdot v)' \, dx = u \cdot v \Big|_a^b$ denez,

$$u \cdot v \Big|_a^b = \int_a^b u'v \, dx + \int_a^b v'u \, dx$$

dugu, hau da,

$$\int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Eta hauxe da lortu nahi genuen formula.

16. GAIA:

INTEGRALEN APLIKAZIO GEOMETRIKOAK

Azaleren kalkulua koordenatu cartestarretan 251

Era parametrikoan emandako funtzioak 254

Azaleren kalkulua era parametrikoan 255

Koordenatu polarren sistema 256

Azaleren kalkulua koordenatu polarretan 258

Koordenatu cartestarretan emandako kurba-arku baten luzera.. 260

Ekuazio parametrikotan emandako kurba-arku baten luzera 262

Koordenatu polarretan emandako kurba-arku baten luzera 264

Bolumenen kalkulua, sekzio paraleloen azaleren funtzioan ... 265

Biraketa-gorputzen bolumena 268

Biraketa-gorputzen azalera 169

16. G A I A

INTEGRALEN APLIKAZIO GEOMETRIKOAK

16.1. Azaleren kalkulua koordenatu cartestarretan

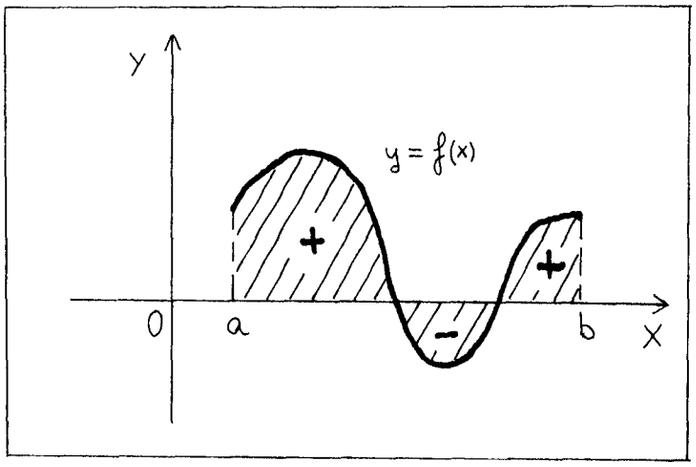
Biz $f(x)$, $[a,b]$ tartean definituriko funtzio erreal bat, non $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$ baita. Dakigun bezala, $y = f(x)$ funtzioak, $x = a$, $x = b$ zuzenek eta OX ardatzak mugatutako trapezio kurbatuaren azalera, ondoko formula honen bidez adierazten da:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$[a,b]$ tartean $f(x) \leqslant 0$ bada, orduan $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ da eta integral honen balio absolutuak, $f(x)$ funtzioari dagokion trapezio kurbatuaren azalera adierazten du

$$-A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$[a,b]$ tartean $f(x)$ delakoaren zeinua aldi-kopuru finitutan aldatzen bada, orduan, $[a,b]$ tarteango integrazioa tarte partzialetako integralen baturan bana dezakegu. $f(x) \geqslant 0$ den tarteetan integrala positiboa izango da eta $f(x) \leqslant 0$ denetan, negatiboa.



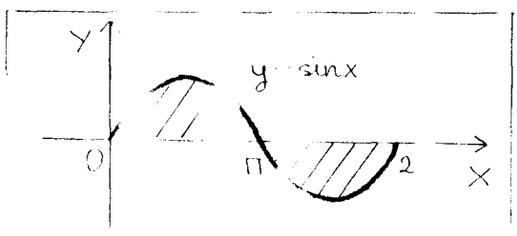
Emandako tarte guztira zabaldutako integrala, OX ardatzaren gainetik eta azpitik dauden azaleren kendura da.

Azaleren batura lortzeko, zeinua kontutan hartu gabe tarte partzialetako integralen balio absolutuen batura egin beharra dago edo bestela ondoko integral hau kalkulatu behar da:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Adibidea

Kalkulatzazu $y = \sin x$ sinusoideak eta OX ardatzak mugatutako azalera $0 \leq x \leq 2\pi$ denean.



$0 \leq x \leq \pi$ denean, $\sin x \geq 0$

eta $\pi \leq x \leq 2\pi$ denean, $\sin x \leq 0$ denez,

$$A = \int_0 \sin x\, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2$$

Beraz, $A = 2 + |-2| = 4$.

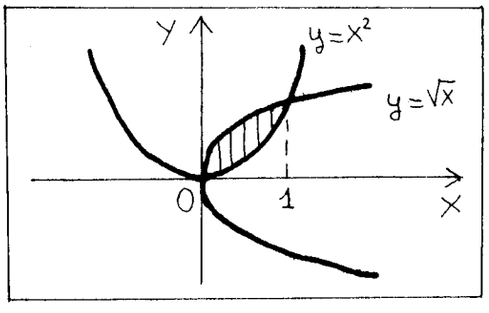
$y = f_1(x)$ eta $y = f_2(x)$ kurbek, $f_1(x) \geq f_2(x)$ izanik, eta $x = a$, $x = b$ zuzenek mugatutako azalera kalkulatu nahi bada, ondoko hau egingo dugu:

$$A = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx$$

Adibidea

Kalkula ezazu $y = \sqrt{x}$ eta $y = x^2$ kurbek mugatutako azalera.

Bila ditzagun kurba hauen ebakitze-puntuak.



$$\sqrt{x} = x^2 \Longrightarrow x = x^4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 1.$$

Orduan,

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

16.2. Era parametrikoan emandako funtzioak

Izan bitez bi ekuazio $\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{array} \right\}$ (1) non t parametroak $[T_1,T_2]$ tartean balioak hartzen baititu. φ eta Ψ funtzioak uniboko badira, t-ren balio bakoitzari x-en balio bat eta y-ren beste bat dagozkio.

Esandako balioak, planoko puntu baten koordenatuak bezala har ditzakegu: (x,y) puntua halegia. Beraz, $[T_1,T_2]$ tarteko balio bakoitzari, planoko puntu bat dagokio. Honelatan, ba, t parametroak $[T_1,T_2]$ tarteko balioak hartzen dituen neurrian, puntuak kurba bat osotzen du planoan.

Esandako ekuazioak, (1), kurba honen ekuazio parametrikoak deitzen dira, t delakoa parametroa izanik.

$x = \varphi(t)$ funtzioak funtzio inbertsoa badu, $t = \Phi(x)$ hain zuzen ere, y x-en funtzio bezala jar dezakegu; hau da,
$y = \Psi[\Phi(x)] = f(x)$.

$y = f(x)$ formula, y-ren dependentzia zuzenekoa, (1) ekuazioetan t parametroa ezabatzen denean lortzen da.

Adibidea

Zentrutzat (o,o) puntua duen r erradiodun zirkunferentzia, ondoko ekuazio parametriko hauen bidez emanda dago:

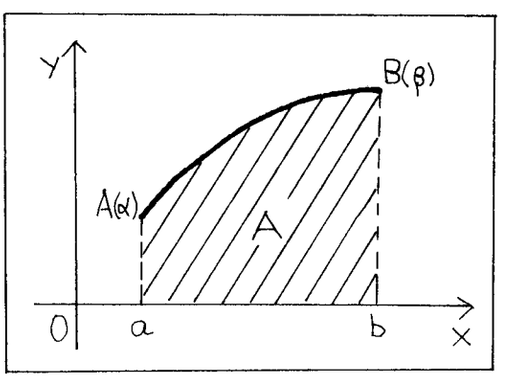
$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{array} \right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Bi ekuazio hauen artean t ezabatzen bada,

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \iff x^2 + y^2 = r^2$$

Hauxe da, prezeski, zirkunfarentzia honen ekuazioa koordenatu cartestarretan.

16.3. Ekuazio parametrikoetan emandako kurba batek mugatutako trapezio kurbatuaren azalera



Kontsidera dezagun, bere ekuazio parametrikoen bidez emandako kurba bat:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(t) \end{cases}$$

non $\alpha \leq t \leq \beta$ eta $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ baitira.

Emandako ekuazioek $[a,b]$ tartean $y = f(x)$ funtzioa definitzen badute, trapezio kurbatuaren azalera ondoko formularen bidez kalkula daiteke:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

Baina $x = \varphi(t)$ da; beraz, $dx = \varphi'(t)\,dt$. Eta $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \Psi(t)$ da. Orduan,

$$A = \int_\alpha^\beta \Psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Hauxe da, hain zuzen ere, koordenatu parametrikotan emandako kurba batek mugatzen duen trapezio kurbatuaren azalera.

Adibidea

Kalkula ezazu ondoko elipseak mugatutako eremuaren azalera:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Kalkula dezagun elipsearen goiko partearen azalera eta gero bikoiztu egingo dugu. x aldagaia -a baliotik a baliora doanez, t parametroa π-tik 0-raino aldatuz joango da

$$A = 2\int_{\pi}^{0} (b \sin t)(-a \sin t\, dt) = -2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t\, dt =$$

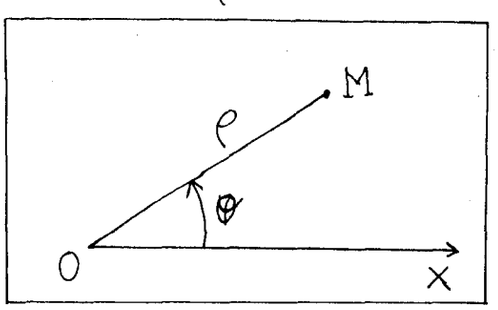
$$= 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt = 2ab\int_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{0}^{\pi} = \pi ab .$$

16.4. Koordenatu polarren sistema

Planoko puntu bat, M, koordenatu polarren bidez finka daiteke. Izan bitez planoko puntu bat, 0, poloa deituko duguna eta zuzenerdi bat, ardatz polarra deritzana, beronen jatorria 0-n egonik.

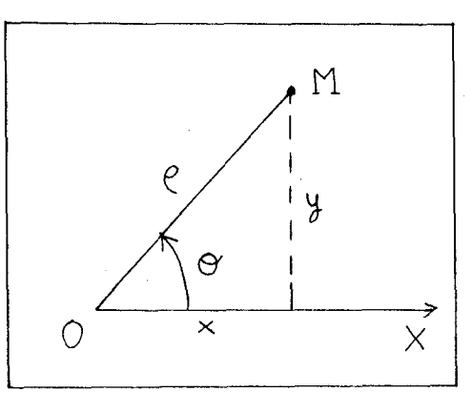
ρ M-tik polora dagoen distantzia eta θ OM segmentuak ardatz polarrarekin erazten duen angelua badira, M puntua zeharo finkatua gelditzen da (ρ,θ) sistemaren bidez.



θ-ren zentzu positibotzat erlojuaren orratzen kontrakoa hartzen da.

(ρ,θ) M-ren koordenatu polarrak deitzen dira. ρ beti positiboa eta θ $[0,2\pi]$ tartekoa hartzen dira.

Bila dezagun orain, koordenatu polarrek eta cartestarrek duten erlazioa; (x,y) M-ren koordenatu cartesiarrak izanik, batetik jatorria eta poloa bat egiten badira, eta bestetik ardatz polarra OX ardatzeko parte positiboarekin bat egiten badira, errez ikusten denez,



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Alderantziz,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{arc tg } \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Adibidea

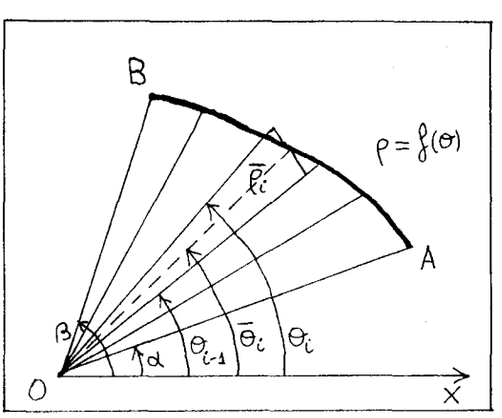
$\rho = 2a \cos\theta$ ekuazioa a erradioa eta (a,0) zentrua dituen zirkunferentziaren ekuazioa da. Idatz dezagun ekuazio hau koordenatu cartestarretan

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2 = 2ax \Longrightarrow x^2+y^2-2ax = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

16.5. Koordenatu polarretan emandako sektore kurbatu baten azalera



Izan bedi $\rho = f(\theta)$ kurba baten ekuazioa koordenatu polarretan, non $f(\theta)$ funtzioa jarraia baita $\alpha \leq \theta \leq \beta$ balioetarako.

Kalkula dezagun $\rho = f(\theta)$ kurbak eta $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ erradio-bektoreek mugatutako OAB sektorearen azalera. Zatika dezagun gainazala n zatitan, $\theta_0 = \alpha$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n = \beta$ erradio-bektoreen bidez eta $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ direlakoak erradio-bektore hauek eratutako angeluak izanik.

Biz $\overline{\rho_i}$ delakoa, θ_{i-1} eta θ_i arteko edozein angeluri, $\overline{\theta_i}$, dagokion erradio-bektore baten luzera.

Har dezagun, $\overline{\rho_i}$ erradioa eta $\Delta\theta_i$ angelu zentrala dituen sektore zirkularra. Sektore honen azalera ondoko hau da:

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}\ \overline{\rho}_i^2\ \Delta\theta_i$$

Eta guztien batura

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \overline{\rho}_i^2\ \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \left[f(\overline{\theta}_i)\right]^2 \Delta\theta_i$$

mailakatutako sektorearen azalera da. Aurreko batura $\alpha \leq \theta \leq \beta$ tartean $\rho^2 = \left[f(\theta)\right]^2$ funtzioari dagokion batura integrala denez, beraren limitea $\max \Delta\theta_i \longrightarrow 0$ denean integral mugatua izango da; beraz, A_n expresioaren limitea hau da:

$$\frac{1}{2}\ \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\theta$$

$\Delta\theta_i$ angeluan hartutako $\overline{\rho_i}$ erradio-bektorea aldatuz, integral honen balioa berdina mantentzen denez, irudiaren azalera bezala hartzen da.

Honelatan, ba, OAB azalera

$$A = \frac{1}{2}\ \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\, d\theta$$

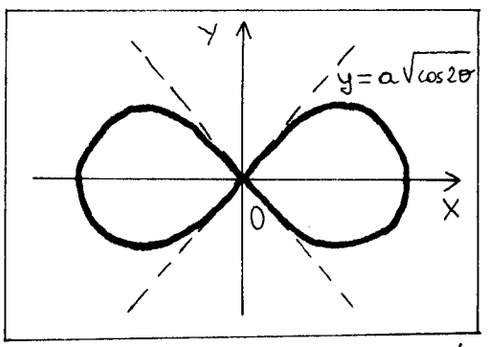
edo

$$A = \frac{1}{2}\ \int_{\alpha}^{\beta} \left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$

da.

Adibidea

Kalkula ezazu $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ lemniskatak mugatutako azalera.



θ delakoak 0-tik $\frac{\pi}{4}$ -ra doanean, erradio-bektoreak kalkulatu nahi dugun azaleraren laurdena ibiltzen du. Beraz,

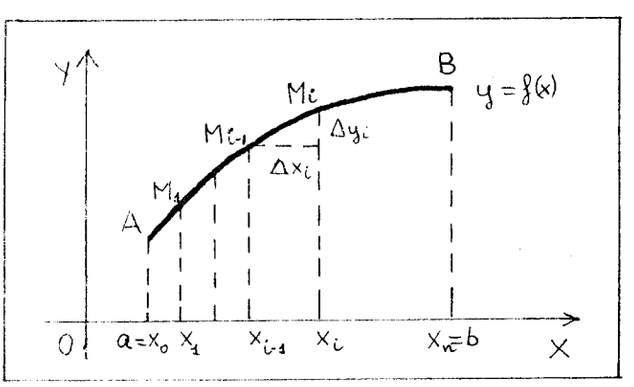
$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}$$

Orduan, $A = a^2$.

16.6. Koordenatu cartestarretan emandako kurba-arku baten luzera

Izan bedi $y = f(x)$ kurba baten ekuazioa koordenatu errektangeluarretan.

Bila dezagun $x = a$ eta $x = b$ zuzenen artean aurkitzen den kurba nonen AB arkuaren luzera.



Har ditzagun AB arkuaren gainean A, M_1, M_2, ..., M_i, ..., B puntuak, beraien abzisak $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $b = x_n$ izanik. Marraz

ditzagun AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ kordak, beraien luzerak Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n izanik. Modu honetan AB arkuan inskribatutako $AM_1M_2...M_{n-1}B$ lerro poligonala lortzen da. Lerro poligonal honen luzera ondoko hau da:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

Esandako lerro poligonalaren alderik handienaren luzerak zerorantz jotzen badu, lerro poligonal inskribatuaren luzerak limite batetarantza joko du. Limite hori AB arkuaren luzera deitzen da. Hau da,

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \qquad (1)$$

Ikus dezagun orain, f(x) eta beraren deribatua $a \leqslant x \leqslant b$ tartean jarraiak baldin badira, limite hori existitzen dela; eta bide batez, arku baten luzera kalkulatzeko metodoa lortuko dugu.

Izan bedi $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Orduan,

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right]^2} \cdot \Delta x_i$$

Lagrange-ren teoremaren arauera:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \ , \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i \ \text{ izanik.}$$

Honelatan, ba,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i$$

Era honetan, lerro poligonal inskribatuaren luzera ondoko hau da:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i$$

Hipotesiaren arauera, $f'(x)$ jarraia da eta beraz, $\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}$ funtzioa ere jarraia izango da. Orduan, idatzitako batura integralak limitea du, limite hori integral mugatua izanik; hau da,

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

Honelatan, ba, arku baten luzera kalkulatzeko formula lortu dugu:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx \qquad (2)$$

16.7. Ekuazio parametrikotan emandako kurba-arku baten luzera

Izan bedi ondoko ekuazioen bidez emandako kurba-arku bat:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \Psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

non $\varphi(t)$ eta $\Psi(t)$, emandako tartean funtzio jarraiak eta deribatu jarraidunak baitira eta emandako $[\alpha,\beta]$ tartean $\varphi'(t) \neq 0$ baita.

Kasu honetan, esandako ekuazioek $y = f(x)$ funtzioa finkatzen dute, beronen deribatua ere jarraia delarik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Izan bitez $a = \varphi(\alpha)$ eta $b = \varphi(\beta)$. Kurba-arku baten luzeraren (2) formulan, ondoko ordezkapen hau egingo dugu:

$$x = \varphi(t) , \qquad dx = \varphi'(t)\, dt$$

Orduan,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\ \varphi'(t)\, dt$$

Beraz,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\Psi'(t)\right]^2}\ dt$$

Adibidea

Kalkula ezazu $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ hipozikloidearen luzera.

Kurba hau koodenatu-ardatzekiko simetrikoa denez, kalkula dezagun kurba honen luzera lehenengo koadrantean, ez beste

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t$$

t parametroa 0-tik $\frac{\pi}{2}$-raino doanez,

$$\frac{1}{4}\, s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\ dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\ dt = 3a \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt =$$

$$= 3a\, \frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2}$$

Beraz, s = 6a.

Oharra

Biz, espazioan beraren ekuazio parametrikoek definiturik da goen kurba bat: $x = \varphi(t)$ $y = \Psi(t)$ $z = \chi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ izanik. Beraren arku baten luzera, planoan egin dugun prozesu paralelo baten bidez, ondoko hau dela ateratzen da:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\Psi'(t)\right]^2 + \left[\chi'(t)\right]^2}\ dt$$

16.8. Koordenatu polarretan emandako kurba-arku baten luzera

Izan bedi $\rho = f(\theta)$ koordenatu polarretan emandako kurba baten ekuazioa, non ρ erradioa eta θ angelu polarra baitira.

Koordenatu polarren eta castestarren arteko erlazioak $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ direnez, kurbaren expresioa kontutan hartuz,

$$x = f(\theta) \cos \theta \qquad y = f(\theta) \sin \theta$$

formulak lortzen dira.

θ parametrotzat hartzen badugu, aurreko expresioak kurbaren ekuazio parametrikoak bezala kontsidera daitezke; eta orduan badakigu luzera kalkulatzen.

Egin ditzagun, ba, θ-rekiko x eta y-ren deribatuak:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta$$

Orduan,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left[f'(\theta)\right]^2 + \left[f(\theta)\right]^2 = \rho'^2 + \rho^2$$

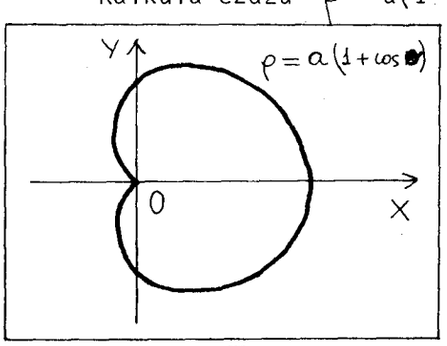
Beraz,

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\ d\theta$$

lortu nahi genuen bezala.

Adibidea

Kalkula ezazu $\rho = a(1 + \cos\theta)$ kardioidearen luzera.



θ angelua 0-tik π-raino joatean bilatutako luzeraren erdia lortzen denez,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\ d\theta =$$

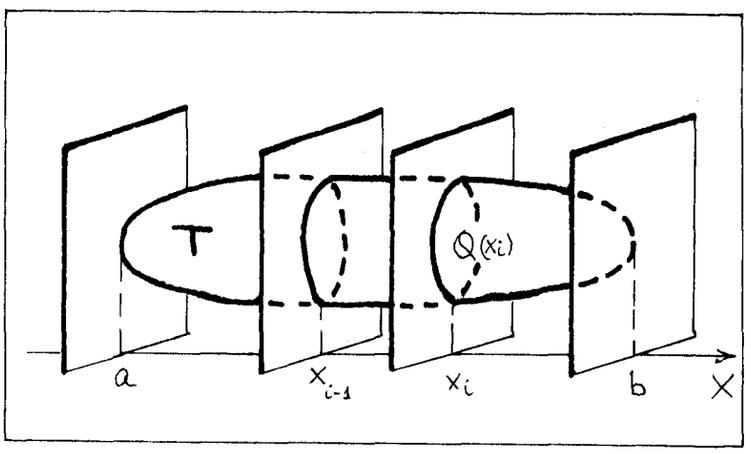
$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\ d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\ d\theta =$$

$$= 8a \sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

16.9. Sekzio paraleloen azaleren funtzioan, gorputzen bolumenaren kalkulua

Izan bedi gorputz bat, T, eta demagun OX ardatzaren perpen-

dikularra den plano batek ebakitako edozein sekzio baten azalera ezagutzen dela



Azalera hau x-en funtzioa da:

$$A = A(x)$$

Demagun A(x) x-en funtzio jarraia dela eta kalkula dezagun groputz honen bolumena.

$x = x_0 = a$, $x = x_1$, ..., $x = x_n = b$ planoak hartuz, gorputza xaflatan ebakita gelditzen da.

$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ tarte partzial bakoitzean edozein puntu, ξ_i, hartzen da eta $i = 1,2,\ldots,n$ balio bakoitzarako gorputz zilindriko bat eraikitzen da, non beraren sortzailea OX ardatzaren paraleloa baita eta T gorputzean $x = \xi_i$ planoak egindako sekzioan oinarritzen baita.

Zilindro honen oinarriaren azalera $A(\xi_i)$ $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ eta altuera Δx_i badira, beraren bolumena $A(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ izango da.

Beraz, zilindro guztien bolumena

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

da eta $\max \Delta x_i \longrightarrow 0$ denean, batura honen limitea existitzen baldin bada, emandako gorputzaren bolumena hauxe izango da:

$$e = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

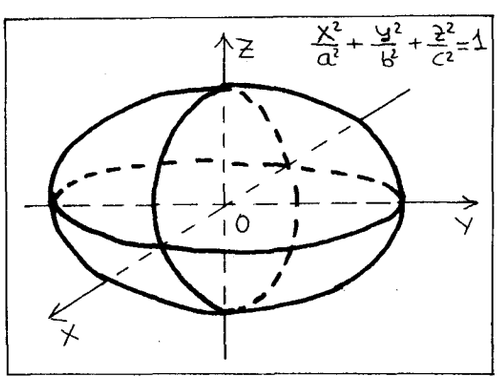
Gainera, e_n expresioa A(x) funtzio jarraiaren batura integrala da $a \leqslant x \leqslant b$ tartean, eta beraz, ba dago esandako limitea eta berau

$$e = \int_a^b A(x)\, dx$$

integral mugatuaren bidez adierazten da.

Adibidea

Kalkula ezazu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidearen bolumena.



OYZ planotik x distantziara eta esandako planoaren paraleloa den plano batek ebakitako sekzioa, ondoko elipse hau da:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

Hau da,

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1 ,$$

non beraren ardatzerdiak

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad \text{eta} \qquad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

baitira. Baina elipse honen azalera $\pi b_1 c_1$ denez,

$$A(x) = \pi b\, c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Eta elipsoidearen bolumena, e, hauxe da:

$$e = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc \ .$$

16.10. Biraketa-gorputzen bolumena

Izan bedi aABb trapezio kurbatuak sortutako biraketa-gorputza. $y = f(x)$ kurbak OX ardatzak eta $x = a$, $x = b$ zuzenek mugatzen dute trapezioa.

Kasu honetan, abzisa ardatzaren paraleloa den plano batek egindako edozein sekzio, zirkulu bat da, beraren azalera

$$A = \pi y^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

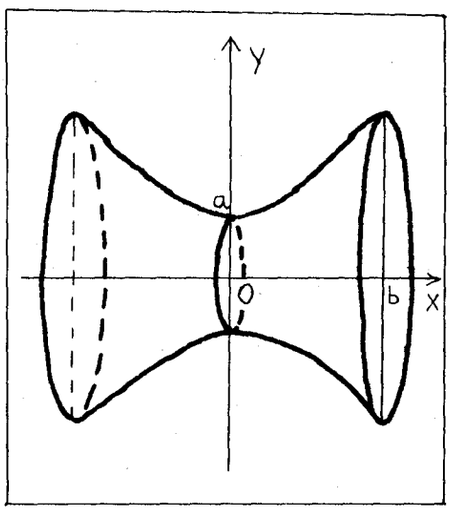
izanik.

Bolumenak kalkulatzeko formula generala aplikatuz, biraketa-gorputzen bolumena kalkulatzeko formula lortzen da; hau da,

$$e = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Adibidea

Kalkula ezazu OX inguruan biratzean, $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ katenarik $0 \leqslant x \leqslant b$ tartean sotuko gorputzaren bolumena.



$$e = \pi \frac{a^2}{2} \int_0^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2 dx =$$

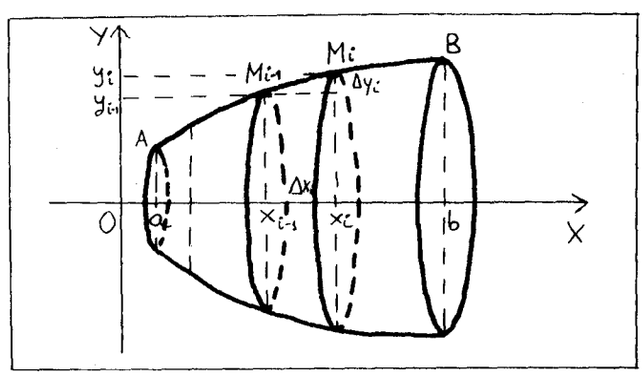
$$= \frac{\pi a^2}{4} \int_a^b \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \left[\frac{a}{2} e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2x/a}\right]_a^b =$$

$$= \frac{\pi a^3}{8} \left(e^{2b/a} - e^{-2b/a}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2} .$$

16.11. Biraketa-gorputzen azalera

Izan bedi OX ardatzaren inguruan $y = f(x)$ kurbaren birake tak sortutako gainazala. Kalkula dezagun $0 \leqslant x \leqslant b$ tartean gaina zal honen azalera



Demagun $f(x)$ funtzioa jarraia dela eta $[a,b]$ tarteko puntu guzti etan deribatu jarraiak dituela.

Marratz ditzagun AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ kordak, non haien luzerak Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n baitira.

Beraren biraketan Δs_i luzera duen kordak kono-enbor bat sortzen du, azalera ΔP_i izanik

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i$$

Baina,

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Lagrange-ren teorema aplikatuz,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \qquad x_{i-1} < \xi_i < x_i \text{ izanik.}$$

Beraz,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} - y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

Honelatan, ba, lerro poligonalak eratutako azalera ondoko hau izango da:

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} - y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] \sqrt{1 - f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \qquad (1)$$

Batura honen limitea, lerro poligonalaren alderik handienak zerorantz jotzen duenean, biraketa-gainazalaren azalera deitzen da.

(1) batura ez da $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$ funtzioaren batura integral bat, zeren $[x_{i-1}, x_i]$ tarteari dagokion batugaian tartearen zenbait puntu baitago: x_{i-1}, x_i, ξ_i halegia. Hala eta guztiz ere, baturaren limitea ondoko hau dela froga daiteke:

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) - f(x_i)\right] \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\ \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2\, f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\ \Delta x_i$$

edo

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$$

Adibidea

Kalkula ezazu $y^2 = 2px$ parabolak OX ardatzaren inguruan biratzean, $0 \leq x \leq a$ tartean sortzen duen paraboloidearen azalera

$$y = \sqrt{2px} \qquad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}$$

Eta aurreko formula aplikatuz,

$$P = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px}\ \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\ dx = 2\pi\sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x+p}\ dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\ \frac{2}{3\cdot 2}(2x+p)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

17. GAIA:

INTEGRAL INPROPIOAK

Integral inpropioak tarte infinitu batetan: Integral inpropio konbergente eta dibergenteak 275

Konbergentzia eta dibergentziarako baldintza nahikoak 277

Integral erabat konbergentea 279

Funtzio etenen integral inpropioak: Integral konbergente eta dibergenteak 280

Konbergentzia eta dibergentziarako baldintza nahikoak 282

Integral inpropio erabat konbergentea 283

17. G A I A

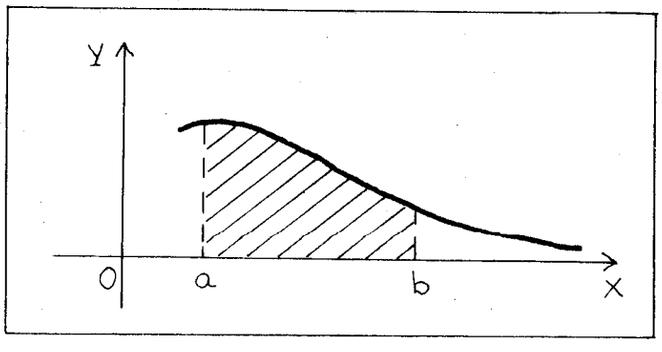
INTEGRAL INPROPIOAK

17.1. Integral inpropioak tarte infinitu batetan

Biz $f(x)$ funtzioa $[a, +\infty)$ tartean definitua eta jarraia. Kontsidera dezagun integral hau:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

a baino handiagoa den edozein b-tarako ($b > a$), integral honek zentzua du. Bestalde, b delakoa aldatzen denean, integralaren balioa ere aldatzen da. Azter dezagun nola aldatzen den integralaren balioa, $b \longrightarrow +\infty$ eran aldatzen denean.



17.1.1. Definizioa

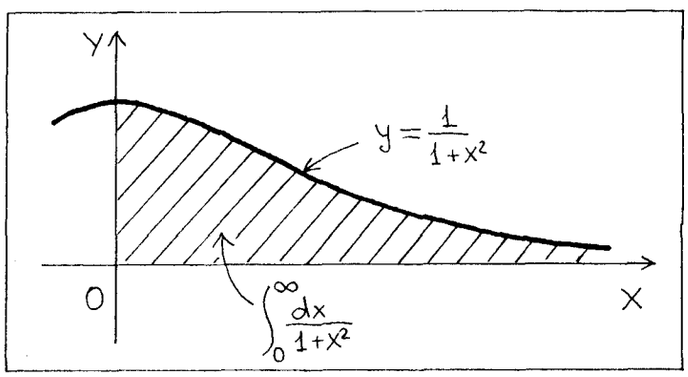
$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ finitua existitzen bada, limite hau $f(x)$ funtzioaren $[a, +\infty)$ tarteango integral inpropioa deitzen da, eta $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ adierazten. Beraz, definizioz zera dugu:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Kasu honetan, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioa existitzen dela edo konbergentea dela esaten da.

$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ finitua existitzen ez bada, ez dela $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioa existitzen edo dibergentea dela esaten da.

$f(x) \geq 0$ denean, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioaren esan gura geometrikoa hauxe da: $y = f(x)$ kurbaren, $x = a$ zuzenaren eta abzisa-ardatzen arteko barruti infinituaren azalera.



Era berean definitzen dira integral inpropioak beste tarte infinitu batzutan ere:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Azkeneko berdintza hau honela ulertu behar da: bigarren ataleko integral biak existitzen badira, lehen ataleko integrala existitzen da.

Adibidea

Kalkula dezagun, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integrala.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arc\,tg}\, x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arc\,tg}\, b = \frac{\pi}{2}$$

Kasu askotan, integral inpropio bat konbergente edo dibergente den jakitea nahikoa da. Kasu hauetarako, frogatu gabe bi teorema erabilgarri aipatuko ditugu.

17.1.2. Teorema

Suposa dezagun, edozein x-etarako ($x \geq a$),

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

desberdintzak betetzen direla.

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konbergentea bada, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ere konbergentea da, eta gainera:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Adibidea

Azter dezagun $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ integralaten konbergentzia.

$x \geq 1$ hartuko dugu.

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$$

Honelatan, ba, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ integrala konbergentea da eta beraren balioa 1 baino txikiagoa.

17.1.3. Teorema

Suposa dezagun, edozein x-etarako ($x \geq a$),

$$0 \leq g(x) \leq f(x)$$

desberdintzak betetzen direla.

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ dibergentea bada, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ere dibergentea da.

Adibidea

Azter dezagun $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ integralaren konbergentzia.

Erraz ikusten denez,

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

da. Baina,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty$$

Beraz, emandako integrala konbergentea da.

Azken bi teoremetan funtzio ez-negatiboen integral inpropio ak kontsideratu ditugu. Tarte infinitu batetan funtzioaren zeinua aldatzen den kasuetarako, ondorengo teorema dugu.

17.1.4. Teorema

$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ integrala konbergentea baldin bada, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrala ere konbergentea da. Kasu honetan, integrala erabat konbergentea dela esaten da.

Adibidea

Azter dezagun $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integralaren konbergentzia.

$\frac{\sin x}{x^3}$ funtzioaren zeinua aldakorra da.

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| \quad \text{eta} \quad x \geq 1 \implies \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}$$

eta $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Beraz, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ konbergentea denez, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ integrala ere konbergentea da; eta teoremaren arauera emandako integrala ere konbergentea da.

17.2. Funtzio etenen integral inpropioak

Izan bedi $f(x)$ funtzioa $[a,c)$ tartean definitua eta jarraia, baina $x = c$ puntua funtzioaren etengunea izanik.

$f(x)$ funtzioa $[a,c]$ tarte itxian jarraia ez denez,

$\int_a^c f(x)\,dx$ integrala ezin daiteke defini batura integralen limite bezala; limite honek zertan existitu beharrik ez duelako.

17.2.1. Definizioa

$x = c$ puntuan etena den $f(x)$ funtzioaren $\int_a^c f(x)\,dx$ integrala, honela definitzen da:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c^-} \int_a^b f(x)\,dx$$

Limite hau finitua izanik existitzen denean, emandako integral inpropioa konbergentea dela esaten da; kontrako kasuan, dibergentea dela.

$f(x)$ funtzioa $[a,c]$ tartearen ezkerreko muturrean (hau da, a puntuan) etena bada, orduan definizioaren arauera:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to a^+} \int_b^c f(x)\,dx$$

$f(x)$ funtzioa $[a,c]$ tarteko x_0 puntu batetan etena bada, orduan,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx$$

eta lehen atalaren integrala kónbergentea da, bigarren atalaren integral inpropio biak konbergenteak direnean.

Adibidea

Kalkula dezagun $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integrala.

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funtzioa etena da $x = 1$ puntuan; beraz,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1^-} (-2\sqrt{1-x})\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \left[-2\sqrt{1-b} - (-2)\right] = \lim_{b \to 1^-} (2-2\sqrt{1-b}) = 2.$$

Oharra

$[a,c]$ tartean $f(x)$ funtzioak etenguneak kopuru finitu batetan baditu -adibidez, a_1, a_2, ..., a_n puntuak- $[a,c]$ tartean $f(x)$ funtzioak duen integrala, honela definitzen da:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^{c} f(x)\,dx$$

Eta ezkerreko ataleko integrala konbergentea da, bigarren ataleko integral guztiak konbergenteak direnean. Bigarren ataleko integral bat dibergentea bada, orduan $\int_a^c f(x)\,dx$ integrala ere dibergentea da.

17.2.2. Teorema

Suposa dezagun, $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $[a,c]$ tartearen c puntuan etenak direla eta ondoko desberdintzak

$$g(x) \geq f(x) \geq 0$$

betetzen direla. Kasu honetan, $\int_a^c g(x)\,dx$ integrala konbergentea bada, orduan $\int_a^c f(x)\,dx$ integrala ere konbergentea da.

17.2.3. Teorema

Suposa dezagun, $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $[a,c]$ tartearen c puntuan etenak direla eta desberdintza hauk:

$$f(x) \geq g(x) \geq 0$$

betetzen direla. Kasu honetan, $\int_a^c g(x)\,dx$ integrala dibergentea bada, orduan $\int_a^c f(x)\,dx$ integrala ere dibergentea izango da.

17.2.4. Teorema

Demagun, $f(x)$ funtzioa bakarrik c puntuan etena dela, eta $[a,c]$ tartean hartzen dituen balioek zeinu aldakorra dutela. Kasu honetan, $\int_a^c |f(x)|\,dx$ integral inpropioa konbergentea bada, $\int_a^c f(x)\,dx$ integrala ere konbergentea izango da eta erabat konbergentea dela esaten da.

Adibidea

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$$ integrala konbergentea ote da?

$x = 0$ puntuan $\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}$ funtzioa etena da. Eta $\frac{1}{\sqrt{x}}$ funtzioarekin konparatuz,

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Gainera, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral inpropioa konbergentea da, zeren,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to 0^+} (2\sqrt{x})\Big|_b^1 =$$

$$= \lim_{b \to 0^+} (2 - 2\sqrt{b}) = 2 .$$

Beraz, teoremaren arauera, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$ integral inpropioa konbergentea da.

18. GAIA:

EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK

Ekuazio linealen sistemak. Definizioak 287

Matrizeak. Matrize-eragiketak. Emandako matrize bati dagozkion matrizeak eta matrize-motak 289

Ekuazio sistemen planteiamendua, era matrizialean 294

Gauss-en ezabatze-metodoa 295

Sistema homogenoak 301

18. G A I A

EKUAZIO LINEALEN SISTEMAK

18.1. Ekuazio linealen sistemak. Definizioak

a) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ eratako expresio batek, non a_1, a_2, ..., a_n eta b emandako konstanteak eta x_1, x_2, ..., x_n aldagaiak baitira, lehenengo graduko ekuazio algebraiko edo ekuazio lineal bat osotzen du.

x_1, x_2, ..., x_n aldagaiei ezezagunak, a_1, a_2, ..., a_n dela koei koefizienteak eta b-ri gai askatua deitzen zaie.

Adibideak: $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2$; $ex - y + 3z = -7$.

b) Ondoko era honetako ekuazio linealen multzo bati, n ezezagunetako m ekuazio linealen sistema deitzen diogu:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n = b_m \end{cases}$$

non behe-indizea lerroa eta ekuazioa zein den esateko erabiltzen baita eta goi-indizea, aldagaia zeinen koefizientea den adierazteko.

Adibidea:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

c) Ekuazio sistema baten emaitza, konstanteren multzo bat da, $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, konstante hauek, ezezagunen lekuan jarririk, ekuazio guztiak betetzen dituztelarik.

Adibidez, aurreko sisteman, $\left\{0, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right\}$ emaitza da.

d) Ekuazio linealen sistema batek, emaitza bat behintzat baldin ba du, bateragarria deitzen da.

Kontrako kasuan, hau da emaitzarik ez badu, sistema bateraezina deitzen da.

Adibideak: - Aurreko sistema, bateragarria da.

$$- \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$ sistema, bateraezina da.

e) Sistema bateragarri batek emaitza bakar bat baldin badu, determinatua deitzen da.

Emaitza bat baino gehiago badu, indeterminatua dela esanen dugu.

Adibidez, $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$ sistema bategarri indeterminatua da, zeren $\{3,4,1\}$ eta $\{2,-1,-2\}$, beraren emaitza bi baitira.

18.2. Matrizeak. Matrize-eragiketak. Emandako matrize bati dagozkion matrizeak eta matrize-motak

18.2.1. Definizioak

m lerrotan eta n zutabetan jarritako K gorputzeko elementuek osoturiko koadro bati, K gorputzaren gaineko m x n ordenako matrize errektangeluarra deitzen zaio. Hau da,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

Matrizeak adierazteko beste era bat, ondoko hau litzateke:

$$A = \left(a_i^j\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant m}}$$

i: lerroen zenbakia

j: zutabearen zenbakia

a_i^j , i lerroak eta j zutabeak biunibokoki finkatutako elementua.

1 x n ordenako matrizeak lerro-matrize deitzen dira. Bestalde, m x 1 ordenakoak zutabe-matrize deitzen dira. m = n bada, hots, lerroen kopurua eta zutabeena berdinak badira, matrizea n-ordenako matrize karratua deitzen da. Adibidez,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

18.2.2. Matrize-eragiketak

1. Definizioa. Izan bitez $m \times n$ ordena berbereko bi matrize errektangeluar, A eta B. (i,j) lekuan dauden A eta B-ren elementuen batura (i,j) elementutzat duen matrizea, A eta B matrizeen batura da.

Hots, $A = (a_i^j)$ eta $B = (b_i^j)$ badira,

$$A + B = (c_i^j) = (a_i^j + b_i^j)$$

Adibidea:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Oharra

Matrizeen batura, ordena berbereko matrizeen kasuan ez beste defini daiteke. $m \times n$ ordenako matrizeen multzoan, m eta n finkatuak izanik, batura barne-eragiketa da.

2. Definizioa. Izan bitez A matrize errektangeluarra eta $t \in K$ eskalar bat. (i,j) lekuan dagoen elementua, A-ren (i,j) elementua baino t bider handiagoa duen matrizeari, t bider A-ren biderkadura, $t \cdot A$, deituko diogu. Hau da,

$$t \cdot A = t \cdot (a_i^j) = (t\, a_i^j)$$

Adibidea:

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Oharrak

i) Matrize guztien multzoan, eskalar baten eta matrize baten arteko biderkadura kanpo-eragiketa da.

ii) $(\mathcal{M}(m,n), +, \cdot)$, K gorputzaren gaineko espazio bektoriala da.

3. Definizioa. Izan bitez m x n ordenako matrize bat, A, eta n x p ordenako beste bat, B. m x p ordenako eta ondoko eran osoturiko matrizeari, A eta B matrizeen biderkadura deituko diogu eta A x B idatziko

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^p \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1 & b_n^2 & \dots & b_n^p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1b_1^1 + a_1^2b_2^1 + \dots + a_1^nb_n^1 & \dots & a_1^1b_1^p + a_1^2b_2^p + \dots + a_1^nb_n^p \\ a_2^1b_1^1 + a_2^2b_2^1 + \dots + a_2^nb_n^1 & \dots & a_2^1b_1^p + a_2^2b_2^p + \dots + a_2^nb_n^p \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_m^1b_1^1 + a_m^2b_2^1 + \dots + a_m^nb_n^1 & \dots & a_m^1b_1^p + a_m^2b_2^p + \dots + a_m^nb_n^p \end{pmatrix}$$

Beste era batetan esanda:

$$\left(a_i^j\right)_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} \cdot \left(b_j^l\right)_{\substack{1 \le l \le p \\ 1 \le j \le n}} = \left(c_i^l\right)_{\substack{1 \le l \le p \\ 1 \le i \le n}}$$

non $c_i^l = \sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^l$ baita.

Adibidea:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Oharrak

i) A eta B biderka ahal daitezen, A-ren zutabeen kopurua eta B-ren lerroena berdinak izatea baldintza beharrezko eta nahikoa da.

ii) Matrize guztien multzoan horrela izan ez arren, n ordenako matrize karratuen multzoan, biderkadura barne-eragiketa da.

4. Definizioa. Bi matrizek (i,j) leku bakoitzean elementu berberak badituzte, berdinak dira

$$A = B \iff a_i^j = b_i^j \quad \forall\, i,j$$

18.2.3. Emandako matrize bati dagozkion matrizeak eta matrize-motak

1) n ordenako matrize karratu baten diagonal nagusia, esandako matrizearen $\{a_1^1, a_2^2, \ldots, a_n^n\}$ elementuen multzoa da. Adibidea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Diagonal nagusiaren azpian dauden elementu guztiak zero badira, matrizea goi-triangeluarra deitzen da.

Matrize karratu batetan diagonal nagusiaren gainean dauden elementu guztiak zero badira, matrizea behe-triangeluarra deitzen da.

Matrize karratu batek, diagonalean dauden elementuak izan ezik, beste guztiak nuluak baditu, diagonala deitzen da.

3) Bere elementu guztiak unitatea balio duten n ordenako matrize diagonala, unitate-matrizea deitzen da.

4) Elementu guztiak zero dituen matrize karratu bati matrize nulua deitzen zaio.

5) Emandako matrize batetan, lerroak eta zutabeak ordenatuki lekuz elkarraldatzen baditugu, matrize honen matrize iraulia lortzen da

$$A = (a_i^j) \implies \widetilde{A} = (a_j^i)$$

Propietateak:

i) $\widetilde{(\widetilde{A})} = A$

ii) $\widetilde{(A + B)} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$

iii) $\widetilde{(t \cdot A)} = t \cdot \widetilde{A}$

iv) $\widetilde{(A \cdot B)} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A}$

Adibidea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

6) Biz A n ordenako matrize karratua. n ordenako matrize karratua, A^{-1}, non $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ baita, A-ren matrize inbertsoa da.

Adibidea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) $\widetilde{A} = A$ bada, orduan A matrize karratua simetrikoa dela esaten da.

8) A matrize karratua antisimetrikoa da, baldin $\widetilde{A} = -A$ bada.

9) A matrize karratua ortogonala da, baldin beraren inbertsoa eta iraulia berdinak badira. Hau da, $A^{-1} = A$.

18.3. Ekuazio sistemen planteiamendua, era matrizialean

Biz n ezezagunetako m ekuazio linealen sistema bat:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{pmatrix}$$

koefizienteen matrizea sistemaren matrizea deitzen da.

Gai askatuen zutabe-matrizea $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ da.

Sistemaren matrizeari zutabe-matrize hau gehitzen badiogu, matrize zabaldua lortuko dugu.

$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ezezagunek eratutako bektore-zutabea hartzen badugu, orduan erraz ikusten da (1) ekuazio-sistema edo ondoko matrizeen biderkadura, (2), ematea gauza bera dela:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Era laburtu batetan,

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

Adibidez, $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ sistema eta $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

delakoa biderkadura matriziala baliokideak dira.

18.4. Gauss-en ezabatze-metodoa

Adibidea: Ebatz dezagun $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$ sistema.

1) Lehengo ekuazioan z askatzen da $z = -x - 2y$. Beste bi ekuazioetan z-ren balioaren ordez aurreko berdintzarena ipiniz, ondoko hau gelditzen zaigu:

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

2) Sistema berriaren bigarren ekuazioan x askatuz, $x = 3$, balioa lortzen dugu, eta balio hau beste ekuazioan ordezkatuz,

$$-3 + 3y = 0 \implies y = 1$$

3) Lortutako emaitzak beste ekuazioetan ordezkatzen dira

$$z = -3 - 2 \implies z = -5$$

Generalean n ezezaginetako m ekuazioatako sistema bat emanik,

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n = b_m \end{cases}$$

Gauss-en metodoaren erabilera, koefiziente bat, a_k^h, ez nulua duen ezezagun bat, x_k, askatzean datza.

Orduan, x_k ezezaguna h ekuazio algebraikoan askatzen da eta emaitza, beste $m-1$ ekuazioetan ordezkatzen.

Era honetan, n-1 ezezagunetako m-1 ekuaziotako sistema bat lortzen da, zeren x_k ezezaguna elimina egin baitugu.

Lortutako sisteman, berriro ere koefiziente ez nulua duen beste ezezagun bat eliminatzeko erabiltzen da metodoa.

Honelatan, ba, n-2 ezezagunetako m-2 ekuaziotako sistema bat lortzen da.

Prozesu hau errepikatuz, ekuazio-sistema bateragarria ala bateraezina den jakitera irits daiteke; eta, lehenengo kasuan, ebatzera ere.

1. Adibidea

Ebatz dezagun $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 6x - 11y + 13z = 3 \end{cases}$ delako sistema.

Lehenengo ekuazioan z askatzen da:

$$z = 1 - 3x + 2y$$

Balio hau beste bi ekuaziotan ordezkatuz,

$$\begin{cases} 11x - 5y = 3 \\ -33x + 15y = -10 \end{cases}$$

sistema lortzen da. Sistema berri honen lehenengo ekuazioan x askatzen bada,

$$x = \frac{3 + 5y}{11}$$

balioa lortzen da. Eta bigarrenean balio hau ordezkatuz eta eragiketak eginez,

$$-9 = -10$$

Berdintza hau emanezina denez, sistema bateraezina da.

2. Adibidea

Azter dezagun $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ x + 5y + 3z = 2 \\ 10x + 11y + 15z = 2 \end{cases}$ delako sistema.

Lehenengo ekuazioan z askatzen dugu eta ondoko hau lortzen da:

$$z = -2 - 2x + 3y$$

Beste ekuazioetan ordezkatzen badugu,

$$\begin{cases} -5x + 14y = 8 \\ -20x + 56y = 32 \end{cases}$$

sistema lortzen dugu. Sistema berriaren lehenengo ekuazioan y askatuz,

$$y = \frac{5x + 8}{14}$$

dugu, eta bigarrenean ordezkatuz,

$$32 = 32$$

Emaitza honek erredundantzia bat dagoela diozku. Eta honek zera esan nahi du: Hasierako sistemaren hirugarren ekuazioak ez duela ezezagunei buruz lehenengo bi ekuazioek ematen diguten informazioaz at beste ezer desberdinik ematen. Orduan,

$$\left.\begin{array}{l} z = -2 - 2x + 2y \\ y = \dfrac{5x + 8}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} z = -\dfrac{13}{14}x - \dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{5}{14}x + \dfrac{4}{7} \end{array}$$

gelditzen zaigu.

Hau da, sistema bateragarri indeterminatua da eta x delakoari balio partikularrak emanez, emaitza desberdin guztiak lortzen dira.

Gaussen metodoaren sistematizazioa, pibotearen erregelaren bidez egiten da:

1.- Sistemaren matrize zabaldua idazten da, dagozkion zutabeen gainean ezezagunen sinboloak jarriz.

2.- Pibote izango den koefiziente-matrizearen elementu bat hartuko dugu eta zirkulu baten bidez inguratuko.

Posible bada, +1 edo -1 den edo zero gehien duen zutabearen elementu bat hartuko dugu pibotetzat.

3.- Eliminatu nahi dugun koefizientearen lerroaren eta pibo terenaren artean eragiketa sinpleak eginez, pibotearen zutabearen elementu guztiak nulu bihurtuko ditugu.

4.- 3. pausoa emanik, pibotea duten lerroa eta zutabea kentzen dira, baztertzen den ekuazioa zein den esanez.

5.- Prozesua errepikatzen da.

Adibidea

Ebatz dezagun $\begin{cases} u + 3v + w - x = 7 \\ 2u - 3v - 2w = 7 \\ 5v - 3w + 2x = -17 \\ -3u + v + 4w = -5 \end{cases}$ sistema.

1.-
$$\left[\begin{array}{cccc|c} u & v & w & x & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -17 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

2.- $a_1^4 = -1$ pibotetzat hartuko dugu.

3.-

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u & v & w & x & \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -17 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{(3.\text{lerroa})+2(1.\text{lerroa})}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u & v & w & x & \\ 1 & 2 & 1 & \textcircled{-1} & 7 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 9 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

4.- Piboteari dagozkion lerro eta zutabea ezabatuko ditugu; hau da, $u + 2v + w - x = 7$ ekuazioari dagozkionak.

5.- Prozesua errepikatuz, $a_2^3 = -1$ elementua pibotetzat aukeratuko dugu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} u & v & w & \\ 2 & -3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & \textcircled{-1} & -3 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{1.a - 2x2.a} \left[\begin{array}{ccc|c} u & v & w & \\ -2 & -21 & 0 & 13 \\ 2 & 9 & \textcircled{-1} & -3 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{3.a + 4x1.a} \left[\begin{array}{ccc|c} u & v & w & \\ -2 & -21 & 0 & 13 \\ 2 & 9 & \textcircled{-1} & -3 \\ 5 & 37 & 0 & -17 \end{array}\right]$$

Piboteari dagozkion lerro eta zutabea ezabatzen dira, hau da, $2u + 9v - w = -3$ ekuazioa.

6.- Prozesua errepikatuz, $a_1^1 = -2$ elementua pibotetzat hartzen dugu

$$\begin{bmatrix} u & v & \\ \textcircled{-2} & -21 & 13 \\ 5 & 37 & -17 \end{bmatrix} \xrightarrow{2.a + \frac{5}{2}1.a} \begin{bmatrix} u & v & \\ -2 & -21 & 13 \\ 0 & -31/2 & 31/2 \end{bmatrix}$$

Piboteari dagozkion lerro eta zutabea ezabatuz, hau da, $-2u - 21v = 13$ ekuazioa kenduz,

$$-\frac{31}{2} v = \frac{31}{2}$$

gelditzen da. Halabeharrez,

$$v = -1, \quad u = 4, \quad w = 2, \quad x = -3.$$

18.5. Sistema homogenoak

n ezezagunetako m ekuaziotako sistema bat homogeno da, baldin eta gai askatuak zero badira:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = 0 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad . \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \ldots + a_m^n x_n = 0 \end{cases}$$

Era laburtuan:

$$A \bar{x} = \bar{0} .$$

19. GAIA:

DETERMINANTEAK ETA CRAMMER-EN ERREGELA

Matrize karratuaren determinantea. Propietateak 305

Determinante baten garapena. Goi-ordenako determinante baten kalkulua 312

Crammer-en erregela. Matrize inbertsoaren kalkulua 319

Matrize baten heina 323

Ekuazio linealetako sistemen eztabaida eta ebazpena 326

19. G A I A

DETERMINANTEAK ETA CRAMMER-EN ERREGELA

Ekuazio linealen sistema batzutan ekuazioen kopurua eta ezezagunen kopurua berdinak dira (m = n). Sistema hauk, sarritan, bateragarri eta determinatuak dira. Eta sistema hauen emaitzak formula general batez lortzeko ideian, determinanteen teoria jaio zen.

19.1. Matrize karratuaren determinantea. Propietateak

19.1.1. Matrize karratu baten determinantea

Definizioa

Matrize karratu bakoitzari eskalar bat lotzen zaio. Eskalar hori matrizearen determinantea deitzen da eta honela adierazten:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Egin ditzagun emandako matrizean n elementutako biderkadura posible guztiak. Biderkadura hauetatik, errendaka edo zutabe bakoitzeko elementu bat baino gehiago agertzen ez deneko haik har ditzagun. Azkenengo biderkaduretan goi-indizeen permutazioa eta behe-indizeena - klase berdinekoak badira, biderkadura bere zeinuarekin kontsideratu

ko dugu; klase desberdinetakoak badira aldiz, kontrako zeinuarekin. Eta biderkadura hauen batura egitean lortzen den zenbakia, emandako matrizearen determinantea da.

Definizioa

$\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoaren edozein ordenamendu, n indizeen permutazio bat da, eta $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ sinboloz adierazten.

Esate baterako, $\{1,2,3,4,5\}$ multzoaren permutazio posible bat, $\{3,2,4,5,1\}$ delakoa izan daiteke; kasu honetan, $i_1 = 3$, $i_2 = 2$, $i_3 = 4$, $i_4 = 5$ eta $i_5 = 1$ izanik.

Definizioa

Parmutazio bat ordena bikoitikoa dela esaten da, emandako permutaziora heltzeko $\{1,2,\ldots,n\}$ elementuen transposizio-kopuru bikoiti bat egin behar denean. Bestela, ordena bakoitikoa izango da.

Adibidea: $\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{(4)} \{2,3,4,5,1\} \xrightarrow{(1)} \{3,2,4,1,5\}$

Denetara 5 transposizio direnez, $\{3,2,4,1,5\}$ permutazioa klase bakoitikoa da.

Matrize baten determinantea kalkulatzeko, biderkadura bakoitzean behe-indize eta goi-indize bakoitza behin bakarrik sartzen denez (zutabe edo errekada berberako bi elementu agertu ezin direlako), biderkadura bakoitzaren elementuak berrordenatu egiten dira, behe-indizeek 1,2,...,n ordena arruntari jarrai dakizkion. Era honetan, biderkadura batekin hartu behar den zeinua zein den jakiteko, aski da goi-indizeen permutazioaren klasea lortzea (behe-in

zeen permutazioaren klasea bikoitia delako). Beraz, goi-indizeen permutazioa klase bikoitikoa bada, biderkadura bere zeinuarekin hartu behar da; klase bakoitikoa bada, kontrako zeinuarekin.

Kalkula dezagun, adibidez, $a_1^2\, a_2^5\, a_3^1\, a_4^4\, a_5^3$ biderkadurarekin hartu behar den zeinua

$$\{1,2,3,4,5\} \xrightarrow{(2)} \{2,3,1,4,5\} \xrightarrow{(3)} \{2,5,3,1,4\} \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \{2,5,1,4,3\}$$

Beraz, $1 + 3 + 2 = 7$ denez, zeinua negatiboa izango da. Honelatan, ba, determinante bateko edozein gai, ondoko erakoa da:

$$(-1)^I \; a_1^{i_1}\, a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}$$

non I delakoa gaoi-indizeen transposizio-kopurua den. Beraz, determinantearen formula ondoko hau izango da:

$$\det(A) = \sum_p (-1)^I \; a_1^{i_1}\, a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}$$

Oharra

Zenbat gai ditu n ordenako matrize karratu baten determinantearen garapenak? Goi-indizeekin egin daitezkeen permutazioak bezain beste; hau da, n!

Kasu partikularrak (n=2, n=3)

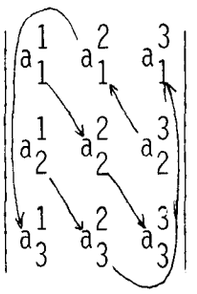
$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2 - a_1^2\, a_2^1$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 .$$

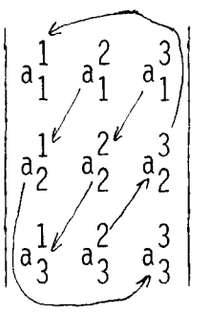
Sarrus-en erregela

n ordenako determinantearen garapena erraz gogoratzen da ondoko eskemaren bidez:

Gai positiboak:



Gai negatiboak:



Adibideak:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 43 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a\,d\,f$$

19.1.2. Determinanteen propietateak

1. Propietatea

Determinante baten balioa ez da aldatzen, ordena gordez beraien zutabeak errenkadak bezala jartzen direnean eta alderantziz; hots,

$$\det(A) = \det(\tilde{A})$$

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 13 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Oharra

Propietate honen arauera, determinanteen beste edozein propietatetan "errenkada" hitzaren lekuan "zutabe" hitza jar dezakegu. Beraz, determinante baten lerroez hitz egingo dugu, nahiz errenkadak nahiz zutabeak adierazi nahi ditugunean.

2. Propietatea

Determinante batetan, beste lerroen ordena gordez, bi lerrok beraien posizioa elkar aldatzen badute, determinantearen zeinua aldatzen da.

Frogapena

Dei dezagun A hasierako matrizea; eta matrize honetan h-garren eta k-garren zutabeen posizioak elkar aldatuz sortzen den matrizea, A*. Honela, det (A) delakoaren

$$(-1)^I \; a_1^{i_1} \; a_2^{i_2} \; \dots \; a_h^{i_h} \; \dots \; a_k^{i_k} \; \dots \; a_n^{i_n}$$

gaia

$$(-1)^{I^*} \; a_1^{i_1} \; a_2^{i_2} \; \dots \; a_k^{i_k} \; \dots \; a_h^{i_h} \; \dots \; a_n^{i_n}$$

expresioan bihurtzen da.

Gai bi hauek balio berbera dute baina aurkako zeinuarekin, zeren $\{ i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_k, \dots, i_n \}$ permutazioan p inber-

tsio badaude, permutazio honetatik $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_h, \ldots, i_n\}$ parmutaziora pasatzeko, $2l + 1$ inbertsio gehiago egin behar baitira, i_h eta i_k delakoen arteko elementuen kopurua l denean.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -13.$$

3. Propietatea

Matrize batek bi lerro berdin baditu, beraren determinantea nulua da.

Frogapena

Izan bedi A hasierako matrizea, eta dei dezagun A*, emandako matrizean lerro berdinen posizioak elkarraldatuz sortzen den matrizea.

2. propietatearen arauera,

$$\det(A) = -\det(A^*)$$

Baina $A = A^*$ denez, $\det(A) = 0$ dela ateratzen da.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Propietatea

Lerro bateko elementu guztiak λ zenbaki batez biderkatzen badira, determinantea ere λ zenbakiaz biderkaturik gelditzen da.

Frogapena

Lerro bateko elementu guztiak λ zenbakiaz biderkatu baditugu, determinante berriaren garapenaren gai bakoitza, ondoko eran idatz daiteke:

$$(-1)^I a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots \lambda a_h^{i_h} \dots a_n^{i_n} = \lambda \left[(-1)^I a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} \right]$$

Beraz,

$$\det (A^*) = \sum_p (-1)^I a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots \lambda a_h^{i_h} \dots a_n^{i_n} =$$

$$= \sum_p \lambda \left[(-1)^I a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} \right] =$$

$$= \lambda \sum_p (-1)^I a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} = \lambda \det (A).$$

Erregela praktikoa

Determinante batetan lerro bateko elementu guztiek faktore komun bat badute, faktore hori determinantetik kanpo atera daiteke.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Propietatea

Matrize batetan bi lerro paralelo elkarren proportzionalak badira, matrize honen determinantea nulua da.

Frogapena

Bi lerro proportzionalak badira, 4. propietatearen bidez, proportzionaltasun-faktorea determinantetik kanpo atera daiteke. Beraz, determinante berrian bi lerro berdin geratzen dira, eta 3. propietatearen arauera, emandako determinantea nulua dela ateratzen da.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 & 3 \\ 2\sqrt{2} & 4 & 3 \\ \sqrt{8} & 4 & 5 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

19.2. Determinante baten garapena. Goi-ordenako determinante baten kalkulua

19.2.1. Determinante baten garapena, beste determinante batzuren baturaren bidez emanik

Definizioa

Emandako n graduko determinante batetan, i-garren errenkada eta j-garren zutabea kenduz agertzen den n-1 graduko determinantea, a_i^j elementuaren minore osagarria deitzen da.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad M(a_1^3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 19.$$

Definizioa

$i + j$ zenbakia bikoitia denean a_i^j elementuaren minore osagarria bere zeinuarekin, eta $i + j$ zenbakia bakoitia denean kontrako zeinuarekin, a_i^j elementuaren adjuntua deitzen da.

a_i^j elementuaren adjuntua A_i^j sinboloz adierazten da. Esate baterako, aurreko adibidean $A_1^3 = 19$ da.

Ondoko propietateen bidez, n graduko determinantearen balioa ordena txikiagoko determinanteen batura batez adieraz dezakegula ikusiko dugu.

1. Propietatea

Lerro bateko elementu bakoitza beraren adjuntuaz biderkatuz eta biderkadura hauen batura eginez, determinantearen balioa lortzen da.

Esate baterako, lehen errenkada hartzen badugu

$$\det(A) = a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_1^2 + \ldots + a_1^n A_1^n$$

delako expresioa idatz dezakegu.

Frogapena

Propietate hau frogatzeko, lehenbizi, determinantearen garapenean a_1^1 elementua bere barnean daukaten gai guztien batura kalkulatuko dugu.

Dakigunez, determinantearen garapeneko gaiek $(-1)^I\ a_1^{i_1}\ a_2^{i_2} \ldots \ldots\ a_n^{i_n}$ forma dute. Beraz, a_1^1 elementua bere barnean daukaten gaien batura, ondoko hau da:

$$\sum_{p} (-1)^I\ a_1^1\ a_2^{i_2}\ a_3^{i_3} \ldots\ a_n^{i_n} = a_1^1 \sum_{p'} (-1)^{I'}\ a_2^{i_2}\ a_3^{i_3}\ \ldots\ a_n^{i_n}$$

non ezkerreko batura $2,3, \ldots, n$ zenbakien inbertsio guztiei hedatzeko zaien.

$1, i_1, i_2, \ldots, i_n$ expresioan 1 indizeak inbertsiorik inoiz formatzen ez duenez, $I = I'$ dela ikusten dugu; eta $\sum_{p'} (-1)^{I'}\ a_2^{i_2} \ldots\ a_n^{i_n}$ delako batura, lehen zutabe eta lehen errenkada kenduz sortzen den determinantearen garapena denez, lortzen ari garen baturaren balioa, $a_1^1\ A_1^1$ izango da. Beraz, ondoko berdintza dugu:

$$\sum_{p} (-1)^I\ a_1^1\ a_2^{i_2}\ a_3^{i_3} \ldots\ a_n^{i_n} = a_1^1\ A_1^1$$

Modu berean, $a_1^2, a_1^3, \ldots, a_1^n$ elementuetarako prozesu berbera egiten badugu,

$$\sum_{p} (-1)^I\ a_1^2\ a_2^{i_2}\ a_3^{i_3} \ldots\ a_n^{i_n} = a_1^2\ A_1^2$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad .$$

$$\sum_{p} (-1)^I\ a_1^n\ a_2^{i_2}\ a_3^{i_3} \ldots\ a_n^{i_n} = a_1^n\ A_1^n$$

formulak lortzen ditugu.

Eta expresio guzti hauen batura eginda, frogatu nahi genuen formula ateratzen da.

2. Propietatea

Lerro bateko elementu bakoitza h batugaiez osoturik badago, h determinanteren batura batetan deskonposa daiteke, ondoko eran:

$$\begin{vmatrix} r_1+s_1+\ldots+t_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ r_2+s_2+\ldots+t_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_n+s_n+\ldots+t_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ r_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ s_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} t_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ t_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Frogapena

Propietate hori $h = 2$ kasurako frogatuko dugu, baina berdin froga daiteke beste edozein h batetarako. Honelatan, ba, ondoko formula frogatu behar dugu:

$$\begin{vmatrix} r_1+s_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ r_2+s_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_n+s_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ r_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ s_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \quad (1)$$

Hasierako determinantea, baturez osotutako lerroaren arauera garatzen badugu,

$$\det(A) = (r_1+s_1)A_1^1 + (r_2+s_2)A_2^1 + \ldots + (r_n+s_n)A_n^1 =$$

$$= (r_1A_1^1 + r_2A_2^1 + \ldots + r_nA_n^1) + (s_1A_1^1 + s_2A_2^1 + \ldots + s_nA_n^1)$$

Ikus dezakegunez, parentesi hauk (1) formularen ezkerreko atalean agertzen diren determinanteen garapenak dira; beraz, frogatua dugu propietatea.

3. Propietatea

Lerro bati, beraren lerro paralelo bat λ konstante batez biderkatu ondoren batzen bazaio, determinantearen balioa ez da aldatzen. Hau da,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^i & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & \ldots & a_2^i & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^i & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1+\lambda a_1^i & \ldots & a_1^i & \ldots & a_1^n \\ a_2^1+\lambda a_2^i & \ldots & a_2^i & \ldots & a_2^n \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_n^1+\lambda a_n^i & \ldots & a_n^i & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Frogapena

$$\det(\bar{a}_1 + \lambda\bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n) =$$

$$= \det(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n) + \det(\lambda\bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n) =$$

$$= \det(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n).$$

Era berean, lerro bati, beste lerro paralelo batzu edozein faktorez

biderkatu ondoren lotzen bazaizkio, determinantearen balioa ez da aldatzen.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 121 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Propietatea

Lerro batek, eta faktore batzuz biderkatu ondoren beraren lerro paraleloen baturak elementu berberak badituzte, emandako determinantea nulua da.

Frogapena

Suposa dezagun, esandako lerro i-garren zutabea dela

$$\det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n) =$$

$$= \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \lambda_1\bar{a}_1 + \ldots + \lambda_r\bar{a}_r, \ldots, \bar{a}_n) =$$

$$= \lambda_1 \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) +$$

$$+\lambda_2 \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) + \ldots +$$

$$+\lambda_r \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r, \ldots, \bar{a}_n) = 0.$$

19.2.2. Goi-ordenako determinante baten kalkulu praktikoa

Goi-ordenako determinante baten balioa kalkulatzeko, definizioa erabili beharrean, aurreko propietateez baliatzea komeni da.

Ikus dezagun, ondoko determinantea nola kalkula daitekeen

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 21 & 43 & 47 & 82 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 13 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 20 & 40 & 40 & 80 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 13 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 13 & 12 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 80 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1.280 .$$

Determinante bat kalkulatzeko, ezin daiteke motodo zehatz bat eman; hala eta guztiz ere, erregela batzu eman daitezke:

1.- Lerroak sinplifikatzea, determinantean zenbaki errazak gera daitezen.

2.- Pibote egoki bat aukeratzea eta pibote honen lerroko elementuak zero egitea.

3.- Piboteaz eta zeroez osotutako lerroaren bidez determinantea garatzea.

Pauso hauk eman ondoren lortzen den determinantea, ordena txikiagokoa da, eta determinante berri honi prozesu berbera aplikatzen zaio.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 12 & 10 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 & \textcircled{-1} & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & 9 & 2 & 10 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 & \textcircled{-1} & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 23 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 12 & 23 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -200.$$

19.3. Crammer-en erregela. Matrize inbertsoaren kalkulua

n ordenako determinantearen kasuan egindako lerro batetako elementuen bidezko garapenak, n ezezagunetako n ekuazio linealen sistemak eliminatzeko metodoa ematen du. Ateratzen diren formulak, Crammer-en formulak deitzen dira.

Azken batez, formula hauk bilatzea edo n ordenako A matrize karratuaren matrize inbertsoa bilatzea, gauza bera da.

n ezezagunetako n ekuazio linealen ondoko sistema

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad .. \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = b_n \end{cases}$$

forma matrizialean idatziz, hauxe geratzen da:

$$A\,\bar{x} = \bar{b}$$

A matrizearen matrize inbertsoa, A^{-1}, kalkulatu ahal badugu, aurreko ekuazioaren atal biak A^{-1} matrizez ezkerretik biderkatuz,

$$A^{-1}(A\,\bar{x}) = A^{-1}\,\bar{b}$$

$$(A^{-1}.\,A)\,\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}$$

$$I\,\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}$$

Eta azken expresio honek, sistemaren emaitzak ematen dizkigu.

Definizioa

Demagun n ordenako A matrize karratua. $\widetilde{A}$ matrize iraulian elementu bakoitza beraren adjuntuaz ordezkatzen badugu, n ordenako matrize berri bat lortzen dugu, A matrizearen matrize adjuntua deritzona.

Esate baterako, $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$ matrizearen matrize adjuntua, $\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$ delakoa da.

Matrize inbertsoaren kalkulua

Demagun, n ordenako matrize bat, A, dugula. A-ren matrize adjuntuaren elementu bakoitza det (A) zenbakiaz zatitzen bada, A^{-1} matrize inbertsoa lortzen da.

Beste era batetan esanda:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_1^1}{|A|}, & \frac{A_2^1}{|A|}, & \dots, & \frac{A_n^1}{|A|} \\ \frac{A_1^2}{|A|}, & \frac{A_2^2}{|A|}, & \dots, & \frac{A_n^2}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_1^n}{|A|}, & \frac{A_2^n}{|A|}, & \dots, & \frac{A_n^n}{|A|} \end{pmatrix}$$

Azkenengo matrizea A matrizearen matrize inbertsoa dela frogatzeko, aski da

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

berdintzak betetzen direla ikustea.

Oharra

n ordenako A matrize batek matrize inbertsoa eduki dezan, baldintza beharrezkoa eta nahikoa $|A| \neq 0$ izatea da.

Adibidez, kalkula dezagun $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen matrize inbertsoa.

$A_1^1 = 2 \qquad A_1^2 = -4 \qquad A_1^3 = 2$

$A_2^1 = -2 \qquad A_2^2 = 5 \qquad A_2^3 = -1 \qquad |A| = 2$

$A_3^1 = -2 \qquad A_3^2 = 4 \qquad A_3^3 = 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5/2 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Adibidea: Kalkula dezagun matrizialki ondoko sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 7 \\ 2x + 3y + z = -5 \\ -2x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Matrizialki:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 11 & 7 & 1 \\ -10 & 2 & -3 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 11 & 7 & 1 \\ -10 & 2 & -3 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 43 \\ -83 \\ 48 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{43}{23} \; ; \quad y = -\frac{83}{23} \; ; \quad z = \frac{48}{23}$$

Determinante ez-nuluko n ezezagunetako n ekuazio linealen sistemek, emaitza bat bakarra dute. Kasu honetan, koefiziente-matrizearen determinantean ezezagun baten koefiziente-zutabea gai askatuen zutabeaz ordezkatzen badugu, eta atera dugun determinantea koefiziente-matrizearen determinanteaz zatitzen badugu, esandako ezezagunaren balioa lortzen da.

Honelatan, ba,

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 ,\ldots, b_1 ,\ldots, a_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 ,\ldots, b_n ,\ldots, a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 ,\ldots, a_1^i ,\ldots, a_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 ,\ldots, a_n^i ,\ldots, a_n^n \end{vmatrix}} \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Adibidez, ebatz dezagun ondoko sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 2x + 2y + z = -1 \\ 16x + 11y - z = 7 \end{cases}$$

$$|A| = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 11 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 5/2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 16 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 16 & 11 & 7 \end{vmatrix}}{2} = 0$$

19.4. Matrize baten heina

Definizioa

Demagun m x n ordenako matrize errektangeluarra (A). A matrizearen errenkada edo zutabe batzu kenduz geratzen diren elementuen

determinantea, emandako matrizearen minorea deitzen da.

Definizioa

A matrizearen heina h dela esango dugu, A matrizearen gutxienez h ordenako minore ez-nulu bat existitzen denean, h baino ordena handiagoko minore guztiak nuluak izanik.

h ordenako edozein minore ez-nulu, minore nagusia deitzen da.

Heinaren kalkulua

Suposa dezagun, A matrizean p ordenako α minore ez-nulu bat lortu dugula; beraz, A matrizearen heina p edo p baino handiagoa izango da.

α minorean ez dagoen errenkada bat finkatzen dugu. α minoreaz, finkatutako errenkadaz eta α minorean ez dagoen zutabe bakoitzaz osotutako determinanteak kontsideratuko ditugu. Determinante guzti hauek nuluak badira, ez dugu zertan kontsideratu behar, A matrizearen heina lortzeko finkaturiko errenkada.

Beste errenkaden kasuan modu berean jokatu ondoren ateratzen diren determinante guztiak nuluak badira, A matrizearen heina p zenbakia da.

Bestela, determinante hauetariko bat nulua ez bada, beraren ordena p+1 denez, A matrizearen heina p+1 edo p+1 baino handiagoa izango da.

Lortu dugun p+1 ordenako minore honi, α minorearekin egin dugun prozesua aplikatzen zaio. Eta prozesu hori behar dugun bezain beste bider aplikatzen da.

Adibidea:

Kalkula dezagun $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

3. errenkada 1. errenkadaren konbinazio lineala denez, A matrizearen heina kalkulatzeko orduan ez du eraginik; beraz, errenkada hori elimina egin daiteke, eta ondoko matrizea dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. eta 2. zutabeak proportzionalak direnez, 2. zutabea elimina egin daiteke, eta ondoko matrizea geratzen da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ determinantea bigarren ordenako minore ez nulu bat da. Eta aztertu behar ditugun hirugarren ordenako minoreak, ondoko hauk dira:

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinante biak nuluak direnez, emandako A matrizearen heina, 2 da.

19.5. Ekuazio linealetako sistemen eztabaida eta ebazpena

Sistema baten eztabaida

Kontsidera dezagun, era matrizialean emanda, n ezezagunetako m ekuazio linealen ondoko sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistema honen matrizea A deituko dugu, eta matrize zabaldua, A' .

"Ekuazio linealetako sistema bat bateragarria da, baldin eta soilik baldin sistemaren matrizeak eta matrize zabalduak hein berbera badute".

"Aurreko baldintza betetzen bada, eta gainera, ezezagunen kopurua eta heina berdinak badira, emandako sistema, bateragarria eta determinatua izango da".

"A eta A' matrizeek hein berbera badute, baina heina ezezagunen kopurua baino txikiagoa bada, emandako sistema, bateragarria eta indeterminatua izango da".

$r(A) \neq r(A') \implies$ sistema bateraezina.

$r(A) = r(A') = r$ eta
- $r = n \implies$ sistema bateragarri determinatua
- $r < n \implies$ sistema bateragarri indeterminatua

Oharra

Sistema homogeneotan $r(A) = r(A')$ baldintza beti betetzen da; zeren A' matrizea lortzeko A matrizeari zeroez osotutako zutabe bat gehitzen baitzaio, eta honek ez baitu matrizearen heina aldatzen.

"$r(A) = r(A') = n$ bada, sistema homogeneoa bateragarria eta determinatua da; beraz, beraren emaitza bakarra, berehalakoa da".

"$r(A) = r(A') < n$ bada, sistema homogeneoak berehalako emaitzatik aparte beste emaitza batzu edukiko ditu". (Kasu hau interesgarriena izango da).

Sistema baten ebazpena

Koefizienteen matrizearen determinantea nulua ez denean, hau da, matrize honen heina n denean, n ezezagunetako n ekuazio linealen sistema bat, Crammer-en erregeleaz ebatz dezakegula ikusi dugu.

Orain, metodo general bat ikusiko dugu, n ezezagunetako m ekuazio linealen edozein sistema ebazteko.

Har dezagun n ezezagunetako m ekuazio linealen sistema bat, non $r(A) = r(A') = r$ baldintza betetzen den.

1) Heina kalkulatu dugunean, A matrizean r ordenako minore ez-nulu bat behintzat aurkitu dugu. Orduan, minore honetan parte hartzen ez duten errenkadak A matrizetik kenduko ditugu; hau da, emandako sistematik errenkada hauei dagozkien ekuazioak kenduko ditugu.

2) Sistemaren ezezagunak, zeinen koefizienteak aipaturiko r ordenako minorean parte hartzen ez duten, gai askatuen atalera pa-

satzen dira. Eta sistemaren bigarren atalean agertzen den guztia, gai askatu bezala kontsideratzen da.

Honelatan, ba, r ezezagunetako r ekuazio linealen sistema bat lortu dugu, sistema berri hau eta emandako sistema baliokideak izanik.

3) Sistema berri hontan, ezezagunen kopurua eta, halaber, koefizienteen matrizearen heina r da. Sistema honen ezezagunak ezezagun nagusiak deitzen dira eta beraren ekuazioak, ekuazio nagusiak. Crammer-en erregela erabiliz, ezezagun nagusien balioak, beste ezezagunen funtzioan lortzen dira.

Adibidea:

$$\begin{cases} x + 3y + 6z + t = 0 \\ -x + y + 2z - t = 2 \\ 3x + y + 2z + 3t = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$r(A) = r(A') = 2 < 4 \implies$ sistema bateragarri indeterminatua.

1) Hirugarren ekuazioa eliminatuz,

$$\begin{cases} x + 3y + 6z + t = 0 \\ -x + y + 2z - t = 2 \end{cases}$$

2) Ezezagun eznagusiak eskuineko atalera pasatuz,

$$\begin{cases} x + 3y = -6z - t \\ -x + y = 2 - 2z + t \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |B| = 4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6z - t & 3 \\ 2 - 2z + t & 1 \end{vmatrix}}{4} = -t + 3/2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6z - t \\ -1 & 2 - 2z + t \end{vmatrix}}{4} = -2z + 1/2$$

t eta z direlakoak edozein zenbaki erreal izan daitezke; eta t-ren eta z-ren balio finko bakoitzerako, aurreko formulak erabiliz, x-en balio bat eta y-ren beste bat lortzen direnez, emandako sistemaren emaitzen kopurua, infinitua da.

20. GAIA:

KOADRIKAK

Koadrika baten definizioa 333

Elipsoidea 333

Horri bateko hiperboloidea 335

Horri biko hiperboloidea 336

Paraboloide eliptikoa 337

Paraboloide hiperbolikoa 338

Gainazalak: bigarren ordenako konoa eta zilindroa 339

20. G A I A

KOADRIKAK: ELIPSOIDEAK, HIPERBOLOIDEAK ETA PARABOLOIDEAK

20.1. Definizioa

Biz E, Euclides-en espazio tridimensionala (x,y,z) koordenatu errektangeluarren sistema batekin.

(x_1,y_1,z_1) hirukotea x, y eta z aldagaien bigarren graduko ekuazio baten edozein emaitza bada, $P(x_1,y_1,z_1)$ puntuen multzoa *bigarren graduko gainazala* edo *koadrika* deitzen da.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0$$

Adibidez, $2xy + 3y^2 - 5x + 8z = 0$.

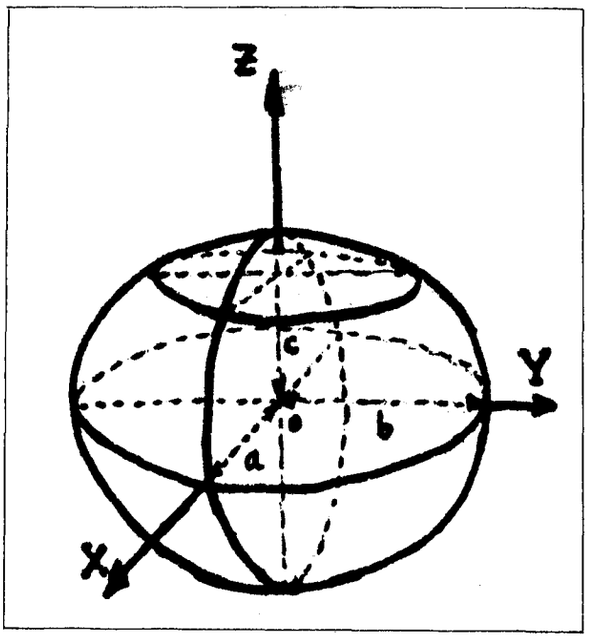
20.2. Definizioa

Koordenatu errektangeluarren sistema cartestar batetan ondoko ekuazioak adierazten duen gainazala, *elipsoidea* deitzen da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ekuazio hori elipsoidearen ekuazio kanonikoa deitzen da.

Adierazpen grafikoa:



Elipsoidearen ardatzerdiak a, b eta c dira. OXY plano koordenatuaren plano paraleloek (z = k erako ekuazioa dutenek) elipsoidea ebakitzean, elipseak agertzen dira

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} = 1$$

$a' = a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$ eta $b' = b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$ deitzen baditugu,

ondoko ekuazio hau dugu:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

beraz, a' eta b' ardatzerdidun elipsearen ekuazioa.

Era berean, elipsoidea XOZ edo YOZ plano koordenatuaren plano paraleloez ebakitzean ere, elipseak ateratzen dira.

a, b eta c zenbakietariko bi berdinak badira, esate baterako, a = b bada, elipseak zirkunferentziatan bihurtzen dira eta elipsoidea, elipse batek beraren ardatz batekiko biraketaz sortzen duen gainazala dela kontsidera dezakegu. Biraketazko elipsoidea deitzen da. a = b = c den kasuan, elipsoidea esfera da.

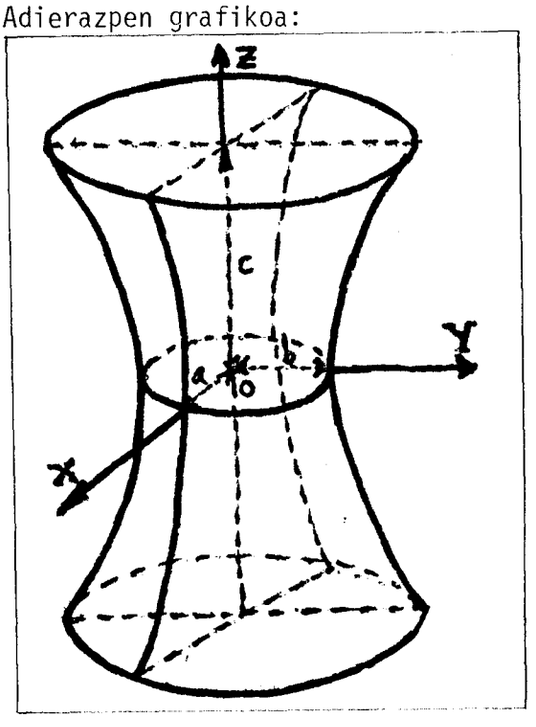
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ ekuazioak ez du irudi errealik adierazten. Analogiaz, elipsoide irudikorraren ekuazioa deitzen da.

20.3. Definizioa

Koordenatu-sistema errektangeluar batetan ondoko ekuazioak adierazten duen gainazala, horri bateko hiperboloidea deitzen da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Adierazpen grafikoa:



a, b eta c zenbakiak horri bateko hiperboloidearen ardatzerdiak deitzen dira.

Horri bateko hiperboloidea XOY plano koordenatuaren plano paraleloez ebakitzean sortzen diren sekzioak, elip

seak dira. Hiperboloidea $z = 0$ planoaz ebakitzean elipsoide haue tariko txikiena lortzen da.

OX ardatza bere barnean daukaten planoez ebakitzean lortzen diren sekzioak, hiperbolak dira.

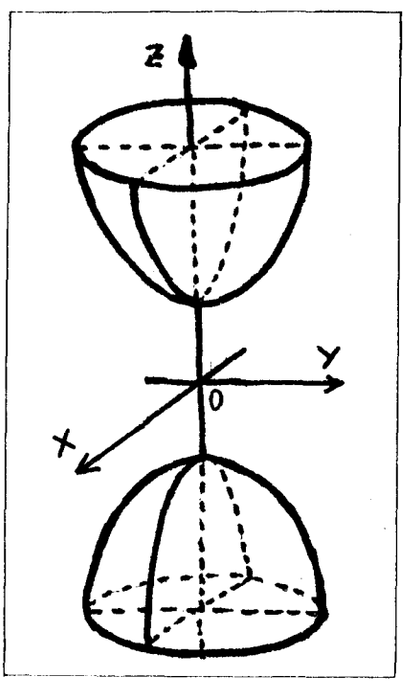
a, b eta c eskalarretariko bi berdinak badira, sekzioak OX ardatzean zentrua duten zirkunferentziak dira, eta horri bateko hiperboloidea hiperbola batek beraren ardatz batekiko biraketaz sortzen duen gainazala dela kontsidera dezakegu.

20.4. Definizioa

Koordenatu-sistema errektangeluar batetan ondoko ekuazioak adierazten duen gainazala, horri biko hiperboloidea deitzen da.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Adierazpen geometrikoa:



a, b eta c ardatzerdiak dira. Irudian c ardatzerdia soilik errepresentatzen dugu.

Horri biko hiperboloidea OX ardatza bere barnean daukaten planoez ebakitzean, hiperbolak lortzen dira.

XOY plano koordenatuaren plano paraleloez ebakitzean sortzen diren sekzioak, elipseak dira.

a, b eta c eskalarretariko bi berdinak direnean, sekzioak zirkularrak dira, eta horri biko hiperboloidea hiperbola batek beraren ardatz batekiko errotazioz sortzen duen gainazala dela kontsidera daiteke.

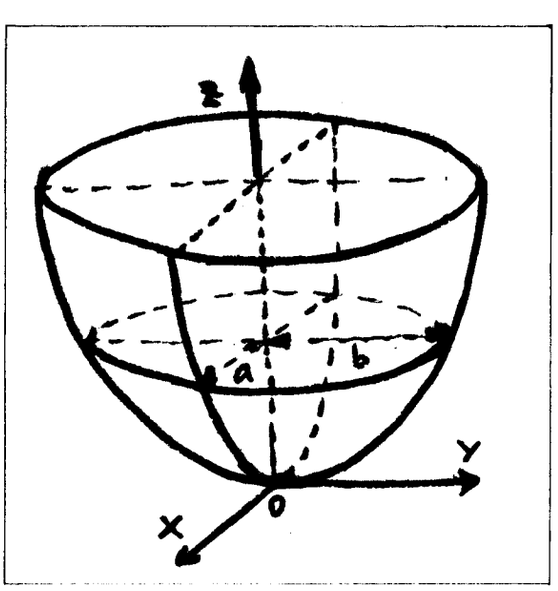
20.5. Definizioa

Koordenatu-sistema errektangeluar batetan ondoko ekuazioak adierazten duen gainazala, paraboloide eliptikoa deitzen da

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \qquad (p > 0,\ q > 0)$$

Hori da paraboloide eliptikoaren ekuazio kanonikoa.

Adierazpen grafikoa:



Koordenatuen jatorrizko puntua paraboloidearen erpina deitzen da, eta p,q zenbakiak, parametroak.

Paraboloide eliptikoa OX bere barnean daukaten planoez ebakitzean, parabolak lortzen dira.

XOY planoaren plano paraleloez ebakitzean, elipseak. p = q denean, OZ ardatzean zentrua duten zirkunferentziak lortzen dira; eta hiper

boloidea parabola batek bere ardatzekiko biraketaz sortzen duen gainazala dela kontsidera daiteke.

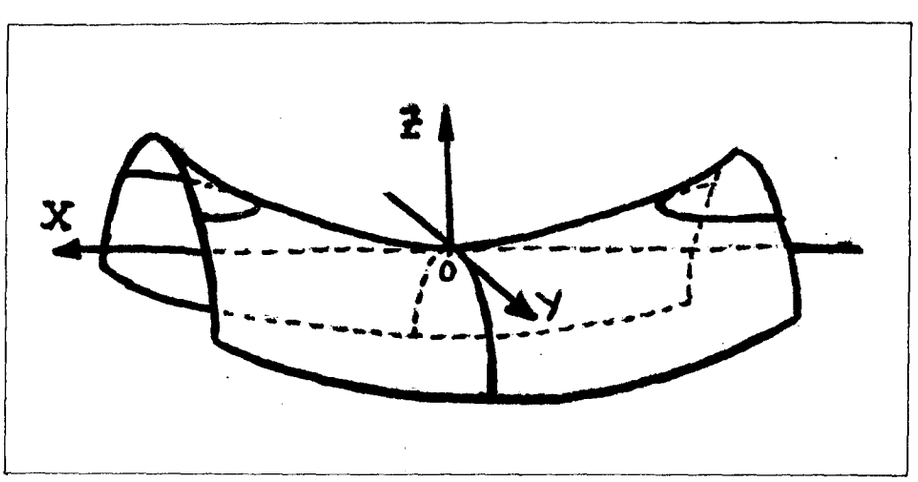
20.6. Definizioa

Koordenatu-sistema errektangeluar batetan ondoko ekuazioak adierazten duen gainazala, paraboloide hiperbolikoa deitzen da:

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \qquad (p > 0,\ q > 0)$$

eta expresio hori paraboloide hiperbolikoaren ekuazio kanonikoa da.

Adierazpen grafikoa:



Koordenatuen jatorrizko puntua paraboloidearen erpina da, eta p, q zenbakiak parametroak. "zela" baten antzekoa da.

OZ ardatza bere barnean daukaten planoez ebakitzean sortzen diren sekzioak, parabolak dira.

YOZ planoaren plano paraleloez ebakitzean, parabolak lortzen dira.

XOY planoaren plano paraleloez ebakitzean, hiperbolak lortzen dira.

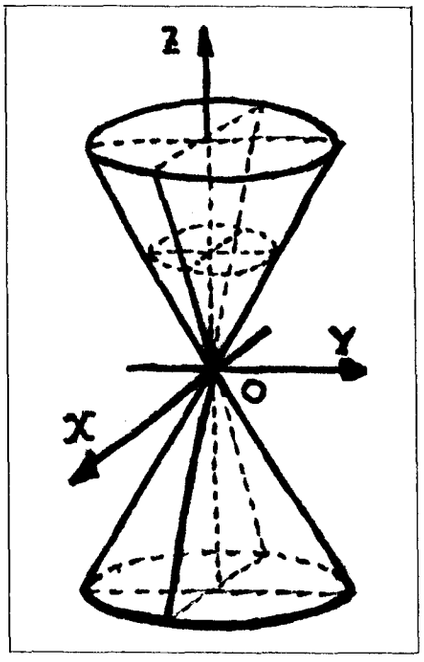
GAINAZAL KONIKOAK, ZILINDRIKOAK ETA BIRAKETA

20.7. Definizioa

Koordenatu errektangeluarren sistema cartestar batetan ondoko ekuazioak adierazten duen gainazala, bigarren ordenako konoa deitzen da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Adierapen grafikoa:



OZ ardatza bere barnean daukaten planoez ebakitzean bi zuzen lortzen dira.

XOY planoaren plano paraleloez ebakitzean, elipseak agertzen dira. Baina a = b dugunean, zirkunferentziak agertzen dira, eta konoa zirkularra deitzen da.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ ekuazioak (0,0,0) puntu erreal bakarra adierazten du, eta ekuazioa kono irudikorraren ekuazioa deitzen da.

20.8. Definizioa

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ ekuazioak koordenatu errektangeluarren sistema cartestar batetan adierazten duen gainaza

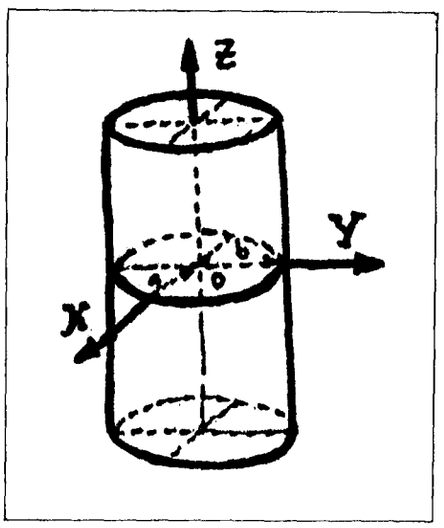
la, bigarren ordenako zilindroa deitzen da.

Hiru motatako zilindroak existitzen dira:

1. Zilindro eliptikoa

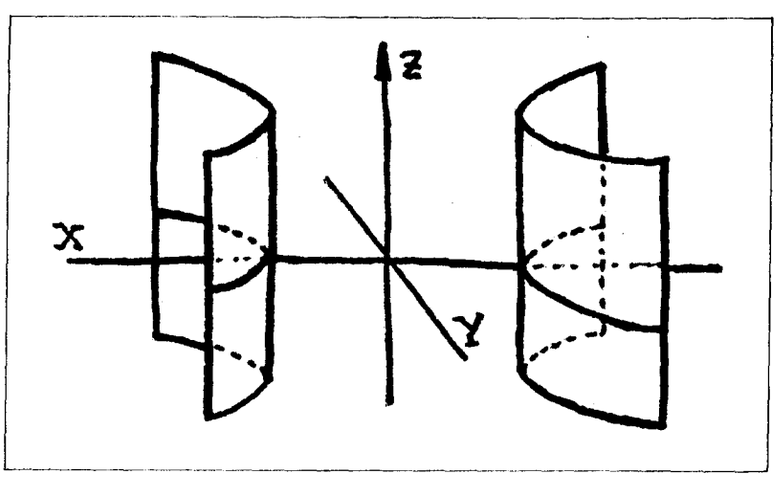
Beraren ekuazioa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erakoa da.

a = b denean, zilindroa zirkularra deitzen da



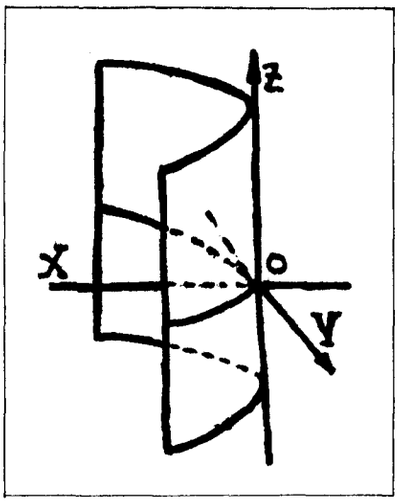
2. Zilindro hiperbolikoa

Beraren ekuazioa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erakoa da.



3. Zilindro parabolikoa

Beraren ekuazioa $y^2 = 2px$ erara laburbil daiteke.



Ekuazioaren lehen atala lehen graduko bi faktoreren biderkadura bada, orduan, zilindroa plano bikote batetan endakatzen du.