



FISIKA GENERALA II

IRUINEA 1979

UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA
IRUNEA 1979

FISIKA. GENERALA II

FISIKA GENERALA (II)

EGILEAK :

J. Egiguren

J.R. Etxebarria

I. Lasa

P. Ugalde

1.978-79 ikasturtea. Lejoa

H I T Z A U R R E A

Lan hau lejoako Zientzi Fakultatean burutu da 1978-79 ikasturtean zehar, eta ihaz hasiriko lanaren jarraipena da.

Kimikazko espezialitateko lehen ikasmailako Fisika Generaleko programa hartu dugu abiaburu bezala, eta ihazkoan lehen lau hilabeteetako gaiari erantzun bagenion, oraingo - honetan bigarren lau hilabeteetakoari erantzutera saiatu gara, modu honetan programa osoa bete dugularik.

Bigarren tomo hau, amankomuneko lanaren fruitu da. Urte osoan zehar eramandako mintegi batetan bildu izan ditugu erizpideak eta gaiak; eta progresiboki idatziz joan gara. Guztion artean eginiko gaiak zuzenduz eta bateratuz prestatu dugu, ba, materiale hau. Ba dakigu jakin, osoa ez dena eta hutsuneak ere ba dituen; baina oinarritzko kontsultabi-burua izateko asmoz prestatu dugularik, lehen pauso batetan behintzat helburu hori beteko duelakoan gaude. Eta pozez kaleratzen dugu, etorkizun laburrean astindu, osotu eta hobetu egindo delako esperantzaz.

Oraingoz ez dugu liburuan ia problemarik ez ariketarik sartu. Dena den, hurrengo urteetako mintegietarako lan posi-ble bat horixe izan daiteke, eta beharbada datorren ikastur-tean beteko dugu hutsune hori.

Bukatu aurretik eskerrak eman nahi dizkiogu Mari Carmen Lopez Irazu andereari, pazientzia sinesgaitzez originalak makinatu dituelako eta bai halaber Marfa Victoria Garde idazka-riari, azken ukituak egiten lagundu digulako.

Lan hau Udako Euskal Unibertsitatean aurkezteko pentsa-tua izan da eta eskerrik beroenak ematen dizkiogu erakunde

honi, beraren argitarapenerako egin duen kudeantzagatik.

Benetan uste dugu, erakunde horri esker, Euskal He
rriak behar duen Unibertsitate euskalduna ernetzen ari
dela.

Oinarrizko lan honek jarraitzaile asko eta on edu
kiko ahal ditu!

Bilbon, 1.979.eko ekainaren 7 an

EGILEEK

IV

A U R K I B I D E A

HITZAURREA

HAMAIKAGARREN GAIA : FLUIDOEN MFKANIKA 1

Fluidoan definizioa. Fluidoan sailkapena. Biskositatea. Presio Hidrostatikoa. Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa. Flotazioaren arazoa. Fluxu-moetak. Reynolds-en zenbakia. Kontinuitatearen -ekuazioa. Higiduraren ekuazioa korrante-linea batetan. Bernouilli-ren teorema. Energiaren ekuazioa. Energiaren ekuazioaren generalizazioa. Momentu linealaren ekuazioa.

HAMABIGARREN GAIA : HIGIDURA OSZILAKORRA..... 30

Indargetzerik gabeko oszilatzaile harmonikoa. Bibrapenaren energia. Oszilapenen konposaketa. Bilakabide disipakorrak. Oszila-tzaile indargetua. Oszilapen bortxatuak. Erresonantziak. Oszila-tzaile baten inpedantzia.

HAMAHIRUGARREN GAIA : UHIN-HIGIDURA..... 54

Uhin-higiduraren deskripzio matematikoa. Uhin-higiduraren ekuazio diferentziala. Uhin-Moetak. Uhin elastiko longitudinalak barra batetan zehar. Soka batetan gertatzen diren uhin transbertsa lak. Bi eta hiru dimentsiotako uhinak. Uhin-higidura eta momentu linealaren eta energiaren hedapena. Talde-abiadura. Doppler efektua.

HAMALAU GARREN GAIA : INTERAKZIO GRABITATORIOA..... 81

Masa inertziala eta masa grabitazionala. Baliokidetasunaren prin-tzipioa. Grabitazioaren lege unibertsala. Cavendish-en balantza. Kepler-en legeak. Ereku Grabitatorioa eta potentziale grabitatorioa : Ereku grabitatorioa; Gauss-en teorema; Potentziale grabi-tatorioa. Planeta eta sateliteen higidura. Adibideak.

HAMABOSTGARREN GAIA : INTERAKZIO ELEKTRIKOA.....108

Karga elektrikoa. Kargaren kuantizazioa. Coulomben legea. Ereku

elektrikoa. Potentziale elektrikoa. Fremu elektriko baten erlazio energetikoak. Dipolo elektrikoa.

HAMASEIGARRREN GAIA : KORRONTE ELEKTRIKOA..... 131

Korrontearen intentsitatea eta dentsitatea. Kontinuitatearen - ekuazioa. Konduktibitate elektrikoa. Erresistentzia. Ohm-en legea. Indar elektroeragilea. Ohmen legearen generalizazioa. Kirchhoff-en legeak.

HAMAZAZPIGARREN GAIA : INTERAKZIO MAGNETIKOA.....156

Higitzen ari den karga baten gaineko indar magnetikoa. Fremu - magnetiko batetan karga batek duen higidura; adibideak. Korronte elektriko baten gaineko indar magnetikoa. Korronte elektriko baten gaineko indar-momentu magnetikoa. Korronte elektriko batek eragiten duen eremu magnetikoa. Korronte zuzen baten eta korronte zirkular baten eremu magnetikoa. Korronteen arteko interakzioak. Higitzen ari den karga baten eremu magnetikoa.

HAMAZORTZIGARRREN GAIA : TERMO DINAMIKAREN LEHENENGO PRINTZIBIOA ¹⁸⁴

Sistemen arteko interakzioa. Tenperatura. Oreak termodinamikoa. Egoera-ekuazioa. Prozesu itzulgarriak eta itzulezinak. Lana. -- Barne-energia. Termodinamikaren lehenengo printzipioa. Barne-energiaren eta beroaren interpretazio mekanikoa. Gasen eta solidoen bero espezifikoak.

HEMERETZIGARRREN GAIA : GAS IDEALAK.....200

Egoera-ekuazioa. Barne-energia. Bero espezifikoak. Mayer-en ekuazioa. Gas ideal baten gaineko prozesu adiabatikoa. Lerro adiabatikoa. Gasen teoria zinetikoa.

HOGFIGARRREN GAIA : TERMODINAMIKAREN BIGARRREN PRINTZIBIOA.. 222

Prozesu itzulgarri eta itzulezinak. Termodinamikaren bigarren printzipioaren forma matematikoa. Entropia. Bigarren printzipioaren -- berrikuspena. Entropiaren enuntziatua. Entropia eta desordena.

BIBLIOGRAFIA247

11. GAIA - FLUIDOEN MEKANIKA

- 11.1 FLUIDOEN DEFINIZIOA, FLUIDOEN SAILKAPENA
- 11.2 BISKOSITATEA
- 11.3 PRESIO HIDROSTATIKOA, HIDROSTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA
- 11.4 FLOTAZIOAREN ARAZOA
- 11.5 FLUXU-MOETAK
- 11.6 REYNOLDS-EN ZENBAKIA
- 11.7 KONTINUITATEAREN EKUAZIOA
- 11.8 HIGIDURAREN EKUAZIOA KORRONTE-LINEA BATETAN, BERNOUILLI-REN TEOREMA, ENERGIAREN EKUAZIOA.
- 11.9 ENERGIAREN EKUAZIOAREN GENERALIZAZIOA.
- 11.10 MOMENTU LINEALAREN EKUAZIOA

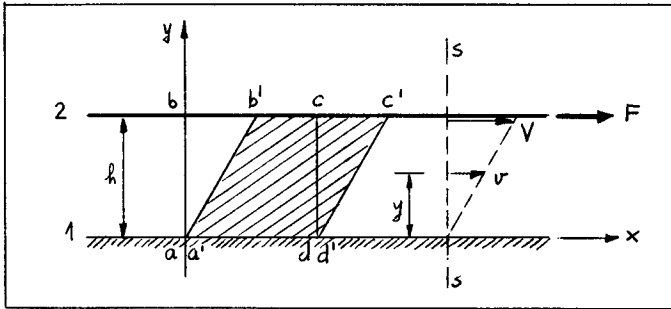
Zazpigarren gaian, partikula-sistemen dinamika aztertu genuen. Ez genuen zehazten, ordea, zer eratako sistema zen; edo hobeki esateko, orduko printzipioak edozein sistema-moetari aplikatzeko modukoak ziren.

Hurrengo gai bietan, sistema konkretu eta berezi bat aztertu genuen; solido zurruna hain zuzen ere. Sistema hau, bere partikulen arteko loturaren bidez definitzen da, partikula-bikoteen arteko distantziak konstante irauten duelarik. Gai honetan beste sistema-moeta berezi bat aztertuko dugu, gorputz fluidoek osotzen dutena prezeski. Noski, lehenik eta behin fluido-kontzeptuaren esangura definitu beharko dugu, denbora berean fluidoek ezaugarriak adierazten dituzten magnitudeak definituz, hala nola, biskositatea. Ondoren, fluidoek estatikaren eta dinamikaren funtsezko lege eta ekuazioak azalduko ditugu, dena Fisika Generalezko testu bati dagokion mailan, hau da, kasu sinpleenak aztertuz.

11.1 - FLUIDOEN DEFINIZIOA. FLUIDOEN SAILKAPENA.

Fluidoak, orohar, ebakidura-tentsioen eragin pean etengabe deformatzen diren substantziak dira, ebaki dura-tentsioak nahi bezain txikiak direlarik ere. Emaniko definizio, hau pausoka eta astiro azalduko dugu.

Ebakidura-tentsioa —zenbait liburutan esfortzu tangentiala edo tentsio tangentiala ere deitua— indarraren osagai tangentearen eta azaleraren arteko erlazioa da, hau da, ebakidura-indarraren eta beronek eragiten dueneko azaleraren arteko erlazioa.



Alboko irudian bi xafla paralelo laun adierazten dira. 1 delakoa geldirik dago eta 2 xafaren gain F indarrak eragiten du. Xafla bien artean substantzia bat dago. Xaflek nahiko luze eta zabal dira, hegaletako efektuak arbuiaitzeko moduan.

F indarrak ebakidura-tentsioa sortzen du xafla - arteko substantzian. Xaflen azalera A bada, ebakidura-tentsio horren balorea $\frac{F}{A}$ da.

F nahi den bezain txikia izanik, goiko xafla - abiadura konstantez higerazten badu, xafla arteko substantzia fluido bat dela esaten da. Hauke da beraz, fluido kontzeptuaren definizioa.

Fluidoaren sailkapenera pasa aurretik, aipa dezagun praktikan zenbait fluidoak eta muga batzuren barnean nahi ko ongi betetzen duten lege bat. Goiko irudian $abcd$ - prismak fluido-elementu bat adierazten du $t=0$ aldiu-nean. dt aldiunean, elementu horrek $a' b' c' d'$ forma du gutti gorabehera.

Horrek esan nahi digunez, y direkzioan partikulen abiadura linealki hazten da, b puntuak V abiadura duela-rik (goiko xalarena) eta a puntua geldirik dagoelarik (beheko xafla bezala).

Esperientziak frogatzen duenez, ondoko erlazioa be-tetzen da aipaturiko magnitudeen artean;

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v}{h}$$

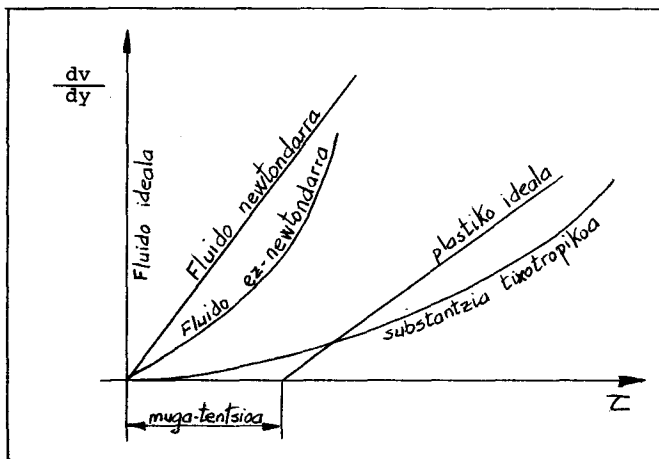
Hemen, μ delakoa konstantea da. Ikusten denez, proportzionalitate zuzena dago, ebakidura-tentsioaren ($\frac{F}{A}$) eta fluidoaren deformazioaren abiadura angeluarren ($\frac{v}{h}$) artean.

Fluidoaren konportamoldea definitzen eta zehazten duen lege hau, erraz generaliza daiteke edozein fluido ren puntu batetarako. Horretarako, fluido-elementu diferentzial bat hartu behar da puntu horren inguruan. Bertan, ebakidura-tentsioa τ bada eta deformazioaren abiadura angeluarra $\frac{dv}{dy}$ bada, honela geratzen zaigu legea:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Lege hau Newton-en biskositatearen legea deitzen da eta μ konstantea, biskositate-koefizientea.

Lege hori betetzen duten ala ez kontutan edukiz, substantzien sailkapena egin dezakegu. Hain zuzen ere, horixe da hurrengo irudian adierazten dena.



Irudi honetan, ebakidura-tentsioaren eta deformazioaren abiadura angeluarraren arteko erlazioa agertzen da grafikoki. Ikusten denez, hiru eratako fluidoak aipatzen dira:

- fluido newtondarrak. Hauek zehazki betetzen dute Newton-en legea, eta biskositate-koefizienteak ez du ebakidura-tentsioaren dependentziarik.
- fluido idealak. Berez, fluido newtondarren kasu bereziak dira, zeintzuetan biskositate-koefizientea nulua baita: $\mu = 0$.
- fluido ez-newtondarrak. Hauetan ez dago erlazio linealik τ eta $\frac{dv}{dy}$ direlakoen artean

Hauetaz gainera, plastikoen jokabidea ere adierazi da; ikusten denez, muga-tentsiotik gora fluidoan antzera jokatzeko dute. Substantzia tixotropikoak oso bereziak dira eta biskositateak aurreko deformazio angeluarraren dependentzia dute (inprentarako tintak era honetakoak dira).

Orohar, gas arruntak eta lar lodi ez diren likidoak fluido newtondartzat jo ditzakegu. Ostera, likido lodiak eta puntu kritikoaren inguruko gasak ez-newtondartzat hartu behar izaten dira.

Puntu honekin bukatzeko, interesgarri gerta daiteke, lehengo bi xaflen kasuan, substantzia-moeta desberdinekin zer gertatzen den ikustea:

- . Fluidoaren kasuan indar infinitesimala nahiko da, goiko xafla abiadura konstantez higerazteko.
- . Plastikoa ipiniz gero, eta berau xaflei itsatsirik egonik, muga-tentsioara heldu arte ez litzateke

higituko, eta hortik aurreko inkrementuek flui-
doen kasuan bezala jokatuko lukete, abiadura -
konstantea sortuz.

Solido elastikoen kasuan (xaflei itsatsirik ba-
leude) deformazioak muga bat du, eta gero sis-
tema geldi geratzen da. Deformazio eta tentsio-
aren artean proportzioanaltasun zuzena dago.

Xaflen artean hutsa balego (xaflak banaturik -
mantenduz), goiko xafla ez litzateke abiadura
Konstantez higituko, azelerazio konstantez bai-
zik.

Xaflen artean solido ez-itsatsia badago, soli-
doen arteko marruskadura agertzen da; eta goi-
ko xafla abiadura konstantez higitzeko, indar
finitua (ez infinitesimala) behar da.

11.2 - BISKOSITATEA

Biskositatea fluidoek propietate bat da. Be-
raren kausaz, fluidoek erresistentzia oposatzen diete eba-
kidura-tentsioei. Izan ere, biskositate izeneko magnitu-
dea, Newtonen legean agertzen da, ebakidura-tentsioa eta
beronen kausaz sortzen den deformazio angeluarraren abia-
dura erlazionatuz

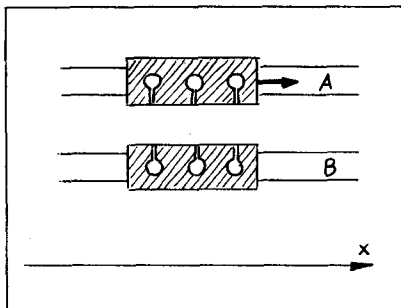
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Biskositate-koefizientea fluido-moeta bako-
tzaren ezaugarria da. Zenbait kasutan oso handia da, alki-
tranaren kasuan adibidez; ura eta airearen kasuan ttikia
da, ordea.

Esperimentalki ikusi izan denez, fluido**en** bisko-
sitate-koefizienteak ez du ia presioaren dependentziarik,
muga batzuren barnean, noski. Ostera, tenperaturaren de-
pendentzia du.

Bi dira, batez ere, fluido**en** biskositatearen kau-
sak. Batetik, molekulen arteko kohesio-indarrak daude. Eta
bestetik, molekulen artean gertatzen den momentu lineala-
ren transferentzia. Azken kausa hau fluido**en** ezaugarria da,
zeren eta dakigunez, plano finko bat hartuz, alde batetik
besterako molekulen transferentzia gertatzen ari baita -
etengabe.

Molekulen transferentziak ebakidura-tentsioan -
duen efektua ulertzeko, adibide bat jarriko dugu, Streeter
liburutik hartua.



Demagun bi bagoi ditugula bi
trenbide paralelotan. Bagoiek -
esponjak dituzte ura gordetzeko,
eta bestetik ponpa batzu, ura bes-
te bagoira perpendikularki jaur-
tikitzeko, Ponpa hauk etengabe -
funtzionatzen ari dira, eta ho-
rrela, bagoi bakoitzaren masak
(ur-kantitateak) konstante irau-
ten du.

Demagun A bagoia eskuinetarantz higitzen ari dela hasie-
rako ^{alduranean} eta B delakoa geldirik dagoela. Momentu linealak x di-
rekzioan osagaia duenez, B bagoia higitzen hasiko da po-
liki eta A bagoia frenatzen. Momentu linealaren transfe-
rentzia gertatu da eta ebakidura-tentsio alegiazko baten -
funtzioa betetzen du. Honela, ba, fluido batetan plano fin-
ko bat kontsideratuz, antzerako efektua gertatzen da moleku-
len transferentziarekin, eta honek zerikusia du biskosita-
te-koefizientearekin.

Biskositatearen kausa nagusiak zeintzu diren aipatu ondoren,
ikus dezagun, nola aldatzen den tenperaturarekin, fluido-
moeta desberdinen kasuan. Esperimentalki meurtu denez, li-
kidoen kasuan biskositatea ttikiagotu egiten da temperatu-
ra goratzean. Gasen kasuan, ostera, handiagotu egiten da
temperatura goratzean. Zer dela eta konportamolde desber-
din horik?.

Likidoen kasuan kohesio-indarrek askoz ere eragin handiagoa dute biskositatean, momentu linealaren transferentziak baino. Tenperatura goratzean, bibrazio-maila handiagoa denez, kohesioa ttikiagotu egiten da; momentu linealaren transferentzia, berriz, handiagotu. Erlatiboki lehenak garrantzi handiagoa duenez, biskositatea ttikiagotu egiten da.

Gasen kasuan, oster, alderantziz gertatzen da. Hauetan momentu linealaren transferentzia eduki behar da kontutan nagusiki, eta, horregatik, biskositatea handitu egiten da temperaturarekin.

Ohar bat egin behar dugu biskositate-kontzeptuari buruz. Orohar, fluidoaren dinamikari buruz hitz egitean erabili behar den kontzeptu bat da. Estatikaren kasuan, deformazio angeluarrik ez dagoenez, hots, fluido-geruzen arteko higidurarik ez dagoenez, $\frac{dv}{dy} = 0$ da, eta beraz ez da ebakidura-tentsiorik eta ez biskositaterik ere kontsideratu behar.

- . Unitateak. Azter dezagun lehenik, biskositate-koeffizientearen dimentsioak zeintzu diren.

$$[\mu] = \left[\frac{\tau}{dv/dy} \right] = \frac{\left[\frac{F}{A} \right]}{L T^{-1} L^{-1}} = \frac{M L T^{-2} L^{-2}}{T^{-1}} = M L^{-1} T^{-1}$$

c g s sisteman, biskositatearen unitatea poise deitzen da eta honela adieraz daiteke:

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ dyna} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-2} = 1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Asko erabilia da zentipoise izeneko unitatea:

$$1 \text{ zentipoise} = 10^{-2} \text{ poise}$$

Urak 20°C-tako tenperaturan 1,0 zentipoise-tako biskositate-koeffizientea du.

MKS sisteman biskositate-unitateak ez du izen berezirik:

$$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

μ koefizientea biskositate absolutua edo eta biskositate dinamiko izenez ere ezagutzen da.

Zenbait kasutan beste koefiziente bat erabiltzen da:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ν delakoa biskositate zinematikoa deitzen da eta biskositate dinamikoa dentsitatez zatikatuz lortzen da. c g s sisteman biskositate zinematikoaren unitatea stokes deitzen da

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\rho} \right] = \frac{M L^{-1} T^{-1}}{M L^{-3}} = L^2 T^{-1}$$

$$1 \text{ stokes} = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

11.3 - PRESIO HIDROSTATIKOA. HIDROSTATIKAREN FUNTSEZKO EKUAZIOA

Puntu honetan Fluidoaren Estatika aztertzeraz aurreratu ko gara. Horretarako, kontzeptu berezi bat definitu behar dugu presio hidrostatikoa, edo laburrago esanik, presioa.

Area laun batetan eragiten duen batezbesteko presioa, area horren gain normalki eragiten duen indarra area horren baloreaz zatitzean lortzen da. Beraz:

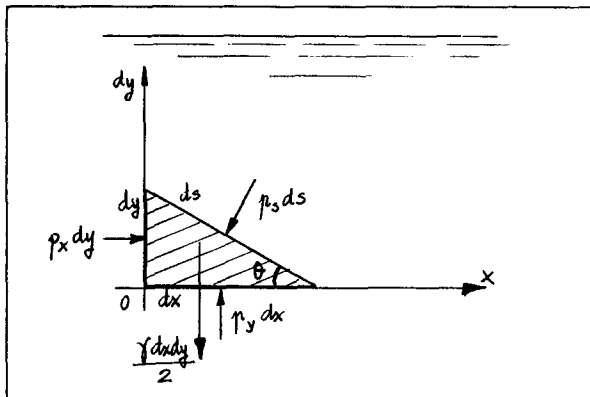
$$p = \frac{F}{A}$$

Zatiketa hau limitera eramanez, A area geroago - eta txikiagoa eginik, puntu batetan direkzio batetan (arearen normalaren direkzioan) dagoen presioa definitzen dugu.

Segidan ikusiko dugunez, geldirik dagoen fluido ideal batetan, puntu bateko presioa kontsideratzean, presio hau berbera da direkzio guztietan.

Sinplifikatzeko, bi dimentsiotan aztertuko dugu problema, baina erraz generaliza daiteke. Demagun, ziri

formako fluido-elementu prismatiko (altuera unitatekoa) bat, geldirik dagoen fluido batetan. Ez dago beraz, eba kidura-tentsiorik zeren eta bestela desplazamenduak egon en bailirateke. Indar (presio) normalek eragiten dute soilik.



Irudian, elementu diferentzial horretan eragiten ari diren indarrak adierazten dira:

$$\begin{cases} p_x : dy \text{ aurpegiko batezbesteko presioa} \\ p_y : dx \text{ " " " "} \\ p_s : ds \text{ " " " "} \\ \gamma : \text{pisu espezifikoa (batezbestekoa)} \end{cases}$$

x eta y direkzioetan hauxek dira oreka ekuazioak:

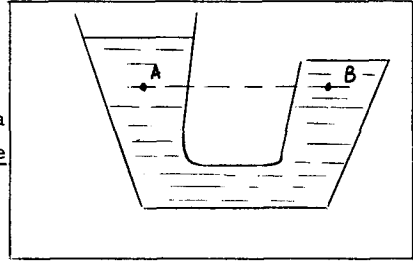
$$\begin{aligned} x : & \quad p_x dy - p_s ds \sin \theta = 0 \\ y : & \quad p_y dx - p_s ds \cos \theta - \frac{\gamma dx dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

Geometrikoki ikusten den bezala

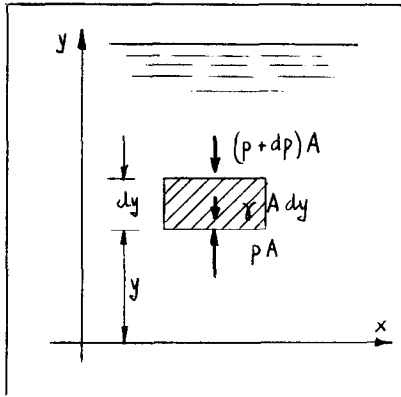
$$\begin{cases} \sin \theta ds = dy \\ \cos \theta ds = dx \end{cases}$$

Beraz, lehengo ekuazioak honela geratzen zaizkigu.

Erresultatu hau erraz generaliza daiteke horizontal bereko puntu guztietara, eta horrela, alboko irudian, presio berbera dago A eta B puntuetan.



* Eman dezagun orain bigarren pausoa, bertikalaren direkzioan dagoen presio-aldaketa ikusteko.



Demagun presma bertikal bat. Beraren oinarriaren azalera A da eta altuera infinitesimala du: dy .

Irudian y direkzioan eta orekan eragiten ari diren indarrak adierazten dira. Orekan gaudenez, indar horiek guztiok anulatu egin behar dira.

Beraz:

$$pA - (p + dp)A - \gamma A dy = 0$$

Eta sinplifikaturik

$$\boxed{dp = -\gamma dy}$$

Ekuazio diferentzial hau Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa da. Bertan, presio-aldakuntza garaierareri aldakuntzarekin erlazionatzen da. Pixka bat analizatuz ikusten denez, presioaren aldaketa, fluido-elementuaren pisuaren ondorio zuzena da.

Aurreko ekuazio diferentziala guztiz generala da eta fluido konprimagarri zein konprimaezinen kasurako balio du.

Fluido konprimaezinen kasuan erraz integra daiteke eku-

zio hori, zeren eta $y = K \frac{te}{e}$ eginez zera geratzen baita

$$\int dp = -\gamma \int dy$$

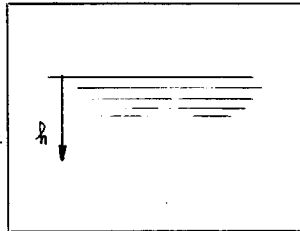
$$p = -\gamma y + K$$

K konstantea originen aukeraren arauerakoa da.

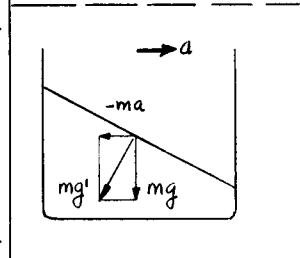
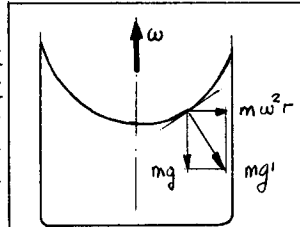
OHARRAK

1. Batzutan ohitura dago, presioaren gehipena sakoneraren arauera emateko. Hots, h koordinatua gainazaletik beherantz neurtzen da. Kasu horretan horrela kalkulatzena da gainpresioa

$$\Delta p = \gamma h$$



2. Fluidoaren estatika erlatiboa aztertzean, azeleraziorik badago, inertzi indarrak ere kontutan hartu behar dira eta orduan grabitate efektiboak (g' delakoak) ez du bertikalaren direkzioz, ez eta gainazalak horizontalarenik ere, g' delakoaren perpendikularraena baizik. (ikus alboko irudiak).



3. Zer esanik ez, hemen ez dugu tentsio-superfizialeko problemarik kontsideratu, fluidoaren barneko problemak baizik,

11.4 FLOTAZIOAREN ARAZOA

Flotazioaren funtsa ulertzeko, Hidrostatikaren ekua zioan oinarrituko gara, eta kalkuluak eta azalpenak errazteko fluido konprimaezinen kasua aztertuko dugu.

Demagun prisma bertikal bat. Oinarriaren azalera dA da. Irudian adierazten dira y direkzioko indarrak. Fluido konprimaezina denez, prismaren pisua $\gamma h dA$ da. Orekan:

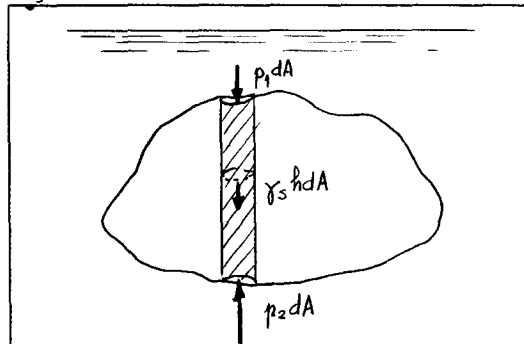
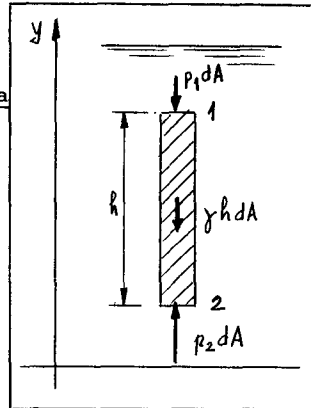
$$\begin{aligned} -p_1 dA - \gamma h dA + p_2 dA &= 0 \\ (p_2 - p_1) dA &= \gamma h dA \end{aligned}$$

Hau da, 1 eta 2 puntuen arteko presio-diferentzia, azalera unitateko prismaren pisua da

$$p_2 - p_1 = \gamma h$$

Izatez, ondorio hau zuzenki lor dezakegu Hidrostatikaren funtsezko ekuazioa aplikatuz ere.

Dena den, presio-aldaketa nolakoa den ikusi ondoren, kontsidera dezagun orain fluido baten barnean jartzen den solido bat eta ikus dezagun nolakoak diren solido horretan eragiten duten indarrak



Demagun, prisma bertikal diferentzial bat eta azter ditzagun indar bertikalak

- Beheranzko indarra, pisuaren kausaz: $\gamma_s h dA$
- Goranzko indarra, presio-desberdintasunaren kausaz:

$$(p_2 - p_1) dA = \gamma_f h dA$$

Hemen γ_f eta γ_s fluidoaren eta solidoaren pisu espezifikokoak dira.

$$\text{Beraz, } \begin{cases} \text{gorantz: } \gamma_f h dA \\ \text{beherantz: } \gamma_s h dA \end{cases}$$

Ikusten denez, $\gamma_f > \gamma_s$ baino handiagoa bada, solidoak flotatu egingen du. $\gamma_f < \gamma_s$ bada, oster, hondora joango da.

Prisma diferentzial horrekin egin duguna, solidoa oso tzen duten prisma guztiekin egitean, erraz lortzen da Arkhimedesen printzipioa: "Fluido -konprimaezin- baten barnean dagoen solidoak goranzko indar edo bultzada bat jasaten du, bultzada horrek solidoak desplazatzen duen fluidoaren pisuaren balorea duelarik". Bultzadaren aplikazio-zentrua, fluido desplazatuaren masa-zentruan jarri behar da.

11.5 FLUXU-MOETAK

Fluidoaren Estatikatik Dinamikara pasatzeko, fluidoaren higiduren sailkapen bat egingen dugu.

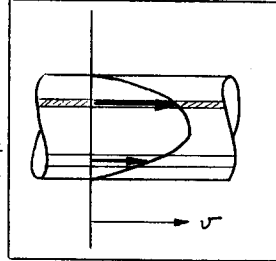
Orohar, fluido bat higitzen ari denean fluidoaren fluxu bat dagoela esaten da, nahiz eta fluxu hitza sekzio batean zehar denbora unitatean pasatzen den fluido-kantitatea adierazteko ere erabili.

Fluidoaren higidur moetak adierazteko oso kriterio desberdinak erabiltzen dira, kriterio bakoitzaren arauera sailkapen-modu bat agertzen delarik.

I. Biskositatearen eragina kontutan edukirik

I.1 Fluxu turbulentua. Partikulek oso ibilbide irregularrak dituzte. Ebakidura-tentsio handiak sortzen dira. Ezin daiteke Newtonen biskositate-legea zuzenki erabil. Energia zinetikoaren galpen handia dago (gutxi gorabehera, abiaduraren koardatuaren arauetokoa).

I.2 Fluxu laminarra. Partikulen higidura lamina antzeko batzutan gertatzen da, lamina bakoitza albokoarekiko labantzen delarik. Newtonen legea betetzen da.



II. Marruskadura eta konprimagarritasunaren arauera

II.1 Fluxu ideiala. Marruskadurarik ez duena eta -denbora berean konprima ezina dena. Marruskadurik ez edukitzean, biskositate-koefizientea -nulia da.

II.2 Fluxu erreala. Idealaren baldintzak betezen ez dituen.

III. Temperatura eta beroarekiko konportamoldearen arauera

III.1 Fluxu isoterma. Kasu honetan ez dago tenperaturaren aldaketarik.

III.2 Fluxu adiabatikoa. Fluidora ez da berorik sartzten ez ateratzen. Fluxu adiabatiko itzulgarria (hau da, marruskadurarik gabea) isoentropi-koa deitzen da.

IV. Denborarekiko aldakuntza kontutan edukiz.

IV.1 Fluxu iraunkorra. Puntu ber batetan fluido-aren propietateak eta higidura bera ere, den bora guztian berberak direnean, fluxua iraunkorra dela esaten da. ρ dentsitatea, p presioa eta T temperatura izanik, edozein puntutan

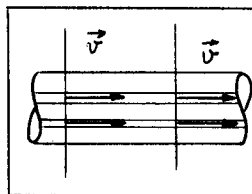
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

IV.2 Fluxu ez-iraunkorra edo aldakorra. Aurreko baldintzak betetzen ez direnean

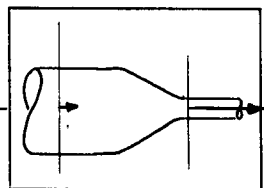
V. Espazioarekiko aldakuntza kontutan edukiz.

V.1 Fluxu uniforme. Puntu guztietan abiadura berbera

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = 0$$



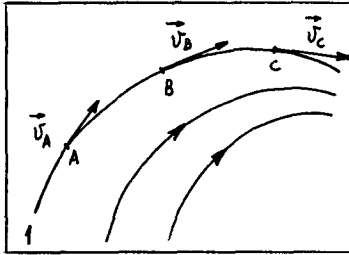
V.2 Fluxu ez-uniformea. Abiadura desberdina puntu desberdinetan. Zer esanik ez, fluxua ez-uniformea izan arren iraunkorra izan daiteke.



Fluxuen sailkapenarekin bukatzeko, oso praktiko gertatuko zaizkigun bi definizio emanen ditugu. Fluxu laminarraren kasurako emanak izango dira eta gero Di-namika osoan erabiltzeko.

Korrante-linea edo korrante-le- lerroa.

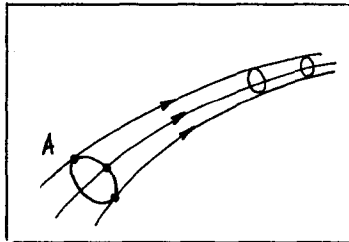
Puntu guztietan abiaduraren tan-
gentea da. Partikula batek egi-
ten duen bidea adierazten du. Flu-
xu-laminarrean korrante-lerroak
ez dira ebakitzen, erregimena -
iraunkorra bada.



Korrante-hodia.

Kurba hitxi batetatik (A) pasatzen
diren korrante-linea guztiek, ko-
rrante-hodi bat osotzen dute.

Fluxua iraunkorra denean, korron-
te-hodiak fixoak dira eta beraue-
tan ez da fluidorik sartzen ez ir-
teten.



11.6 REYNOLDS-EN ZENBAKIA

Biskositatea kontutan edukirik, fluido baten higi-
duraren ekuazioak aztertzen hasten bagara, oso ekuazio-
-sistema konplikatua lortzen dugu. Deribatu partzialak
dituzten ekuazio diferentzial batzu lortzen dira, Navier-
-Stokes izeneko ekuazioak hain zuzen ere; eta ekuazio -
hauek ez dute soluzio orokorrik.

Zailtasun hori kontutan edukiz, fluidoaren fenomeno
mekanikoak aztertzeko geratzen diren bide nagusietakoa,
antzeko ereduen azterketa experimentalak da.

Horrela, beste eskala batetan eredu bat prestatzen da,
eta gero analogia bidez generalizatu egiten dira ondo-
rioak. Ereduen teoriaren barnean gaude beraz.

Ereduen teorian, bi fluido dinamikoki antzeko edo seme-janteak izan daitezzen, ondoko baldintzak bete behar dituzte:

- a) Geometrikoki semejanteak izan behar dute
- b) Korrante-lineek ere semejanteak izan behar dute.

Baldintza horik betetzen dituzten eredu desberdinen arteko erlazioak, zenbaki adimentsional batzuren bidez adierazten dira. Honela, experimentuetan ereduen bidez lorturiko datuez, eredu errearen bidez lortuko direnak kalkula daitezke.

Parametro edo zenbaki adimentsional hauetariko bat, Reynolds-en zenbakia da. Beste gauza batzuren artean zenbaki honen laguntzaz fluxu laminarraren eta fluxu turbulentuaren arteko mugak ezagut daitezke. Guk adibide gisa aipatuko dugu hemen, nahiz eta beste era asko tako zenbaki praktikoagoak ere ba diren.

Fluxu konkretu baten kasuan, honela defini daiteke:

$$R = \frac{v l \rho}{\mu}$$

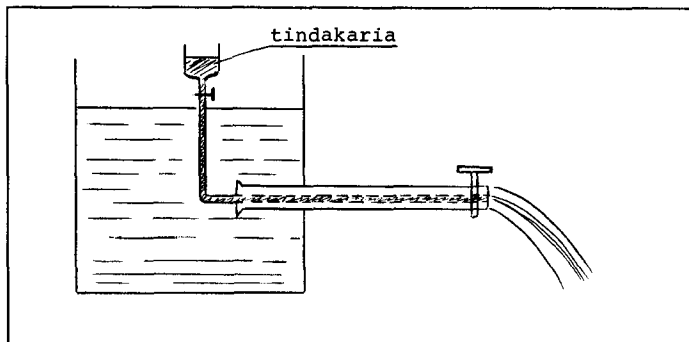
Hemen:

$$\left\{ \begin{array}{l} v : \text{fluxuaren abiadura berezi bat} \\ l : \text{luzera berezia} \\ \rho : \text{dentsitatea} \\ \mu : \text{biskositate-koefizientea} \end{array} \right.$$

Erraz konproba daitekeenez, magnitude adimentsional bat da

$$[R] = L^0 M^0 T^0$$

Bere azterketetarako, ondoko irudian adierazten den experimentua egin zuen Reynolds-ek



Goiko muntaiak ikusten den bezala, uraren kanalaren barrutik tindakari-lamina bat sortzen zuen. Erregimen laminarrean, lamina edo txorro fin hori ez da apurtzen eta zuzen bat bezala ageri da hodi horizontalean. Ostera, erregimena turbulentua bihurtzean, txorro hori apurtu egiten da eta tindakaria laster nahasten da urarekin.

Reynolds-ek abiadura berezi bezala batezbesteko - abiadura (V) hartu zuen, eta luzera berezi bezala diámetro (D).

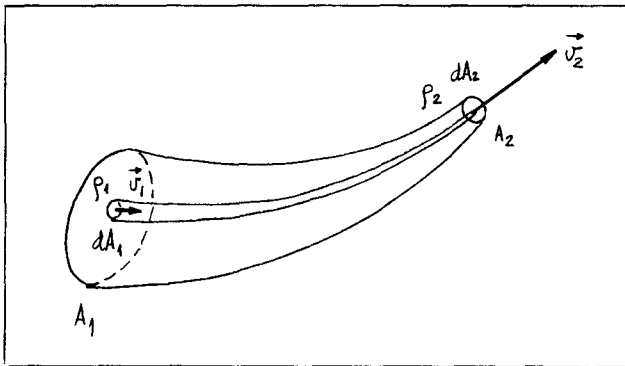
$$R = \frac{V D \rho}{\mu}$$

Baldintza hauetan, beirazko hodietan, eta bibrazioak ekiditeko oso neurrak arduratsuak eginez, $R < 12000$ mugararte fluxu laminarra egon zitekeela frogatu zuen. Gaur egun aparatu modernoekin eta perturbazioak ekidinez, $R < 40000$ mugaraino altxatu da fluxu laminarraren Reynolds-en zenbakia. Hortik gora, fluxua beti da turbulentua. Horregatik, zenbaki hori - fluxu laminarraren goiko zenbaki kritiko bezala hartzen da.

Dena den, hodi arruntetan askoz ere inperfekzio eta perturbazio gehiago daudenez, askoz ere lehenago hasten da turbulentzia, Reynolds-en zenbakiak $2000 \rightarrow 4000$ balio duelarik. Horregatik beheko zenbaki kritiko bezala $R = 2000$ hartzen da. Hortik behera, fluxua laminarra da.

11.7 KONTINUITATEAREN EKUAZIOA

Gauzak gehiegirik ez konplikatzeko, fluxu laminar eta iraunkorra kontsideratuko dugu. Demagun, ba, korrante-hodi bat, eta beronetan A_1 eta A_2 sekzio normalak (kalkuluak errazteko).



Kontsidera dezagun barneko korrante-hodi infinitesimal bat. Fluxua iraunkorra bada, dA_1 sekziotik denbora-unitatean sartzen den masa eta denbora-unitate berean dA_2 sekziotik irteten dena berdinak izan behar ko dira. Matematikoki idatzirik:

$$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$$

non ρ_1 eta ρ_2 sekzio bakoitzeko dentsitateak diren

eta v_1 eta v_2 , abiadurak.

Idatzitako ekuazioa, kontinuitatearen ekuazio diferentziala da, fluxu laminar eta iraunkorraren kasuan. - Izatez, masaren kontserbazioaren printzipioaren ondorio - zuzena da. Kontsideraturiko korrante-hodi osorako integrazioa:

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2$$

Ekuazio honetako zatiek kaudal masiko izeneko magnitudea definitzen dute, Fisikaren arloan asko erabiltzen den kontzeptua berau. Orohar, A sekzioan zeharreko kaudal masikoa (Q) honela definitzen da:

$$Q = \int_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

non $d\vec{s}$ sekzioaren superfie-elementu diferentzialei dagokien bektorea den. Fluxu laminar eta iraunkorraren kasuan, kontinuitatearen ekuazioa kaudalaren kontserbazioaren ekuazioa da.

Horretaz gainera, fluidoak konprima ezina bada:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$\int_{A_1} v_1 dA_1 = \int_{A_2} v_2 dA_2$$

Expresio honetan adierazten diren zatiak kaudal bolumetrikoa adierazten dute. Batezbesteko abiaduren funtzioan jarritz:

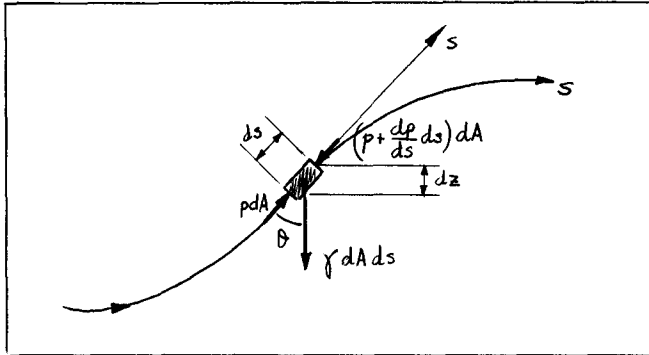
$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

non v_1 eta v_2 fluidoak A_1 eta A_2 sekzioetan errezpektiboki dituen batezbesteko abiadurak diren.

(OHARRA: kaudal hitza fluxu hitzaren sinonimotzat ere hartzen da sarri).

11.8 HIGIDURAREN EKUAZIOA KORRONTE-LINEA BATETAN, BERNOULLI-REN TEOREMA, ENERGIAREN EKUAZIOA.

Kasu honetan ere, kalkuluak errazteko, fluxua iraun korra dela, laminarra dela eta marruskadurarik ez dagoela kontsideratuko dugu (fluido ideala). Korronte-linea bat harturik, Mekanikako Newtonen bigarren legea ($\vec{F} = m\vec{a}$ halezia) aplikatuko dugu.



Bedi s korronte-linea bat eta bertan, kontsidera dezagun fluidoazko prisma elemental bat (beronen oinarria dA da eta altuera, ds). Korronte-linearen tangentearen direkzioan Newtonen legea aplikatuko dugu, bigarren ordenako infinitesimoak arbuiatuz:

$$p dA - \left(p + \frac{dp}{ds} ds \right) dA - \gamma dA ds \cos \theta = \frac{\gamma}{g} dA ds a_s$$

Hemen

$$\left\{ \begin{array}{l} p : \text{presioa} \\ \gamma : \text{pisu espezifikoa} \\ a_s : s \text{ direkzioan dagoen azelerazioa} \end{array} \right.$$

Ez dugu ebakidura-tentsiorik kontsideratu zeren, fluido ideala hartuz, marruskadurarik ez dagoela esan baitugu, biskositaterik ez dagoela inplikatu.

Operaturik, hauxe geratzen zaigu.

$$\frac{dp}{ds} dA ds + \gamma dA ds \cos \theta + \frac{\gamma}{g} dA ds a_s = 0$$

Eta $\gamma dA ds$ elementuaz sinplifikaturik:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \cos \theta + \frac{a_s}{g} = 0$$

Hemen ondoko aldaketak egin ditzakegu:

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{dz}{ds} \\ a_s &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \end{cases}$$

Honelatan, ba, azkenean zera geratzen zaigu:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{dz}{ds} + \frac{v}{g} \frac{dv}{ds} = 0$$

Hauxe da, berez, energiaren oinarritzko ekuazioa modu diferentzialez idatzirik.

Aurreko ekuazioko terminoak ds faktoreaz biderkatuz zera geratzen zaigu:

$$\frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{1}{g} v dv = 0$$

Ekuazio hau integratu egin daiteke korrante-linea batetan zehar

$$\int \frac{dp}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = K$$

K delakoa integrazio-konstante bat da eta korrante-linea konkretu bakoitzaren kasuan balio bat du. Ekuazioa - guztiz integratzeko $\gamma = \gamma(p)$ ezagutu behar dugu fluido - konprimagarrien kasuan.

Fluido konprimaezina kontsideratzen badugu,
 $\gamma = K^u$ bezala hartuko dugu. kasu honetan.

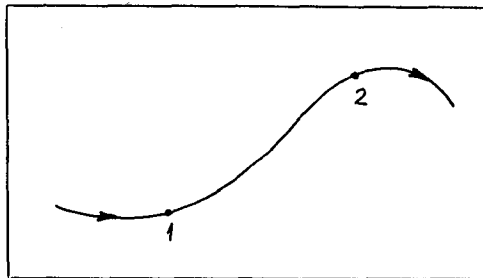
$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = K$$

Azter dezagun termino bakoitzaren esangura.

- $z = \frac{mg z}{mg}$ Ikusten denez, pisu unitateko energia potentziala da.
- $\frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{m g}$ Pisu unitate bakoitzeko puntu batetan fluidoak duen energia zinetikoa.
- $\frac{p}{\gamma}$ Aurreko bi terminoen analogia gatik pisu unitateko presio-energia dela esan dezakegu. Termino hau fluidoaren kasuan ageri da soilik eta solido - elastikoen energia potentzial elastikoaren antzekoa da. Berrez barne-energia potentzialaren parte bat da.

Beraz, aurreko ekuazioa korrante-linea batean zeharreko energiaren kontserbazioaren ekuazioa da. Zenbait liburutik g terminoaz biderkatutik ageri ohi da eta Bernouilli-ren ekuazioa izenarekin ezagutzen da, horrela prezeski:

$$\frac{p}{\rho} + g z + \frac{v^2}{2} = K^{te}$$

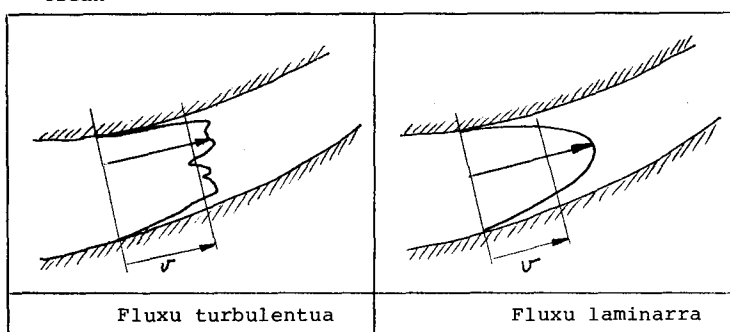


Honelatan, ba, korronte-linea bereko bi puntu kontsideratuz, honela aplikatzen da energiaren ekuazioa. (fluido konprimaeginaren kasuan, noski).

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

11.9 ENERGIAREN EKUAZIOAREN GENERALIZAZIOA

Praktikan ez ohi da korronte-linea bakar bat kontutan hartzen, korronte-hodi bat baizik, hots, korronte osoa. Horregatik zenbait zuzenketa egin behar izaten dira energiaren ekuazioan, korronte errealak kontsideratzean



Lehen zuzenketa bat energia zinetikoa adierazten duen terminoari buruzkoa da. Normalean korronte osoaren adierazle bezala batezbesteko abiadura hartzen da.

Baina gero korrekzio-faktore bat jarri behar izaten da.
Termino hori honela geratzen da:

$$\frac{v^2}{2g} \longrightarrow \alpha \frac{v^2}{2g}$$

Fluxu laminarraren kasuan $\alpha = 2$ ohi da. Eta fluxu turbulentuaren kasuan $\alpha = 1,01 \rightarrow 1,10$ tartean ohi dago.

Bestalde fluido errealek biskositatea dute eta beronen kausaz energia mekanikoa galduz doa, bero-energia sortuz. Zer esanik ez, ba, fluidoek mekanika ongi aztertzeke, ikuspegi termodinamikoa oso kontutan eduki behar da.

Dena den, problema sinplifikatuz, korrante-lineetan - energiaren galpena dagoela esan dezakegu. Eta galpen hori adierazteko, 1 eta 2 punturen artean zera - idatz dezakegu

$$E_1 = E_2 + G_{12}$$

non G_{12} , 1 eta 2 puntuen artean galduriko energia baita.

Bestalde korrante barruan energia ematen duten sistemak ere egon daitezke, hala nola, ponpak, motoreak, helizeak eta abar. Hauen eragina ere kontutan hartuz (E_m), honela idazten da energiaren ekuazio generala, korrante baten bi sekzioren artean

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + E_m = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + G_{12}$$

non $\vec{dF}$ fluidozko korrante-hodi infinitesimalaren gainean 1 eta 2 sekzioen artean egiten den indar erresultantea den. Operatuz:

$$(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dQ dt = \vec{dF} dt$$

$$\vec{dF} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dQ$$

Sekzio osorako integratuz eta $\vec{v}_2$ eta $\vec{v}_1$ batezbesteko abiadurak izanik eta β_2 eta β_1 korrekzio-faktoreak izanik honela geratzen da generalean ekuazio hori:

$$\vec{F} = Q (\beta_2 \vec{v}_2 - \beta_1 \vec{v}_1)$$

Ikusten denez, ekuazio bektorial bat da, eta beraz hiru osagai eskalarrak kontsideratu beharko dira. Ekuazio honen bidez korrante batek bera doaneko hodian egiten duen indarra kalkula daiteke ($-\vec{F}$, akzio-erreakzioaren printzipioaren arauera).

12. GAIA - HIGIDURA OSZILAKORRA

- 12.1 INDARGETZERIK GABEKO OSZILATZAILE HARMONIKOA
- 12.2 BIBRAPENAREN ENERGIA
- 12.3 OSZILAPENEN KONPOSAKETA
- 12.4 BILAKABIDE DISIPAKORRAK, OSZILATZAILE INDARGETUA
- 12.5 OSZILAPEN BORTXATUAK, ERRESONANTZIAK
- 12.6 OSZILATZAILE BATEN INPEDANTZIA

Higidura oszilakorra edo bibrakorra puntu baten inguruan gertatzen den higidura periodikoa da. Sarri agertzen da Naturan; eta horregatik oso interesgarri da beraren azterketa. Gainera, beharrezkoa da higidura hau ongi ulertzea, gero uhin-fenomenoak ulertzeko.

Matematikoki, bibrapen harmonikoen azterketa eginen dugu soilik, zeren eta higidura (edo funtzio) periodikoen Fourier-en analisi egitean, beste edozein funtzio periodiko horrelako funtzioen - bilketa gisa ipin daitekeela frogatzen baita

12.1 INDARGETZERIK GABEKO OSZILATZAILE HARMONIKOA

Hau da higidura oszilakorrik sinpleena, eta, horregatik, berau aztertzen hasiko gara.

Lehen pauso batetan, dimentsio bakarreko higidura kontsideratuko dugu. Definizioz, partikula baten koordinatuak ondoko ekuazio hau betetzen badu,

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

partikula horrek higidura harmoniko sinplea duela esanen dugu.

Expresio horretan:

$$\left\{ \begin{array}{l} x : \text{posizioa adierazten duen koordinatua da} \\ \omega t + \alpha : \text{fase deitzen da} \\ \alpha : \text{hasierako fasea da } (t = 0 \text{ denean}) \\ A : \text{oszilapenaren anplitudea} \end{array} \right.$$

Azter ditzagun higidura honen berezitasun eta ezaugarriak. Matematikoki ikusiz, sinu funtzioa errepikatu egiten da 2π erradian pasatzean. Hau da, higidura hau errepikatu egiten da denborekin: periodikoa da.

Lor dezagun, beraz, higiduraren periodoa (P):

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin[\omega(t + P) + \alpha]$$

$$\omega t + \alpha + 2\pi = \omega t + \omega P + \alpha$$

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

Periodoarekin batera, beraren inbertsua den magnitudea definitzen da: frekuentzia. Periodoa oszilazio oso bat—hau da, higidura errepikatzen hasteko behar den denbora—baldin bada, frekuentzia denbora-unitatean egiten diren oszilapenen kopurua da.

P denboran ————— oszilapen bat

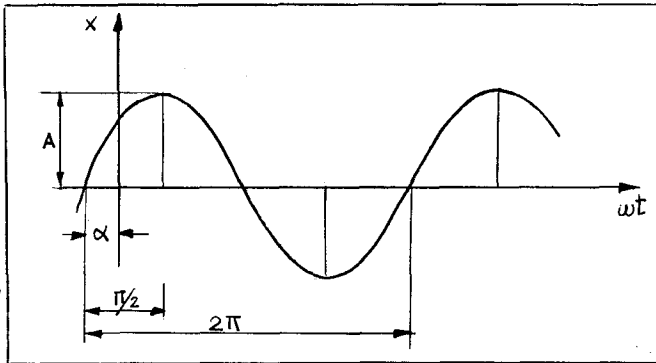
1 segundutan ————— ν oszilapen

$$\nu = \frac{1}{P}$$

Honela, ba, frekuentziak (ν delakoak) oszilapenen maiztasuna adierazten du; eta ikusten denez, periodoaren inbertsua da.

• Adierazpen grafikoa. Bi modu desberdinez adieraz daiteke - grafikoki higidura hau.

Lehen modua, $(x, \omega t)$ koordinatu sisteman $x = x(t)$ funtzioa adieraziz. Honela:

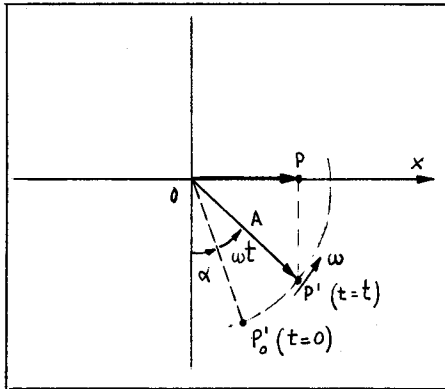


Izatez, sinu funtzioa da, baina ezkerretarantz α angelua desplazatuz.

$$\omega t = -\alpha \Rightarrow x = A \sin(-\alpha + \alpha) = 0$$

Adierazpen honen bidez oso argi ikusten da higiduraren periodoa eta eboluzioa, baina ez ohi da praktikoegi gertatzen, sinu funtzioaren diseinua zaila baita.

Bektore biratzailearen metodoa erabilgarriago gertatzen da, kasu honetan, ondoko konstrukzioa egiten da.



$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Beraz, P puntuak higidura harmonikoa du.

Grafiko honetan oinarriturik, frekuentzia angularra definitzen da: ω Irudian ikusten denez, ω -k P' puntuak egiten dituen erradianen kopurua adierazten du.

oszilapen batetan $\longrightarrow 2\pi$ erradian

denbora unitatean $\longrightarrow \nu$ oszilapen

Beraz, denbora unitatean ω erradian egiten dituen:

$$\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{P}$$

Higidura harmonikoaren Kinematika. Higiduraren adierazpen matematikoa deribatuz higiduraren abiadura eta azelerazioa lor ditzakegu:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

Higidura harmonikoaren Dinamika. Newtonen bigarren legearen arauera:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Direkzio bakarrean gaudenez, ez dut bektore sinboloa ($\vec{}$) jarriko.
Analitikoki:

$$F = -m \omega^2 x$$

Ikusten denez, indarra x koordinatuaren -elongazioaren- propo_
rtzionala da eta kontrako sentidokoa.

Bestalde, $F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ denez

higidura harmonikoaren ekuazio diferentziala ondoko hau izanen da.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \omega^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ekuazio honetan finkaturik, alderantziz egin dezakegu arrazonomendua.
Demagun fenomeno fisiko bat aztertzen ari garela eta fenomeno hori -
adierazten duen ekuazio diferentziala, ondoko hau dela:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad K > 0 \quad \text{izanik}$$

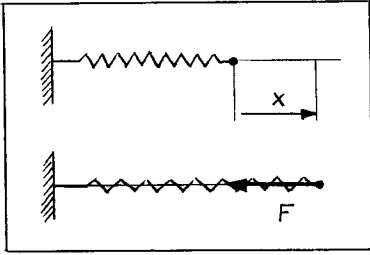
Aurreko ekuazioarekin konparatuz, zera esan dezakegu: Higidura hori
harmonikoa da. Gainera, berorren periodo eta frekuentzia ondokoak -
dira:

$$\begin{aligned} \frac{k}{m} = \omega^2 &\longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ P &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Bistakoa denez, gertakaria hau $F = -kx$ denean jazotzen
da. Orduan:

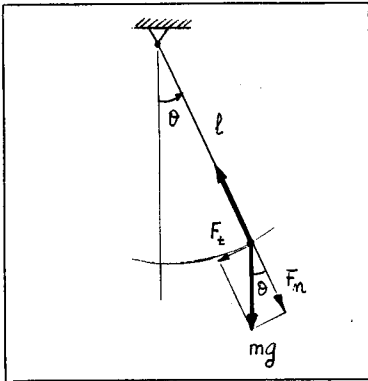
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \longrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Adibideak. Puntu honekin bukatzeko, zenbait adibide ipiniko ditugu.



- a) Mueilea luzatzean, x elonga zioa izanik, balio honetako in darra sortzen da:

$$F = -kx$$



- b) Pendulu sinplea: l luzerako hariak ez du masarik.

$$F_t = -mg \sin \theta$$

Eta tangentearen direkzioko azelerazioa:

$$a_t = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Beraz

$$F_t = m a_t$$

$$-mg \sin \theta = m \cdot l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Sinplifikaturik, hauxe geratzen zaigu:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ikusten denez, ez da zehazki higidura harmonikoari dagokion ekuazioa. Baina oszilapen ttikiak kontsideratuz, $\sin \theta \simeq \theta$ egin dezakegu, - eta orduan

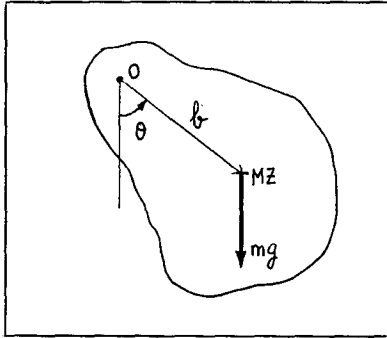
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Hots oszilapen ttikien kasuan, θ anguluaren eboluzioa, higidura - harmonikoarena da. Beraz, Pendulu sinplearen oszilapen ttikian har - monikoak dira.

Lehengo teoriaren arauera, penduluaren oszilapen ttikien periodoa -

ondokoa da:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}$$



Beraz

$$I_e \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg b \sin \theta$$

Eta oszilapen ttikiak kontsideratuz ($\sin \theta \simeq \theta$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg b}{I_e} \theta = 0$$

Hots, higidura harmonikoaren ekuazioa. Oszilapenaren periodoa hauxe da:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{I_e}{mg b}}$$

Pendulu sinplearekin konparatuz, periodo berbera duen pendulu sinplearen luzera, hauxe da:

$$l = \frac{I_e}{m b}$$

Eta bira-erradioa kontutan hartuz

$$(I_e = m k^2)$$

$$l = \frac{m k^2}{m b} = \frac{k^2}{b}$$

c) Pendulu konposatua ardatz finko baten inguruan oszilatzen ari - den gorputz solido bat da.

Beraz, 9. gaian ikusi genuenez (9.-4), ondoko ekuazioa erabili behar dugu

$$\tau_e = I_e \alpha$$

Irudiaren arauera:

$$\begin{cases} \tau_e = -mg b \sin \theta \\ \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

12.2 BIBRAPENAREN ENERGIA

Kontsidera dezagun oraindik ere higidura harmoniko sinplearen kasua:

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \alpha) \\ v = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Kalkulo dezagun partikularen energia kinetikoa.

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [1 - \sin^2(\omega t + \alpha)] \longrightarrow E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) \end{aligned}$$

Expresio hau aztertuz, energia kinetikoaren balorerik handiena

$x = 0$ denean gertatzen dela ikusten da. Kasu honetan:

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Eta balorerik txikiena, $x = A$ denean, zeren eta edozein kasutan $|x| \leq A$ baita kasu honetan ($x = A$)

$$E_k = 0$$

Aurreko puntuan esan dugunez, indargetzerik gabeko bibrapena aztertzen ari gara; hau da, igurtzimendurik gabekoa. Beraz, sistema kontserbakorra dela kontsidera dezakegu. Lor dezagun energia potentziala:

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

Eta dimentsio bakarrean:

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -kx \quad (k = m\omega^2)$$

$$dE_p = kx dx$$

Ekuazio hau integratzean, $x = 0$ punturako $E_p = 0$ dela kontsideratuko dugu. Hau posible da, zeren eta energia potentziala konstante batetan indeterminaturik dagoenez, edozein origen aukera baitetzakegu energia potentziala neurtzeko.

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx dx$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

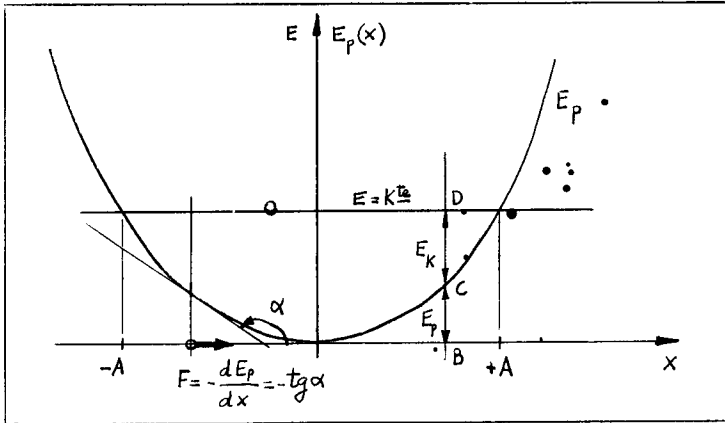
Potentzialaren balorerik handiena mugetan gertatzen da ($x = A$), eta txikiena, $x = 0$ denean.

$$x = A \longrightarrow E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$x = 0 \longrightarrow E_p = 0$$

Indarrak kontserbakorrak direlarik, energia mekanikò osoa kontserbatu egiten da:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$



Higidura hau energiaren grafikoaren bidez azter daiteke. Grafiko onetan, E_p funtzioa parabola batez adierazten da ($E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$) eta energia osoa zuzen horizontal batez ($E = K$) ($E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$) Higidura $+A$ eta $-A$ puntuen artean gertatzen da. Partikula B puntuan dagoenean, ordinatuek zera adierazten dute:

$$\begin{cases} \overline{BC} &= E_p \\ \overline{CD} &= E_k \\ \overline{BD} &= E_k + E_p = E \end{cases}$$

Bukatzeko, indarraren eta tangenteak formatzen duen angeluaren tangentearen arteko erlazioa adierazi da.

12.3 OSZILAPENEN KONPOSAKETA

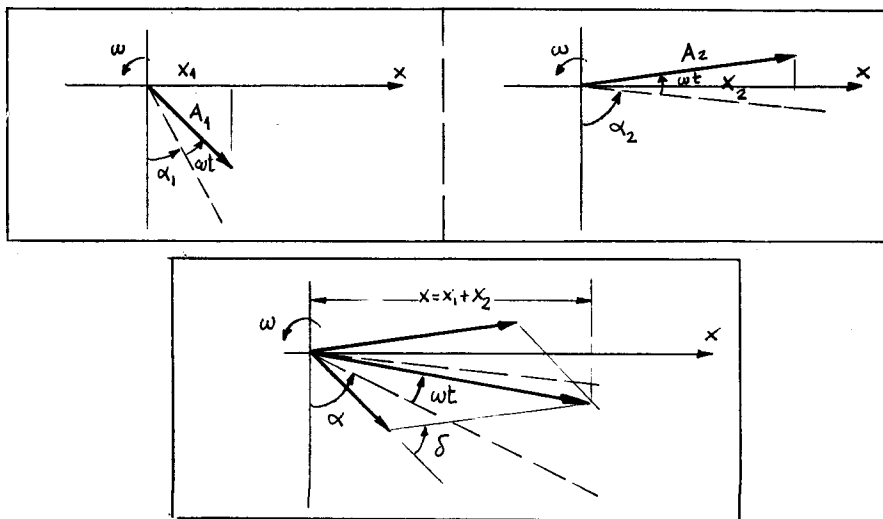
Galdera honetan gainezarmenaren printzipioan oinarrituko gara, eta horrela, batu egingen ditugu gorputz ber baten gainean eragiten ari diren kausa higidursortzaileak eta kausa horien ondorioak.

Hiru kas berezi aztertuko ditugu:

- i) Higidura harmoniko biak direkzio berean eta frekuentzia berberaz gertatzen dira.
 - ii) Direkzio berean baina frekuentzia desberdinez gertatzen diren higidura harmoniko bi.
 - iii) Direkzio perpendikularretan gertatzen diren bi higidura harmonikoren biltzea
- i) Direkzio bereko eta frekuentzia bereko bi higidura harmonikoren biltzea
- $$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Grafikoki, honela adierazten dira higidura hauk, bektore biratzailaren eskemaren bidez.



Bi higidurek frekuentzia berbera dutenez, beheko grafikoetan bi bektoreak erlatiboki geldi daude eta horrela beheko irudiko paralelogramoa, bloke bezala higitzen da: A bektoreak bi higiduren biltza adierazten du.

Irudietan ikusten den bezala

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$$

Higidura erresultantearen frekuentzia ere ω da

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Kalkula dezagun α (higidura erresultantearen hasierako fasea):

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

$t = 0$ eginez:

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$$

$\omega t = \frac{\pi}{2}$ eginez:

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$$

Ekuazio hauen zatiketaz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$

Eginiko kalkuluek adierazten digutenez, frekuentzia bereko eta direkzio bereko bi higidura harmonikoren biltzetaz, higidura harmoniko sinplea lortzen da. Higidura honen anplitudea eta fasea aurreko kalkuluen bidez lortutakoak dira.

Azter ditzagun orain, zenbait kasu berezi, konposatzen diren higidureen faseen artean dagoen erlazioa kontutan harturik

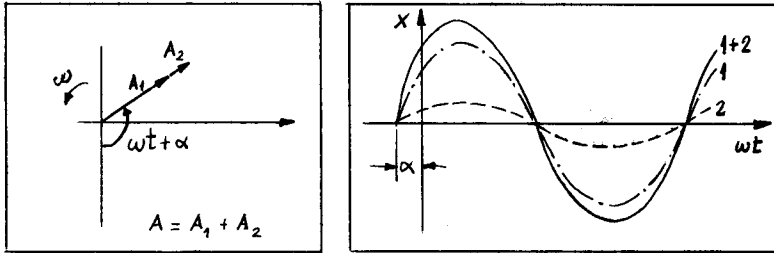
- Higidura biek fase berbera dute

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Beraz

$$\delta = 0 \longrightarrow \alpha = \alpha_1 = \alpha_2$$

Adierazpen grafikoak hauek dira:



• Higiduren faseak eposizioan daude

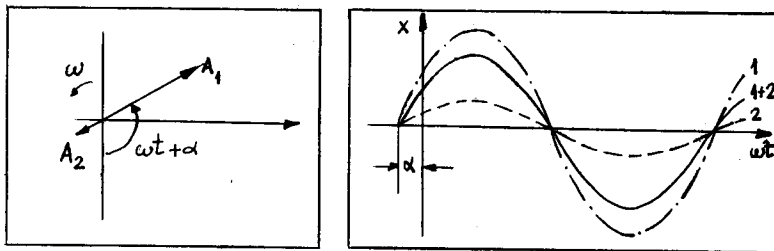
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$$

Demagun $A_1 > A_2$ dela

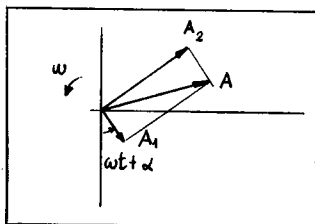
Kasu honetan:

$$\begin{cases} \delta = \pi \\ \alpha = \alpha_1 \\ A = A_1 - A_2 \end{cases}$$

Eta adierazpen grafikoak hauek dira



• Higidura biak koadraturan daude



$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \arctg \frac{A_2}{A_1}$$

ii) Direkzio bereko baina frekuentzia desberdineko bi higidura harmonikoren biltzea

Kalkuluak errazteko, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ direla kontsideratuko dugu. Bestalde, $\omega_1 \neq \omega_2$. Beraz honela adierazten dira higidurak:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \\ x_2 = A_2 \sin \omega_2 t \end{cases}$$

Irudian ikusten denez

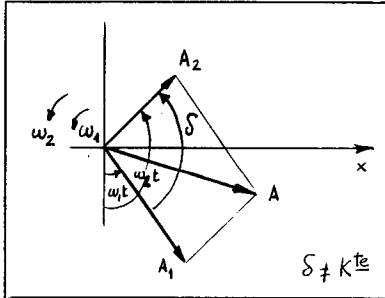
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$

A ez da konstante zeren kosi-nuaren balorea aldatuz baitoa. Balorerik handiena hau da:

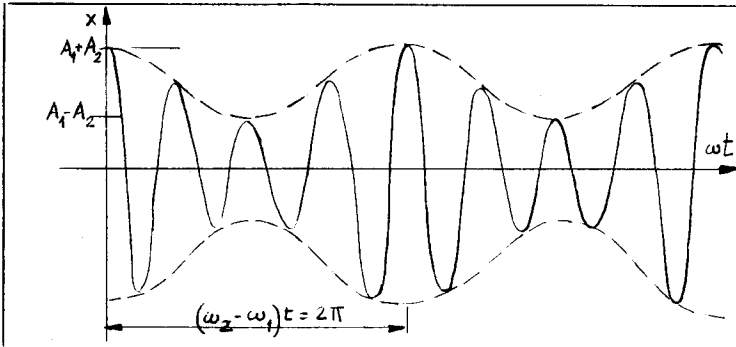
$$\begin{cases} A = A_1 + A_2 \\ (\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi n \quad \text{denean} \end{cases}$$

Balorerik txikiena ($A_1 > A_2$ dela kontsideratuz):

$$\begin{cases} A = A_1 - A_2 \\ (\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi n + \pi \quad \text{denean} \end{cases}$$



Elongazioaren aldakuntzaren adierazpen grafikoa honelakoa da:



Puntuka A delakoaren denborarekiko eboluzioa adierazten da. Beraren periodoa $\frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$ da. Kasu honetan anplitudea modulaturik

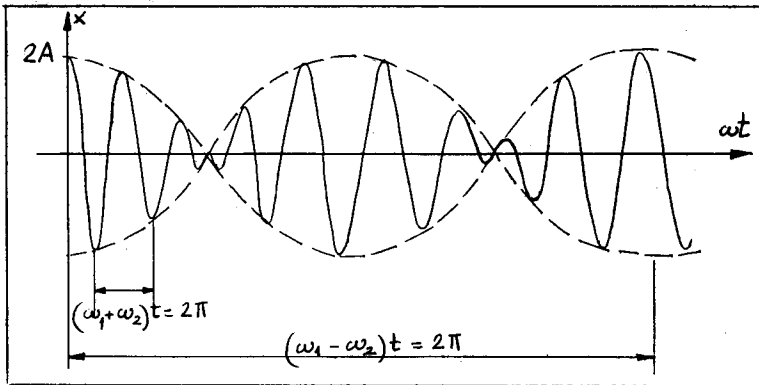
dagoela esaten da.

Kasu berezi gisa, $A_1 = A_2$ egingen dugu

$$x = A_1 (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) =$$

$$x = \left[2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \right] \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

$(\omega_1 + \omega_2)$ $(\omega_1 - \omega_2)$ baino handiagoaenez, kortxete arteko terminoa astiro aldatzen da bigarren sinuarekin konparatuz. Horrela, $\left[2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \right]$ denborarekin aldatzen den anplitude gisa har dezakegu, anplitude modulatu gisa. Grafikoki:



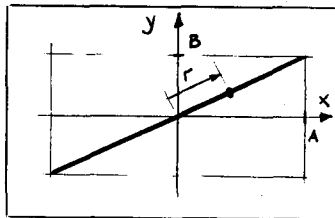
iii) Direkzio perpendikularretan gertatzen diren bi higidura harmonikoren konposaketa.

Higidura biak laun batetan gertatzen direla kontsideratuko dugu: x ardatzaren direkzioan bata eta y ardatzaren direkzioan bestea. Higiduraren konposatze moduz konturatzeko, kasu berezi batzu aztertuko ditugu. Eta kalkuluak errazteko, bi higiduren frekuentziak berdinak direla kontsideratuko dugu. Beraz:

$$\begin{cases} \text{lehen higidura} \longrightarrow & x = A \sin \omega t \\ \text{bigarren higidura} \longrightarrow & y = B \sin(\omega t + \delta) \end{cases}$$

Azter ditzagun kasu berezi bi:

- $\delta = 0$
$$\begin{cases} x = A \sin \omega t \\ y = B \sin \omega t \end{cases}$$
$$y = \frac{B}{A} x$$



Ikusten denez, higidura harmoniko bien konposatetaz, zuzen batetan zehar gertatzen den higidura bat sortzen da.

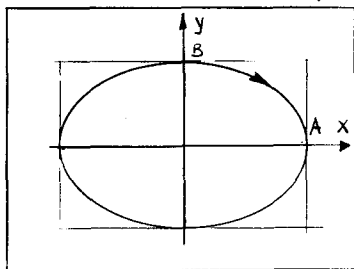
Bestalde, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dela kontutan hartuz, partikularen r koordinatuaren eboluzioa hauxe izanen da:

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \omega t$$

Beraz, higidura erresultantea ere harmonikoa da. Polarizapen zuzena lortu dela esaten da

- $\delta = \frac{\pi}{2}$
$$\begin{cases} x = A \sin \omega t \\ y = B \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B \cos \omega t \end{cases}$$

Eta hemendik erraz lortzen da:



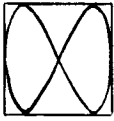
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Ikusten denez puntuak elipse bat deskribatzen du, ω frekuentzia angularraz

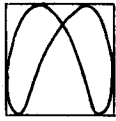
- δ delakoak beste balio batzu hartzean, antzeko irudiak sortzen dira.

Frekuentziak desberdinak direnean, Lissajous-en irudiak sortzen dira.
Adibidez, $\omega_2 = 2\omega_1$ denean,

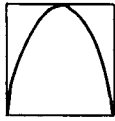
$$\begin{cases} x = A \sin \omega_1 t \\ y = B \sin(\omega_2 t + \delta) \end{cases} \quad \text{izanik}$$



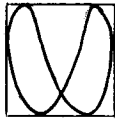
$$\delta = 0$$



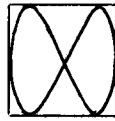
$$\delta = \frac{\pi}{4}$$



$$\delta = \frac{\pi}{2}$$



$$\delta = \frac{3\pi}{4}$$



$$\delta = \pi$$

12.4 BILAKABIDE DISIPAKORRAK. OSZILATZAILE INDARGETUA.

Orain arte, oszilapen harmonikoak aztertzean, bibrapenaren anplitudea konstantea zela kontsideratu dugu. Baina esperientzian agertzen diren bibrapenen anplitudea ttikituz doa denborarekin, erabat desagertu arte, bestelako indar eragilerik ez badago. Desagerpen hori -igurtzimenduaren kausaz gertatzen da. Igurtzimendua ez ohi da solidoen artean gertatzen -bibrapen kontuetan- eta gehienetan partikula higitzen deneko ingurunearen biskositatearen kausaz sortua da. -Horregatik kasu hau da hemen aztertuko duguna.

Beraz bi eratako indarrak kontsideratuko ditugu. Batetik, bibrapenak sortzen dituen indar elastikoa ($F = -kx$) eta bestetik, biskositatearen kausaz sorturiko igurtzimendua ($F' = -\lambda v$). Hemen λ konstante bat da (ikus 5.6.). Kalkuluak errazteko, direkzio bakarreko higidura aztertuko dugu.

Higidur ekuazioa ondokoa izanen da:

$$ma = -kx - \lambda v$$

Hots:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + k x = 0$$

Ekuazio hau honela idazteko ohitura dago:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Hemen

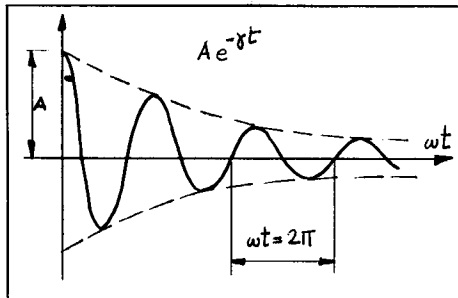
$$\begin{cases} 2\gamma = \frac{\lambda}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases} : \text{Hau da, indargetzerik gabeko} \\ \text{higiduraren frekuentzia angu-} \\ \text{larra.}$$

Beraz, horixe da bibrapen indargetuen ekuazio diferentziala. Guk ez dugu osorik ebatziko; baina higidura nolakoa den ikusteko, bi kasu nagusiak aipatuko ditugu eta kualitatiboki aztertuko:

a) $\gamma < \omega_0$ denean, ebatzia ondoko hau da

$$x = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{cases} A \text{ eta } \alpha : \text{hasierako baldintzen bidez lor daitezkeen konstanteak} \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{cases}$$



Ikus daitekeenez, x delakoa alboko irudian adierazten den bezala aldatzen da:

- Oszilapenaren anplitudea ttiki tuz doa exponentzialki:

$$A e^{-\gamma t}$$

Oszilapenaren frekuentzia, indargetzerik gabe duena baino ttikiagoa da:

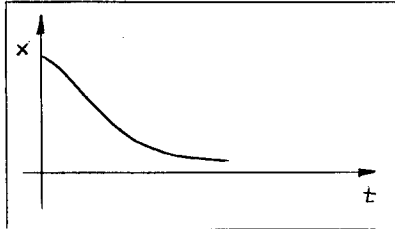
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

Lehen kasu hau biskositatearen indarra erlatiboki txikia denean sortzen da

$$\gamma \text{ txikia} \implies \lambda \text{ txikia} \implies F' = -\lambda v \text{ txikia}$$

Oszilapenak behin eta berriro gertatzen dira baina gero eta amplitudetxikiagorekin.

- b) $\gamma > \omega_0$ denean, indargetzea oso handia da eta ez da bibrapenik gertatzen. Elongazioaren aldakuntza era honetakoa da.



Zer esanik ez, indargetzea dagoen prozesuetan, energiaren galpena dago eta partikularen energia mekanikoa ez da kontserbatzen. Aldiune bakoitzean parte bat ingurunera pasatzen da eta azkenean partikularen energia osoa galtzen da.

12.5 OSZILAPEN BORTXATUAK. ERRESONANTZIAK

Demagun, bibratzen ari den oszilatzaile indargetu batek kanpotik eragiten dion indar oszilatzaile baten eragina pairatzen duela.

Izan bedi $F = F_0 \cos \omega_f t$ kanpo-indarraren expresioa.

Idatz dezagun partikularen higidur ekuazioa

$$ma = -Kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_f t$$

$$\begin{cases} -Kx & : \text{indar elastikoa} \\ -\lambda v & : \text{indargetze-indarra} \end{cases}$$

Ekuazio hori ondoko eran geratzen zaigu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 \cos \omega_f t$$

Eta

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{m} = 2\gamma \\ \frac{K}{m} = \omega_o^2 \end{array} \right\}$$

eginik, azkenean ondoko ekuazio diferentziala geratzen da:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

Ekuazio hau oszilapen bortzatuen ekuazio diferentziala da. Maila honetan ez dugu erabat ebartziko ekuazio hau, baina zenbait iruzkin kualitatibo egingen ditugu.

Matematikoki ekuazio hau ebaztean, bi konposatu dituela ikusten da:

- Erregimen trantsitorioan: Termino hau oszilapen indargetue tan agertzen denaren antzerakoa da. Laster deusezten da, eta oszilapen bortzatuek luze irauten badute, gero ez dira kontu tan hartu behar.
- Erregimen permanentean: Termino honek iraunkorki irauten du eta haxe da prezeski oszilazio bortxatua.

Azter dezagun zerbait erregimen iraunkorra. Ekuazioaren ebatzia ondoko hau da:

$$x = A \sin (\omega_f t - \alpha)$$

Kalkula daitekeenez, A eta α , ω_f -ren dependentzia duten bi konstante dira. Balore hau dute:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2\gamma \omega_f}$$

Ikusten denez, erregimen iraunkorrean oszilazioek anplitude konstantea dute (A) eta haien frekuentzia (ω_f) kanpo-indarrarena da.

Azter ditzagun erregimen iraunkor honen zenbait berezitasun.

• Anplitude eta frekuentziaren arteko erlazioa

Aurreko ebatzian ikusi dugunez $A = A(\omega_f)$ kontsidera dezakegu:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

Demagun $\lambda = K/m$ balore bat duela. Honela, anplitudea ω_f delakoaren funtzioan adieraz dezakegu.

- $\omega_f = 0$ denean

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{K}$$

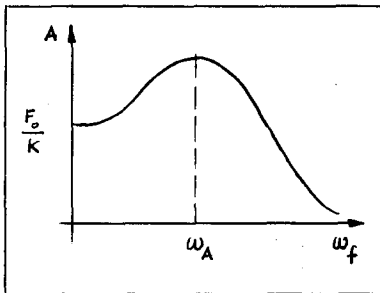
- Anplituderik handiena gertatzen da.

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad \text{denean}$$

$$\omega_A = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\lambda^2}{2m^2}}$$

Ikusten denez $\omega_A < \omega_0$

Grafikoki honela adierazten da $A = A(\omega_f)$ funtzioa

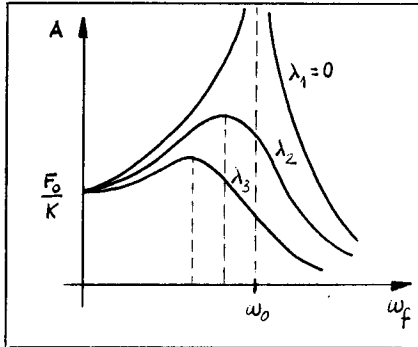


$\omega_f = \omega_A$ denean,

anplitude - erresonantzia

dagoela esaten da.

- Dena den, aurreko eskemako kurbek λ delakoaren balorearen dependentzia dute. Hurrengo eskeman, hiru λ desberdinen kasurako kurbak adierazten dira.



$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \lambda_3$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{denean}$$

$$\omega_A = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$$

Kasu honetan, A delakoa infinitu gertatzen da.

• Azter dezagun partikularen abiadura

Dakigunez

$$x = A \sin(\omega_f t - \alpha)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \alpha)$$

Beraz, abiadurak ere eboluzio bibrakorra du. Abiaduraren oszilatzearen anplitudea ondokoa da:

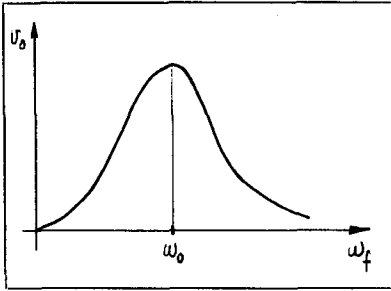
$$v_0 = \omega_f A = \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{1}{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

Edo bestela idatzirik:

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\left(m\omega_f - \frac{K}{\omega_f}\right)^2 + \lambda^2}}$$

v_0 delatoak ω_f delatoaren dependentzia du. λ kontantea denez, v_0 -ren maximoa $m\omega_f - \frac{K}{\omega_f} = 0$ denean gertatzen da.

$$m\omega_f = \frac{K}{\omega_f} \quad \longrightarrow \quad \omega_f = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$$



Alboko irudian $v_0(\omega_f)$ funtzioaren eboluzioa adierazten da. Irudi hau λ konkretu batetarako eginik dago.

Kasu honetan, $\omega_f = \omega_0$ denean lortzen da v_0 maximoa. Eta energia kinetikoa $\frac{1}{2}mv^2$ denez, $\omega_f = \omega_0$ denean, energi erresonantzia dagoela esaten da.

Ikusten denez, bi erresonantzi moeta aipatu ditugu: anplitude-erresonantzia eta energi erresonantzia. Lehen $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ denean gertatzen da eta bigarrena, $\omega_f = \omega_0$ denean. Indargetzea ttikia - denean (λ ttikia) bi erresonantziak oso hurbil daude.

12.6 OSZILATZAILE BATEN INPEDANTZIA

Dakigunez, oszilatzaile indargetuen ezaugarriak hiru magnituderen bidez defini daitezke:

$$\begin{cases} m & : \text{partikularen masa} \\ k & : \text{elastizitatea adierazten duen konstantea} \\ \lambda & : \text{indargetzea adierazten duen konstantea} \end{cases}$$

Horrelako sistema bat indar oszilatzaile baten eraginpean jartzean, oszilapen bortxatuak sortzen dira:

$$\begin{aligned} \text{Indarra} & : & \begin{cases} F = F_0 \cos \omega_f t \\ v = v_0 \cos(\omega_f t - \alpha) \end{cases} \\ \text{Abiadura} & : & \end{aligned}$$

Beraz, abiadura eta indarraren artean α desfasea dago. Baina ikus dezagun nolakoa den v_0

$$v_o = \omega_f A = \frac{F_o}{\sqrt{\left(m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}\right)^2 + \lambda^2}}$$

Expresio honen denominadorea, oszilatzailearen inpedantzia deitzen da, eta Z letraz adierazi ohi da

$$Z = \sqrt{\left(m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}\right)^2 + \lambda^2}$$

Modu berean ondoko magnitudeak definitzen dira:

erreaktantzia

$$X = m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}$$

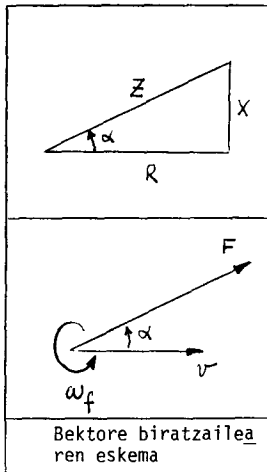
erresistentzia

$$R = \lambda$$

OHARRA: Izen hauen zergatikoa, elektra korronte alternoen kasuan ikusten da, zeren eta azken batez zirkuituak - sistema oszilatorrak baitira; eta hortik datoz izenok.

Ikus daitekeenez;

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2}$$



Modu berean α delakoaren balorea kontutan edukiz, zera ikusten da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{R}$$

Bestela abiadura eta indarraren arteko erlazioa aztertuz

$$\begin{cases} F = F_o \cos \omega_f t \\ v = \frac{F_o}{Z} \cos(\omega_f t - \alpha) \end{cases}$$

v eta F ere angulu berean desfaturik daudela ikusten da.

Bukatzeko, $\alpha - K$ hartzen dituen baloreak kontsideratu ditzakegu:

- R beti da positiboa $R = \lambda$
- X, ordea, positibo zein negatibo izan daiteke.

$$X = m \omega_f - \frac{K}{\omega_f}$$

Beraz hiru eratako baloreak har ditzake α delakoak

- i) $\alpha > 0$ kasu honetan $X > 0$ da
 ω atzeraturik doa F -rekiko
 bektore biratzailearen eskeman
- ii) $\alpha < 0$ $X < 0$
 ω aurreraturik doa
- iii) $\alpha = 0$ Sistemaren erresonantzia, ω eta F fasean
 doaz.

A Z K E N O H A R R A :

Puntu honetan emandakoa, elektra korrante alternatibaren azterketarako prestaturik dago. Izatez elektrozirkuituak oszilatzaile bortxatu - eta indargetuak dira korrante alternatiboa iragatean, "kanpo-indarraren" frekuentzia korrontearena izanik. Erregimen iraunkorrean desfasea - dago (α) tentsio elektrikoaren eta intentsitate elektrikoaren artean. Inpedantzia, erreaktantzia eta erresistentzia kontzeptuek - esangura konkretua dute kasu honetan.

13. GAIA - UHINGIGIDURA

13.1 UHINGIGIDURAREN DESKRIPZIO MATEMATIKOA

13.2 UHINGIGIDURAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA

13.3 UHING-MOETAK

13.4 UHING ELASTIKO LONGITUDINALAK BARRA BATETAN ZEHAR

13.5 SOKA BATETAN GERTATZEN DIREN UHING TRANSBERTSALAK

13.6 BI ETA HIRU DIMENTSIOTAKO UHINGAK

13.7 UHINGIGIDURA ETA MOMENTU LINEALAREN ETA ENERGIAREN
HEDAPENA

13.8 TALDE-ABIADURA

13.9 DOPPLER EFEKTUA

Fisikaren oinharrian dauden bi kontzeptu, partikularena eta uhinarena dira. Partikulatzat materia-kantitate ttikia hartzen dugu eta bera-
ren higiduraren Dinamika aztertzen dugu. Uhin-kontzeptua olatuen higi-
durarekin lotzen dugu eta horrek gutti gorabeherako ideia bat ema-
ten digu. Hala ere; ez da pentsatu behar uhin guztiak olatuen antze-
rakoak direnik. Olatuen kasuan, adibidez, higitzen den materia dugu;
baina uhin elektromagnetikoen kasuan, ez da materia problemarik edu-
kiko eta uhin horik hutsean ere hedatuko dira. Uhin-fenomenoak modu
abstraktuz ere azter daiteke, gauza matematiko bezala. Gai honetan,
ba, uhinen adierazpen generalez arituko gara, zer diren definituz -
eta beren hedapenaren ezaugarri batzu aztertuz. Ez ditugu, ordea,
uhin-higiduraren berezitasunak diren isladapena, errefrakzioa, di-
frakzioa, interferentzia eta beste aztertuko. Uhin elektromagneti-
koen azterketa berezia ere alde batetara utziko dugu.

13.1 UHN-HIGIDURAREN DESKRIPZIO MATEMATIKOA

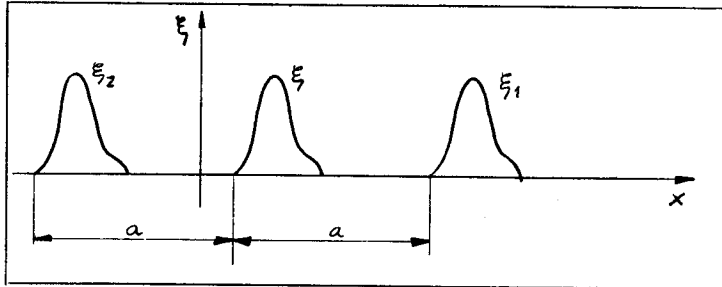
Lehenik eta behin, uhn-higiduraren nolabaiteko definizio bat ema-
nen dugu: "Espazioko puntu batetan gertakari fisiko bat jazotzen -
da, eta honen kausaz magnitude fisiko baten perturbazioa; pertur-
bazio hori alboko puntuetara hedatzen da espazioan zehar eta albo
ko puntu horietan magnitude fisiko berberaren perturbazio bat ger-
tatzen da". Horrelako kasuetan uhn-fenomeno baten aurrean gaudela
esaten da.

Beraz, bi faktore nagusik definitzen dituzte uhn-fenomenoak:

- i) Magnitude fisiko batek puntu batetan duen perturbazioa, eta
- ii) Perturbazio hori alboko puntuetara duen hedapena.

Ikus dezagun, nola adieraz dezakegun hori matematikoki.

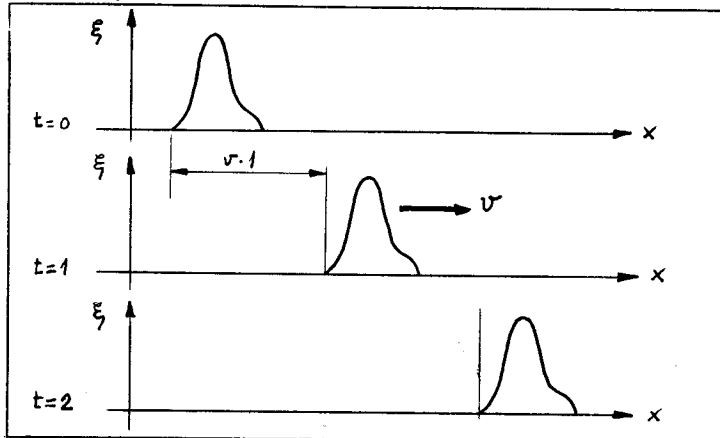
Kontsidera dezagun $\xi = f(x)$ funtzioa, non f edozein funtzio den. Hurrengo irudian $\xi = f(x)$ funtzioarekin batera, $\xi_1 = f(x-a)$ eta $\xi_2 = f(x+a)$ funtzioak adierazi ditugu.



$\xi_1 = f(x-a)$ funtzioak, ξ -ren eite berbera du, baina eskuin alderantz a distantziaz desplazaturik dago.

$\xi_2 = f(x+a)$ funtzioak ere, ξ -ren eite berbera da, baina ezker alderantz a distantziaz desplazaturik dago.

Horretan finkaturik, $a = vt$ eginik, $\xi = f(x - vt)$, denborarekin eskuin alderantz eta eiterik aldatu gabe desplazatzen den funtzio bat izanen da.



Desplazamenduaren abiadura v da, erraz ikus daitekeenez.

Lehenago emaniko definizioarekin konparatuz,

$$\xi(x, t) = f(x - vt)$$

eskuin alderantz v abiaduraz hedatzen den uhin-higiduraren adierazpen matematikoa dela ikusten dugu.

v delakoa fase-abiadura deitzen da.

Ohar gisa, uhin hori distortsiorik gabe -beti eite berberaz- eta direkzio bakar batetan $-x$ direkzioan- hedatzen dela esan behar da. Modu berean, ezkerretarantz hedatzen den uhina, honela adieraziko da:

$$\xi(x, t) = f(x + vt)$$

Uhin unidimentsional harmonikoa. Orain arte esanikoan, f delakoa edozein funtzio izan da. Adibide gisa, kasu berezi bat aztertuko dugu: uhin sinusoidal edo harmonikoaren kasua. Kasu hau, bestalde, oinharritz koena da, zeren eta uhin-higiduraren Fourieren analisia eginez, edozein uhin periodiko uhin harmonikoren batuketa gisa ipin baitaiteke.

Uhin harmonikoaren adierazpen matematikoa hau da:

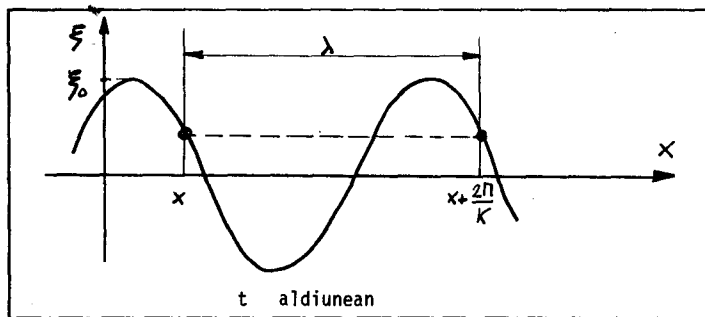
$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$$

Azter ditzagun beronen berezitasunak. Bi eratako periodizitateak ditu: espaziala eta denborala.

i) Periodizitate espaziala. Demagun t aldiunea. Bila ditzagun ξ bereko bi puntu

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \left[k(x - vt) + 2\pi \right] = \\ &= \xi_0 \sin k \left[\left(x + \frac{2\pi}{k} \right) - vt \right] = \xi \left(x + \frac{2\pi}{k}, t \right) \end{aligned}$$

Beraz, denbora une batetan, perturbazioa modu berean ageri da x eta $x + \frac{2\pi}{k}$ puntuetan; egoera fisikoa errepikatu egiten da espazioarekin, $\frac{2\pi}{k}$ luzera bakoitzeko. Periodizitate espaziala duela esaten da. Hurrengo irudian adierazten da.



$\frac{2\pi}{K}$ kantitatea λ letraz adierazten da eta uhin-luzera deitzen da.

$$\lambda = \frac{2\pi}{K}$$

K delakoa uhin-numeroa deitzen da.

ii) Periodizitate denborala. Kontsidera dezagun orain, espazioko x puntua. Bila ditzagun ξ bereko bi une

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_0 \sin K(x - vt) = \xi_0 \sin \left[K(x - vt) + 2\pi \right] = \\ &= \xi_0 \sin K \left[x - v \left(t + \frac{2\pi}{Kv} \right) \right] = \xi_0 \left(x, t + \frac{2\pi}{Kv} \right)\end{aligned}$$

Beraz, x puntuan, perturbazioa modu berean ageri da t eta $t + \frac{2\pi}{Kv}$ aldiunetan. Egoera fisikoa errepikatu egiten da denborarekin, $\frac{2\pi}{Kv}$ denbora bakoitzeko. Periodizitate denborala due la esaten da.

$\frac{2\pi}{Kv}$ kantitatea P letraz adierazten da eta periodo deitzen da. Periodo hau puntu bakoitzeko oszilapenaren periodoa da.

Periodoaren inbertsua fenomeno fisikoaren (perturbazioaren) al-dakuntzaren frekuentzia da. ω letraz adierazten da

$$\omega = \frac{1}{P}$$

Bi periodizitateak erlazonaturik daude fase-abiaduraz.

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ p &= \frac{2\pi}{k v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v p = \lambda$$

Honekin batera, ondoko erlazioa erabiltzen da:

$$v = \frac{\lambda}{p} \longrightarrow v = \lambda \omega$$

13.2 UHIN-HIGIDURAREN EKUAZIO DIFERENTZIALA

Hasteko, eta aurreko puntuan esanikoa azpimarkatuz, distortsio-rik gabeko uhin unidimentsionalak aztertzen ari garela esan behar du-gu. Eta besterik gabe idatziko dugu ekuazio diferentziala, gero ongi aukeraturik dagoenentz ikusiko.

Uhin-higidura deskribazzen duen ekuazioa ondoko hau da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

v delakoa fase-abiadura da eta ekuazio honek berdin balio du $+X$ zein $-X$ direkzioetan hedatzen diren uhinentzat.

Ekuazio honen ebatzi generala hau da:

$$\xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Izatez, ebatzi honetan bi uhin agertzen dira, bakoitza senti-do batean desplazatzen. Gero kasu konkretu batzutan uhin batekin nahiko izanen da, eta beste batzutan isladapenaren kasuan adibidez-biak erabili beharko ditugu.

Ikus dezagun ebatzi horreko goiko ekuazioa betetzen duela

$$\begin{cases} x - vt = u_1 \\ x + vt = u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_2^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + v \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} + v^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_2^2} \end{cases}$$

Argi ikusten denez, ebatzi horrek ongi betetzen du

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{ekuazioa}$$

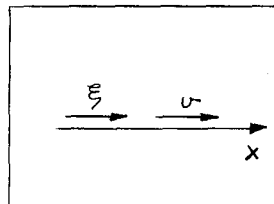
Geroago eginen ditugun adibideetan ikusiko dugunez, zenbait problema fisikotan hurbilketa batzu eginez, ekuazio diferentzial hau agertuko zaigu. Beraz, hurbilketa egokien mugen barnean, uhin-fenomenoak gertatzen direla esanen dugu.

13.3 UHIN-MOETAK

Aurreko puntuetan uhinen adierazpen matematiko orokorra egin dugu, baina ez gara aritu uhinen sailkapena egiten. Horixe da, hain zuzen ere, orain eginen duguna.

Lehen sailkapen bat perturbazioaren eta hedapenaren direkzioak kontutan hartuz eginen dugu. Bi eratako uhinak daude: uhin longitudinalak eta uhin transbertsalak:

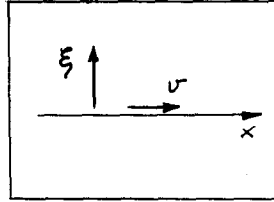
- i) Uhin longitudinalak. Kasu honetan perturbazioaren direkzioa eta hedapenarena berberak dira. Hau da, ξ magnitudearen oszilazioa eta v abiadura, x ardatz berberaren direkzioan gertatzen dira.



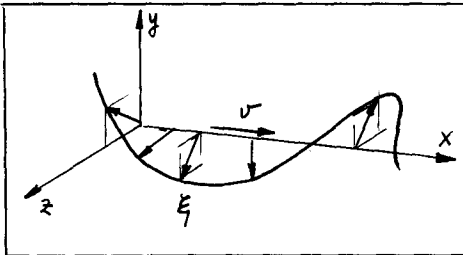
Uhin longitudinalen artean soinua dugu (presio-uhina) eta halaber gorputz solidoetan hedatzen diren uhin elastikoak.

- ii) Uhin transbertsalak. Kasu honetan; perturbazioaren direkzioa eta hedapenaren direkzioa elkarren perpendikularrak dira.

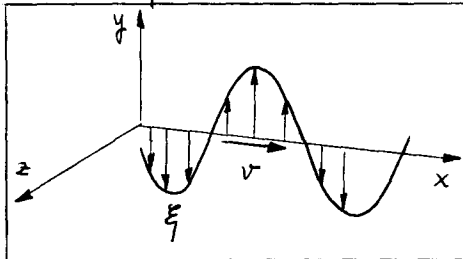
Adibide gisa, soka batetan barrena hedatzen diren uhin transbertsalak ditugu; halaber, itsasoko olatuak eta uhin elektromagnetikoak ere transbertsalak dira.



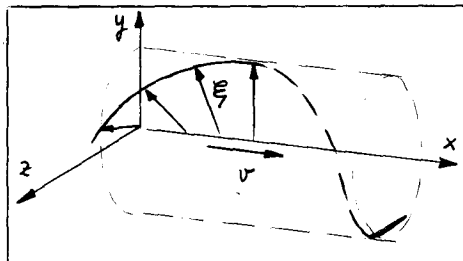
Uhin transbertsalen kasuan polarizapena gerta daiteke. Polarizapenaren muina hurrengo irudietan adierazten da.



ξ perturbazioa edozein direkzioztan jazotzen denean, uhina polarizatu gabe dagoela esaten da.



Perturbazioa beti laun batetan eta direkzio berean gertatzen denean, uhina linealki polarizaturik dagoela esaten da.



ξ delakoak modulu konstantea badu, baina direkzioz aldatuz badoa, zirkularki polarizaturik dagoela esaten da.

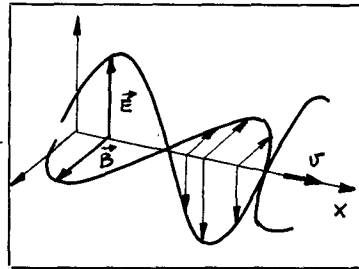
Beste sailkapen bat ere egin dezakegu, hedatzeko ingurune materialik behar dutenentz kontutan hartuz. Bi eratako uhinak duade:

- a) Uhin mekanikoak. Inguru material bat behar dute. Uhin elastikoak eta presiozkoak ditugu. Perturbazioa espazioko puntu batetan gertatzen da, eta materiaren arteko loturaren bidez (elastizitatea, presioa...) alboko puntura hedatzen da. Zer esanik ez, honelako uhinak ez dira hutsean hedatzen.

Uhin hauk intuitiboenak dira, eta aurreko mendean uhin guztiak horrelakoak izan behar zutela uste zen. Argiak ere ingurune bat behar zuela uste zen, eterea.

Hauen artean, uretako olatuak, soinua, solidoetako uhin elastikoak eta beste ditugu.

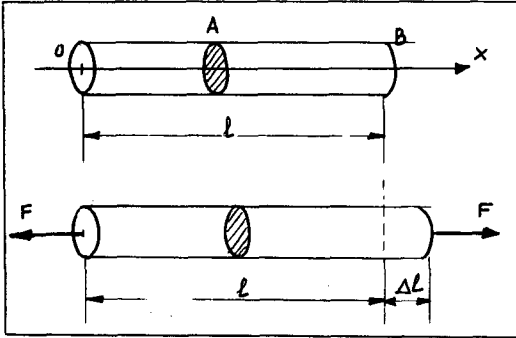
- b) Uhin elektromagnetikoak
Hauk hutsean ere hedatzen dira, argiaren abiaduraz. Ez dute etere beharrik. Izaitez, perturbazioak eremu - elektriko eta magnetikoen aldakuntzak dira.



13.4 • UHIN ELASTIKO LONGITUDINALAK BARRA BATETAN ZEHA

Adibide gisa, uhin longitudinalen kasu berezi bat aztertuko dugu: Barra elastiko batetan zehar, ardatzaren direkzioan - gertatzen diren uhin elastikoak.

Honetarako, Hooke-ren legea erabiliko dugu. Lege honek, elastizitatearen kausaz, gorputzaren gainean indar bat eragitean gertatzen den luzamendua norainokoa den adierazten du. Horregatik, lege hau aztertzetik hasiko gara.



Barraren sekzioa A baldin bada, esfortzu normala honela definitzen da.

$$T = \frac{F}{A}$$

T esfortzua aplikatzean, elastizitatearen kausaz barra Δl luzatzen da

Deformazio unitaria honela definitzen da:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Hooke-ren legearen arauera, materialearen muga elastikoen barnean, esfortzua deformazio unitariaren proportzionala da:

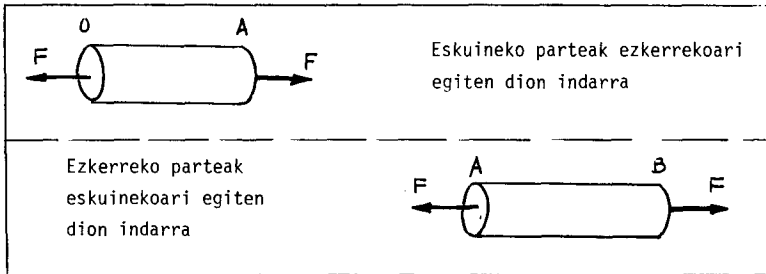
$$T = Y \epsilon$$

Y : Young-en modulua deitzen den konstantea da. Materiale bakoitzaren kasuan balore bat du.

Beraz, barra orekan badago

$$\Delta l = \frac{F}{YA} l$$

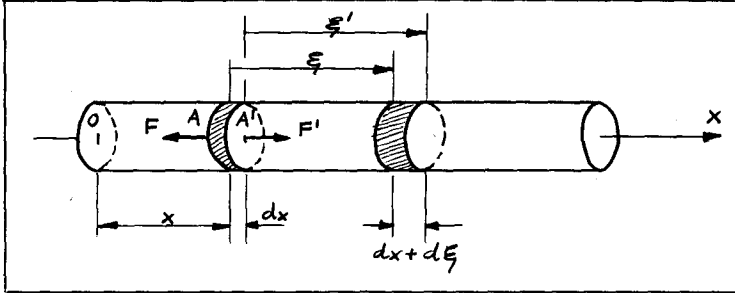
Eta zer esanik ez, F delakoa berbera da sekzio guztietan



Hala ere, barra orekan ez badago, F indarra x aldakariaren funtzioa da:

$$F = F(x)$$

Hauxe da, prezeski, uhinen azterketarako interesatzen zaigun kasua. Azter dezagun desplazamenduen eremua elastizitatearen legeen arauera.



Kontsidera ditzagun bi sekzio A eta A', A' sekzioan F' indarrak eragiten du; eta A sekzioan, F indarrak. Indar horien eraginez, bi sekzio horien desplazamenduak ξ eta ξ' dira. Azter dezagun bi sekzio horien arteko materiaren konportamoldea (irudian -marraturik ageri dena). Bi ikuspegi desberdinez aztertuko dugu materia hori: ikuspegi elastikoz eta ikuspegi mekanikoz:

- i) ikuspegi elastikoa: Zati horren deformazio unitaria hauexeda

$$\varepsilon = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Eta F eta F' indarren artean dF diferentzia dagoela kontutan hartuz, eta beraz, arbuiauz, ondoko erlan aplika dezakegu Hooke-ren legea:

$$F = YA\varepsilon = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad [1]$$

- ii) Ikuspegi mekanikoa: Materia horretan eragiten duen indar netoa hauexeda:

$$dF = F' - F = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Bestalde materia horren masa, ondokoa da:

$$dm = \rho A dx$$

ρ dentsitatea izanik.

Noski, hemen $d\xi \ll dx$ dela kontsideratu dugu. Horrela ρ konstantzat hartzen dugu.

Emaniko datuekin, Newtonen bigarren legea erabil dezakegu:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} dx}_{\text{indarra}} = \underbrace{\rho A dx}_{\text{masa}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}_{\text{azelerazioa}}$$

Beraz, zera geratzen zaigu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad [2]$$

Orain ikuspegi biak konbinatzeko; [1] eta [2] ekuazioak batera erabil ditzakegu:

$$[1] \text{ -etik: } F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = YA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

[2] -ra eramanez:

$$YA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Azkenean zera lortzen dugu:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Ikusten denez, ekuazio hau uhin baten ekuazio diferentziala da. Zer esan nahi du horrek? Sekzioen desplazamenduek uhin-higiduraren - propietateak dituztela. Fase-abiadura hau da:

$$v^2 = \frac{Y}{\rho} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

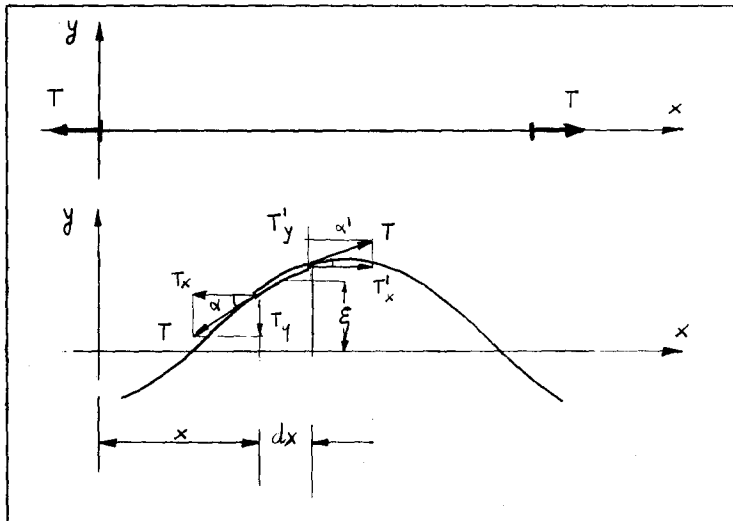
Aurreko kalkuluak modu teorikoz egin dira. Hala ere, esperimentalki konprobatu da aurreko baloreak zuzenki erlazionaturik daudela (tolerantzia edo hurbilketa batez). Dena den, ekuazio hori lortzeko zenbait hurbilketa egin dugu bigarren ordenako infinitesimoko arbuiauz.

Ikusitako uhinaren kasuan, bai deformazioak (ξ delakoak) eta bai uhinaren hedapenaren abiadurak, x ardatzaren direkzioa dute. Beraz uhin longitudinalak direla esan dezakegu.

13.5 SOKA BATETAN GERTATZEN DIREN UHIN TRANSBERTSALAK

Uhin transbertsal batzuren azterketa teorikoa egiteko, adibide konkretu bat jarriko dugu. Demagun, soka bat T tentsioaren eraginpean orekan dagoela horizontalki.

Zenbait hurbilketa eginen ditugu azterketa errazteko. Pisu eduki arren, pisu hau oso txikia dela kontsideratuko dugu eta horrela horizontalki dagoela kontsideratuko dugu.



Orekan dagoela, desplazatu egingen dugu pixka bat direkzio perpendikular batetan (irudian oso handiturik ikusten da desplazamendua). Zer gertatzen da?

Batetik, bibrapenaz kanpo soka higitzen ez denez, puntu guztietan tentsio berdina kontsidera dezakegu. Eta desplazamendua ttikia - denez gero, tentsio hori orekakoa dela kontsidera dezakegu: T halegia. Kontutan har, ezen kontsiderazio horietan hurbilketak egin ditugula kalkuluak errazteko.

Azter dezagun, Y direkzioan sokaren elementu batek duen higidura.

- a) Lehenik indar erresultantea aztertuko dugu

$$\left. \begin{array}{l} T_y' = T \sin \alpha' \\ T_y = T \sin \alpha \end{array} \right\} \quad F_y = T (\sin \alpha' - \sin \alpha)$$

Eta desplazamendua ttikia izanik α ttikia denez, hurbilketak hau egingen dugu:

$$\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha$$

Horrela

$$F_y = T (\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) = T d(\operatorname{tg} \alpha)$$

eta izatez

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, t) \quad \text{denez,}$$

$$F_y = T \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg} \alpha) dx$$

Bestalde, $\operatorname{tg} \alpha$ sokaren malda da. Beraz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Azkenean zera geratzen zaigu:

$$F_y = T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

- b) Newtonen bigarren legea aplikatzeko, soka-elementuaren masa eta y direkzioan duen azelerazioa idatzi behar ditugu. Luzera unitateko masa ρ izanik,

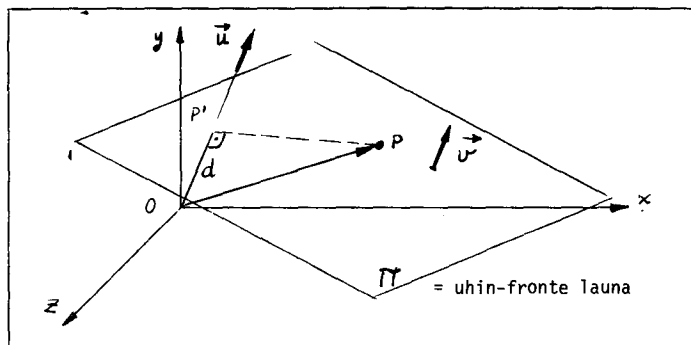
Puntu horiek guztiok uhin-fronte berekoak dira. Uhin-fronteak, kasu honetan launak dira. Generalean, uhin-fronteak fase berberaz oszilatzen duten (edo perturbaturik dauden) puntuen leku geometrikoak dira.

Esandakoa kontutan hartuz, hiru dimentsiotan $\xi = f(x - vt)$ funtzioak x ardatzaren direkzioan $+v$ abiaduraz hedatzen den uhin laun bat adierazten du.

Eta $x = \vec{r} \cdot \vec{u}_x$ denez ($\vec{u}_x$: hedatze-direkzioa)

$$\xi = f(\vec{r} \cdot \vec{u}_x - vt)$$

Arrazoinamendu berbera erabiliz, $\vec{u}$ direkzioaz hedatzen den uhin launaren ekuazioa jarriko dugu.



d : originetik launera dagoen distantzia da

$$d = \vec{u} \cdot \vec{r}$$

Uhinaren adierazpen matematikoa ondoko hau izanen da:

$$\xi = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

Ekuazio diferentziala hiru dimentsiotan

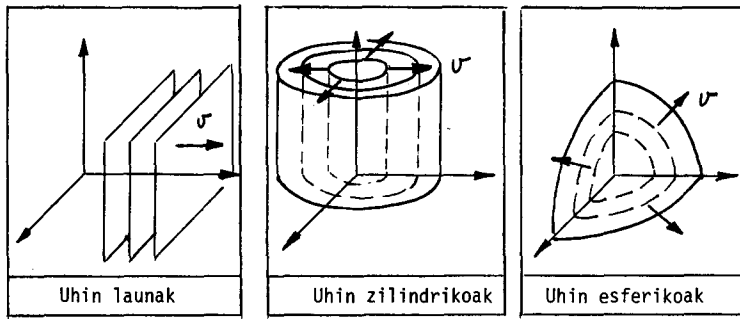
Hedapena hiru dimentsiotako espazio batetan gertatzen denean uhinaren ekuazio diferentziala ondoko hau da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = v^2 \Delta \xi$$

$$\Delta \xi = \nabla^2 \xi$$

operagailu laplaziarra deitzen da.

Uhin-moetak espazioan. Hurrengo irudian hiru uhin-moeta adierazten dira, sailkapenerako kriterioa uhin-fronteen forma geometrikoa delarik.



Zer esanik ez guztien ekuazio diferentziala lehengoa da. Eta uhinak sortzen dituen uhin-iturritik urrun, uhin zilindrikoak eta esferikoak launtzat har daitezke.

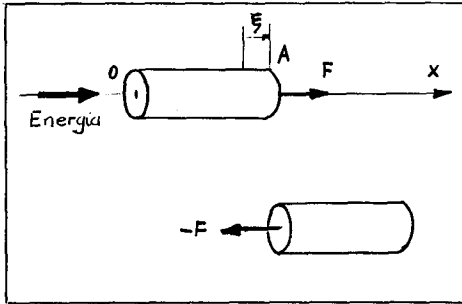
13.7 UHIN-HIGIDURA ETA MOMENTU LINEALAREN ETA ENERGIAREN HEDAPENA

Uhin-higiduraren kasuan perturbazio bat espazioan zehar hedatzen da. Baina zer da, fisikoki, perturbazio hori? Fisikaren (Mekanikaren) arloan ari baikara, kontzeptu mekanikoen bidez adieraziko dugu.

Uhin mekanikoez ari baikara, perturbazioa ξ koordinatuaren aldakuntza bat izanen da. Eta ξ hori aldatuz doanez denborarekin, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, materiaren abiadura dugu, eta beraz momentu lineala eta energia kinetikoa.

Eta perturbazioa hedatu egiten denez, uhin-higiduran momentu lineala eta energia hedatu egiten direla esan dezakegu. Beraz, fisikoki, horixe da uhin-higiduraren esangura: momentu linealaren eta energiaren hedapena.

Hedapen hori nolakoa den ikusteko, adibide bat jarriko dugu. Eta, 13.4. puntuan estudiaturiko barra elastikoaren kasua aztertuko dugu.



A sekzioaren desplazamendua, ξ da. Beraz A sekzioaren abiadura:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Ezkerreko parteak eskuinekoari ematen dion indarra,

$$-F \text{ da.}$$

Beraz, denbora unitatean ezkerreko parteak eskuinekoari ematen dion energia (hots, potentzia), hauxe da:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -F \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad [1]$$

Energiaren fluxua ezkerreko puntatik eskuinetarantz baldin badoa, ezkerreko muturrean (0 sekzioan halegia), energia eman beharko da. Bi posibilitate daude:

- Energia une labur batez ematen bada, perturbazio limitatua dugu (pultsu bat).
- Energia etengabe ematen bada, uhin-multzo iraunkorra sortuko da (uhin-tren kontinua).

Adibide bezala, bigarren kasua aztertuko dugu, eta kalkuluak errazteko, uhin elastiko sinusoidalaren kasua aztertuko dugu.

$$\xi = \xi_0 \sin K(x - vt) = \xi_0 \sin(Kx - \omega t) \quad (\omega K = v \text{ izanik})$$

[1] formula aplikatzeko, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ eta F kalkulatu behar ditugu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\omega \xi_0 \cos(Kx - \omega t) \\ F &= YA \frac{\partial \xi}{\partial x} = YAK \xi_0 \cos(Kx - \omega t) \end{aligned}$$

Bestalde, $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ dela dakigu (ikus 13.4.)

Beraz, [1] -era eramanez:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = Y A \omega K \xi_0^2 \cos^2(Kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v A \left[\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(Kx - \omega t) \right] \quad [2]$$

Adierazpen hau aztertuz; bi ondorio atera dezakegu:

i) $\cos^2(Kx - \omega t) \geq 0$ denez, $\frac{\partial W}{\partial t} \geq 0$ da

Beraz, atengabe ari gara energia ematen 0 sekzioan

ii) Bestalde $\frac{\partial W}{\partial t} = f(Kx - \omega t)$. Hau uhin baten adierazpena da. Hots potentziak uhinaren ekuazioa betetzen du. Uhin hau energi uhina deitzen da.

[2] adierazpenean ikusten denez, potentzia aldatuz doa denborarekin. Interesgarria gertatzen da arrazoi horregatik, denborarekiko batezbesteko potentzia kalkulatzeko:

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = v A \left[\rho \omega^2 \xi_0^2 \overline{\cos^2(Kx - \omega t)} \right]$$

Bestalde, matematikoki dakigunez:

$$\overline{\cos^2(Kx - \omega t)} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = \frac{1}{2} v A \rho \omega^2 \xi_0^2$$

Aurreko gaian, higidura oszilakorra aztertzean (12.2.), oszilatzailearen energia ondokoa zela ikusi genuen:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Barraren bolumen-unitatearen oszilazioa aztertuz

$$A \longrightarrow \xi_0$$

$$m \longrightarrow \rho \quad (\text{dentsitatea} \equiv \text{bolumen-unitatearen masa})$$

Beraz

$$E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

E : energi dentsitatea deituko dugu. Uhin-higiduraren kausaz sorturiko bibrapenak bolumen-unitateko duten energia.

Definizio hau erabiliz:

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = v A E$$

Hemen $\overline{\frac{\partial W}{\partial t}}$ energi fluxu osoa da.

Eta v hedapenaren abiadura eta A barraren sekzioa direnez, vE area-unitateko eta denbora-unitateko dagoen energi fluxua da, eta uhin-intentsitatea deitzen da.

$$I = \frac{1}{A} \overline{\frac{\partial W}{\partial t}} = v E$$

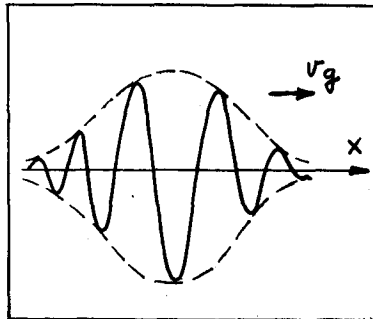
13.8 TALDE-ABIADURA

Frekuentzia bakarrekotako uhin harmonikoak aztertzean, fase-abiadura definitzen genuen

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi \nu}{k} = \lambda \nu$$

Baina normalean, hau ez da halaberharrez, uhin-higidura aztertzean ikusten dugun abiadura.

Demagun uhin kontinuo bat dugula. Posible da uhin horrek uhin-luzera eta frekuentzia bakarrak edukitzea. Baina normalean ez da horrela izaten. Normalean irudian agertzen denaren antzerakoa ohi da. Hots, pultsu-itxura du.



Kasu horretan, uhina ez da harmonikoa.

Beraz, Fourier-en analisia erabili beharko dugu. Dakigunez, hori eginik, uhin kontinua hainbat frekuentzia eta uhin-luzera desberdinaketa uhin harmonikoren batuketa dela ikusten da.

Uhina hedatzen deneko ingurunean, uhinaren hedatze-abiadurak frekuentziaren dependentziarik ez badu (hots, ingurune horretan dispersiorik ez badago), orduan, uhin harmoniko guztiak abiadura berdinez hedatzen dira eta bakoitzaren fase-abiadura eta guztien batuketa den pultsuaren abiadura, berdinak dira.

Baina ingurune horretan dispersioa badago, uhin osoaren konposatu bakoitzak hedatze-abiadura bat du, eta orduan pultsua ez da modu berean hedatzen. Pultsuaren abiadura talde-abiadura deituko dugu.

Fase-abiaduraren eta talde-abiaduraren artean dagoen desberdintasuna argi ikusteko, adibide bat jarriko dugu:

Demagun, uhina anplitude berdineko eta frekuentzia desberdineko bi uhin harmonikoz osaturik dagoela. Frekuenziak oso antzekoak direla kontsideratuko dugu (ω eta ω' oso antzekoak).

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t) + \xi_0 \sin(k'x - \omega' t)$$

$$\xi = \xi_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega' t)] =$$

$$\xi = 2\xi_0 \cos \frac{1}{2} [(K - K')x - (\omega - \omega')t] \sin \frac{1}{2} [(K + K')x - (\omega + \omega')t]$$

Eta ω eta ω' oso berdinak direnez:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (k + k') \simeq k \\ \frac{1}{2} (\omega + \omega') \simeq \omega \end{cases}$$

Honela:

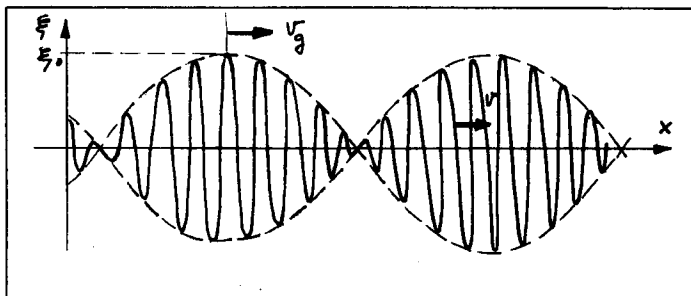
$$\xi = 2 \xi_0 \cos \frac{1}{2} [(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin(kx - \omega t)$$

Ekuazio honek anplitudean modelaturik dagoen uhin-higidura bat adierazten digu. Azter dezagun konkretuki nolakoa den modulazio hori.

$k \gg k' - k$ dela kontutan hartuz, modulazio-faktorea ondoko hau da:

$$2 \xi_0 \cos \frac{1}{2} \left[(k'-k)x - (w'-w)t \right]$$

t aldiunean honelako itxura du uhinak



Modulazio-faktoreak ere uhin-izakera du, beraren ekuazioa uhin-higidurarena baita. Beraz, abiadura bat dagokio modulazioari ere, eta horixe da, hain zuzen ere, talde-abiadura.

$$v_g = \frac{w' - w}{k' - k} = \frac{dw}{dk}$$

Bestalde $w = k v$ denez (kasu honetan)

$$\frac{dw}{dk} = k \frac{dv}{dk} + v$$

$$\text{Hots} \quad v_g = v + k \frac{dv}{dk}$$

Fase-abiadura uhin-luzeraren independentea bada:

$$\frac{dv}{dk} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_g = v$$

Eta ingurune dispertsatzaile batetan $v_g \neq v$

Honelako inguruneetan seinalearen abiadura talde-abiadura da, zeren eta ξ_0 delakoaren agerpena v_g abiaduraz hedatzen baita.

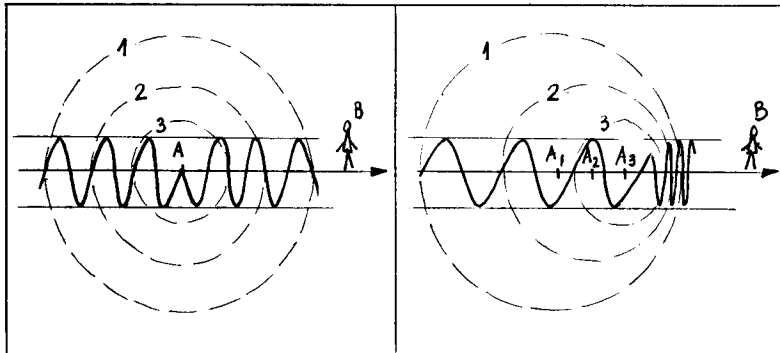
13.9 DOPPLER EFEKTUA

Gaï honetan uhin mekanikoak aztertzen ari garelarik, inguruneak duen garrantzia adieraztea komeni da. Behin iturritik irten eta gero, uhinak ingurunearen bidez hedatzen dira. Eta ingurunea isotropoa bada, hedatze-abiadura berdina da direkzio guztietan. Uhin-abiadura horrek ingurunearen propietateen dependentzia du, 13.4. $(v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}})$ eta 13.5. $(v = \sqrt{\frac{T}{\mu}})$ puntuetan ikusi dugunez. Horrela, uhin-fronteak esferikoak dira.

Hala ere uhin-iturria edo behatzailea ingurunearekiko higitzen direnean -edo, hobeki esateko, elkarrekiko abiadura erlatiboa dute nean-, behatzen diren uhinen frekuentzia (behatzaileak neurtua) eta sortzen diren uhinen frekuentzia (uhin-iturriak sortua) desberdinak dira. Efektu hau Doppler efektua deitzen da.

Hurrengo bi irudiek efektuaren sorrera adierazi nahi dute grafikoki. Bietan uhin-iturriak uhin harmoniko kontinua sortzen du. - Lehenean, uhin-iturria (A) geldi dago ingurunearekiko eta 1, 2, 3 direlakoek hiru unetan sorturiko uhin fronteek egoera adierazten dute une berean.

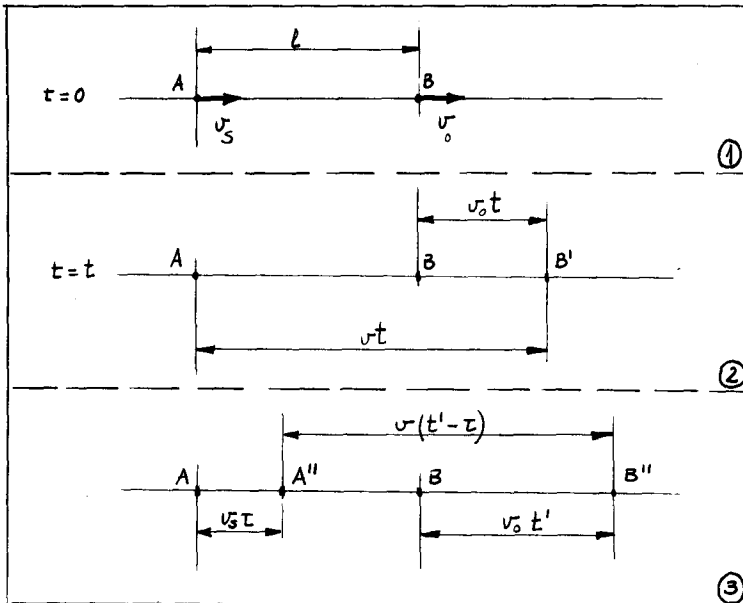
Honekin batera, uhinak iturriaren ezker eta eskuin aldean behatzailearekiko duen forma adierazten da. Bigarren irudian, eskuin alderantz higitzen ari den uhin-iturriaren kasua adierazten da (A_1, A_2, A_3). 1, 2 eta 3, A_1, A_2 eta A_3 puntuetan sorturiko uhin-fronteen egoera da.



Doppler efektua matematikoki azter daiteke. Baina kalkuluak gehiegi konplika ez daitezten, kasu konkretu bat aztertuko dugu soilik:

"Demagun ingurunea geldi dagoela inertzi sistema batekiko.

A uhin-iturria izanik, x ardatzaren direkzioan v_s abiaduraz higitzen dela kontsideratuko dugu. Modu berean B behatzailea izanen da eta v_0 abiaduraz higituko da x ardatzaren direkzioan. Uhin-iturriak $\gg$ frekuentziaz bidaltzen ditu etengabe uhinak. Arazoa, B behatzaileak zein frekuentziarekin neurtzen dituen aztertzea da".



1. Irudian hasierako egoera ($t = 0$) adierazten da. l uhin iturriaren eta behatzailearen artean dagoen distantzia da.

Demagun $t = 0$ unean A-tik B-rantz irteten den uhina. v abiaduraz higitzen da ingurunearekiko. $t = t$ unean heltzen da B behatzailea dagoen punturaino, hots, B' punturaino. (ikus 2. irudia).

$$\overline{AB'} = v t \qquad \overline{BB'} = v_0 t$$

Beraz

$$vt = l + v_0 t$$

$$t = \frac{l}{v - v_0}$$

Azter dezagun orain τ aldiunean uhin-iturritik bidaltzen den uhina. Uhin-iturria A' puntuan dago, $\overline{AA'} = v_s \tau$ izanik. Behatzai lea, dagoen tokiraino (B''-raino) t' unean helduko da, $\overline{BB''} = v_0 t'$ izanik (ikus 3. irudia). Uhinak A'-tik B''-ra joateko behar izan duen denbora ($t' - \tau$) izan da.

Beraz

$$\overline{A'B''} = v (t' - \tau)$$

Eta hirugarren irudian finkatuz:

$$v (t' - \tau) = l - v_s \tau + v_0 t'$$

$$t' = \frac{l + (v - v_s) \tau}{v - v_0}$$

Behatzaileak A eta A' puntuetan sorturiko uhinen artean ikusten duen denbora-tartea ondoko hau da

$$\tau' = t' - \tau = \frac{v - v_s}{v - v_0} \tau$$

Demagun uhin-iturriak emititzen duen frekuentzia ν dela. Kasu horretan τ bitartean sorturiko uhin-kopurua $n = \tau \nu$ da.

Behatzaileak n uhinok τ' bitartean ikusten ditu.

$$n = \tau' \nu'$$

Horrelatan, ba, behatzaileak neurtzen duen frekuentzia (ν' hategia) modu honetan kalkulatuko da.

$$\nu' = \frac{\tau \nu}{\tau'}$$

$$\nu' = \frac{v - v_0}{v - v_s} \nu$$

Hauxe da prezeski. Doppler efektua adierazten duen expresio matematikoa. Argi ikusten denez, $v_0 \neq v_s$ baldin bada, $\nu \neq \nu'$ da.

Hots higidura erlatiboaren kausaz, uhin-iturriak emititzen duen frekuentzia eta behatzaileak hartzen duena desberdinak dira.

Higidura erlatiboaren garrantzia hobeki agertzeko, v_0 eta v_s v -rekin konparatuz ttikiak direnean, hurbilketa bat eginen dugu aurreko adierazpenean

$$v_0 \ll v \quad \text{eta} \quad v_s \ll v$$

$$\gamma' = \frac{v - v_0}{v - v_s} \gamma = \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{1 - \frac{v_s}{v}} \gamma \cong \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \gamma$$

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v_0}{v} + \frac{v_s}{v} - \frac{v_0 v_s}{v^2}\right) \gamma$$

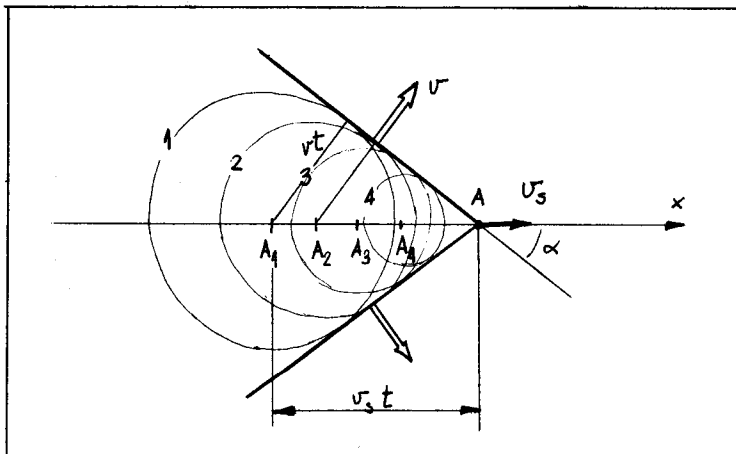
$$\text{eta} \quad \frac{v_0 v_s}{v^2} \quad \text{arbuiauz}$$

$$\gamma' = \left(1 - \frac{v_0}{v} + \frac{v_s}{v}\right) \gamma = \left(1 - \frac{v_0 - v_s}{v}\right) \gamma = \left(1 - \frac{v_{os}}{v}\right) \gamma$$

Hemen $v_{os} = v_0 - v_s$, behatzaileak iturriarekiko duen abiadura erlatiboa da.

- $v_{os} > 0$ denean, behatzailea iturritik urruntzen ari da. Kasu honetan, $\gamma' < \gamma$ da; hots, frekuentzia baxuagoa neurtzen du behatzaileak.
- $v_{os} < 0$ denean, behatzailea iturrira hurbiltzen ari da, eta neurtzen duen frekuentzia, iturriak bidaltzen duena baino altuagoa da.
- $v_{os} = 0$ denean, ($v_0 = v_s$) frekuentzia berbera neurtzen da iturrian eta behatzailea dagoen puntuan.

Bukatzeko, kasu berezi bat aztertuko dugu. Zer gertatzen da, iturria v baino handiagoa den abiadura batez higitzen denean?

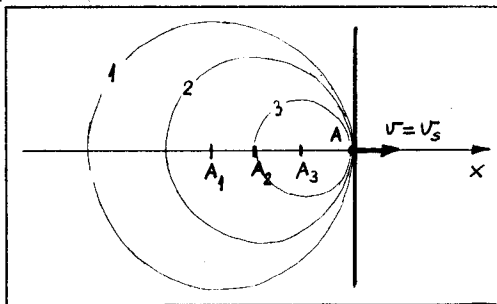


Uhin-fronte guztien tangentea den konoaren zabaladura-angelua hauxe da:

$$\sin \alpha = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$$

Horrela fronte koniko bat gertatzen da. honelako kasuetan sortzen diren uhin konikoak, Mach-en uhinak edo txoke-uhinak deitzen dira. Hauxe da, prezeski, hegazkinak abiadura supertsonikoz higitzen direnean gertatzen dena.

Hurrengo irudian soinuaren orma izenekoa adiarazten da, $v_s = v$ denean prezeski.



14. GAIA - INTERAKZIO GRABITATORIOA

- 14.1 MASA INERTZIALA ETA MASA GRABITAZIONALA.
BALIOKIDETASUNAREN PRINTZIBIOA.
- 14.2 GRABITAZIOAREN LEGE UNIBERTSALA.
CAVENDISH-EN BALANTZA.
- 14.3 KEPLER-EN LEGEAK.
- 14.4 EREMU GRABITATORIOA ETA POTENTZIALE GRABITATORIOA
 - 14.4.1 EREMU GRABITATORIOA
 - 14.4.2 GAUSS-EN TEOREMA
 - 14.4.3 POTENTZIALE GRABITATORIOA
- 14.5 PLANETA ETA SATELITEEN HIGIDURA.
- 14.6 ADIBIDEAK.

14. INTERAKZIO GRABITAZIONALA

Aintzinatean zientziaren atalik garrantzizkoena Astronomia zen. Orduko jakintsuak oso kezkatuak zeuden planeta eta izarren higidurez eta horiei buruzko azterketa asko egin zituzten.

Higidura hori azaltzeko lehen teoria serioa, Ptolomeok egin - zuen Kristoren ondoko bigarren mendean. Teoria geozentriko honetan, Lurra hartzen zen unibertsuaren zentru gisa. Dena den, teoria hori - higidurak nolakoak ziren azaltzera saiatu zen; baina ez zuen zergati-koa azaltzen.

Teoria hori izan zen nagusi XVI menderarte. N. Coperniko, Tycho Brahe eta Johannes Kepler-en lanei esker, Galileok argi azaldu ahal - izan zuen nolakotasuna teoria helio-zentrikoaren bidez. Hau da, plane tek eguzkiaren inguruan dituzten higidurak, Lurraren inguruan dituz- tenak baino askoz ere sinplekiago azaltzeko modukoak zirela azalduz - zuen. Azken batez, alde horretatik, erreferentzi sistema egokia har- tzea zen problema.

Baina planeten higiduren kausa ez zegoen oraindik argiturik. Beharrezkoa zen, higidura horren sortzailea aurkitzea, interakzio gra bitatorioa definitzea hategia. Eta hori egin zuena, Isaac Newton (1642-1727) izan zen. Planeten Dinamikaren azterketaren iturburu den - grabitazio unibertsalaren legea, 1666. urtean izan zen formulatua 1687. urterarte argitaratua izan ez bazen ere. Gai honetan, lege hori eta - dituen ondorioak aztertuko ditugu.

14.1 MASA INERTZIALA ETA MASA GRABITAZIONALA. BALIOKIDE TASUNAREN PRINTZIOA

Indar kontzeptua definitzean (ik 5.4), indarra eta azelerazio konstante batez erlazionaturik daudela ikusi genuen

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Konstante hori materiaren propietate unibertsal baten neurria da eta gorputzaren inertiarekin zerikusia duenez, masa inertziala deitzen da eta m_i sinboloaz adierazten

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

Zer esanik ez, esandakoa sistema inertzialetan eginiko neurriei dagokie.

Lurrak gorputzak erakartzeko duen indarra kontutan hartuz, Lurraren azalean gorputz guztiak azelerazio berberaz erortzen direla dakigu, $\vec{g}$ azelerazioz -grabitatearen azelerazioz- hain zuzen ere. Beraz, pisuaren eta g -ren artean gorputz guztien propietate bat dugu, eta bi magnitude horik konstante batez erlazionaturik daude. Honela

$$\vec{P} = m_g \vec{g}$$

Konstante hau materiaren propietate horren neurri bat da. Eta grabitatearen eragina kuantifikatzen duenez, masa grabitazionala deitzen da eta m_g sinboloaz adierazten.

Berez, m_i eta m_g direlakoak ez dira zertan berdinak izan behar, bi fenomeno desberdinen kuantifikatzaileak baitira, materia moeta guztien propietate izan arren. Baina, esperimentalki ikusi denez, gutienez proportzionalak direla esan daiteke. Hau da,

ezagutzen diren fenomeno guztietan

$$\frac{m_i}{m_g} = k$$

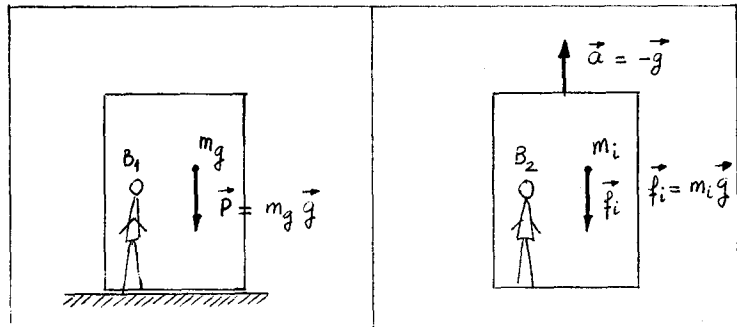
betetzen dela ikusi da.

Hori horrela izanik, baliokidetasunaren printzipioa postulatzeko da $k = 1$ eginik. Hau da, masa inertziala eta masa grabitazionale berdinak direla postulatzeko dugu eta masa izenaz deitzen:

$$m_i = m_g = m$$

Horretarako egin beharko dugun gauza bakarra, masa, indar eta azelerazioaren unitateak postulatu honetan finkatuz definitzea da.

Baliokidetasunaren printzipio honen ondorioak ulertzeko, adibide bat jarriko dugu. Demagun, bi behatzaile desberdin kutxa - hitxi bitan daudela. Lehena, Lurrean dago, Lurraren erakarpen grabitatorioaren eragin pean (B_1) eta partikula bat erortzen ikusten du. Bigarrena, grabitaterik ez dagoen eremu batetan dago, baina - bere sistemak $-\vec{g}$ azelerazioa pairatzen du (B_2)



Biek aztertzen dute partikula ber baten higidura.

B_1 sistema inertzial batetan dago eta indar hau (pisua) neurtzen du.

$$\vec{P} = m_g \vec{g}$$

B₂ sistema ez-inertzial batetan dago eta inertzia indar hau neur-tzen du

$$\vec{f}_i = -m_i \vec{a} = m_i \vec{g}$$

Eta baliokidetasunaren printzipioaren arauera:

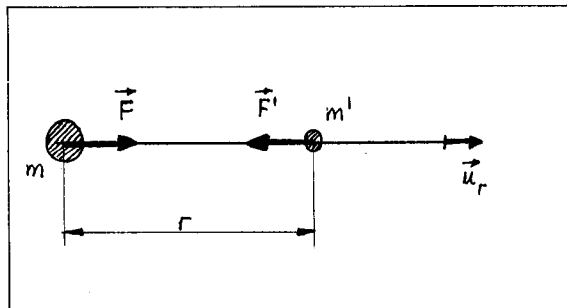
$$\vec{P} = m_g \vec{g} = \vec{f}_i = m_i \vec{g} = m \vec{g}$$

Ikusten denez, ba, grabitatearen eremuaren eta azelera-turik dagoen sistemaren artean baliokidetasun osoa dago eta kaxa barruan dagoen behatzaileak ezin ditzake desberdin bi sistemok. Hauxe da, ba, baliokidetasunaren printzipioaren ondorio nagusia.

Ondorio hau generalizatuz, zera esan dezakegu: "Naturako lege fisikoak, grabitatearen eremu uniformearen eta sistema azele-ratuen arteko desberdintasun dinamikoa ez igartzeko modukoa izan dadin idatzi behar dira".

14.2 GRABITAZIOAREN LEGE UNIBERTSALA. CAVENDISH-EN BALANTZA.

Newton-ek ongi adierazi zuen bezala, grabitazioa mate-riaren propietate unibertsala da. Grabitazioaren kausaz, gorputzen artean indar erakarleak sortzen dira. Indar hauek gorputzaren mate-ria-kantitatearen dependentzia dute eta beraz, gorputzen masaren -proportzionalak dira (zer esanik ez, masa diogunean, baliokidetasu-naren printzipioa dugu kontutan). Bestalde, indar erakarleak ttikia gotu egiten dira distantziaren koadratuaren arauera. Grabitazioaren lege unibertsala honela adierazten da matematikoki bi masaren kasu rako:



$$\vec{F}' = - \gamma \frac{m m'}{r^2} \quad \vec{u}_r = - \vec{F}$$

Hemen $\vec{F}$ m masan eragiten duen indarra da eta $\vec{F}'$ m' masan eragiten duena. Indar hauek akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen dute:

$$\vec{F}' = - \vec{F}$$

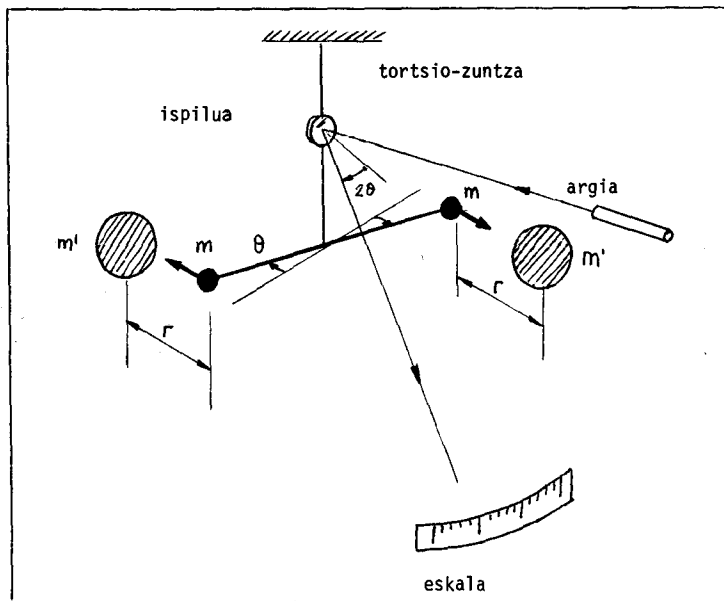
Bestalde, indarrak gorputzen grabitate-zentruan daude aplikaturik.

Lege unibertsal horren zuzentasuna esperimentalki frogaturik dago. Horrela determina daiteke γ konstantea, ondoko balorea eta dimentsioak dituelarik :

$$\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \quad \text{N m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (\text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2})$$

Ikusten denez, interakzio grabitatorioa oso ahula da, eta indartsu ager dadin, masa handiek interakzionatu behar dute (planeta eta izarren kasuan bezala).

Lurreko masa ttikiekin neurtua izateko, oso tresna sentikorrek erabili behar izaten dira. Hauen artean gehien erabili izan dena, Cavendish-en balantza izenekoa dugu. Balantza hau ondoko irudian dago adierazirik eskematikoki:



Balantza hau torsiozkoa da. Bi masa (m) ditu (normalean oso dentsitate handikoak). Beste bi masa handi (m') alboan jartzean, erakarren indarrez, bira erazi egiten duen - indar-pare bat sortzen da. Tortsio-zuntzaren bira ispilu batek isladatzen duen argi-izpi baten desbidaketaren neurketaren bidez kalkulatu da. Balantza honen bidez grabitatearen legearen zuzentasuna froga daiteke esperimentalki, eta γ -ren balorea ere determina daiteke.

14.3 KEPLER-EN LEGEAK

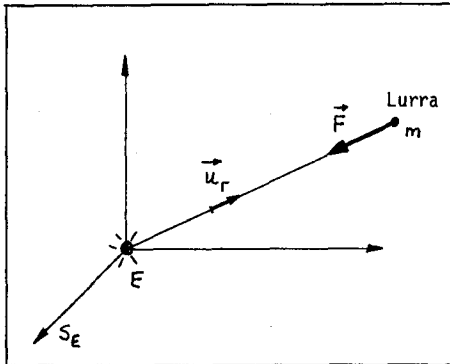
Lege hauek garrantzi handia dute Fisikaren historian. Kepler-ek eman zituen XVII. mendearen hasieran, aurreko mendean Tycho Brahe-k eginiko neurketa esperimentaletan finkatuz. Berez, - eman zirenean, guztiz enpirikoak izan ziren; baina orain dakigunez, grabitazio unibertsalaren legearen ondorio dira. Dena den, maila - honetan guk ez dugu frogapen matematiko zehatzik eginen, horrek - zenbait zailtasun agertuko baidituzke. Hemen, beraz, formulatu egi - nen ditugu, eta zenbait punturen azterketa matematiko sinplea egi - nen dugu eskematikoki.

Kepler-en legeak planeta-sistema eguzkitiarrari buruz koak dira. Erreferentziazko sistematzat, eguzkiarekin loturik doana eta birarik gabe (izar gixoei begira) doana hartzen da. Azken - batez, sistema hori inertzialtzat jotzen da (hau ia-ia horrela da). Sistema horretatik planeten higidura aztertzen da. Hiru dira, ba, Kepler-en legeak:

1. Planetek orbita eliptikoa deskribatzen dute eguzkiaren inguruan, eguzkia foko batetan dagoelarik.
2. Eguzkiaren inguruko ibilbidean, eguzkitik planetara - doan erradio bektoreak denbora-unitatean estaltzen duen area, konstantea da. Hau da, higidura horren abiadura areolarra konstantea da.
3. Orbita osotzeko planetek ematen duten denbora, bakoitzak deskribatzen duen elipsearen ardatz nagusiaren $3/2$ potentziaren proportzionala da.

Hiru lege hauetarik bigarrena frogatuko dugu soilik, zeren eta besteen azalpena beste maila batetakoa baita.

Demagun, eguzkiarekin doan inertzi sisteman goazela. Eguzkiak Lurrari egiten dion indarra zentrala da (ikus 5.8). Beraz higidura launa da



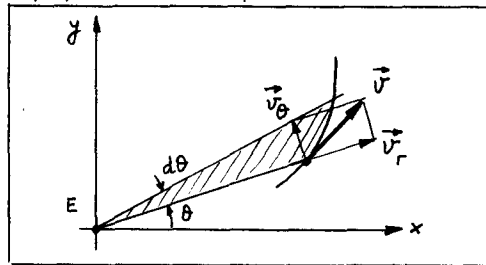
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0$$

zeren eta $\vec{F}$ eta $\vec{r}$ paraleloak baitira.

Beraz

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = k^{te}$$

Eta $\vec{L}$ eta $\vec{r}$ perpendikularrak direnez eta $\vec{L}$ konstante denez, $\vec{r}$ beti dago $\vec{L}$ - ren perpendikularra den plano batetan



Laun horretan

$$|\vec{L}| = m r v_{\theta} = m r r \frac{d\theta}{dt} = k^{te}$$

Baina bestalde azter dezagun abiadura areolarra

$$dA = 1/2 r \cdot r d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 1/2 r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = k^{te}$$

Hau da, abiadura ateolarra konstantea da eta horrela Kepler-en bi-garren legea frogaturik geratzen da. Izatez, ba, lege hori grabitazioaren indarra zentrala delako gertatzen da.

14.4 EREMU GRABITATORIOA ETA POTENZIALE GRABITATORIOA

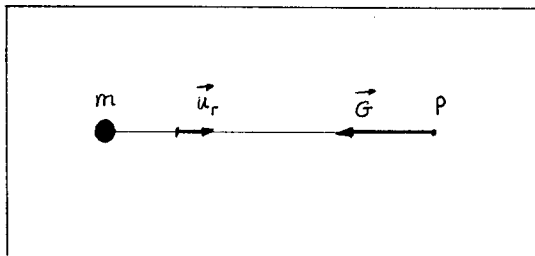
Puntu honetan grabitateari buruzko eredu matema-tikoaren azterketa eginen dugu. Horretarako eremu batzu kontsidera-tuko ditugu eta analisi bektorialeko teknikak erabiliko ditugu.

14.4.1 EREMU GRABITATORIOA

Esan dugunez (ikus 14.2 galdera), edozein bi masa-ren artean erakartze-indar bat sortzen da.

Honek zera esan nahi du: m masa espazioko puntu batetan jartzean, beraren eragina espazio osora -hedatzen da; eta horrela, beste puntu batetan (P-n) m' masa jartzen bada, indar hau jasanen -du m masaren kausaz :

$$\vec{F}' = - \gamma \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r$$



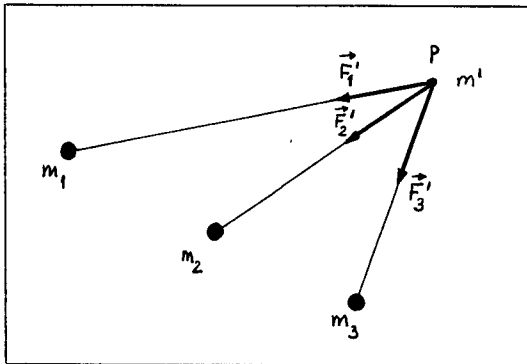
Masa-unitateko m delakoak P puntuan duen eragina kontsideratuz, eremu grabitatorioaren intentsitatea definitzen dugu eta $\vec{G}$ letraz adierazten

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}'}{m'} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

Honelatan, ba, m masak, nolabait esateko, espazio osoaren egitura aldatzen du eta efektu hori $\vec{G}$ bektorearen bidez adierazten da. Eremu bektorial bat dugu, beronen esangura fisikoa hauxe delarik:

"Eremu grabitatorioak puntu batetan duen intentsitatea, puntu horretan jartzen den masa-unitateak jasaten duen indarra da".

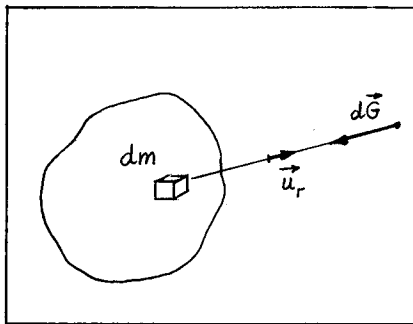
Espazioan bestelako masa batzu ere badaude, gainera menaren printzipioaren arauera, guztien artean sorturiko eremua, bakoitzak sorturikoaren batura da



$$\vec{G} = \frac{\vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \vec{F}_3'}{m'} = \frac{\vec{F}_1'}{m'} + \frac{\vec{F}_2'}{m'} + \frac{\vec{F}_3'}{m'}$$

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3$$

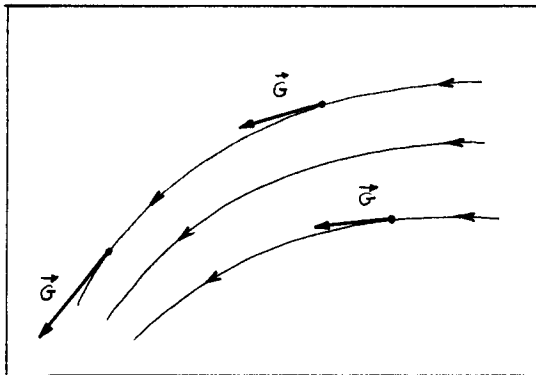
Eremua sortzen duen masa kontinuoa denean:



$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2} \vec{u}_r$$

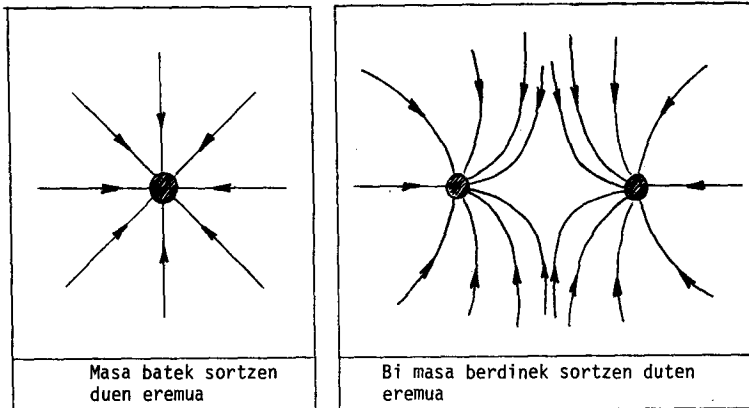
$$\vec{G} = \int d\vec{G}$$

Eremu grabitatorioa grafikoki adieraz daiteke eremu-lerroen bidez. Zer dira eremu-lerroak?



Eremu-lerroak, espazioan suposatzen diren lerro orientatu batzu dira, puntu bakoitzean eremu grabitatorioaren intentsitatearen tangenteak direlarik. Orientazioak eremuaren direkzioa adierazten du. Espazioko puntu bakoitzetik lerro bakar bat pasatzen da (masa-puntualak puntu singularrak dira) eta lerro ber batetako puntuetan G desberdina da generalean, eremu-lerroak beti bukatzen dira masatan (eremua sortzen duten masetan) eta beroien sentidoa masaranzkoa da. Irudia argi gera dadin, eremu-lerro gutti batzu irudikatzen dira soilik, zeren eta berez infinituak baitira kopuruz. Ohargarria - da eremu-lerroek Fluidoaren Mekanikan aztertzen diren korrante-lineekin duten antza.

Hurrengo irudietan bi sistema desberdinetako eremu-
-lerroen itxura adierazten da.

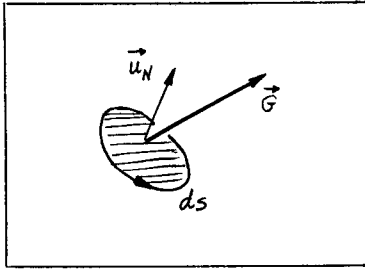


Eremu grabitatorioaren intentsitatea handiagoa den
lekuetan, lerroen kontzentrazio handiagoa ageri da.

14.4.2 GAUSS-EN TEOREMA

Berez, teorema hau eremu bektorialen analisiari dagokio eta generala da. Baina eremu grabitatorioa ere - eremu bektoriala denez, kasu honetan ere erabil daiteke. Guk ez dugu teorema hau hemen frogatuko analisi bektoria lezko edozein liburututan azaltzen baita; beraz, aipatu - eginen dugu soilik eta gero konkretatu eginen dugu eremu grabitazionalaren kasurako.

Teorema hau eman aurretik, fluxu-kontzeptua definitu beharko dugu. Kontsidera dezagun superfizie laun infinitesimal bat. Superfizie horren puntu batetan eremu bektorialak $\vec{G}$ balorea badu, eta $\vec{u}_N$ superfizie horren perpendikularra den bektore unitarioa izanik, eta area - ds izanik, horrela definitzen da, superfizie hori zehar katzen duen fluxua ($d\Phi$):

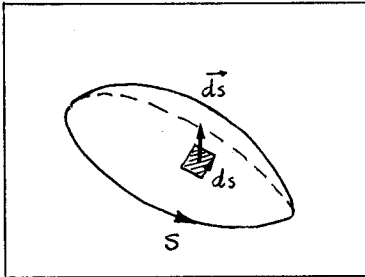


$$d\phi = \vec{G} \cdot \vec{ds}$$

eta $\vec{ds} = ds \vec{u}_N$ denez,

$$d\phi = \vec{G} \cdot \vec{u}_N ds$$

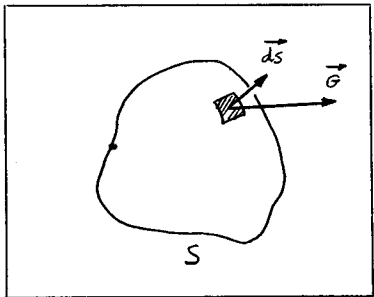
Superfizia finitua denean, zatikatu egiten da superfizie infinitesimaletan eta gero integratu egiten da, fluxu osoa lortzeko:



$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{G} \cdot \vec{ds}$$

Noski, kriterio bat segitu behar da, superfizie-bektoreen sentidoa aukeratzeko.

Superfizia zarratua denean, hots, bere barnean bolumen - bat gordetzen duenean, Gauss-en teorema frogatzen da



$$\phi = \oiint_S \vec{G} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \text{div} \vec{G} dV$$

Hemen superfizie-bektoreak kanpo alderantz kontsideratzen dira.

Eremu grabitatorioaren kasuan, dibergentzia kalkulatu, honela geratzen zaigu

$$\phi = \oiint_S \vec{G} \cdot \vec{ds} = -4\pi\gamma m_T$$

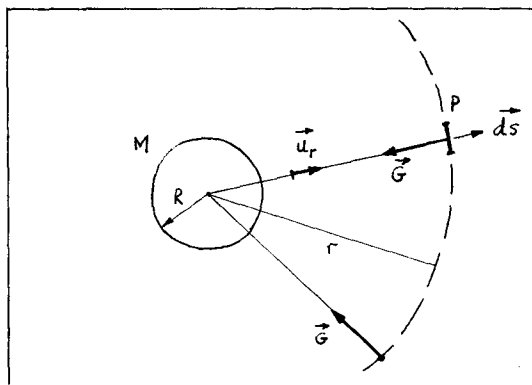
Honek zera esan nahi du: Superfizie zarratu bat kanpo alderantz zeharkatzen duen eremu grabitatorioaren fluxua, superfizie horrek bere barnean daukan masa osoaren (m_T -ren) proporzionala da, hain zuzen ere, $-4\pi\gamma m_T$ balio baitu.

Esan dugun bezala guk geuk ez dugu hemen frogatuko - teorema hau. Ostera, zuzentzat harturik zenbait adibide eginen - ditugu, teorema hori erabiliz eremu grabitatorio batzuren balorea kalkulatzeko.

Adibidea: Kontsidera dezagun R erradiozko esfera homogeneoa - eta azter dezagun

- Esferaz kanpoko puntu batetan sortzen duen eremu grabitatorioa
- Esfera barneko puntu batetan sortzen duena.

a)



Simetriaz, G bektoreak erradioaren direkzioa eduki behar du, eta beraren sentidoa masaranzkoa da, lehenago ikusi dugunez. Bestalde, simetriaz, r erradioiko esfera zentrukideko puntu guztietan eremuak modulo berbera eduki behar du.

Beraz, esfera horretan zeharreko fluxua honela kalkulatu da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{G} = -G \vec{u}_r \\ d\vec{s} = ds \vec{u}_r \end{array} \right\} \quad \vec{G} \cdot d\vec{s} = -G ds$$

$$\phi = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = - \oint_S G ds = -G \oint_E ds = -G 4\pi r^2$$

Eta Gauss-en teorema aplikatuz:

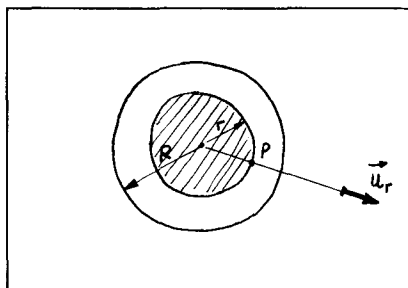
$$\phi = -G 4\pi r^2 = -4\pi \gamma M$$

non M , R erradiozko esferaren masa den. Azkenean zera geratzen zaigu:

$$G = \frac{\gamma M}{r^2}$$

$$\vec{G} = -\frac{\gamma M}{r^2} \vec{u}_r$$

- b) Kalkula dezagun orain, esferaren barneko puntuetan eremuak duen balorea



Esferaren barnean ere, simetriari buruz esaniko ohar guztiek modu berean balio dute. Dena der, r ($r < R$) erradio ko esfera kontsideratuz:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \\ m &= \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \end{aligned} \right\} \quad m = \frac{r^3}{R^3} M$$

Bestalde:

$$\left. \begin{aligned} \vec{G} &= -G \vec{u}_r \\ d\vec{s} &= ds \vec{u}_r \end{aligned} \right\} \quad \vec{G} \cdot d\vec{s} = -G ds$$

Eta r erradioko esferako puntu guztietan G eremuak modulu berbera du. Gauss-en teorema aplikatuz:

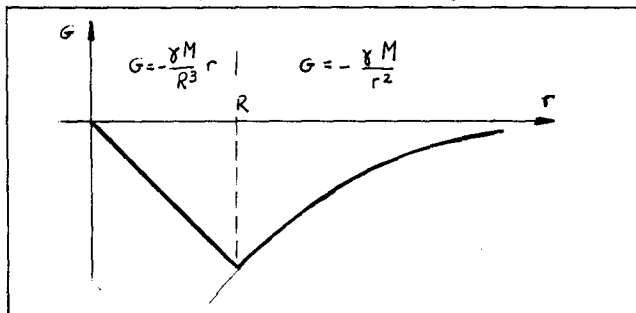
$$\phi = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = -G 4\pi r^2 = -4\pi \gamma m$$

$$\phi = -G 4\pi r^2 = -4\pi \gamma \frac{r^3}{R^3} M$$

Azkenean haxe geratzen da:

$$G = \frac{\gamma M}{R^3} r \quad \longrightarrow \quad \vec{G} = -\frac{\gamma M}{r^3} r \vec{u}_r$$

Beraz, grafikoki honela adieraz dezakegu esfera homogeneoak bai barnean eta bai kanpoan sortzen duen eremu grabitatorioa:



14.4.3 POTENZIALE GRABITATORIOA

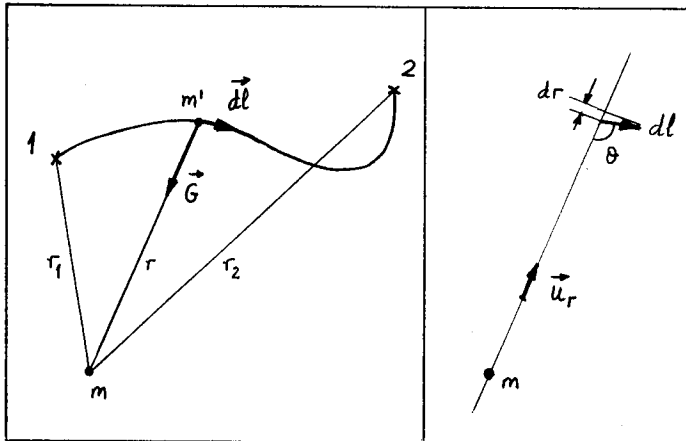
Eremu grabitatorioa kontserbakorra da (ikus 6. gaia, prezeski, 6.5. eta 6.7. puntuak). Beraz, eremu potentzial baten gradiante modura kalkula daiteke

$$\vec{G} = - \text{grad} V$$

Eremu potentzial eskalar hori V letraz adierazi - ohi da eta potentziale grabitatorio izenaz ezagutzen da. Erraz frogatu daitekeenez, eremu grabitatorioa masa unitateko egiten den indarra den bezala, potentziale grabitatorioa ere, masa unitateko energia potentziala da.

Esandakoaz nahikoa bada ere, azalpenak teorikoki - egin beharrean, adibide praktiko batez eginen ditugu, potentziale grabitatorioaren izakera hobeki ulertzeko.

Demagun m' partikula m partikulak sortzen duen eremuan higitzen ari dela. Ikus dezagun zenbat lan egiten duen eremuak 1 puntutik 2 puntura iragatean:



Lan infinitesimala hau da

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m' \vec{G} \cdot d\vec{l} = m' G dl \cos \theta = - m' G dr$$

Beraz:

$$dW = - \frac{\gamma m m'}{r^2} dr$$

Eta bide osoan egiten den lana:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} - \frac{\gamma m m'}{r^2} dr = \gamma m m' \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \gamma m m' \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

Ondorio sinplea atera dezakegu emaitza honetatik: Lanak bidearen extremuen dependentzia du soilik, eta hau, ongi dakigunez, eremu kontserbakorren ezaugarria da. Energia potentziala honela defini dezakegu:

$$E_p = - \frac{\gamma m m'}{r} + K$$

K delako hori konstante bat da. Berez, energia potentziala konstante batez indeterminaturik dago, lana energia potentzialen kendura gisa agertzen baita.

Dena den, ohituraz, eremu grabitatorioaren kasuan, infinituko energia potentziala zerotzat hartzen da.

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow E_p \rightarrow 0$$

Kasu honetan

$$0 = 0 + K \Rightarrow K = 0$$

Beraz, hitzarmen hori eginez

$$E_p = - \frac{\gamma m m'}{r}$$

Masa unitateko energia potentziala potentziale grabitatorioa da. Honelatan, m masak sortzen duen potentziale grabitatorioa hauxe da

$$V = \frac{E_p}{m'} = - \frac{\gamma m}{r}$$

Gainezarmenaren printzipioan oinarrituz, masa desberdinek sorturiko potentziala, bakoitzat sorturikoaren batuketa (eskalarra, noski) da.

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Potentziale grabitatorioa nolakoa den ikusi ondoren, azter dezagun nolakoa den beraren eta eremu grabitatorioaren intentsitatearen⁽⁴⁾ egiten den lan infinitesimala aztertuko dugu:

$$dW = m' \vec{G} \cdot d\vec{l} = -dE_p$$

Hau horrela da, eremua kontserbakorra delako.

Bestalde:

$$dE_p = m' dV$$

Hots:

$$m' \vec{G} \cdot d\vec{l} = -m' dV$$

$$\vec{G} \cdot d\vec{l} = -dV$$

Kontutan har dezagun elementu bakoitzaren adierazpen cartesiarra:

$$\begin{cases} \vec{G} = G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k} \\ d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \\ V = V(x, y, z) \\ dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \end{cases}$$

Beraz, aurreko espresiotik zera geratzen zaigu:

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

Eta hau edozein $d\vec{l}$ elementurentzat gertatzen denez, hauxe bete behar da

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

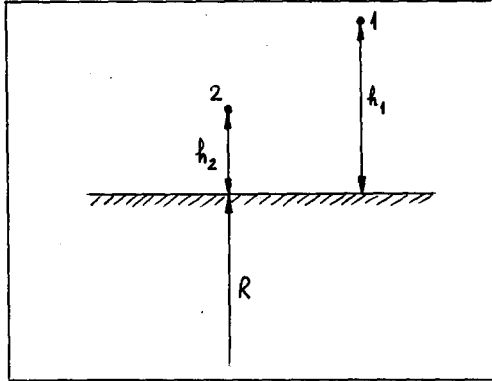
Edo beste modu batetara esanik

$$\vec{G} = -\text{grad } V$$

(4) Oharra: Textu hau falta da: "...arteko erlazioa. Horretarako, berriro ere m' masan egiten..."

Zer esanik ez, hau ados dago puntu honen hasieran esan dugunarekin.

Bukatzeko, adibide modura, azter dezagun Lurraren azalean dagoen potentziale grabitatorioa.



Kontutan eduki behar dugu, Lurra gurekiko ia-ia launa dela, edo $R \gg h$ dela, hots Lurraren erradioa guk kontsideratzen ditugunaltuerak baino askoz ere handiagoa dela.

Erraz frogatu daitekeenez, Lurraren kausazko energia potentziala, masa osoan zentruan kontzentratuik bailegoen kalkulatu daiteke:

$$E_p = - \frac{\gamma M m'}{r}$$

Eta $r = R + h$ denez

$$E_p = - \frac{\gamma M m'}{R + h}$$

Beraz, 1 puntutik 2 puntura pasatzean egiten den lana hau da:

$$W = E_{p2} - E_{p1} = - \frac{\gamma M m'}{R + h_2} + \frac{\gamma M m'}{R + h_1}$$

$$W = \gamma M m' \left[\frac{1}{R + h_2} - \frac{1}{R + h_1} \right] = \gamma M m' \frac{R + h_1 - R - h_2}{(R + h_2)(R + h_1)}$$

Eta $h \ll R$ dela kontutan hartuz:

$$W \cong \frac{\gamma M}{R^2} (h_1 - h_2) m'$$

Hemen
$$g = \frac{\gamma M}{R^2}$$

g delakoa gorputzek Lurraren azalean grabitazioaren kausaz pairatzen duten azelerazioa da (libre egonez gero, noski) - eta grabitatearen azelerazioa deitzen da. Horrela eginik:

$$W = m' g (h_1 - h_2)$$

Horregatik, grabitatearen energia potentziala era honetan - idatzi ohi da:

$$E_p = m g h$$

14.5 PLANETA ETA SATELITEEN HIGIDURA

Planeta eta sateliteen higidura praktikan agertzen den problema bat da. Urrunago joan gabe, hor dugu planetek eguzkiaren inguruan duten higidura edo eta satelite artifizialek Lurraren inguruan dutena.

Lehen errazpen batetan, fisikoki ongi estudiatu ahal izateko, problema hau bi gorputzek osoturiko sistemarena bezala aztertuko dugu. Bi gorputzek eguzki-planeta edo Lurra-satelitea bikoteak izanen dira.

Bi gorputzek osoturiko sistemaren energia mekanikoa (indar-eremu bakarria grabitatearena da) ondokoa da

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - \frac{\gamma m m'}{r}$$

non r bi partikulen arteko distantzia den.

Energia hori sistemaren masa laburtuaren funtzioan jart daiteke (ik. 7.3., masa erreduzitua)

$$\mu = \frac{m m'}{m + m'}$$

$$E = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 - \gamma \frac{m m'}{r_{12}}$$

Azter dezagun, kasu berezi bezala, $m' \gg m$ deneko kasua. Hauxe da, hain zuzen ere, eguzki-planeta sisteman edo eta Lurra-satelite artifiziala sisteman gertatzen dena. Kasu honetan

$$\begin{aligned} \mu &\cong m \\ v_{12} &\cong v \\ r_{12} &= r \end{aligned} \quad (\text{masa-zentruarekiko})$$

Beraz-honela geratzen zaigu energia:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m'}{r}$$

Eginidugun hurbilketa honetan, m' masarekin transaldatzen den erreferentzi sistema inertziala dela kontsideratugutu.

Aurrera eginez eta E energiaren balorea kontutan edukiz, planeten edo sateliteen orbiten izakera nolakoa den ikus daiteke. Guk geuk ez dugu azterketa osoa hemen eginen, baina ondorio kualitatiboak aipatuko ditugu.

Orohar, planeten higidura launa dela esanen dugu (ikus Kepler-en legeak) eta generalean konika erako trajektoriak dituzte. Dena den, kasu desberdinak ager daitezke:

- i) $E < 0$. Energia osoa negatiboa denean, orbitak eliptikoak dira. Energia zinetikoak beti positibo izan behar duenez, bi distantziaren artean mugaturik geratzen da higidura.

Kasu berezi gisa, orbita zirkularrarena aipa dezakegu.

Kasu honetan indar zentrifugua eta indar grabitatorioa berdinak dira.

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{\gamma m m'}{r^2}$$

$$\text{Beraz} \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma m m'}{r}$$

Eta energia osoa hauxe izanen da

$$E = \frac{1}{2} \frac{\gamma m m'}{r} - \frac{\gamma m m'}{r} = - \frac{\gamma m m'}{2 r}$$

- ii) $E > 0$. Energia osoa positiboa denean ibilbidea hiperbola bat da. Planeta infinituraino joan daiteke, eta han ere abia_dura du.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma m m'}{r} > 0$$

$$r \rightarrow \infty \quad v_\infty$$

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = E > 0$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2 E}{m}}$$

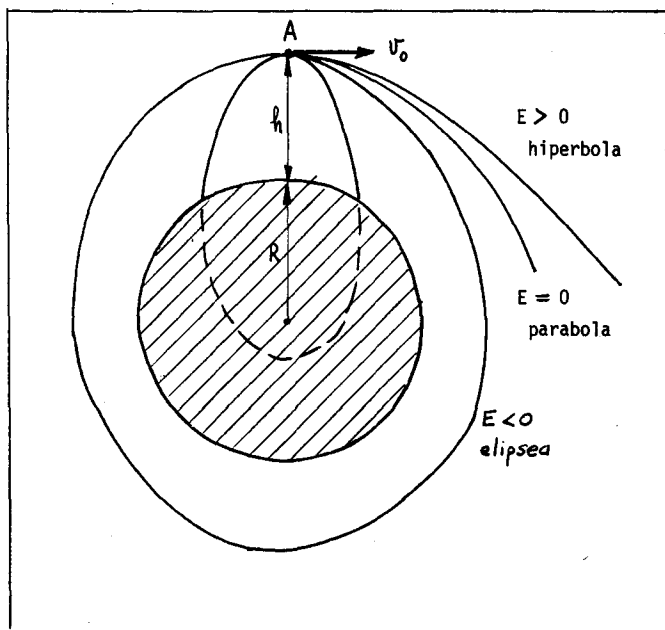
- iii) $E = 0$. Ibilbidea parabola bat da. Infinituan planetak ez du abiadurarik

$$0 = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 - \frac{\gamma m m'}{r}$$

$$r \rightarrow \infty$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 \longrightarrow v_{\infty} = 0$$

Ibilbideen forma geometrikoa kualitatiboki aztertu ondoren, interesgarri gerta daiteke Lurretik jaurtikitzen diren satellite artifizialekin gertatzen dena aztertzea.



Demagun punturik altuenean (h altueran) v_0 abiadura horizontala duela. Energia osoa haxe izanen da:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\gamma m M}{R + h}$$

Eta lehentxoago esanikoaren arauera, E delakoa positibo, nulu edo negatibo izan arau, ibilbidea hiperbola, parabola edo elipsea izanen da. Projektilen higidura ere, hemen barnean aztertutik geratzen da, irudian ikus daitekeenez.

14.6 ADIBIDEAK

Gai honen azterketarekin bukatzeko, adibide pare bat egingen dugu, ikusitako puntuak aplikatuz.

A) "Lor bedi Lurretik botariko gorputzen iheste-abiadura"

Iheste-abiadura, infinituraino heltzeko behar den abiadura minimoa da. Beraz, energia osoak positiboa edo nulua izan behar du; hots, minimoa nahi badugu, $E = 0$ egin beharko dugu.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma m M}{r} = 0$$

Eta Lurretik botatzen duguneko unea kontsideratzen badugu:

$$r \rightarrow R \text{ (Lurraren erradioa)}$$

$$v \rightarrow v_i \text{ (iheste-abiadura)}$$

Beraz

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{\gamma m M}{R}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{R}} = 1,13 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Hau da, projektil bat izarren batetara bidaltzeko, abiadura horrekin bidali beharko genuke, atmosferaren efektua mespreziatuz. Ikusten denez, iheste-abiadurak ez du projektilaren masaren dependentziarik.

Satelite artifizialen kasuan ez da iheste-abiadurarik bat-batean ematen. Ostera, faseka ematen zaio energia kapsulari, horrela problemak errazkiago superatuz.

- B) "Kalkula bedi, Lurretik r distantziara dagoen gorputza abiadurarik gabe askatuz, gorputz hori lurrazalera heltzen deneko abiadura"

Indar grabitatorioa kontserbakorra denez

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{\gamma m M}{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{\gamma m M}{R}$$

Baina abiadurarik gabe askatzen denez, $v_1 = 0$

Beraz

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

$$v_2 = \sqrt{2 \gamma M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)}$$

Kasu berezi modura, infinitutik datorren gorputzaren heltze-abiadura aztertuz :

Infinituan $r \rightarrow \infty$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \gamma M}{R}} = 1,13 \times 10^4 \text{ m/s}$$

Erraz ikus daitekeenez, abiadura hau iheste-abiaduraren berdina da. Izan ere, horrela izan behar du, problema hau aurre koaren inbertsua baita.

Jakingarri modura, abiadura hori meteoritoen heltze-abiadura dela esan dezakegu.

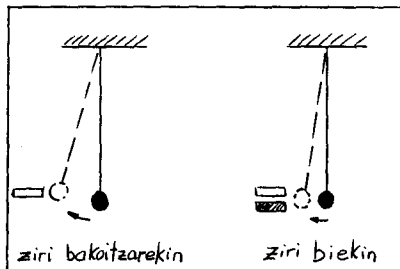
15 . GAIA - INTERAKZIO ELEKTRIKOA

- 15.1 KARGA ELEKTRIKOA
- 15.2 KARGAREN KUANTIZAZIOA
- 15.3 COULOMBEN LEGEA
- 15.4 EREMU ELEKTRIKOA
- 15.5 POTENTZIALE ELEKTRIKOA
- 15.6 EREMU ELEKTRIKO BATEN ERLAZIO ENERGETIKOAK
- 15.7 DIPOLO ELEKTRIKOA

Naturan agertzen diren indarrak, interakzio izenaz ezagutzen dira. Interakzio elektrikoa aspalditik ezagutzen da. Hau fenomeno bat besterik ez da eta moeta desberdinetakoak ezagutzen dira. Honen izena aintzinatik da tor.

Anbar eta beirako ziri bi elektrizaturik, kortxo - esfera batetara banaka hurbiltzen

ditugunean, interakzio erakarle bat sortzen da; baina biak batera elkarrekin eramaten di tugunean, interakzio era karlea askoz txikiagoa da; edo bestela, nuloa da. Hemen-indar elek trikoak agertu dira.



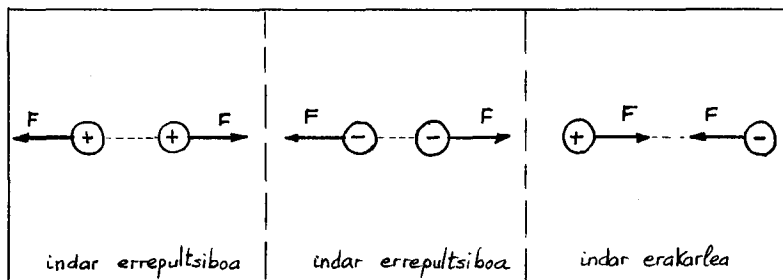
Fenomeno honen kausaz indar elektrikoak agertzen dira, karga elektriko batzu daudelako. Hauk neurtzerakoan, kuantifikaturik daudela ikusiko dugu, karga txikiena elektroia izanez. Gero, eremu elektrikoa eta potentziale elektrikoa zer diren ikusiko dugu eta Coulomb-en legearen bidez analitikoki nola defini daitezkeen ere.

Gai honetan, elektrizitate ESTATIKOA aztertuko du gu, hots ELEKTROSTATIKA, eta hurrengo gaian higiduran dagoen elektrizitateak sortzen dituen problemak, hots, ELEKTRODINAMIKA.

15.1 KARGA ELEKTRIKOA

Zer esan nahi genuen lehenengo esperimentuarekin (beira eta anbarrekin)? Ba, bi moztatako interakzioak daudela: bata positiboa eta bestea, negatiboa. Kasu honetan, beiraren elektrizazioa positiboa deituko dugu - eta anbarren elektrizazioa negatiboa.

Esperientzia honetan bi gorputzek elektrizazio moztatu desberdina dutenean horien arteko interakzioa erakarlea dela ikusi dugu. Aldiz, bi gorputzek elektrizazio moztatu berdina dutenean, horien arteko interakzioa errepulsiboa dela frogatu dezakegu.



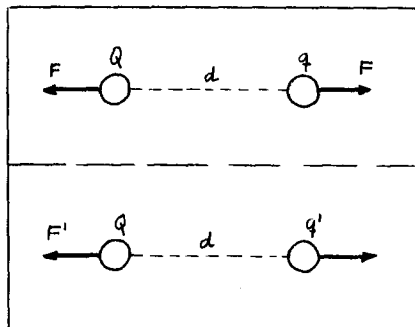
Gorputz batetan, interakzioaren intentsitatea arautzen duten bi moztatako "masak" bereiztu behar ditugu: alde batetik, interakzio grabitatzionalaren intentsitatea arautzen duena (14. gailan ikusi genuena), masa grabitatzionala bezala definitu genuen, eta bestalde, elektrizazioaren intentsitatea arautzen duena (masa elektriko), karga elektriko bezala definituko dugu, eta q letrarekin idatziko dugu.

. karga elektrikoaren moztak.- Lehen esan dugunez, gorputz batek neutroa ez ezik bi moztatako elektrizazioak eduki ditzake, positiboa, karga elektriko positiboa denean, edo bestela, negatiboa, karga elektriko negatiboa denean. Beraz, karga elektrikoak bi moztatakoak izan daitezke: positiboak eta negatiboak, zeinu hau guztiz konbentzionalak dira, alderantziz ere berdin har genitzakeen (hots, negatiboa

positibo bezala izendatuz.

. karga elektrikoaren neurria.- q karga bat Q karga batetik d distantziara dagoenean, F indar bat sortuko da q kargan. Bestalde, q' karga Q -tik d distantziara dagoenean, F' indarra sortzen da q' horretan. Esperientziak agertzen duenez, erlazio hau jar dezakegu:

$$\frac{q}{q'} = \frac{F}{F'}$$

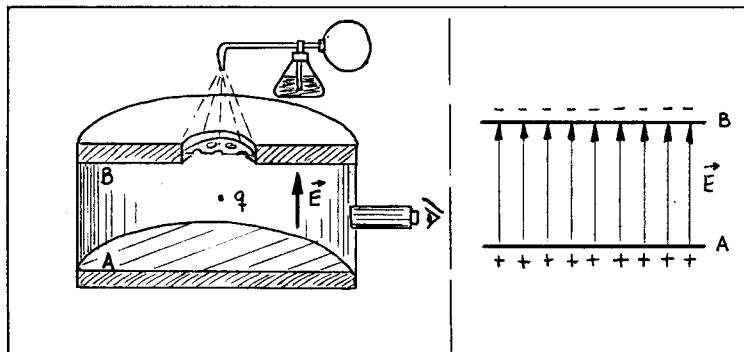


Izatez, neurketa hau definizioz eman dugu, zeren, azken batez, indarra doblea denean karga doblea dela definitzen baitugu. Honela q -ren balorea ezaguna izanik, q' -ren balorea neur daiteke.

. kargaren kontserbazio printzipioa.- "Isolaturik dagoen sistema batetan, karga osoa ez da aldatzen inolako prozesutan"; hau kargaren kontserbazio printzipioa bezala eza gutzen da. Printzipio honetan, positiboak, karga positiboak direnak eta negatiboak, karga negatiboak direnak kontsideratzen ditugu; eta karga osoa, hauen batuteka bezala definitzen dugu. Esperientziak frogatu duenez, esperimentu guztietan kontserbatu egiten da karga (masa). Gorputz batek karga positibo eta negatiboen kopurua berdina duenean, NEUTROA dela esaten da.

15.2 KARGAREN KUANTIZAZIOA

Karga elektrikoa kuantifikaturik dagoela frogatzeko, Millikan-en esperimentuan oinarritutako gara; beraz, -ikus dezagun, esperimentu hau zein den:



Bi plaka, A eta B, paraleloki jarri zituen. Eta goiko plakan (B-n) zulo batzu eginez, olio pulberizatua bota zuen zulo horietatik. Olio tanta horiek zulo horietatik pasatzerakoan, zulo-ormak igurtziz, kargatu egiten dira elektrikoki.

Olio tanta batetan A-tik B-ra joatean indar hauk agertzen dira:

- grabitatearena $m\vec{g}$
- kutxa barruan dagoen gasarekiko marruskadura: (Reynolds-en formula) (Ikus 5.6 puntua) $-6\pi\eta r \vec{v}$
- goranzko bultzadaren indarra: $-m_f g$

Hemen $\left\{ \begin{array}{l} \eta \text{ biskositatea} \\ r \text{ tantaren erradioa (esfera bezala hartuz)} \\ v \text{ abiadura} \\ m_f \text{ fluidoaren masa desplazatua (Arkimedes) (Ikus 11.4)} \\ f \text{ izanik.} \end{array} \right.$

Indar hauk kontutan edukiz, tanta hori jausterako higiduraren ekuazioa zera izango da:

$$m \vec{a} = m \vec{g} - m_f \vec{g} - 6\pi\mu r \vec{v}_1$$

Hau denbora txikitan ematen da; laster batetan, gasaren marruskadura eta goranzko bultzakadaren batuketaren neurriak $m\vec{g}$ (pisuaren) adina egiten da, beraz

$$\vec{a} = 0$$

eta $\vec{a} = 0$ denean v_1 konstantea da gas batetarako. ABIADURA LIMITEA deitzen zaio, eta beraren balorea, zera da:

$$v_1 = \frac{(m - m_f)g}{6\pi\mu r} \quad (1)$$

Orain $\vec{E}$ eremu elektriko bat jartzen badugu B-tik A-ra beste indar bat agertuko zaigu, eta higiduraren ekuazioa zera izango da:

$$m \vec{a} = q \vec{E} - m \vec{g} + m_f \vec{g} - 6\pi\mu r \vec{v}_2$$

Eremu elektrikoaren galderan ikusiko dugu, $\vec{F} = q \vec{E}$ dela (Ikus 15.4).

Lehen bezala, t denbora iragan eta gero, $a = 0$ egingo zaigu, beraz

$$0 = q \vec{E} - m \vec{g} + m_f \vec{g} - 6\pi\mu r \vec{v}_2$$

eta hemendik v_2 despejatzuz

$$v_2 = \frac{q E + (m_f - m)g}{6\pi\mu r}$$

edo q despejatzuz

$$q = \frac{(m - m_f)g + 6\pi\mu r v_2}{E} \quad (2)$$

Eta (1) delakoa (2) expresioan sartuz

$$q = \frac{6\pi\mu r (v_1 + v_2)}{E}$$

geratuko zaigu, V_1 konstantea da, ez da aldatzen, esperimentalki ikusi denez; eta q , v_2 -rekin aldatzen da:

$$\Delta q = \frac{6\pi\mu r}{E} \Delta v_2$$

Millikan-en esperimentu honetan ikusi zenez, Δq beti aldatzen da karga elemental baten multiplo bezala. Karga elemental hau e deitu zen, eta beraren balorea hau da gaurko unitateetan:

$$e = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ Coul.}$$

Orain arte inolako esperimentuk ez du ukatu hau, beraz funtsezko lege bat bezala kontsidera dezakegu: "Naturan agertzen diren karga guztiak, e -ren multiploak dira; hots, karga elektrikoa kuantifikaturik dagoela"

Karga elementala masa batekin asoziatu behar dugu PARTIKULA ELEMENTAL bat osatzeko.

15.3 COULOMB-EN LEGEA

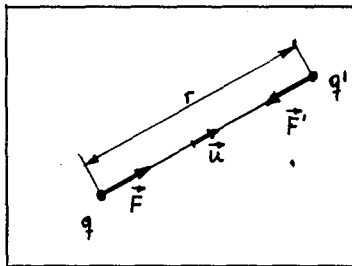
Elektrostatikan partikula biren artean dagoen interakzioa, Coulomben bidez emana dator. Izen hau Charles A. de Coulomb-en (1736-1806) oroimenez gordetzen da eta honela dio lege horre:

"Bi partikula kargaturen arteko interakzio elektros-tatkoa, partikula horien karga-kantitateen proportzionala da eta distantziaren koadratuaren alderantziz proportzionala da. Interakzioaren direkzioa biek osotzen duten zuzenarena da"

Analitikoki:

$$\vec{F} = k_e \frac{q q'}{r^2} \vec{u} \quad (3)$$

q, q' kargen kantitateak
 r distantzia
 $\vec{u}$ bektore unitario bat,
 karga biek osotzen -
 duten zuzenaren direk-
 zioan
 k_e konstante bat izanik



Lege honen formularioari buruz zenbait ohar egin behar ditugu:

- q, q' kargak adieraztean, bakoitzari zeinu bat dagokio, karga positibo edo negatiboa izan arau (ikus 15.1 puntua)
- Zer esanik ez, interakzio horrek akzio-erreakzioaren printzipioa betetzen du, eta bi kargetan sortzen diren indarrak, berdinak dira modu luz eta direkzioz baina kontrakoak sentidoz.
- Izatez, karga biak positibo (edo biak negatibo) direnean indar errepulsiboak sortzen dira eta zeinu desberdinekoak direnean, indar erakarleak.

Ikusten dugunez, lege hau interakzio grabitazioalaren legearen antzekoa da

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m'}{r^2} \vec{u} \quad (\text{Ikus 14. gaia})$$

Expresio horretan k_e eta q determinatu gabe dauzkagu; bata determinatzen badugu, bestea emana izango da. Guk hemen egingo duguna zera da: k_e -ri balore bat eman eta horrela q determinatu (horrela, unitate-modu bat definitzen dugu analitikoki).

Lehendik neurtu ziren gauzekin konparatuz, balore berbera hartzeko, ke -ri 10^{-7} e^2 balorea emango diogu, c delakoa argiaren abiadura izanik. Hau ohituraz egiten da. Beraz:

$$ke = 10^{-7} c^2 = 8,9874 \times 10^9 \simeq 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \quad (\text{m}^3 \text{ Kg s}^{-2} \text{ C}^{-2})$$

ke -ren balorea finkatzean, q ere finkatu dugu, eta q -ren balore unitateari COULOMB deituko diogu.

"Coulomb karga-unitatea, hutsean beste karga berdin batetik metro batetara jartzen dugunean, bien artean $8,9874 \times 10^9$ N-eko aldarazte-indarra sortzen denekoa da".
Eta C letrarekin idatziko dugu.

(3) erlazioak sortzen duen kalkulua errazteko,

$$ke = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \quad \text{egingo dugu}$$

ϵ_0 , hutsuneko permitibitatea izanik. Eta beraren balorea ondokoa da

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4 \pi ke} = 8,854 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2 \quad (\text{m}^{-3} \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^2 \text{ C}^2)$$

eta (3) expresioa honela geratuko da

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{u}$$

Dakigun bezala, kargak moeta berekoak direnean (biak positiboak edo biak negatiboak), indar errepulsi-
bo bat sortzen da eta indar hori positibo bezala kontsideratuko dugu; eta moeta desberdinekoak direnean (bata

positiboa eta bestea negatiboa), indar erakarle bat sortzen da, indar hau negatibo bezala kontsideratuko dugularik. Hau guztiz konbentzionala da, edozertara ere.

. Ariketa.-

Demagun q_1, q_2, q_3 kargak ditugula, irudian agertzen diren bezala,

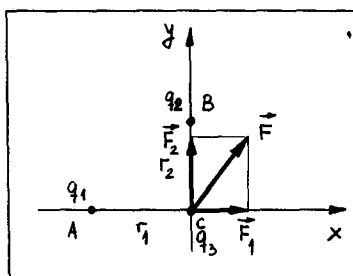
$$q_1 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ C},$$

$$q_2 = -0,50 \times 10^{-3} \text{ C},$$

$$q_3 = 0,20 \times 10^{-3} \text{ C},$$

AC = 1,2 m eta BC=0,50 izanik

Lor bedi, q_3 kargan eragiten duen indar erresultantea.



$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_3}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} \vec{u}_{13} = 1,9 \times 10^3 \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{q_2 q_3}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} \vec{u}_{23} = 3,6 \times 10^3 \vec{j} \text{ N}$$

$$\text{beraz } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 1,9 \times 10^3 \vec{i} + 3,6 \times 10^3 \vec{j} \text{ N.}$$

$$\text{Honen modulua } F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4,06 \times 10^3 \text{ N.}$$

15.4 EREMU ELEKTRIKOA

ESPAZIOALDE BATETAN q KARGA batek indar bat jasaten duenean, espazioalde hori eremu elektriko bezala kontsideratzen da.

Defini dezagun eremu elektrikoaren intentsitatea: Puntu batetan eremu elektrikoak duen intentsitatea, puntu horretan jartzen den karga positibo unitateak jasaten

duen indarra da.

Analitikoki

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (4)$$

Eremu elektrikoak $N \text{ C}^{-1}$ unitateak ditu

(4) formula aztertzen badugu, q karga positiboa denean $\vec{E}$ -k eta $\vec{F}$ -k direkzio eta sentido berbera dutela ikusiko dugu; baina q negatiboa denean, aurkako sentidoa dute. Hau guztiz konbentzionala da.

$$\text{Coulomben legean oinarriturik } (\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q' \vec{u}_r}{r^2}),$$

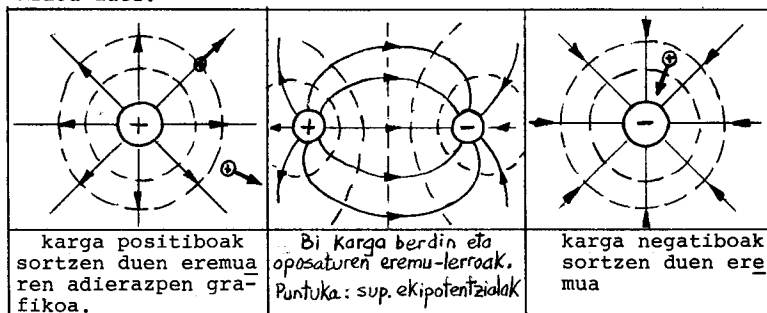
E honela idatz genezake:

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (5)$$

Hemen $\vec{u}_r$ -k direkzio erradiala du.

Eremu-lerroak.

Eremu elektrikoa molabait grafikoki adierazteko e eremu-lerroak deiturikoak egiten dira. Buntu bakoitzean, eremu-lerroak eremu elektrikoaren intentsitatearen tangenteak dira. Lerro orientatuak dira, beraz, eremu grabitatorioaren kasuan definiturikoen antzekoak. Kasu honetan, oster, bi eratako karga elektrikoak egonik zenbait desberdintasun dituzte. Honela, eremu-lerroak irten egiten dira karga positiboetatik eta karga negatiboetaranzko direkzioa dute.



Fremu-lerroak indar-lerro izenez ere ezagutzen dira. Fremuaren adierazpen grafikoa egiteko, eremu-lerro gutxi batzu irudikatzen dira soilik.

Fremu-lerroekin batera superfizie ekipotentzialak ere irudikatzen ohi dira. Hauk haien perpendikularrak dira eta potentziale elektriko berbereko puntuak biltzen dituzte.

. Zenbait kargak sorturiko eremu elektrikoa.

Gainezarmenaren printzipioan oinarriturik, q_i kargak baditugu, hauxe izango da guztien artean sortzen den eremu elektrikoa:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

Zer esan nahi du honek? Ba, puntu batetan eremu elektriko asko biltzen direnean (partikula kargatu batzuk sortu dituztelako, noski), eremu bat soilik izanen balitz bezala kontsidera daitekeela. Eremu horren intentsitatea hauxe da:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

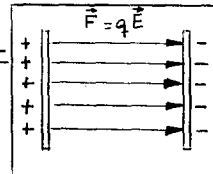
kargaren banaketa kontinua denean, $\sum$ hori $\int$ bat bezala idatz dezakegu, hots,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

A, kargak daudeneko espazioaldera zabaldurik

. Adibidea: Eremu elektriko uniforme.

Kasu honetan, eremu elektriko uniformeak puntu guztietan intentsitate eta direkzio berdina du.



Indar-lerroak elkarren paraleloak dira eta distantzia berdinetara daude.

Azter dezagun, nolakoa den partikula kargatu batek eremu horretan duen higidura

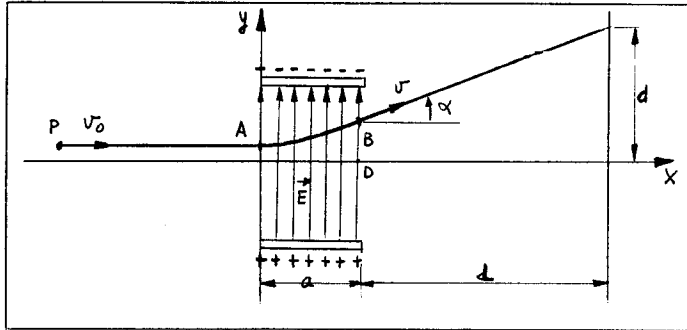
$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \text{Newtonen legetik, beraz} \quad m \vec{a} = q \vec{E},$$

hemendik

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} = K \vec{e}$$

eremu elektriko uniforme batetarako.

Ikus dezagun nola higitzen den karga elektriko bat eremu elektriko uniforme batetik pasatzerakoan. Azele-razioa konstante denez, AB bidea parabola bat dela ikusiko dugu:



P partikula $\vec{v}_0$ abiadurarekin perpendikularki $\vec{E}$ eremura sartzen da, eta abiadurarekin irteten da eremutik; beraz, E eremuak P partikularen higidura aldatu du (ikus irudia).

Ardatz nagusiak irudian agertzen diren bezala kontsideratzen baditugu, partikula eremuan zegoen bitartean, beraren koordinatuak hauk ziren

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} E \right) t^2 \quad \text{zeren} \quad a_y = \frac{q}{m} E \quad \text{baita eremu}$$

elektriko uniformeetan.

Hemen t eliminaturik

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right) \left(\frac{E}{v_0^2} \right) x^2$$

eta hau parabola bat besterik ez da (AB tartean, noski). Zer esanik ez, PA eta BC zuzenak dira, hor ez baitago indarrik.

L-ren tangentea $\frac{dy}{dx}$ izango da,

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = \frac{q E a}{m v_0^2}$$

L distantziara S pantaila bat jartzen dugunean, eta BD oso txikia denez, d-rekin konparatuz L handia baita, zera idatz genezake:

$$\frac{q E a}{m v_0^2} = \frac{d}{L}$$

eta ekuazio honetan $\vec{E}$, a, d, L jakinik $\frac{q}{m}$ finkatzen dugunean, v_0 lor dezakegu. Eta alderantziz v_0 finkaturik, $\frac{q}{m}$ jakin dezakegu.

Ondorio bezala, zera atera dezakegu: $\frac{q}{m}$ berdina duten partikula sorta batek eremu elektriko bat iragartean, deflekzioa v-ren edo energiaren funtzioa izango da. Irudian agertzen den tresna, energiaren aztertzaile bat bezala erabil dezakegu.

15,5 POTENTZIALE ELEKTRIKOA

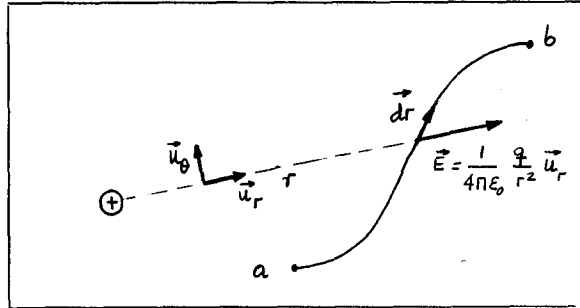
q karga bat infinitutik A puntu batetara ekartzeko lan bat egin behar dugu. Lan hau energia potentziala bezala ezagutzen dugu. Eta puntu batetako potentziale elektriko, puntu horretan karga unitateak eremu elektrikoaren kausaz duen energia potentziala bezala definituko

dugu

$$V = \frac{Ep}{q}$$

Ep , energia potentziala (eremu elektrikoaren kausaz);
eta V , potentziale elektrikoa izanik.

Ikus dezagun, beraz, bi puntuen arteko potentzial-
learen diferentzia nolakoa den



$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b q' \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b q' \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \right) \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta)$$

$$W_{ab} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q' \frac{dr}{r^2} = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = E_{pa} - E_{pb}$$

edo bestela integraleen propietate batetan oinarriturik

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\infty^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_\infty^a \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\infty^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{pa} - E_{pb}$$

eta $E_p = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ denez,

$$V = \frac{E_p}{q^i} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r} \quad \text{izango da}$$

. karga asko direnean.-

Θainezarmenaren printzipiotik

$$V = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_2} + \dots + \frac{q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_n} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

eta kargaren banaketa kontinuoa denean

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad \text{izango da}$$

. V eta $\vec{E}$ -ren arteko erlazioa.-

V eremu eskalarra da eta E eremu bektoriala;
baina elkarrekin erlazionaturik daude. Ikusi genuenez,
 $\vec{F} = -\text{grad } E_p$ da.

Erlazio hau q^i -z zatitzen dugunean

$$\frac{\vec{F}}{q^i} = - \text{grad } \frac{E_p}{q^i} \quad \text{geratzen zaigu, eta hau}$$

$$\vec{E} = - \text{grad } V \quad \text{besterik ez da}$$

(ikus 6-7 galdera)

Hemen, V ezagutzen dugunean, $\vec{E}$ jakin dezakegu,
gradiente (∇) operatzailea aplikaturik. Aldiz, $\vec{E}$
ezagutzen dugunean, V jakin dezakegu, honela integra-
turik:

$$|\vec{E}| = - \frac{\partial V}{\partial r} \quad , \quad \text{hemendik } \vec{E} \cdot d\vec{r} = - dV$$

$$- \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^V dV = V$$

kasu berezi batetan, eremu elektriko uniformeetan r ,
 x ardatzaren direkzioan hartuz :

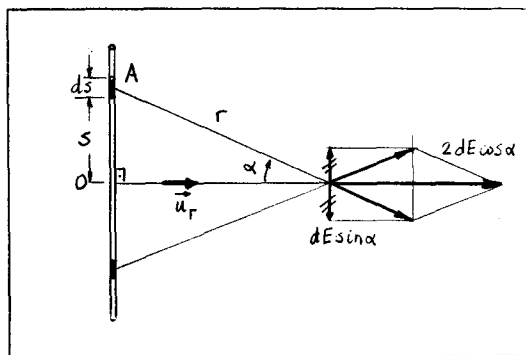
$$- \int \vec{E} \cdot d\vec{x} = V$$

eta $\vec{E}$ konstantea denez:

$$V = - E \int_0^x dx = - E \cdot x$$

Adibidea.-

"Luzera-unitateko λ karga-dentsitatea duen hari
 batek sortzen dituen eremu eta potentziale elektrikoa -
 lor bitez"



Maria ds zatietan bana genezake eta ds bakoi-
 tzean dagoen karga $dq = \lambda ds$ da.

Dakigunez:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad da$$

$$\text{eta } dE = \frac{dq}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda ds}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad \vec{AP} \text{ direkzioan.}$$

dE , modulua da.

Baina problema simetrikoa denez, irudian agertzen den $dE \cdot \sin \alpha$ osagaia beste dS batek duen $-dE \sin \alpha$ simetrikoarekin anulatu egingo da, eta honela, denetara, $2dE \cos \alpha$ soilik geratuko da $\vec{OP}$ direkzioan. Beraz, - eremu elektrikoa $\vec{OP}$ direkzioan hauxe izango da:

$$E = \int_0^{\pi/2} 2dE \cos \alpha = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{2 ds}{r^2} \cos \alpha$$

integrale hau egiteko, α parametroaren bidez egiten dugu

$$r = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$S = R \tan \alpha$ irudian ikusten den bezala,

$$\text{eta } dS = \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$$

E honela geratzen zaigu:

$$E = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 R}$$

forma bektorialean:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 R} \vec{u}_r$$

Orain, V lortzeko, lehen idatzi dugun erlazioaz baliatuko gara

$$\vec{E} = - \text{grad } V = - \frac{\partial V}{\partial R} \vec{u}_r$$

$$\text{baina } E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}$$

$$\text{Hemendik } \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{dR}{R} = - dV$$

eta integraturik:

$$V = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln R + K$$

$R=1$ balorearen kasurako, $V=0$ kontsideratuko dugu. Hau posible da, galdera honen hasieran eman dugun de finizioa gorabehera zeren eta, berez, energia potentzia la konstante batetan indeterminaturik baitago. Beraz, $c=0$ da, eta

$$V = - \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \ln R \quad \text{geratzen da.}$$

Problema hau alderantziz ere egin daiteke: lehenengo potentziala eta gero eremua lortuz.

15.6 EREMU ELEKTRIKO BATEN ERLAZIO ENERGETIKOAK

Eremu elektriko batetan higitzen den partikula kargatu baten energia osoa, zera izango da (eremu grabitatorioa kontutan hartu gabe):

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + q V$$

m , partikularen masa eta q , beraren karga izanik.

Partikula kargatu hau P_1 -etik P_2 -ra higitzen denean (V_1 , P_1 -ren eta V_2 , P_2 -ren potentziale elektrikoak izanik) energiaren kontserbatze-teorema, honela idatzi beharko dugu.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + q V_2$$

eta 8. gaian ikusi genuen bezala:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = q(V_1 - V_2) \quad (6)$$

Hemendik VOLT-aren definizioa eman dezakegu:

"Coulomb bateko kargak joule bateko energia irabazteko behar duen potentziale-diferentzia, volt bat da".

(6) ekuazioan, bi kasu bereizi behar ditugu

$q > 0$ denean, $V_1 > V_2$ izan behar da, energia zinetikoa irabazteko.

$q < 0$ denean, $V_1 < V_2$ izan behar da, energia zinetikoa irabazteko.

Volt-aren definizioan eta karga-kontzeptuan oinarrituz, energia, beste unitate batzutan idatz dezakegu

eV edo elektroivolt izeneko oso erabilia da Fisika Atomik^oan. Energi unitate honen balorea hauxe da:

$$eV = (1,6021 \times 10^{-19} C) (1 V) = 1,6021 \times 10^{-19} J$$

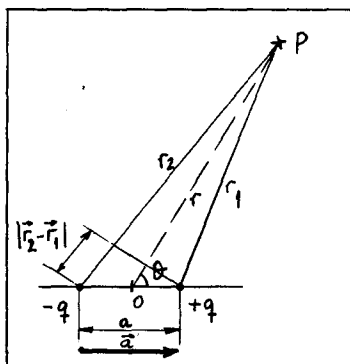
eta honen multiploak

KeV, kilo-elektroivolt

MeV, megaelektroivolt

eta abar.

15.7 DIPOLO ELEKTRIKOA



Demagun bi karga berdin eta aurkako zeinukoak ditugula, bata bestearekiko distantzia txiki batetara urrunduz.

MOMENTU DIPOLARRA $\vec{p} = q \vec{a}$ bezala definitzen dugu, $\vec{a}$ delakoa $q (-)$ tik $q (+)$ ra osotzen den bektorea izanik.

Dipoloak puntu batetan sortzen duen potentziale elektrikoa hauxe da:

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

a r-rekin konparatuz oso txikia denean, r-rekiko hurbilketa bi egin ditzakegu

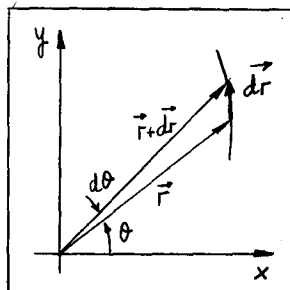
$$r_2 - r_1 = a \cos \theta \quad \text{eta} \quad r_1 r_2 = r^2$$

beraz,

$$V = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad \text{geratuko zaigu}$$

Koordenatu polarrak hartzen ditugunean (r, θ) , honelako erlazioak geratzen zaizkigu

$$\begin{aligned} |\vec{dr}| &= ds \\ ds &= r d\theta \end{aligned}$$

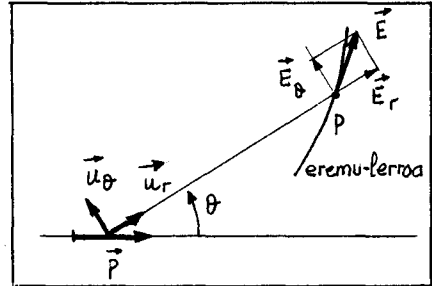


Potentziale elektrikoaren puntuan ikusi genez,

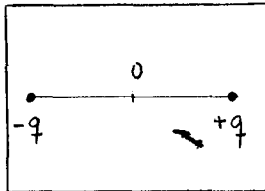
$$E = - \frac{\partial V}{\partial s} \quad \text{da; beraz, hemen}$$

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r} = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$



Nahi izanez gero, koordenatu errektangularretan ere egin daiteke.



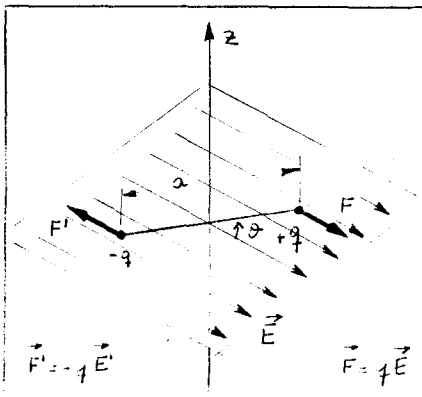
Ikusten denez, sistema osoaren karga anulatu egiten da; baina kargak duten desplazamenduaren kausaz, eremu elektriko bat sortzen da.

. Dipoloaren gainean eremu elektrikoak duen eragina.

Dipolo elektriko bat eremu elektriko batetan jar-tzen dugunean, dipoloaren karga bakoitzean indar bat sor-tzen da. Dipolo osoan egiten den indarra hauxe izango da

$$\vec{F} = q \vec{E} - q \vec{E}' = q (\vec{E} - \vec{E}')$$

eremua uniforme denean ($E = E'$) $F = 0$ da.



Demagun, eremua dipoloareki-ko paraleloki orientaturik dagoela, x ardatzaren direkzioan -prezeski.

$$E - E' = \left(\frac{dE}{dx} \right) \Delta x = \left(\frac{dE}{dx} \right) a,$$

beraz:

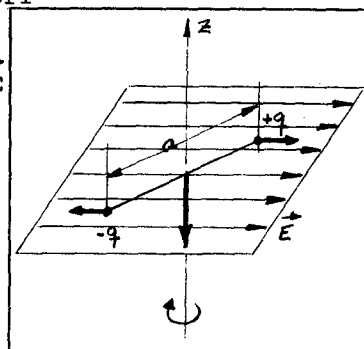
$$F = p \frac{dE}{dx}$$

Hau da, dipolo elektrikoak, eremu elektroarekiko paraleloa denean, eremua handitzen den direkzioan higitzera - jotzen du. Antiparaleloa denean, alderantziz gertatuko da.

Bestalde, dipoloa konposatzen duten kargek indar-momentu bat sortzen dute. Hurrengo irudia kontsideratuz, honela adieraz dezakegu momentu hori

$$\vec{M} = \vec{a} \times q \vec{E} = q \vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ikusten denez, indar-momentu elektrikoak eremua dipoloarekiko paraleloki jartzera jotzen du, $\theta = 0$ denean orekan baitago.



16. GAIA - KORRONTE ELEKTRIKOA

- 16.1 KORRONTEAREN INTENTSITATEA ETA DENTSITATEA.
- 16.2 KONTINUITATEAREN EKUAZIOA.
- 16.3 KONDUKTIBILITATE ELEKTRIKOA. ERRESISTENTZIA.
OHM-EN LEGEA.
- 16.4 INDAR ELEKTROERAGILEA. OHMEN LEGEAREN GENE
RALIZAZIOA.
- 16.5 KIRCHOFF-EN LEGEAK.

15, gaian interakzio elektrikoa estatikoki soilik aztertu dugu. Baina denok ezagun dukegunez, elektrizitate inguruko fenomeno gehienak dinamikoak dira. Hor ditugu, adibide gisa, etxean darabilgun sare elektriko komertziala, edozein aparatuk dakartzan zirkuituak, eta abar.

Elektrodinamikaren aztertzean, oin ~~h~~arritzko kontzeptu bat agertzen zaigu: Korrante elektrikoa. Zer da aipa turiko hori?

Korrante elektrikoa partikula kargatuen txorro bat da. Korrante elektrikoa kanpo-eremu baten eragipean - agertzen da, eta hainbat kasutan izaten dugu:

Demagun, potentziale desberdineko bi eroale, hari batez-eroale metaliko batez- lotzen ditugula. Hari honetatik kargen mugimendu bat sortuko da. V potentziala ttikiena duen eroaletik bestera; ΔV hori, indar - elektroeragile batez mantentzen badugu, kargen (elektroien) desplazamendu horrek iraun egingo du denbora - finitu batetan, horrela elektrakorrante bat sorturik.

Era berean, soluzio elektrolitikoetan, azeleragai luetan eta abarretan, korrante elektrikoak ditugu.

Hau izango da, ba, gai honen helburua, korrante elektrikoaren aztertzea eta berari oinharri bat ipintzea.

partikula kargatuen txorro batek zeharkatzen duela. Korrante horren intentsitatea, aipaturiko sekzioa - denbora unitatean zeharkatzen duen karga-kantitatea da.

Sekzio hori eroale metaliko baten sekzioa - izan daiteke, edo eta azeleratzaile baten sekzioa, edo bestelako zerbait.

Kuantitatiboki, t denboran sekzio bat q karga duten N partikulak zeharkatzen badute, korrantearen intentsitatea

$$I = \frac{Nq}{t} \quad \text{izango da}$$

Hemen

$$I = \frac{Q}{t}$$

$Q=Nq$, sekzioa zeharkatzen duen karga osoa izanik. Horrela, batezbesteko intentsitatea dugu definiturik. Eta I -ren balore instantaneotzat, haxe definituko - dugu:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Dimentsio-ekuazioa, haxe da:

$$[\text{Intentsitatea}] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\text{coulomb}}{\text{segundu}} = \text{ampère-tan}$$

neurtzen da: $[I] = \text{amp.}$

Baina bi eratako kargak ditugunez, lehengo expresioa zehatza izan dadin, zeinu-kriterio bat erabaki behar dugu. Horretarako, korronteari partikula positiboen sentidoa ematen diogu; beraz, sentido - hau partikulak higitu erazten dituen kanpo-eremuaren sentido berbera da, eta halaber, kargek sortzen duten potentziale-diferentziaren sentido berbera.

Korrontea elektroien higidurak sorturik bada - askotan gertatzen den kasu bat - , intentsitatea - eta partikulen higiduraren sentidoa, elkarren aurkakoak dira.

Ikus dezagun, lehengo expresioa zertan bilakatzeko den, eroale baten kasuan. Demagun, eroaleak - sekzio normaltzat S duela, eta bolumen-unitateko v abiaduraz higitzen diren n partikula kargatu ditugula, bakoitzaren karga q izanik.

dt denboran partikula bakoitza vdt desplazatzen da.

tuko da. Beraz, S sekzioa, dt denbora horretan, $Svdt$ - zilindroan dauden partikulek zeharkatuko dute.

Horrela, $Svdt$ bolumena, bolumen-unitateko kargaz biderkatuz, zera lortzen dugu:

$$dQ = nqSvdt$$

Eta hemendik:

$$I = \frac{dQ}{dt} = nSqv$$

Kasu generalean, hainbat partikula desberdin baditugu:

$$I = S \sum_i n_i q_i v_i \quad \text{gelditzen zaigu.}$$

Korrontearen dentsitatea

$I = jS$ egiten badugu, korronte-dentsitatea definitzen dugu. Hau da:

$$j = \frac{I}{S} = \sum_i n_i q_i v_i$$

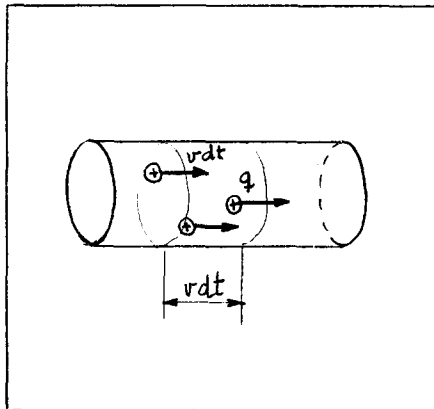
Korronte-dentsitatea, j delakoa, sekzio unitateko intentsitatea da.

Eta bektorialki:

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

$\vec{j}$ delakoak eroalearen direkzioa izango du, noski.

Honen arauera, zera ikusten dugu, $\vec{j}$ -k beti $\vec{E}$ -ren sentido berbera duela, $\vec{v}_i$ eta q_i arteko biderkaketa beti haren sentido berdineko den bektore bat ematen baitigu, - eta batezbesteko batuketan $\vec{E}$ direkzio eta sentidokoa da.



egiten baitu. Beraz, ioia sortzean, elektroi bat ere sortzen da, balantzeari neutroa izanik.

Gauza berbera esan dezakegu, pareen kreatzea deitzen den fenomenoaz. Honetan, fotoi oso indargetu ba tek nukleo bat jotzen du, bi partikula kargatu sortuz. Baina bi hauk elektroi - e^- - eta positroiak - e^+ - dire nez, beraien karga konpentsatu egiten da.

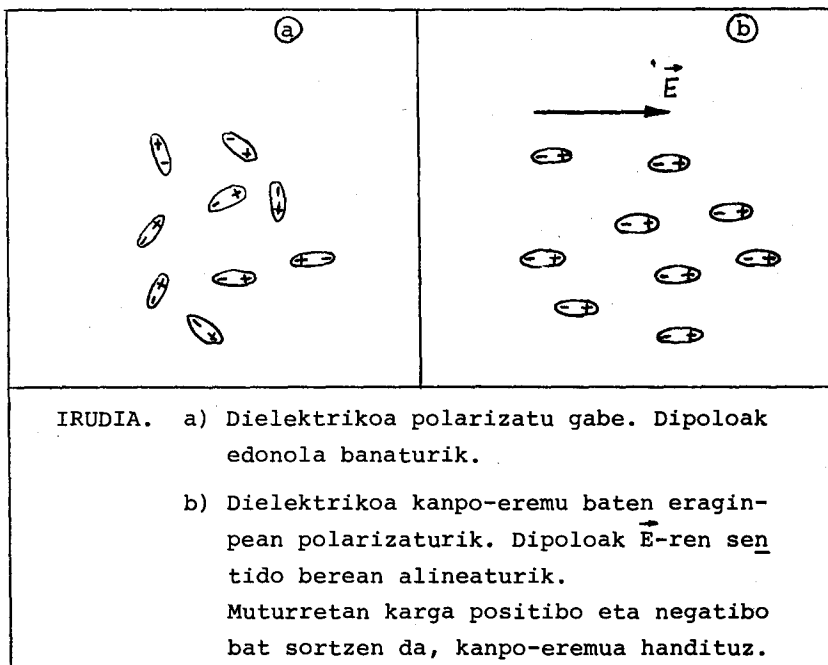
Hemen ere fluidoekiko analogia bat egin genezake. Barrutik korronte elektriko bat duen hodi-sektore bat hartzen badugu, honek errejimen laminarrean doan - fluido baten portaera berdina du, eta, beraz, kontserba zio-ekuazioa berdina izango da.

Aipatuko dugun azken kasua, eroale matalikoena da. Hurrengo galderan egingo dugu arakatze sakonagoa, - baina esan dezakeguna zera da, beraietan elektroi-hodei bat higitzen dela, baina beti karga-balantzeari gordez.

15.4 KONDUKTIBILITATE ELEKTRIKOA, EROALEAK. OHM-EN LEGEA

Ezer baino lehen, kanpo-eremu bati nola erantzuten dioten arauera, materialeak 2 multzotan banatuko ditugu: eroaleak eta isolatzaileak -edo hobe esan, dielek trikoak-

Dielektrikoek ez dute karga askaturik, eta ez dute korronterik onartzen kanpo-eremu baten eraginpean, baina polarizatu egiten dira -ez dugu azterketa sakonik egingo, beraren interes handiena kondentsadoreen estudio an baitatza, eta hauk ez baititugu aztertuko kurtso - honetan



Baina karga askeak daudeneko espazioalde bate-tan, eremu elektriko bat aritzen bada, espazioalde ho-rretan korrante elektriko bat sortuko da. Hau da eroa-leen kasua.

Eroaleek karga askeak dituzte, eta beraietan -eremu batek korrante bat sorterazten du.

Ikus dezagun nola gertatzen den. Eroale batek karga positiboen -atomoen- sare bat dauka oinharritz, eta honen inguruan elektroï hodei bat dauka higitzen. Higidura hau, kanpo-eremurik ezaz, higidura termikoa da; beraz, nolanahikoa, eta edozein sekziotan ez da -fluxu netorik izango. Batezbesteko abiadura zero da,

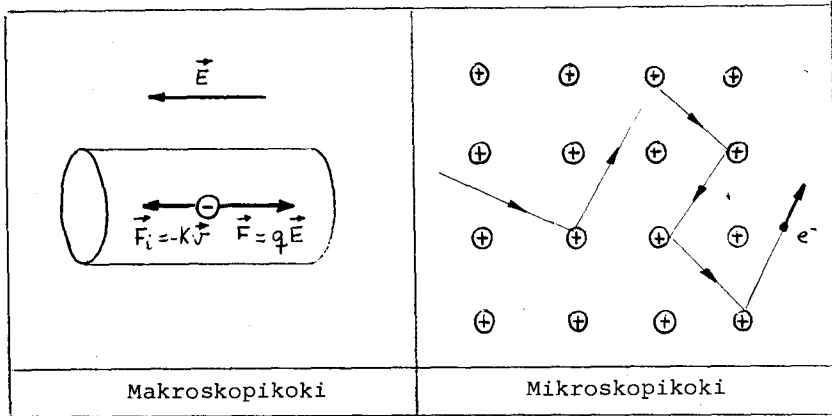
$V_m = 0$, baina batezbesteko abiadura koadratikoak balore oso handia du:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = 10^6 \text{ m/s}$$

Eroale hau eremu elektriko baten pean ipintzen badugu, nolanahiko abiadura honi beste abiadura ordenatu bat gainezarriko zaio, eta nahiz eta beraren batezbesteko abiadura koadratikoa askoz ere ttikiagoa izan, garrantzi handiagoa du, karga-fluxu neto bat sortzen - baitu, korrante elektrikoa, halegia. Karga hauen abiadurak eremuaren sentido berbera edo aurkakoa izango du, portadoreen zeinuaren arauera.

Nolakoa da abiadura hori? Eremu elektrikoak - azeleratu egiten ditu partikula askeak, honela, hauek energia irabazten dute, baina sarearekin txokatuz, eta abarrez, partikulek galdu egiten dute irabazitako energia, eta dispertsaturik aurkitzen dira.

Txoke hauen frikzioen eta eremuaren eraginak, azkenez konpentsatu egiten dira, eta abiadura konstante batetara heltzen da, atoi-abiadura hain zuzen ere; hots, 16.1 galderan aipatzen genuen berberara: $\vec{j} = nq\vec{v}$ expresioko $\vec{v}$ abiadurara.



Matematikoki, propietate honen gorabeherak hainbat magnitudez neur ditezke; hauetariko bat, konduktibitatea da: σ

Nola definitzen da konduktibitatea? Modu honetara, dentsitatearen eta eremu elektrikoaren intentsitatearen bidez:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Hau da:

$$\sigma = \frac{|\vec{j}|}{|\vec{E}|}$$

σ ez da beti konstantea -hau da, $\vec{j}$ eta $\vec{E}$ magnitudeen artean ez dago proporzionaltasun zuzenik-, baina kasu gehienetan, eroale metalikoetan tenperatura-tarte, handi batetan, adibidez, $\sigma = kte$ bezala har daiteke.

Hori horrela, $\vec{j} = q n \vec{v}_a$ izanik, eta metalean

kasuan $\vec{j} = -e n \vec{v}_a$ izanik, non n delakoa bolumen-unitateko elektroide-dentsitatea baita, zera gertatzen zaigu:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \longrightarrow \vec{v}_a = \left(\frac{\sigma}{-en} \right) \vec{E}$$

$\frac{\sigma}{-en}$ konstante izanik, $\vec{v}_a$ abiadura $\vec{E}$ -ren balore

bakoitzaren arauera ko konstante bat izango da. Beraz, lehen esan duguna baieztatu egiten da.

Hemen ere, fluidoekiko analogia bat egin dezakegu. Adibidez, gorputz bat atmosferan zehar erortzen denean, τ denbora bat pasatu geroztik, gorputzak abia dura limite konstante bat hartzen du, igurtzimendua-
ren eraginaz. Beraz, alde batetik $\vec{j}$ eta $\vec{E}$ magnitudeen arteko, eta bestetik sare-igurtzimendu eta aire-igurtzi menduaren arteko analogia dugu.

Kasu honetan, hau da, tenperatura konstantez-
ko eroale metalikoetan, Ohmen legeak -G.S. Ohm,
(1789-1854)- zera esaten digu:

Bi punturen arteko potentziale-diferentziaren eta beraien artean zirkulatzen duen intentsitatearen -
erlazioa konstantea da, konstante hau R , gorputzaren erresistentzia izanik:

$$\frac{V}{I} = R$$

Honen bidez, konduktibitatea eroale^een magnitude makroskopikoen funtzio bezala ipin dezakegu; beraz, eroalearen l luzerako zati bat hartzen badugu, beraren sekzioa S izanik, zera dugu:

$$I = j S \quad j = \frac{I}{S} = \frac{V}{RS} \quad I = \frac{V}{R} \text{ denez;}$$

$$\text{eta } E = \frac{V}{l} \text{ denez: } j = \frac{\vec{E} l}{RS} = \left(\frac{l}{RS} \right) \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

j eta $\vec{E}$ direkzio eta sentido berdinekoak baitira. Horrela, azkenean haxe dugu:

$$\sigma = \frac{l}{RS}$$

σ hau kondukzioaren faktoreak begiratu ere lor dezakegu. Lehengo kasura itzuliz, atoi-abiadura konstante denez, partikula bakoitzaren indar-balantzea haxe dugu: $f+F=0$

igurtzimendu-indarra baitira.

$$\text{Beraz: } eE + K\mathbf{v} = 0 \quad E = - \frac{K\mathbf{v}}{e}$$

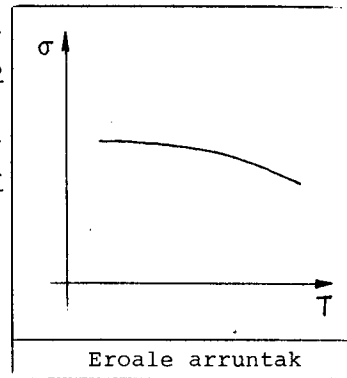
$$\text{eta } \mathbf{j} = nq\mathbf{v} = -en\mathbf{v} \text{ denez (15.2): } \sigma = \frac{\mathbf{j}}{E} = \frac{-en\mathbf{v}}{-\frac{K\mathbf{v}}{e}} = \frac{ne^2}{K}$$

Eta eroale ohmikoetan, Ohm-en legea beta dadin, n eta K konstanteak izango da.

Batzutan, konduktibitatearen ordeez erresistibitatea erabiltzen da, $\rho = \frac{1}{\sigma}$ izanik. Estudioa guztiz berdina da.

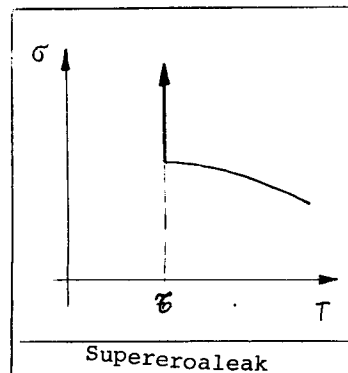
Zer gertatzen da temperatura konstantea izan ordez, igon egiten bada?

Bada, eroale metalikoetan konduktibitatea ttikitu egiten da, albo ko irudian adierazten den bezala. Beharbada, sarearen agitazio termikoak sarearen eta elektroien ar teko txoke gehiago behartzen di-tuelako gertatzen da hau.



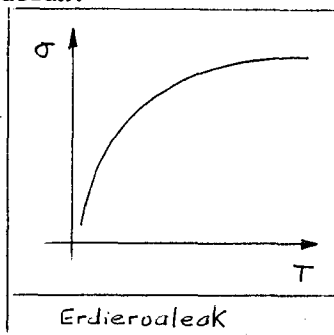
Azkenez, esan dezagun, beste bi gorputz-mota ere ba daudela; hauek ez dute ez dielektrikoen, ez eta eroa leen portaera berdina: supereroaleak eta erdieraaleak.

Supereroaleen portaera metalena bezalakoa izaten da, temperatura oso ttikitik ez ezik. Temperatura jaitsiz - goazenean, temperatura kritiko batetara heltzen gara, eta honetan $\sigma \rightarrow \infty$, hau da



$\rho=0$ egiten da. Beraz, $R=0$ egiten da, eta ez dugu eremu elektrikorik behar, supereroale^an zehar korronteak intentsitate berberaz iraun dezan.

Erdieroaleen konduktibitatea ttikituz doa tenperaturaren arauera, eta tenperatura ttikitan isolatzaile bezala har ditzakegu. Zergatik? Bada, tenperatura igo-tzean, lehen loturik zeud^en hain bat portadorek, energia nahiko - irabazten dute, eta askatu egiten



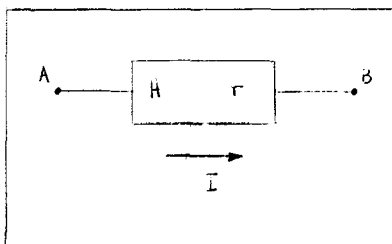
dira. Horrela, n handituz doa K -ren handitze arina-goaz, eta σ ere handitu egiten da.

Hala ere, ez dugu azken bi hauen azterketa sakonik egingo.

15.5 INDAR ELEKTROERAGILEA. OHM-EN LEGEAREN GENERALIZAZIOA.

15.5.1 Hartzaile elektrikoa, Indar kontraelek-troeragilea.

Zer da hartzaile elektriko bat? energia elektrikoa beroa ez den beste zerbaitetan bilakatzen duen aparatu bat da. Ikusi dugunez, erresistentziak be-



rotan bakarrik bila-katzen du energia - elektrikoa.

Demagun, A eta B puntuen artean haue-tariko bat dugula, be-

raren barne-erresistentzia r izanik. A eta B pun-tuen artean V potentziale-diferentzia badago, eta

beraien artean I intentsitatea badabil, elektrabide zati horretan, ondoko potentzia dugu denetara:

$$P = (V_A - V_B)I ; \frac{Q}{t} = I, \text{ eta } (V_A - V_B)Q = W,$$

intentsitatea eta lana baitira.

Eta hartzaileak erabiltzen duen potentzia P izanik, potentziaren gorabehera hau da:

$$I(V_A - V_B) = P + rI^2, \text{ zeren esan baitugu ener-}$$

gia g ehiena ez dela berotan bilakatzen. Beraz,

$P = I(V_A - V_B) - rI^2$ dugu beste zerbaitetan bilakatzeko den potentzia. Motoreen kasuan, potentzia elektrikoa potentzia mekanikotan bilakatzen da.

$E_k = \frac{P}{I}$ magnitudeari indar kontraelektroeragilea deitzen ^Izaio, eta hartzailearen ezaugarri bat da; askotan konstante izaten da.

E_k hau M.K.S. sisteman volta-tan neurtzen da, V potentzialearen dimentsio berberak baititu.

Lehengo expresioa honela gelditzen zaigu:

$$V_A - V_B = rI + E_k$$

Beraz E_k delakoak ahuldu egiten du intentsitatea. Konkretuki, voltak kasu honetan zera ematen digu, beste potentzia mota batetan bilakatzen den potentzia elektrikoa, hartzailea zeharkatzen duen ampère bakoitzarekiko.

15.5.2 Generadore elektrikoa. Indar elektroeragilea.

Generadore bat energia kimikoa -pilen kasua- edo mekanikoa -dinamoen kasua- energia elektrikotara bilakatzen duen aparatu bat da.

Sorturiko korrontearen potentzia P bada, eta hark eraginik elektrabidean zehar doan intentsitatea I bada, zera dugu:

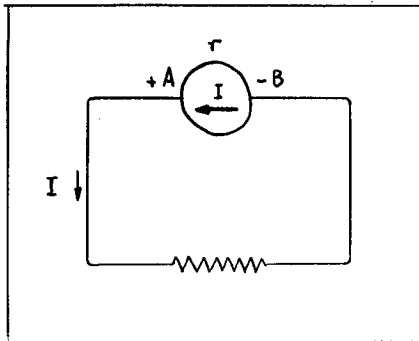
$$P = E \cdot I$$

E indar elektroeragilea izanik. $E \frac{\text{wat}}{\text{amp}} = \text{volta-tan}$ neurtzen da -M.K.S. sisteman-.

Beraz, kanpoko elektrabidean R erresistentzia bat badugu, eta generadoreak r barne-erresistentzia badu -hau da, partikula kargatuak beraren barnean higitzean, Joule efektuaz ere potentzia bat galtzen da generadore barruan-, ondoko energi balantzea egin dezakegu:

$$P = EI = rI^2 + RI^2 = (R + r)I^2, \quad E = (R+r)I$$

Hau da Ohmen Legearen generalizazioa: Generadorearen indar elektroeragilea elektrabideen erresistentzia guztien eta beraietan zehar doan intentsitatearen arteko biderkaketa da.



Bestalde, elektrabi-deak duen erresistentziaren muturretan -dagoen potentziale-diferentzia, generadoreak duen berbera da. Hone-la, ba, zera idatz dezakegu:

$$V_A - V_B = RI = E - rI$$

Zergatik - zeinu hori $r_i I$ terminoaren aurrean? Intentsitatearen zeinua, hartu dugun hitzarmenaren arauera zein den ikusiz, honen zergatikoa ikus dezakegu.

Partikula kargatuak elektroiak izanik, kanpo-elektwabideko intentsitateak eta partikulen abiadurak aurkako sentid~~oa~~ dute. Generadore barnetik, ordea, sentido hau berbera da, honek A eta B arteko potentzia-

le-diferentzia berritu egiten baitu, partikulek kanpo-elektrobidetik deusezten duten denbora berean. Honek zera esan nai digu, barnetik elektroioak B-tik (-polotik) A-ra (+ polora) doazela.

Noski, elektrobidea moztu egiten badugu (hau da, $R \rightarrow \infty$ eginez), $E = V_A - V_B$ da, eta, honek zera diosku, elektrobide irekian generadorearen indar elektroeragilea beraren poletako potentziale-diferentziaren berdina dela.

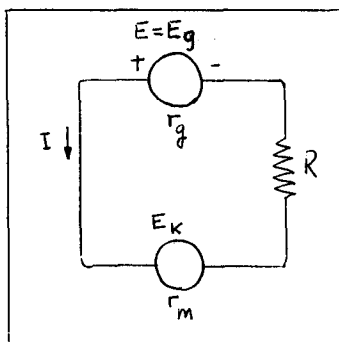
OHARRA: Elektrobidean bai generadore~~a~~ eta bai motorea (hartzailea) baditugu, lehengo legea rean generalizazioa bat-batekoa da:

$$EI = E_k I + (r_g + r_m + R) I^2$$

Beraz $E - E_k = \sum_i r_i I$

Eta kasu generalenean:

$$\sum_j E_j - \sum_j E_{kj} = \sum_i r_i I$$

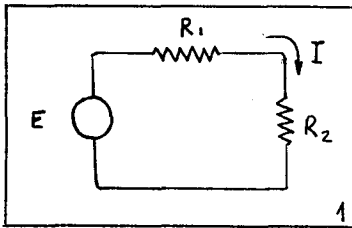


15.6 ELEKTRABIDEAK, ERRESISTENTZIAREN ERABILKERA. KIRCHOFF-EN LEGEAK.

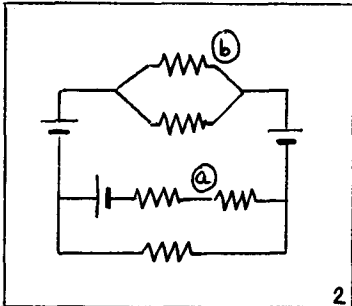
15.6.1 Erresistentziak seriez eta paraleloz.

Orain arte nahiko teorikoki ikusi izan dugu korrontearen problema, baina ikasitako magnituden erabilkerako arauak ikastea eta menperatzea, oso interesgarria zaigu praktikotasunaren aldetik.

Elektrobide bakunena irudian agertzen dena dateke, beraren elementu guztiak bata bestearen



atzean agertzen direlarik. Hau da, seriez ipinita daude.



Baina gehienetan eskema horrek hainbat aldaera hartzen ditu. Elektribideen adibidetzat 2. irudian agertzen dena har dezakegu. Horrelako kasuetan - elektribideari elektrasare ize na ematen zaio.

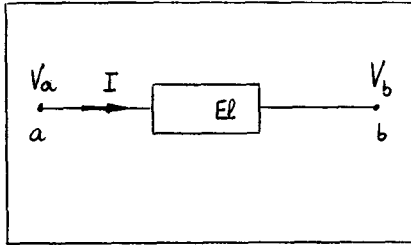
Hor, bi elementuren artean dauden 2 konektatze-mo-

ta posibleak agertzen zaizkigu. (a) -z izendatutakoa, seriezkoa da, esan dugun bezala- Eta, (b) -z izendatutakoa, paralelozko konekzioa deitzen dena.

Beraz, bi punturen artean bakoitza hurrengoaren atzetik agertzen diren elementuen arteko disposaketa^{ri}, serietango konekzioa deitzen zaio. Kasu honetan - elementu guztiak zeharkatzen dituen intentsitatea, berbera da.

Eta bigarrenenez, bi punturen artean bakoitza - bere bide propioz agertzen diren elementuak, paralelotan jarriak daudela esaten dugu. Kasu honetan, potentziale-diferentzia berbera da bide guztietatik; beraz, intentsitatea banatu egiten da.

Baina nolanahi jarrita ere, beti lor dezakegu erresistentzia baliokidea. Erresistentzia baliokidea, erresistentzi multzoaren ordez jarritz, elektribide berdina korrante berdinez iraun erazten duenekoa da.

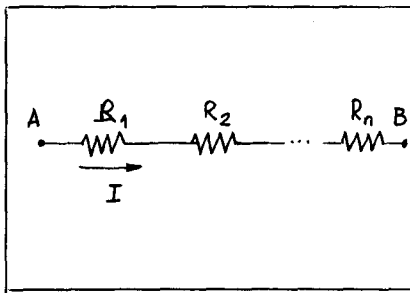


Horrela, guztiz berdin izan-
go zaigu, bata zein bestea.
I edo V direlakoak kalku-
latzerakoan; zera beteko da:

$$V_{ab} = R I$$

Hemen, R, El elementuan dauden erre^sistentzien balioki-
dea da, I, a-tik aurrera doan intentsitatea, eta V_{ab} ,
a eta b puntuen arteko potentziale-diferentzia. Orain
ikus ditzagun lehen aipaturiko bi kasuak, serietan eta
paralelotan ipiniriko erresistentzi multzoak:

a.- SERIEZ



Kasu honetan I, erresisten-
tzia guztiak zeharkatzen di-
tuen intentsitatea berbera
da.

$$\text{Beraz: } V_1 = IR_1, \quad V_2 = IR_2, \dots,$$

$$V_n = IR_n$$

Eta azkenez

$$\frac{V_{ab}}{I} = R_1 + \dots + R_n$$

$$\text{Eta } V_1 + \dots + V_n = V_{ab}$$

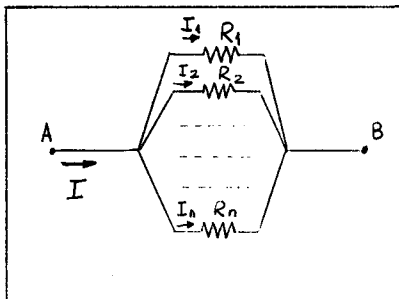
Eta definizioz, $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ izango dugu -elektra
bideko baldintza berdinezko R-a baita-. $R = \sum_i R_i$

Zera dugu,ba, serietango erresistentzi multzo baten erre-
sistentzia baliokidea beraien batura dela.

b.- PARALELOZ

Kasu honetan, A eta B puntuen arteko potentzia-
le-diferentzia edozein bideetatik berbera dela dakusagu;

bestalde, intentsitate intzidentea bide guztietatik ba-



natu egiten da. Beraz, $I_1 \dots I_n$ direlakoak - erresistentzia bakoitza zeharkatzen duten intentsitateak badira:

$$V_{ab} = R_1 I_1; \dots; V_{ab} = R_n I_n$$

Eta $I_1 + \dots + I_n = I$

$$I = \frac{V_{ab}}{R_1} + \dots + \frac{V_{ab}}{R_n} = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

Eta definizioz: $I = \frac{V_{ab}}{R}$

Azkenez, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$ geratzen zaigu.

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

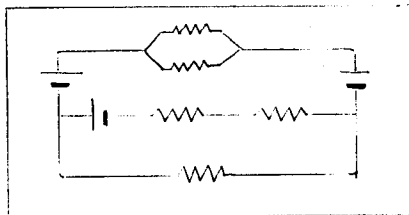
Beraz, paralelotan ipiniriko erresistentzi multzo baten erresistentzia baliokidea, hauen inbertsuen baturaren - inbertsuaren arauerakoa da.

Bi erresistentziaren kasuan: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$,

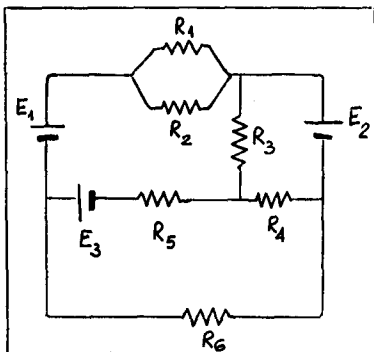
$$R = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

15.6.2 Kirchoff-en legeak

Hala ere, batzutan ez da posible izaten, elektrabideen prestaera lehengo kasuetara erreduzitzea. Adibidez, lehengo elektrabidearen (15.6.1) generadoreen



lekutzeak ez du onartzen, $E = IR$ tankereko elektrabide batetara erreduzitzea, lehengo bidez behintzat.



Are gehiago, horiez gain, zeharkako erresistentzia bat bagenu (ikus irudia) (R_3)

Kasu hauetan gehien erabiltzen den metodoa, "Kirchoffen legeak" direlako ei jarraikiz lortzen dena da -G.R. Kirchoff, 1824-1887-.

Ezer baino lehen, aipa ditzagun Kirchoffen legeak direlakoak. Horretarako ondoko bi definizioak emango ditugu:

KORAPILOA, bi baino eroale gehiago batzen direneko sare elektrikoko edozein puntu da.

MAILA berriz, sare elektrikoan dagoen edozein ibilbide hitxi da. Berorik horrela definituz, Kirchoffen legeen berri emateko prest gaude:

- a) KORAPILOEN LEGEA: Edozein korapilotarantz doazen intentsitateen batuketa zero da.

$$\sum_i I_i = 0$$

- b) MAILEN LEGEA: Edozein mailatan dauden indar elektroeragileen batuketa, maila horretako $I \cdot R$ biderketen batuketaren berdina da.

$$\sum_i E_i = \sum_i I_i R_i$$

Zer diote bi legeek? Lehenak, korapiloetan ez dela kargarik akumulatzen; eta bigarrena Ohm-en lege generalizatuaren ondorio baz besterik ez da. Azken hau erraz ikus daiteke:

$$V_{ab} = \sum IR - \sum E$$

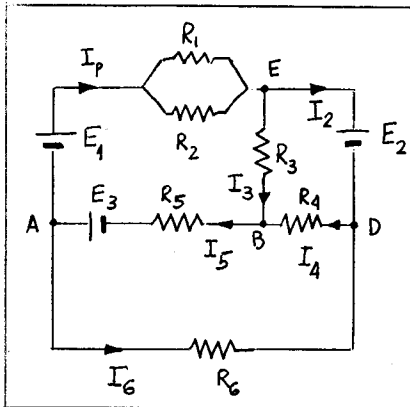
$$I_{\text{bilbide hitxi batetan}} \quad A \equiv B \quad V_{ab} = 0$$

$$\sum E = \sum IR \quad \text{dugu.}$$

Hemen intentsitateak ez du zertan berbera izan behar R bakoitzean, sare elektrikoan zehar abartzeak baitaudeke.

Hala ere, nahiz eta metodo honek ikuspuntu fisiko batetatik problema berezirik ez duen, problema han diena matematika mailan agertzen da, zeinuen erabilkeran bereziki.

Berorren argitzea adibide praktiko batez egingo dugu, galdera honen hasieran aipaturikoa, hain zuzen ere.



Demagun **3** generadore ezagun ditugula -ikus irudia-, eta 3rak barne-erresistentzia zero dutela. Ha laber, irudian agertzen di ren erre sistentziak ezagutzen ditugula.

Beraz, gure ezezagunak I_p (I_{AE}), I_2 (I_{ED}), I_3 (I_{EB}), I_5 (I_{AB}), I_4 eta I_6 dira.

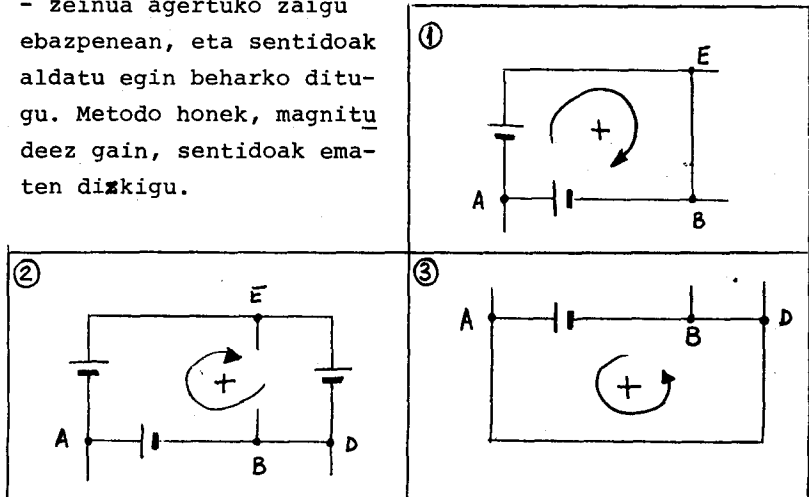
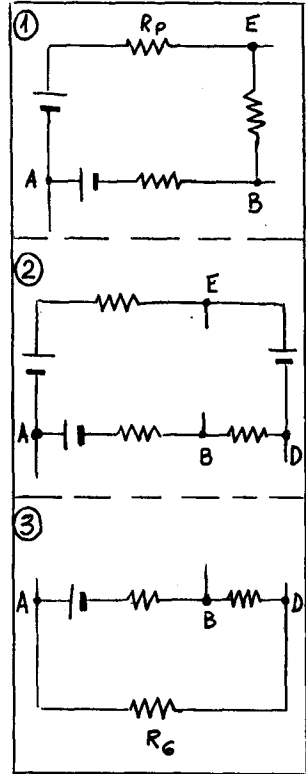
1. Lehenengo eta behin, R_1 eta R_2 paralelel daude-nez, beraien erresistentzia ekibalentea lortuko du-gu, honek ez baitigu problema berezirik sortzen.

$$R_p \text{ deituko dugu } R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Eta orain, has gaitezen Kirchoffen metodoa erabiltzen.

2. Horretarako, emateko dugun lehen pausoa, behar bezainbat maila aukeratzea da, linealki independente izateko bali dintzapeko ahal bezainbat halegia. Adibidez, irudian agertzen direnak, nahiz eta bestelako aukerak ere egon.

3. Orain, maila bakoitzean intentsitate-sentido bat definitu behar dugu, eta beronen arauera zeinuguztiak finkatu. Sentido hau gaizki aukeratua izan bada, azkenean zeinua agertuko zaigu ebazpenean, eta sentidoak aldatu egin beharko ditugu. Metodo honek, magnitudetz gain, sentidoak ematen dizkigu.



Guk, I_4, I_6 intentsitateak emanak baitigu, hori kontutan harturik, irudiko sentidoak aukeratuko ditugu.

4. Mailen erregela erabiltzeko prest gaude, bakarrik zera gogoratu, indar elektroeragilea positiboa dela, intentsitatea polo positibotik sartzen denean.

Beraz:

1.go mailan $-E_1 - E_3 = I_p R_p + I_3 R_3 + I_5 R_5$

2.ean $E_2 - E_1 - E_3 = I_p R_p + I_4 R_4 + I_5 R_5$

3.ean $-E_3 = I_6 R_6 + I_4 R_4 + I_5 R_5$

Hau da:

$$-25 = I_p R_p + 5I_3 + 4I_5$$

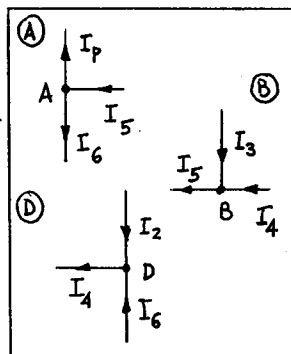
$$E_2 - 25 = I_p R_p + 45 + 4I_5$$

$$-15 = 2,5 + 45 = 4I_5$$

5. Korapiloen legea n-1 puntutan erabiliko dugu, hiru tan gure kasuan.

Kasu honetan, heltzen diren intentsitateei + zeinua emango diegu, eta irteten direnei- . Aldrebes ere egin genezake, ondorio berberaz, noski.

Beraz: A. $\begin{cases} -I_p - I_6 + I_5 = 0 \\ I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ I_2 + I_6 - I_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} -I_p + I_5 = 0,5 \\ I_3 - I_5 = 15 \\ I_2 = 14,5 \end{cases}$



Azken ekuazioak I_2 ematen digu zezenki. Hau alde batetara utzirik, 5 ekuazio eta 5 ezezagun ditugu:

R_2 , E_2 , I_p , I_3 , I_5 . Problema ebatzirik dago.

Hori eginik, zera lortzen dugu:

$$I_3 = - 0,625 \text{ amp.} , \quad I_5 = - 15,625 \text{ amp.} , \quad I_p = 16,125 \text{ amp.}$$

Beraz, I_3 eta I_5 adarren intentsitate-sentidoa aldatu egin beharko dugu.

$$E_2 = 48,125 \text{ v.} , \quad R_p = 2,52 \qquad R_2 = 0,42$$

17. GAIA - INTERAKZIO MAGNETIKOA

SARRERA

- 17.1 HIGITZEN ARI DEN KARGA BATEN GAINEN INDAR MAGNETIKOA
- 17.2 EREMU MAGNETIKO BATETAN KARGA BATEK DUEN HIGIDURA. ADIBIDEAK.
- 17.3 KORRONTE ELEKTRIKO BATEN GAINEN INDAR MAGNETIKOA
- 17.4 KORRONTE ELEKTRIKO BATEN GAINEN INDAR-MOMENTU MAGNETIKOA
- 17.5 KORRONTE ELEKTRIKO BATEK ERAGITEN DUEN EREMU MAGNETIKOA
- 17.6 KORRONTE ZUZEN BATEN ETA KORRONTE ZIRKULAR BATEN EREMU MAGNETIKOA
- 17.7 KORRONTEEN ARTEKO INDARRAK
- 17.8 HIGITZEN ARI DEN KARGA BATEN EREMU MAGNETIKOA

S A R R E R A

Nahiz eta Jesukristo baino lehen ezagutua izan (interakzio grabitatorioa XVII. mendean dugu Newton-ek proposatua; elektrikoa XVIII. mendean Coulomb-ek aztertua), interakzio magnetikoa ez zen oso ondo ulertua izan, pasa den menderarte.

Aintinadanik, marinelek ba zekiten itsasoan norabideak fikatzeko, materiale berezi batezko orratzez. Materiale hori burdinezko minerale bat zen, magnetita delakoa, eta tresna, iparrorratza. Honelako orratz bat, hari batez esekita edo ardatz bertikal batez eutsita, beti ezarritzen da modu berean: mutur batek iparralderanzko direkzioa adierazten du beti, eta horregatik - "ipar-poloa" izan zen izendatua; besteak, noski, hegaldaranzkoa eta hortik bere izena: "hego-poloa". Bestalde, iparroratz edo iman bi hartzen badira, bata bestearen aurrean ipiniz, nola izen bereko poloak elkarretik aldentzen diren eta, berriz, ezberdinekoak hurbiltzen diren ikusiz gero, berehalako ondorioa zera izango litzateke: Lurra oso iman handi bat da "ipar-polo magnetiko" bat duelarik "hego-polo geografikoan", eta alderantziz.

Polo magnetikoei buruzko teoria nahiko garatua izan zen, eta beraren azalbidea materiaren propietate batez oinarritu egin zen: propietate magnetikoa.

Hala ere, pasa den mendearen erdi aldean, iker-tzale batzuk (Oersted, Faraday, Henry eta bestek) - aurkitu egin zituzten elektrizitate eta magnetismoa-ren artean dauden harremanak, eta aurkezpen honen kau-saz, lehengo teoria baztertua geratu zen, beraren le-kuan beste bat kokatuz. Azken teoria hau, orain ere onartzen da eta, sinpleki esanez, eragin magnetikoak kargen higiduraren ondorioak bezala kontsideratzen - ditu. Hots, gaur egunean, interakzio magnetikoa, hi-gitzen diren partikula kargatuen arteko interakzio berezia dela uste dugu.

17.1 HIGITZEN ARI DEN KARGA BATEN GAINEKO INDAR MAG-NETIKOA

Kontsidera dezagun, bi edo partikula gehiago hi-gitzen ari direneko espazio-aldea. Edozein partikula baten gainean sortzen den indarra neurtzen bada, inte-rakzio grabitatorio eta elektrikoa kendurik, beste in-dar bat geratzen dela ikusten da. Hemen dugu, hain zu-zen, indar magnetikoa. Beraren forma matematikoa fin-katzeko, beste edozein oinarritzko efektu berri bat - ikertu nahi denean bezalaxe, hamaika esperientzia - egin behar da. Esperientzia anitz egin dira, gaur egu

neko partikulen azeleragailuez batez ere, eta beraien ondorio guztiak batuz, higitzen ari den karga baten gaineko indar magnetikoa ematen duen formula, zera dela ikusi da:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Hemen:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \text{partikula ikertuaren karga} \\ \vec{v} = \text{" " " abiadura} \\ \vec{B} = \text{eremu magnetikoaren intentsitatea.} \end{array} \right.$$

Ikus daitekeenez, lehen lehenik sartzen dugu eremu-kontzeptua interakzio magnetikoa azaltzeko. Orain baino lehen, beste eremu-moeta batzu ere erabili ditugu (ikus 14. eta 15. gaiak), interakzio grabitatorio eta elektrikoa egoki erakusteko, eta hori dela eta, ba dakigu, interakzioak estudiatzeko eremu-kontzeptua oso tresna baliagarria dela. Fisikaren beste partetan ere, gehienetan esan daiteke, kontzeptu hau guztiz beharrezko bezala agertu da, problema teoriko pila bat ikertzeko. Ikuspegi honetatik, $\vec{B}$, eremu magnetikoaren intentsitate-bektorea edo, sinpleagoki, eremu magnetikoa deitua, onartuko eta erabiliko dugu, indar magnetikoa

kalkulatzeko oso ondo datorkigula esperientziak demostratu digu eta. Bektore hau, noski, beste partikula kargatuek sorterazen dute, gu iker-tzen ari gareneko partikula dagoeneko puntuan; eta, logikoki, ba daude eremuaren eta bera sor-terazten duten partikulen arteko erlazioak. De-na dela, oraingoz ez gara kezkatuko aipaturiko erlazioez, eta beranduagorako utziko ditugu.

Goazen, ba, aurreko formula aztertzeraz, eremu magnetikoaren dimentsioetatik hasiz. Berez hauxek izango dira, MKS A unitate-sistema erabi-liz:

$$[b] = \left[\frac{F}{q v} \right] = \frac{M L T^{-2}}{Q L T^{-1}} = M T^{-1} Q^{-1} = M T^{-2} I$$

Hortaz, eremu magnetikoaren unitatea (MKSA sisteman)

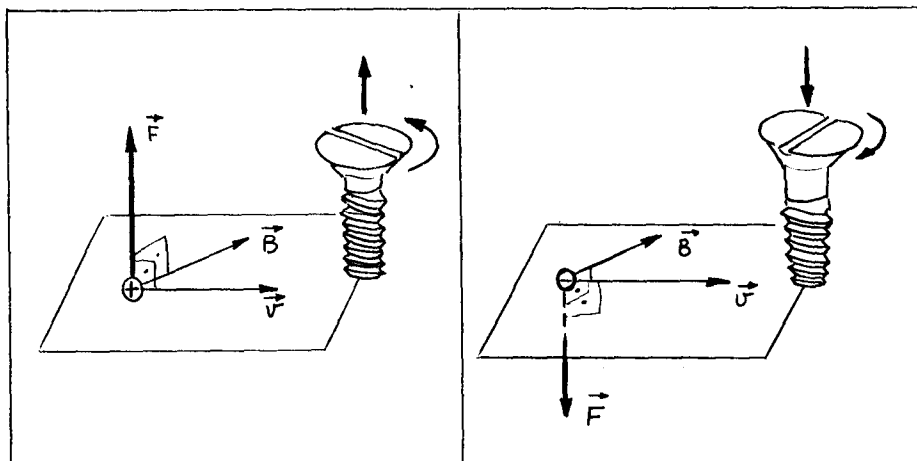
$$1 \left[Kg. s^{-2} \cdot A^{-1} \right] = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T.}$$

Indarren modulua, noski, haxe izango da:

$$|\vec{F}| = |q| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \sin \theta$$

θ delakoa, $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ bektoreek osotzen duten angelua delarik.

Irudian indarren direkzio eta sentidoa ikusten dira, karga positibo zein negatibo batentzat.



Azkenez, indar honen xehetasun garrantzitsu bat ikusi dugu. Irudian nabaritzen denez, $\vec{F}$ eta $\vec{v}$ bektoreak beti perpendikularrak dira. Hori dela eta, $\vec{F}$ bektoreak ez du inoiz $\vec{v}$ bektorearen modulua aldatzen, beronen direkzio hutsa baizik.

Beste modu batez azaltzeko, indarra ibilbidearen perpendikularra izanez, ez du lanik egiten eta, hori dela eta, partikularen energiak konstantea irauten du, hots, partikula beti abiaduraren modulu berberaz higitzen da.

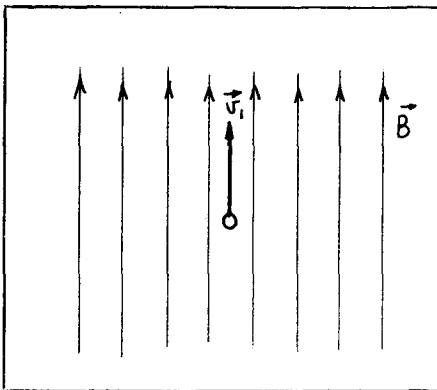
17.2 EREMU MAGNETIKO BATETAN KARGA BATEK DUEN HIGIDURA. ADIBIDEAK.

Ikusiko den bezala, bakarrik eremu magnetiko uniforme baten barnean azalduko dugu higidura, aplikazio erreal garrantzitsuetan (masen espektrografo eta espektrometroetan, ziklotroietan, e.a.) honela-

ko eremu-moetak erabiltzen dira eta.

Arazoa errezki aztertzeko, hiru kasutan banatu-ko dugu.

I. - $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ paraleloak dira. Hau da kasu sin-pleena.



Berez:

$$\vec{v}_1 \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 = 0$$

$$\vec{F}_1 = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \Rightarrow \vec{v}_1 = K \vec{t}$$

Hots, ez da abia-
duraren direkzioa alda-tzen eta ez modulua ere.

LABURKI: Eremu magnetiko uniforme batetan $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ paraleloak izanik, partikula kargatu-baten higidura zuzen eta uniformea da.

II. - $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ perpendikularrak dira. Orain:

$$\vec{F}_2 = q \vec{v}_2 \times \vec{B} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \neq 0$$

eta abiaduraren direkzioa aldatu egingo da (dakigunez, modulua ez). Baina abiaduraren direkzio berria $\vec{v}_2$ eta $\vec{a}$ (edo $\vec{F}_2$) bektoreek definitzen duten planoan datza, eta, beraz, $\vec{B}$ -aren perpendikularra iraungo du.

Arrazonamendu berdina errepika daiteke unez une eta ondorioa hauxe da: partikulá $\vec{B}$ bektorearen plano perpendikular batetan higitzen da. Orduan, $\vec{v}_2$ eta $\vec{B}$ beti perpendikularrak eta $|\vec{v}_2| = kte.$ izanez:

$$|\vec{F}_2| = |q| \cdot |\vec{v}_2| \cdot |\vec{B}| = Kte$$

Bestalde, $\vec{F}_2$ $\vec{v}_2$ bektorearen perpendikularra denez:

$$\vec{F}_2 = m a_N \vec{u}_N = m \frac{v_2^2}{r} \vec{u}_N$$

$$|q| \cdot |\vec{v}_2| \cdot |\vec{B}| = m \frac{v_2^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m |\vec{v}_2|}{|q| \cdot |\vec{B}|} = Kte$$

Kurbatura-erradio konstantea duen higidura laun bat bakararra dago: higidura zirkularra. Ikus dezagun beraren abiadura angeluarra:

$$\omega = \frac{|\vec{v}_2|}{r} = \frac{|q|}{m} |\vec{B}|$$

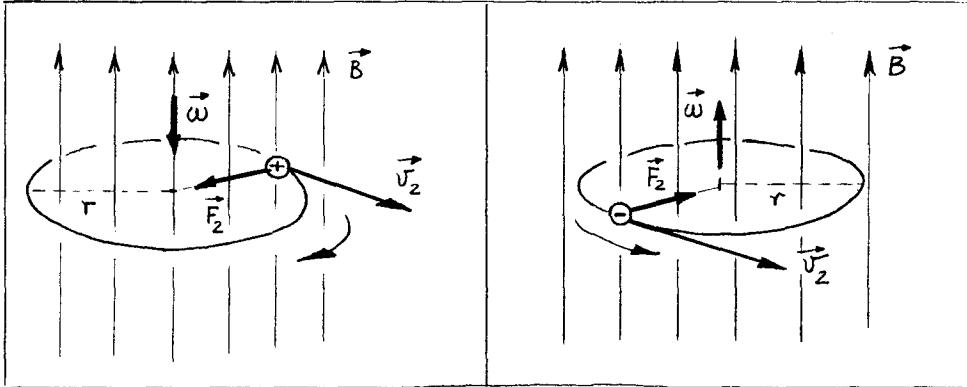
Eta beraren periodo eta frekuentzia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q| \cdot |\vec{B}|}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|q| \cdot |\vec{B}|}{2\pi m}$$

Nabari daitekeen bezala, ω eta, noski, T eta ν abiaduraren independenteak dira.

Higiduraren sentidoa irudian erakusten da, karga positibo eta negatiboen kasuetan.



Ikus daitekenez karga positiboaren kasuan $\vec{\omega}$ eta $\vec{B}$ bektoreek sentido kontrakoak dituzte, eta karga negatiboaren kasuan, berriz, sentido berbera.

LABURKI: Ere mu magnetiko uniforme batetan eremuaren intentsitatearen perpendikularra den abiadura batez sartzen den partikula kargatu baten higidura, zirkular eta uniforme da, abiadura angeluarra eta, hortaz, periodo eta frekuentzia, abiaduraren independenteak direlarik, eta erradioa, ordea, abiaduraren proportzionala. Abiadura angeluarra honela idazten da bektorialki:

$$\vec{\omega} = - \frac{q}{m} \vec{B}$$

III. - $\vec{v}$ eta $\vec{B}$ bektoreek edozein angelu osotzen dute

Hona hemen kasu generalena, eta errazago ulertzeko partikularen abiadura $\vec{B}$ bektorearen

direkzio paralelo eta perpendikularretan deskonpo-
satuta kontsideratuko dugu:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{v}_1| = v \cos \theta \\ |\vec{v}_2| = v \sin \theta \end{array} \right\} \quad v = |\vec{v}| \text{ eta } \theta \text{ delakoa } \vec{v} \text{ eta } \frac{\vec{v}}{B}$$

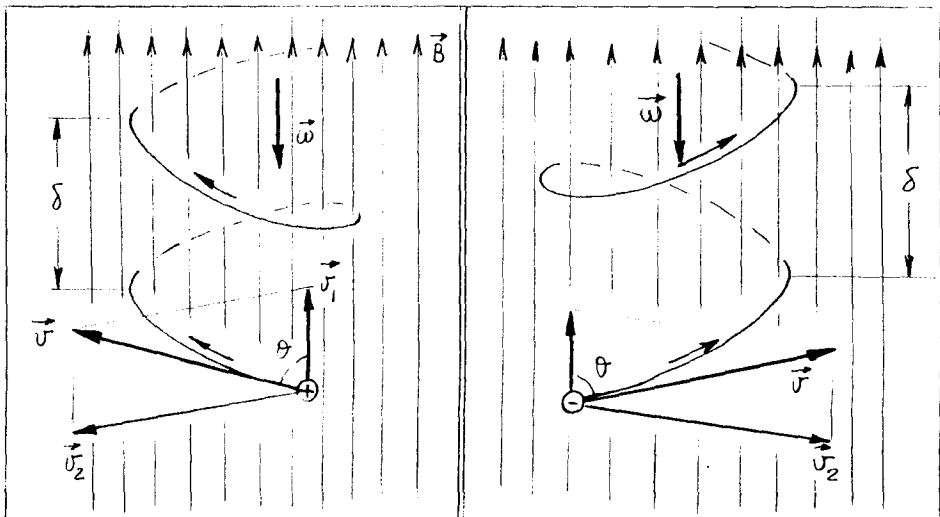
bektoreek osotzen
duten angelua izanik.

Goazen, orain, indar magnetikoaren formulara:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{B} = q \vec{v}_1 \times \vec{B} + q \vec{v}_2 \times \vec{B} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 = q \vec{v}_1 \times \vec{B} \\ \vec{F}_2 = q \vec{v}_2 \times \vec{B} \end{array} \right.$$

Berehala I. eta II. kasuak loturik dauzkagula kon-
turatzen gara. Aipaturiko kasuak batera hartzen ba-
ditugu, Gainezarmenaren Printzipioa aplikatuz, ibil-
bidea helize erregularr bat dela dakusagu zuzen-zu-
zenki, helizearen ardatza eremuaren paraleloa dela-
rik.

Irudian helizeak marraztu dira, karga positibo eta
negatiboen kasuetarako.



Aurreko atalean (II. kasuan) ikusi dugun legez, $\vec{\omega}$ abiadura angeluarra $\vec{v}$ abiadura linealaren independentea da; hortaz orain ere horrela izanen dugu:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B} \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{2\pi m}{|q| \cdot |\vec{B}|} \\ \nu = \frac{|q| \cdot |\vec{B}|}{2\pi m} \end{array} \right.$$

Helizearen erradioa hauxe izanen da:

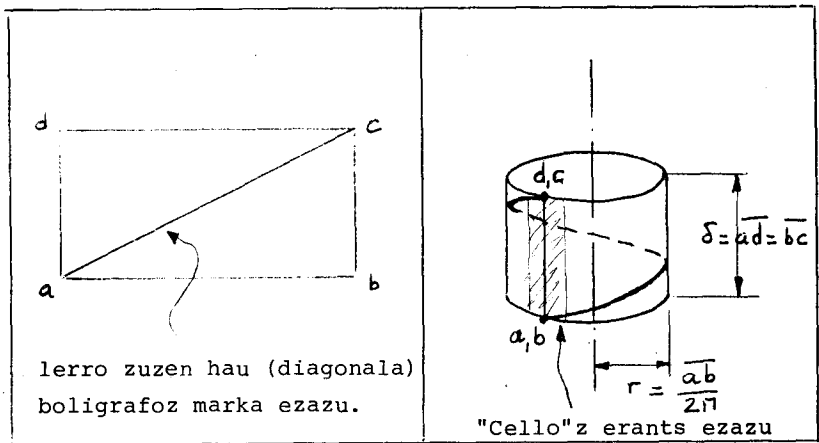
$$r = \frac{m |\vec{v}_2|}{|q| \cdot |\vec{B}|} = \frac{m v \sin \theta}{|q| \cdot |\vec{B}|}$$

Orain arte, $\vec{v}_1$ ez dugu ezertarako erabili. Ez ote da izango, bektore honen eta helizearen arteko harremanik? Bai, ba dago. Helize erregular bat ego-kiro definitzeko, erradioaz gainera beste dimentsio bat finkatu behar da, "pauso" delakoa. Eta pausoa zera da: bira oso bat emateko erabiltzen den denboran ardatzaren direkzioan ibiltzen den distantzia. Definizioz, pausoa kalkulatzeko, $\vec{v}_1$ (ardatzaren di-rekzioan abiadurak duen osagarria) eta T (bira -oso batetan ematen den denbora, hots, periodoa) mul-tiplikatu egingo ditugu:

$$\text{pausoa} = \delta = |\vec{v}_1| \cdot T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{|q| \cdot |\vec{B}|}$$

LABURKI: Kasu generalean, eremu magnetiko uniforme batetan higitzen den karga batek ibilbide helikoidal bat egiten du. Abiadura an-geluarrak II. atalean bezalakoa irauten du, helizearen ardatza eremuaren paraleloa da eta erradioak eta pausoak $\vec{v}$ -aren eta θ angeluaren dependentzia dute.

OHARRA: Aurreko atala osoki ulertzeko, helize erregular bat nolakoa den jakin behar da. Horretarako torloju zilindriko baten hegala begira dezakezu, edo, hobe to izango litzatekeena, paper-horri batez eta instrukzioak jarraituz, zurre helizea eraiki. Horrelaxe ikusiko duzu, argi eta garbi, erradioa eta - pausoa zer diren.



ADIBIDEAK

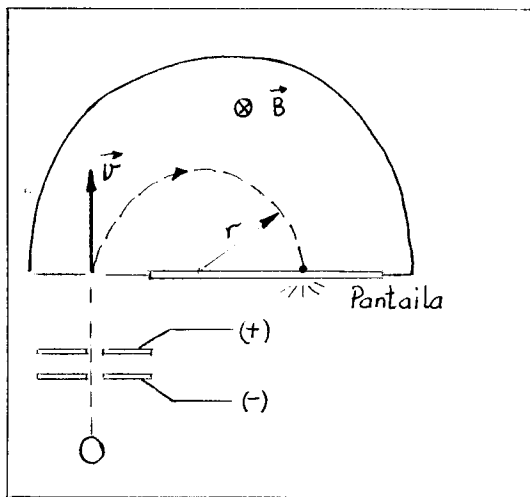
1 - Masen espektrometroa.

Honelako tresna-moeta batzu daude, baina guztiak funtzionapenaren oinarri antzekoekin. Elementu ki ionizat^{ionizat}uak miko baten atomo^{ionizat} beremu elektriko batez azeleratuak izan ondoren, abiadura ezagunez eremu magnetiko - uniforme eta gainera abiaduraren perpendikularra dagoen espazioalde huts batetan sartzen dira. Dakigunez, ioi bakoitzak ibilbide zirkular bat inguratuko du, beraren erradio hauxe izanik:

$$r = \frac{m}{|q|} \frac{|\vec{v}|}{|\vec{B}|}$$

Hemen $|\vec{v}|$ eta $|\vec{B}|$ -ak ezagunak dira, eta "r"-aren balorea aparailuaren pantailan lortzen da (Irudia

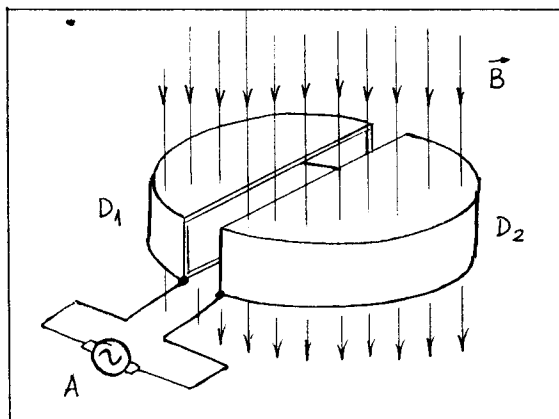
ioi negatibo baten kasuan egina da). Horrela, formula honetatik $\frac{m}{q}$ erlazioa atera da zakegu.



Bestalde, era desberdinez, partikulen kargak neur ditzakegu eta beraz beren masak ere. Hona hemen oso aparatu egokia, edozein elementuren isotopoen masak ikertzeko; eta hortik datorkio bere izena.

2 - ZIKLOTROIA

Bigarren eta azken adibide bezala, partikulen azeleragailu-moeta bat ikusiko dugu; ziklotroi delakoa.



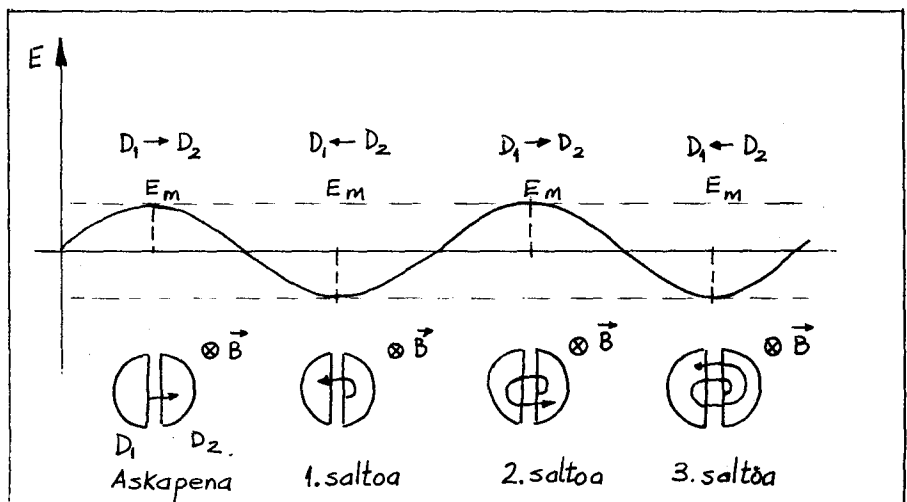
Bi pieza erdizilindrikoek (D_1 eta D_2 direla koek) osotzen dute. Hauk uniforme eta beren baxen perpendikularra den eremu magnetiko batez daude zeharkatuak. Piezak ez daude guztiz elkarrekin, pixka bat bananduak baizik, ertz bien artean, makina elektriko ba

tez (A alternadorea), eremu elektriko alferno bat eragiten da: D_1 eta D_2 -ren zentruan "ioi-kainoi" bat ezartzen

da (irudian ez da ikusten).

Ioi bat askatzen den bezain laster, eremu elektrikoak pieza baten barrura bidaltzen du (eremu elektriko maximoa izanik askatzen da partikula). Pieza barruan, eremu elektrikoak mulua da eta eremu magnetikoak zirkunferentzierdi bat ematera erazten dio, $|\vec{v}|$ aldatu gabe. Barruko pieza batetik bestera pasatzen denean, eremu elektrikoak azeleratu egiten du ioia, partikularene energia handituz.

Berriro pieza baten barnean, eremu elektrikoak anulatu egiten da eta indar magnetikoak ioiak beste zirkunferentzierdi bat inguratzen du, lehen baino erradio handiagoarekin, beraren abiadura ere handiagoa baita. Holaxe jarraitzen da prozesua, ia-ia partikula piezen hegaleraino heldu arte. Espazioalde honetan eremu magnetikoa gogorki ahultzen da eta anulatzen; beraz, indar zentripetua desagertu egiten da, eta intenbidetarako tangenzial egoki batetik, ioiak utzi egiten du ziklotroia. Partikula azeleratu horiek ba dute beren aplikaziorik, baina hau ez da orain gure kontura.



Aparatu honen funtzionamenduaren punturik garrantzitsuena zera da: irudian ikusten den legez, eremu

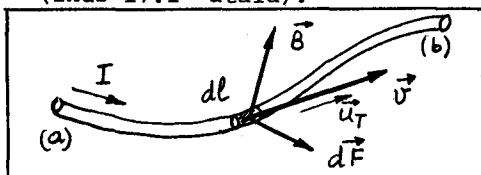
elektrikoaren sentidoaren aldaketek eta ioiaren higidurak guztiz sinkronikoak izan behar dute, zeren bestela saltu batzutan partikulak eremu eletrikoa - topatuko luke alderantziz eta ez luke abiadurarik - irabaziko, galduko baizik. Zorionez dakigun bezala, eremu magnetikoak eragiten duen higidura zirkularra ren frekuentzia, konstantea da (ioiaren abiadura ar giarenara gehiegi hurbiltzen ez bada, behintzat), eta beraren balorea: $\nu = \frac{q|\vec{B}|}{2\pi m}$. Hona hemen eremu - elektrikoaren frekuentziak ere hartu behar duen ba lorea, beraren aldaketak eta partikularen saltoak - batera gerta daitezen gura bada.

17.3 KORRONTE ELEKTRIKO BATEN GAINEN INDIR MAGNETIKOA

Azaldu izan den bezala (ikus 16. gaia) korron te elektrikoa higitzen ari diren partikula kargatuen multzo bat besterik ez da. Beraz, eremu magnetiko - batek zenbait indar egin behar dio korronte bati, - eta hori da ikustera goazena. Arazoa hobeto ulertze ko, bi kasutan zatituko dugu.

1. Korronte lineala

Hau kasu erreala izan ez arren, askotan oso hurbiltze ona gerta daiteke, korrontea hari mehetxo batetik joatean batez ere. Hariaren dl zati txiki - bat hartuz gero eta beraren barrutik higitzen den karga dq ($\vec{v}$ abiaduraz) dela kontsideratuz, eremu magnetiko batek eragiten dion indarra hauxe izango da (ikus 17.1 atala):



$$\vec{dF} = dq \vec{v} \times \vec{B}$$

Hariaren tangentearen direkzioan eta karga positiboak higitzen direneko sentidoan, hots korrontearen sentidoan $\vec{u}_T$ bektore unitarioa definitzen badugu, zera geratzen zaigu:

$$\vec{v} = v \vec{u}_T = \frac{dl}{dt} \vec{u}_T$$

$$d\vec{F} = dq \frac{dl}{dt} \vec{u}_T \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} \vec{u}_T \times \vec{B} dl \Rightarrow d\vec{F} = I \vec{u}_T \times \vec{B} dl$$

Formula honetaz kalkula dezakegu hariaren dl baten gaineko indar magnetikoa; eta zati finitu (adibidez: a-tik, b-raino) baten gainean eragiten dena lortu nahi badugu, noski, integratu egin beharko:

$$\vec{F} = I \int_a^b (\vec{u}_T \times \vec{B}) dl$$

Kontutan hartu behar da, espresio honen funtzio azpi-integrala bektore bat dela eta, beraz, generalean osagaiz garatu behar dela. Baina haria zuzen eta eremua - uniforme kontsideratuz gero:

$$\vec{u}_T \times \vec{B} = \text{cte} \longrightarrow \vec{F} = I (\vec{u}_T \times \vec{B}) l_{ab}$$

2. Higitzen ari den edozein karga-multzo bat (ideiak finkatzeko^{argi} fluoreszentezko hodi bat kontsidera daiteke).

Multzoaren edozein q partikularen bolumena V eta berorren abiadura $\vec{v}$ izanik, bolumen-unitatearekiko indarra hauxe izango da:

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{V} = \frac{q}{V} \vec{v} \times \vec{B} = \rho \vec{v} \times \vec{B} \quad (\rho : \text{higitzen deneko karga-dentsitatea})$$

Higitzen ari den karga-multzo bat estudiatu genuenean (ikus 16.1. atala), korronte-dentsitate^{tea} delako bektorea honela definitu genuen:

$$\vec{j} = nq \vec{v} = \rho \vec{v}$$

$$(\rho = nq)$$

Orduan, bolumen-unitatearekiko indarra honela geratuko zaigu:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Eta multzoaren zati finitu baten gaineko indarra lortu nahi badugu:

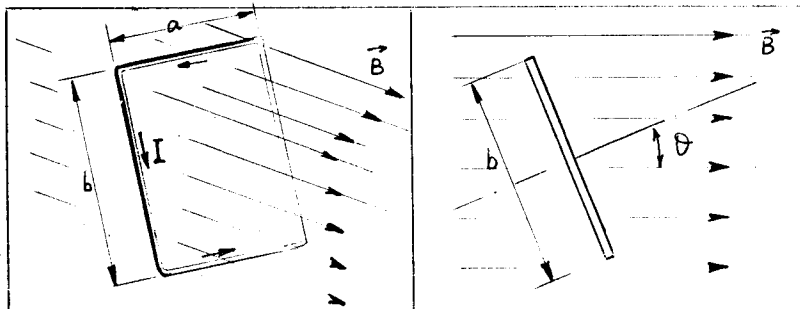
$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} dV$$

(V , zatiaren bolumena izanik).

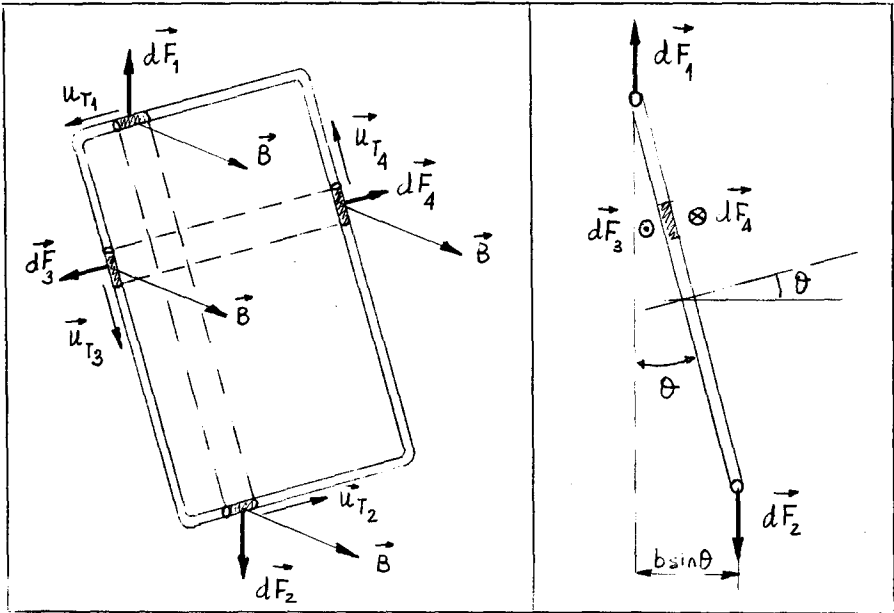
Aurreko kasuan esan egin den modu berean, hemen ere funtzio azpi-integrala funtzio bektorial bat da eta integratzeko, osagaitan garatua hartu beharko da genezakean.

17.4 KORRONTE ELEKTRIKO BATEN GAIKOK INDAR-MOMENTU MAGNETIKOA

Irudian ikusten den espira errektangeluarra kontsideratuko dugu. Bertatik I korronte elektrikoa zirkulatzen ari da, eta alde bi, a luzeak, eremu magnetiko uniforme batekiko perpendikularrak ditu. Beraren planoaren normalak θ angelua osotzen du eremuaren intentsitatearekin.



Alde bakoitzean, 1, 2, 3 eta 4 elementuak hartuz, beraien gainean sortzen diren indarrak lortuko ditugu.



Gai honetan (17.3. -1) ikusi dugun formula erabiliz:

$$|d\vec{F}_1| = |d\vec{F}_2| = IB dl$$

$$|d\vec{F}_3| = |d\vec{F}_4| = IB dl \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = IB dl \cos \theta$$

$d\vec{F}_3$ eta $d\vec{F}_4$ indarren erresultantea nulua da, eta aplikazio-lerro berbera edukiz, beren edozein puntuarekiko indar-momentuak anulatu egiten dira. Hortaz, b luzerako aldean gainean sortzen diren indarrak ahantz ditzakegu.

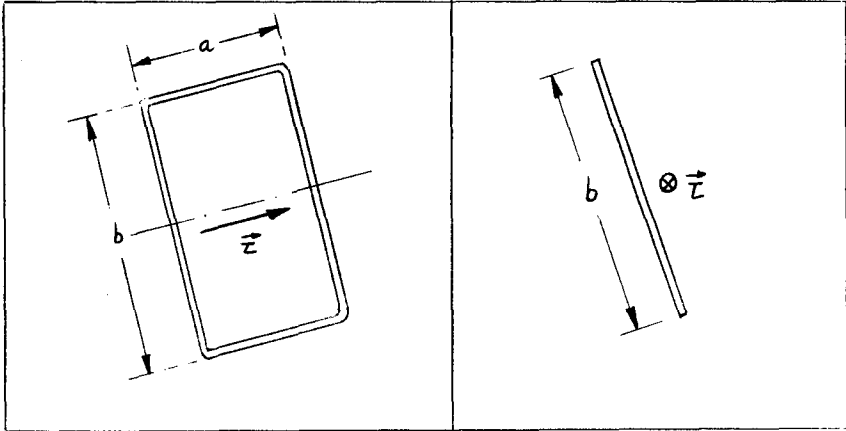
$d\vec{F}_1$ eta $d\vec{F}_2$ indarren erresultantea ere nulua da; baina beraien aplikazio-lerroak desberdinak izanez, indar-bikote bat osotzen dute. Indar-bikotearen momentua kalkulatu dezagun:

$$d\tau = dF_1 b \sin \theta = IB dl b \sin \theta$$

$$\tau = IB b \sin \theta \int_0^a dl = I b a B \sin \theta = IS B \sin \theta$$

(S espiraren azalera izanik).

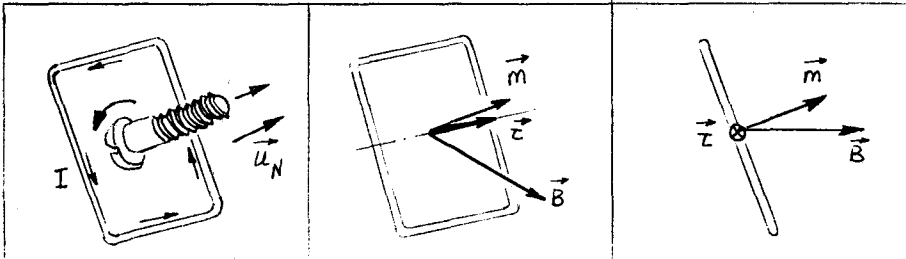
Ikusi dugunez, indar guztien erresultantea nulua izanez, gure espiraren gaineko eremu magnetikoaren efektu bakarra zera da: indar-momentu bat sortzea. Baina dakigunez, indar-momentua bektore bat da, irudian ikusten den bezalako direkzio eta sentidoarekin.



Aurreko indar-momentuaren formula, dipolo elektrikoaren estudioan (ikus 15.7) aurkitu genuenarekin gonbataratuz, sinplifikazio bat proposa dezakegu. Horretarako, bektore berri bat, momentu dipolar magnetiko delakoa, definitu behar dugu honela:

$$\vec{m} = IS \vec{u}_N$$

($\vec{u}_N$ delakoa, espiraren planoaren perpendikularra eta korrontearen sentidoarekin torlojuaren erregelaren arauera erlazio naturiko bektore unitarioa izanik).



Momentu magnetikoaren dimentsio eta unitateak hauek izango dira:

$$[\vec{m}] = I L^2 \longrightarrow A \cdot m^2$$

Definitu dugun bektore berria erabiliz, espiraren gai neko indar-momentua bektorialki azal dezakegu kolpe batez. Honetara, prezeski:

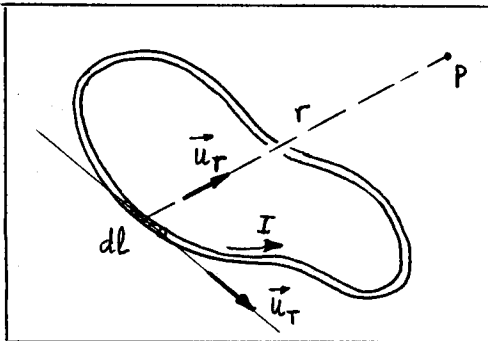
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Formula honetatik lehen aurkitu ditugun $\vec{\tau}$ -aren modulu, direkzioa eta sentidoa nola lor daitezkeen, ikasleak ikus dezake.

Azkenez, nahiz eta guk formula hau kasu berezi (espirara errektangeluarra, orientazio partikularra, eremu uniforme) atera, beste kasuetara ere hedatu daiteke, baina horren erakuspena ez da sartzen liburu honen mailan.

17.5 KORRONTE ELEKTRIKO BATEK ERAGITEN DUEN EREMU MAGNETIKOA

Lehen esan dugun legez (17.1 atalean), eremu magnetikoak higitzen ari diren partikula kargatuek eraginak dira. Korronte elektrikoak (partikula kargatuen txorro bat besterik ez izanik) eremu magnetiko bat eragin behar du, noski. Arazo hau ikertua izan zen luzaro XIX. mendearen hasieran, eta milaka esperientzia egin zen orduko jakintsuen artean: Oersted, Ampère, Biot eta beste. Orain ikustera goazen formulak —Ampere-Laplace-ren edo Biot-Savart-en legea izenez ezaguna— aipaturiko esperientzia guztiak biltzen ditu, eta honela adierazten da:



$$\vec{B} = K_m I \oint \frac{\vec{u}_r \times \vec{u}_r}{r^2} dl$$

(expresioan agertzen diren termino guztien esanahia, K_m ezik, irudian azaltzen da).

Formula honetaz zenbait ohar edo argipen izango lirateke korrontearen...

- I - Formula honek edozein puntutan (adibidez irudiko P-n) sortzen den eremu magnetikoa kalkulatzeko balio du, baina korrontea itxia izanik (hori da $\oint$ sinboloaren esanahia). Hala ere, matematikazko ikuspegitik zera - idatz daiteke:

$$d\vec{B} = k_m \vec{I} \frac{\vec{u}_r \times \vec{u}_r}{r^2} dl$$

Baina ideiak argitzeko, ikasleak ez du pentsatu behar, $d\vec{B}$ aipaturikoa $\vec{B}$ eremuaren osotzeko dl elementuaren aportazioa denik. Edo behintzat, ezin dugu honela denik esan. Zirkuitu batetan ezin baita dl elementu isolatua, eta, beraz, elementu horretaz bakarrik esperimentuak ezinezkoak izanik, $\vec{B}$ -ren formulatik $d\vec{B}$ -renerako urratsa, urrats matematiko huts bezala kontsideratu behar dugu, besterik ez.

- II - Funtzio azpi-integrala bektoriala dela kontutan eduki behar da, eta, beste aurreko ataletan esan dugun legez, generalean integrala osagaiz banaturik egin beharko.

- III - Sartu dugun K_m faktorea, proportzionaltasunerako faktore simple bat besterik ez da, eta 17.7 atalean ikusiko dugu beraren balorea. Beraren dimentsioak, ordea, aipaturiko legetik atara daitezke:

$$[K_m] = [B I^{-1} L] = M L T^{-2} I^{-2} \quad (B\text{-ren dimentsioak 17.1 atalean}).$$

Beraz, MKSA sisteman, K_m ($N A^{-2}$) unitatetan neurtzen da.

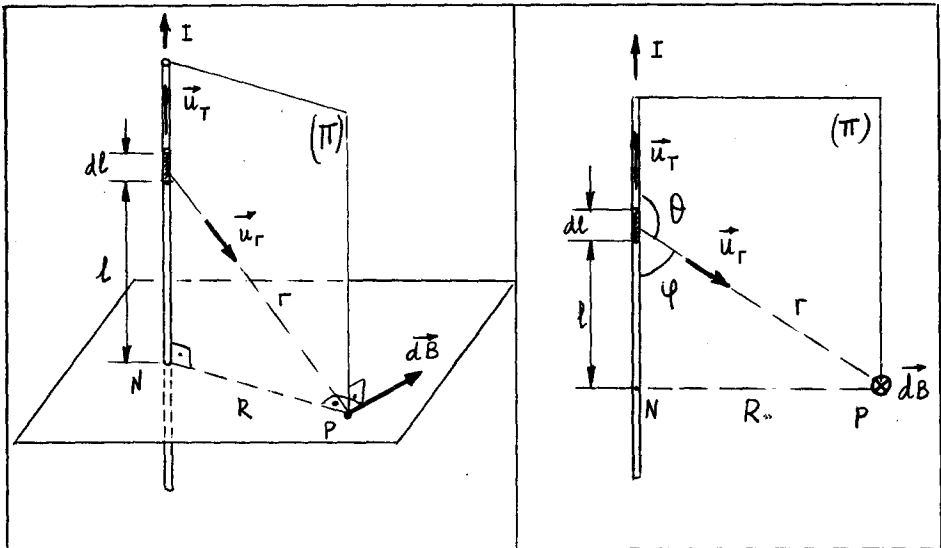
Baina, egia esan, gaur egun K_m ez da horrela idazten, beste era batez baizik. Hamabostgarren gaian ikusi zen bezala, 4π faktorea sarri sortzen da elektrizitate - problema askotan eta horregatik, sinplifikatzeko, apropos sartzan dugu faktore hau Coulomb-en legearen proportzionaltasun faktorean, $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ eginez. Ba, hemen ere, arrazoi berberetatik, gauza berbera egingo dugu eta hemendik aurrera holaxe idatziko dugu: $K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} ([K_m] = [\mu_0]$ izanik), eta legea honela goratuko zaigu:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl \rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl$$

IV - Lege hau oso kasu errazetan aplikatu daitezke baka-
rrik, eta ondo finkatzeko, datorren atalean iku-
siko ditugu adibide klasikoak.

17.6 KORRONTE ZUZEN BATEN ETA KORRONTE ZIRUKULAR BA- TEN EREMU MAGNETIKOA

1. Korronte zuzen eta mugagabea (Geometriak kon- sideratzen duen lerro zuzena).



Edozein puntutan, haritik R distanziara, eremua kal-
kulatzeko $\vec{u}_T$ eta $\vec{u}_r$ -ren artean biderkaketa bektorial
guztiek, eta, beraz, $d\vec{B}$ guztiek direkzio bera dutela
ikusten dugu, edozein $\vec{u}_T$ eta $\vec{u}_r$ -ren bikoteak π pla-
noa definitzen baitu. Hortaz $\vec{B}$ bektorea hariaren eta
 $\vec{NP}$ lerro zuzenaren perpendikularra izango da eta bera-
ren modulua kalkulatu beharko dugu bakarrik:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin\theta}{r^2} dl \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\sin\theta}{r^2} dl$$

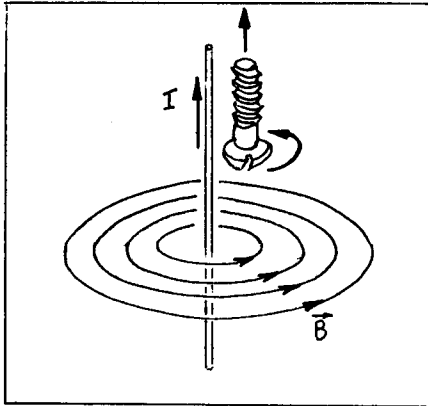
Integrala egiteko, PNM triangeluan r eta l alda-kariak, θ aldakariarekin erlazionatuko ditugu:

$$\sin \varphi = \frac{R}{r} = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \longrightarrow r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{l} &= \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg} \theta \longrightarrow l = -R \cot \theta \\ dl &= \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Orain integralera eramanez:

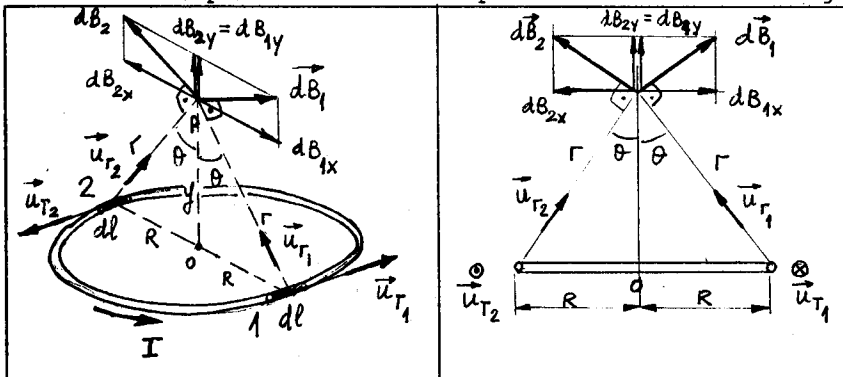
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{R^2 / \sin^2 \theta} \cdot \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Irudian, eremuaren direkzio eta sentidoa erakusten dira eremu-lerroen bidez. Lerroak hariarekiko plano perpendikularretan, beren zentruak harian bertan d_ituzten zirkunferentziak dira.

2 - Korronte zirkularra

Kasu honetan eta sinpletasunaren arrazoiagatik, espiraren ardatzaren puntuetan kalkulatuko dugu



eremua. Bestela, korrante zirkular sinple bat izan arren, egin beharko genukeen integrala zailegi geratuko litzaiguke. Demagun, ba, ardatzaren edozein P puntu bat, zentrutik y distantziara, eta zentruarekiko simetriko diren espiraren bi elementu (1) eta (2) hartzen ditugula:

$$|d\vec{B}_1| = |d\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\vec{u}_r \times \vec{u}_r|}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl$$

$$\begin{cases} dB_{1x} = |d\vec{B}_1| \cos \theta \\ dB_{2x} = |d\vec{B}_2| \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} dB_{1y} = |d\vec{B}_1| \sin \theta = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dl \\ dB_{2y} = |d\vec{B}_2| \sin \theta = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dl \end{cases}$$

Irudian ikusten den bezala, dB_{1x} eta dB_{2x} kontrako sentidokoak izanik eta balore berbera edukiz, anulatu egiten dira. Beste osagaiak, berriz, balore eta sentido berbera izanez, batu egiten dira. Arrazonamendu hau errepika egin daiteke espiraren elementuak bikoteka hartuz, eta, beraz, ardatzaren edozein puntutako eremua, ardatzarekiko paraleloa izango dela esan dezakegu. Ikus dezagun, ba, beraren balorea:

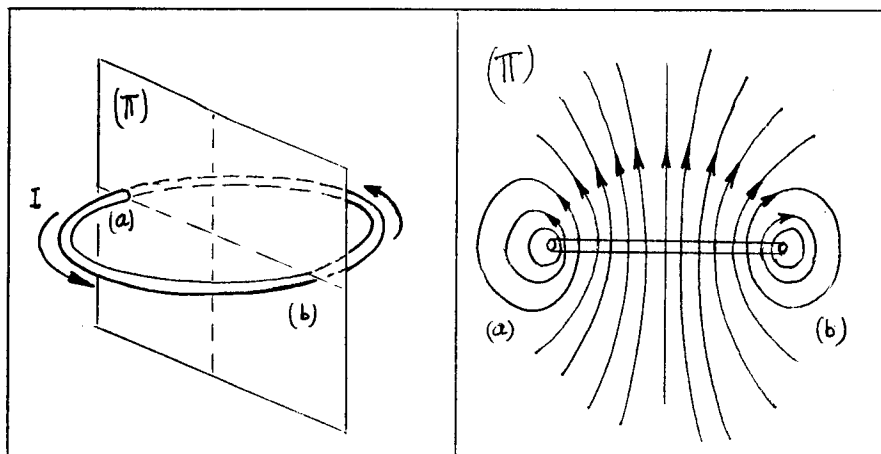
$$B = \oint dB_y = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I R \sin \theta}{2 r^2}$$

(irudian ikus daitekeenez, nahiz r nahiz θ berberak dira, espiraren puntu guztientzat)

Expresio honetatik r eta θ Ken ditzakegu, beren partez y distantzia sartuz (begira $OP1$ edo $OP2$ triangelua), honela goratzen zaigularik:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 + y^2} \\ \sin \theta &= \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} B = \frac{\mu_0 I R}{2(R^2 + y^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

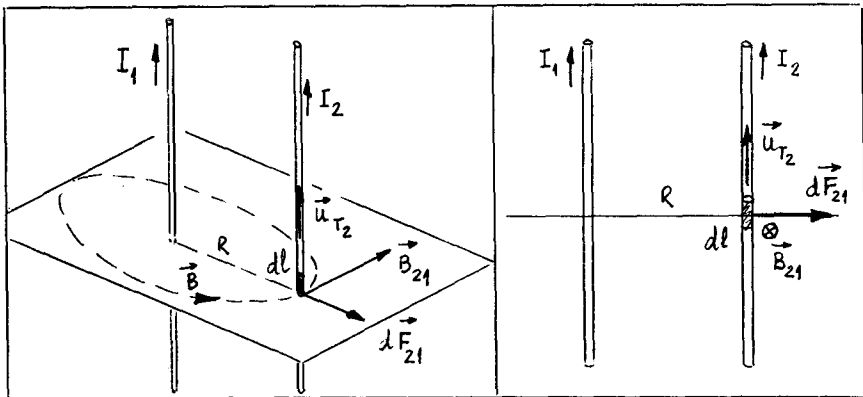
Azkenez, eta espazio osotik korrante zirkular baten eremu magnetikoari buruzko ideia orokor bat edukitzeko, beraren ardatza daukan plano batetan (Beste edozeinetan gauza berbera aurkituko genuke) eremuaren lerro batzu margoztuko ditugu.



17.7 KORRONTEEN ARTEKO INDARRAK

[kusi dugunez, alde batetik edozein korronte elektrikok eremu magnetiko bat sortezazten du (17.5 atala) eta bestaldetik, edozein korronte elektrikoren gainean, eremu magnetiko batek zenbait indar eragiten du (17.3 atala). Orduan, noski, korronte bi kontsideratzen badi-tugu, batek besteari indar bat egingo dio eta alderan-tziz. Kasu generala, edozein forma eta neurriak dituen zirkuitu-bikote batekin halegia, ez da hain erraz kal-kulatzen, aurkezten den matematikazko zailtasunagatik (bi integral, bata eremua eta bestea indarra lortzeko, beharrezkoak baitira). Dena den, ikusiko dugun kasuak -eta garrantzitsuena dela esan daiteke- ez du inolako problemarik ebatzia izateko.

Har ditzagun korronte zuzen eta paralelo bi, R distantziaz bereiziak. Sentido berberaz, esate baterako gorantz, suposa ditzagun (korronteen sentidoak elkarren kontrakoak izango balira, zer jazoko litzatekeen ikas-leak iker dezake) I_1 eta I_2 baloreak dituztelarik. Le-hen korronteak bigarrenari eragiten dion indarra lortze-ko (bigarrenak lehenengoari eragiten diona, ikasleak ere iker dezake), korronte zuzen baten eremu magnetikoa behar dugu. Hau 17.6 atalean kalkulatu dugu:



$$B_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Eta bigarren erolearen dl elementu baten gaineko indarra (17.3 atala), $\vec{u}_{T2}$ eta $\vec{B}_{21}$ perpendikularrak izanez, hauxe izango da:

$$d\vec{F}_{21} = I_2 (\vec{u}_{T2} \times \vec{B}_{21}) dl \rightarrow dF_{21} = I_2 B_{21} dl = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} dl$$

Luzera-unitateko indarra honela geratuko zaigula:

$$\frac{dF_{21}}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$$

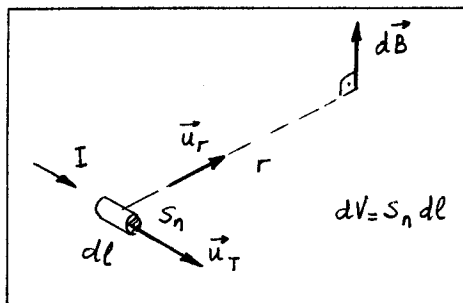
Expresio honetatik, anpererearen definizioa kontutan hartuz, μ_0 konstantearen balorea aterako dugu. Hona hemen, 1960. urtean Pisuei eta Neurrei buruzko Hamai-kagarren Hitzaldi Orokorrean emaniko korronte elektrikoaren unitatearen definizioa: "anperere-a, bi eroale zuzen, paralelo eta mugagabetan zehar iraganen, eta bien artean hutsa dagoela, harien metro bakoitzeko $2 \cdot 10^{-7}$ Newton-etako indarra sorteraizten duen korronte elektrikoaren intentsitatea da". Aurreko expresioan aplikatuz:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = I_2 = 1 \text{ A} \\ R = 1 \text{ m} \\ \frac{dF_{21}}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N m}^{-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 10^{-7} = \mu_0 \frac{1}{2\pi} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \end{array}$$

Konstante hau "hutsaren permeabilitate magnetikoa" deitzen da.

17.8 HIGITZEN ARI DEN KARGA BATEN EREMU MAGNETIKOA

Gai honen hasieran (ikus sarrera) esan genuena, zera zen: eremu magnetikoak kargaren higiduraren ondo rioak direla. Hala ere, ez dugu oraindik erlazionatu, era zuzen batez, eremu magnetikoa (efektua) karga baten higidurarekin (kausa). Horretarako, Ampère-Laplace-ren edo Biot-Savart-en legetik atera genuen $d\vec{B}$ bektoreari, beste interpretazio bat emango diogu. Dakigunez:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{u}_T \times \vec{u}_r}{r^2} dl$$

$$dV = s_n dl$$

Elementu honetan ρ karga higidarriaren dentsitatea, $\vec{v}$ abiadurarekin, eta, beraz, $\vec{j}$ korrontearen dentsitatea kontsideratzen badugu:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

$$I dl \vec{u}_r = \int s_n dl \vec{u}_r = \int dV = \rho \vec{v} dV$$

Orduan:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} dV \rightarrow \frac{d\vec{B}}{dV} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Hemendik, berehala karga bakoitzaren aportazioa lor daiteke:

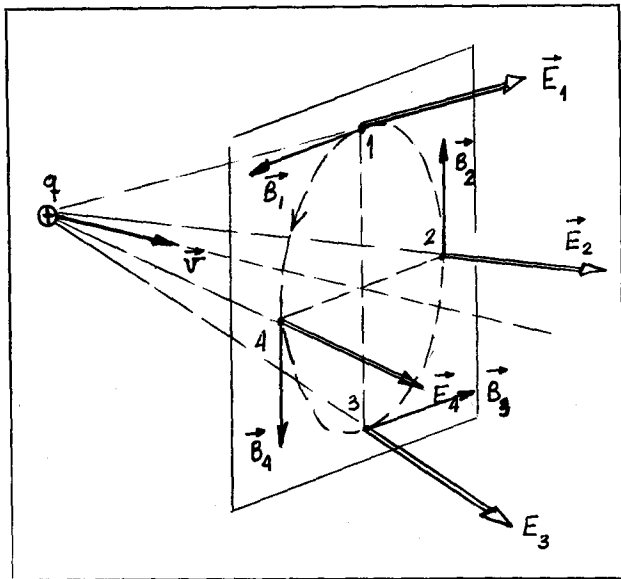
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Bestaldetik, 15.4... atalean, karga batek eragiten duen eremu elektrikoa ikusia dugu:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Orain, eremu bien artean erlazio bat proposa dezakegu:

$$\frac{q}{4\pi} \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$



$\vec{E}$ -ari dagozkion eremu-
-lerroak, q-tik pasa-
tzen diren lerro zuzen
guztiak dira.

$\vec{B}$ -ari dagozkionak, beren
zentratuak higiduraren le-
rro zuzenean dituzten -
eta aipaturiko lerroaren
plano perpendikular guz-
tietan jarrita dauden -
zirkunferentziak dira.

Azkenez, karga higidarri baten eremu magnetikoa lortze
ko erabili dugun arrazonamendua, ez dela zuzenegia esan
beharra dago (ikus 17.5. I-an $d\vec{B}$ -ri buruz egin zirèn kon-
siderazioak). Dena dela, $\vec{B}$ eta $\vec{E}$ erlazioztatzen di-
tuen formula, guztiz zuzena da, eta erlatibitatearen
teoriak horrela baieztatu egiten du.

18. GAIA - TERMO DINAMIKAREN LEHENENGO PRINTZIOIA

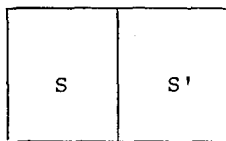
- 18.1 SISTEMEN ARTEKO INTERAKZIOA
- 18.2 TENPERATURA
- 18.3 OREKA TERMODINAMIKOA
- 18.4 EGOERA-EKUAZIOA, PROZESU ITZULGARRIAK ETA ITZULEZINAK.
- 18.5 LANA
- 18.6 BARNE-ENERGIA, TERMODINAMIKAREN LEHENENGO PRINTZIOIA
- 18.7 BARNE-ENERGIAREN ETA BEROAREN INTERPRETAZIO MEKANIKOA
- 18.8 GASEN ETA SOLIDOEN BERO ESPEZIFIKOAK.

Orain hiru gai berri estudiatu behar ditugu; hiru gai hauk termodinamikakoak dira. Beraz, zein da termodinamikaren objektua?

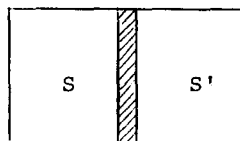
Sistema material makroskopikoen termodinamika, partikula askez osoturikoa, oreka-egoera sistemen deskribatzean eta materiak dituen propietateen eboluzioa jakitean datza, materiaren egitura mikroskopikoa azaldu gaiteke. Hots, partikula askoren egoera jakitean magnitude fisiko batzu ezaguturik: presioa, bolumena, tenperatura, e.a., eta hauen aldaketak, eta interrelazioan aztertuz.

18.1 SISTEMEN ARTEKO INTERAKZIOA.

Demagun S sistema bat isolaturik dugula E barruti batetan hertsirik. S sistemaren albora S' beste sistema bat hurbiltzen dugu. S' sistemak S sistemaren egoera aldatzen badu, E orma diatermano bat dela esango dugu. Bestalde, S' sistemarantz hurbiltzerakoan, S sistemaren egoera aldatzen ez bada, E orma adiabatiko bat dela esango dugu. Eta honela erre-presentatuko ditugu:



diatermanoa



adiabatikoa

Garbi dago, orma adiabatikoko zehatz bat lortzea ez dela posible; baina bai hurbilketa ona, amiantoa erabiliz.

Bi sistema desberdin orma diatermano batez separatuturik daudenean, esperientziak frogatzen du, sistema biek, eboluzionatu egiten dutela, oreka termiko

berri bat lortu arte.

Demagun hiru sistema ditugula A, B eta C. A eta C orma diatermano batez bereizirik jartzen ditugunean orekan badaude, eta B eta C orma diatermano batez bereizirik jartzen ditugunean orekan ere badaude, A eta B orekan daudela esango dugu. Eta hau TERMODINAMIKAREN ZERO PRINTZIPIOA deituko dugu.

18.2 TENPERATURA

- Nola jakin aurretik, bi gorputz A, B oreka termikoan dauden ala ez?

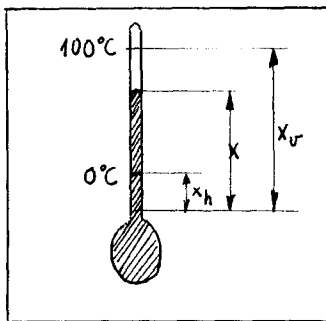
Beste hirugarren sistema txiki bat -oreka ez al datzeko- C hartuz; adibidez, kapilare bat kasu honetan, tenperaturen neurketak luzerak bezala etorriko -zaizkigu (θ luzera). A eta C orma diatermano batez separaturik jartzen ditugunean, kapilareak θ_A tenperatura neurtuko du; eta B eta C-rekin gauza berbera egiten badugu, θ_B tenperatura neurtuko du. Beraz, θ_A eta θ_B berdinak direnean, oreka termikoa emango da sistema bien artean.

- Orain beste problema bat aztertuko dugu: nola definitu tenperaturatarako eskala bat?

Horretarako hainbat propietate ditugu tenperatura neurtzeko, kapilarea, patermoelektriko baten indar-elektromotrizia, gas baten presioa bolumena konstantea izanik.

Kapilarearen kasurako, bi puntu finkatzen ditugu, bata izotzaren fusio-puntua (kapilarean X_h neurketa ematen diguna) eta bestea uraren irakite-puntua (kapilarean X_v neurketa ematen diguna). Izotzaren puntuaren tenperaturari 0 balorea eta baporearen puntuaren tenperaturari 100 balorea emango diegu.

Tenperatura ezezaguna t bada erlazio honetaz eza-
gutzen da:



$$t = 100 \frac{X - X_h}{X_v - X_h}$$

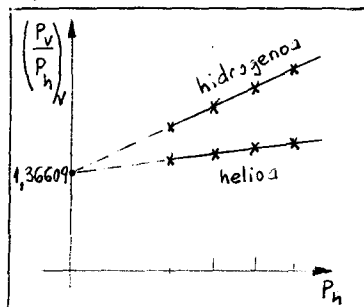
X delakoa, kapitareak t tenperaturan neurtzen duen
balorea izanik.

Honela definituriko eskala termometrikoa, Celsius es-
kala deitzen da. Bertako graduak $^{\circ}\text{C}$ sinboloaz adieraz-
ten dira eta Celsius gradu edo gradu zentigraduak dei-
tzen dira.

Orain arte erabili dugun kapilarea, termometro bat da.
Har dezagun orain bolumena konstante duen gas bateko
termometroa: hemen presioa neur dezakegu, bolumena -
konstante mantenduz.

Termometroari asoziatu rik dagoen eskala bat defini de-
zakegu; baina lehengo eskala beste eskala bat defini-
tzeko erabiliko dugu, eskala absolutua hategia, eta es-
kala honen tenperaturak T letrarekin idatziko ditu-
gu eta Kelvin-gradutan ($^{\circ}\text{K}$) emango.

P_h eta P_v uraren izozte-puntuako (T_h) eta irakite-
puntuako (T_v) presio absolutuak dira.



Gas ber bateko kantitate desberdinak hartuz, neurke-
ta asko egin dira, bolumen konkretu baten kasuan ura
ren izozte-puntuko eta irakite-puntuko presioak neur-
tuz. Gero erresultatuak grafika batez adierazi dira,
abszisatan p_h jarritz eta ordenatuetan p_v/p_h

Hainbeste esperimentu egin ondoren, gas bakoitzaren
kasuan lerro zuzen bat lortzen dela ikusi da. Gaine-
ra, lerro horik $p_h \rightarrow 0$ egiten denean extrapolatuz,
esandako grafikan lerro zuzen desberdinak konbergen-
tzi puntu bat dutela ikusten da, (0, 1'36609) puntuan
prezeski..

Hau da, $\left(\frac{p_v}{p_h}\right)_v$ desberdina da gas bakoitzerako, bai-
na extrapolatzen ditugun baloreak, gas guztien kasuan,
puntu berean ebakitzen dute ardatz bertikala, eta -
puntu honen balorea $1'36609 \pm 0'00004$ da.

Honelatan, ba, $T_v/T_h, \left(\frac{p_v}{p_h}\right)_v$ -ren limitea bezala de-
finituko dugu, p_h delakoak zerorantz jotzen duenean,
hots:

$$\frac{T_v}{T_h} = \lim_{p_h \rightarrow 0} \left(\frac{p_v}{p_h} \right) = 1,36609$$

eta $T_v - T_h = 100^\circ K$ egiten badugu, aurreko ekuazioa
honela geratzen zaigu

$$T_v = 373'16 \pm 0,03$$

$$T_h = 273'16 \pm 0,03$$

Beraz, edozein temperatura T honela neur dezakegu

$$\frac{T}{T_h} = \lim_{p_h \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_h} \right)_v$$

Era honetan definitu ditugun temperaturak, edozein gasen
propietateen independenteak dira, eta gainera eskala

zentigradu bat eman dezakegu erlazio honen bidez

$$t = T - T_h = T - 273'16$$

honek eramaten gaitu $t_v = 100^\circ\text{C}$ eta $t_h = 0^\circ\text{C}$ lortzera

zero absolutuak eskala zentigraduan, $-273'16$ balorea du ($t = -273'16$)

18.3 OREKA TERMODINAMIKOA

Gas baten egoera emana dator, beraren presioa, bolumena, tenperatura eta masa emanik datozenean. - Beste sistema batzutan, beste magnitude batzu jakin behar ditugu sistemaren egoera ezagutzeko.

Egoera definitzen duten magnitudeek, aldakari termodinamikoak deitzen ditugu; hauetariko batzu, presioa, dentsitatea, tenperatura, e.a.... dira.

Sistema bat isolaturik uzten dugunean, hasieran beraren parametroak abiadura batez alda daitezke; baina denboraz, abiadura hori gutxitu egiten da eta parametroek konstante irauten dute. Azkenean lortzen den egoera, oreka termodinamikoa deitzen da.

Egoera definitzeko behar diren parametroen kopurua, askatasun-graduen kopurua deituko ditugu. Beste parametroak hauen bidez jakin daitezke. Adibidez, zilindro baten barnean dagoen gas bat definitzeko, bi parametro behar ditugu, hots, (presio eta tenperatura) bi askatasun-gradu ditu.

Parametro hauek ^{bi}moetatakoak izan daitezke: bataz sistemaren tamainuaren independenteak (INTENTSIBOAK): presioa, tenperatura, dentsitatea, e.a.; besteak proportzionalak (EXTENTSIBOAK): bolumena, masa, barne-energia, e.a.

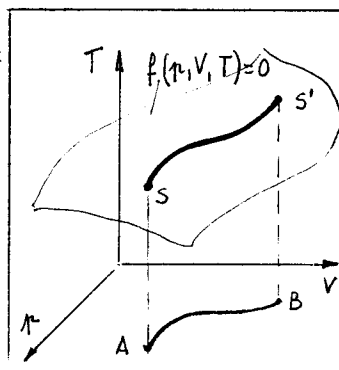
18.4 EGOERA-EKUAZIOA. PROZESU ITZULGARRIAK ETA ITZULEZINAK

Demagun sistema bat, bolumen, presio eta tenperatura parametroekin. Hiru parametro hauk ez dira independenteak, eta beren arteko loturak definitzen -duen erlazioa, EGOERA-EKUAZIOA deitzen dugu. Gas ideal batetan egoera-ekuazioa $PV = nRT$ da, n molen zenbakia eta R gasen konstantea izanik.

Egoera-ekuazioak definitzen duen lotura, $f(p, V, T) = 0$ adierazpenaz errepresenta dezakegu sustantzia homogeneo batetan, eta erlazio hau superfizie bat da hiru dimentsiotako espazioan. Superfizie honi superfizie termodinamikoak deitzen zaio (ikus irudia).

Sistemaren edozein orekak puntu bat errepresentatuko du superfizie termodinamiko hone tan (S edo S' bi oreka desberdin dira)

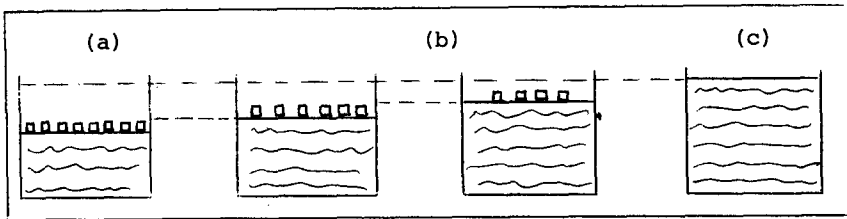
S -tik S' -ra iragatean ematen diren tarteko puntuak ez dira orekakoak normalki.



Baina transformakuntza (S' -tik S -ra) oso emeki egiten bada, susma dezakegu, sistema oreka termodinamikoan dagoela mementu guztietan. Transformakuntza honi ITZULGARRIA deitzen zaio.

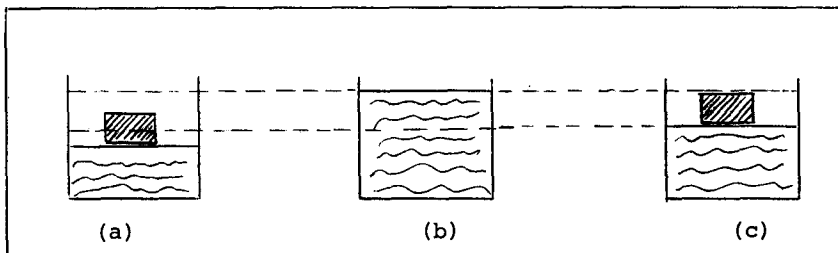
Adibidez: Demagun ontzi bat dugula tapa batekin, eta tapa honen gainean pisu ttiki batzu ditugula. Pisuak banaka kenduz oreka termodinamikoak lortzen ditugu; azkenean, (c) situazioa geratzen zaigu. Orain (c)-n pisuak banaka ipiniz (a) situazioa lor-

tzen dugu berriro; beraz prozesu itzulgarri bat egin dugu.



Honelako prozesuak beti errepresenta daitezke superfizie termodinamikoaren gainean, eta itzulgarri batetan ez da igartzen aldakuntzarik, ez sisteman eta ez medioan.

Aldiz, pisu handi bat bakarrik jartzen dugunean

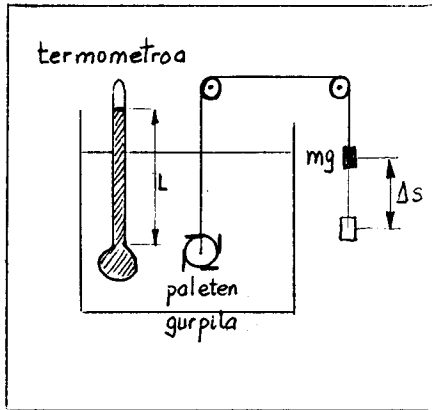


Tenperatura, bolumena eta presioa definiturik datoz, eta pisua kentzean, presioa laister jaitsiko da, eta oreka emango da (b) posizioan. Orain pisua jartzen diogunean, oreka ere berriro helduko da, baina ez T , p eta V lehenengoko neurriekin. Prozesu hauk ITZULEZINAK deitzen dira, eta ezin daitezke superfizie termodinamiko ber batetan errepresenta.

18.5 L A N A

Sistema batek bestearekiko lana egiten duenean, energia aldatzen dute elkarrekin. Hemen kasu berezi

batzu ikusiko ditugu:

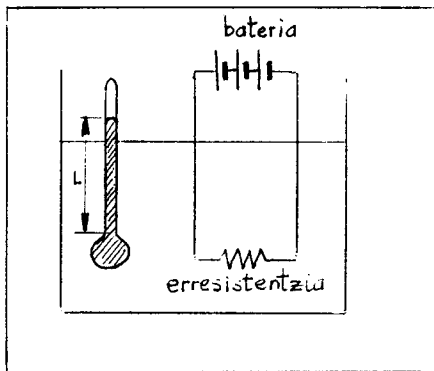


A - LAN MEKANIKOA

Demagun ontzi bat urez beterik, eta beraren barruan termometro bat eta paleten gurpil bat ditugula, horrela A sistema osotzen.

mg pisua abiadura uniforme batekin, Δs distantzia jaisten bada, $mg\Delta s$ pisuak egiten duen lana

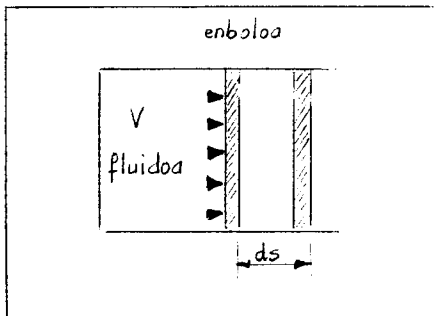
A - sistemara pasatuko da.



B - LAN ELEKTRIKOA

Demagun ontzi bat urez beterik, eta beraren barruan termometro bat eta erresistentzia bat bateria bati (V indar elektroeragilearekin) konektaturik, konduktore batzuren bidez ditugula, guztien artean A sistema osotzen.

Bateriak $V\Delta q$ lana egiten du A sistemaren gainean Δq hornitzean, erresistentzian zehar iragaten baita.



C - PRESIOAREN INDARRAK EGITEN DUTEN LANA

Demagun orain ontzi bat fluidoaz beterik dugula, prozesu itzulgarri batetan expantsionatu egiten dena.

Prozesu hau itzulgarria denez, fluidoa beti orekan egongo da, eta presioa uniformea izango da puntu guztietan.

P delakoa sistemak enboloan egiten duen presioa, eta A delakoa enboloaren azalera, dS luzeera desplazatzean enboloak sistemaren gainean egiten duen lana, -hauxe da:

$$dW = p A dS = p dV$$

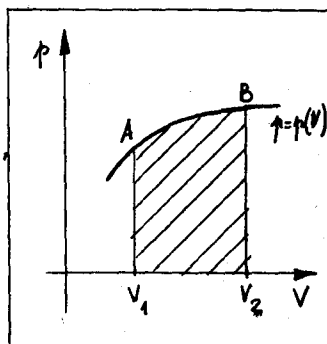
hemen $A dS = dV$ izanik (bolumenaren aldakuntza)

Bolumena V_1 -tik V_2 -ra aldatzen denean

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad \text{da}$$

eta integral honi ebazpide bat emateko, P eta V -ren erlazioa jakin behar dugu (prozesuaren bidez emana etorriko da).

Grafikoki, lana, superfi-
zie baten bidez emana datoz,
eta beraren mugak, V ardatza,
 V_1 (hasierako bolumena) V_2
(lortutako bolumena) ordena-
tuak, eta p eta V -ren erla-
zioak definitzen duen kurba
dira.



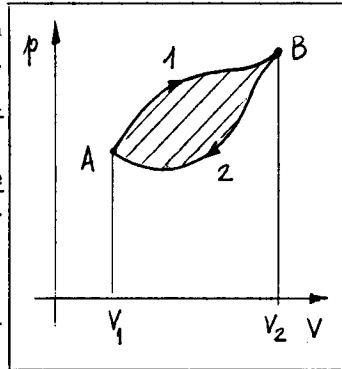
Prozesu bakoitzak erlazio bat definitzen du, beraz,
kurba bat. Honek, zer esan nahi du? Ba, lanak prozesuaren dependentzia duela.

Orain, B-tik A-ra prozesu itzulgarri bat egiten ba-
dugu, lehen A-tik B-ra egitean lortu dugun lana -
izango da, baina minus zeinu batekin.

$$W = \int_{V_2}^{V_1} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Horretan finkatuz, erraz ikusten da, bi prozesu desberdinez osaturiko ziklo batetan, sistemak egiten duen lana, (1) makurra eta (2) makurra hersten duten azalera izango dela, ibilbidearen sentidoa orduorratzarena izanik.

Kontrako sentidokoa bada, sistemak hartu egiten du lana.



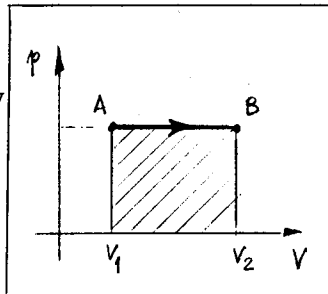
Kalkula dezagun lana hiru prozesu berezitan:

a.- Prozesu isokoro-etan ($V=kT$)

kasu hauetan $W=0$ da zeren $dV = 0$ baita.

b.- Prozesu ISOBARO-etan ($p=kT$)

$$W = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p (V_2 - V_1) = p \Delta V$$



c.- Prozesu ISOTERMOetan ($T=kT$)

Gasa ideala denean, $PN = nRT$ erlazioa betetzen da.

Beraz:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Hemen $V_2 > V_1$ denean, expantsio bat ematen da,

$W > 0$ baita; eta $V_2 < V_1$ denean, konpresio

bat ematen da, $W < 0$ baita.

18.6 BARNE-ENERGIA. TERMODINAMIKAREN LEHENENGO PRINTZIPIOA

Demagun, sistema bat orma adiabatiko batzuren bidez isolatzen dugula. Sistemaren gainean lan bat egiten dugunean, beraren egoera aldatzen dugu, eta, dakigunez, lan honen balorea sistemak jarraitu duen ibilbidearen independentea da. Hau experientzia asko eginez konprobatzen da. Eta energia kontserbatzen - dela onartzen badugu, honek esan nahi du, U funtzio bat egon behar dela, baldintza honekin:

$$-W_{if} = U_f - U_i = \Delta U$$

U funtzio hau sistemaren BARNE-ENERGIA deitzen da. Minus zeinua jarri diogu, sistemak egiten duen lana positiboa kontsideratzen dugulako (baina hau, noski, hitzarmen hutsa da eta alderantziz ere egin zitekeen).

Edozein moetatako lana sar diezaiokegu sistemari. Eta hasierako egoera, eta bukaerako egoera, bi prozesu adiabatiko desberdinetan, berdinak direnean, lanaren balorea ere berdina da.

Baina prozesua adiabatikoa ez denean, (i) hasierako egoeratik (f) bukaerako egoerara iragartean, lanaren balorea desberdina da, prozesu adiabatiko batekin konparatuz. Beraz, energiaren transferentzia bat egon da eta energiaren kontserbazioaren printzipioa honela idatziko dugu:

$$\Delta U = Q - W$$

Q beroa izanik, hots, prozesuan transferitzen den energia.

Erlazio honi TERMODINAMIKAREN LEHENENGO PRINTZIPIOA deitzen zaio. Ezin daiteke esan, sistema batek X_1 beroa duela edo X_2 lana duela; barne-energiaren aldaketak azaltzeko bakarrik erabiltzen ditugu bi kontzeptu hauk. Honela, prozesu elemental batetan, erlazio hori oreka-egoerako bi puntu hurbilen artean modu

honetan idatziko dugu:

$$dU = \delta Q - \delta W$$

eta δ sinboloa jartzen dugu, ez direla aldakari termodinamikoen funtzio garbi adierazteko, beroaren eta lanaren balore ttiki batzu baizik.

Sistema bat ziklikoki transformatzan denean, egoera berean, U_f eta U_i berdinak dira, eta honek esan nahi du, ΔU zero dela, eta

$$Q = W$$

Era horretan ziklo batek xurgatzen duen beroa, lanetan bilakatzen da osorik.

Beroaren unitatea "kaloria" da eta 4,18 joule-ren baliokidea da.

18.7 BARNE-ENERGIAREN ETA BEROAREN INTERPRETAZIO MEKANIKOA

Ikuspuntu mekaniko batetik sistema guztiak partikulaz osaturik daude, eta partikula hauen artean, interakzioak ematen dira. $E_{p_{ij}}$, i eta j partikulen arteko interakzioak sortzen duen energia potentziala bada, sistemaren barne-energia potentziala ondokoa izanen da:

$$E_{p_{\text{ik}}'} = \sum_{\substack{\text{bikote} \\ \text{guztien} \\ \text{kasurako}}} E_{p_{ij}} = E_{p_{12}} + E_{p_{13}} + \dots + E_{p_{21}} + \dots$$

Sistemaren barneko energia zinetikoa, masa-zentruarekiko partikulek duten energia zinetikoen batuketa bezala definituko dugu, hots:

$$E_K' = \sum_{\substack{\text{partikula} \\ \text{guztien} \\ \text{kasurako}}} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Eta sistemaren barne-energia, U , hauxe izanen da:

$$U = E'_k + E_{p,int}$$

Gas ideal batetan ez dira izaten molekulen arteko indarrak, eta $U = E'_k$ bezala hartzen da

Wext kanpoko indarrek sisteman egiten duten lana bada, eta sistema lan horren kausaz U_i -tik U -ra iragaten bada,

$$W_{ext} = U - U_i$$

izan behar du, energia kontserbatu egiten baita.

Kanpoko indarrek egiten duten lana, partikula bakoitzarekiko egiten duten lanaren batuketa da. Hau kalkulatzeari oso zaila da, partikulak asko baitira; horregatik, egiten duguna, zera da: lan hau bi zatitan banatu. Bata, batezbesteko indar eta distantziaren biderketa bezala azaltzen duguna: lana deituko dugu. Eta bestea, sistemak inguruarekin aldatzen duen energia (partikulen artean ematen diren txokeak sortzen baitute hau): beroa deituko dugu. Beraz, $W_{ext} = Q - W$ zeinuetarako erabaki dugun hitzarmenari jarraikiz. Eta ikusten denez, hau ^{eta} termodinamikaren lehenengo printzipioa gaurza berbera direla sakonean.

18.8 GASEN ETA SOLIDOEN BERO ESPEZIFIKOAK

Sistemaren batezbesteko kapazitate kalorifikoa honela definitzen da, t_2 eta t_1 tenperaturen artean, non Q hartzen duen beroa den:

$$C_{t_1}^{t_2} = \frac{Q}{t_2 - t_1}$$

Limitera pasatuz:

$$c = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{Q}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

eta beronen unitateak joule / kg. gradu dira

Kapazitate kalorifikoa masaren unitateko definitzen denean, bero espezifiko deitzen da

$$c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2)$$

eta masaren unitatea mola denean

$$C_m = \frac{M}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3)$$

Orduan bero espezifiko molarra esaten zaio.

Hiru hauen arteko erlazioa haxe izanen da

$$C = m c = \frac{m}{M} C_m = n C_m$$

n, molen zenbakia izanik.

(1), (2) eta (3) erlazioetatik

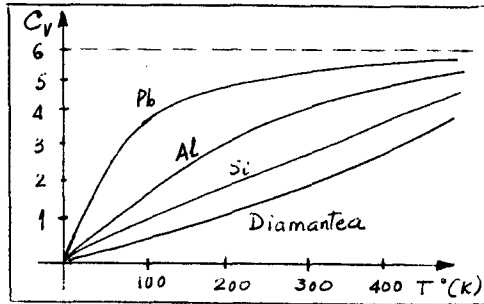
$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c \, dt = m \int_{t_1}^{t_2} c \, dt = \frac{m}{M} \int_{t_1}^{t_2} C_m \, dt$$

baina hauen ebazpideak jakiteko $C = C(t)$, $c = c(t)$ edo $C_m = C_m(t)$ ezagutu behar ditugu.

Experimentalki ikusi da, solido monoatomiko gehienetan bero atomikoa (masa atomikoaren eta bero espezifikoaren biderketa, bolumena konstante izanik) $6 \frac{\text{kal}}{\text{mol. gradu}}$ dela.

Hau Doulong eta Petit-en
legea bezala ezagutzen dugu

Praktikan, alboko irudi
honetan betetzen da,
temperatura altutuan
nahiko zehatza delarik

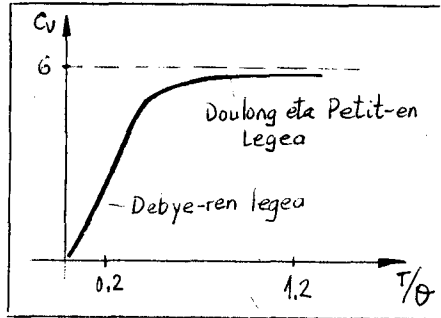


Debyek frogatu zuenez gero mekanikuantikoki solido
baten bero atomikoa bolumena konstantea edukiz; on
doko hau dela:

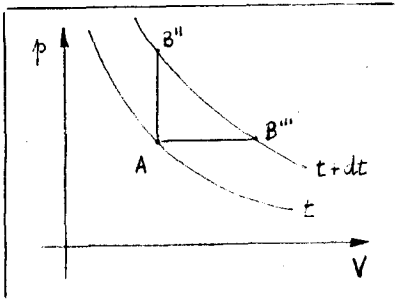
$$C_v = 3 R \quad F\left(\frac{T}{\theta}\right)$$

θ delakoa sustantzia bakoitzerako konstante desber
dina da, eta TEMPERATURA KARAKTERISTIKOA deitzen zaio.
Eta $F\left(\frac{T}{\theta}\right)$ funtzio unibertsala, DEBYE-ren funtzio
bezala ezagutzen da. Lege hau temperatura baxuetarako
betetzen da eta Doulong eta Petit-enaren osagarria da

ETA θ , temperaturaren
unitate bezala hartzen
dugunean, C bero ato
mikoa kurba berberaz -
adierazten da gorputz
guztientzat.



Kontsidera ditzagun kasu garrantzitsuenak gasen kasuan:



- a. presioa konstantea denean
(AB'')

$$c_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_p$$

- b. bolumena konstantea de
nean (AB'')

$$c_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_v$$

19. GAIA - GAS IDEALAK

19.1 EGOERA-EKUAZIOA

19.2 BARNE-ENERGIA

19.3 BERO ESPEZIFIKOAK, MAYER-EN EKUAZIOA

19.4 GAS IDEAL BATEN GAINKO PROZESU ADIABATIKOAK, LERRO ADIABATIKOAK

19.5 GASEN TEORIA ZINETIKOA.

19.1 EGOERA-EKUAZIOA

18. gaian egoera-ekuazioak ikusi ditugu, eta hauei dagozkien gorabeherak. Gehienetan, egoera-ekuazioa $\varphi(V, p, T) = 0$ modukoa izaten da. Eta konkretuki, edozein gasen N mol hartu eta aztertu egiten baditugu, zera ikusten dugu, T tenperatura-bakoitzarekiko gas horren egoera-ekuazioa horrelakoa dela:

$$pV = A \left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \dots \right)$$

hau da, birialaren desarroiloa deitzen denaren bezalakoa, non $v = \frac{V}{N}$ bolumen molarra deiturikoa den, eta $A, B, C \dots$ tenperaturaren arauetako funtzioak diren.

Gai honetan egin nahi duguna zera da, jokabide erreal honen sinplifikazio bat, gas hauek edukiko luketen portaera ideala kontsideratuz, berau $p \rightarrow 0$ egiten dugunean gas guztiek betetzen duten hurbiltze bat baita. Horrela, gas errealeen ordez, gas idealak aztertuko ditugu, lorturiko ekuazio eta baloreak onartzean.

Nola lortzen dugu jokaera ideala? Bada, esan dugun bezala, presioa zerora ahal bezainbeste hurbilduz. Horrela, ondoko hau lortzen dugu:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pV) = A$$

A horrek, esperientziak dioskunez, ez du gas-moetaren gorabeheretik zerikusirik. Beraz, $A=A(T)$ dugu, eta 18. gaian (ikus 18.2) definituriko tenperatura-sistema ereduatzat hartzen badugu, zera gelditzen zaigu:

$$pV = RT$$

Hau da, A delakoa T tenperaturarekiko zuzenki proportzionala da, eta R , konstante definitu bat:

$$R = 1987 \frac{\text{kal}}{\text{mol-gradu}}$$

Beraz, $p \rightarrow 0$ egiten dugunean, edozein gasen egoera-ekuazioak ondoko adierazpena hartzen du:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pV) = RT$$

Eta hau da, zuzenki, gas idealen definizioa, edozein presiotarako aipaturiko egoera-ekuazioa betetzen dutenena, hategia.

Honen guztion arauera, birialaren garapenean, lehenengo koefizienteak

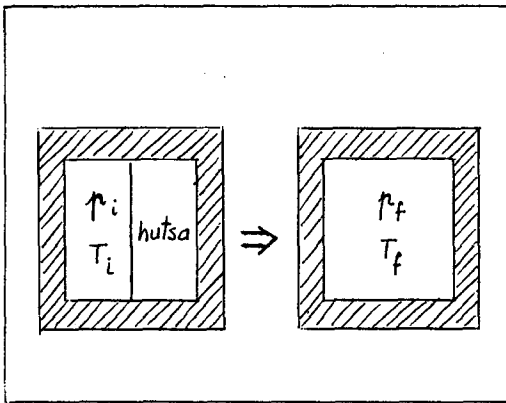
$$A = RT \quad \text{moduan geratzen zaigu}$$

$$pV = RT \left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \dots \right)$$

Bestalde, $v = \frac{V}{N}$ dela gogoratuz, ondoko hau xe dugu gas idealen egoera-ekuazioa:

$$pV = NRT$$

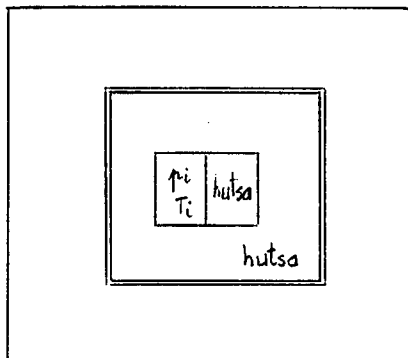
19.2 BARNE-ENERIA



Egin dezagun irudian agertzen den esperientzia, hau da, aurrerantzean azalduko duguna. Kontutan hartu - behar dugu, hala ere, esperientzia ideal bat besterik ez dela.

Demagun, orma zurrunez inguraturiko ontzi bat dugula, eta termikoki isolatu egiten dugula, orma - adiabatikoz inguratuz; honen erdian holtz bat ipintzen dugu, eta alde batetan p_i presiopean gas bat - jartzen dugu, beste aldea hutsik utzirik. Hau honela, erdiko holtza kendu egiten badugu, ezkerreko gasak - ontzi osoa beteko du, prozesua kanpoarekin inolako - harremanik gabe gertatuz, zeren eta ormak zurrun eta adiabatiko izanik, ez baita lanik egiten, ez berorik sartzen edo ateratzen sistematik.

Esperimentzia honi expantsio adiabatikoa deitzen zaio.



Esperimentzia hau praktiki kara eramateko aurkitzen dugun problemarik handiena, orma adiabatiko on batzu lortzean datza. Nola hor ditzakegu? Ba, hurbiltze ona litzateke, geure ontzia beste ontzi handiago batetan sartuz eta bien artean hutsa egitez lortutakoa.

Kanpoko orma termostato batez eta bero-erregulatzaille batez ontziaren ormen temperatura berberean mantentzen badugu, ez da bero-harremanik egongo, ez kondukzioz, ez konbekzioz.

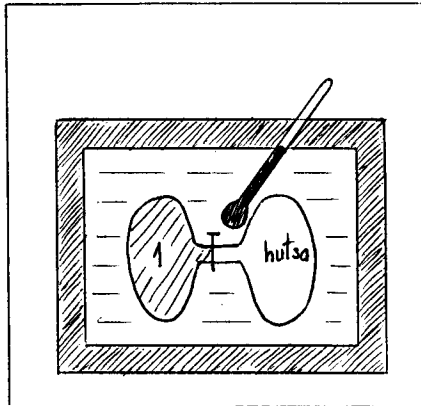
Gure esperimentura itzuliz, eta termodinamikako lehen printzipioaren arauera (ikus 18.6), gasen barne-energiak ez du aldaketarik izaten, zeren

$$\Delta Q = \Delta W = 0 \quad \text{baitira.}$$

Beraz, zera idatz dezakegu:

$$U(T_i, V_i) = U(T_f, V_f)$$

Erlazio horrek ez digu ezer berririk argitzen, berez. Baina Joulek, joan den mendean, ondoko esperimentzia egin zuen, barne-energiaren dependentziak eza gutu nahiean, eta honek bai, emango dizkigu berorren berri. Uraz beteriko upel adiabatiko batetan ontzi bi



sartu zituen, bata bestearekin hodi ba tez baturik, eta er dian giltz bat ipi-
nirik.

Batean gas bat ipi-
ni zuen eta bestean
hutsa egin zuen, ge-
ro giltza zabalduz
eta expantsio bat -
gertaraziz.

Hau da, lehengo esperientzia berbera, baina uretan murgildurik egitean, temperatura-aldaketarik balego neur egin zezakeelakotan.

Eta horrela egin zuen Joulek, zera ikusiz, urak ez zuela inolako temperatura-aldaketarik izan. Beraz, expantsioa isotermikoa izan zen, eta honen ondorioak berehalakoak dira:
Temperatura-aldaketarik ez badago:

$$T_i = T_f$$

eta bestalde $U(T_i, V_i) = U(T_f, V_f)$ gertatzen de-
nez, ondorio hau atera dezakegu: $\frac{\partial U}{\partial V} = 0$

Esandakoa edozein bolumenarekiko dadin, bar-
ne-energiak ezin dezakela V-rekiko dependentziarik.
Hau da:

$$U = U(T)$$

Geroztik, askotan aztertu izan da gauza ber-
bera, eta lortu ere egin da U delakoak baduela n
edo V-rekiko dependentziarik ere. Zergatik ez zuen,

ba, Joulek dependentzia hori nabaritu? Erantzuna erraza da. Urak eta ontziak zuten bero espezifikoa, gasena baino askoz handiagoa zen -mila bat aldiz handiagoa-; eta nahiz eta honek temperatura-aldaketa nahiko nabaria ukan, termometroak ez zuen ino^lakorik detektatu.

Hala ere, termodinamikako 2. printzipioaren arauera (ikus 20. g^oa), erraz ikus daiteke, gas idealen egoera-ekuaziotzat onartu dugun ekuazioa (hau da, $pV = NRT$ ekuazioa) betetzen duen gas baten barne-energiak, $U = U(T)$ soilik izan behar duela. Beraz, hau da gas idealetarako 2. hurbiltzea: $U = U(T)$ dela esatea, V edo p -rekiko dependentzia mespreziaturik. Hau ez dugu harritzekoa, p eta V -rekiko dependentzia T -rekikoa baino askoz ere ttikiagoa baita.

Beraz, gas ideal batek ondoko ekuazioak betetzen ditu:

$$pV = NRT$$

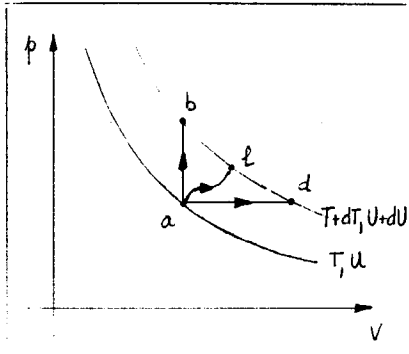
$$U = U(T)$$

Eta edozein gasek ekuazio hau nahiko ondo betetzen ditu presio handitaraino, esperientziak frogatzen digunez.

19.3 BERO ESPEZIFIKOAK. MAYER-EN EKUAZIOA

Egoera-ekuazioa eta barne-energia ezagutuz gero, erraz ikus ditzakegu 18. g^oan definituriko magnitudeen gorabeherak (kasu honetarako). Konkretuki, bero espezifikoaren arteko erlazioa. Gogora gaitezen

bero espezifikoen esanguraz (ikus 18.8.). Berauek temperatura-aldaketarekiko bero-aldaketak ematen dizkigute. Baina aldaketa hauk hainbat prozesu - desberdinen bidez egin ditzakegu. Prozesu hauen - artean, lortu nahi dugun erlazioarekiko interes han- dien dutenak, bolumen eta presio konstantekoak di- ra, C_v eta C_p (ikus 18.8) ematen digutenak, ha- legia.



Honetarako, dakusa- gun alboko irudia; p-V diagrama bat da, eta bertan bi lerro isoterma ($T=kte$) - agertzen zaizkigu. Baina, lehendik iku- sia dugunez (ikus 19.2) $U = U(T)$

da gas idealen kasuan; beraz, lerro isotermaok isoe- nergetikoak ere izango dira:

$$T = Kte \quad \longrightarrow \quad U = Kte$$

Honela, ba, eta bi isoterma ditugula, T eta $T+dT$ isotermaok, batetik bestera edozein bidetatik joanez gero, energia aldaketa berdina izango da. Ho- rrela.

$$\Delta U_{ab} = \Delta U_{ad} = \Delta U_{dl}$$

Demagun orain, $V=kte$ dueneko prozesua eragi- ten diogula gas ideal baten mol bati. Definizioz,

zera idatz dezakegu:

$$dQ = C_v dT$$

$$C_v = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \bigg|_V \text{ baita (ikus 18.8)}$$

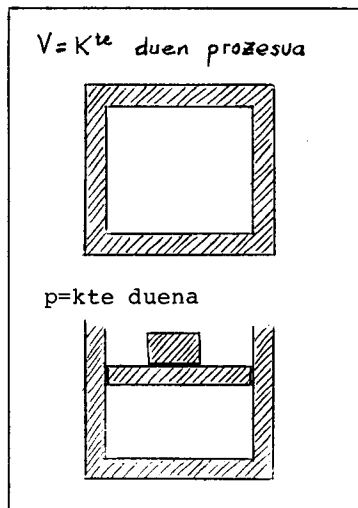
Bestalde, V konstante denez, eta expantsiorik ez dagoenez, lanik ez da egiten, eta lehenengo printzipioaren arauera:

$$dU = dQ - dW$$

non $dW=0$ den, eta

$$dU = C_v dT$$

Baina, lehen esan dugun bezala, prozesu horren ordez, $p=kte$ duen beste prozesu bat egin dezakegu, eta honetan ere dU barne-energiaren aldaketa berbera gertaraziko dugu. Prozesu hau, presio konstanteko pistoi bat duen ontzi baten bidez egin dezakegu.



Kasu honetan, eta, modu berean, definizioz:

$$dQ = C_p dT$$

$$dW = p dV$$

Baina, gas idealen egoera-ekuazioa gogoratuz:

$$pV = RT$$

$$n = 1 \text{ baita,}$$

$$p dV = R dT$$

$$p = kte \text{ baita,}$$

eta

$$dW = R dT$$

eta azkenez, lehenengo printzipioaren arauera:

$$dU = dQ - dW = C_p dT - R dT$$

Eta bi dU direlakoak berdinduz:

$$C_v dT = C_p dT - R dT \longrightarrow C_v = C_p - R$$

Beraz $C_p - C_v = R$

Eta kasu generalean, gas idealaren n mol baditugu:

$$C_p - C_v = n R$$

Eta hau da Mayer-en ekuazioa

Erlazio hau, esperientziak frogatzen duenez, nahiko ondo betetzen dute gas errealek, gutxienez presio ez-handiegien kasuan.

Halaber, esperientziak ematen digu, p txikitarako, gas monoatomikoetan C_v eta C_p direlako baloreak ondoko hauk direla:

$$C_v = \frac{3}{2} R \qquad C_p = \frac{5}{2} R$$

Hau da, beraz, gas nobleen eta bapore metalikoen kasuan erabili behar dena.

Modu berean, gas biatomikoentzat (N_2 , S_2 , ...)

$$C_v = \frac{5}{2} R \qquad C_p = \frac{7}{2} R$$

direla ikusi da.

Kasu generalean, zera dugu:

$$C_v = C_v^0 + C'_v(T)$$

C_v delakoak T -ren dependentzia baitu $C'_v(T)$ modura, hets, bibrazioei loturiko funtzio horren modura. Eta

gauza berbera dugu C_p delakoaren kasuan, Mayer-en er
lazioak zuzenki ematen digunez:

$$C_p = R + C_v = (R + C_v^0) + C_v' (T) = C_p^0 + C_p' (T)$$

19.4 GAS IDEAL BATEN GAI NEKO PROZESU ADIABATIKOAK, LERRO ADIABATIKOAK.

Demagun, gas ideal baten n mol ditugula, eta beraietan prozesu bat eragiten dugula. Demagun, era berean, prozesu horretan ez dela sistemaren eta kanpoaren arteko bero-harremanik; hau da, prozesu adiabatikoa dela.

Prozesua adiabatikoki iragan dadin, hurbiltze on bat lor dezakegu prozesu arin bat behartuz, sistemaren eta unibertsoaren arteko bero-harremanak oso geldoak baitira. Edo eta sistemaren tenperatura bere bereko foko batez sistema bera inguratuz ere lor dezakegu egoera hori.

Prozesu hau expantsiozkoa, konpresiozkoa edo bestelako prozesu bat izan daiteke.

Hala, ba , p , V eta T direlakoak aldakorrak - izango dira.

Egin dezagun, baldintza hauen pean, termodinamikako lehenengo printzipioaren arauetako balantzea.

Prozesua adiabatikoa denez:

$$dQ = 0 \quad \text{izango da,}$$

sistemari dagokionez.

Ez horrela dU , dW . Hauen balioa, hauxe izango da:

$$dU = nC_v dT$$

$$dW = p dV$$

Beraz: $dU = dQ - dW = -pdV = Nc_v dT$

Bestalde, eta gas idealen egoera-ekuazioa ezaguna dugu nez:

$$pdV + Vdp = NRdT$$

($pV = NRT$ diferentziatuz lorturiko expresioa)

Eta bi expresioen artean dT eliminatzen badugu:

$$pdV + Vdp = - \frac{R}{c_v} pdV$$

Eta hemen, Mayer-en erlazioa kontutan hartuz:

$$c_p - c_v = R \longrightarrow pdV + Vdp = - \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) pdV$$

$$Vdp = - \frac{c_p}{c_v} pdV$$

$\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ eginez, eta honi indize adiabatikoa deituz, honen funtzioan zera geratzen zaigu:

$$Vdp + \gamma pdV = 0$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

Eta $\gamma = k$ kontsidera dezakegunez, integratu egiten dugu, zera lortuz:

$$\ln p + \gamma \ln V = k$$

$$pV^\gamma = k$$

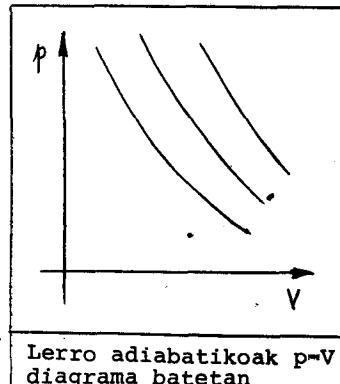
Hau da lerro adiabatikoen ekuazioa.

Beraz beste aldakarien funtzioan ere adieraz daiteke:

$$pV = NRT \longrightarrow p = NR \frac{T}{V}$$

eta hau lehengo expresioan sartuz:

$$\frac{T}{V} V^\gamma = k, \quad TV^{\gamma-1} = k$$

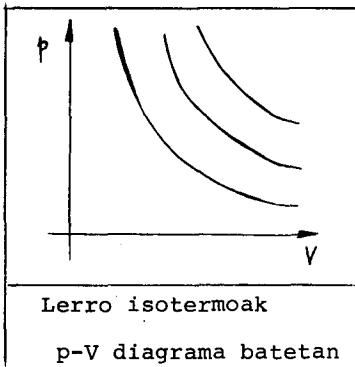


Bide beretik segituz:

$$T \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = kte$$

Bestalde, ikus dezagun, prozesu isotermoetan zer gertatzen den, hau da, tenperatura konstantepean egitukoetan. Horretarako, bas ideal baten mol bat, orma adiabatikoz inguratutik, foko batetan sartzen dugu. Hori horrela, expantsio bat eragin diezaiokegu gas idealari. Kasu honetan, prozesuen gorabeherak ekuazio honek emango dizkigu:

$$pV = NRT = kte$$



T konstante baita, halaber, N-k prozesuan konstante iraungo baitu.

Beraz: $pV = kte$

da gas idealen lerro isoter-moen ekuazioa.

Ikus dezagun lerro adia-batiko eta lerro isoter-moen arteko erlazioa. Horretarako, p-V planoko edozein puntutan, bien aldapa lortuko dugu. Lerro adiabatikoen kasuan:

$$pV^{\gamma} = kte$$

Hemen, grafikoaren modura ipiniko dugu ekuazioa, $p = f(v)$ idatzirik.

$$p = \frac{kte}{v^{\gamma}}$$

Eta lerro hauen aldapa, ondoko deribatuak emango digu:

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{ad} = -\gamma \frac{kte}{v^{\gamma+1}}$$

Eta konstante horren balorea ezaguna dugunez:

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{ad} = -\gamma \frac{p v^{\gamma}}{v^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p}{v}$$

Hau da lerroen aldapa, negatiboa, espero genuen bezala.

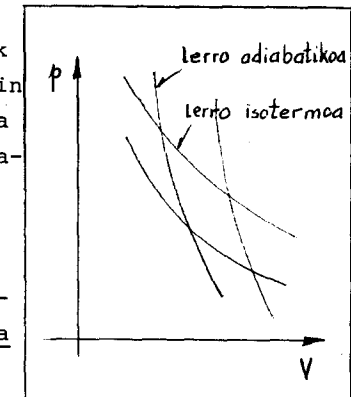
Lerro isotermoen kasuan, gauza berbera egiten dugu:

$$pV = kte, \quad p = \frac{kte}{V}$$

$$\left. \frac{dp}{dv} \right|_{is} = - \frac{kte}{v^2} = - \frac{pV}{v^2} = - \frac{p}{v}$$

Ikusten dugunez, forma aldetik guztiz berdinak dira batak zein besteak, γ faktorea positiboa baita; eta bakarrik aldapa-gradua aldatzen da.

Bestalde, $\gamma > 1$ da beti, $C_p > C_v$ baita; horregatik, lerro adiabatikoek isotermoei baino aldapa gogorragoa dute (handiagoa balore absolututan).



$$\frac{\left. \frac{dp}{dv} \right|_{ad}}{\left. \frac{dp}{dv} \right|_{is}} = \gamma > 1$$

19.5 GASEN TEORIA ZINETIKOA

19.5.1. Sarrera gisa

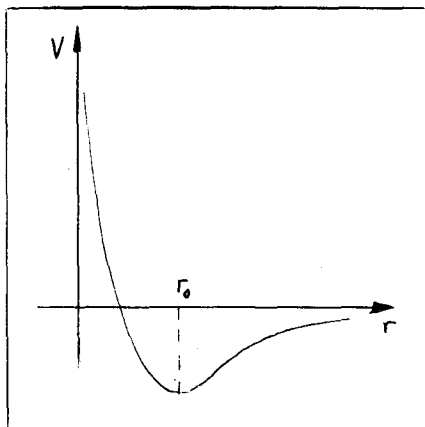
Edozein behatzailek, besterik gabea, munduaren irudi kontinuo edo jarraia du. Eta geuk ere horrela tratatu izan ditugu liburu honetan materia - eta beraren propietateak. Baina hainbat gertaerak - fisikariak zerera eramane zituen, materia gauza diskontinuo edo desjarraia dela sinestera. Aipa ditza-gun gorputzen konprimagarritasuna, gasen portaera - berezia, eta abar.

Gaur egon, denek onartua den zerbait da, gorputzak mikroskopoki partikulaz osaturik daudela, - nahiz eta hauen izakera oso eztabaidatua izan den - gaur egun arte.

Ikuspuntu honen arauera ere egin dezakegu fenomeno fisikoen estudioa, beste bidetatik heldu gareneko ondorio berberetara helduz. Hau da zuzenki - teoria zinetikoaren oinarria. Estudio hau nahi bezain zabal egin genezake, baina ez dugu hiruzpalau puntu besterik tratatuko, eta berauk azaletik ikusiz.

Horretarako, lehenengo eta behin, sinplifikazio bat egingo dugu. Honen arauera, partikulak esferazurruntzat hartuko ditugu, beraien konposizioa - kontutuan hartu gabe. Hau, noski, eta esan dugun bezala, sinplifikazio bat besterik ez da, eta berauegiten, zenbait fenomenoren estudioa teoriatik kanpo uzten ditugu -fenomeno optikoak, elektromagnetikoak, eta atomoen estrukturan dautzan guztiak-.

Bigarrenenez, partikulen arteko indarrei buruzko kontsidero batzu egingo ditugu.



Espero izatekoa da, partikulen arteko nolabaiteko - indarren bat. Besterik ez bada ere, indar grabitatorioa. Eta gorputzak osotzen dituzten partikulen arteko loturak ikusiz, berorik mes preziagarriak direla daku-sagu, partikulen artean bes te indar zeharo bizgoak - baitaude, indar nahiko konplikatuak bestalde, ez baitira lege simple batetara -

lotzen. F indarra positiboa denean, errepulsibotzat jotzen badugu, irudian agertzen den portaerari jarraitzen zaie aipatu F indarrak. Ikusten dugunez, bi - partikula elkarren hurbilean aurkitzen direnean -beraien nukleoen diametroaren arauetarako distantziatan-, indarrak biziro errepulsiboak dira; berehala oreka puntura heltzen gara (r_0) eta gero indarrak atraktiboak egiten dira, urrunean, hoski, mesprezoakorrak bihurtzen direlarik.

Hirugarrenez, azken kontsiderazio batzu egingo ditugu, ondoko hau kontutan hartzeak sortzen dituen problemari lotuz. Eta zera da, partikulen elkarren arteko erlazioa indar horren arauetarako balitz, materia guztia forma kondentsatutara bihurtuko litzatekeela, forma solido eta likidotara, halegia. Eta are gehiago, ezin eduki genezakeela atmosferarik, partikula guztiak, grabitatearen eraginaz, lur-azalera amilduko bailirateke. Garbi dago hauk guztiok ez direla gertatzen, eta honen zergatikoa partikulen - energia zinetikoan datza. Honek, partikulak higidura

batez ari direla esan nahi du, eta beraren eragin-pean, molekulak, elkarren arteko higidura bat dute. Horrela, eta grabitate-indarrik ez balego, partikula unibertsoan dispersatuko lirateke, higidura kaotiko honen eraginpean sakabanatzera jotzen baitute. Beraz, partikulen higidura, higidura termikoa ren eta grabitate-indarraren artean lortutako oreka bat da.

Aurrerago ikusiko dugunez, higidura honen -abiadura handituz doa T-rekin, beronen funtzio baita; eta horrela, T handituz doanean, gorputza -egoera solidotik likidora doa, eta honetatik gasenekora, beraien mugimendutan partikulek geroz eta askatasun handiagoa lortuz.

Hauk guztiok kontutan hartuz, besterik gabe has gaitezke teoria zinetikoaren gainetiko estudioaz.

19.5.2. Materia nolakoa den

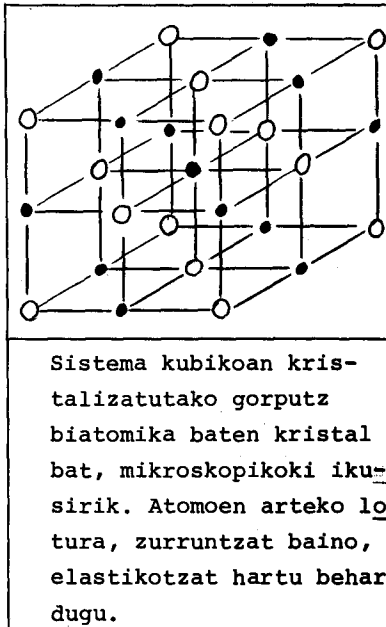
Esan dugun bezala, materiá partikula mikroskopikoz osaturik dago. Gorputz puroen kasuan, partikula guztiak berdinak dira. Molekula hauk oso tikiak direnez, molekula-gramo bat partikula-kopuru oso handiak osotzen du. Gainera, edozein gorputz kimikoren molekula-gramo bat osotzen duten partikulen kopurua, teoriaren konstante tipiko bat da, Avogadro-ren zenbakia, eta materia-mota guztietan berbera da:

$$N = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ molekula, molekula-gramo bakoitzean.}$$

Nola agertzen zaigu partikula-multzo izugarri hau materia barruan?

Ba, hiru mota desberdinetan: egoera solido, likido, eta gaseosoan.

Lehen bi egoeretan, hau da, egoera kondentsatuetan, bi partikula kontsekutiboren distantzia konstantetzat har dezakegu. Partikulen elkarren arteko loturak (kohesio-indarrak) gogorrak dira, eta honek partikulak zerera behartzen ditu, orekan beraien arteko distantziak denboran zehar konstante mantentzen. Honek ez du esan nahi, partikulak gelditu daudenik; bai batean zein bestean partikulek bi-bratu egiten dute, baina bibrazio-zentruak lehen esandakoari jarraitzen zaie.



Egoera likidoan, halaber, loturek ez dute e^{str}uktura finko bat mantentzeko adinako indarrik. Eta horretan bereizten dira solidoak eta likidoak: azken hauek bakarrik lekalki gordetzen dute finkapen hori; solidoek, aldiz, beraien osotasunen.

Azken egoeran, egoera gaseosoan, lotur-indarrak hain dira moteltzen, nuluak direla kontsidera dezakegula. Eta noski, partikulen elkarren arteko kokatzea guztiz aleatorioa da.

Beraz, egoera solidotik likidora, eta likidotik gaseosora igarotzean, desordena handituz doa, partikulek geroz eta askatasun handiagoa dute, hau da, energia zinetikoa irabazten dute, eta tenperatura igoz doa

Hau da, nolabait, ondoko koadroak adierazten diguna.

Gure estudioan, egoera gaseosoa aztertu-ko dugu, eta lotur indarrak zero direla kontsideratuko dugu, txoke uneten izan ezik.

V_m txikia	V_m handituz	V_m handia
T txikia	T handituz	T handia
Solidoak	likidoak	gasak

→ T

T: Energia zinetikoa

V_m : batezbesteko abiadura koadratikoa

19.5.3 HIGIDURA BROWNDARRA ETA BATEZBESTEKO ABIADURA KOADRATIKOA

Gure sinplifikazioan, gauzak honela doaz gas barruan: Partikulek, higidura uniforme dutela, ibilbide zuzenak betetzen dituzte.

Noizean behin, hauetako bik txokatu egiten dute, eta bien abiadura, bai moduluz eta bai direkzioz, aldatu egiten denez, beste ibilbide berriak (lehen bezala - uniforme eta zuzenak) hasiko dituzte.

Honela, ba, mikroskopikoki gas bat behatuko bagenu, zera ikusiko genuke: partikula-multzo handi bat, eta bertan partikula bakoitzak nolanahiko direkziozko ibilbidea betetzen, noizean behin beste partikulen aurkako txokeak dituelarik.

Honen ezagugarritzat, batezbesteko abiadura ^{Koadratikoa} ↓

hartuko dugu. Horrela, ez dugu direkziorik kontu-
tan hartzen (eta operazio guztiak eskalarekin egin-
go ditugu, beronek dituen abantaila guztiekin).

Abiadura koadratiko hau, V_m , une batetan
partikula guztien abiaduraren batezbesteko balore
koadratikoaren bidez lortuko dugu.

Eta bide beretik:

$$T = \frac{1}{2} m V_m^2$$

izango dugu batezbesteko energia zinetikoa.

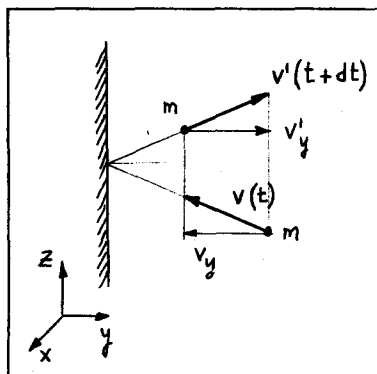
$$\text{Bestalde: } v_m^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\text{eta } v_x = v_y = v_z$$

direnez (simetria gorde egiten dela onartzen badugu
behintzat):

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{v_m^2}{3}$$

19.5.4 Presioaren lorbide berria



Demagun irudian agertzen
den partikula, OYZ planoan
higitzen dela. Gasa daukan
ontziak, partikularen ibil
bidea moztu egingo du, OXZ
planoraren paralelo den or
maz (ikus irudia). Txokea
elastikoa dela kontsidera-
tzen badugu, V_y konposatua
 $t + \Delta t$ unean $-V_y$ izango da.
Beraz, ondoko hau izango da

linealaren aldakuntza:

$$\Delta p_y = 2mV_y = f \Delta t = i_y$$

$i_y = f \Delta t$, hormak eginiko indarraren eta txokearen denboraldiaren arteko biderketa, ormak emaniko inpultsua dugu.

Ormak S superfizie badu, eta superfizie eta denbora unitate bakoitzean txokatzen duten partikulen kopurua ν bada,

$$I_y = 2 \nu t S m V_y$$

izango da denetara orma horretan, eta t denboran.

Eta, ormak eginiko indar osoa F bada:

$$F t = 2 \nu t S m V_y \quad \text{izango da.}$$

Beraz: $F = 2 \nu S m V_y$

eta $p = \frac{F}{S} = 2 \nu m V_y$

Baina, zenbat balio du ν horrek? Demagun, bolumen-unitatean n partikula ditugula. Demagun, halaber, simetriad edo, V_y eta $-V_y$ abiadurak partikulen erdiek dituztela. Beraz, V_y abiaduraz, $S V_y t$ bolu menean dauden partikula guztiek ormaren aurka txokatuko dute, t denboran.

Hau da: $\nu S t = \frac{n}{2} S V_y t \quad \nu = \frac{n}{2} V_y$

Eta $p = n m V_y^2$

edo $p = \frac{1}{3} n m V_m^2 \quad V_m^2 = 3 V_y^2 \quad \text{baita,}$

eta hau da gas horren presioa. Ikusten dugunez, hainbat txoke diskretuz sortzen da. Presioa ez da, ba, kontzeptu jarraia.

19.5.5 Azken kontsiderazioak

Bide beretik beste hainbat erlazio lor geni-

tzake, baina luzeegia bihurtuko litzaiguke estudio hau. Beraz, hemen bakarrik aipatu egingo dugu baten bat, eta hauen artean, energiaren ekipartizioaren printzipioa dugu:

$$T_i = \frac{1}{2} kT$$

non T_i , V_i abiadur osagaiei dagokien energia zinetikoa den, eta $k = \frac{R}{N} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ konstantea den.

20. GAIA - TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIOA

- 20.1 PROZESU ITZULGARRI ETA ITZULEZINAK
- 20.2 TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIOA
- 20.3 CARNOT-EN ZIKLOA
- 20.4 TENPERATURAREN ESKALA TERMODINAMIKOA
- 20.5 CLAUSIUS-EN TEOREMA, BIGARREN PRINTZIOAREN FORMA MATEMATIKOA
- 20.6 ENTROPIA
- 20.7 BIGARREN PRINTZIOAREN BERRIKUSPENA, ENTROPIAREN ENUNTZIATUA
- 20.8 ENTROPIA ETA DESORDENA.

S A R R E R A

Paper-horri pilotxo bat balkoian uzten baduzu, lehenengo haizaldiak barreiatu egingo di-zu eta horriak nongura aurkituko dituzu. Egin dezagun alderantziz. Utz ditzagun horriak edonon, - balkoiaren zoluan zehar zabaldurik, eta egon gaitetzen begira hurrengo haizaldirarte, ea pilatzen dizkigun.

- Nolako lelokeria, pentsatuko duzu, hai zeak ez baitu sekula ere holako gauzarik egingo.

Ba, zergatik ez? Ba ote duzu, hori esa teko arrazonamendu logikorik? Ez. Ez zuk eta ez inork ere. Esan dezagun gauza bakarra, zera da: - inork ez du inoiz ikusi haizea paperak ordenatzen.

Aipaturiko adibidea bezalako asko ipin - genitzake; eta guztietatik aterako genukeen ondorioa, haxe izango litzateke: ez dakigu zergatik, baina prozesu berezkoak ibilzentzu batean bilakatzten dira beti eta inoiz ere ez kontrakoan. Zientifikoki mintzatuz, hobeto esanen genuke: "Edozein prozesu berezko batek ibilzentzu batean bilakatzeko probabilitate handia du, eta beste edozeinetan, ordea, probabilitate txikia"

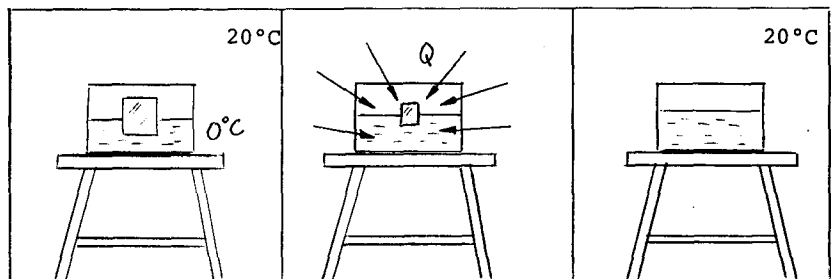
Idea hain sinple hau Naturaren lege orokortzat hartzen dugu, eta horretan datza, hain zuzen, termodinamikaren bigarren printzipioaren - mamia.

20.1 PROZESU ITZULGARRI ETA ITZULEZINAK.

Sarreran ikusi den bezala, prozesu berekoek bilakatzeko ibilzentzu konkretu bat dute, eta ez dute inoiz ere alderantziz betetzen (ala, behintzat, ez da inoiz ere nabaritu horrelakorik).

Prozesu hauk "itzulezinak" deitzen dira, eta honen moeta barruan daude, praktikan ezagutzen ditugun guztiak. Baina aurreragoan ikusiko denez, oso komenigarria izango zaigu, beste prozesu-moeta batzu kontsideratzea: "prozesu itzulgarriak". Nahiz eta irrealak izan, definitu egin behar ditugu, beraien arrazonamendu teoriko asko egingo baitugu. Oraingoz era sinple batez definituko ditugu. Prozesu itzulgarri bat zera da: ibilzentzu batean edo kontakioan eboluzionatzea berdina zaiona.

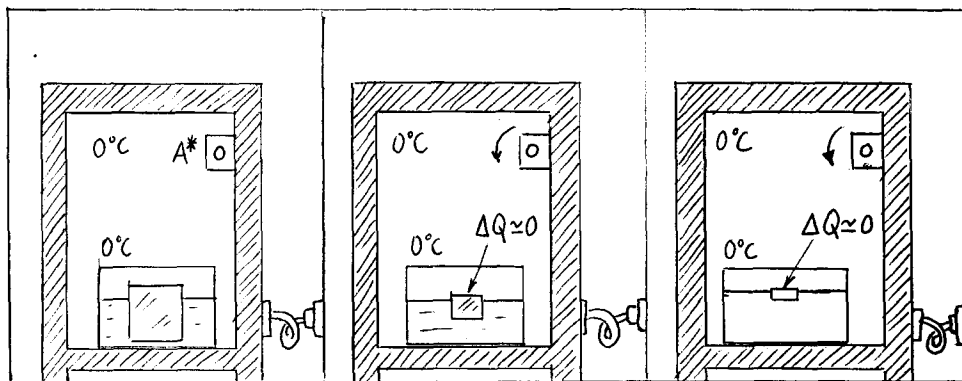
Hau baino definizio sakonagoa eman baino - lehen, prozesu itzulgarri eta itzulezinen artean - dagoen desberdintasuna ikus dezagun bi adibideren bidez.



I - Demagun ura eta bertan izotz zati bat, 0°C temperaturaz, ontzi diatermo batetan sarturik. - Ezar dezagun sistema gela batetan esate baterako, gelako temperatura 20°C izanik.

Izotza gero eta txikiago bihurtzen dela ikusiko dugu. Azkenez, izotz osoa desagertuko da eta on tzi barruan geratzen den urak, gelaren tenperatura lortuko du (oso termometro zehatz bat izanen bagenu, gelako tenperatura 20°C baino pixka txo bat beheragokoa izango litzatekeela ikusiko genuke). Egun bat ondoren, (edo astebete, edo urtebete) berriro ere izotza ura barruan flotatzen aurkituko ote dugu? Probabilitatea txikia da. Oraingoz, behintzat, ez du inork horrelakorik ikusi. Hona hemen, ba prozesu itzulezin oso bat.

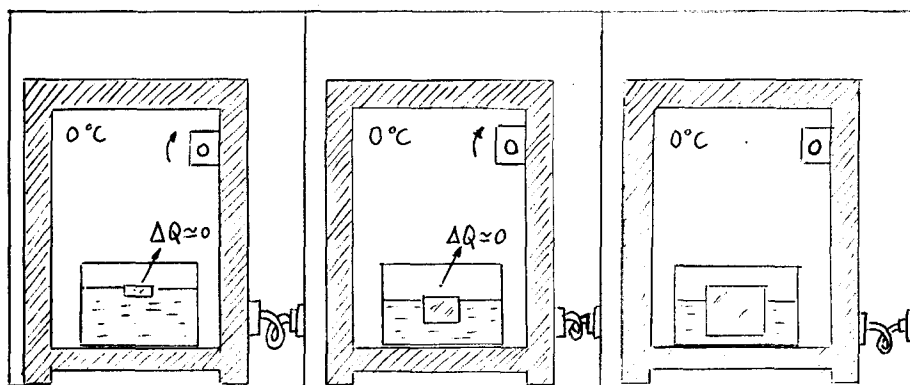
Har dezagun, beste ontzi diatermo bat bere ur eta izotz zatiarekin, biak 0°C tenperaturaz, eta sar dezagun hozkailuan, bere barrua ere 0°C tenperaturaz egonik. Hozkailuaren tenperatura apurtxo bat goratzen badugu ($\Delta T \rightarrow 0$), bero pitintxo bat hartuko du sistemak hozkailuaren barnetik eta izotz pixkatxo bat uretan bihurtzeko da. Orduan, sistema eta hozkailuaren barrua 0°C tenperaturaz egonen dira berriro. Operazioa errepikatzen badugu, gauza berberak



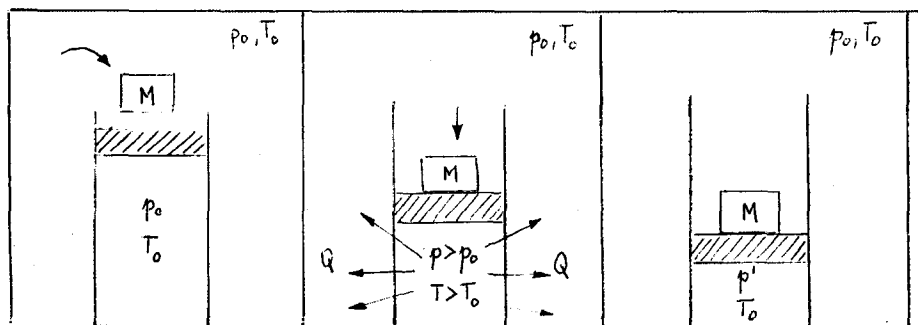
(A*) Hozkaikuaren funtzionamendua aldatzeko tresna.

jazoko dira eta, geldiro geldiro, gero eta izotz

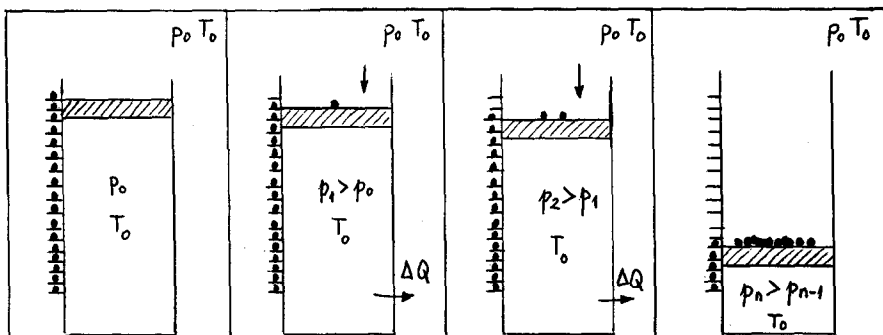
gutxiago izango dugu. Baina halako batetan A^* al derantziz higitzen badugu, hozkailuaren tenperatura beheratuz ($-\Delta T \rightarrow 0$), bilakabideak atzera egingo du eta ur tantatxo bat izotzetan bihurtuko da. Sistema bero pixkatxo bat emango dio hozkailuaren barruari eta honela barrak 0°C -tako tenperatura lortuko du berriro. Pausoka, pausoka, operazioa errepikatuz, hasierako kondizioetara helduko gara. Hau izan da, ba, argi eta garbi, prozesu itzulgarri bat.



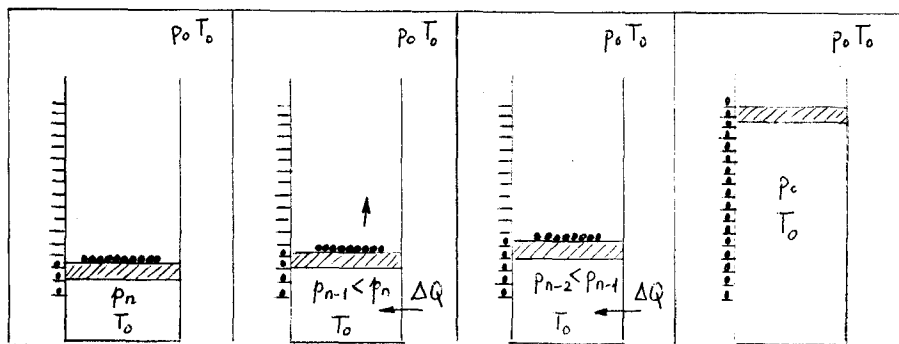
II - Demagun zilindro bat enbolo batekin. Beraren barruan dagoen gasak atmosferaren presioa eta tenperatura du (enboloaren pisua mespreziatzen dugu eta zilindroaren orma diatermoa dela kontsideratzen). Enbolo gainean M masako gorputz bat ezartzen badugu, berehala jaitsiko da, gasa -



konprimituz. Konpresioaren ondorioz temperatura goratu egingo da eta gasak beroa emango dio eguratsari. Azkenez, gasak T_0 temperaturarekin eta $p' = p_0 + \frac{Mg}{A}$ (A delakoa enboloaren azalera izanik) presioarekin amaituko du. Ordu bete pasa eta gero (edo hilabete), enboloa eta M masa, hasierako posizioara itzuliko dira? Ezetz uste dugu, edo, hobeto esateko, hori gertatzeko probabilitatea ia-ia zero dela. Itzulezina izan da prozesua.



Orain M masa puxka txiki mordo batetan zatitzen dugula pentsa dezagun, eta puxkatxoak banan banan ezartzen ditugula, irudian ikusten den mailetan. - Lehenengo zatitxoa enbolo gainera bultzaten badugu, enboloak apurtxo bat konprimitzeko du gasa, - eta honek apurtxo bat goratuko du bere temperatura, bero apurtxo bat emango dio atmosferari eta beraz T_0 temperatura lortuko du berriro, atmosfera oso handia izanik bere temperatura mantentzen baitu. Hurrengo zatitxoez operazioa errepikatzen badugu, gasak gero eta presio handiagoa edukiko du, beti T_0 temperaturarekin jarraituz. Halako batetan alderantziz egiten badugu, hots, zatiak banakak banak beren lekuetan atzeratzen baditugu, prozesuak



ibilzentzua aldatuko du, gasak presio apurtxo bat galduko du, bere temperatura apurtxo bat beheratu ko da, atmosferatik bero apurtxo bat hartuko du T_0 temperatura errekuaratuz, eta azkenean zati bakoitza bere espaloian eta dena hasierako kondizioetan izango dugu. Hau izan da, zalantzarik gabeko, prozesu itzulgarri bat.

Bi adibide hauen bidez ongi argi ditzakegu prozesu itzulgarri eta itzulezinen arteko desberdintasun garrantzitsuenak:

- Prozesu itzulgarriek oreka-egoera batetan dute hasiera, pausoka pausoka aurreratuz, urrats bakoitzean oreka-egoera batetatik oso hurbil dagoen beste oreka-egoera batetara, azkenengo oreka-kondizioak lortu arte. Honela, prozesuaren bilakaera oso errazki alderantzten da edozein unetan.

- Prozesu itzulezinek, ordea, desoreka-egoera batetan dute hasiera, eta prozesuan zehar ez dago sistemaren eta kanpoaren arteko inolako orekarik, azkenengo kondizioetara heldu arte.

Idea hauen ondorio bezala, prozesu itzulgarri bat zer den defini dezakegu zehazkiago:

"Prozesu itzulgarri bat, ia oreka-egoeren multzo bukaezinezko batez osoturik dago eta, hortaz, be raren bilakaeraren kondizio^etan eginiko aldaketarik txikiena, nahikoa da beraren sentid^oa alderantzeko".

Prozesu itzulezinak, noski, definituta geratzen dira eksklusioz.

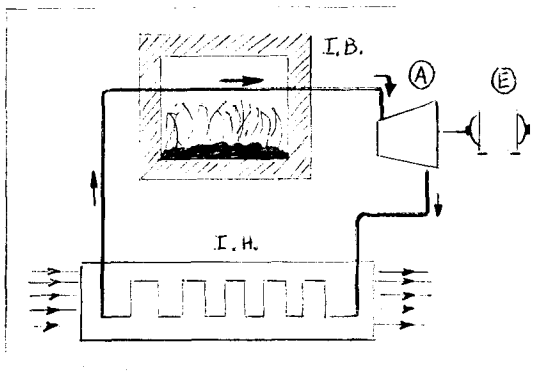
20.2 TERMODINAMIKAREN BIGARREN PRINTZIBIOA

Hemendik aurrera iturri beroa eta iturri hotza izenak asko erabiliko baititugu, beraien - esanahiak azaltzea komenigarria izango litzateke. Termodinamikaren arloan iturri bat hauxe da: aztertzen ari garen sistemarekin beroa elkartruka de zakeen edozein elementu. Honelako bi iturri baka- rrik daudenean, tenperatura handiena duena iturri beroa deitzen da, eta txikiena duena iturri hotza. Bestelako gauzarik ez bada esaten, nahiz batak na- hiz besteak tenperatura konstantez irauten dutela kontsideratzen da praktikan.

Ideiak finkatzeko, bi adibide ipiniko ditu- gu:

I - zentrale termikoa

Ikusten den eskema sinplean,

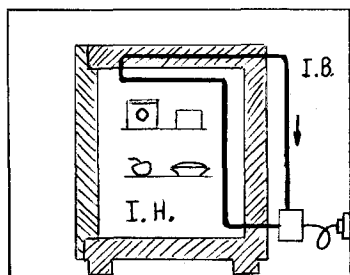


fluido batek (normal- ki ura) zenbait erre- kuntzatik sorturiko - beroa hartzen du gal- daran (eta normalki - lurren etan bihurtzen da), gero fluidoak A turbina hⁱgi erazten du, eta honek E makina - elektrikoa, zeinek sor- tzen baitu korr^ontea.

Turbinatik pasatu ondoren, fluidoa hoztu egiten da kondentsatzailean, esate baterako hibai bati botatzen dio beroa (eta likidotan bihurtzen da); hemen dik berriro izango da bidalia galdarara, zikloa - errepikatuz.

Fluidoak leku bietan elkartrukatzen du beroa: galdaran hartzen du eta kondentsatzailean ematen. Hauterariko zein da tenperatura handiena duena? - Galdara, zalantzarik gabe. Hemen dugu, ba, iturri beroa, eta, derrigorrez, kondentsatzailea izango da iturri hotza.

II - Hozkailua



Hozkailu arrunt baten funtzio-
namenduan fluido bat kon-
primitu egiten da K kon-
primagailuaz, eta segidan,
expantsionatu egiten da -
bat-batean. Horrelaxe, be-
raren tenperatura jaitsi
egiten da (normalki lurrun-
du egiten da), hozkailua-
ren barruan dauden gauze-
tatik beroa hartuz. Orduan

fluidoaren tenperatura goratu egiten da (normalki fluidoa likidotan bihurtu egiten da), eta hozkailuaren kanpotik pasatzean, gelako aireari botatzen dio beroa. Jarraian, fluidoa berriro heltzen da - konprimagailura, zikloa berreginez.

Prozesu honetan, aurrekoan legez, leku bietan elkartrukatzen da beroa: hozkailuaren barruan (hango janarietatik hartzen da beroa) eta hozkailuaren kanpoan (gelako airetara botatzen da beroa). Hozkailuaren barruko tenperatura gelarena baino txikiagoa baita, hor dugu iturri hotza. Eta, noski, iturri beroa, gela bera.

Ikusi ditugunak dira ziklo termodinamiko guztien kasurik oinarritzkoenak. Beste edozein ziklo, batera edo bestera erreduzi daiteke basikoki. Ideiak argitzeko, ^{ikus} dezagun, zer punturaino diren antzekoak. Hona hemen amankomunean dutena:

- Iturri edo foko batetik beroa hartzea.
- Beste iturri edo foko batera beroa botatzea.
- Ingurunearekin lana elkarraldatzea.

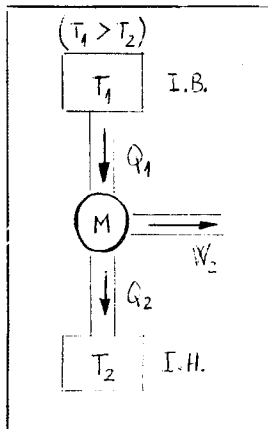
Orain saia gaitezen zikloak bakuntzen, iturri beroa eta iturri hotza kenduz. T_1 eta T_2 deituko ditugu iturrien tenperaturak, eta ziklo bakoitzean beraiekin elkarraldatzen diren bero-kantitateak Q_1 eta Q_2 dira errespektiboki. W izango da ziklo - bakoitzean elkarraldaturiko lana.

Goazen aurreko zentrale termikoarekin:

I - Ziklo motorea

Lehen printzipioaren bidez: $(Q_1 - |Q_2|) - W = 0$

edo: $Q_1 = |Q_2| + W$



A- Ken dezagun iturri beroa: $Q_1 = 0$

$0 = |Q_2| + W$ ezinezkoa da.

Posibilite hau lehen printzipioak debekatzen du.

B- Ken dezagun iturri hotza: $Q_2 = 0$

$Q_1 = W$

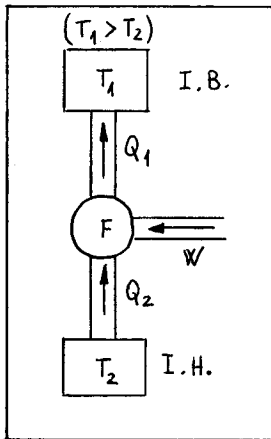
Lehen printzipioak ez du posibilitate hau debekatzen.

Goazen orain hozkailua ikustera.

II - Ziklo frigorifikoa

Lehen printzipioaren bidez: $(Q_2 - |Q_1|) - (-|W|) = 0$

edo: $|Q_1| = Q_2 + |W|$



A' - Ken dezagun iturri beroa: $Q_1 = 0$

$0 = Q_2 + W$ ezinezkoa da.

Posibilitate hau lehen printzipioak debekatzen du.

B' - Ken dezagun iturri hotza: $Q_2 = 0$

$Q_1 = W$

Lehen printzipioak ez du posibilitate hau debekatzen.

Dakusagunez bi posibilitate geratzen zaizkigu, iturri batekin bakarrik sistemak funtziona dezan nahi badugu:

B kasua: Iturri batetik beroa hartuz eta bero guztia lana bihurtuz. Baina hau ez da inoiz lortu, mila bider saiatu izanik ere, eta lortezina dirudi:

B' kasua: Kasu honek zera dio: edozein lan-kantitate beroa bihurtu daiteke. Hau bai da posiblea, esate baterako igurtzimendua dela medio.

Erakutsi dugun arrazonamendua, Sadi Carnot-ek, frantses injinadore gaztea orduan, egin zuen pasa den mendearen hirugarren dekadaren, eta, honen ondorioa bezala, termodinamikaren bigarren printzipio delakoa proposatu zuen. Aipaturiko printzipioa, lehen bistan desberdinak diruditen forma batzutan

adieraz daiteke, eta hauetariko zenbait ikusiko ditugu aurrerago, baina oraingoz erarik sinplee na erabiliko:

Edozein ziklo monotermo batetan, sistema batek bi posibilitate ditu:

1. Energi balantzea nulua izatea:

$$W = 0 \qquad Q = 0$$

edo 2. Kanpotik lana hartu eta kanpora beroa botatzea:

$$W < 0 \qquad Q < 0$$

Laburki: Edozein ziklo monotermotan $W \leq 0$ eta $Q \leq 0$ izan behar dira

Azken terminotan, printzipio honen ondorioz, esandako B kasua guztiz ezinezkotzat onartzen dugu.

20.3 CARNOT-EN ZIKLOA

Lehenik eta behin defini dezagun oso kontzeptu garrantzitsu bat, errendimendua delakoa. Kontzeptu hau ziklo motoreei aplikatzen zaie bakarrik, eta honela definitzen da: Hartutako bero unitateko, sistematik buruturiko lana. Matematikoki:

$$\eta = \frac{W}{Q_H} \quad (100 \text{ zenbakiz biderkatuz, balorea ehunekotan eman daiteke}).$$

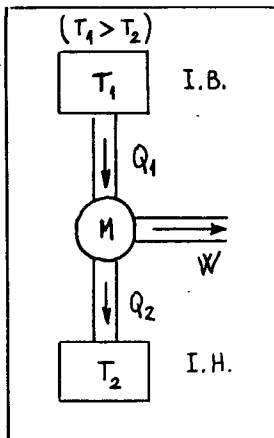
$$\text{Hemen} \begin{cases} W = \sum W \text{ (beraien zeinuaz) ziklo bakoitzean} \\ Q_H = \sum Q \text{ (bakarrik hurrupatatuko beroak, hots, positiboak) ziklo bakoitzean.} \end{cases}$$

Kontzeptu honek neurtzen du, hain zuzen, ziklo moto-

re baten erabilgarritasuna; eta hortik, bere garrantzia. (Kontzeptuaren garrantzia, nahi dut esan; ez ziklo motorearena).

Goazen orain, ziklo bitermo bati kontzeptu hau aplikatzera.

Lehen printzipioaz :



$$Q_1 + Q_2 - W = 0$$

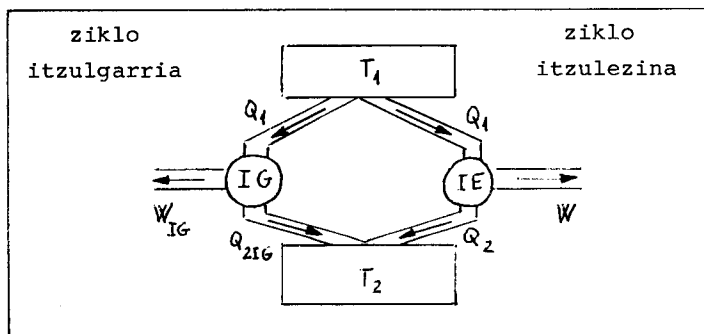
$$\left. \begin{aligned} W &= Q_1 + Q_2 \\ Q_H &= Q_1 \end{aligned} \right\} \eta = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Q_2 negatiboa eta balore absolututan Q_1 baino txikiagoa dela kontutan hartuz, argi eta garbi ikusten da, errendimendua ez dela -- inoiz helduko unitate_A, edo ehuneko ehunera.

Errendimendu-kontzeptua dela medio, Carnot-ek hurrengo teorema proposatu zuen :

T_1 eta T_2 temperaturatako bi iturrien artean funtzionatzen duten ziklo itzulgarri guztiek, errendimendu berbera dute, eta errendimendu hau iturri berberen artean funtzionatzen duen beste edozein ziklo itzulezinarena baino handiagoa da.

Teorema hau frogatzeko, demagun, T_1 eta T_2 ($T_1 > T_2$) temperatura duten bi iturri. Aipaturiko iturrien artean bi ziklo suposatuko ditugu. Biek bero-kantitate berbera hartuko dute -- iturri berotik, bata itzulgarria eta bestea itzulezina izanik. Ziklo itzulezinaren errendimendua, itzulgarriarena baino handiagoa dela suposatuko dugu eta hori ezinezkoa dela ikusiko.



Ziklo itzulgarrian izanen dugu: $\eta_{IG} = \frac{W_{IG}}{Q_1}$

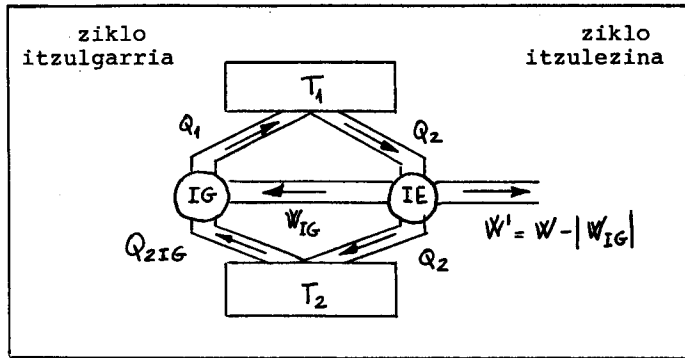
Ziklo itzulezina izanen dugu: $\eta = \frac{W}{Q_1}$

Gure suposapenagatik: $\eta > \eta_{IG} \rightarrow W > W_{IG}$

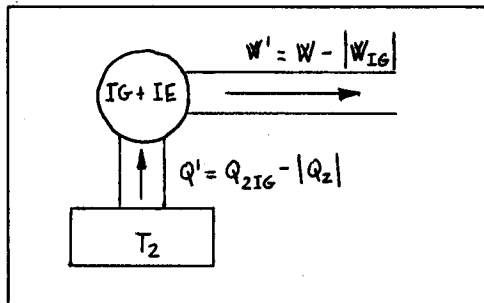
Baina aurreko zikloa itzulgarria izanez, beraren bi-lakabidea alderantz diezaiokegu, ziklo frigorifikora bihurtuz. Horrela egingo dugu, eta frigorifikoa behar duen lana, bigarren zikloa dela medio emango diogu, lan pixka bat soberan geratzen zaigularik,

$W > W_{IG}$ baino handiagoa da eta.

Hona hemen akoplamendu berria:



Baina hau guztia honelaxe sinplifika dezakegu:



Hots, sistema osoak ez dio inolako iturriri bero-rik botatzen, eta, hala ere, lana sortzen du. Beste

era batera: $W' > 0$ eta $Q' > 0$

Dakigunez, posibilitate hau ezinezkotzat onartzen dugu, bigarren printzipioaren arauera. Beraz, ez da posiblea egin dugun aierua, $\eta > \eta_{IG}$ hain zuzen. Hortaz, ziklo itzulezinaren errendimendua itzulgarriarena baino txikiagoa izan behar dela esan dezakegu, hau da:

$$\eta_{IG} > \eta$$

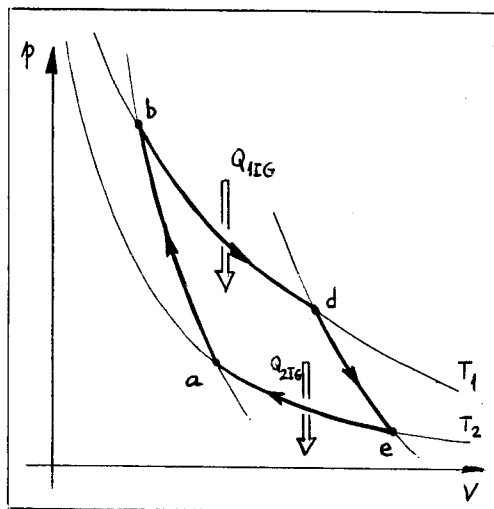
Honela, ziklo itzulgarriaren errendimendua maximoa izango da. Horrelaxe frogatzen da - aurrean ipinitako proposamendua, Carnot-en teorema halegia.

Goasen orain edozein ziklo bitermo eta - itzulgarri baten errendimendua kalkulatzera. Ezer baino lehenago, finka dezagun nolakoa izan behar duen zikloak:

- Alde batetik, iturriekin beroa elkaraldatzen ari den bitartean, iturrien tenperaturaz iraun beharko du, bestela ez bailirateke elkarralda pen itzulgarriak izango. Beraz, bi prozesu - isotermo eta itzulgarri beharrezkoak dira.
- Bestaldetik, iturriekin beroa elkaraldatzen ez denean, ezin du bestelako sistemekin berorik elkarraldatu, eta, hortaz, prozesu adiabatikoa eta itzulgarriak bete beharko ditu.

Azkenez, zikloa burutzeko erabiltzen den fluidoak ez baitu inolako garrantzirik, gas perfektu bat hartuko dugu.

Irudian erakusten da ziklo osoa, $P - V$ erako diagrama baten bidez.



a→b: Konpresio adiabatiko eta itzulgarria

$$(TV^{\gamma-1} = Kte.)$$

b→d: Expantsio isoterma eta itzulgarria

$$(pV = Kte.)$$

d→e: Expantsio adiabatiko eta itzulgarria

$$(TV^{\gamma-1} = Kte.)$$

e→a: Konpresio isoterma eta itzulgarria

$$(pV = Kte.)$$

Zikloaren estudioa:

$$a \rightarrow b \begin{cases} Q = 0 \\ -W = \Delta U = n C_v (T_1 - T_2) \longrightarrow W = n C_v (T_2 - T_1) \end{cases}$$

$$b \rightarrow d \begin{cases} \Delta U = 0 \\ Q - W = 0 \longrightarrow Q = W = \int_{V_b}^{V_d} p dV = n R T_1 \ln \frac{V_d}{V_b} \end{cases}$$

$$d \rightarrow e \begin{cases} Q = 0 \\ -W = \Delta U = n C_v (T_2 - T_1) \longrightarrow W = n C_v (T_1 - T_2) \end{cases}$$

$$e \rightarrow a \begin{cases} \Delta U = 0 \\ Q - W = 0 \longrightarrow Q = W = \int_{V_e}^{V_a} p dV = n R T_2 \ln \frac{V_a}{V_e} \end{cases}$$

Ziklo osoaren lana hauixe izango da:

$$\begin{aligned} W_{IG} &= n C_v (T_2 - T_1) + n R T_1 \ln \frac{V_d}{V_b} + n C_v (T_1 - T_2) + n R T_2 \ln \frac{V_a}{V_e} = \\ &= n R \left[T_1 \ln \frac{V_d}{V_b} + T_2 \ln \frac{V_a}{V_e} \right] \end{aligned}$$

Baina:

$$\left. \begin{aligned} T_1 V_b^{\gamma-1} &= T_2 V_a^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_a}{V_b} \right)^{\gamma-1} \\ T_1 V_d^{\gamma-1} &= T_2 V_e^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_e}{V_d} \right)^{\gamma-1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \left(\frac{V_a}{V_b} \right)^{\gamma-1} &= \left(\frac{V_e}{V_d} \right)^{\gamma-1} \\ \frac{V_a}{V_e} &= \left(\frac{V_d}{V_b} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Eta beraz:

$$W_{IG} = nR \left[T_1 \ln \frac{V_d}{V_b} + T_2 \ln \left(\frac{V_d}{V_b} \right)^{-1} \right] = nR (T_1 - T_2) \ln \frac{V_d}{V_b}$$

Bestaldetik, ziklo osoan hurrupatutako beroa, b→d prozesuan hartutakoa izan da. Orduan, zera edukiko dugu:

$$Q_{HIG} = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_b}$$

Eta azkenez, errendimendua holaxe geratuko da:

$$\eta_{IG} = \frac{W_{IG}}{Q_{HIG}} = \frac{nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_d}{V_b}}{nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_b}} \rightarrow \boxed{\eta_{IG} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Hau da errendimendurik handiena, eta generalean:

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Atal honen hasieran ikusi dugun legez:

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Beraz:

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0}$$

Formula honek ere adierazten du Carnot-en teorema, eta datorren atalean erabilia izango da. Zikloa itzulgarria denean, berdintasunaren zeinua hartuko dugu, eta beste edozein kasutan desberdintasunarena.

20.4 TENPERATURAREN ESKALA TERMODINAMIkoa.

Bertan ikusi dugun expresioa ziklo itzulgarri bati aplikatuz eta beroak balore absolutuetan ipiniz, honela geratuko litzateke:

$$\frac{|Q_1|}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} = 0 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|}$$

Pasa den mendean W. Thomson-ek (geroago Inglaterrako erreginak Lord Kelvin izendatua) erlazio honen bidez tenperaturaren eskala bat definitzea proposatu zuen. Eskala termodinamikoaren garrantzia honetan datza: edozein gai-kantitatearen kontrazioen zein dilatazioen independentea da, edo inolako materiaren propietateekin zerikusirik ez duela-rik. T_2 tenperatura erreferentzia bezala hartzen badugu, beste edozein tenperatura haxe izango da:

$$T_1 = T_2 \left| \frac{Q_1}{Q_2} \right|$$

Konkretuki: ura eta izotza presio atmosferikoan oreka termikoan izanik, konbentzionalki $T_2 = 273,16$ egiten badugu, bolumen-konstanteko gasaren termometroaz definitu genuen eskala berbera beraurkituko dugu (ikus 18.2.). Eskala termodinamikoa edo absolutua proposatu zuenaren oroimenez, Kelvin gradutan, ($^{\circ}\text{K}$), neurtzen dira.

Gara dezagun orain aurreko erlazioa beste era batera, ondorio interesgarri bat ateratzeko. Lehen printzipioaren bidez:

$$|W| = |Q_1| - |Q_2| \rightarrow |Q_2| = |Q_1| - |W|$$

Eta aipaturiko erlazioa eramanez, honela geratuko da:

$$T_1 = T_2 \frac{|Q_1|}{|Q_1| - |W|} \rightarrow T_2 = T_1 \left(1 - \frac{|W|}{|Q_1|} \right)$$

Hemendik, eta $|Q_1| > |W|$ dela kontutan hartuz, biga-

rren printzipioaren arauera $Q_2 \neq 0$ izan behar baita, konklusio hau idoki dezakegu:

"Termodinamikaren bigarren printzipioaren arauera, zero absolutua arras lortezina dugu".

20.5 CLAUSIUS-EN TEOREMA. BIGARREN PRINTZIPIOAREN FORMA MATEMATIKOA

Ikusiko dugunez, Clausius-en teorema 20.3. atalaren azkenengo erlazioaren (Carnot-en teoremaren hain zuzen ere) generalizazio bat besterik ez da. Kontsidera dezagun, ziklikoki funtzionatzen duen sistema bat. Zikloa nahiz itzulgarria nahiz itzulezina izan daiteke, sistemak $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ bero-kantitateak elkarrraldatzen dituelarik, $T_1, T_2, \dots, T_n$, tenperatura-tako iturriekin, errespektiboki.

Demagun, beste iturri laguntzaile bat, bera-ren tenperatura T_0 izanik; eta n makina itzulgarri-
rriz osoturiko multzo bat ere.

Lehenengo makina itzulgarriak $-Q_1$ bero-kantitatea elkarrraldatzen du T_1 tenperatura duen iturriarekin, eta Q_0 bero-kantitatea, T_0 tenperatura duen iturri laguntzailearekin.

Eta abar.

Era honetako ziklo itzulgarri bakoitzean, hauxe idatz daiteke:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0 \\ -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_{02}}{T_0} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ -\frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q_{0n}}{T_0} = 0 \end{array} \right\} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} = \frac{Q_{01} + Q_{02} + \dots + Q_{0n}}{T_0} = \frac{Q_0}{T_0}$$

Gure sistemak eta makina itzulgarrien multzoak osotutako sistema berriak, iturri laguntzaileekin bakarrik elkaraldatzen du beroa. Eta bigarren printzipioaren bidez:

$$Q_0 \leq 0$$

Hortik, Clausius-en erlazioa lortzen dugu, hau xe hain zuzen ere:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Limitean, elkaraldaturiko bero-kantitateak oso txikiak eginez gero, zera eratuko zaigu:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

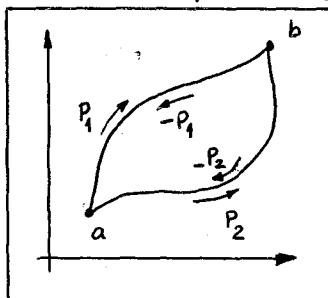
($\oint$ zeinuak, integrala ziklo batetan zehar egingen dela esan nahi du.)

Prozesu guztiak itzulgarriak badira, berdintasunaren zeinua hartzen da; baina prozesuren bat edo gehiago itzulezinak badira, desberdintasunaren zeinua hartu beharra dago.

Azkenengo expresioa, bigarren printzipioaren forma matematikoez kontsideratu ohi da.

20.6 ENTROPIA

Entropi kontzeptua oso kontzeptu sakon eta eman korra da, baina hemen ez dugu ikusiko beraren konplexutasun osoan, modu sinple batez baizik; hau da, entropiaren definizio klasikoa baino ez dugu emango.



Kontsidera dezagun (a) kondizioetatik (b) kondizioetara doazen bi prozesu itzulgarri, P_1 eta P_2 direlakoak. Alderantzizko prozesuak $-P_1$ eta $-P_2$ deituko

ditugu. Hauk ere, noski, itzulgarriak izango dira.

P_1 prozesua eta segidan $-P_2$ egiten baditugu, beren konbinaketak ziklo itzulgarri bat osotzen baitu, hauxe idatz dezakegu:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Baina matematikoki zera egin daiteke:

$$0 = \oint \frac{dQ}{T} = \int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P_1} + \int_b^a \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P_2} = \int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P_1} - \int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P_2}$$

Eta beraz:

$$\int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P_1} = \int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P_2}$$

Berdintasunaren honen esangura hauxe da: egoera fixu biren arteko edozein prozesu itzulgarritatik, $\int \frac{dQ}{T}$ integralak ez du ibilbidearen inolako dependentziarik. Hori dela eta, eremu kontserbakoarren kasuan antzera, egoera-funtzio bat defini dezakegu, beraren baloreen diferentziaren bidez aipaturiko integrala neurri dezan, edozein prozesu itzulgarritan zehar. Egoera-funtzio hau entropia deitzen da, eta, definizioz, zera da:

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}$$

Beraren definiziotik aterako ditugu entropiaren dimentsioak, eta haukek izango dira:

$$[S] = [E \theta^{-1}] = M L T^{-2} \theta^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} [E] = \text{energiaren dimentsioa} \\ [\theta] = \text{tenperaturaren dimentsioa} \end{array} \right\} \text{ izanik}$$

Eta gehien erabilitako unitatea, hauxe da:

$$(\text{cal. } ^\circ\text{K}^{-1})$$

O H A R R A K :

1. Ikusia izan denez, entropia, barne-energia bezala, ezin da kalkulatu egoera konkretu bakoitzarentzat; beraren definizioz egoera biren arteko diferentzia neur baitaiteke bakarrik. Dena dela, edozein egoera baten entropiari balore konbentzional bat eman dakioke, eta hortik, diferentzien bidez, - beste edozein egoeraren entropiaren balorea lor daiteke.

2. Oso kontutan hartu behar dena, zera da:
 $\int_a^b \frac{dQ}{T}$ integralak (a) eta (b) egoeren arteko entropia-
ren diferentzia neurtu egiten du, (a) eta (b)-ren
artean asmatutako prozesua itzulgarria izanik soilik.
 Bestela aipaturiko integralak ez du inolako zentzurik.

20.7 BIGARREN PRINTZIPIOAREN BERRIKUSPENA, ENTROPIA- REN ENUNTZIATUA.

Aurrerago esanda geratu den bezala (ikus 20.2 atalaren azken partea), bigarren printzipioa zenbait era desberdinez adieraz daiteke. Orain arte ikusirik ditugunak, hauek dira: Carnot-ek proposatua eta - Clausius-ek asmatutakoa (edo forma matematikoa). Goazen orain, bigarren printzipioaren beste ikuspuntu batetatik ikustera, entropia aldetik halebila.

Kontsidera dezagun P delako prozesua, itzulgarri zein itzulezina, (a) egoera batetatik, beste (b) egoera batetarako sistema bat pasatzeko egina; eta demagun, P' delako prozesua, itzulgarria berau, sistema (b) egoeratik (a) egoerara itzultzeko modukoa. Clausius-en teoremaren bidez esan dezakeguna, zera da:

$$\int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_P + \int_b^a \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P'} = \oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Baina P' itzulgarria dela eta, entropiaren definizioz:

$$\int_b^a \left(\frac{dQ}{T} \right)_{P'} = S_a - S_b$$

Orduan, hauxe geratuko zaigu:

$$\int_a^b \left(\frac{dQ}{T} \right)_P + S_a - S_b \leq 0 \longrightarrow \boxed{\int_a^b \frac{dQ}{T} \leq S_b - S_a}$$

P delako prozesua edozein prozesu-moeta izan daitekeenez, ez dugu espezifikatu behar ezer, eta, horregatik, kendu egin dugu beraren azpi-indizea. Itzulgarria bada, aurreko espresioaren berdintasunaren zeinua hartuko dugu —entropiaren definizioa geratzen zaigularik—; eta, berriz, itzulezina bada, desberdintasunaren zeinua hartuko dugu eta —kito.

Bestaldetik, edozein prozesu batetan ondoko bi elementuek hartzen dute parte beti:

- Bata, ikertzen edo aztertzen ari garen "sistema termodinamikoa" (esate baterako, motore bat edo frigorifiko bat)
- Bestea, aipaturiko sistemarekin energia elkartraldatu egiten duen beste edozein elementu, hots, "kanpoa" delakoa.

Orain, "sistema termodinamikoak" eta "kanpokoak" osoturiko multzoa kontsidera dezakegu. Hau ere, sistema termodinamiko bat izango da, eta, gainera, —sistema isolatu bat prezeski: Sistema konposatu be-

rri honen kasuan, isolatua dela eta, haxe idatz daiteke:

$$\int_a^b \frac{dQ}{T} = 0$$

Eta hortaz, aurreko expresioa kontutan hartuz, - honela geratuko da:

$$S_b \geq S_a$$

Desberdintasun honek oso ondorio interesgarria ateratzea permititzen digu:

"Edozein prozesu batetan parte hartzen duten elementu guztiak kontutan edukiz gero, multzoaren entropiak posibilitate bi besterik ez ditu:

- Konstantea geratzea, prozesu itzulgarria bada.
- edo gehitzea, prozesu itzulezina bada"

Atera dugun ondorioa, beste era batera ere adieraz daiteke:

"sistema isolatu baten entropia ezin da inoiz gutxitu"

Haxe da, hain zuzen, termodinamikaren bigarren printzipioaren entropiaren enuntziatua.

20.8 ENTROPIA ETA DESORDENA.

Kontsidera dezagun sistema isolatu bat osotzen du en edozein elementu-multzo. Sistemaren elementuak hasierako kondizio desberdinetan aurkitzen dira (ideiak finkatzeko, 20.1 atal-ean ikusi genituen ura eta izotz zatia, aipaturiko elementuak direla supora dezakegu; orain ontziaren ormak adiabatikotzat hartu beharko ditugu, sistema osoa isolaturik gera dadin). Sistema libreki uzten badugu, zer jazotzen da? Ba, dakigun

legez, sistema bilakatu egiten da, beraren elementuek energia elkaraldatzen dutelarik, oreka termodinamikoa lortu arte (esate baterako, aurreko adibidearekin jarraituz, sistema guztia likido forman egon arte). Azken egoerara heldu eta gero, nola izango dira gauzak?

- Alde batetatik, prozesua itzulezina izan baita, sistemaren azkenengo entropiak, hasierakoak baino handiagoa izan beharko du. Honez gainera, - sistemak isolaturik irauten baitu, beraren entropiak ez da inoiz gutxituko, hots, bere balore maximoa lortuko du.

- Bestaldetik, azkenean, sistemak inolako - lanik egiteko ahalmen guztia galduko du; beraren - elementuek ezin ahal izango dute energi kantitate-rik txikiena ere elkaraldatu, homogeneitatea lortu dute eta. Beste era batetara esanik, oreka-egoera eta anabasarik handiena guztiz sinonimoak dira, hulegia.

Horrela entropia eta desordena direlako - kontzeptuak loturik daudela argi eta garbi ikus - dezakegu; desordena handiari entropia handia dago-kiolarik eta alderantziz.

Lotura hontan dautza entropiaren interpre-
taziorik sakonena eta beraren aplikaziorik garrant-
zitsuenak, baina hau guztiau liburu honen helbu-
ruaren kanpo geratzen da.

B I B L I O G R A F I A

1. M.ALONSO, E.J. FINN : "Física". Vol I "Mecánica". Vol II "Campos y Ondas". Vol III "Fundamentos Cuánticos y Estadísticos". Ed. Fondo Educativo Interamericano. 1970.
2. C. KITTEL, W.D. KNIGHT, M.A. RUDERMAN : "Berkeley Physics Course", Vol I ; Mecánica. Ed. Reverte 1968.
3. PURCELL : "Berkeley Physics Course". Vol. 2 "Electricidad y Magnetismo".
4. CRAWFORD : "Berkeley Physics Course". Vol 3. "Ondas y oscilaciones".
5. H.E. WHITE : "Física Moderna". UTEHA 1965.
6. V.L. STREETER : "Mecánica de los Fluidos" Ediciones del Castillo. Madrid 1967.
7. J. BRICARD, H. BENOIT : "Physique". Editions Medicales Flammarion. Paris 1966.
8. J. MAÑAS, R. MARTINEZ AGUIRRE : "Física General".-1967.
9. H.B. CALLEN : "Thermodynamics". 1960.
10. SEARS, ZEMANSKY : "Física".