udako
euskal
unibertsitatea

ALGEBRA BEKTORIALA

IRUINEA 1978

Banco de Vizcayak

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya

udako
euskal
unibertsitatea

UDAKO VI. EUSKAL UNIBERTSITATEA

IRUNEA 1978

ALGEBRA BEKTORIALA

Egile: Luis Bandrés

A L G E B R A   B E K T O R I A L A

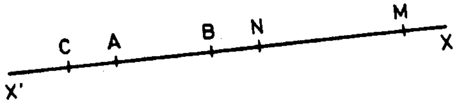
1.- BEKTOREAK ETA BEREN ERAGIKETA ARRUNTAK

1-1 BEKTOREAK

Fisika estudiatzean bektoreen ezaugarriak dauzkaten magnitude batzuk azaltzen dira. Bektoreak eta beren arteko eragiketak ikusgune fisiko batetik sor eraziko ditugu.Hiru dimentsioko espazio euklidearrean higituko gara.

Zuzen batean norantza bat onhartzen dugunean "ardatz" bat dugu.Hau da, X'X ardatza esatean,ardatz horren norantza positiboa X'-tik X-era doana dela adierazi nahi da.

Ardatz baten gainean tarte bat hartzean "zuzenki" bat dugu.Zuzenkiaren zeinua ardatzaren norantzak baldintzen du ; hau da,zuzenki bat positiboa ala negatiboa da.Esate batetara ko: X'X ardatzean zuzenki hauk ditugu



$\overline{AB} = 2$ cm

$\overline{MN} = -3$ cm

$\overline{BC} = -3$ cm

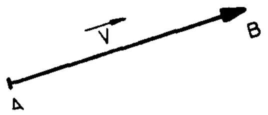
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -1$ cm

1.Irudia

Bektore bat zera da: Modulu,direkzio eta norantza dauzkan zuzen autonomoaren zati bat.Bektore bat adierazteko gezi bat erabili ohi da: Geziaren tamainak bektorearen modulua ematen digu,direkzioa geziarena da eta norantza geziaren sorburutik bururantz doana.

Bektore baten modulua distantzia bat da, hots, sorburuaren eta buruaren artean dagoen distantzia;beraz, numero bat da eta numero hau beti positiboa da.

Kalkuluan bektore bat adierazteko, gainean gezitxo bat daraman letra bat erabiltzen da, $\vec{v}$; beste batzutan, aldiz, bi letra nagusien bidez adierazten da, $\vec{AB}$: lehenengoak sorburua ematen digu, bigarrenak burua.



2. Irudia

Bektore horren modulua horrela ematen da:

$|\vec{V}| = V$ (eskalare bat da)

Argi eta garbi ikusten da, ba, zuzenkiaren eta moduluaren artean dagoen desberdintasuna.

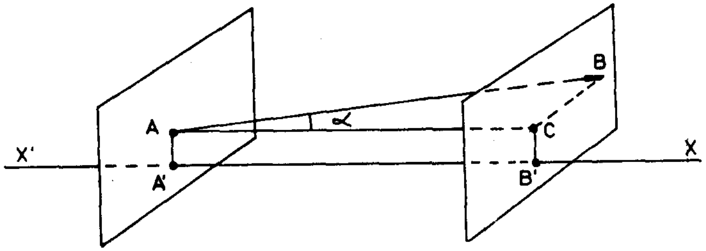
Bektore bat, berez, ez dago inon kokaturik; eta, beraz, edozein puntutara eraman daiteke, bere modulua, direkzioa eta norantza kontserbatuz noski.

Modulu, direkzio eta norantza berdineko bi bektore, "ekipolenteak" direla esaten da

1-2 PROJEKZIOAK

Ardatz baten gainean bektore bat projektatzea oso erabilgarria den eragiketa bat da.

Ikus 3. irudia



3.Irudia

Bedi $\overrightarrow{AB}$ bektorea eta $X'X$ ardatzaren gainean projekta dezagun;horretarako,bektorearen puntetatik ardatzarekiko ortogonalak diren bi launak trazatzen dira; laun hauek ardatza A eta B puntuetan guruztatzen dute;eta $\overline{A'B'}$ zuzenkia da,hain zuzen, $X'X$ ardatzaren gainean $\overrightarrow{AB}$ bektorearen projekzioa.

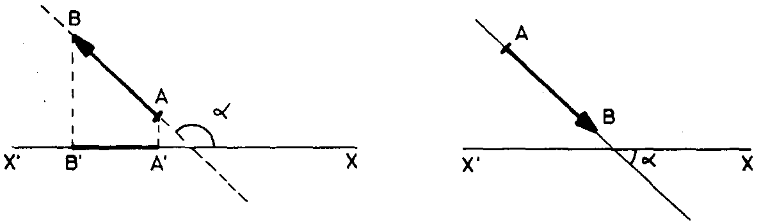
Projekzioaren magnitudea aurkitu nahi badugu zera daukagu: $A'B' = AC = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha$

Hemen, $|\overrightarrow{AB}|$ bektorearen modulua dugu

Beraz, bektore baten projekzioa zuzenki bat da eta hau positiboa ala negatiboa izan daiteke.

Askotan,projektatu behar den bektorea eta ardatza laun berean daude.

α angelua zera da: ardatzaren norantza positiboak eta bektorearen norantzak osatzen dutena.

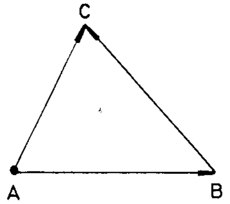


4. Irudia

1-3 BEKTOREEN BATUKETA

Emango dugun batuketaren prozedura berez definizioz eman daiteke (eta eman behar da),baina halaz guztiz ere guk nolabait Fisika aldetik justifikatu egingo dugu.Esate batetarako,jar dezagun A puntu batetan gorputz bat eta eraman dezagun beste B puntu batetara;desplazamendu hau $\overrightarrow{AB}$ bektorez adieraz dezakegu.Gero, gorputz hori B puntutik beste C puntu batetara eramatean desplazamendu berri hau $\overrightarrow{BC}$ bektorez emango dugu.Baina gorputzak jasan duen desplazamendu osoa A-tik C-raino izan da,beraz, $\overrightarrow{AC}$ bektorez eman dezakeguna da.Beraz, definizio hau ematea komenigarria da:

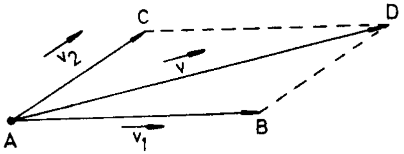
$\overrightarrow{AB}$ eta $\overrightarrow{BC}$ bi bektoreen batuketa geometrikoa $\overrightarrow{AC}$ bektorea da, eta hau honela lortzen da: bektore baten segidan bestea ipintzen da eta lehenengo bektorearen sorburutik bigarren bektorearen bururaino doan bektorea da.



5.Irudia

Egin dugun guztia A-tik C-raino "B-tik pasatuz " joatea izan da; baina A-tik C-raino joateko beste edozein puntu batetik pasatuz joan daiteke; hau da, bektore bat, $\overrightarrow{AC}$ adibidez, beste bi bektoretan deskonposa daiteke eta deskonposaketa hori mota infinitotan egin daiteke.

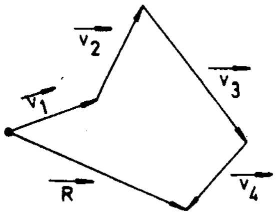
Laun batetan higitzen bagara, batuketa egiteko beste era bat badago : bi bektoreak sorburu amankomun batekin hartzen dira eta paralelogramoa osatzen da; paralelogramo horren diagonala bi bektoreen batura izango da



$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

6.Irudia

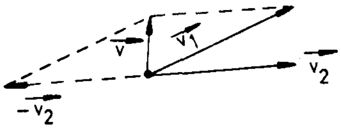
Eman dugun definizioa behin eta berriz aplikatzean behar hainbat bektore batu dezakegu; hau da, bektore guztiak bata bestearen segidan ipintzen dira, eta lehenengo bektorearen sorburutik azkenekoaren bururaino doan bektorea, beste guztien batura da, 7.irudian.



7.Irudia

$\vec{V_1}$ ken $\vec{V_2}$ egin behar badugu $\vec{V_2}$-aren aurkako bektorea aurkituko dugu eta gero $\vec{V_1}$-arekin batuko dugu, hau da,

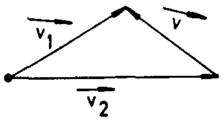
$$\vec{V} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + \left(-\vec{V_2}\right)$$



$$\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V}$$

9.Irudia

Kendura lortzeko beste prozedura ere ba dago:hau da, bi bektoreak sorburu amankomun batekin marrazten dira eta bigarrenaren (kentzailea) burutik lehenengoaren (kenkizuna) burura doan bektorea da.



$$\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V}$$

10.Irudia

1-5 BEKTORE BATEN ETA ESKALARE BATEN ARTEKO BIDERKAKETA

Paraleloa diren $\vec{V_1}$ eta $\vec{V_2}$ bi bektore m erlazio algebraikoz daudenean,horrela adierazten dugu

$$\vec{V_1} = m\,\vec{V_2}$$

Orduan $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ bektorearen eta m eskalarraren arteko biderkadura dela esan ohi da.

Eragiketa hau,hots,biderkaketa, batuketakin konbinatzean beste eragiketa mota zabalago bat lor daiteke,hau da:

$$m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} + \cdots\cdots + m_k\vec{V_k}$$

hau,noski, ezagutzen ditugun erregelak erabiliz erdiets zakegun bektore bat da.

Batuketa horrek zero ematen badu, hau da, baldin $m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}+\cdots+m_k\vec{v_k}=0$ bada, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots \vec{v_k}$ bektoreen artean erlazio lineal bat dago; hots, bektore horik ez dira "linealki independienteak".

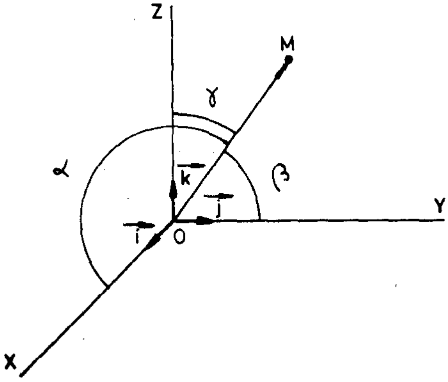
(1) ikusita, bi bektoreen arteko kenketa batuketaren kasu berezi bat dela egiztatzen dugu, hau da, $m_1 = 1$ eta $m_2 = -1$ direnekoa.

1-6 ARDATZ ZUZENANGELUARREN BIDEZKO BEKTOREEN ADIERAZPENA

Ardatz baten "bektore unitarioa" zera da: ardatzaren direkzioa eta norantza duena, eta moduluz unitatea balio duena.

Ox, Oy eta Oz hiru ardatz zuzenangeluarreko erreferentzi triedro batean, bektore unitarioak $\vec{i}, \vec{j}$ eta $\vec{k}$ hizkiez adierazi ohi dira.

Triedroaren norantza, positibotzat, "torlojuaren erregela"-ren araberakoa onhartuko dugu; hots, Oz ardatzaren gainean torloju bat ipintzean, Ox ardatzetik Oy ardatzerantz bide laburrenetik biratzen badugu, torlojuaren aurrerapenak Oz ardatzaren norantza positiboa emango dugu. Eta horrela beste ardatzekin.



11. Irudia

M puntu baten koordenatuak x, y, z direla esatean zera esaten da: $\vec{OM}$ bektorea horrela eman daitekeela

$$OM = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$\vec{v}$ bektorea erreferentzi triedrotan adieraztea zera da, bektorearen hiru ardatzen gainean v_x, v_y eta v_z projekzioak aurkitzea eta gero $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ batuketa horren bidez ematea.

Bektorearen modulua v bada, hots, $|\vec{v}| = v$, projekzioak zera dira:

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos\alpha \\ v_y &= v \cos\beta \qquad (1) \\ v_z &= v \cos\gamma \end{aligned}$$

Pitagorasen teoremaren arabera, bektorearen modulua honela lor daiteke:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

hau da:

$$|\vec{v}| = v\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

eta, hemendik, hain ezaguna den berdintza geometrikoa azaltzen da:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Batzutan, bektoreak hiru ardatzekin osatzen dituen angeluak ezagutu beharko ditugu, horretarako (1) eta (2) berdintzak baliatuz:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

Kosinu hauek direkzio bat definitzen dute, eta "kosinu zuzentzaileak" deitu ohi dira.

Bektore bat ezagutzeko, aski da bere modulua eta bere direkzioaren bektore unitarioa ezagutzea.

$$\vec{v} = v\cdot\vec{u}$$

$\vec{u}$, bektore unitarioa.

baina $\vec{u} = \vec{i}\cdot\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ denez gero

$$\vec{v} = v\left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma\right)$$

hau da, edozein bektore bat bere moduluaren eta kosinu zuzentzaileen bidez eman daiteke.

Bi bektore ekipolenteak direnean, hiru ardatzen gainean ematen dituzten projekzioak berdinak dira.

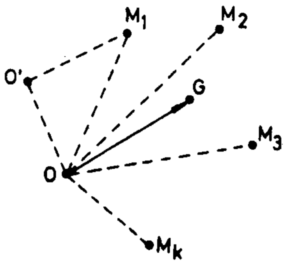
Bektore hutsak,hots, $\overrightarrow{v} = 0$ bektoreak dauzkan koordenatuak zero dira: hau da, $v_x = 0 \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$

1-7 BARIZENTRUAK

Barizentruaren kontzeptua ondoko teorematik sor eraz dezakegu.

Teorema: Bitez $M_1, M_2 \ldots M_k$ puntuak eta bakoitzari $m_1, m_2, \ldots m_k$ koefizientea egokitzen zaio, $m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_k$ -aren batura zero izan gabe,

(1) berdintzak definitzen digun G puntua O puntuaren posizioarekiko independentea da.



12.Irudia

Berdintza horren bidez,G puntuaren posizioa erabat emana gelditzen da; hau da, $\overrightarrow{OG}$ bektorea erdiets dezakegu.

Demostra dezagun teorema hau: Har dezagun O' beste puntu bat eta suposa dezagun $\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_i}$ berdintza guztiak idatzirik daudela. Horietako bakoitzari egokitzen zaion koefizientearekin biderkatu ondoren, zera dugu:

$$
\begin{aligned}
m_1\overrightarrow{OM_1} &= m_1\overrightarrow{OO'} + m_1\overrightarrow{O'M_1} \\
m_2\overrightarrow{OM_2} &= m_2\overrightarrow{OO'} + m_2\overrightarrow{O'M_k} \\
&\vdots \\
m_k\overrightarrow{OM_k} &= m_k\overrightarrow{OO'} + m_k\overrightarrow{O'M_k}
\end{aligned}
$$

eta horien batuketa:

$$\Sigma\, m_i\overrightarrow{OM_i} = (m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k)\,\overrightarrow{OO'} + \Sigma\, m_i\overrightarrow{O'M_i}$$

baina (1) kontutan harturik

$$(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k)\,\overrightarrow{OO'} + \Sigma\, m_i\overrightarrow{O'M_i} = (m_1+m_2+\cdots\cdots m_k)\,\overrightarrow{OG}$$

eta OG-ren ordez $\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'G}$ ipintzen badugu hauxe izango dugu:

$$(m_1+m_2+\cdots+m_k)\overrightarrow{OO'}+\sum m_i\,\overrightarrow{O'M_i}=(m_1+m_2+\cdots+m_k)(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'G})$$

hau da,

$$m_1\,\overrightarrow{O'M_1}+m_2\,\overrightarrow{O'M_2}+\cdots+m_k\overrightarrow{O'M_k}=(m_1+m_2+\cdots+m_k)\overrightarrow{O'G}$$

eta G puntu berdina sortzen zaigu beste O' puntua hartu ondoren. Beraz, teorema demostratuta daukagu.

Oharra: O jatorripuntu bezala G barizentrua bera onhartzen badugu, (1) berdintza oinharrizkoa honela bilakatzen da:

$$m_1\,\overrightarrow{GM_1}+m_2\,\overrightarrow{GM_2}+\cdots+m_3\overrightarrow{GM_3}=0$$

Barizentruaren koordenatuak

Bitez ondoko puntuok:

$$M_1(x_1,y_1,z_1);\ M_2(x_2,y_2,z_2);\cdots\cdots\ M_k(x_k,y_k,z_k)$$

(1) berdintza bektorialak beste hiru berdintza hauk ematen dizkigu

$$x_G=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_kx_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}\qquad y_G=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ky_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}$$

$$z_G=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_kz_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}$$

eta x_G, y_G, z_G G barizentruaren koordenatuak dira.

1-8 BIDERKAKETA ESKALARRA

Ardatz baten gainean bektore bat projektatzeak, bi bektoreen arteko ariketa berri bat definitu beharra sortzen digu: ariketa hau bi bektoreen arteko biderkaketa eskalarra deitzen da; bere balioa zera da: bi bektoreen moduluen eta beren artean osatzen den angeluaren kosinuaren biderkadura

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=|\vec{V_1}|\cdot|\vec{V_2}|\cdot\cos\,(\widehat{V_1V_2})$$

edo beste era batetan: bektore baten modulua $|\vec{V_2}|$ bider beste bektorearen lehenengoaren gaineko projekzioa $\left[|\vec{V_1}|\cos(\widehat{V_1V_2})\right]$

Beraz, nahiz eta bi bektore erabili $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ ez da bektore bat izango, eskalare bat baizik. Kontzeptu hau oso erabilgarria da Fisika alorrean, bederen; esate baterako, lana biderkadura eskalar baten bidez definitzen da.

Propietateak

Biderkaketa eskalarra trukakorra da. Hau da, kosinu funtzio bikoiti bat denez gero

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \vec{V_2}\cdot\vec{V_1}$$

Biderkaketa eskalarra banakorra da: hau da, batura baten projekzioa projekzioen batura denez gero

$$\vec{V'}\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}+\cdots+\vec{V_k}\right) = \vec{V'}\cdot\vec{V_1}+\vec{V'}\cdot\vec{V_2}+\cdots+\vec{V'}\cdot\vec{V_k}$$

Biderkaketa eskalarra ez da elkarkorra, hau da $\vec{V_1}\left(\vec{V_2}\cdot\vec{V_3}\right) \neq \left(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\right)\cdot\vec{V_3}$

zeren $m\vec{V_1} \neq n\vec{V_3}$ bait da.

Bi bektoreak perpendikurlarrak direnean edo horietako bat zero denean, beren biderkadura eskalarra zero da $(\cos 90 = 0)$. Beraz, zero ez diren bi bektoreren arteko biderkadura eskalarra zero bada, bi bektore horik perpendikularrak direla adierazten digu, eta alderantziz.

Ardatz zuzenangeluarren bidezko adierazpena

Propietate banakorra dela eta

$$\vec{V}\cdot\vec{V'} = \left(V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}\right)\left(V'_x\vec{i}+V'_y\vec{j}+V'_z\vec{k}\right) =$$
$$= V_x V'_x\,\vec{i}\cdot\vec{i} + V_x V'_y\,\vec{i}\cdot\vec{j}+\cdots\cdots$$

baina $\vec{i}$, $\vec{j}$ eta $\vec{k}$ ortogonalak direnez gero:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{k}=0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{i}=0 \qquad \text{etab.}$$

eta $\vec{i}\cdot\vec{i}=1 \qquad \vec{j}\cdot\vec{j}=1 \qquad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

beraz, $\vec{i}\cdot\vec{i}$, $\vec{j}\cdot\vec{j}$ eta $\vec{k}\cdot\vec{k}$ daukaten batugaiak gelditzen dira soilki; hau da

$$\vec{V}\cdot\vec{V'} = V_x\cdot V'_x + V_y\cdot V'_y + V_z\cdot V'_z$$

Bektore bat bider bera,honela adierazten da $\vec{V}\cdot\vec{V}=\vec{V}^2=V^2$;
hemen $|\vec{V}|=V$

Adibide bat

Bi direkzioen arteko angelua:eman ditzagun bi direkzio beren bektore unitarioen bidez $\vec{u}_1\,(\ell_1, m_1, n_1)$ eta $\vec{u}_2\,(\ell_2, m_2, n_2)$

$$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = \ell_1\cdot\ell_2 + m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2 = |\vec{u}_1|\,|\vec{u}_2|\cos\alpha$$

beraz,

$$\cos\alpha = \ell_1\cdot\ell_2 + m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2$$

1-9 BIDERKAKETA BEKTORIALA

$\vec{V}_1$ eta $\vec{V}_2$ bi bektoreen arteko biderkaketa bektoriala honela definitzen da: beste $\vec{v}$ bektore bat da,non v:

1- $\vec{V}_1$ bektorearekiko ortogonala da

2- $\vec{V}_2$ bektorearekiko ortogonala da

3- bere norantzak,(V_1, V_2, V) tiedroa positiboa izan arazten du(torlojuaren erregela)

4- bere modulua $|\vec{V}| = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|\sin(\widehat{V_1V_2})$ da;hemen, $\widehat{V_1V_2}$ angelua 180º baino txikiagoa dena da; hots, sinu positibokoa.

Aurreneko bi baldintzak honela eman daitezke: biderkadura bektoriala, $\vec{V}_1$ eta $\vec{V}_2$ bektoreek determinatzen duten launarekiko perpendikularea da.

Hirugarren baldintza dela eta,biderkaketa hau ez da trukakorra; baina bakarrik norantza aldatzen du

$$\vec{V} = \vec{V}_1\times\vec{V}_2 = -\vec{V}_2\times\vec{V}_1$$

Biderkaketa bektoriala zero izateko,bektoreak zero ez badira, angeluak zero izan behar du.Beraz, horretarako baldintza beharrezkoa eta nahikoa zera da, bi bektoreak paralelo izatea.

Biderkaketa bektoriala ez da elkarkorra

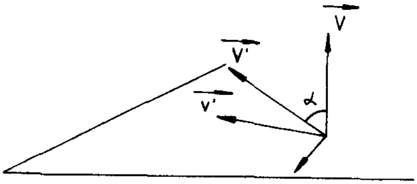
$$\vec{V}_1\times(\vec{V}_2\times\vec{V}_3) \neq (\vec{V}_1\times\vec{V}_2)\times\vec{V}_3$$

aurrerago ikusiko dugu biderkaketa hirukoitz hauen esangura

Teorema: Biderkaketa bektoriala banakorra da

$$\vec{V}\times(\vec{V'}+\vec{V''}) = \vec{V}\times\vec{V'} + \vec{V}\times\vec{V''}$$

Teorema hau demostratu baino lehen,beste hau demostratuko dugu: $\vec{V}\times\vec{V'}$ eta $\vec{V}\times\vec{v'}$ bektoreak berdinak dira,baldin $\vec{v'}$ bektorea $\vec{V'}$ bektorearen $\vec{V}$-rekiko perpendikularra den launaren gaineko projekzioa bada



13.Irudia

Hori egia da,zeren $\vec{V}\times\vec{V'}$ eta $\vec{V}\times\vec{v'}$ bektoreek zera bait dute:

-direkzio berdina,laun bera definitzen bait dute

$\vec{V}$ eta $\vec{V'}$ edo $\vec{V}$ eta $\vec{v'}$

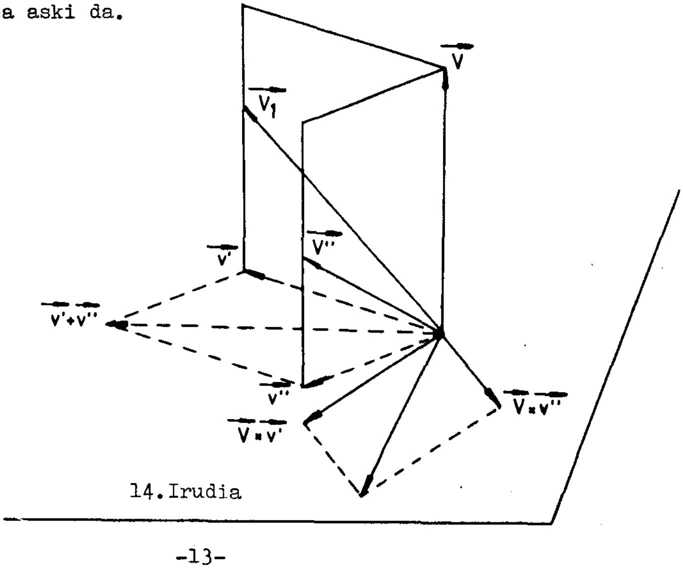
-norantza berdina,ordena berdinez aipatzen ditugu eta.

-modulu berdina $|\vec{V'}|\sin\alpha=|\vec{v'}|$ delako

Beraz,hori ikusita demostra dezagun gure teorema;horretarako

$$\vec{V}\times(\vec{v'}+\vec{v''})=\vec{V}\times\vec{v'}+\vec{V}\times\vec{v''}$$

demostratzea aski da.



14.Irudia

Erraztasuna dela eta, $\vec{V}$-aren modulua unitatea hartzen badugu (1) berdintza argi eta garbi gelditzen da:

$\vec{V}\times(\vec{V'}+\vec{V''})$: $\vec{V'}+\vec{V''}$ bektorea hartu eta 90º biratzea da
$\vec{V}\times\vec{V'}$: $\vec{V'}$ bektorea hartu eta 90º biratzea da
$\vec{V}\times\vec{V''}$: $\vec{V''}$ bektorea hartu eta 90º biratzea da

beraz, (1) hauxe da $\vec{V'}+\vec{V''}=(\vec{V'}+\vec{V''})$ baina $\vec{V}$ inguruan 90º-tako biraketa bat egin ostean.

<u>Ardatz zuzenangeluarren bidezko adierazpena</u>

Bitez $\vec{V}$ eta $\vec{V'}$ bektoreak:

$$\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$$
$$\vec{V'}=V'_x\vec{i}+V'_y\vec{j}+V'_z\vec{k}$$

propietate banakorra dela eta:

$$\vec{V}\times\vec{V'}=V_xV'_x\;\vec{i}\times\vec{i}+V_xV'_y\,\vec{i}\times\vec{j}+\cdots\cdots\cdots$$

baina $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$
$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ $\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ $\quad\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

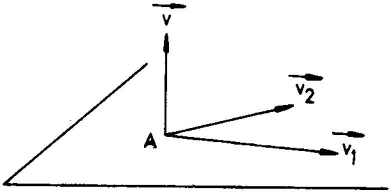
eta $\vec{V}\times\vec{V'}=(V_yV'_z-V_zV'_y)\vec{i}+(V_zV'_x-V_xV'_z)\vec{j}+(V_xV'_y-V_yV'_x)\vec{k}$

Formula hau gogoratzeko, errazagoa da biderkaketa bektoriala determinante baten bidez ematea;hots,

$$\vec{V}\times\vec{V'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ V_x & V_y & V_z\\ V'_x & V'_y & V'_z\end{vmatrix}$$

-Propietate bat:

Biderkaketa bektorial baten modulua,bi bektoreek osatzen duten triangeluaren azalera baino bi aldiz handiagoa da.

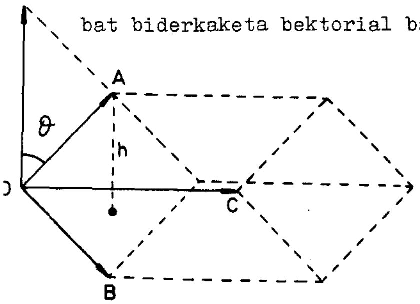


Azalera $\widehat{A}_{V_1V_2}=\frac{1}{2}\,\overline{AV_1}\cdot\overline{AV_2}\,\sin\hat{A}$

15.Irudia

1-10 BIDERKAKETA NAHASIA

Definizioz zera da: biderkaketa eskalar bat, biderkagaietako bat biderkaketa bektorial bat izanik



$$\vec{OA}\cdot(\vec{OB}\times\vec{OC})$$

16.Irudia

Hiru bektoreen bidez lor daiteken paralelogramoaren bolumena, hiru bektore horien biderkaketa nahasiaren bidez kalkula daiteke.

Bolumena = altuera x oinharriaren azalera

$$\text{Bolumena} = |\vec{OA}|\cos\theta \cdot |\vec{OB}\times\vec{OC}| = \vec{OA}\cdot(\vec{OB}\times\vec{OC})$$

$$\text{Bol} = \left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

determinante honen emaitza positiboa ala negatiboa izan daiteke . Negatiboa balitz bi ertzen ordena aldatzea aski litzateke positiboa lortzeko.Halaz ere.bolumena kalkulatzean komunigarriena zera da, zeinua gogotan ez hartzea.

Hiru bektoreak laun batetan badaude,osatzen duten bolumena zero da;eta alderantziz:hiru bektorek,launkide izateko,baldintza hau bete behar dute

$$\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=0$$

1-11 BIDERKAKETA BEKTORIAL BIKOITZA.BESTE BIDERKAKETAK

$\vec{V_2}\times\vec{V_3}$ bektore bat denez gero, $\vec{V_1}$ beste bektore batekin biderka dezakegu $\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3})$ beste bektore bat lortuz.Bektore hau $(\vec{V_2}\times\vec{V_3})$ bektorearekiko perpendikularea izango da.Baina hau(hots, $\vec{V_2}\times\vec{V_3}$

bektorea) $\vec{V_2}$ eta $\vec{V_3}$ bektoreek osatzen duten launarekiko perpendikularea da; beraz, $\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3})$ bektorea $\vec{V_2}$ eta $\vec{V_3}$ bektoreek osatzen duten launean dago eta horrela idaz dezakegu.

$$\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3}) = m\vec{V_2} + n\vec{V_3}$$

eragiketa batzuk egin ondoren m eta n koefizienteak aurki daitezke.Dena dela, oso lan aspergarria denez gero emaitzak emango ditugu:

$$m = \vec{V_1}\cdot\vec{V_3} \qquad n = -\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$$

beraz, $\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3}) = (\vec{V_1}\cdot\vec{V_3})\vec{V_2} - (\vec{V_1}\cdot\vec{V_2})\vec{V_3}$

eta $\vec{V_1}\times(\vec{V_2}\times\vec{V_3}) \neq (\vec{V_1}\times\vec{V_2})\times\vec{V_3}$

ez dauka zentzurik $\vec{V_1}\times\vec{V_2}\times\vec{V_3}$ idazteak.

Hiru bektore baino gehiago erabiltzen dituzten biderkaketak ikusitako kasuetara erakar daitezke.Esate bateterako $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$

$\vec{c}\times\vec{d} = \vec{u}$ egiten badugu, zera daukagu $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{u}$

hau da $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{u} = \vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = \vec{a}\,[(\vec{b}\cdot\vec{d})\cdot\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}] =$

$$= (\vec{b}\cdot\vec{d})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$

Baldin $\vec{c} = \vec{a}$ eta $\vec{d} = \vec{b}$ Langrange-ren identitatea daukagu: $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

1-12 BEKTORE TINKOAK

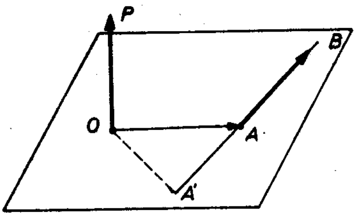
Orain arte ikusi eta erabili ditugun bektoreak askatuak ziren;hots, puntu batetik beste ra eramatean bektorea bera zen.Analitika aldetik,honelako bektore batek lau baldintza eskatzen ditu: adibidez,modulua eta hiru kosinu zuzentzaileak

Bektore bat puntu batetan tinkatzen dugunean "bektore tinko" bat dugu;hauetako bat emateko sei datu eman behar ditugu:adibidez, bere sorburuaren eta buruaren posizioak.

1-13 BEKTORE TINKO BATEN PUNTU BATEKIKO MOMENTUA

Bitez O puntu bat eta $\vec{AB}$ bektore tinko bat O-rekiko $\vec{AB}$-ren momentua, definizioz, ondoko OP bektore hau da

$$\vec{OP} = \vec{OA} \times \vec{AB}$$



17. Irudia

AB bektorearen posizioa bere zuzenaren gainetik labaintzen bada ere, beste posizio batera pasatuz, O-rekiko momentua ez da aldatzen. Hau da:

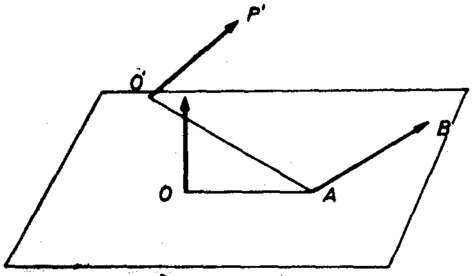
$$\vec{OP'} = \vec{OA'} \times \vec{AB} = (\vec{OA} + \vec{AA'}) \times \vec{AB} = \vec{OA} \times \vec{AB} + \vec{AA'} \times \vec{AB}$$

eta bigarren batukagai hau zero da, zeren $\vec{AA'}$ eta $\vec{AB}$ bektoreak zuzenkideak dira; beraz $\vec{OP'} = \vec{OP}$

Hau demostratzean, zera demostratu dugu orobat: bektore tinkoarentzat eman dugun momentuaren definizioa "bektore labainkorretara" ere heda daitekela (bektore baten ekintza ez bada aldatzen bektore horren sorburua bere zuzenaren gainetik labaintzean, bektore hori labainkorra dela, esan ohi da)

<u>Oinharrizko teorema</u>: Teorema honen bidez, O puntuaren posizioa aldatzean momentuaren aldaketa lor dezakegu.

O puntuarekiko eta O' puntuarekiko $\vec{AB}$ bektore baten momentuen aldakuntza bektoriala zera da $\vec{O'O} \times \vec{AB}$



18.Irudia

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O'O} \times \overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

zeren

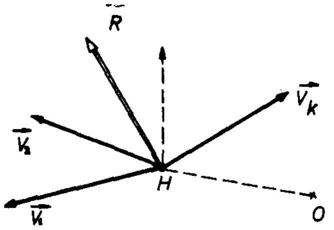
$$\left.\begin{aligned} O'P' &= \overrightarrow{O'A} \times \overrightarrow{AB} \\ OP &= \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} \end{aligned}\right\} \overrightarrow{O'P'} - \overrightarrow{OP} = \left(\overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{OA}\right) \times AB = O'O \times AB$$

(d.n.z.b.)

Bektoreak bateratzaileak badira (hots, beren zuzen guztiak puntu berdin batetik pasatzen badira, ondoko teorema hau daukagu:

Ordezkariarén momentua,osagaien momentuen batura da.

Demostrazioa:



19.Irudia

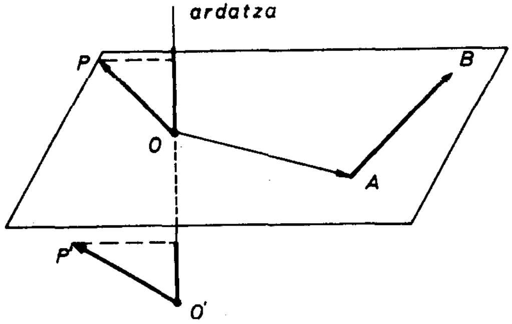
R-aren momentua = $\overrightarrow{OH} \times \vec{R} = \overrightarrow{OH} \times \left(\vec{V_1} + \vec{V_2} + \cdots + \vec{V_k}\right) =$

$$\overrightarrow{OH} \times \vec{V_1} + \overrightarrow{OH} \times \vec{V_2} + \cdots\cdots + \overrightarrow{OH} \times \vec{V_k} \qquad \text{(d.n.z.b.)}$$

1-14 BEKTORE BATEN ARDATZ BATEKIKO MOMENTUA

Edo momentu eskalarra,definizioz zera da: ardatzaren edozein punturekiko bektorearen momentuaren eta ardatzaren bektore unitarioaren arteko biderkadura: $\overrightarrow{OP} \times \vec{u}$. Beraz, ardatzaren gaineko momentuaren projekzioa da.

Definizio honek zentzurik edukitzeko, $\vec{OP} \times \vec{u}$ -k konstante izan behar du ardatzaren edozein O puntu kontsideratzean. Demostra dezagun hau:



20.Irudia

$$\vec{O'P'} \cdot \vec{u} = \left(\vec{OP} + \vec{O'O} \times \vec{AB}\right) \cdot \vec{u} = \vec{OP} \cdot \vec{u} + \left(\vec{O'O} \times \vec{AB}\right) \cdot \vec{u}$$

baina bigarren batukagai hau zero da, zeren $\vec{O'O} \times \vec{AB}$ bektorea $\vec{O'O}$ bektorearekiko (hots, $\vec{u}$-rekiko) perpendikularea da; eta, beraz, $\vec{u}$-rekin biderkatzean zero emango digu.

Horregatik, $\vec{O'P'} \cdot \vec{u} = \vec{OP} \cdot \vec{u}$ (d.n.z.b.)

1-15 BEKTORE LABAINKORRAK

Orain baino lehen definituak ditugu: beren zuzenaren gainetik labain daitezkeenak. Analitika aldetik bost kondizio behar ditu: adibidez lau kondizio zuzena emateko, eta boskarrena modulua adierazteko. Edo, askotan ematen den bezala, bektorearen hiru ardatzekiko projekzioak, askatua izango balitz bezala (x,y,z) eta koordenatuen jatorriarekiko momentuaren hiru osagaiak (L,M,N). Horrela ematean, sei kondizio eman ditugula dirudi; baina horietatik bost bakarrik dira independenteak, zeren, bektorea eta momentua perpendikulareak direnez gero, sei kondizio horien artean beti zera betetzen da:

$$XL + YM + ZN = 0$$

1-16 EREMU BEKTORIALA

Gai hau gerorago sakonkiago begiratuko dugu. Dena dela, hurrengo ikasgaian bektore-eremu berezi bat estudiatuko denez gero, hemen definizio bat ematea zilegi dirudi. Baldin espazioko eremu baten puntu guztietan bektore definitu bat badago, eremu horretan bektore-eremu bat dagoela esan ohi da.

2.- BEKTORE LABAINKORREKO SISTEMAK

2-1 SARRERA

Bektore labainkor multzo batek bektore labainkorreko sistema bat osatzen du.Kontura gaitezen bektore hauek bakoitzak beren zuzen propioan jarraitu behar dutela.Hau dela eta,bektoreok erabiltzerakoan arreta piska bat eduki behar da,eta ikusi dugun momentuen toeria erabiltzea komeni da.

Bektore labainkorreko sistema batean zera kontutan hartu behar dugu:

a) $\vec{R}$, ordezkari geometrikoa: bektore hau askatua da,eta bektore labainkor guztien batura da,askatuak balira bezala.

b) Puntu batekiko momentu ordezkaria:hau da, puntu horrekiko bektore guztien momentuen batura.Bektoreak labaintzen direnean,momentu ordezkaria ez da aldatzen.

$$\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \cdots\cdots + OM_k$$

baina,noski, O puntu batekiko ala O' beste puntu batekiko, diferentea da.

Beraz, bektore labainkorreko sistema batek bektore-eremu bat determinatzen du,hots, "momentu ordezkarien eremua"

2-2 TEOREMA

Edozein momentu ordezkariren eremua determinatzeko,zera bakarrik ezagutu behar da:

a) $\vec{R}$ ordezkari geometrikoa

b) Edozein puntu batekiko $\vec{OM}$ momentu ordezkaria

Teorema honek hau esan nahi du: bi elementuok,hots, $\vec{R}$ eta $\vec{OM}$ ezagutu ondoren, nahiz eta $\vec{A_1B_1}, \vec{A_2B_2}, \ldots$ sistemaren bektoreak ez eaagutu,edozein puntutan sistemaren jokaera erabat ezaguna dela.

Teorema hau demostratzeko 1-13-ko oinharrizko teoremaren(1) berdintza bektore bakoitzari ezarri behar diogu:

$O'M_1' = \vec{OM_1} + \vec{O'O} \times \vec{A_1B_1}$ eta guzti hauen batuketak zera eman-

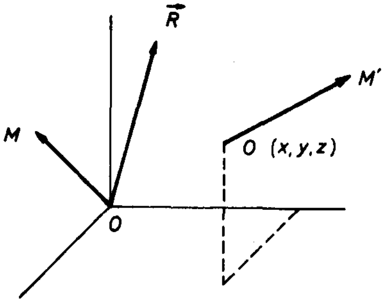
go digu:

$$\vec{O'M'} = \vec{OM} + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

<u>Teoremaren era analitikoa:</u>

Bitez $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ ordezkari geometrikoa eta $\vec{OM} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ O puntuarekiko (koordenatuaren jatorriarekiko, alegia) momentu ordezkaria. Beste $O'(x, y, z)$ puntuan $O'M'$ momentu berrien projekzioak L', M' eta N' badira, (1) berdintza honela idatzi behar da:

$$\begin{aligned} L' &= L - (yZ - zY) \\ M' &= M - (zX - xZ) \\ N' &= N - (xY - yX) \end{aligned} \qquad (2)$$



21.Irudia

(2) berdintzak gogotan hartzeko (1) berdintza determinante eran idaztea egokiagoa da; beraz

$$\vec{O'M'} = \vec{OM} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

zeren bektorearen osagarriak -x,-y,-z bait dira.

<u>Kasu bereziak:</u>

1/ $\vec{R} = 0$ bada, oinharrizko berdintza honela gelditzen da: $\vec{OM}$ =konstante. Sistema bektore askatu batez determinatuta gelditzen da (hots, momentuaz) eta hau espazioko puntu guztietan berdina da: sistema pare bat labur daitekela esan ohi da.

2. R-arekiko paralelo den OO' zuzen batetik higitzen bagara, zuzenaren puntu guztietan $\vec{OM}$ berdina da. Hau egia da $\vec{O'O}\times\vec{R}=0$ delako eta beraz, (1) berdintzak $\vec{O'M'}=\vec{OM}$ ematen digu.

__Teorema:__ Ordezkariaren gaineko momentu ordezkariaren projekzioa konstantea da. Hau da: $\vec{R}\cdot\vec{OM}=\vec{R}\cdot\vec{O'M'}=\vec{R}\cdot\vec{O''M''}=\cdots$ (3) biderkadura eskalar horik konstanteak dira.

Hori demostratzeko, oinharrizko berdintza $\vec{R}$ ordezkariarekin eskalarki biderkatzea besterik ez dago:

$$\vec{R}\cdot\vec{O'M'}=\vec{R}\cdot\vec{OM}+\vec{R}\left(\vec{O'O}\times\vec{R}\right)$$

bigarren batukagai hau zero da, beraz, (3)-a lortzen dugu.

(3) berdintza dela eta $LX+MY+NZ=kte.$ eta honi "bigarren aldaezkorra" deitzen zaio (sistemaren lehenengo aldaezkorra $\vec{R}\,(X,Y,Z)$ dugu.

(3) berdintzako konstantea zero balitz ($\vec{R}$ zero izan gabe) momentua zero litzateke ala ordezkaria eta momentua perpendikularak lirateke biderkadura eskalarra zero izanik. Bi kasu hauetan sistema bektore bakar batera labur daiteke.

2.3 ARDATZ ZENTRALA

Lehen ikusi dugun teorema dela eta, espazioko puntu batetan momentu ordezkaria minimoa izango da, puntu horretan momentu ordezkaria eta $\vec{R}$ ordezkaria paraleloak badira: $|\vec{R}|\,|\vec{OM}|\cos(\widehat{\vec{R}\,\vec{OM}})$ denez gero, kosinua maximo denean (hots, paralelismoa dagoenean), $\vec{OM}$ minimoa izango da; beraz, puntu horretatik $\vec{R}$ ordezkariarekin paraleloa den zuzen bat pasatuko da, eta zuzen horren edozein puntutan momentu ordezkaria minimoa izango da; zuzen hori sistemaren " ardatz zentrala" deitzen da.

Ardatz zentralaren ekuazioa $\vec{R}\,(XYZ)$ ordezkariaren eta $\vec{O'\mu}(l,m,n)$ momentu minimoaren arteko paralelotasunarena da, hots,

$$\frac{l}{X}=\frac{m}{Y}=\frac{n}{Z}$$

eta L,M,N jatorriarekiko momentuaren osagaiak baldin badítugu, ardatz zentralaren ekuazioa hauxe izango da:

$$\frac{L\,(yZ-zY)}{X}=\frac{M-(zX-xZ)}{Y}=\frac{N-(xY-yX)}{Z}$$

hemen, x,y,z ardatz zentraleko puntu edozein baten koordenatuak dira.

2-4 SISTEMA BALIOKIDEAK

Definizioz: bektore labainkorreko bi sistemak, baliokideak izateko, zera bete behar dute:

a) Ordezkari geometrikoa berdina izatea.

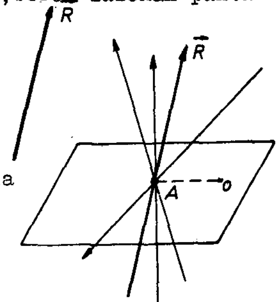
b) Espazioko edozein puntuarekiko momentu ordezkaria berdina izatea.

Bigarren baldintzari buruz: 2-2-ko teorema dela eta, puntu bakar batetan momentu ordezkaria berdina izan dezaten aski da, lehenengoa betetzen bada, hain zuzen.

Beraz, sistema edozein bat edukita, ahal den sistema baliokide laburrena bilakatu behar da: ahal bada bektore bat ala bi.

Sistema orokor baten laburpena estudiatu baino lehen, zenbait kasu berezi ikusiko dugu.

1. Bektoreak bateratzaileak direnean, hots, beren zuzenak puntu batetik pasatzen direnean.

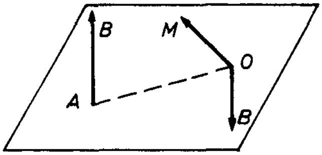


22. Irudia

A sortaren erpinarekiko momentuak hartzean, momentu ordezkaria zero izango da; eta, beraz, sistema baliokidea A-tik labain daitekeen $\vec{R}$ ordezkaria da. Hau da, sistema honek bere ordezkaria beste sistemek bezalakoa du, eta A puntuan momentu ordezkaria berdina; beraz, baliokideak dira.

2. Batura geometrikoa zero izatea:

Orduan $\vec{OM} = \vec{O'M'} = kte.$,momentuen eremua uniformea da(hau da, espazioko puntu guztietan momentu ordezkaria berdina da) eta bektore askatu bat bezala kontsidera daiteke:sistema <u>pare bat</u> bilaka daitekeela esan ohi da.Bektore pare bat zera da: Modulu eta direkzio berdineko eta norantzaz aurkako bektore bi (kasu honetan bektoreak labainkorrak dira).



23.Irudia

Ematen diguten sistema eta bektore pare bat baliokideak direla frogatzeko har dezagun $\vec{OM}$ momentu ordezkaria;jar dezagun OB edozein bektore bat O puntuan eta aurkakoa den $\vec{AB}$ bestea A puntuan, A puntu horrek hauxe bete behar du: $\vec{OA} \times \vec{AB} = \vec{OM}$

$\vec{AB}$ eta $\vec{OB'}$ bektoreen sistema eta eman diguna baliokideak dira (hau da, O puntuan frogatza egiten badugu zera lortuko dugu, ordezkari geometrikoa berdina)eta momentu ordezkaria berdina ($\vec{OB'}$ bektoreak zero emango digu $\vec{AB}$ bektoreak eman digutena, baldintza horrekin hartu dugu eta).

Beste baldintza batzuk jarfzen ez badizkigute behintzat,infinitu bektore pareko sistema beste horrelako sistemarekiko baliokidea den aurki dezakegu.

Zera frogatu dugu: sistema bat bektore pare batera laburtzeko beharrezkoa eta nahikoa da sistemaren ordezkaria zero $\vec{R} = o$ izatea.

Mekanika aldetik,gorputz batek jasaten duen indarren ordezkaria zero bada, gorputza ez da trasladatzen baina bira daiteke; bira ez dadin, momentuak ere zero,$\vec{OM} = 0$, izan behar du.

3. Sistema baten $\vec{R}$ ordezkaria zeroz desberdina bada, eta espazioko o puntu batetan $\vec{OM} = \vec{O'O} \times \vec{R}$

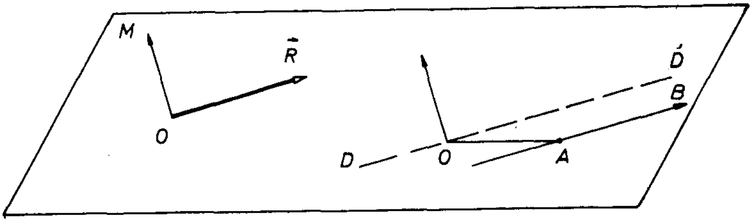
Oinharrizko teorema dela eta:

eta O-tik $\vec{R}$ bektorea labainkor bezala har daiteke sistema baliokide bat aurkitzeko.

4. Lehen bezala $\vec{R} \neq 0$ eta espazioko O puntu batetan $\vec{R}$ eta $\vec{OM}$ perpendikulareak izan daitezela.

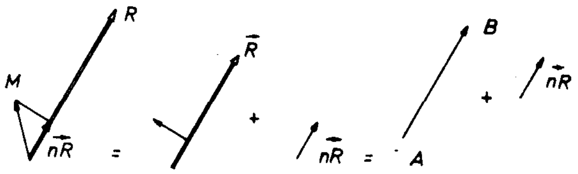
Kasu honetan ere, sistema bektore labainkor (AB) bakar baten baliokidea da.

O puntutik $\vec{OM}$ bektorearekiko laun perpendikular bat marraztuz, posible izango dugu beti bertan ordezkariaren paralelo den AB zuzen bat determinatzea. DD' zuzenarekiko distantzia, nahikoa behar du izan AB zuzeneko $\vec{R}$ bektoreak, modulukoa hain zuzen, O puntuan $\vec{OM}$ bektorea sortarazteko. Guzti hau garbi ikus daiteke ondoko eskeman:



4. Kasu generala:

Bedi S bektore labainkorreko $(\vec{R} \neq 0)$ sistema bat, beren momentu ordezkariaren $(\vec{OM})$ projekzioa $\vec{R}$ gainean $h\vec{R}$ delarik ($h\vec{R}$ =Konstante). Bedi S_1 beste sistema bat, era honetan definitua: S_1k S sistemaren $\vec{R}$ ordezkaria berdina du, eta bere momentu ordezkaria $\vec{OM} - h\vec{R}$ da. 4. Kasuko sistema hau $\vec{AB}$ bektore bakar baten baliokidea da, eta $S-S_1$ sistema, bere ordezkaria O izanik, pare baten baliokidea dugu.



S= S_1 sistema (S-S_1) sistema
S= $\vec{AB}$ bektore bat pare bat

Honek zera esan nahi du: sistema bat,kasu generalenean,bektore labainkor eta pare baten baliokideak,azken bi hauek paraleloak izanik.$\vec{AB}$ bektorearen posizio zuzena ardatz zentrala dugu.Mekanikoki adieraziz, gorputz baten gainean aplikatutako sistema beti bektore eta pare batetara labur dezakegu.Honek beste hau frogatzen digu: gorputz baten mugimendua beti beste bi mugimenduren batura balitz bezala trata dezakegu ; hots, traslazio eta bira bat bezala.

2-5 BEKTORE LABAINKOR SISTEMA BATEN MOMENTUA ARDATZ BATEKIKO

Sistemaren momentu ordezkaria emandako ardatzean projektatzean, projekzio honen balio konstantea dugu momentu hori.

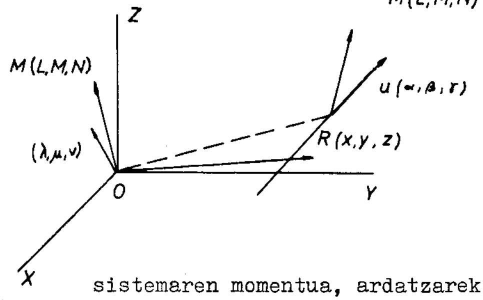
Definizio honek frogatzea eskatzen diguna zera da:projekzio hau beti konstantea dela.Eta hala da,zeren (12-4) puntuan frogatu genuen edozein bektore batentzat,momentuaren projekzioa beti konstante mantentzen dela.Hau honela bada, berdin izango da ere bektore baten ordez zenbait bektore badugu.

Bere expresio analitikoa

Hemen desarroilatzen badugu,arrazoi sinple batengatik egiten dugu: hain zuzen,desarroilo honek orain arte aipatutako gauza asko eta asko gogora eta erabil arazten bait du.

Bedi ardatz hau:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$



sistemaren momentua, ardatzarekiko, ondoko biderkadura eskalarra dugu:

$$M^o = \alpha L' + \beta M' + \gamma N'$$

baina badakigu

$$L' = L - y_0 Z + z_0 Y$$
$$M' = M - z_0 X + x_0 Z$$
$$N' = N - x_0 Y + y_0 X$$

berdintza hauek α, β eta γ rengatik biderkatuz, eta ondoren batuz:

$$M^o = \alpha L + \beta M + \gamma N + X(y_0\gamma - z_0\beta) + Y(z_0\alpha - x_0\beta) + Z(x_0\beta - y_0\alpha)$$

Expresio honi beste interpretazio bat eman diezaiokegu , ikusten bait da parentesi hauek biderkaketa bektoriak baten osagaien itxura dutela: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ ardatzaren bektore unitarioen momentua da, koordenatuen jatorriarekiko (osagai hauek letraz adieraziko ditugu)

$$\overrightarrow{OO'} \times \vec{u}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}$$

eta notazio honen bidez

$$M^o = \alpha L + \beta M + \gamma N + \lambda X + \mu Y + \nu Z$$

Ikus daitekeenez, momentu eskalar honen expresioan edozein bektore sistema bat ezaugarritzen duten 6 letra majuskulak agertzen dira. Bestalde, ardatza definitzen duten 6 parametroek ere parte hartzen dute.

$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ eta ν zuzenaren "koordenatu Plükerianoak" izendatzen dira. Espazioko zuzenen multzoa, beren plükerianoen artean $f(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu)$ erlazio bat esistitzen bada, "zuzenen konplejoa" izendatzen da.

Zero momentuko zuzena honela definitzen da: zuzen honetako edozein puntutan momentu eskalarra ezabatu egiten dena da. Hau da, honetarako baldintza hau bete behar dute:

$$aL + bM + cN + \ell X + mY + nZ = 0$$

baldintza honek, lehen eman dugun definizioaren arabera, konplejo bat ezaugarritzen du.

2-6 BEKTORE LABAINKOR PARALELOEN SISTEMA

Sistemako bektore guztiak paraleloak direnean, bi kasu agertzen zaizkigu:

a) Batura geometrikoa 0 izatea; sistema hau pare baten baliokidea da, 16-2 puntuan esplikatu genuen legez.

b) 0 ez izatea; sistema bektore labainkor bakar baten baliokidea dugu, zeren kasu honetan momentua ordezkariarekiko perpendikularea da (ikus 16-3)

Beraz, sistema honetan, beti

$LX+MY+NZ=0$ expresioa beteko da.

Teorema: Bektore labainkor paralelo sistema bat aldarazten bada, baina ondoko gauza hauek kontserbatuz:

a) Bektore bakoitzaren akzio-zuzenean puntu fijo bat.

b) Sistemako bektoreen arteko erlazio algebraikoak

Orduan, bektore labainkor bakarraren akzio zuzena puntu fijo batetik pasatzen da, eta puntu horri "bektore paraleloen zentrua" esaten zaio.

Frogaketa: Demagun bektoreak $m_1\vec{V}\ m_2\vec{V}\cdots m_k\vec{V}$ direla. Lehen aipatutako eragiketa adierazteko era oso sinplea da: oraingo bektore berriak $m_1\vec{F}\ m_2\vec{F}\cdots m_k\vec{F}$ izango dira, $\vec{F}$ bektorea beste edozein bat izanik. Aurki dezagun edozein O punturekiko momentu ordezkaria

kontsidera dezagun orain G puntua

$$m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots\cdots+m_k\overrightarrow{OA_k}=(m_1+m_2+\cdots\cdots\cdots+m_k)\overrightarrow{OG}$$

honela definituta. Gogoratuz (7.0) puntuan O puntuaren hautaketak ez zuela zer ikusirik, O puntua G en aurkitzen dela suposatzen badugu, honela geldituko zaigu.

$$m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots\cdots+m_k\overrightarrow{GA_k}=0$$

Baina orduan (1) ekuazioan

$\overrightarrow{GM}=0$ geldituko zaigu.

Hau da, G puntuan, ordezkariaren momentua zero da. Beraz, $\overrightarrow{AB}$ bektore labainkorra G puntutik pasatzen da. Eta, lehen frogatu genuen bezala, G puntua bakarra denez gero, teorema frogatuta dago.

Eraiketa grafikoa

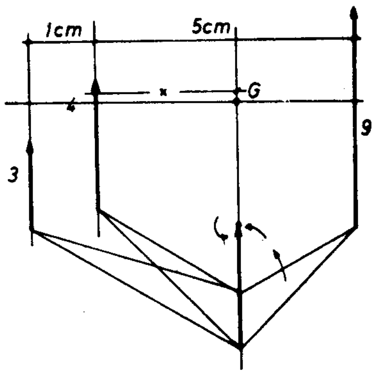
Ikusten dugu G puntua $A_1, A_2 \ldots$ puntuen, bakoitzean $m_1, m_2 \ldots$. masak egonik, barizentrua dela. Masa hauek, kasu honetan, bektoreen magnitudeak adierazten dituzte. Edozein O puntu bat hartuz, $\overrightarrow{OG}$ bektorearen eraiketa egiten da, $\overrightarrow{OG}$ bektorea ondokoa izanik

$$\overrightarrow{OG}=\frac{m_1}{\Sigma m_k}\overrightarrow{OA_1}+\frac{m_2}{\Sigma m_k}\overrightarrow{OA_2}+\cdots\cdots$$

labainkor ordezkariaren akzio-zuzena beti G puntutik pasatuko denez gero, G puntua akzio-zuzen hauek ebakitzen diren puntuan aurkituko da. Akzio-zuzen hauek bi posizio desberdinentzat marraztuak izan dira. Launean, honek eriketa errazten du, sistemaren direkzio komuna eta direkzio perpendikularra hartzen bada, Estatika grafikoan beste metodo bat ikusiko dugu.

Adibidea:

datuak irudian
ikus daitezke



Aritmetikoki: $3(x+2)+4x-9(5-x)=0$

$$x=\frac{39}{16}\simeq 2{,}4$$