udako euskal unibertsitatea

ESPAZIO TOPOLOGIKOAK

IRUINEA 1978

V

Banco de Vizcayak

BABESTUTAKO ARGITARAPENA

EDICION PATROCINADA POR EL

Banco de Vizcaya



ESPAZIO TOPOLOGIKOAK

Lejoa, 1978. urtea.

Lan hau VI. U.E.U.rako prestatu izan da, 1978. urteko hileetan eginiko mintegietan.

Egileak:

Edurne Biritxinaga Gaztelurrutia

Begoña Carrascal Platas

Mari Carmen Castillo Aramburu

Maria Jesus Esteban Galarza

Arantza Laborda Otaduy

Mari Jose Zarate Azcuna.

AURKIBIDEA

HOR.

- SARRERA. 3

- 1. GAIA: ESPAZIO TOPOLOGIKOAK: Topologiak eraiketa 6
inguruneen bidez. Topologien eraiketa irekien bidez. Bi bide hauen baliokidetasuna. Ireki eta inguruneen oinharriak.

- 2. GAIA: ESPAZIO TOPOLOGIKO BATEN MULTZO ETA PUNTU 15
OHARGARRIAK: Multzo hertsiak. Puntu itsatsia. Puntu isolatua. Akumulapen puntua. Multzo baten hertsidura. Multzo baten barnea. Multzo baten muga. Multzo dentsoak.

- 3. GAIA: ESPAZIO TOPOLOGIKOEN ARTEKO FUNTZIOAK: 23
Sarrera. Aplikazioen sailketa topologiko globala. Aplikazioen sailketa topologiko lokala. Etengabetasun globalaren karakterizapenak. Aplikazio etengabeen propietateak. Adibideak.

- 4. GAIA: HOMEOMORFISMOAK: Sarrera. Definizioa. 30
Homeomorfismoen karakterizapenak. Homeomorfismoen tipoak.

- 5. GAIA: SUZESIOAK ESPAZIO TOPOLOGIKOETAN: Suzesioen..... 34
definizioa. Suzesio baten limitea. Hausdorff-en espazioak. Espazio lehen kontagarriak.

- 6. GAIA: AZPIESPAZIO TOPOLOGIKOAK: Definizioa. Pro- 43
pietateak.

- 7. GAIA: BIDERKADUR ESPAZIO TOPOLOGIKOAK: Definizioa.... 49
Propietateak.

HOR.

- 8. GAIA: ESPAZIO KONPAKTUAK ETA ESPAZIO KONEXUAK: 52
Espazio konpaktuak. Espazio topologiko baten multzo konpaktuak. Aplikazio etengabeak eta espazio konpaktuak. Espazio konexuak. Multzo konexuak. Espazio topologiko baten osagai konexuak. Arkuzko konexutasuna.

- 9. GAIA: ESPAZIO METRIKOAK: Distantzia. Bola irekiak,..... 62
hertsiak; esferak. Distantzia metrikoki baliokideak. Azpiespazio metrikoak. Espazio metriko baten multzo bornatuak.

- 10. GAIA: ESPAZIO METRIKOEN TOPOLOGIA: Distantzia 68
batek eragindako topologia. Distantziak topologikoki baliokideak. Espazio metrizagarriak.

- 11. GAIA: ETENGABETASUNA ESPAZIO METRIKOETAN: Eten- 77
gabetasuna. Bi multzoren arteko distantzia. Puntu baten eta multzo baten arteko distantzia. Etengabetasun uniformea. Distantziak uniformeki baliokideak. Distantzien baliokidetasunaren hiru tipoen arteko erlazioa. Isometriak.

- 12. GAIA: OSOTASUNA ESPAZIO METRIKOETAN: Suzesio cau- 84
chyarrak. Espazio metriko osoak. Espazio metriko baten multzo osoak.

- 13. GAIA: ESPAZIO NORMADUNAK: Espazio normadunak. 89
Norma batek induzituriko distantzia.

- HIZTEGIA: " euskara-gaztelania, frantsesa" 92
- HIZTEGIA: " gaztelania-euskara" 96
- HIZTEGIA: " frantsesa-euskara" 100

- BIBLIOGRAFIA. 105

SARREXA

Topologia inoiz ikasi ez duten pertsonek horren berri entzutean, Topologia zer den galdetzen dute. Apur bat ezagutzen dutenek, aldiz, gauza guztiz abstraktu bat dela diote. Eta batzuek eta besteek ez dakite zertarako balio duen.

Topologiaren kontzeptu batzu eta berorien funtzionamendua ez beste ezagutzen dutenek, Matematikaren parte hau matematikarien apeta bat dela pentsatu ohi dute. Baina hau faltsua dela frogatzeko, dakusagun orain Topologia nola sortu zen, eta beronen bilakaera zertarako eta nolakoa izan den.

Matematikan, asnaldidanik zeuden oinharrizko bi kontzeptu: suzesioen limiteak eta funtzioen etengabetasuna. Jadanik Grekoek kontzeptu bi hauei lotuta zeudèn zenbait problema kontsideratzen zuten. Baina Abel eta Cauchy-k beren lanak egin arte, ezin zen esan zehazki bi nozio hauk zer ziren.

Bi matematikari hauen ondotik, beste lan garrantzitsu eta konkretu batzu egin ziren; Borel-Lebesgueren teoremaren frogapena, adibidez.

Kontutan hartzekoa da, bestalde, garai horretan, lan guztiak $\mathbb{R}$-n egiten zirela.

XIX. mendearen erdian, Riemann-ek programa itzel bat egin zuen Matematikaren aurrerapiderako, edo hobeto esan, Analisiarenerako. Baina une horretan ezin zen bete programa hori, Matematikaren egoera aski aurreraturik ez baitzegoen.

Hori bete ahal izateko, beharrezkoak izan ziren bai Weierstrass eta Riemann-en lanak zenbakizko funtzioez, bai Dedekind-en lana $\mathbb{R}$-ri buruz, eta, baita ere, Cantor-en lan izugarria.

Baina ez da pentsatu behar gauza guzti hauk egiten ziren bitartean, Topologia egiten zenik. Mementu horretan beharrezkoak zitzaizkion teoremak eta erresultatuak erabiltzen zituzten, besterik ez; eta gainera, kasu konkretuetarako, ez beste, frogatzen zituzten teorema horik.

Fréchet eta Riesz izan ziren erresultatu generalak ateratzen saiatu ziren lehenak; Fréchet-ek, adibidez, espazio metrikoak definitu zituen, distantziaren kontzeptuan oinharrituz.

Garai horretan metodo axiomatikoak modan zeuden; horregatik orduan erabiltzen ziren kontzeptu topologikoetarako hainbat axioma zegoen. Hausdorff izango zen axioma guzti horien artean sistema sinple bat atera izan zuena.

Beraz, Hausdorff-enganaino heldu arte, Topologiaren erresultatu batzu erabiliak izan ziren, baina isolaturik, koherentziarik gabe. Beharrei begiratuz erabili ohi ziren soilik, gainera.

Hausdorff-ekin Topologia Matematikaren beste arlo bat izatera heldu zela esan ahal dugu, zeren aurrerantzean, Topologian egiten baitzen lan, eta ez beste arloetarako erresultatuak lortzeko asmo bakarraz.

Garai horretan ere, Alexandroff eta Urysohn-ek espazio konpaktuak definitu zituzten; beranduago, Cartan-ek, iragazkiak, eta Banach-ek, espazio bektorial normadunak ikasi zituen.

Guzti honekin, Topologia mamituz zihoan, baina arlo matematiko gisa, guti gora behera orain ezagutzen dugun bezala, oso gaztea da Topologia, hirurogei bat urte bakarrik baititu.

Beraz, guk orain Topologia gisa presentatzen duguna urteetan zehar landu eta depuratu dena da. Topologia, erresultatu partikularrak generaldu nahi izatetik jaio zen. Hau da, Analisian erabiltzen ziren teorema eta proposizio asko, behar zirèn mementuan frogatu beharrean, Topologian lantzen ziren. Horregatik, Topologiak ez du zentzurik Matematikaren beste arlo batzuri loturik ez badago, arlo horietan behar diren tresnen bilduma baita.

Adibidez, Analisi Matematikoan lan egiten dugunean, normalki, $\mathbb{R}^n$ espazioak erabiltzen ditugu. Espazio hauek oso propietate topologiko onak dituzte, normadunak (eta halabeharrez, metrikoak) baitira. Espazio normadun generalen propietateak eta portaera Topologian ikasita ditugunez gero, ez dugu zertan Analisian berriro ikasi eta aztertu behar; beharko ditugun memen-

tuan aplikatu besterik ez ditugu egingo.

Eta beste horrenbeste Analisi funtzionalean erabiltzen diren espazio arraroago eta sofistikatuagoekin.

Topologiak, ba, abantail handi bat eskaintzen digu: teorema bat han fogatuta badugu, kasu partikular guztietan erabili ahal izango dugu, sinpleki, textuinguru berria pixka bat aztertu ondoren.

LEHEN GAIA

ESPAZIO TOPOLOGIKOAK.

- Topologien eraiketa inguruneen bidez.
- Topologien eraiketa irekien bidez.
- Bi bide hauen baliokidetasuna.
- Ireki eta inguruneen oinharriak.

ESPAZIO TOPOLOGIKOAK

Ikus dezagun, ba, nola defini espazio topologikoak; hau da, esan dezagun multzo batetako topologia bat zer den.

Har dezagun multzo bat, X; X-en edozein elementutarako, p, biz $\mathcal{U}(p)$ ondoko propietateak betetzen dituen X-en parteen bilduma bat:

I.1) $X \in \mathcal{U}(p)$

I.2) $U \in \mathcal{U}(p) \Rightarrow p \in U$

I.3) $U \in \mathcal{U}(p) \wedge U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}(p)$

I.4) $U, V \in \mathcal{U}(p) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(p)$

I.5) $U \in \mathcal{U}(p)$ badugu, existitzen da p-ren inguru bat, V, non $p \in V \subset U$ eta $\forall q \in V,\ U \in \mathcal{U}(q)$ baitira.

$\mathcal{U}(p)$-ren elementuak p-ren <u>inguruneak</u> direla esaten dugu.

Defini dezagun orain X-en azpimultzoen artean tipo berezi bat:

<u>1. Definizioa</u>.- $A \subset X$ multzoa irekia dela esaten dugu baldin A bere puntu guztien ingurunea bada. Multzo ireki guztien multzoa $\mathcal{I}$ deituko dugu.

Aurreko definizioetan ikusi ahal izan denez, inguruneen kontzeptua lokala da, puntuei lotuta baitago; irekiek, aldiz, ideia global bat adierazten dute.

Geroago ikusiko dugunez, topologia bat inguruneen bidez edo irekien bidez definitu ahal da, prozesu simetriko bati esker. Oso inportante dira teoria honetan bi kontzeptu osagarri horik.

Froga dezagun orain topologiak definitzeko oso interesgarri gertatuko zaigun teorema bat:

<u>1. Teorema</u>.- X multzoaren edozein puntutarako ingurune-bilduma bana badugu, bilduma horiekiko irekiek ondoko propietateak betetzen dituzkete:

1) $\emptyset$, X irekiak dira.

2) $\forall i \in I$, A_i irekia bada, $\bigcup_{i \in I} A_i$ irekia dateke; hau da, irekien bildurak irekiak dira.

3) $A_1, \ldots, A_n$ irekiak badira, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ irekia dateke; hots, irekiak kopuru finituan ebakitzen baditugu, irekiak lortzen dituzkegu.

Frogapena

1) Tribialki, $\emptyset$ irekia da.

X ere irekia da, inguruneen 1. propietateagatik.

2) Bira $\{A_i\}_{i \in I}$ irekiak; $\forall i \in I$, $A_i = \emptyset$ bada, $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ dateke, eta $\emptyset$ irekia da.

$\bigcup_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ izanik, $\exists p \in \bigcup_{i \in I} A_i$

Biz kasu honetan, $p \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ikusi behar duguna zera da, $\bigcup_{i \in I} A_i$ p-ren ingurunea dela.

Baina $p \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_o \in I$, $p \in A_{i_o} \Rightarrow$

$\Rightarrow p \in A_{i_o} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ eta $A_{i_o} \in \mathcal{U}(p)$ (A_{i_o} irekia da) $\Rightarrow$

$\overset{(I.3)}{\Rightarrow} \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}(p)$, f.n.g.l.

3) Bira $A_1, \ldots, A_n$ n ireki. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ bada, frogatuta dukegu. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ izanez gero, biz $p \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

$\forall i$, p hori A_i-n izango da, eta A_i guztiak irekiak direnez gero, p-ren inguruneak izango dira.

Honelatan, (I.4) propietatea (n - 1) bider erabiliz, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}(p)$ dela ikusi ahal izango dugu.

- - - - - - -

Balia gaitezen orain teorema honetaz topologia bat zer den esateko.

Leku askotan, multzoen topologiak axiomatikoki definitzen dira, eta gero, propietateak, inguruneak, etab. hortik

ateratzen dira. Guk alderantzizko bidea hautatu dugu, iradokigarriagoa delakoan.

2. Definizioa.- Biz X multzoa eta $\mathcal{T}$, X-en parteen bilduma bat. $\mathcal{T}$ topologia bat dela esaten dugu ondoko baldintzak betetzen direnean:

T.1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

T.2) $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

T.3) $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

Topologia baten elementuak irekiak deitu ohi dira, eta $\mathcal{T}$, X-en topologia bat bada, $(X, \mathcal{T})$ zeinuaz "X multzoa $\mathcal{T}$ topologiaz hornitua" adierazten da. Hortaz, $(X, \mathcal{T})$ espazio topologiko bat dela esan ohi da.

Adibideak

1) X multzoa badugu, $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_i$ topologia dateke.
$(X, \mathcal{T}_i)$ espazio indiskretua da.

2) $\mathcal{P}(X)$ ere topologia da. Topologia hau diskretu deitzen da.

3) $X = \{0,1\}$ bada, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ topologia da.
$(X, \mathcal{T})$ Sierpinski-ren espazioa da.

OHARRA

Multzo baten puntu guztietarako ingurune-bilduma bana badugu, eta ingurune horiekiko irekiak kontsideratzen baditugu, ireki horiek topologia bat osotzen dukete, lehen ikusi dugunez.

Modu honetan ba, puntuen inguruneetatik topologia batetara pasatu gara, hau da, lokaltasunetik globaltasunera. Goazen orain kontrako bidea ibiltzera.

3. Definizioa.- Bira $(X, \mathcal{T})$ espazio topologikoa, eta p, X-en puntu bat. $U \subset X$ multzoa p-ren ingurune bat dela esaten dugu baldin eta soilik baldin U-k p daukan ireki bat bere bar-

nean badauka; hau da, orain p-ren inguruneen multzoa $\mathcal{V}(p)$ zeinuaz adierazten badugu,

$$U \in \mathcal{V}(p) \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{T} \ , \ p \in A \subset U$$

Argi dagoenez, puntu bat daukan ireki bat puntu horren ingurunea izango da, inguruneen azken definizioa kontutan hartuz.

Lehen, inguruneak definitzeko, axioma-sistema bat erabili dugu (I.1, ..., I.5). Ikus dezagun nola oraintxe eman dugun definizioarekin, axioma horik inguruneen propietateak izango diren.

2. Teorema.- Biz $(X, \mathcal{T})$ espazio topologikoa. $\forall p \in X$, $\mathcal{V}(p)$ delakoak ondoko propietateak betetzen ditu:

1) $X \in \mathcal{V}(p)$
2) $U \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow p \in U$
3) $U \in \mathcal{V}(p) \wedge U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(p)$
4) $U, V \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(p)$
5) $U \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow \exists V \ , \ p \in V \subset U \wedge U \in \mathcal{V}(q) \ \forall q \in V.$

Gainera, $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall p \in A \ , \ A \in \mathcal{V}(p)$

Frogapena

1) X irekia denez gero, $\forall p \in X$, $X \in \mathcal{V}(p)$ dugu.

2) $U \in \mathcal{V}(p) \overset{def.}{\Rightarrow} \exists A \in \mathcal{T} \ , \ p \in A \subset U \Rightarrow p \in U.$

3) $U \in \mathcal{V}(p) \wedge U \subset V \overset{def.}{\Rightarrow} \exists A \in \mathcal{T} \ , \ p \in A \subset U \subset V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{T} \ , \ p \in A \subset V \overset{def.}{\Rightarrow} V \in \mathcal{V}(p)$

4) $U, V \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow \exists A, B \in \mathcal{T} \ , \ p \in A \subset U \wedge p \in B \subset V \Rightarrow$
$\overset{(T.3)}{\Rightarrow} \exists C = A \cap B \in \mathcal{T} \ , \ p \in C \subset U \cap V \overset{def.}{\Rightarrow} U \cap V \in \mathcal{V}(p).$

5) $U \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow \exists A \in \mathcal{T} \ , \ p \in A \subset U \wedge A \in \mathcal{V}(q) \ \forall q \in A \Rightarrow$
$\overset{(3)}{\Rightarrow} \exists A \in \mathcal{V}(p) \ , \ p \in A \subset U \wedge U \in \mathcal{V}(q) \ \forall q \in A.$

Hots, inguruneek lehen definizioan beharrezkoak zituzten bost propietateak, 2. definizioarekin ere betetzen dituzte.

Goazen ba, teoremaren azken zatia frogatzera.

Ezkerretik eskuinerako inplikapena ebidentea da, inguruneen definizioagatik.

Biz orain bere puntu guztien ingurunea den multzo bat, A. Honek zera adierazten digu:

$\forall x \in A \;\; \exists V_x \in \mathcal{E} \;,\; x \in V_x \subset A$ baita.

$V = \bigcup_{x \in A} V_x \in \mathcal{E}$, zeren V irekien bilduma baita, eta V = A dugu: Beraz, A irekia da, f.n.g.l.

- - - - - - - - - -

Aurrean ikusten denez, bi bide ezberdin segitu ahal dira topologia batetatik heltzeko, topologia bat zer den esan eta gero:

1) Puntu guztietarako ingurune-bilduma bana eduki, hau da, I.1, ..., I.5 propietateak betetzen dituzten multzo-bilduma bana, eta beraien bidez, irekiak definitu. Lehen ikusi dugunez, ireki horiek topologia bat osotzen dute.

2) Espazio topologikoa zuzenean eman, hau da, multzo bat eta hor definituriko topologia bat. Hau eginez gero, inguruneak definitu ahal dira, eta ikusi ahal izan dugunez, definizio horrek ematen dizkigun inguruneek 1. bidean erabiltzen genituen axiomak betetzen dituzte.

Hau dena nahiko simetriko da, baina gauzak guztiz argi uzteko, edo behintzat, erresultatu on bat lortzeko, segituriko bi bideek baliokideak izan beharko lukete.

Gure nahi hau bete egiten da, zeren ondoren bi teoremarekin frogatuko dugunez, berdina baita bide bat edo bestea hartzea, azkenean gauza berberera helduko gara eta.

Aztertuko dugun lehen partea hauxe da:

3. Teorema.- $(X, \mathcal{T}')$ espazio topologikoa emanda, $\forall p \in X$, $\mathcal{V}(p)$ sortzen zaigu; baina lehen bideari jarraituz, X-en puntu guztien inguruneen bidez, $\mathcal{T}$ topologia definitu ahal izango dugu.

Nahi genuen bezala, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ berdintza dugu.

Frogapena.- Dakigunez, $A \in \mathcal{T}' \overset{(2.T)}{\Longleftrightarrow} \forall\, p \in A,\ A \in \mathcal{V}(p)$

Baina lehen definizioagatik, $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(p), \forall p \in A$.

Beraz, $A \in \mathcal{T}' \Leftrightarrow A \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'$, f.n.g.l.

4. Teorema.- Biz orain X multzoa. $\forall\, p \in X$, (I.1), ... (I.5) propietateak betetzen dituen X-en parteen bilduma bat badugu, $\mathcal{T}$ topologia eman ahal dukegu, eta $(X, \mathcal{T})$ espazio topologikoa ukan. Espazio topologiko honen bitartez, $\forall\, p \in X$, p-ren inguruneen multzoa, $\mathcal{V}(p)$, ukan dezakegu. Froga dezagun $\forall p \in X$, $\mathcal{U}(p) = \mathcal{V}(p)$ berdintza dugula.

Frogapena.- Biz $p \in X$; $U \in \mathcal{V}(p) \overset{(3.def.)}{\Leftrightarrow} \exists\, A \in \mathcal{T}$, $p \in A \subset U$.

Baina, $A \in \mathcal{T} \overset{(1.def.)}{\Longleftrightarrow} \forall\, q \in A,\ A \in \mathcal{U}(q)$.

Beraz, $U \in \mathcal{V}(p) \Rightarrow p \in A \subset U \ \wedge\ A \in \mathcal{U}(p) \overset{(I.3)}{\Rightarrow} U \in \mathcal{U}(p)$ dugula.

Biz orain, berriz, $U \in \mathcal{U}(p)$. (I.5) propietateagatik,

$\exists\, V \in \mathcal{U}(p)$, $p \in V \subset U \ \wedge\ \forall\, q \in V,\ U \in \mathcal{U}(q)$.

Biz $W = \{ y \in X \mid V \in \mathcal{U}(y) \}$. Argi dagoenez, $W \subset V$ eta $p \in W$ ditugu.

Froga dezagun W irekia dela, hau da, $\forall\, z \in W$, $W \in \mathcal{U}(z)$ dugula.

Biz $z \in W$. Halabeharrez, $V \in \mathcal{U}(z)$. Berriz (I.5) aplikatuz,

$\exists\, G \in \mathcal{U}(z)$, $z \in G \subset V \ \wedge\ V \in \mathcal{U}(r), \forall\, r \in G$.

W-ren definizioagatik, $G \subset W$ dugu, eta G z-ren ingurunea denez gero, W ere z-ren ingurunea izango da.

Beraz, $W \in \mathcal{T}$, z W-ren edozein elementu izitzen.

Frogatu dugu, ba, $\forall\, U \in \mathcal{U}(p)$, $\exists\, W \in \mathcal{T}$, $p \in W \subset U$.

Honelatan, $U \in \mathcal{V}(p)$ dugu, nahi genuen legez.

Guk ikusi ditugun bi metodoak oso normalak eta erabiliak izaten dira Topologia aurkeztean, baina ba dago guttienez beste bide nahiko normala: hertsidurarena; hurrengo gaian ikusiko dugu multzo baten hertsidura zer den, baina guk ez ditugu hemen topologiak hertsiduraren bitartez definituko, beste metodo bat aurkeztea oso astuna bailitzateke.

- - - - - - - - - - - - - - - -

Ingurune eta irekien oinharriak.

Puntu baten inguruneen oinharriak

Bira $\mathcal{U}(x)$ x-en inguruneen multzoa eta $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$.

Baldin $\mathcal{U}(x)$-en edozein elementuk gutienez $\mathcal{B}(x)$-en elementu bat bere barruan badauka, $\mathcal{B}(x)$ x-en inguruneen oinharri bat dela diokegu.

Bistakoa da puntu baten ingurune-oinharri bat edukitzea nahikoa dela puntu horren ingurune guztiak ezagutzeko.

Espazio topologiko baten irekien oinharriak

Bira $(X, \mathcal{T})$ espazio topologikoa eta $\mathcal{T}$-ren azpimultzo bat, $\mathcal{B}$. Espazio horren edozein ireki $\mathcal{B}$-ren elementuren bildura bada, $\mathcal{B}$ $(X, \mathcal{T})$ espazioaren ireki-oinharri bat dela esaten da.

Proposizioa.- Biz $(X, \mathcal{T})$ espazio topologikoa eta $\mathcal{T}$-ren azpimultzo bat, $\mathcal{B}$. Honelatan, ondoko baldintzak baliokideak dira:

1) $\mathcal{B}$ $(X, \mathcal{T})$ espazioaren ireki-oinharri bat da.

2) $\forall O \in \mathcal{T}$ eta $\forall p \in O$ $\exists B \in \mathcal{B}$, $p \in B \subset O$.

3) X-en edozein elementuk $\mathcal{B}$-ren elementuz osotutako ingurune-oinharri bat dauka.

Frogapena

(1) $\Rightarrow$ (2)

Bira $O \in \mathcal{T}$ eta $p \in O$. 1. ataleagatik, $O = \bigcup_{\lambda} B_\lambda$, B_λ $\mathcal{B}$-ren elementu batzu direlarik.

Halabeharrez, $\exists \lambda_o$, $p \in B_{\lambda_o} \subset O$, f.n.g.l.

(2) $\Rightarrow$(3)

$\forall x \in X$, biz $\mathcal{B}(x) = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$.

$\mathcal{B}(x)$-en elementu guztiak x-en inguruneak direla bistakoa da.

Dakusagun $\mathcal{B}(x)$ x-en inguruna-oinharri bat dela.

Biz $U \in \mathcal{U}(x)$. Inguruneen propietateengatik, $\exists$ O irekia, non $x \in O \subset U$ baita. (2) aplikatuz, $\exists B_x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in B_x \subset O$, eta definizioz, $B_x \in \mathcal{B}(x)$; beraz, $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists B \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow x \in B \subset U$. Honelatan ba, $\mathcal{B}(x)$ x-en inguruneen oinharri bat da, f.n.g.l.

(3) $\Rightarrow$(1)

Biz $O \in \mathcal{Z}$; dakigunez, $\forall x \in O$, $O \in \mathcal{U}(x)$.

3. atalean oinharrituz, $\exists B_x \in \mathcal{B} \Rightarrow x \in B_x \subset O$.

Beraz, $O = \bigcup_{x \in O} B_x$, hau da, O $\mathcal{B}$-ren elementuren bildura da.

Ikus dezagun orain gero erabiliko dugun definizio bat, eta berari lotuta dagoen zenbait propietate:

Definizioa.- Bira multzo bat, X, eta X-en definituriko bi topologia, $\mathcal{Z}$ eta $\mathcal{Z}'$. $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}'$ baldintza betetzen bada, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{Z}$ baino finagoa dela esango dugu.

Proposizioa.- $\mathcal{Z}'$ topologia, $\mathcal{Z}$ baino finagoa bada, $\forall x \in X$, x-en $\mathcal{Z}$ -ingurune guztiak x-en $\mathcal{Z}'$-inguruneak direla ebidentea da. Ba dugu ere alderantzizko erresultadu bat: $\forall x \in X$, I-1, ... I-5 propietateak betetzen dituzten bi multzo, $\mathcal{U}(x)$ eta $\mathcal{V}(x)$ ($\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(X)$) baditugu, bai $\mathcal{U}(x)$ tipoko multzoen bidez, eta baita ere, $\mathcal{V}(x)$ tipokoekin topologia bana defini dezakegu: $\mathcal{Z}$ eta $\mathcal{Z}'$. Orduan, $\forall x \in X$, $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ betetzen bada, $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}'$ dukegu.

Proposizio honen frogapena tribiala da, inguruneen eta irekien definizioak kontutan hartuz.

BIGARREN GAIA

ESPAZIO TOPOLOGIKO BATEN MULTZO ETA PUNTU OHARGARRIAK.

- Multzo hertsiak.
- Puntu itsatsia. Puntu isolatua. Akumulapen puntua.
- Multzo baten hertsidura.
- Multzo baten barnea.
- Multzo baten muga.
- Multzo dentsoak.

ESPAZIO TOPOLOGIKO BATEKO MULTZO ETA PUNTU OHARGARRIAK

Espazio topologiko batetan eta multzo irekiez gainera,beste multzo batzu ere nabarmentzen dira;Adibidez,multzo baten inguruneak.Espazioko multzo bat hautatzen denean beste multzo eta puntu ugari agertzen dira.Hemen,multzo eta puntu hoien definizio eta propietateak ikusiko ditugu,zeren topologiaren kontzeptua ulertu eta finkatzeko oinharrizkoak baitira.

Multzo hertsiak. Definizioa.

A multzo bat hertsia dela esango dugu,bere multzo osagarria, A', irekia denean.

Espazioko multzo hertsien familia $\mathcal{E}'$ deituko dugu.

Teorema.

$\mathcal{E}'$ familiak ondoko propietateak betetzen ditu :

(1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{E}'$

(2) $\mathcal{T}'$-ren edozein azpifamiliaren ebakidura,multzo hertsia da.

$$\{F_i / i \in I\} \subset \mathcal{E}' \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{E}'$$

(3) ren edozein azpifamilia finituren bildura,multzo hertsia da.

$$F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{E}' \Longrightarrow F_1 \cup \ldots \cup F_n \in \mathcal{E}'$$

Frogapena.-

(1) $\emptyset \in \mathcal{E} \Longrightarrow \emptyset' = X \in \mathcal{E}'$. Bestalde, $X \in \mathcal{E} \Longrightarrow X' = \emptyset \in \mathcal{E}'$

(2) $\{F_i / i \in I\} \subset \mathcal{E}'$ $(\equiv)_d$ $\exists \{A_i / i \in I\} \subset \mathcal{E}$ non $F_i = A_i'$ baita $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} A_i' \underset{\text{Morgan}}{\Longrightarrow} (\bigcup_{i \in I} A_i)' \in \mathcal{E}'$

(3) $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{E}'$ $(\equiv)_d$ $\exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ $F_1 = A_1', \ldots, F_n = A_n'$

$F_1 \cup \ldots \cup F_n = A_1' \cup \ldots \cup A_n' \underset{\text{Morgan}}{\Longrightarrow} (A_1 \cap \ldots \cap A_n)' \in \mathcal{E}'$

Oharra:Ikusten dugunez, $\mathcal{E}'$ topologia da.

Puntu itsatsia.Puntu isolatua.akumulapen puntua.

Bira A E-ren azpimultzo bat,eta $x \in E$.

Definizioa : x puntuaren ingurune guztiek guttienez E-ren e-

Frogapena.-

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (Bistakoa denez).

(2) $A \subset B \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{B}$ - A bere barnean daukan multzo hertsi bat da $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(3) $\overline{A}$ hertsia da eta berau, bistakoa denez, $\overline{A}$ bere barnean duten hertsietarik ttikiena da. Beraz, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(4) $A, B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

$A \subset \overline{A}, B \subset \overline{B} \Rightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$\Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Era berean zera frogatzen da : $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cup \ldots \cup \overline{A}_n$.

(5) A hertsia bada, orduan A bere barnean daukan hertsietarik ttikiena da $\Rightarrow A = \overline{A}$.

Halaber, $\overline{A} = A \Rightarrow$ A hertsia da.

Oharra : (4) ordea ezin heda daiteke edozein bilduratara zeren multzo hertsien edozein bildurak ez baitu zertan multzo hertsia izan behar.

Gainera propietate honek ez du balio ebakidurarako, nahiz eta ebakidura finitua izan.

Adibidea : Bira $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ eta $B = I$.

$\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$ ($A = \mathbb{R}$; $B = R$ baita)

$\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$

$\Rightarrow$ Beraz, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Inklusio bat dugu soilik : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Halaber, multzo hertsiek ondoko erlazioak betetzen dituzte :

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

Teorema :

A multzo baten hertsidura, $\overline{A}$, eta A-ren puntu itsatsien multzoa berdinak dira.

$$\overline{A} = \{p \in E \mid U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}(p)\}$$

Frogapena.-

$\overline{A} = \bigcap \{F \text{ hertsia} \mid A \subset F\}$ eta $\{p \in E \mid U \cap A \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}(p)\}$ multzoen berdintasuna frogatu behar dugu.

a) Biz p A-ren puntu itsatsi bat.

$p \notin \bigcap F$ bada, orduan $p \in \left(\bigcap F\right)' = \overline{A}'$. Baina $\overline{A}$ hertsia denez, $\overline{A}'$ irekia

da eta halatan, p-ren ingurune.

Bestalde, $A \subset \overline{A}$ eta $\overline{A} \cap \overline{A}^{1} = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{A}^{1} = \emptyset$ .Beraz p ez zen A-ren puntu itsatsia izango,zeren p-ren ingurune bat, $\overline{A}^{1}$; existitzen baita, $\overline{A}^{1} \cap A = \emptyset$ izanik.Hau hipotesiaren aurka doa.Horrela, $p \in \overline{A}$.

b) Biz orain $p \in \overline{A}$ eta suposa dezagun p ez dela A-ren puntu itsatsia.Orduan,U,p puntuaren ingurune ireki bat existituko litzateke, $U \cap A = \emptyset$ izanik.

Baina U^{1} multzo hertsia da eta $A \subset U^{1}$, $p \notin U^{1} \rightarrow p \notin \overline{A}$ .Hau hipotesiaren aurka doa.Beraz, p A-ren puntu itsatsia da.

Teorema.Multzo hertsien karakterizapena.

Biz $A \subset E$. Orduan $\overline{A} = A \cup A^{d}$.

Bereziki,A hertsia da baldin eta soilik baldin $A^{d} \subset A$ bada.

Frogapena.-

$A^{d} \subset A$ eta $A \subset \overline{A}$ beti gertatzen direnez,orduan $A \cup A^{d} \subset \overline{A}$.

Biz orain $x \in \overline{A}$.

1) $x \in A$ bada,orduan,bistan denez, $x \in A \cup A^{d}$

2) $x \notin A$ bada, x A-ren puntu itsatsia denez,ondokoa gertatzen da :

$$\forall U \in \mathcal{V}(x),\ U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$$

Beraz, $x \in A^{d} \subset A \cup A^{d}$

Horrela, $\overline{A} \subset A \cup A^{d}$.

Bestalde,badakigu A hertsia dela baldin eta soilik baldin $\overline{A} = A$ bada. Orduan $\overline{A} = A \cup A^{d}$ denez,A hertsia izango da baldin eta soilik baldin $A^{d} \subset A$ bada.

Multzo baten barnea.Definizioa.

Biz $A \subset E$.A barnean dauden multzo irekietarik handienari A multzoaren barnea deituko diogu eta $\overset{\circ}{A}$ idatziko.

$$\overset{\circ}{A} = \cup \{U \mid U \text{ irekia} / U \subset A\}$$

Bistan denez, $\overset{\circ}{A}$ beti existitzen da.

Propietateak

(1) $\overset{\circ}{E} = E$.

(2) $\overset{\circ}{A} \subset A$

(3) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

(4) $\overset{\circ}{(A \cap B)} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

Frogapena.- Hertsiduraren propietateak frogatzen diren bezalatsu frogatzen da.

Teorema.-Eragiketa topologikoen arteko erlazioa.

Biz $A \subset E$. Orduan, $\overset{\circ}{A} = \overline{A'}^{\,'}$.

Bereziki : A irekia da $\Longleftrightarrow$ $A = \overset{\circ}{A}$ bada.

Frogapena.-

$S \subset A \longrightarrow A^{*} \subset S'$. Orduan, $U \subset A$ betetzen duten multzo irekiak, $F \supset A'$ betetzen duten multzo hertsiak dira.

$A = \bigcup \{F' / F \text{ hertsia}, A' \subset F\} = \left[\bigcap \{F / F \text{ hertsia}, A' \subset F\}\right]' = \overline{A'}^{\,'}$ (Morgan)

Ikusi dagigun orain bigarren zatiaren frogapena.

A irekia bada,orduan A-ren barnean dagoen irekietarik handiena da $\Longrightarrow$ $A = \overset{\circ}{A}$.

Halaber, $A = \overset{\circ}{A} \longrightarrow$ A irekia da.

Definizioa

Biz $A \subset E$ .A multzoan dagoen x puntu bat A-ren barne puntu bat dela esango dugu,ondoko hau betetzen duenean :

$$\exists U \in \mathcal{U}_{(x)}, U \subset A \text{ izanik.}$$

Bistakoa denez $\overset{\circ}{A} = \{x \in A / x \text{ A-ren barne puntua da}\}$

Multzo baten muga.Definizioa.

Biz $A \subset E$. A-ren muga multzoa hau da : $A^{*} = \overline{A} \cap \overline{A'}$.

Ondorio gisa, A^{*} beti multzo hertsi bat dela dakusagu.

Halaber : $A^{*} = (A')^{*}$.

Bestalde $p \in E$, A-ren muga puntu bat izango da soilik p-ren edozein ingurunek A eta A -rekin duen ebakidura hutsa ez bada.

Beraz, $A^{*} = \{p \in E / p \text{ A-ren muga puntua da}\}$

Teorema

Biz $A \subset E$. Orduan :

(1) $A^{*} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$

(2) $A^{*} \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$

(3) $\overline{A} = \mathring{A} \cup A^*$

(4) $E = \mathring{A} \cup A^* \cup \mathring{A}^!$ bildura disjuntua da.

Frogapena.-

(1) $A^* = \overline{A} \cap \overline{A}^! = \overline{A} \cap (\overline{A}^!)^! = \overline{A} \cap \mathring{A}^! = \overline{A} - \mathring{A}$

(2) $A^* = \overline{A} - \mathring{A} \Longrightarrow A^* \cap \mathring{A} = \emptyset$

(3) $\mathring{A} \cup A^* = \mathring{A} \cup (\overline{A} \cap \mathring{A}^!) = (\mathring{A} \cup \overline{A}) \cap (\mathring{A} \cup \mathring{A}^!) = \overline{A} \cap E = \overline{A}$ ($\mathring{A} \subset \overline{A}$)

(4) $A^* \cup \mathring{A}^! = A^{**} \cup \mathring{A}^! \neq \overline{A}^!$ ($A^* = A^{**}$)

Orduan $\mathring{A} \cup A^* \cup \mathring{A}^! = \overline{A}^! \cup \overline{A}^! = E$

Beraz, $E = \mathring{A} \cup A^* \cup \mathring{A}^!$ .Bistakoa denez,bildura hau disjuntua da.

Multzo dentsoak

Definizioa.- $\overline{D} = E$ bada, $D \subset E$ dentsoa dateke.

Teorema

D E-n dentsoa izango da baldin eta soilik baldin edozein multzo irekik D ebakitzen badu.

Frogapena.-

Bira D multzo dentsoa E-n,eta $A \neq \emptyset$ multzo irekia.

Biz a $\in A \subset \overline{D} = E$. Orduan a E multzoaren puntu itsatsia da.

Beraz, $\forall U \in \mathcal{U}(a)\ U \cap D \neq \emptyset$

Bereziki, $A \cap D \neq \emptyset$; A a-ren ingurune irekia baita.

Demagun orain edozein multzo irekik D multzoarekin duen ebakidura ez dela hutsa eta biz $x \in E$.

$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists A$ irekia non $x \in A \subset U$ eta $A \cap D \neq \emptyset$ baita $\Longrightarrow x \in \overline{D}$

Beraz, $x \in \overline{D}\ \ \forall x \in E \Rightarrow \overline{D} = E$.

ADIBIDEA

a) $(R, \mathcal{T}_o)$ espazio topologikoan.

$\mathcal{T}_o$ oinharrizko topologia deituko dugu.

$$\mathcal{T}_o = \{(a,b) / \ a,b \in R\}$$

A	$\bar{A}$	$\mathring{A}$	A^*	A^d	$(\mathring{A})^*$
$(0,1)$	$[0,1]$	$(0,1)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$	$\emptyset$
$[0,1]$	$[0,1]$	$(0,1)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$	$\emptyset$
$\{1/n\}_{n\in N}$	$\{0\}\cup\{1/n\}_{n\in N}$	$\emptyset$	$\{0\}\cup\{1/n\}_{n\in N}$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
Z	Z	$\emptyset$	Z	$\emptyset$	$\emptyset$
$(0,1)\cup(1,2)\cup\{3\}$	$[0,2]\cup\{3\}$	$(0,1)\cup(1,2)$	$\{0,1,2,3\}$	$[0,2]$	$\emptyset$
$\emptyset$	R	$\emptyset$	R	R	R

b) $(R, \mathcal{T}_d)$ espazio topologikoan.

$\mathcal{T}_d$ eskuineko topologia deituko dugu.

$$\mathcal{T}_d = \{(r,+\infty) / \ r \in R\}$$

A	$\mathring{A}$	A^d	$\bar{A}$	A^*	A'	$\overline{A'}$
$[0,1]$	$\emptyset$	$(-\infty,1]$	$(-\infty,1]$	$(-\infty,1]$	$(-\infty,0)\cup(1,\infty)$	R
$[0,\infty)$	$(0,\infty)$	R	R	$(-\infty,0]$	$(-\infty,0)$	$(-\infty,0]$
$\{1/n\}_{n\in N}$	$\emptyset$	$(-\infty,1)$	$(-\infty,1]$	$(-\infty,1]$	$r\in R, r\neq 1$	R
$\{0\}$	$\emptyset$	$(-\infty,0)$	$(-\infty,0]$	$(-\infty,0]$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	R

HIRURGARREN GAIA

ESPAZIO TOPOLOGIKOEN ARTEKO FUNTZIOAK.

- Sarrera.
- Aplikazioen sailketa topologiko globala.
- Aplikazioen sailketa topologiko lokala.
- Etengabetasun globalaren karakterizapenak.
- Aplikazio etengabeen propietateak.
- Adibideak.

ESPAZIO TOPOLOGIKOEN ARTEKO FUNTZIOAK

1. Sarrera

$(X,\mathcal{T})$ estruktura topologiko batetan, alde batetik X multzo euskarria eta bestetik irekien familiak osatzen duen $\mathcal{T}$ topologia bereiztu behar ditugu. Arrazoi honengatik $(X,\mathcal{T}_1)$ eta $(Y,\mathcal{T}'_2)$ bi estruktura topologikoen gonbaraketa egiterakoan, X eta Y multzoen elementuen arteko erlazio edo elkarpide batez hasi beharko dugu, non a posteriori $\mathcal{T}_1$ eta $\mathcal{T}'_2$ topologiek parte hartu beharko baitute.

Dakigunez bi multzoen arteko elkarpiderik interesgarrienak aplikazioak dira. Har dezagun orduan f: X multzotik Y multzorako aplikazio bat $f: X \longrightarrow Y$

Zein eratan erlazionatuko da f aplikazioa $\mathcal{T}_1$ eta $\mathcal{T}'_2$ topologiekin?

Hau bi eratara egin daiteke: lokalki eta globalki.

- Lokalki: X multzotik puntu bat hartuz, bere irudia Y multzoan kontsideratuz eta puntu bien inguruneak kontutan hartuz.
- Globalki: $\mathcal{T}_1$ eta $\mathcal{T}'_2$ topologien irekiak hartuz.

Bai inguruneak eta bai irekiak multzo euskarriaren zatiak direnez, ezingo dugu $f: X \longrightarrow Y$ aplikazioa hartu, baizik eta ondokoen aplikazioren bat hartu beharko dugu:

$f: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ edo $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$

Apikazio bi hauk honela definiturik daude:

$f: A \in \mathcal{P}(X) \longrightarrow f(A) = \{ f(x) / x \in A \} \in \mathcal{P}(Y)$

$f^{-1}: B \in \mathcal{P}(Y) \longrightarrow f^{-1}(B) = \{ x \in X / f(x) \in B \} \in \mathcal{P}(X)$

Gogora dezagun laburki funtzio hauek betetzen dituzten propietateak:

f: $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ aplikazioak betetzen dituen propietateak:

$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$

- $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
- $f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2)$

&& $f^{-1}: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ aplikazioak betetzen dituen propietateak:

= $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
- $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.
- $f^{-1}(B') = [f^{-1}(B)]'$.

2. Aplikazioen sailketa topologiko globala

Bira $(X, \mathcal{T}_1)$ eta $(Y, \mathcal{T}_2)$ espazio topologiko bi eta $f: X \longrightarrow Y$ aplikazio bat. Ondoko kasu hauk eman daitezke:

1) Y espazioaren ireki bakoitzaren irudi inbertsua, X espazioaren ireki bat da, halegia: $\forall A \in \mathcal{T}_2'$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$

$f^{-1}(B') = [f^{-1}(B)]'$, $\forall B \in \mathcal{P}(Y)$ propietateaz baliatuz, aurreko propietatea eta ondokoa baliokideak dira: Yespazioaren hertsi bakoitzarem irudi inbertsua X espazioaren hertsi bat da, halegia: $\forall C \in \mathcal{T}_2'$ $f^{-1}(C) \in \mathcal{T}_1'$

Hauetariko propietateren bat betetzen denean (bestea berehala beteko da, baliokideak baitira) $f: X \longrightarrow Y$ aplikazioa, <u>etengabea</u> dela esango dugu.

2) X espazioaren ireki bakoitzaren irudi zuzena, Y espazioaren ireki bat da, hots: $f(A) \in \mathcal{T}_2$, $\forall A \in \mathcal{T}_1$ edo:

$f: A \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{P}(X) \longrightarrow f(A) \in \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{P}(Y)$.

Kasu honetan f aplikazioa <u>irekia</u> dela esaten da.

Kontutan har dezagun $(f^{-1})^{-1} = f$ denez, f aplikazioa irekia izatea eta f^{-1} aplikazioa etengabea izatea baliokideak direla.

3) X espazioaren hertsi bakoitzaren irudi zuzena Y espazioaren hertsi bat da, hots: $f(C) \in \mathcal{T}_2'$, $\forall C \in \mathcal{T}_1'$ edo:

$f: C \in \mathcal{T}_1' \subset \mathcal{P}(X) \longrightarrow f(C) \in \mathcal{T}_2' \subset \mathcal{P}(Y)$.

Kasu honetan f aplikazioa <u>hertsia</u> dela esango dugu.

Pentsa dezakegu, aplikazio ireki eta aplikazio hertsiaren kontzeptuak baliokideak direla, baina hau gehienetan ez da gertatzen, zeren $f(A')$ eta $[f(A)]'$ez baitira berdinak izaten. (f bijektibo bada, orduan $f(A') = [f(A)]'$.)

4) Aurreko hiru kasoen konbinaketak eman daitezke, hots: aplikazio ireki eta hertsiak, aplikazio ireki eta etengabeak, aplikazio hertsi eta etengabeak, edo hiru kasuak batean.

Oso garrantzitsua da aplikazio bijektibo, ireki eta etengabearen kasua, baina kasu hau geroago aztertuko dugu sakonki.

3. Aplikazioen sailketa topologiko lokala

Bira, lehen bezala, $(X,\mathcal{T}_1)$ eta $(Y,\mathcal{T}_2)$ espazio topologiko bi, $f: X \to Y$ aplikazio bat, x_0 puntua, X espazioaren puntu konkretu bat eta $f(x_0)$ bere irudia Y espazioan.

Ondoko kasu hau eman daiteke:

- $f(x_0)$ puntuaren U ingurune bakoitzaren irudi ibbertsua, x_0 puntuaren ingurune bat da, halegia:

$f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$, $\forall U \in \mathcal{U}[f(x_0)]$ edo:

$f^{-1}: U \in \mathcal{U}[f(x_0)] \subset \mathcal{P}(Y) \to f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{P}(X)$.

Kasu honetan f aplikazioa, x_0 puntuan etengabea dela esaten da.

Gero ikusiko dugunez, aplikazio etengabe eta puntu bakoitzean aplikazio etengabearen kontzeptuak baliokideak direla frogatuko dugu.

4. Etengabetasun globalaren karakterizapenak

TEOREMA.- Bira $(X,\mathcal{T}_1)$ eta $(Y,\mathcal{T}_2)$ espazio topologiko bi eta $f: X \to Y$ aplikazio bat. Ondoko proposizioak baliokideak dira:

1) f aplikazioa etengabea da, hots: $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$, $\forall A \in \mathcal{T}_2$.

2) Y espazioaren hertsi bakoitzaren irudi inbertsua X espazioaren hertsi bat da, hots: $f^{-1}(C) \in \mathcal{T}_1'$, $\forall C \in \mathcal{T}_2'$

3) Y espazioaren oinharri baten multzo bakoitzaren irudi inbertsua, X espazioaren ireki bat da.

4) f aplikazioa, x_0 X espazioaren puntu bakoitzean etengabea da, halegia:

$\forall x_0 \in X$, $\forall U \in \mathcal{U}[f(x_0)]$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$

5) $\forall x_0 \in X$, $\forall U \in \mathcal{U}[f(x_0)] \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(x_0)$ / $f(V) \subset U$.

6) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$

7) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$, $\forall B \subset Y$

Frogapena

(1)$\Leftarrow$(2) : Sogora dezagun $f^{-1}(B)=\left[f^{-1}(B)\right]'$ dela, eta hemendik frogatu nahi genuena.

(1) $\Rightarrow$(3) : Har dezagun $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{T}_\alpha$, $\mathcal{T}_\alpha$ topologiaren oinharri bat izanik. f aplikazioa etengabea denez Y espazioaren ireki bakoitzaren irudi inbertsua X espazioaren ireki bat izango da, eta bereziki $\mathcal{B}_\alpha$ oinharriaren irekien irudi inbertsuak X espazioaren irekiak izango dira

(3) $\Rightarrow$(1) : Biz $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{T}_\alpha$, Y espazioaren oinharri bat, eta suposa dezagun $f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_\alpha, \forall B\in\mathcal{B}_\alpha$ dela.

Kontsidera dezagun A, Y espazioaren edozein ireki bat.

$\mathcal{B}_\alpha$ oinharri bat denez, $A=\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda$ izango da, non $\{B_\lambda / \lambda\in I\}\subset\mathcal{B}_\alpha$ baitago, halabeharrez $f^{-1}(A)=f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in I} f^{-1}(B_\lambda)\in\mathcal{T}_\alpha$.

zeren $f^{-1}(B_\lambda)\in\mathcal{T}_\alpha$, $\forall\lambda\in I$ baita.

(1) $\Rightarrow$(4) : Demagun $x_\alpha\in X$ puntu bat eta kontsidera dezagun Y espazioan $f(x_\alpha)$ bere irudia. Biz $U\in\mathcal{U}\left[f(x_\alpha)\right]$.

Inguruneen definizioaz, $\exists A\in\mathcal{T}_\alpha$ non $f(x_\alpha)\in A\subset U$ baita, halabeharrez $x_\alpha\in f^{-1}(A)\subset f^{-1}(U)$ ETA $f^{-1}(A)$, X espazioaren irekia denez, halabeharrez $f^{-1}(U)\in\mathcal{U}(x_\alpha)$.

Honela f aplikazioa X espazioaren puntu bakoitzean etengabea dela frogatu dugu.

(4) $\Rightarrow$(5) : Demagun $U\in\mathcal{U}\left[f(x_\alpha)\right]$ eta kontsidera dezagun $V=f^{-1}(U)\in\mathcal{U}(x_\alpha)$ (4. propietatea betetzen delako).

Argi dago $f(V)\subset U$ dagoela eta honela 5. propietatea betetzen da.

(5) $\Rightarrow$(6): Biz $A\subset X$ eta $p\in\overline{A}$ puntu bat. $f(p)\in\overline{f(A)}$ betetzen dela frogatuko dugu, $U\cap f(A)\neq\emptyset$, $\forall U\in\mathcal{U}\left[f(p)\right]$ dela ikusiz.

Har dezagun $U\in\mathcal{U}\left[f(p)\right]$ 5. propietateagatik: $\exists V\in\mathcal{U}(p)$ non $f(V)\subset U$ baita.

$p\in\overline{A}$ duelako, orduan $\emptyset\neq V\cap A$ izango da, eta hemendik: $\emptyset\neq f(A\cap V)\subset f(V)\cap f(A)\subset U\cap f(A)\neq\emptyset$, halabeharrez: $f(p)\in\overline{f(A)}$.

(6) $\Rightarrow$(7) : Demagun $B\subset Y$ eta $A=f^{-1}(B)$. Dakigunez $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ dago eta hemendik $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}=\overline{f\left[f^{-1}(B)\right]}=\overline{B\cap f(X)}\subset\overline{B}$; Orduan: $\overline{f^{-1}(B)}=\overline{A}\subset f^{-1}\left[\overline{f(A)}\right]\subset f^{-1}(\overline{B})$

(7) $\Rightarrow$ (2): Demagun $B \subset Y$ multzo hertsi bat, 7. propietatea betetzen denez:

$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}) = f^{-1}(B)$ (B hertsia delako)

$f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ propietatea beti betetzen da eta propietate bi hauetatik: $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ izango da, hots, Y espazioaren edozein hertsiaren iruki inbertsua, X espazioaren hertsi bat da, hots, f aplikazioa etengabea da.

5. Aplikazio etengabeen propietateak

Demagun X, Y eta Z hiru espazio topologiko. Ondoko propietateak betetzen dira:

(1) f eta g aplikazioak, $f:X \longrightarrow Y$; $g:Y \to Z$ etengabeak badira, $g \circ f:X \to Z$ aplikazioa, etengabea da, hots, bi aplikazio etengabeen konposaketa aplikazio etengabe bat dateke.

(2) $f:X \to Y$ aplikazioa etengabea bada eta $A \subset X$, X espazioaren azpiespazioa bada orduan $f_A:A \to Y$, f aplikazioaren A azpiespazioreko murrizpena etengabea dateke.

(3) $f:X \to Y$ aplikazioa etengabea bada, eta f(X) espazioa eragindako topologiaz kontsideratzen badugu, orduan $f_r:X \to f(X)$ aplikazioa etengabea dateke.

Frogapena

(1) Dakigunez $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ da.

Demagun A, Z espazioaren ireki bat, frogatu nahi duguna zera da:

$\forall A \in \mathcal{Z}_z \quad (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{Z}_x$ dela.

Hipotesiz: $\forall A \in \mathcal{Z}_z \quad g^{-1}(A) \in \mathcal{Z}_Y$ eta $\forall A \in \mathcal{Z}_Y$. $f^{-1}(A) \in \mathcal{Z}_x$ dugu.

Har dezagun orduan Z espazioaren A edozein ireki

$(g \circ f)^{-1}(A) = (f^{-1} \circ g^{-1})(A) = f^{-1}[g^{-1}(A)]$ eta $g^{-1}(A) \in \mathcal{Z}_Y$ denez, orduan $f^{-1}[g^{-1}(A)] \in \mathcal{Z}_x$. . Eta honela frogatu dugu nahi genuena.

(2) Biz $f:X \to Y$ aplikazio etengabea. Kontsidera dezagun $f_A:A \to Y$ aplikazioa, non $f_A = f/A$ baita.

Biz B, Y espazioaren multzo ireki bat. $f_A^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A$ denez eta $f^{-1}(B)$, X espazioaren ireki bat denez $f_A^{-1}(B) \cap A$, $\mathcal{Z}_A$ topologiaren ireki bat izango da.

Esan dezakegu orduan f_A aplikazioa etengabea dela.

(3) f(X) espazioaren irekiak, $B \cap f(X)$ eratakoak dira, non $B \in \mathcal{Z}_Y$ baita.

Har dezagun $f_r^{-1}(B \cap f(X))$ multzoa

$f_r^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B)^{-}$

$f^{-1}(B)$ multzo irekia da, zeren f aplikazioa etengabea baita, halabeharrez $f_r^{-1}(B \cap f(X))$ irekia izango da eta $f_r: X \to f(X)$ etengabea dela frogatu dugu honela.

6. Adibideak

Ikus ditzagun orain adibide gerrantzitsu batzu:

(1) Har ditzagun orain X eta Y espazio topologiko bi. Edozein aplikazio konstante $f: X \to Y$, non $f(x)=y_o, \forall x \in X$ baita, aplikazio etengabea da

Frogapena

Y espazio topologikoaren irekian artean bi posibilitate daude: alde batetik y_o puntua beren barnean daukaten irekiak daude eta bestetik beren barnean y_o puntua ez daukatenak.

- Har dezagun $A \in \mathcal{T}_Y$ non $y_o \in A$ baita.

$f^{-1}(A)=X$, halegia bere irudi inbertsua X espazio osoa da, X espazioa noski irekia izanik.

- Demagun orain $B \in \mathcal{T}_Y$ non $y_o \notin B$ baita.

Kasu honetan $f^{-1}(B)=\emptyset \in \mathcal{T}_X$, halegia B irekiaren irudi inbertsua multzo hutsa da eta dakigunez multzo hau ireki bat da.

(2) Bira $(X,\mathcal{T}_1)$ eta $(X,\mathcal{T}_2)$ espazio topologiko bi, multzo euskarria berbera dutenak eta kontsidera dezagun $i: X \to X$ aplikazio identitatea: $i(x)=x \quad \forall x \in X$. Ondoko posibilitate hauk eman daitezke:

a) $i: X \to X$ etengabea izatea.

Zer esan nahi du honek?

i aplikazioa etengabea izateagatik: $\forall A \in \mathcal{T}_2$ $i^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$ baina $i^{-1}(A)=A \in \mathcal{T}_1$ da, hots, $\forall A \in \mathcal{T}_2$ halabeharrez $A \in \mathcal{T}_1$, halegia $\boxed{\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1}$

b) $i: X \to X$ aplikazioa irekia izatea, hots, $\forall A \in \mathcal{T}_1$, $i(A) \in \mathcal{T}_2$ baina $i(A)=A \in \mathcal{T}_2$ hots, $\forall A \in \mathcal{T}_1$ halabeharrez $A \in \mathcal{T}_2$ hots $\boxed{\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2}$

c) $i: X \to X$ aplikazioa, ez etengabea eta ez irekia izatea, kasu honetan ezin ditzakegu $\mathcal{T}_1$ eta $\mathcal{T}_2$ topologiak gonbara. Ez dira gonbaragarriak.

LAURGARREN GAIA

HOMEOMORFISMOAK

- Sarrera.
- Definizioa.
- Homeomorfismoen karakterizapenak.
- Homeomorfismoen tipoak.

HOMEOMORFISMOAK

1. Sarrera

Aurreko teman aplikazio etengabeak aztertu ditugu. Aplikazio etengabeen artean badaude batzu oso interesgarriak direnak: "homeomorfismoak" halegia. Hauk izango dira orain aztertuko ditugunak eta berehala ikusiko dugu, bi espazio topologiko gonbaratzerakoan, nolako garrantzia duten.

Pentsa dezagun bi espazio topologiko dugula $(X,\mathcal{T}_1)$ eta $(Y,\mathcal{T}_2)$ eta X eta Y multzo euskarrien artean f aplikazio bijektibo bat dagoela $f:X\to Y$.

$f:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$, eta $f^{-1}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)$ aplikazio alkartideak bijektiboak izango dira eta gainera bata bestearen inbertsua.

Aurreko teman ikusi dugu nolako propietateak betetzen dituzten aplikazio bi hauek, baina f aplikazioa bijektiboa denez, ondoko hiru propietate hauk ere betetzen dira:

$$\left.\begin{array}{l} - \ f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2) \\ - \ f(A_1-A_2)= f(A_1)-f(A_2) \\ + \ f(A_1')=[f(A_1)]' \end{array}\right\} \ \forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$$

Gogora dezagun normalki hau ez dela gertatzen,

$$\left.\begin{array}{l} - \ f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2) \\ - \ f(A_1-A_2)\supset f(A_1)-f(A_2) \end{array}\right\} \ \forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$$

baizik.

Suposa dezagun halaber f aplikazioa etengabea eta irekia dela, edo baliokidea dena: f eta f^{-1} aplikazioak etengabeak direla.

Pentsa dezagun egoera topologiko oso on batetan gaudela, zeren bijekzio bat dugu, ez bakarrik multzo euskarrien artean, baizike eta topologien artean ere.

Baldintza hauetan, X espazioaren edozein propietate topologikoa, Y espazioaren propietate topologikoa izango da eta alderantziz.

2. Definizioa

Demagun $f:X\to Y$ aplikazio bijektibo bat. f aplikazio hau eta $f^{-1}:Y\to X$ aplikazioak etengabeak badira (edo baliokidea dena, f aplikazioa etengabea eta irekia bada) f homeomorfismo bat dela esaten da eta honela idazten: $f:X\cong Y$

X eta Y espazio topologiko bi homeomorfoak direla esango dugu eta $X \tilde{=} Y$ idatzi beren artean homeomorfismo bat definiturik badago.

3. Homeomorfismoen karakterizazioak

Ikus dezagun orain homeomorfismoek beti betetzen dituzten propietate batzu:

TEOREMA.- Biz $f:X \to Y$, X eta Y espazio topologikoen arteko aplikazio bijektibo bat. Ondoko propietateak baliokideak dira:

(1) f aplikazioa, homeomorfismoa da.

(2) f aplikazioa, etengabea eta irekia da.

(3) f aplikazioa, etengabea eta hertsia da.

(4) $f(\bar{A})=\overline{f(A)} \qquad \forall A \subset X$

Frogapena

(1)$\Leftrightarrow$(2) f aplikazioa homeomorfismo izateak, f eta f^{-1} aplikazioak etengabeak direla suposatzen du.

f aplikazioa irekia izatea eta f^{-1} aplikazioa etengabea izatea baliokideak direnez, frogatu dugu nahi genuena.

(2)$\Leftrightarrow$(3) Hemen frogatu behar duguna zera da: f aplikazioa irekia dela baldin eta soilik baldin f aplikazioa hertsia bada.

f aplikazioa bijektibo denez: $f(A')=[f(A)]' \qquad \forall A \subset \mathcal{T}_1$.

eta hemendik frogatu nahi genuena.

(3)$\Rightarrow$(4) f etengabea denez, halabeharrez $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$A \subset \bar{A}$, halabeharrez $f(A) \subset f(\bar{A})$, eta $f(\bar{A})$ multzo hertsia da, zeren f aplikazioa hertsia baita.

Orduan $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$, zeren definizioaz $\overline{f(A)}$ multzoa, $f(\bar{A})$ bere barnean duten hertsietatik txikiena baita. Eta hemendik:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \\ \overline{f(A)} \subset f(\bar{A}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\bar{A})=\overline{f(A)}$$

(4)$\Rightarrow$(3) Orain $f(\bar{A})=\overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$ dela suposatuko dugu.

$f(\bar{A})=\overline{f(A)}$, halabeharrez $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X$ izango da eta hau baldin eta soilik baldin f aplikazioa etengabea bada gertatzen da.

Har dezagun orain $A \subset X$ multzo hertsi bat. A hertsia delako $A=\bar{A}$ gertatuko da eta kasu honetan $f(\bar{A})=f(A)=\overline{f(A)}$ dugu eta $\overline{f(A)}$ multzo hertsi bat da, hots f aplikazioa hertsia da.

4. Homeomorfismoen tipoak.

Kontsidera dezagun hemen, espazio topologiko guztien klasea. Ikus dezagun nola klase honetan homeomorfismoa baliokidetasun erlazio bat den:

- $\boxed{X \cong X}$, zeren i aplikazio identitatea homeomorfismoa baita (i: $X \cong X$)
- Suposa dezagun X eta Y espazioak homeomorfoak direla: $X \cong Y$, halabeharrez f aplikazio bat egongo da, non f homeomorfismo bat izango baita $f: X \cong Y$, hots f^{-1} aplikazioa ere homeomorfismoa izango da, $f^{-1}: Y \cong X$ eta honela Y eta X espazioak homeomorfoak izango dira: $Y \cong X$, esate baterako:

$$\boxed{X \cong Y \Rightarrow Y \cong X}$$

- Suposa dezagun X eta Y homeomorfoak direla, eta gauza berbera Y eta Z espazioentzat: $X \cong Y$ eta $Y \cong Z$, halegia f eta g aplikazio bi egongo dira, non f eta g homeomorfismoak izango baitira: $f: X \cong Y$, $g: Y \cong Z$.

Oso erraza da, bi homeomorfismoen konposaketa beste homeomorfismo bat dela ikustea, hots, g.f X eta Z espazioen arteko homeomorfismoa da, $g.f: X \cong Z$, eta hemendik X eta Z espazioak homeomorfoak izango dira: $X \cong Z$. Esate baterako:

$$\boxed{X \cong Y \ , \ Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z.}$$

Baliokidetasun erlazio honek, espazio topologiko guztien klasea, klase disjuntuetan zatitzen du.

Klase disjuntu hauk homeomorfismoen tipoak deitzen ditugu.

Honela, homeomorfismoen tipo bat, propietate topologiko berberak dituzten espazio topologikoek osatzen dute, eta espazio topologiko bi homeomorfismoen tipo ezberdinetakoak badira, batek nahitanahiez besteak ez duen propietate topologikoren bat edukiko du.

Gehienetan oso zaila gertatzen da espazio topologiko bi homeomorfoak direla frogatzea, zeren horretarako bien arteko homeomorfismo bat aurkitu behar baitugu.

Askoz errezagoa izaten da, espazio topologiko bi homeomorfoak ez direla frogatzea eta hau egiteko batek, besteak ez duen propietate topologikoren bat ba duela frogatzea nahikoa izaten da.

BOSTGARREN GAIA

SUZESIOAK ESPAZIO TOPOLOGIKOETAN

- Suzesioen definizioa.
- Suzesio baten limitea.
- Hausdorff-en espazioak.
- Espazio lehen kontagarriak.

SUZESIOAK ESPAZIO TOPOLOGIKOETAN

Suzesio bat definitzeko ez da egitura topologikorik behar.

Definizioa

Bira multzo bat, E, eta $\mathbb{N}$ zenbaki naturalen multzoa zero kenduz. $\mathbb{N}$-tik E multzora doan edozein aplikazio bat, E-ren suzesio bat dela diogu eta $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ idatzi.

Suzesio baten limitea

Limitearen kontzeptuak ez luke esannahirik edukiko, E multzoan topologia bat suposaturik ez balego.

Definizioak

Bira $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, E, espazio topologiko bat izanik, eta E-ren puntu bat, a.

(1) a puntua x_n suzesioaren limita dela diogu eta $x_n \longrightarrow a$ edo $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ idazten, a-ren edozein inguruinetarako, U, existitzen bada zenbaki natural bat, n_u, non $\forall n \geq n_u \quad x_n \in U$ baita.

$$\forall U \in \mathcal{U}(a) \qquad \exists n_u \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_u \qquad x_n \in U$$

(2) a puntua $\{x_n\}$ suzesioaren limitea da, a-ren edozein inguruinetarako, U, ia suzesioaren elementu guztiak U-n daudenean; hau da, ez daudenak kopuru finitu bat direnean.

$$\forall U \in \mathcal{U}(a) \qquad \text{Kard}\{x_n \;/\; x_n \notin U\} \in \mathbb{N}$$

(3) Era berean a-ren oinharrizko inguruneen bidez ere, limitea definitu daiteke:

$$\forall U \in \mathcal{B}(a) \qquad \exists n_u \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_u \qquad x_n \in U$$
$$\forall U \in \mathcal{B}(a) \qquad \text{Kard}\{x_n \;/\; x_n \notin U\} \in \mathbb{N}$$

Definizio hauk baliokideak dira.

Teorema

Bira azpimultzo bat, A, $(A \subset E)$, E espazio topologiko bat izanik eta $\{x_n\}$ A-n dagoen edozein suzesio bat.

$\{x_n\}$ suzesioaren puntu limite guztiak A-ren hertsiduran daude. Hau da:

$$\{x_n\} \subset A \quad \wedge \quad x_n \longrightarrow x \quad \Longrightarrow \quad x \in \bar{A}$$

Baina alderantzizkoa, ordea, ez da beti gertatzen.

Frogapena:

. Biz x-en edozein ingurune bat, U.

Hipotesiz $x_n \longrightarrow x$ dugu eta limitearen definizioaren bidez:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \qquad \exists n_u \in \mathbb{N} \quad \text{non} \quad \forall n \geq n_u \qquad x_n \in U \quad \text{baita.}$$

Eta $\{x_n\} \subset A$ dagoenez:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \qquad U \cap A \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad x \in \bar{A}$$

. Demagun orain, alderantzizko propietatea betetzen ez duen adibide bat.

Biz zenbaki errealen multzoa, $\mathbb{R}$, eta kontsidera ditzagun

$\mathcal{T} = \{B \subset \mathbb{R} \ / \ B \vee B' \text{ kontagarriak}\}$ topologia eta $A = R - \{0\}$ multzoa.

A multzoa irekia izateagatik, $\bar{A} = \mathbb{R}$ eta $0 \in \bar{A}$ erlazioak betetzen dira.

Ordea, ez dago suzesio bat, $\{x_n\}$, non $\{x_n\} \subset R - \{0\}$ eta $x_n \longrightarrow 0$ baitira; zeren, nahiz eta $\{x_n\}$ suzesioaren elementuetarik bat ere $R - \{x_n\}$ multzoan ez egon, multzo hau x-en ingurune bat baita.

Espazio topologikoetan suzesio batek puntu limite bat baino gehiago eduki dezake.

Adibidez E multzo batetan topologia indiskretuarekin, E-ren elementu guztiak puntu limiteak dira edozein suzesiotarako, zeren E multzoa puntu bakoitzaren ingurune bakarra baita.

Hausdorff-en espazioetan, ordez, suzesio batek ezin du limite bat baino gehiago eduki. Bestalde, $\mathbb{R}$ eta Analisian erabiltzen diren espazio gehienak Hausdorff-enak direnez, dakusagun zeintzu

[illegible] eta nolako propietateak betetzen ditu.

Hausdorff-en espazioak

Definizioa

Biz espazio topologiko bat, E. E-ren edozein elementu desberdinetarako, x, y, ($x \neq y$) haien ingurune disjuntu batzu, $U \in \mathcal{U}(x)$ eta $V \in \mathcal{U}(y)$, existitzen direnean, E banatua edo Hausdorff-en espazioa edo T_2 espazio bat dela esaten dugu. Hau da:

$$\forall x,y \in E \quad x \neq y \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists V \in \mathcal{U}(y) \quad / \quad U \cap V = \emptyset$$

Adibidez, espazio diskretuak beti banatuak izaten dira.

Propietatea

Hausdorff-en espazio batetan atomo guztiak multzo hertsiak dira.

Frogapena:

Hira Hausdorff-en espazio bat, E, eta x beraren puntu bat. Dakusagun nola $\{x\}'$ multzo hertsia den, zeren honela $\{x\}$ multzo irekia izango baita.

$\forall y \in \{x\}'$, E espazio banatua denez gero, y puntuaren ingurune bat, U, existitzen da, non x U inguruenan ez baitago.

Honelatan, ba,

$$\forall y \in \{x\}' \quad \exists U \in \mathcal{U}(y) \quad / \quad U \subset \{x\}'$$

Orduan, $\{x\}'$ multzo hertsia da eta beraz, x multzo irekia.

Teorema

Hausdorff-en espazio batetan suzesio batek limitea badu, limite hau bakarra dateke.

Frogapena:

Teorema hau absurdura eramanez frogatuko dugu.

Bira E Hausdorff-en espazio bat eta $\{x_n\}$ beraren suzesio bat. Suposa dezagun a eta b puntuak, $\{x_n\}$ suzesioaren limiteak direla $a \neq b$ izanik.

E banatua denez denez gero, $U \in \mathcal{U}(a)$ eta $V \in \mathcal{U}(b)$ inguruneak existitzen dira non $U \cap V = \emptyset$ baita.

Bestalde, $x_n \longrightarrow a$ eta $x_n \longrightarrow b$ ditugunez, limitearen definizioaren bidez:

$\exists n_u$, $n_v \in \mathbb{N}$ non $x_n \in U \quad \forall n \geq n_u$ eta $x_n \in V \quad \forall n \geq n_v$ baitira.

Hau da:

$$x_n \in U \cap V \qquad \forall n \geq \max(n_u, n_v)$$

Baina hau absurdua da, zeren hipotesiaren arauera $U \cap V = \emptyset$ baitugu.

Ikasgai honen lehengo teoreman jadanik zera ikusia dugu, E espazio topologiko bat denean eta A beraren azpimultzo bat, ondoko propietatea betetzen dela:

$$\{x_n\} \subset A \ \wedge \ x_n \longrightarrow x \iff x \in \bar{A}$$

Ordea, adibide batez ikusi dugunez, propietate honen inbertsua ez da beti egia izaten.

Bestalde, espazio lehen kontagarriek propietate hau betetzen dute. Espazio hauk interesgarriak dira, zeren $\mathbb{R}$ eta espazio metriko guztiak lehen kontagarriak baitira.

Espazio lehen kontagarriak

Definizioa

Espazio topologiko bat etan, edozein elementutarako bere inguruneen oinharri kontagarri bat existitzen denean, espazioa lehen kontagarria dela diogu.

Ikus ditzagun orain honelako espaziotan, multzo irekia, hertsia eta hertsiduraren propietate karakteristiko batzu; eta halaber, etengabetasunarena ere.

Askotan, propietate karakteristiko hauk, definizio gisa ematen dira Analisian eta BUP mailan.

Teorema

(1) Bira espazio topologiko eta lehen kontagarri bat, E, eta A beraren azpimultzoa.
x, A multzoarekiko elementu itsatsia da, baldin eta soilik baldin, A-ren barnean existitzen bada suzesio bat $\{x_n\}$, $x_n \longrightarrow x$ izanik. Hau da:

$$x \in \bar{A} \iff \exists \{x_n\} \subset A \ni x_n \longrightarrow x .$$

(2) Bira E espazio topologiko eta lehen kontagarria eta $F \subset E$ azpimultzo bat.
F multzo hertsia da, baldin eta soilik baldin, F-n dagoen edozein suzesiotarako, $\{x_n\}$, beraren puntu limiteak F-n badaude. Hots:

$$F \subset E \text{ multzo hertsia} \iff \forall \{x_n\} \subset F \wedge x_n \longrightarrow x \implies x \in F$$

(3) Bira E espazio topologiko eta lehen kontagarri eta A beraren azpimultzo bat.
A multzo irekia da, baldin eta soilik baldin, E-ren edozein suzesiotarako $\{x_n\}$, non x beraren puntu limitea baita eta A-n baitago, existitzen bada zenbaki natural bat n_o non x_n A-n baitago $\forall n \geq n_o$. Hau da:

$$A \subset E \text{ irekia} \iff \{x_n\} \subset E \ni x_n \longrightarrow x \in A \implies \exists n_o \ni x_n \in A \ \forall n \geq n_o .$$

Frogapenak:

(1) $\Longrightarrow$) Biz $x \in \bar{A}$. E lehen kontagarria denez, x-en inguruneek, guttienez, oinharri kontagarri bat $\{U_n / n = 1,2 \ldots\}$ dute.
Defini dezagun $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \quad \forall n$
V_n x-en ingurune bat da, zeren x-en inguruneen ebakidura finitu batetik sortu baita, eta $\{V_n / n = 1,2 \ldots\}$ inguruneen oinharri kontagarri bat da, U_n oinharrizko ingurunea izateagatik edozein n-tarako
Gainera, $V_1 \supset V_2 \supset \ldots\ldots \supset V_n \supset \ldots\ldots$ erlazioak betetzen dira V_n-ren definizioaren bidez.
Bestalde, $\bar{A}$ definizioz:

$$\forall n \qquad V_n \cap A \neq \emptyset \iff \exists x_n \in V_n \cap A \quad \forall n$$

Era honetan , suzesio bat, $\{x_n\}$ aurkitu dugu non $x_n \longrightarrow x$ baita $V_1 \supset V_2 \supset \ldots\ldots \supset V_n \supset \ldots\ldots$ erlazioak betetzen direlako.

$\Longleftarrow$) Ikusi dugunez "$\exists \{x_n\} \subset A \wedge x_n \longrightarrow x \implies x \in \bar{A}$ " propietatea espazio topologiko guztiek betetzen dute.

(2) $\Longrightarrow$) Bira $F \subset E$, F multzo hertsi bat eta $\{x_n\} \subset E$ non $x_n \longrightarrow x$ baita.
Aurreko propietateagatik $x \in \bar{F}$ eta F hertsia denez $\bar{F} = F$ ditugu; hau da, $x \in F$.

$\Longleftarrow$) Suposa ditzagun $F \subset E$ eta ondoko erlazioa:

$$\{x_n\} \subset F \ni x_n \longrightarrow x \implies x \ F \ .$$

F hertsia dela ikusi nahi dugu, hau da, $\bar{F} = F$ dela.
Biz $x \in \bar{F}$ eta (1). propietatearen bidez:

$$\exists \{x_n\} \subset F \ \wedge \ x_n \longrightarrow x$$

eta hipotesiaz:

$$x \in F.$$

Honelatan, ba, $\bar{F} \subset F$ dugu eta $F \subset \bar{F}$ beti egia denez $F = \bar{F}$ berdintza atera dezakegu.

(3) $\Longrightarrow$) Bira multzo ireki bat, A, eta suzesio bat $\{x_n\}$, non $\{x_n\} \subset A$ eta $x_n \longrightarrow x \in A$ erlazioak osotzen baititu.

A multzo irekia denez eta A-n dagoenez, A multzoa x-en ingurune bat da; bestalde, x $\{x_n\}$ -ren limitea denez:

$$\exists n_o \in \mathbb{N} \ni x_n \in A \quad \forall n \geq n_o$$

$\Longleftarrow$) Alderantzizko propietatea frogatzeko, har dezagun baliokidetzaren eskuineko erlazioa hipotesi gisa. Hau da,

$$x_n \longrightarrow x \in A \implies \exists n_o \ni x_n \in A \quad \forall n \geq n_o.$$

A' hertsia dela ikusiz, A irekia dela frogatuko dugu.
Kontsidera dezagun suzesio bat, $\{x_n\}$, $\{x_n\} \subset A'$ eta $x_n \longrightarrow x$ izanik. x puntua A-n egongo balitz, hipotesiaren bidez:

$$\exists n_o \ni x_n \in A \quad \forall n \geq n_o$$

Honelatan, ba, $\{x_n\} \not\subset A'$ baina $\{x_n\}$ A'-ren suzesio bat denez, x puntua A' multzoan egon behar duela ateratzen da. Hau da:

$$\{x_n\} \subset A' \wedge x_n \to x \Rightarrow x \in A'$$

eta (2). propietateagatik A' multzoa hertsia da.

Teorema

Kontsidera ditzagun espazio topologiko bi, E eta F, E lehen kontagarria izanik eta funtzio bat, f, $f:E \longrightarrow F$.

Era honetan, f etengabea da baldin eta soilik baldin E-ren edozein suzesiotarako, $\{x_n\}$, $x_n \longrightarrow x$ baldin bada, $f(x_n) \to f(x)$ badugu F espazioan. Hau da:

$f:E \longrightarrow F$, etengabea $\iff$ ($x_n \longrightarrow x$, E espazioan $\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$, F espazioan).

Frogapena:

$\Longrightarrow$) Suposa dezagun, $f:E \longrightarrow F$, funtzio etengabe bat. Etengabetasunaren definizioaren bidez:

$$\forall U \in \mathcal{U}(f(x)) \qquad f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x).$$

Har dezagun suzesio bat $\{x_n\} \subset E$ non $x_n \longrightarrow x$ baita. Honelatan, ba,

$$\exists n_u \ni \quad x_n \in f^{-1}(U) \quad \forall n \geq n_u$$

eta f aplikatuz:

$$f(x_n) \in U \quad \forall n \geq n_u \Longrightarrow f(x_n) \to f(x) .$$

$\Longleftarrow$) Suposa dezagun, orain, ondoko erlazioa betetzen dela:

$x_n \longrightarrow x$ E espazioan $\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$, F espazioan.

f etengabea dela ikusi nahi dugu, hau da,

$$\forall U \in \mathcal{U}(f(x)) \quad , \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$$

Kontsidera dezagun $U \in \mathcal{U}(f(x))$ f(x)-en edozein ingurune bat.

$$U \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow \exists A \text{ irekia}, A \subset F \ni f(x) \in A \subset U \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U)$$

hipotesiaz:

$$x_n \longrightarrow x \in f^{-1}(A) \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow f(x) \in A$$

eta A irekia denez:

$$\exists\, n_o \;/\; f(x_n) \in A \qquad \forall n \geq n_o$$

Honelatan, ba,

$$\{x_n\} \subset f^{-1}(A) \qquad \forall n \geq n_o$$

eta (3). propietatearen bidez:

$$f^{-1}(A) \text{ irekia da.}$$

Hau da,

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$$

zeren $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U)$ baita.

SEIGARREN GAIA

AZPIESPAZIO TOPOLOGIKOAK.

- Definizioa.
- Propietateak.

AZPIESPAZIO TOPOLOGIKOAK

Eman ditzagun espazio topologiko bat, $(X, \mathcal{T})$, eta X-en edozein azpimultzo bat, P.

P azpimultzoan edozein topologia kontsidera dezakegu, noski, baina $\mathcal{T}$ topologiarekin erlazionaturik dagoen topologia bat, $\mathcal{T}_P$, aztertuko dugu, berarén interesagatik.

Definizioa

Bira espazio topologiko bat, $(X, \mathcal{T})$, $P \subset X$, eta $\mathcal{T}_P = \{ A \cap P \mid A \in \mathcal{T} \}$ familia. $\mathcal{T}_P$-k P multzoan topologia bat definitzen du, eta $\mathcal{T}_P$, P-n X-ek eragindako topologia edo topologia induzitua deitzen da; $(P, \mathcal{T}_P)$, aldiz, azpiespazio topologikoa.

Oharra

Askotan, "X espazio topologikoa" edo "P azpiespazio topologikoa" esaten dugu, "$(X, \mathcal{T})$ espazio topologikoa" edo "$(P, \mathcal{T}_P)$ azpiespazio topologikoa" esan nahian.

Adibideak

a) Bira multzo bat, X, topologia diskretuarekin (edo indiskretuarekin), eta bararen azpimultzo bat, P. Orduan, $\mathcal{T}_P$ P-ren topologia diskretua (edo indiskretua) da.

b) Biz zenbaki errealen multzoa, $\mathbb{R}$, ohizko topologiarekin, eta kontsidera dezagun zenbaki naturalen multzoa, $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$-ren azpimultzo bat da, eta $\mathbb{R}$-ren ohizko topologiak $\mathbb{N}$-n induzitzen duen topologia, $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, topologia diskretua da.

Adibide honetan ikus dezakegunez, $(P, \mathcal{T}_P)$ azpiespazioaren multzo irekiak ez dira normalki irekiak $(X, \mathcal{T})$ espazioan, zeren $\mathbb{N}$-ren atomo guztiak, $\{n\}$, irekiak baitira $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ azpiespazioan, baina ez $\mathbb{R}$-ren ohizko topologiarako.

Propietateak

Bira espazio topologiko bat, $(X, \mathcal{T})$ eta $(P, \mathcal{T}_P)$, berarен azpiespazio bat. P multzoaren puntu eta azpimultzo guztiak, halaber, X-enak dira.

Honelatan, ba, biz P-ren edozein azpimultzo bat, A. Adibidez, A-ren hertsidura $\mathcal{T}$ topologian edo $\mathcal{T}_P$ topologian

kontsidera dezakegu, hau da, $\overline{A}$ edo $\overline{A}_P$; berdin A^d edo A^d_P, eta abar.

Nolako erlazioak diren multzo bikote hauen artean ondoko teoreman azter dezakegu.

Teorema

Bira $(X, \mathcal{Z})$ espazio topologiko bat, eta beraren azpiespazio bat, $(P, \mathcal{Z}_P)$.

(1) $(X, \mathcal{Z})$ espazioan, multzo irekien edozein oinharritarako, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_P = \{ B \cap P \mid B \in \mathcal{B} \}$ familia irekien oinharria da P azpiespazioan.

(2) Biz $p \in P$. P azpiespazioaren multzo bat, V, p-ren ingurunea da, baldin eta soilik baldin X espazioan p-ren inguru bat, U, existitzen bada, non $V = U \cap P$ baita:

$$V \in \mathcal{U}_P(p) \iff \exists\, U \in \mathcal{U}(p) \ni V = U \cap P.$$

(3) Bira $p \in P$ eta p-ren inguruen oinharri bat, $\mathcal{B}(p)$, X espazioan. Era honetan, $\mathcal{B}_P(p) = \{ B \cap P \mid B \in \mathcal{B}(p) \}$ familia p-ren inguruen oinharri bat da P azpiespazioan.

(4) Demagun P-ren azpimultzo bat, A. $(A \subset P)$
P azpiespazioan A multzoa hertsia da baldin eta soilik baldin existitzen bada multzo hertsi bat, F, X espazioan, non $A = F \cap P$ baita. Hau da:

$\forall\, A \subset P$, A hertsia da P azpiespazioan $\iff \exists\, F$ hertsia X espazioan $\ni A = F \cap P$.

(5) Biz $A \subset P$; orduan, $\overline{A}_P = \overline{A} \cap P$ eta $A^d_P = A^d \cap P$ berdintzak betetzen dira.

(6) Biz $A \subset P$; era honetan, $\overset{\circ}{A}_P \subset P \cap \overset{\circ}{A}$ eta $A^*_P \subset A^* \cap P$ erlazioak aurkitzen dira.

Frogapena

(1) Biz multzo ireki bat, A, P azpiespazioan.
A multzoa $B \cap P$ multzoren bildura bezala ipin daitekeela ikusi behar dugu, $B \in \mathcal{B}$ delarik:

$A_1 \cap P$ azpiespazioan irekia denez gero, $A = A_1 \cap P \wedge A_1 \in \mathcal{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ($\mathcal{B}$ oinharria) $A = A_1 \cap P$ eta $A_1 = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda$ non $B_\lambda \in \mathcal{B}$ baita $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = A_1 \cap P = (\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda) \cap P = \bigcup_{\lambda\in I} (B_\lambda \cap P)$ dugu.

Honelatan, ba,

$A = \bigcup_{\lambda\in I} (B_\lambda \cap P)$ non $B_\lambda \in \mathcal{B}$ baita, hau da,

$\mathcal{B}_P = \{ B \cap P \mid B \in \mathcal{B} \}$ familia P azpiespazioan multzo irekien oinharri bat da.

(2) Biz $p \in P$ eta eman dezagun P azpiespazioan p-ren ingurune bat, $V; \{V \in \mathcal{U}_P(p)\}$.

Definizioz, $\exists\, A_P \in \mathcal{Z}_P$ non $p \in A_P \subset V$ baita, eta, bestalde, $A_P = A \cap P$ dugu, $A \in \mathcal{Z}$ izanik; hau da, $p \in A \cap P \subset V$.

Honelatan, ba, $p \in A$ eta $A \in \mathcal{Z} \Rightarrow A \in \mathcal{U}(p)$ eta $A \cup V = U \in \mathcal{U}(p)$

Azkenez, $V = U \cap P$ dela ikusiko dugu:

$$U \cap P = (A \cup V) \cap P = \underset{V\subset P}{(A \cap P) \cup (V \cap P)} = \underset{A\cap P\subset V}{(A \cap P) \cup V} = V.$$

(3) Biz $\mathcal{B}(p)$, p-ren inguruneen oinharri bat X espazioan. Kontsidera dezagun $\mathcal{B}_P(p) = \{ B \cap P \mid B \in \mathcal{B}(p) \}$ familia.

2. puntuarengatik, $B \subset P \in \mathcal{U}_P(p)$, hots, $\mathcal{B}_P(p) \subset \mathcal{U}_P(p)$.

Dakusagun orain $B \cap P$ inguruneak oinharrizkoak direla, hau da; $\forall V \in \mathcal{U}_P(p)$, $\exists\, B \cap P \in \mathcal{B}_P(p)$ non $B \cap P \subset V$ baita.

$V \in \mathcal{U}_P(p) \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} V = U \cap P \wedge U \in \mathcal{U}(p) \Longleftrightarrow V = U \cap P \wedge \underset{\mathcal{B}(p) \text{ oink.}}{\exists\, B \in \mathcal{B}(p)}$,

$p \in B \subset U \Rightarrow p \in B \cap P \subset U \cap P = V.$

(4) Biz $A \subset P$ eta A multzo hertsia P azpiespazioan.

A multzo hertsia P-n $\Longleftrightarrow A' = P - A$ irekia P-n $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow P - A = U \cap P \wedge U \in \mathcal{Z} \Longleftrightarrow P - (P - A) = P - (U \cap P) \wedge U \in \mathcal{Z} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A = P \cap (U \cap P)' = P \cap (U' \cup P') = P \cap U'$ eta U' hertsia X espazioan, zeren $U \in \mathcal{Z}$ baita.

(5) Lehenik ikus dezagun $A_P = \bar{A} \cap P$ betetzen dela.

$$\bar{A}_P = \bigcap \{ F \subset P \mid F \text{ hertsia } \mathcal{Z}_P\text{-n} \wedge A \subset F \} \overset{(4)}{=}$$

$$= \bigcap \{ F' \cap P \mid F' \text{ hertsia } \mathcal{Z}\text{-n} \wedge A \subset F' \} =$$

$$= \left[\bigcap \{ F' \mid F' \text{ hertsia } \mathcal{Z}\text{-n} \wedge A \subset F' \} \right] \cap P = \bar{A} \cap P.$$

Bestalde, $A_P^d = A^d \cap P$ berdintza froga dezagun.

$p \in A_P^d \iff V \cap (A \cap \{p\}) \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{U}_P(p)$ $\underset{(2)}{\iff}$

$\iff (U \cap P) \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{U}(p) \iff$

$\underset{A-\{p\}\subset P}{\iff} U \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{U}(p) \underset{p\in P}{\iff}$ $p \in A^d \wedge p \in P \iff p \in A^d \cap P$.

(6) Biz $A \subset P$ eta guk frogatu nahi duguna, $A \cap P \subset A_P$ erlazioa da.

$\overset{\circ}{A} \cap P \subset A$ (zeren $\overset{\circ}{A} \subset A$ baita)

$\overset{\circ}{A} \cap P \in \mathcal{Z}_P$ (zeren $\overset{\circ}{A}$, $\mathcal{Z}$ -n, irekia baita)

Beraz, definizioaren bidez, $\overset{\circ}{A} \cap P \subset \overset{\circ}{A}_P$

Ikus dezagun orain, $A_P^* \subset A^* \cap P$ nola betetzen den.

$A_P^* = \overline{A}_P \cap \overline{(P - A)}_P \underset{(5)}{=} (\overline{A} \cap P) \cap \overline{(P - A \cap P)} =$

$= (\overline{A} \cap \overline{P - A}) \cap P \subset (\overline{A} \cap \overline{A'}) \cap P = A^* \cap P.$

$P-A \subset X-A = A'$

Teorema

Bira X espazio topologiko bat eta P, beraren azpiespazio bat. Honelatan, ba, P-ren edozein azpiespazio, Q, X-en azpiespazio bat da.

Frogapena

Bira $(X, \mathcal{Z})$ espazio topologiko bat, $(P, \mathcal{Z}_P)$ beraren azpiespazio bat, eta $(Q, \mathcal{Z}_{PQ})$, P-ren azpiespazioa.

$Q \subset X$ erlazio betetzen denez gero, $(X, \ )$ espazioarekiko $(Q, \mathcal{Z}_Q)$ azpiespazioa kontsidera dezakegu.

Ikusi behar da $\mathcal{Z}_Q = \mathcal{Z}_{PQ}$ berdintza betetzen den ala ez.

$$A \in \mathcal{Z}_{PQ} \iff A = A_1 \cap Q \wedge A_1 \in \mathcal{Z}_P \iff$$

$$\iff A = A_1 \cap Q \wedge A_1 = A_2 \cap P \wedge A_2 \in \mathcal{Z} \iff$$

$$\iff A = A_2 \cap P \cap Q \wedge A_2 \in \mathcal{Z} \iff$$

$$\underset{Q\subset P}{\iff} A = A_2 \cap P \wedge A_2 \in \mathcal{Z} \iff A \in \mathcal{Z}_Q.$$

Propietatea

Espazio topologiko bat Hausdorff-ena bada, beraren azpiespazio guztiak ere Hausdorff-enak dirateke.

Frogapena

Eman ditzagun Hausdorff-en espazio topologiko bat, E, eta beronen azpiespazio bat, A.

Bira $x, y \in A$, $x \neq y$ izanik.

E Hausdorff-en espazioa denez gero, $\exists\ U \in \mathcal{U}(x) \wedge V \in \mathcal{U}(y)$ non $U \cap V = \emptyset$ baita.

Baina aurreko teorema baten arauera, $A \cap U \in \mathcal{U}_A(x) \wedge A \cap V \in \mathcal{U}_A(y)$ ditugu, eta,

$$(A \cap U) \cap (A \cap V) = A \cap (U \cap V) = \emptyset$$

Beraz, A azpiespazioa ere Hausdorff-ena da

ZAZPIGARREN GAIA

BIDERKADUR ESPAZIO TOPOLOGIKOAK

- Definizioa.
- Propietateak.

BIDERKADUR ESPAZIO TOPOLOGIKOAK

Espazio hauk erabat premiazkoak zaizkigu, zeren adibidez, $\mathbb{R}$-ren topologiatik abiatuz, asko interesatzen baitzaigu $\mathbb{R}^n$ espazioen topologiak ikastea. Beraz, orain egingo duguna zera izango da: espazio topologiko batzu emanda, $(E_i, \mathcal{T}_i)$, $i=1, \ldots n$, $\prod_{i=1}^{n} E_i$ multzoan definitu ahal den topologia berezi bat ikasiko dugu; gauzak gehiegi ez konplikatzearren, biderkadura finituak ez beste ikasiko ditugu.

Bira $(E_1, \mathcal{T}_1)$, ... $(E_n, \mathcal{T}_n)$ espazio topologikoak. Dakigunez, E_i multzoen biderkadur multzoa honela defini daiteke:

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \{ (x_1, \ldots x_n) \mid \forall\ i=1, \ldots n,\ x_i \in E_i \}$$

$\prod_{i=1}^{n} E_i$ multzotik E_i multzoetarako aplikazio interesgarri batzu definitu ahal dira:

$$P_i : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow E_i$$
$$(x_1, \ldots x_n) \rightsquigarrow x_i$$

Aplikazio hauk projekzioak deitu ohi dira, eta

$\forall\ i,\ A_i \subset E_i$ badugu, $P_i^{-1}(A_i) = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$ eta

$P_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap P_n^{-1}(A_n) = A_1 \times \cdots \times A_n$ berdintzak dituzkegu.

Kontsidera ditzagun orain P_i projekzio guztiak etengabeak direnako $\prod_{i=1}^{n} E_i$ multzoan definituriko topologiak; ba dago guttienez honelako topologia bat: diskretua. Topologia hauetarako, $E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times \mathcal{O}_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$ multzoak, $\mathcal{O}_i$ multzoa E_i espazioan irekia izanik, irekiak dira; orduan, multzo hauen ebakidura finituen bildurak ere irekiak izango dira.

Honelatan, ondoko gauzak frogatu ahal dira:

- goiko tipoaren multzoen ebakidura finituen bildurak topologia bat osotzen dute.
- topologia horretarako projekzioak etengabeak dira.
- propietate hori (projekzioak etengabeak izatea) duten topologien artean, aurrean definitu dugun topologia, tti-

kiena da. Topologia hau $\mathcal{T}_i$ topologien biderkadura dela esango dugu. Gainera, E_i espazioen irekien biderkadurak, hau da, $O_1 \times \cdots \times O_n$ multzoak, O_i irekia izanik, $\prod_{i=1}^{n} E_i$ espazioaren ireki-oinharri bat osotzen dute.

Espazio hauen zenbait propietate

1) Bira $\forall$ i=1, ...n, $A_i \subset E_i$. Orduan, $\overline{A_1 \times \cdots \times A_n} = \overline{A}_1 \times \cdots \times \overline{A}_n$.

2) Projekzioak etengabeak, suprajektiboak eta irekiak dira.

3) $\prod_{i=1}^{n} E_i$ espazioaren suzesio bat konbergentea da b.s.b. projekzioen bidez lortzen ditugun E_i-ren suzesioak konbergenteak badira, E_i espazioan $\forall$ i=1, ...n; hau da,

$$(x_1^m, \ldots x_n^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} (x_1, \ldots x_n) \iff x_i^m \xrightarrow[m \to \infty]{} x_i \text{ , } E_i \text{ espazioan } \forall \text{ i=1, ...n.}$$

4) Biderkadura topologikoa elkarkorra da, hau da, A, B eta C hiru espazio topologiko badira, $A \times (B \times C)$ eta $(A \times B) \times C$ espazioen artean definitu ahal den aplikazio kanonikoa:

$$(a,(b,c)) \rightsquigarrow ((a,b),c)$$

homeomorfismo bat dateke.

5) Biderkadura topologikoa trukakorra da, hots, A eta B bi espazio topologiko izanik,

$$\varphi: A \times B \longrightarrow B \times A \quad \text{aplikazioa homeomorfismo bat da.}$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (y,x)$$

6) Biz $(\prod_{i=1}^{n} E_i, \mathcal{T})$ bikotea $(E_i, \mathcal{T}_i)$ espazioen biderkadura topologikoa.

Biz $(F, \mathcal{T}')$ beste espazio topologiko bat.

F-tik $\prod_{i=1}^{n} E_i$ -rako aplikazio bat definiturik badugu, aplikazio horren izena f izanik, f etengabea da b.s.b. $P_i \circ f$ etengabea bada, $\forall$ i=1, ...n.

ZORTZIGARREN GAIA

ESPAZIO KONPAKTUAK ETA ESPAZIO KONEXUAK

- Espazio konpaktuak.
- Espazio topologiko baten multzo konpaktuak.
- Aplikazio etengabeak eta espazio konpaktuak.
- Espazio konexuak.
- Multzo konexuak.
- Espazio topologiko baten osagai konexuak.
- Arkuzko konexutasuna.

VIII. GAIA ESPAZIO KONPAKTUAK ETA ESPAZIO KONEXUAK

Gai honetan espazio topologiko moeta bi ikusiko ditugu: espazio topologiko konpaktuak eta espazio topologiko konexuak.

Multzo konpaktuak eta multzo konexuak R-n oso garrantzitsuak eta erabiliak dira, hori dela ta Topologian eragin handia izan dute, batez ere konpaktuak.

Multzo finituen hainbat propietate multzo konpaktuetan betetzen dira eta askotan multzo konpaktuak multzo finituak bezala kontsideratu ahal dira, beraz hor datza espazio hauen garrantzirik nabarmenena.

Espazio konpaktuak

Bira E multzo bat eta $\{A_i\}_{i\in I}$ E-ren azpimultzoen familia bat. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ bada, $\{A_i\}_{i\in I}$ familia E-ren estalki bat dela esaten dugu. $\{A_i\}_{i\in I}$ familia E-ren estalki bat izanez, $I_1 \subset I$ existitzen bada, non $E = \bigcup_{i\in I_1} A_i$ baita, orduan $\{A_i\}_{i\in I_1}$, $\{A_i\}_{i\in I}$ familiaren azpiestalki bat dela diogu.

Adigai hauk emanik, orain espazio topologikoei dagozkien estalkiez mintzatuko gara.

Bira $(E,\mathcal{T})$ espazio topologiko bat eta $\{A_i\}_{i\in I}$ E-ren estalki bat. A_i $\forall i \in I$, topologiaren ireki bat denean, $\{A_i\}_{i\in I}$ E-ren estalki ireki bat dela diogu.

Definizioa

$(E,\mathcal{T})$ espazio topologiko batetan, edozein estalki ireki batetatik azpiestalki finitu bat atera badezakegu, orduan E espazioa konpaktua deitzen dugu.

Karakterizapena

E konpaktua da, baldin eta soilik baldin E-ren ebaketa hutsa duen hertsien edozein familia batetatik, azpifamilia finitu bat, ebaketa hutsa duena, atera badezakegu.

Frogapena

- Bira E konpaktua eta $\{F_i\}_{i\in I}$ E-ren ebaketa hutsa duen hertsien familia bat. Froga dezagun orain $\{F_i\}_{i\in I}$ familiatik ebaketa hutsa duen azpifamilia finitu bat atera dezakegula.

$\{F_i\}_{i\in I}$ E-ren hertsien familia bat denez, $\{F_i'\}_{i\in I}$ E-ren irekien familia bat da.

$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)' = \emptyset' \Rightarrow \bigcup_{i\in I} F_i' = E$ da.

Beraz, $\{F_i'\}_{i\in I}$ E-ren estalki ireki bat da eta E konpaktua izanez, existitzen da azpiestalki finitu bat $\{F_i'\}_{i=1}^{n}$ non $\bigcup_{i=1}^{n} F_i' = E$ baita.

$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = E \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i'\right)' = E' \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ da eta honela karakterizapenaren propietatea betetzen da.

- Biz $\{F_i\}_{i\in I}$ hertsien edozein familia bat karakterizapenaren propietatea betez eta froga dezagun E konpaktua dela.

$\{F_i\}_{i\in I}$ hertsiren familia bat denez, $\{F_i'\}_{i\in I}$ irekiren familia bat da.

$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ denez, $\bigcup_{i\in I} F_i' = E$ da.

Honela, $\{F_i'\}_{i\in I}$ E-ren estalki ireki bat osotzen du.

$\{F_i\}_{i\in I}$ familiatik $\{F_1,\ldots,F_n\}$ familia finitu bat atera dezakedu non $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ baita, beraz $\bigcup_{i=1}^{n} F_i' = E$ da, eta honela E konpaktua da, zeren edozein estalki ireki batetatik, $\{F_i'\}_{i\in I}$ halegia, azpiestalki finitu bat atera baitezakegu.

Propietateak

E espazio konpaktu batetan, propietate hauk betetzen dira.

1- Hertsien edozein suzesio guttikorren ebakidura, multzo ez-huts bat da.

2- E-ren parte infinitu guztiek akumulapen punturen bat dute.

Frogapena

1- Biz $F_1 \supset F_2 \supset \ldots\ldots \supset F_n \supset \ldots\ldots$ E-ren hertsien suzesio bat, beraz $\exists\, n_p$ non $\bigcap_{i=1}^{p} F_{n_i} = F_{n_p} \neq \emptyset$ baita $(n_1 < \ldots\ldots < n_p)$.

$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ balitz, orduan azpifamilia finitu bat atera genzake non $\bigcap_{i=1}^{p} F_{n_i} = \emptyset$ baita, baina hau ez da posible, beraz $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ da. f.n.g.l.

2- Biz A E-ren parte infinitu bat.

A parte infinitua denez, beraren barnean parte numeragarri bat existitzen da, adibidez suzesio bat, biz $\{x_n\}_{n\in N} \subset A$ non $x_n \neq x_m\ \forall n \neq m$ suzesio hori.

Har dezagun $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\ldots\}$ multzoa .

$\{\overline{A}_n\}_{n\in N}$ hertsien suzesio guttikor bat da, beraz 1 propietatea kontutan harturik $B = \bigcap_{n\in N} \overline{A}_n \neq \emptyset$ da.

Dakusagun orain B-ren puntu guztiak, A-ren akumulapen puntuak direla .

Bira $\forall a \in B$, U a puntuaren ingurune bat. Orduan $a \in \overline{A}_n\ \forall n \in N \Rightarrow U \cap A_n \neq \emptyset\ \forall n \in N$ da.

Baina $\{x_n\}_{n\in N}$ suzesioan a gai bat gehienez izan daiteke, hau da $x_{n_0} = a$, zeren $\{x_n\}_{n\in N}$-ren puntuak desberdinak dira.

Beraz $(U - \{a\}) \cap A_n \neq \emptyset \ \forall n > n_0 \Rightarrow (U - \{a\}) \cap A_n \neq \emptyset$ da eta orduan $a \in B$ A-ren akumulapen puntu bat da.

Espazio topologiko baten multzo konpaktuak

Definizioa

Biz E espazio topologikoa. E-ren azpimultzo bat A, E-k A-n eragindako topologiaz konpaktua bada, orduan A E-n konpaktua dela diogu.

Definizio honen ondorio gisa, espazio topologiko batetan edozein parte finitua konpaktua da.

Proposizioa

A, E espazio topologikoaren azpimultzo bat, konpaktua da, baldin eta soilik baldin A-ren edozein estalki ireki batetatik, non irekiak E-n baitaude, azpiestalki finitu bat atera ahal bada.

Frogapena

- Bira A E-ren multzo konpaktu bat eta $\{O_i\}_{i\in I}$ A-ren estalki ireki bat non $\{O_i\}_{i\in I}$ E-n irekiak baitira.

Kontsidera dezagun $\{O_i \cap A\}_{i\in I}$ familia. Familia hau A-ren estalki ireki bat da eta A konpaktua denez $\{O_i \cap A\}_{i=1}^{n}$ azpiestalki finitu bat atera dezakegu. Beraz $\{O_i\}_{i=1}^{n}$ A-ren estalki ireki finitu bat da.

- Alderantziz: Suposa dezagun A-ren edozein estalki ireki batetatik, non irekiak E-n baitaude, azpiestalki finitu bat atera ahal dela.

Biz $\{O_i \cap A \mid i \in I,\ O_i \in \mathcal{T}\}$ A azpiespazioaren estalki ireki bat, orduan $\{O_i\}_{i\in I}$ A-ren estalki bat da, non $O_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ baita. Orduan hipotesia kontutan harturik $\{O_i\}_{i=1}^{n}$ A-ren azpiestalki finitu bat existitzen da, beraz $\{O_i \cap A\}_{i=1}^{n}$ A-ren estalki finitu bat da. Honela A konpaktua da.

Adibideak

Ikus dezagun orain espazio konpaktuen adibide batzu:

1- Edozein espazio finitu bat topologia diskretuaz konpaktua da.

2- R topologia ohizkoaz ez da konpaktua, zeren $\{(-n,n) \mid n \in N\}$ R-ren estalki ireki bat da, baina estalki honetik ezin dezakegu atera azpiestalki finiturik.

Dakusagun orain hertsien eta konpaktuen arteko harremanak espazio topologikoetan, ondoko proposizioaren bidez.

Proposizioa

Biz $(E,\mathcal{T})$ espazio topologiko bat

1- E espazio konpaktua bada, orduan E-ren edozein azpimultzo hertsi bat konpaktua dateke.

2- E espazio banatua bada, orduan E-ren edozein azpimultzo konpaktu bat hertsia dateke.

Frogapena

1- Bira F, E-ren azpimultzo hertsi bat, eta $\{O_i \mid i \in I,\ O_i \in \mathcal{T}\}$ F-ren estalki bat Orduan $\{O_i \mid i \in I,\ O_i \in \mathcal{T}\} \cup F'$ E-ren estalki ireki bat da zeren F' irekia baita. E konpaktua denez $\{O_i\}_{i=1}^{n} \cup F'$ E-ren azpiestalki finitu bat da; eta $F \cap F' = \emptyset$ denez, $\{O_i\}_{i=1}^{n}$ F-ren azpiestalki finitu bat da, beraz F konpaktua da.

2- Bira E banatua eta A E-n konpaktua. Dakusagun A' irekia dela eta honela A hertsia dela frogatua egonen da.

Biz $y \in A'$. E banatua denez, $\forall x \in A$ existitzen dira U_x, V_x x eta y-ren ingurune bi non $U_x \cap V_x = \emptyset$ baita

$\{U_x \mid x \in A\}$ A konpaktuaren estalki ireki bat da, orduan $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ A-ren azpiestalki finitu bat atera dezakegu. Kontsidera dezagun $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

V y-ren ingurune ireki bat da, $V \cap U_{x_i} = \emptyset$ i=1,...,n da eta

$V \cap A \subset V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap V) = \emptyset \Rightarrow V \subset A'$ da.

Honela A' beraren puntu guztien ingurune bat da, eta hau irekien karakterizapen bat denez, A' irekia da.

Ondorioa

R-ren azpimultzo konpaktuak, beraren azpimultzo hertsi eta bornatuak dira.

Beraz, $\forall a,b \in R$ $[a,b]$ tartea R-n konpaktua da.

Hau kontutan harturik, R-n hain erabilia den Borel-Lebesgue-ran teorema, ikusi ahal dugu.

Borel-Lebesgue-ren teorema

Biz E R-ren azpimultzo bornatu eta hertsia. E-ren tarte irekien edozein estalkitatik azpiestalki finitu bat atera daiteke.

Aplikazio etengabeak eta espazio konpaktuak

Teorema

Bira $(E,\mathcal{T})$ espazio topologiko konpaktua eta $(F,\mathcal{T}')$ espazio topologikoa. $f: E \longrightarrow F$ aplikazio etengabea bada, orduan $f(E)$ konpaktua da.

Frogapena

Biz $\{O_i\}_{i\in I}$ $f(E)$-ren estalki ireki bat. f etengabea denez $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ E-ren estalki ireki bat izango da eta E konpaktua denez $\{f^{-1}(O_{ij})\}_{j=1}^{n}$ E-ren azpiestalki finitu bat existitzen da.

Beraz $\{O_{i_1},\dots,O_{i_n}\}$ $f(E)$-ren estalki finitu bat da, halabeharrez $f(E)$ konpaktua da f.n.g.l.

Ondorioa

E konpaktu, F banatua eta $f:E \longrightarrow F$ bijekzio etengabea badira, orduan f homeomorfismo bat dateke.

Frogapena

Hipotesis f bijekzio etengabea da, orduan homeomorfismoa dela ikusteko f hertsia dela frogatzea aski izango da.

Biz $A\subset E$ hertsia $\overset{E \text{ konpaktua}}{\Longrightarrow}$ A konpaktua $\overset{f \text{ etengabea}}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ konpaktua F-n $\overset{F \text{ banatua}}{\Longrightarrow}$ $\Longrightarrow f(A)$ hertsia F-n $\Longrightarrow$ f hertsia da.

Ondorioa

Bira $f: E \longrightarrow R$ etengabea eta E konpaktua, orduan f E-n bornatua dago eta beraren maximoa eta minimoa hartzen ditu.

Frogapena

$f(E)$ konpaktua da zeren E konpaktua eta f etengabea baitira. $f(E)\subset R$ konpaktua, halabeharrez $f(E)$ R-ren azpimultzo hertsia eta bornatua da, beraz $\exists x_1, x_2 \in E$ non $f(x_1) = \max_{x\in E} f(x)$ eta $f(x_2) = \min_{x\in E} f(x)$ baitira.

Espazio lokalki konpaktuak

Definizioa

Biz E espazio topologiko bat. E-ren puntu guztiek ingurune konpaktu bat badute, orduan E lokalki konpaktua dela diogu.

Argi ikusten denez E konpaktua bada, halabeharrez lokalki konpaktua dateke.

Baina orain ikusiko dugunez ezin da egin alderantzizko arrazonamendua. Dakigunez R ez da konpaktua, baina bai lokalki konpaktua zeren $\forall x \in R$ $\varepsilon > 0$, $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ tarte hertsi eta bornatua R-n konpaktua baita eta x_0 puntuaren ingurune bat da.

Proposizioa

Bira E lokalki konpaktua eta banatua, eta F E-ren multzo hertsi bat. Orduan, F lokalki konpaktua da.

Frogapena

Biz x F eta U E-n x-en ingurune konpaktu bat. E banatua eta $U \subset E$ konpaktua direnez, U hertsia da. Beraz $U \cap F$ hertsia da eta $U \cap F \subset U$ non U konpaktua baita, orduan $U \cap F$ U-n konpaktua da eta baita ere E-n eta F-n. $U \cap F$ F-n x-en ingurune bat da eta honela F lokalki konpaktua da.

Espazio konexuak

Intuitiboki $[0,1] \cup [2,5]$ multzoak "zati" bi dituela eta $[0,1]$ multzoak 'zati' bat bakarrik duela esaten dugu. Ideia intuitibo hau nolabait zehatzagoa gera dadin koneksutasunaren kontzeptua ematen da.

A_1, A_2 espazio topologiko baten parte bi, bi hertsi disjuntuen barnean badaude, separatuak daudela kontsideratu ahal dugu. Kontsiderazio honen ondorio gisa definizio hau dugu.

Definizioa

E espazio topologiko batetan, ez bada existitzen E-ren partiketa batere, ez-huts ez diren multzo hertsi bitan, orduan E konexua dela diogu.

Formulaz baliatuarik hau zera da:

E konexua bada ezin dezakegu idatz inoiz $E = F_1 \cup F_2$ non $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$, eta F_1, F_2 hertsiak baitira.

Aurreko definizioa emanik ondoko definizio baliokideak ditugu:

Proposizioa

Biz E espazio topologiko bat; hortaz ondorengo propietateak baliokideak dira:

1- E konexua da.

2- Ez da existitzen E-ren partiketa bat ez-huts ez diren multzo ireki bitan.

3- E-n batera hertsi eta irekiak diren multzo bakarrak $\emptyset$ eta E dira.

Frogapena

1⇒2: Absurdura eramanez, suposa dezagun $E = O_1 \cup O_2$ dela non $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ eta $O_1, O_2 \in \tau$ baitira.

Orduan $\emptyset = O_1' \cap O_2'$ eta $O_1' \cup O_2' = E$ da non O_1', O_2' E-ren hertsi ez-hutsak baitira, baina hau E konexua izatearen aurka lihoake.

2⇒3: Absurdura eramanez, suposa dezagun $E \neq A \neq \emptyset$, E-ren multzo hertsi eta ireki bat dela. Orduan $\{A, A'\}$ E-ren bi ireki ez-hutsen partiketa bat da eta hau hipotesiaren aurka lihoake.

3⇒1: Absurdura eramanez ere, E konexua ez balitz $E = F_1 \cup F_2$ idatz genezake non $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \neq \emptyset \neq F_2$ eta F_1, F_2 hertsiak baitira. Beraz F_1 edo F_2 E-ren multzo hertsi eta ireki bat da, $\emptyset$-z eta E-z desberdina, eta hau hipotesiaren aurka lihoake.

Multzo konexuak

E espazio topologiko baten multzo bat A, E-k A-n eragindako topologiaz konexua bada, orduan A konexua dela diogu.

Multzo konexuen propietateak

Biz E espazio topologikoa; hortaz ondoko propietateak betetzen dira:

1- Biz a E-n konexua, $A \cap B \neq \emptyset$ eta $A \cap B' \neq \emptyset$ bada, orduan $A \cap \dot{B} \neq \emptyset$ dateke.

Frogapena

$\dot{B} \cup \dot{B}' \cup B' = E$ da eta gainera bailkata hau disjuntua da. $A \cap B' =$ balitz, orduan $\{\dot{B} \cap A, \dot{B}' \cap A\}$ A-ren bi multzo ireki eta ez-hutsen partiketa bat litzateke eta hau A konexua izatearen aurka lihoake.

2- Biz $\{A_i\}_{i \in I}$ E-ren konexuen familia bat. $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ bada, orduan $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ konexua dateke.

Frogapena

Bira O_1, O_2 E-ren ireki bi, non $A = O_1 \cup O_2$ eta $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ baitira. A konexua dela frogatzeko O_1-ek edo O_2-ek hutsa izan behar du. Ikus dezagun hau horrela dela:

$A = \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \forall i$, $A_i \cap O_1$ eta $A_i \cap O_2$ A_i-n irekiak dira eta $\forall i \in I$ A_i konexua denez hauetariko bat multzo hutsa da. Beraz A_i O_1 edo O_2-ren barnean dago.

$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ denez, guttienez existitzen da puntu bat, x_0, non $x_0 \in A_i$ $\forall i \in I$ baita.

Eman dezagun $x_0 \in O_1$, orduan $A_i \subset O_1$ $\forall i \in I$, eta $O_2 = \emptyset$ da. Beraz A konexua da.

3- A konexua bada, $\overline{A}$ ere konexua dateke.

Frogapena

Bira O_1, O_2 E-ren ireki bi non $\overline{A} = O_1 \cup O_2$ eta $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ baitira. Orduan $A = (O_1 \cap A) \cup (O_2 \cap A)$, $O_1 \cap A$, $O_2 \cap A$ A-n irekiak eta $(O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = \emptyset$ da. A konexua denez $O_1 \cap A$ multzoak edo $O_2 \cap A$ multzoak multzo hutsa izan behar du. Suposa dezagun $O_1 \cap A = \emptyset$ dela. A, $\overline{A}$-n dentsoa denez $O_1 = \emptyset$ izan behar du. Honela A konexua dela frogaturik dago.

Orain aplikazio etengabeen eta konexutasunaren arteko harremanak ikusiko ditugu.

Teorema

Bira E espazio topologiko konexua, F espazio topologikoa eta $f: E \longrightarrow F$ aplikazio etengabea. Orduan $f(E)$ konexua da.

Frogapena:

Biz A $f(E)$-n multzo ireki eta hertsi bat. f etengabea denez $f^{-1}(A)$ E-ren multzo ireki eta hertsia da eta E konexua denez $f^{-1}(A) = \emptyset$ edo $f^{-1}(A) = E$ da. Baina $f(f^{-1}(A)) = A$ eta orduan $A = \emptyset$ edo $A = f(A)$ da. Honela $f(E)$ konexua da.

Espazio topologiko baten osagai konexuak

Bira E espazio topologiko bat eta $x \in E$. x barnean dituen multzo guztien bildura x-en osagai konexua deitzen da eta $C(x)$ idatzi.

$C(x)$ multzo konexu bat da, zeren ebakidura ez-hutsa dituen multzo konexuen bildura baita.

Beraz $\overline{C(x)}$ ere konexua da.

Definizioz $C(x)$, x bere barnean duen parte konexurik handiena da, eta horrela $C(x) = \overline{C(x)}$ da. Ondoriotzat hau dugu: Osagai konexu guztiak hertsiak dira.

Defini dezagun E-n erlazio binari hau: $x_1 \wedge x_2$ E-ren azpimultzo berean badaude. Erlazio hau baliokidetasun erlazio bat da eta erlazio honek determinatzen dituen klaseak E-ren osagai konexuak dira.

Arkuzko konexutasuna

Biz E espazio topologiko bat. $\forall a_1, a_2 \in E$, $[\alpha_1, \alpha_2]$ R-ren tarte hertsi bat eta $f: [\alpha_1, \alpha_2] \longrightarrow E$ aplikazio etengabe bat existitzen badira non $f(\alpha_1) = a_1$ eta $f(\alpha_2) = a_2$ baitira E arkuz konexua dela diogu.

$f([\alpha_1, \alpha_2])$ konexua da eta arku a_1a_2 irakurri eta $\widehat{a_1 a_2}$ idatzi ohi da.

Teorema

E arkuz konexua bada, konexua dateke.

Frogapena

Biz $a \in E$. E arkuz konexua denez, $\forall x \in E \quad \exists \widehat{ax} \in E$.

$E = \bigcup_{x \in E} \widehat{ax}$ da, hau da: E ebaketa ez-hutsa dituen multzo konexuen bildura da, beraz E konexua da. f.n.g.l.

BEDERATZIGARREN GAIA

ESPAZIO METRIKOAK.

- Distantzia.
- Bola irekiak, hertsiak. Esferak.
- Distantzia metrikoki baliokideak.
- Azpiespazio metrikoak.
- Espazio metriko baten multzo bornatuak.

ESPAZIO METRIKOAK

Sarrera

Espazio metrikoen kontzeptua 1906. urtean Fréchet emana izan zen, gero Hausdorff-ek zabaldua izanik.

Bola XIX. mendean erabiltzen ziren espazio gehienak espazio metrikoak diren, definizio hau denbora hartan egiten zen, Matematikan aurrerapen handia suposatu zen.

Honelatan, ba, distantziaren kontzeptu abstraktu bat erabiliz, espazio hauetan egiten ziren Analisiaren teorema gehienak naturalki edo era errazago batetan irteten zirela frogatu zuen Fréchet-ek.

Distantziak bete behar zituen propietateak, analisian era ugaltzen ziren espazio gehienak kontzeptu honen barruan biltzeko hartu ziren; era honetan, teoria orokor bat eginez, espazio hauen teoria partikular guztiak aterako lirateke, kasu bakoitean espazio metrikoen teoria ez oeste aplikatuz.

ESPAZIO METRIKOAK

Multzo batetan definituriko distantzia.

Biz multzo bat, E, ez-hutsa. Demagun aplikazio bat, $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_c^+$ non d-k ondoko propietateak betetzen baititu:

1) $d(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in E \times E$
2) $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall x,y \in E$ Propietate simetrikoa.
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall x,y,z \in E$ Desberdintza triangularra.
4) $d(x,y) = 0 \iff x = y \qquad \forall x,y \in E$

d aplikazioa, E-n definituriko distantzia edo metrika bat dela diogu eta d(x,y) zenbakia x eta y-ren arteko distantzia da.

Lehen hiru propietateak ez beste betetzen badira, d semidistantzia edo semimetrika bat dateke.

(E,d) bikotea, espazio metrikoa deitzen dugu eta nahasketarik sortzen ez bada, (hau da, d distantzia emanda badago aurretik), E, ez beste espazio metriko dela diokegu.

Bola irekiak, hertsiak eta esferak

Biz (E,d) espazio metrikoa. Beraren barruan multzo berezi batzu era honetan defini ditzakegu:

$$B(x_o,r) = \{ x \in E \ / \ d(x_o,x) < r \} \qquad r > 0$$

$B(x_o,r)$ x_o-n zentrua eta r erradio duen bola irekia izanik.

$$\bar{B}(x_o,r) = \{ x \in E \ / \ d(x_o,x) \leq r \} \qquad r \geq 0$$

non $\bar{B}(x_o,r)$ x_o-n zentrua eta r erradio duen bola hertsia baita.

$$S(x_o,r) = \{ x \in E \ / \ d(x_o,x) = r \} \qquad r > 0$$

eta $S(x_o,r)$ x_o-n zentrua eta r erradio duen esfera dela diogu.

Erraz ikusten denez, $S(x_o,r) = \bar{B}(x_o,r) - B(x_o,r)$ da.

Distantzia mentrikoki baliokideak.

Demagun E multzoan definituriko bi funtzio daudela, d_1 eta d_2. d_1 eta d_2 metrikoki baliokideak dira baldin eta soilik baldin bi zenbaki erreal, $m, M > 0$, aurkitu ahal baditugu, non $\forall x,y \in E$ desberdintza hauk betetzen baitira:

$$md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Md_1(x,y)$$

1. Proposizioa

E-n definituriko distantziaren multzoan, $\mathcal{M}$-n, baliokidetasun metrikoa baliokidetasun erlazio bat, R, da.

Frogapena:

. P. erreflexiboa:
$\forall d \in \mathcal{M} \quad \exists m,M = 1$ non $md \leq d \leq Md$. Beraz dRd.

. P. simetrikoa:

$\forall d_1, d_2 \in \mathcal{M}$, baldin $d_1 R d_2$ bada,

$\exists m,M$ non $md_1 \leq d_2 \leq Md_1$ baita. Orduan:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \leq 1/m\ d_2 \\ d_1 \geq 1/M\ d_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Halabeharrez, } \exists\ m' = 1/M,\ M' = 1/m \text{ non}$$

$m'd_2 \leq d_1 \leq M'd_2$ baitira. Beraz $d_2 R d_1$ f.n.g.l.

. P. iragankorra:

Bira d_1, d_2, d_3 E-n definituriko hiru distantzia non

$$\left.\begin{array}{l} d_1 R d_2 \\ d_2 R d_3 \end{array}\right\} \text{ baita. Orduan:}$$

$\exists m_1, m_2, M_1, M_2$ non $m_1 d_1 \leq d_2 \leq M_1 d_1$ eta $m_2 d_2 \leq d_3 \leq M_2 d_2$ baitira.

Halabeharrez $m_1 d_1 \leq d_2 \leq 1/m_2 \cdot d_3 \leq M_2/m_2\ d_2 \leq M_1 M_2/m_2 \cdot d_1$

Hau da, $m_2 m_1 d_1 \leq d_3 \leq M_1 M_2 d_1$. Beraz $d_1 R d_3$ eta p. iragankorra betetzen da.

AZPIESPAZIO METRIKOAK

Bira (E,d) espazio metrikoa eta E-ren azpimultzo bat, A, ez-hutsa. Demagun $d_{|A}$ aplikazioa, $d_{|A}: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_o^+$ non $d_{|A}$, d-k eragindako aplikazioa, $A \times A$ multzoan baita.

Tribialki ikusten denez, $d_{|A}$, A multzoan definituriko distantzia bat da, zeren d-ren propietate berberak betetzen baititu. Beraz (A, d_A) bikotea, (E,d) espazio metrikoaren azpiespazio bat dela diogu.

Espazio metriko baten multzo bornatuak.

Bira (E,d) espazio metrikoa eta A beraren azpimultzo bat. Demagun $\mathbb{R}^+$-ren azpimultzoa, D_A, non:

$$D_A = \{ d(x,y) \in \mathbb{R}^+ \ / \ (x,y) \in A \times A \}$$ baita.

a) D_A multzoak, $\mathbb{R}$-n supremoa badu, A bornatua dela diokegu eta

$$\delta_d(A) = \sup D_A = \sup_{(x,y) \in A \times A} d(x,y)$$ A-ren diametroa da.

b) D_A-k ez badu R-n supremorik, A ez dateke bornatua, beraren diametroa $+\infty$ izanik. Hau da:

$$\delta_d(A) = +\infty$$

Komenioz $\delta_d(\phi) = 0 \ \forall d$. Beraz ϕ E-ren multzo bornatu bat da.

Gainera, $A = \{a\}$ bada, $\delta_d(A) = \sup d(a,a) = 0$ dateke. Halabeharrez:

Biz $A \subset E$. $\delta(A) = 0$ baldin eta soilik baldin $A = \phi$ edo $A = \{a\}$ bada.

$A \subset E$ finitua bada, bornatua dateke zeren:

$D_A = \{ d(x,y) \ / \ x,y \in A \}$ finitua bailitzateke eta multzo finitu batek beti du maximoa, finitua izanik.

Biz (E,d) espazio metrikoa; d distantzia bornatua dela diogu, E-ren diametroa, $\delta_d(E)$, finitua bada.

Ikus dezagun adibide baten bidez, nola multzo bat distantzia batez bornatua izan daitekeen eta beste distantziaz ordea ez:

Adibidea:

Biz $(\mathbb{R},d)$ espazio metrikoa non:

$$\forall\, x,y \quad d(x,y) = |x-y| \quad \text{baita.}$$

Erraz ikusten denez, d delakoa distantzia bat da:

1) $d(x,y) = |x-y| \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
3) $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$
$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$

Distantzia horretaz $\delta_d(\mathbb{R}) = \sup \{ d(x,y) \;/\; x,y \in \mathbb{R} \} =$

$= \sup \{ |x-y| \;/\; x,y \in \mathbb{R} \} = \infty$

Beraz d distantzia ez da bornatua.

Demagun orain d' aplikazioa non $d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ baita.

$$d'(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

d' ere distantzia bat da:

1) $d'(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2) $d'(x,y) = 1 = d'(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \quad x \neq y$
3) $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad x \neq y \quad d'(x,y) = 1$
$x \neq y$ bada, $\forall\, z \in \mathbb{R} \quad x \neq z$ edo $y \neq z$ da, beraz $d'(x,z) = 1$ edo $d'(z,y) = 1$ dateke.
Halabeharrez $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$
$x = y$ bada, $d'(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall z \in \mathbb{R}$
4) $d'(x,y) = 0 \iff x = y$

Eta $\delta_{d'}(\mathbb{R}) = \sup \{ d'(x,y) / \; x,y \in \mathbb{R} \} = \max \{0,1\} = 1$

beraz d' bornatua da.

HIAMARGARREN GAIA

ESPAZIO METRIKOEN TOPOLOGIA.

- Distantzia batek eragindako topologia.
- Distantziak topologikoki baliokideak.
- Espazio metrizagarriak.

ESPAZIO METRIKOEN TOPOLOGIA

Distantzia batek eragindako topologia

Lehen teman topologia bat definitzeko bi forma ikusi genituen. ataz inguruneak erabiltzen zituen eta besteak irekiak.

Orain, espazio metrikoetan, inguruneen bidez topologia bat eraiki egingo dugu, eta inguruneak definitzeko distantzia bat erabiliko dugu.

Demagun (E,d) espazio metrikoa.

$\forall p \in E$, biz $\mathcal{B}(p)$, p-n zentru duten bola irekiren bilduma, erradioa edozeina izanik. Hau da:

$$\mathcal{B}(p) = \{ B(p,r) \ / \ r \in \mathbb{R} \quad r > 0 \}$$

Froga dezagun $\mathcal{B}(p)$ delakoa p-inguruneen oinharri bat dela:

1) $\mathcal{B}(p) \neq \emptyset$ tribialki ikusten da.

2) $\forall \underline{B \in \mathcal{B}(p) \Longrightarrow p \in B}$

Baldin $B \in \mathcal{B}(p)$, orduan $\exists r \in \mathbb{R}$ non $B = B(p,r)$ baita. Halabeharrez nola $d(p,p) = 0 < r$ den, $p \in B(p,r) = B$ f.n.b.l.

3) $\underline{\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(p) \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(p) \text{ non } B \subset B_1 \cap B_2 \text{ baita}}$.

Baldin $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(p)$ bada, $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ non $B_1 = B(p,r_1)$ eta $B_2 = B(p,r_2)$ baitira.

Har dezagun $B = B(p, \min\{r_1, r_2\})$. Erraz ikusten denez $B \in \mathcal{B}(p)$ eta $B \subset B_1 \cap B_2$.

4) $\underline{\forall B_1 \in \mathcal{B}(p) \Longrightarrow B_2 \ldots p \in B_2 \subset B_1 \wedge \forall q \in B_2 \ \exists B_q \in \mathcal{B}(q) \ni B_q \subset B_2}$.

Izi $B_1 \in \mathcal{B}(p)$. Halabeharrez $\exists r_1 \in \mathbb{R}$ non $B_1 = B(p,r_1)$ baita.

Dakusagun orain nola, kasu honetan, $B_1 = B_2$ hartzen badugu, lau arren propietate hau betetzen den, $B_q = B(q, r_1 - d(p,q))$ izanik.

$$\forall x \in B(q, r_1 - d(p,q)) \Longleftrightarrow d(q,x) < r_1 - d(p,q) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow d(p,q) + d(q,x) < r_1 \Rightarrow d(p,x) \leq d(p,q) + d(q,x) < r_1 \Longleftrightarrow x \in B(p,r_1).$$

Honelatan, ba,

$\forall B(p,r) \in \mathcal{B}(p) \qquad p \in B(p,r) \subset B(p,r) \wedge \forall q \in B(p,r)$
$\exists B(q, r-d(p,q))$ non $B(q, r-d(p,q)) \subset B(p,r)$ baita.

Orduan $\mathcal{B}(p)$ p-inguruneen oinharri bat da; oinharri honen bidez p-inguruneen sistema bat, $\mathcal{U}(p)$, eraiki ahal dugu:

$$\mathcal{U}(p) = \{U \subset E \ / \exists W \in \mathcal{B}(p) \ni W \subset U\}$$

Hau da, U p-ingurune bat da baldin eta soilik baldin $B(p,r)$ existitzen bada, non $B(p,r) \subset U$ baita.

p-inguruneak definiturik, bere puntu bakoitzaren inguruneren bat bere barnean daukan multzo bat E-ren ireki bat dela esaten dugu. Hau da, (E,d) espazioan A multzoa ireki bat da baldin eta soilik baldin $\forall p \in A, \exists B(p,r)$ non $B(p,r) \subset A$ baita.

Era honetan (E,d) espazio metrikoan, d distantziak induzituriko topologia bat, $\mathcal{T}_d$, dugu. $\mathcal{T}_d$, (E,d) espazio metrikoaren <u>topologia metrikoa</u> da.

<u>1. Proposizioa</u>

$\mathcal{B}'(p) = \{\bar{B}(p,r) \ / \ r > 0\}$ p-inguruneen oinharri bat da.

Frogapena:

$\bar{B}(p,r)$ ingurune bat da zeren $B(p,r) \subset \bar{B}(p,r)$ baita.
Beraz froga dezagun $\mathcal{B}'(p)$ eta $\mathcal{B}(p)$ oinharri baliokideak direla.

$\forall B(p.r) \in \mathcal{B}(p) \quad \exists \bar{B}(p, r/2) \in \mathcal{B}'(p) \ni \bar{B}(p.r/2) \subset B(p,r)$

$\forall B(p,r) \in \mathcal{B}'(p) \quad \exists B(p,r) \in \mathcal{B}(p) \ni \quad B(p,r) \subset B(p,r)$

Hau da, $\mathcal{B}(p)$ eta $\mathcal{B}'(p)$ p-inguruneen oinharri baliokideak dira.

<u>1. Teorema</u>

Biz (E,d) espazio metrikoa. d-k induzituriko topologiarako ondoko propietate hauk betetzen dira:

i) Bola irekiak multzo irekiak dira eta bola hertsiak hertsiak.

ii) (E,d) espazio banatua da. Hau da, edozein suzesio konbergentek limite bakarra du.

iii) Biz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ E-n dagoen suzesio bat. Halabeharrez $\{x_n\}$ -k x-erantz jotzen du baldin eta soilik baldin $\lim_n d(x_n,x) = 0$ bada.

Frogapena:

i) Biz $B(p,r)$ bola irekia. $\forall q \in B(p,r)$, $B(q,r-d(p,q)) \subset B(p,r)$ lehen ikusi dugunez. Beraz $B(p,r)$ multzo ireki bat da, zeren bere puntu bakoitzaren ingurune bat behintzat, bere barruan baitauka.

Demagun orain $\overline{B}(p,r)$ bola hertsia. Froga dezagun $\overline{B}(p,r)'$ multzo irekia dela eta honela $\overline{B}(p,r)$ hertsia izanen da.

$$q \in \overline{B}(p,r)' \iff d(p,q) > r \iff d(p,q)-r = r_1 > 0$$

Kontsidera dezagun $B(q,r_1)$ bola irekia.
$B(q,r_1)$-ren edozein elementutarako, x, $d(q,x) < r_1 = d(p,q)-r$, halabeharrez $d(q,x) + r < d(p,q) \leq d(p,x) + d(q,x)$.
Beraz $r < d(p,x)$, eta orduan $x \notin \overline{B}(p,r)$. Hau da,

$$\forall x \in B(q,r_1) \implies x \in \overline{B}(p,r)'$$

Hots, $\forall q \in \overline{B}(p,r)'$ $\exists B(q,r_1)$ non $B(q,r_1) \subset B(p,r)'$ baita.

Honelatan, ba, $B(p,r)'$ irekia da eta orduan $B(p,r)$ hertsia f.n.g.l.

ii) (E,d) espazio banatua da zeren:

$\forall p,q \in E$, $B(p,d(p,q)/3)$, $B(q,d(p,q)/3)$ existitzen baitira non $B(p,d(p,q)/3) \cap B(q,d(p,q)/3) = \emptyset$ baita.

iii) Biz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$.

$\{x_n\}$-k x-erantz jotzen du baldin eta soilik baldin

$\forall B(x,\varepsilon)$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_\varepsilon$ $x_n \in B(x,\varepsilon)$ bada; Hau da,

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_\varepsilon$ $0 \leq d(x_n,x) < \varepsilon$; hots ,

$$\lim_n d(x_n,x) = 0$$

Oharra:

Nahiz eta $B(p,r)$ irekia izan eta $\overline{B}(p,r)$ hertsia, $\overline{B}(p,r)$-k ez du zertan izan behar $B(p,r)$-ren hertsidura, eta $B(p,r)$ $\overline{B}(p,r)$-ren barnea ere ez.

Esate baterako:

Biz (E,d) espazio metrikoa, E infinitua izanik eta d ondoko eran definiturik:

$$\begin{cases} d(x,x) = 1 \\ d(x,y) = 0 \quad \forall x,y \quad x \neq y \end{cases}$$

Orduan $\overline{B(p,1)} = \overline{\{q \;/\; d(p,q) < 1\}} = \overline{\{p\}} = \{p\}$.

$\overline{B}(p,1) = \{q \;/\; d(p,q) \leq 1\} = E$

$B(p,1) = \{q \;/\; d(p,q) < 1\} = \{p\}$

$\overset{\circ}{\overline{B(p,1)}} = \overset{\circ}{E} = E$

Ikusten dugunez, espazio honetan $B(p,1) = \overline{B(p,1)}$ da, beraz $B(p,1)$ batera multzo ireki eta hertsia da.

Orain arte $\{B(p,r) \;/\; r \in \mathbb{R}\}$ p-inguruneen oinharri bat dela ikusi dugu, orain (E,d) lehen kontagarria dela frogatuko dugu; hots, (E,d) delakoan $\forall p \in E$ p-inguruneen oinharri kontagarri bat aurki dezakegula.

2. Teorema

(E,d) espazio metrikoa lehen kontagarria da.

Frogapena:

Ikus dezagun i) $\{B(p,1/n) \;/\; n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = \mathcal{B}_1(p)$

ii) $\{\overline{B}(p,1/n) \;/\; n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = \mathcal{B}_1'(p)$

p puntuaren inguruneen oinharriak direla.

Nola $B(p,1/n)$ eta $\overline{B}(p,1/n)$ p-inguruneak diren, $\mathcal{B}_1(p)$, $\mathcal{B}_1'(p)$ eta $\mathcal{B}(p)$ oinharri baliokideak direla besterik ez dugu frogatu behar.

Tribialki ikusten denez:

i) $\forall B(p,r) \in \mathcal{B}(p) \quad \exists\, B(p,1/n) \in \mathcal{B}_1(p) \quad \ni \quad B(p,1/n) \subset B(p,r)$

eta $\forall B(p,1/n) \in \mathcal{B}_1(p) \quad \exists\, B(p,r') \in \mathcal{B}(p) \quad \ni \quad B(p,r') \subset B(p,1/n)$

Beraz, $\mathcal{B}(p)$ eta $\mathcal{B}_1(p)$ baliokideak dira.

ii) $\mathcal{B}_1'(p)$ eta $\mathcal{B}_1(p)$ baliokideak balira, $\mathcal{B}(p)$ eta $\mathcal{B}_1'(p)$ ere baliokideak lirateke, zeren i) atalaren arauera $\mathcal{B}(p)$ eta $\mathcal{B}_1(p)$ baliokideak baitira.

$\forall B(p,1/n) \in \mathcal{B}_1(p) \quad \exists\, \overline{B}(p,1/n+1) \in \mathcal{B}_1'(p)$ non $B(p,1/n+1) \subset B(p,1/n)$ baita.

$\forall \bar{B}(p,1/n) \in \mathcal{B}_1'(p)$, $\exists B(p,1/n) \in \mathcal{B}_1(p)$ non $B(p,1/n) \subset B(p,1/n)$ baita.

Halabeharrez $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}'(p)$, $\mathcal{B}_1(p)$ eta $\mathcal{B}_1'(p)$ delakoek topologia berbera induzitzen dute. Gainera $\mathcal{B}_1(p)$ eta $\mathcal{B}_1'(p)$ p-inguruneen oinharri kontagarriak direnez gero, (E,d) lehen kontagarria da f.n.g.l.

(E,d) espazio metrikoa espazio topologiko lehen kontagarria izanik, espazio hauen propietate guztiak bete egiten ditu. Aipatu besterik ez ditugu egingo, frogapenak aurreko temetan daude eta.

3. Teorema

Bira (E,d) eta (E',d') bi espazio metriko eta A E-ren azpimultzo bat. Orduan:

i) x A-ren hertsiduran dago baldin eta soilik baldin

$$\exists \{x_n\} \subset A \quad ; \quad x_n \longrightarrow x \quad \text{bada.}$$

ii) A multzoa hertsia da baldin eta soilik baldin A-ren edozein suzesiotarako, $\{x_n\}$, non $\{x_n\}$ delakoak x-erantz jotzen baitu, x A-n badago.

iii) Biz aplikazio bat, f:E $\longrightarrow$ E' . f etengabea da baldin eta soilik baldin edozein suzesiotarako, $\{x_n\}$, non $\{x_n\}$-k x-erantz jotzen baitu, E espazioan, halabeharrez $\{f(x_n)\}$-k f(x)-erantz jotzen du, E' espazioan. Edo lehen leoremaren arauera:
f etengabeá da baldin eta soilik baldin $\forall \{x_n\} \subset E$;
$\lim_n d(x_n,x) = 0 \Longrightarrow \lim_n d'(f(x_n),f(x)) = 0$ bada.

Distantziak topologikoki baliokideak.

Bira multzo bat, E, eta E-n definituriko bi distantziak d_1, d_2. d_1 eta d_2 topologikoki baliokideak dira baldin eta soilik baldin d_1-k eta d_2-k errespektiboki induzituriko topologiak berdinak badira. Hau da, $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$

d_1 eta d_2 topologikoki baliokideak izanik sinbolikoki $d_1 \sim d_2$ idazten dugu.

4. Teorema

Bira E multzo ez-huts bat eta E-n definituriko bi distantzia, d_1, d_2. $\mathcal{T}_{d_1}$ eta $\mathcal{T}_{d_2}$ d_1-k eta d_2-k induzituriko topologiak badira, eta existitzen bada $M > 0$ non $d_2 \leq M d_1$ baita, orduan:

1) Edozein suzesio konbergente $\mathcal{T}_{d_1}$ topologiarako, $\mathcal{T}_{d_2}$ topologiarako ere konbergente dateke eta puntu berberantz jotzen.

2) $\mathcal{T}_{d_1}$ topologia $\mathcal{T}_{d_2}$ delakoa baino finagoa da; hau da

$$\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$$

Frogapena:

1) Biz $\{x_n\} \subset E$ $\wedge$ $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{d_1}} x$. Halabeharrez, 2. teoremaren arauera

$$\lim_n d_1(x_n,x) = 0 \ \wedge\ 0 \leq d_2 \leq M d_1 \Longrightarrow \lim_n M d_1(x_n,x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \lim d_2(x_n,x) = 0 \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_{d_2}} x \qquad \text{f.m.g.k.}$$

2) $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$ dela frogatzeko, $\mathcal{T}_{d_2}$- inguruneak $\mathcal{T}_{d_1}$- inguru direla frogatuko dugu.

$\forall p \in E$, biz U p- $\mathcal{T}_{d_2}$-ingurune bat. Nola $\{B_2(p,r) / r \in \mathbb{R}\}$ p-inguruneen oinharri bat den $\mathcal{T}_{d_2}$ topologiarako $\exists r \in \mathbb{R} \ni$ $B_2(p,r) \subset U$.

Har dezagun $B_1(p,r/M) = \{x / d_1(x,p) < r/M\}$ multzoa.

$\forall x \in B_1(p,r/M)$ $d_1(x,p) < r/M \Longleftrightarrow M d_1(x,p) < r \Longrightarrow d_2(x,p) < r \Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in B_2(p,r)$.

Hau da, edozein p- $\mathcal{T}_{d_2}$-ingurutarako, U, existitzen da p- $\mathcal{T}_{d_1}$-oinharriaren bola bat, $B_1(p,r')$, non $B_1(p,r') \subset U$ baita. Beraz definizioaren arauera, U $\mathcal{T}_{d_1}$-ingurune bat da.

Honelatan, ba, $\mathcal{T}_{d_1}$ $\mathcal{T}_{d_2}$ baino finagoa dela frogatu dugu.

d_1 eta d_2 distantziak metrikoki baliokideak badira, orduan d_1 eta d_2 topologikoki baliokideak direteke.

Frogapena:

d_1 eta d_2 metrikoki baliokideak dira baldin eta soilik baldin m eta M zenbaki errealak , $m,M > 0$, aurkitu ahal baditugu, non

$$md_1 \leq d_2 \leq Md_1 \quad \text{baita.}$$

$d_2 \leq Md_1$ denez gero, 4.teoremaren bidez $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$ izanen da eta gainera $d_1 \leq 1/m\, d_2$; beraz $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ da.

Bi inklusioak kontutan hartuz, $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ dugu. Halabeharrez d_1 eta d_2 topologikoki baliokideak dira.

5. Teorema

Bira E-n definituriko bi distantzia, d_1, d_2. d_1, d_2 topologikoki baliokideak dira baldin eta soilik baldin E-ren edozein puntutarako, p, eta $\forall \varepsilon > 0$ ondoko propietateak betetzen badira:

i) Baldin existitzen bada, $\delta_1 = \delta_1(p,\varepsilon)$ non $d_1(p,x) < \delta_1$ baita, halabeharrez $d_2(p,x) < \varepsilon$

ii) Baldin existitzen bada, $\delta_2 = \delta_2(p,\varepsilon)$ non $d_2(p,x) < \delta_2$ baita, halabeharrez $d_1(p,x) < \varepsilon$

Frogapena:

Bira $\mathcal{B}_1(p) = \{B_1(p,\varepsilon) \;/\; \varepsilon > 0\}$ eta $\mathcal{B}_2(p) = \{B_2(p,\varepsilon) \;/\; \varepsilon > 0\}$ p-inguruneen oinharriak d_1 eta d_2 distantziatarako errespektiboki.

$d_1 \sim d_2 \underset{\text{def.}}{\iff} \mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2} \iff \forall p \in E$ $\mathcal{B}_1(p)$ eta $\mathcal{B}_2(p)$ baliokideak dira $\iff$

$$\iff \begin{cases} \text{i) } \forall B_2(p,\ ) \in \mathcal{B}_2(p) & \exists\, B_1(p,\delta_1) \in \mathcal{B}_1(p) \ni B_1(p,\delta_1) \subset B_2(p,\varepsilon) \\ \text{ii) } \forall B_1(p,\ ) \in \mathcal{B}_1(p) & \exists\, B_2(p,\delta_2) \in \mathcal{B}_2(p) \ni B_2(p,\delta_2) \subset B_1(p,\varepsilon) \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } \forall \varepsilon > 0 & \exists\, \delta_1 = \delta_1(p,\varepsilon) \ni d_1(p,x) < \delta_1 \Rightarrow d_2(p,x) < \varepsilon \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 & \exists\, \delta_2 = \delta_2(p,\varepsilon) \ni d_2(p,x) < \delta_2 \Rightarrow d_1(p,x) < \varepsilon \end{array} \right\} \iff$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \begin{cases} \text{i) } \exists \delta_1 = \delta_1(p,\varepsilon) \ni d_1(p,x) < \delta_1 \Rightarrow d_2(p,x) < \varepsilon \\ \text{ii) } \exists \delta_2 = \delta_2(p,\varepsilon) \ni d_2(p,x) < \delta_2 \Rightarrow d_1(p,x) < \varepsilon \end{cases} \text{f.n.g.l.}$$

Espazio metrizagarriak

Biz $(E, \mathcal{T})$ espazio topologikoa. $(E, \mathcal{T})$ metrizagarria da baldin eta soilik baldin E-n definituriko distantzia bat, d, badago, non d-k induzituriko topologia, $\mathcal{T}_d$, eta $\mathcal{T}$ berberak baitira. Hau da $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Espazio metrizagarriak, beraz, espazio topologikoak dira eta, a posteriori distantzia baten bidez espazio metrikoak bihurtzen dira. Bestalde, espazio metrikoak, distantziak induzituriko topologiaz, a posteriori espazio topologikoak bihurtzen dira.

XIX. mendean zera planteiatu zen: $(E, \mathcal{T})$ espazio topologikoa metrizagarria zen ala ez halegia.

1950. inguruan SMIRNOV -ek eta NAGATA-k erantzun bat eman zioten problema honi espazio parakonpaktuak erabiliz.

HAMAIKAGARREN GAIA

ETENGABETASUNA

ESPAZIO METRIKOETAN

- Etengabetasuna.
- Bi multzoren arteko distantzia.
- Puntu baten eta multzo baten arteko distantzia.
- Etengabetasun uniformea.
- Distantziak uniformeki baliokideak.
- Distantzien baliokidetasunaren hiru tipoen arteko erlazioa.
- Isometriak.

ETENGABETASUNA ESPAZIO METRIKOETAN

Bira (E,d) espazio metrikoa eta F espazio topologikoa. Demagun $f:E \longrightarrow F$ aplikazioa. Orduan:

f x_o puntuan etengabea da baldin eta soilik baldin E-ren edozein suzesiotarako, $\{x_n\}$, non $x_n \longrightarrow x_o$ E espazioan baita, halabeharrez $f(x_n) \longrightarrow f(x_o)$ F espazioan bada.

F ere espazio metrikoa bada, d' distantziarekin baldintza hori beste modu honetan ipin dezakegu; Hau da:

f x_o puntuan etengabea da baldin eta soilik baldin E-ren edozein suzesio, $\{x_n\}$, non $\lim_n d(x_n,x_o) = 0$ baita (hau da $x_n \longrightarrow x_o$) halabeharrez $\lim_n d'(f(x_n),f(x_o)) = 0$ bada.

Espazio metrikoak lehen kontagarriak direla kontutan hartuz, emana dugun aurreko definizioa orain inguruneen oinharrien bidez ematen badugu, beste definizio baliokide bat sortzen zaiguke; Hau da:

f x_o puntuan etengabea da baldin eta soilik baldin $f(x_o)$-n zentrua duen edozein bolatarako, $B(f(x_o),\varepsilon)$, existitzen bada $B(x_o,\delta)$ non $f(B(x_o,\delta)) \subset B(f(x_o),\varepsilon)$ baita.

Hots,

f x_o puntuan etengabea da baldin eta soilik baldin

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon,x_o) \quad \ni \quad f(B(x_o,\delta)) \subset B(f(x_o),\varepsilon)$. Hau da,

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon,x_o) \quad \ni \quad x \in B(x_o,\delta) \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_o),\varepsilon)$, eta

baldintza hau betetzen da baldin eta soilik baldin:

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon,x_o) \quad \ni \quad d(x,x_o)<\delta \Longrightarrow d'(f(x),f(x_o))<\varepsilon$ bada.

f funtzioa E-ren edozein puntutan etengabea bada, orduan f etengabea dela diokegu.

Bi multzoren arteko distantzia

Bira (E,d) espazio metrikoa eta A, B bere azpimultzo ez-huts bi. A eta B arteko distantziaren definizioa ondoko hau da:

$$d(A,B) = \inf \{ d(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ / \; x \in A \wedge y \in B \}$$

Nahiz eta distantziaren izena eduki adibide baten bidez frogatuko dugunez, ez da benetako distantzia bat.

Bira (E,d) espazioa, E atomo bat ez izanik. Esate baterako $E = \{a,b\}$. Har ditzagun $A = \{a\}$ eta $B = \{a,b\}$ multzoak. (hau da, A eta B desberdinak baina ez disjuntuak).

Orduan, $d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = d(a,a) = 0$ eta $A \neq B$ da.

Beraz, d distantzien laugarren propietatea ez da betetzen, eta horregaitik bi multzoren arteko distantzia ez da benetako distantzia bat.

Puntu baten eta multzo baten arteko distantzia.

Bira (E,d) espazio metrikoa, x E-ren puntu bat eta B E-ren azpimultzo bat, ez-hutsa.

$\{x\}$ multzoaren eta B-ren arteko distantzia x eta B-ren arteko distantzia deitzen dugu. Hau da,

$$d(x,B) = d(\{x\},B) = \inf_{y \in B} d(x,y)$$

1.Teorema

Biz (E,d) espazio metrikoa. Orduan:

i) d aplikazioa, $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, etengabea da.

ii) Biz E-ren azpimultzo ez-huts bat, A. d_A aplikazioa,

$d_A: E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, etengabea da.
$x \longmapsto d(x,A)$

Frogapena:

i) $d: E\times E \longrightarrow R$ aplikazio etengabea dela frogatzen badugu, $(x,y) \hookrightarrow d(x,y)$ raren murrizpena, $d: E\times E \longrightarrow R_o^+$ delakoa, ere etengabea dateke.

Demagun $E\times E$ multzoan aplikazio bat, d', non:

$$d'((x,y),(a,b)) = \max (d(x,a),d(y,b)) \text{ baita.}$$

Erraz ikusten da, d', $E\times E$ multzoan, distantzia bat dela.

Har dezagun $\varepsilon > 0$. $d'((x,y),(a,b)) < \varepsilon/2$ bada, d' definizioaren arauera

$\max(d(x,z),d(y,b)) < \varepsilon/2$ dateke. Hau da, $d(x,a) < \varepsilon/2$ eta $d(y,b) < \varepsilon/2$.

Nola $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(y,b)$ eta
$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,y) + d(y,b)$ diren, halabeharrez

$d(x,y)-d(a,b) \leq d(a,x) + d(y,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ eta
$d(a,b)-d(x,y) \leq d(a,x) + d(y,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Hau da, $|d(x,y)-d(a,b)| < \varepsilon$

Beraz $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon/2 \ni d'((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow |d(x,y)-d(a,b)| < \varepsilon$ eta $d: E\times E \longrightarrow R$ etengabea da zeren $|\ |$ (balore absolutua) R-ren ohizko distantzia baita.

ii) Lehen atalean bezala $d_A: E \longrightarrow R$ etengabea dela frogatuko dugu.

Har ditzagun $a \in A$ eta $x,y \in E$.

$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$ eta infimoak hartuz,

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) \leq d(x,y) + \inf_{a\in A} d(y,a) \quad \text{da.}$$

Hau da, $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \Longleftrightarrow d(x,A)-d(y,A) \leq d(x,y)$

Simetrikoki eginez $d(y,A)-d(x,A) \leq d(x,y)$ ateratzen dugu.

Beraz, $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$

Baldintza hauetan,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon \ni d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |d(x,A)-d(y,A)| = |d_A(x)-d_A(y)| < \varepsilon$$

Honelatan, ba, d_A etengabea da f.n.g.l.

1. Proposizioa

Bira (E,d) espazio metrikoa eta E-ren azpimultzo bat, A. Orduan:

$$x \in \bar{A} \iff d(x,A) = 0$$

Frogapena:

Hertsiduraren karakterizapen baten bidez:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall B(x,\varepsilon) \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A \ni d(x,a) < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \inf_{a \in A} d(x,a) \leq d(x,a_\varepsilon) < \varepsilon \ \forall \varepsilon \Leftrightarrow d(x,A) = 0 \quad \text{f.n.g.l.}$$

Etengabetasun uniformea

Bira (E,d) eta (E',d') espazio metrikoak; $f:E \longrightarrow E'$ aplikazioa uniformeki etengabea da baldin eta soilik baldin:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ni d(x,y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Hemen, δ, ε delakoaren funtzio bat da eta ez (x,y) puntuarena. f soilik etengabea izango balitz, δ hori ere (x,y) puntuaren funtzioa litzateke.

Tribialki ikusten denez, f uniformeki etengabea bada, orduan etengabea dateke baina adibide batzuren bidez frogatzen den bezala, alderantzizko inplikazioa ez da beti betetzen.

2. Teorema

Bira (E,d) eta (E',d') espazio metrikoak eta $f:E \longrightarrow E'$ aplikazio bat. Orduan, f uniformeki etengabea da baldin eta soilik baldin E-ren edozein suzesiotarako $\{x_n\}$ eta $\{y_n\}$ non $\lim_n d(x_n,y_n) = 0$ baita, halabeharrez $\lim_n d'(f(x_n),f(y_n)) = 0$ bada.

Frogapena:

$\Longrightarrow$) f uniformeki etengabea bada, har ditzagun $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset E$ bi suzesio non $\lim_n d(x_n,y_n) = 0$ baita.

Orduan $\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists n_{\varepsilon'} \ni d(x_n,y_n) < \varepsilon' \qquad \forall n \geq n_{\varepsilon'}$,

f uniformeki etengabea denez gero,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni \quad d(x_n,y_n) < \delta \Longrightarrow \quad d'(f(x_n),f(y_n)) < \varepsilon$$

$\delta = \varepsilon'$ hartuz, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \wedge n_\varepsilon \geq 0 \ni d(x_n,y_n) < \delta \quad \forall n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow d'(f(x_n),f(y_n)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \lim_n d'(f(x_n),f(y_n)) = 0$$

$\Longleftarrow$) Absurdura eramanez frogatuko dugu.

f uniformeki etengabea ez balitz, definizioaren arauera

$$\exists \varepsilon > 0 \ni \forall \delta > 0 \quad \exists (x,y) \in E \times E \ni \quad d(x,y) < \delta \wedge d'(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$$

litzateke.

$\delta = 1/n \quad n \neq 0$ hartuz, $\forall n \quad \exists (x_n,y_n) \in E \times E \ni d(x_n,y_n) < \delta \wedge$

$d'(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Honela $\{x_n\}$ eta $\{y_n\}$ suzesio bi, osatuak ditugu non $\lim_n d(x_n,y_n) = 0$ eta $d'(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$ baita, hipotesiaren aurka. Beraz f uniformeki etengabea da.

Distantziak uniformeki baliokideak

Biz E-n definituriko bi distantzia d_1 eta d_2.

d_1 eta d_2 uniformeki baliokideak dira baldin eta soilik baldin identitate aplikazioa, $i:(E,d_1) \longrightarrow (E,d_2)$, isomorfismo uniformea bada; hau da, i eta i^{-1} uniformeki etengabeak badira.

Distantzien baliokidetasunaren hiru tipoen arteko erlazioa

Bira E multzoa eta E-n definituriko bi distantzia.

Erraz ikusten denez, d_1 eta d_2 uniformeki baliokideak badira, orduan d_1 eta d_2 topologikoki baliokideak dirateke, zeren i eta i^{-1} uniformeki etengabeak badira, etengabeak baitirakete.

Alderantzizko inplikazioa ez da betetzen zeren aplikazio etengabe batek ez du zertan uniformeki etengabea izan behar.

d_1 eta d_2 metrikoki baliokideak badira, orduan $\exists\, m,M$ non $md_1 \leq d_2 \leq Md_1$ baita. Beraz $i:(E,d_1) \longrightarrow (E,d_2)$ isomorfismo uniformea da, i eta i^{-1} uniformeki etengabeak izanik; Hau da:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x,y \in E \quad \exists \delta = \varepsilon/M = \delta(\varepsilon) \ni d_1(x,y) < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d_2(x,y) \leq Md_1(x,y) < M.\varepsilon/M = \varepsilon$$

Hau da, i uniformeki etengabea da.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x,y \in E \quad \ni d_2(x,y) < \delta = m.\varepsilon \Longrightarrow d_1(x,y) \leq 1/m \cdot d_2(x,y) < 1/m\, m\varepsilon = \varepsilon$$

Beraz, i^{-1} uniformeki etengabea da.

Adibideen bidez ikusi ahal denez, d_1 eta d_2 uniformeki baliokideak badira, normalki ez dira metrikoki baliokideak.

Orduan distantzien baliokidetasunen arteko erlazioak era honetan idatz ditzakegu:

d_1 eta d_2 metrikoki baliokideak $\not\Longleftrightarrow$ d_1 eta d_2 uniformeki baliokideak $\not\Longleftrightarrow$ d_1 eta d_2 topologikoki baliokideak.

Isometriak

Bira (E,d) eta (E',d') bi espazio metriko eta $f:E \longrightarrow E'$ aplikazio bat. Orduan f isometria bat da baldin eta soilik baldin

$$d'(f(x),f(y)) = d(x,y) \qquad \forall x,y \in E$$

Tribialki ikusten denez, f isometria bada, orduan f isomorfismo uniformea dateke.

E-tik E' gainerako isometria bat badago, o duan (E,d) eta (E',d') isometrikoak direla esaten dugu.

HAMABIGARREN GAIA

OSOTASUNA ESPAZIO METRIKOETAN

- Suzesio cauchyarrak.
- Espazio metriko osoak.
- Espazio metriko baten multzo osoak.

OSOTASUNA ESPAZIO METRIKOETAN

Suzesio Cauchyarrak

Biz (E,d) espazio metrikoa. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suzesioa (E,d) espazioan Cauchyarra da baldin eta soilik baldin:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon) \ni \forall m,n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_m,x_n)<\varepsilon$$

Tribialki ikusten denez, hurrengo definizio hauk eta aurrekoa baliokideak dira.

$\{x_n\}$ suzesioa Cauchyarra da $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon) \ni \forall m \geq n_\varepsilon \ \forall p \geq 0 \quad d(x_{n+p},x_n)<$

$\{x_n\}$ suzesioa Cauchyarra da $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists n_\varepsilon = n(\varepsilon) \ni x_n \subset B(x_{n_\varepsilon},\varepsilon)$

$\forall n \geq n_\varepsilon$.

1. Teorema

Biz (E,d) espazio metrikoa. Ondoko propietate hauk betetzen dira:

1) Edozein suzesio konbergente Cauchyarra da.
2) Edozein suzesio Cauchyar bornatua da.
3) Suzesio Cauchyar baten edozein azpisuzesio Cauchyarra da.
4) Biz suzesio Cauchyar bat, $\{x_n\}$. $\{x_n\}$ delakoak azpisuzesio konbergente bat badu, orduan $\{x_n\}$ ere konbergente dateke eta beraren limitea halaber azpisuzesioarena.

Frogapena:

1) Biz $\{x_n\}$ suzesioa non $x_n \longrightarrow x$ baita.

$\forall x_m,x_n \qquad d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n)$

$x_n \longrightarrow x \iff \forall \varepsilon>0 \quad \exists n'_\varepsilon > 0 \ni d(x_m,x) < \varepsilon/2 \qquad \forall m \geq n'_\varepsilon$

$x_n \longrightarrow x \iff \forall \varepsilon>0 \quad \exists n''_\varepsilon > 0 \ni d(x_n,x) < \varepsilon/2 \qquad \forall n \geq n''_\varepsilon$

$n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ hartzen badugu, bi baldintzak batera betetzen dirateke. Ilau da,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 \ni d(x_m, x) < \varepsilon/2 \ , \ d(x_n, x) < \varepsilon/2 \quad \forall m,n \geq n_\varepsilon$

Orduan, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 \ni d(x_m, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \forall m,n \geq n_\varepsilon$

Beraz $\{x_n\}$ suzesioa Cauchyarra da.

(2) Biz $\{x_n\}$ suzesio Cauchyar bat. Definizioaren arauera

$$\exists n_o \ni x_n \in B(x_{n_o}, M) \quad \forall n \geq n_o$$

$N = \max \{ d(x_1, x_{n_o}), \ldots\ldots, d(x_{n_o-1}, x_{n_o}), M \}$ hartzen badugu,

$\{x_n\} \subset B(x_{n_o}, N)$ dateke.

Beraz, $\{x_n\}$ suzesioa bornatua da.

(3) Hau tribialki ikusten da, zeren suzesio batek, Cauchy-ren suzesioen definizioa betetzen badu, beraren azpisuzesio batek ere betetzen duke.

(4) Izira $\{x_n\}$ suzesio Cauchyarra eta $\{x_{n_i}\}$ beraren azpisuzesio konbergente bat non $x_{n_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} x$

$\forall x_m \in E \qquad d(x, x_m) \leq d(x, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x_m)$

$\{x_n\}$ Cauchyarra denez gero, $\exists n_\varepsilon$ non $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ baita $\forall n,m \geq n_\varepsilon$

$\{x_{n_i}\}$ konbergente denez gero, $\exists i_\varepsilon$ non $d(x_{n_i}, x) < \varepsilon/2$ baita

$\forall i \geq i_\varepsilon$.

Beraz, $n_m \geq i_\varepsilon$ hartzen badugu,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \quad d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ dateke.

Hau da, $\{x_n\}$ konbergentea da eta beraren limitea x, hain zuzen f.e.g.l.

2. Teorema

Bira (E,d) eta (E',d') bi espazio metriko eta aplikazio bat, f, $f: E \longrightarrow E'$ uniformeki etengabea.

Orduan, E-ren edozein suzesio Cauchyarren irudia E'-ren suzesio Cauchyarra da.

Frogapena:

Biz E-n dagoen suzesio Cauchyar bat, $\{x_n\}$, eta $\{f(x_n)\}$ beraren suzesio irudia.
f uniformeki etengabea denez gero,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ni d(x_n, x_m) < \delta \Longrightarrow d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

Gainera $\{x_n\}$ Cauchyarra da, beraz,

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, n_\delta \quad \text{non } d(x_n, x_m) < \delta \quad \forall n, m \geq n_\delta$$

Orduan $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon = n(\delta) = n_\varepsilon \quad (\delta = \delta(\varepsilon) \text{ baita}) \ni$

$$\ni \ d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

eta $\{f(x_n)\}$ Cauchyarra da f.n.g.l.

f etengabea ez beste bada, teorema hau ez dateke beti betetzen. Esate baterako:

Biz $f: \mathbb{R}_o^+ \longrightarrow \mathbb{R}_o$
$x \longmapsto 1/x$

$\{1/n\}$ suzesioa Cauchyarra da (konbergente delako) eta beraren irudia, $\{n\}$ suzesioa, erraz ikusten denez, ez da Cauchyrena.

ESPAZIO METRIKO OSOAK

1. Definizioa

(E,d) espazioa osoa da baldin eta soilik baldin edozein suzesio Cauchyar konbergente bada.

Espazio metriko baten multzo osoak

Bira (E,d) espazio metriko eta E-ren azpimultzo bat, A.
A osoa da baldin eta soilik baldin (A, d_A) azpiespazio metrikoa osoa bada.

3. Teorema

Biz (E,d) espazio metrikoa. Orduan ondoko propietateak betetzen dira:

i) Espazio metriko oso baten multzo hertsiak osoak dira.
ii) Biz A $\subset$ E. A osoa bada, orduan A hertsia dateke.
iii) Biz (E,d) espazio osoa. Orduan A $\subset$ E osoa da baldin eta soilik baldin A hertsia bada.

Frogapena:

i) Bira E-ren azpimultzo hertsi bat, A, E osoa izanik, eta $\{x_n\}$ suzesio Cauchyar bat non $\{x_n\} \subset A$ baita.
$\{x_n\}$ A multzoan suzesio Cauchyarra bada, orduan E-n ere Cauchyarra dateke eta E osoa denez gero, $\exists \lim_n x_n = x$.

Baina A hertsia da, beraz $x \in A = A$ eta $\{x_n\}$ konbergente da A multzoan.
Honelatan, ba, A osoa da.

ii) Bira A E-ren azpimultzo oso bat eta $x \in \bar{A}$.
A hertsidurearen karakterizapen baten arauera $\exists \{x_n\} \subset A$ $\ni$ $\lim_n x_n = x$.
$\{x_n\}$ konbergente denez gero, Cauchyarra da A multzoan. A osoa izanik, $\{x_n\}$ konbergente da A multzoan. Gainera nola espazio metrikoak banatuak diren, suzesio baten limitea bakarra da eta orduan $x \in A$. Halabeharrez $\bar{A} = A$ da f.n.g.l.

iii) i) eta ii) ataleen bidez erraz frogatzen da.

Espazio topologikoetan egin dugun bezala, espazio metrikoetan ere konpaktasun, konexutasun eta abar defini daitezke.

Kasu honetan, han ikusi genituen teoremaz landa espazio metrikoetan soilik agertzen diren beste propietate batzu froga daitezke.

Guk ez ditugu hemen ipiniko, gure lana asko luza ez dadin, baina bibliografian agertzen diren liburuekin gai hau osa daiteke.

Hurrengo teman espazio metriko berezi batzu definituko ditugu eta haien propietate batzu ikusiko. Espazio hauk espazio normadunak dira.

HAMAIRURGARREN GAIA

ESPAZIO NORMADUNAK.

- Espazio normadunak.
- Norma batek induzituriko distantzia.

ESPAZIO NORMADUNAK

1. Definizioa

Biz E espazio bektoriala $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ edo $\mathbb{C}$ gorputzaren gainean.

$\| \ \|$ aplikazioa, $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|$, norma bat dela esaten dugu ondoko propietateak betetzen baditu:

1) $\|x\| \geq 0 \qquad \forall x \in E$
2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E$
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$

1., 2. eta laugarren propietateak besterik ez baditu betetzen, aplikazio hori seminorma bat dela diokegu.

$(E, \| \ \|)$ bikotea espazio normaduna (erreala $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bada eta konplexua $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bada) deitzen da.

Norma batek induzituriko distantzia

Biz $(E, \| \ \|)$ espazio normaduna. $E \times E$ multzotik R-rako aplikazio bat, d, era honetan defini dezakegu:

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \|x - y\|$$

d distantzia bat dela erraz frogatzen da eta delakoak induzituriko distantzia deitzen da.

Honela $(E, \| \ \|)$ espazio normaduna, espazio metrikoa bihurtzen da eta beraz, topologikoa d-k induzituriko topologiaz. Orduan espazio topologikoen eta metrikoen propietate guztiak betetzen ditu eta beste batzu ere bai.

Espazio normadun berezi batzu asko erabiltzen dira Analisian, espazio hauk, Banach-en espazioak deitzen dira.

2. Definizioa: Banach-en espazioak

Biz $(E, \| \|)$ espazio normadun bat. $\| \|$ delakoak eragindako distantziarako E osoa bada, $(E, \| \|)$ Banach-en espazio bat dela esaten dugu.

Adibidea:

$(\mathbb{R}, \| \|)$ espazioa non $\|x\| = |x|$ baita, Banach-en espazio bat da.

HIZTEGIA: EUSKARA - GAZTELANIA - FRANTSESA

AKUMULAPEN (PUNTU).....acumulación (punto); acumulation (point)

ANALISI.....analisis; analyse

ANALISI FUNTZIONAL.....analisis funtzional; analyse fonctionnelle

APLIKAZIO.....aplicación; application

APLIKAZIO BIJEKTIBO.....aplicación biyectiva; application bijective

APLIKAZIO ETENGABE.....aplicación continua; application continue

ARKUZ KONEXU.....conexo por arcos; connexe par arcs

ARKUZKO KONEXUTASUN.....conexión por arcos; connexité par arcs

AZPIESPAZIO.....subespacio; sous-espace

AZPIESTALKI.....subcubrimiento; sous-recouvrement

AZPIMULTZO.....subconjunto; sous-ensemble

AZPISUZESIO.....subsucesión; sous-suite

BALIOKIDETASUN ERLAZIO.....relacción de equivalencia; relation d'equivalence

BANACH-EN ESPAZIO.....espacio de Banach; espace de Banach

BANATU.....separado(a); séparé

BARNE.....interior; intérieur

BIDERKADUR ESPAZIO TOPOLOGIKO....espacio topológico producto; espace topologique produit

BIDERKADUR MULTZO.....conjunto producto; ensemble produit

BIJEKZIO.....biyección; bijection

BILDUMA.....colección; colection

BOLA.....bola; boule

BORNATU.....acotado(a); borné

DENTSO.....denso; dense

DERIBATU (MULTZO).....derivado (conjunto); derivé (ensemble)

DIAMETRO.....diámetro; diamétre

DISJUNTU.....disjunto; disjoint

DISTANTZIA.....distancia; distance

ERAGINDAKO TOPOLOGIA.....topología inducida; topologie induite

ELKARPIDE.....correspondencia; correspondance

ERLAZIO BINARI.....relación binaria; relation binaire

ESPERA .....esfera; esphére

ESPAZIO.....espacio; espace

ESPAZIO METRIKO.....espacio métrico; espace métrique

ESPAZIO TOPOLOGIKO.....espacio tópologico; espace topologique

ESPAZIO TOPOLOGIKO HOMEOMORFO....espacio topologico homeomorfo; espace topologique homeomorfe

ESTALKI.....cubrimiento; recouvrement

ESTALKI IREKI.....cubrimiento abierto; recouvrement ouvert

ETENGABETASUN.....continuidad; continuité

ETENGABETASUN UNIFORME.....continuidad uniforme; continuité uniforme

ETENGABE.....continuo(a); continu(e)

EUSKARRI(MULTZO).....soporte (conjunto);

EZ-HUTS.....no vacio; non vide

FAMILIA.....familia; famille

FIN.....fino(a); large

FINITU.....finito; fini

FUNTZIO.....función; fonction

FUNTZIO ETENGABE.....función continua; fonction continue

FUNTZIU HERTSI.....funcion cerrada; fonction fermée

FUNTZIO IREKI.....función abierta; fonction ouverte

GUTTIKOR.....decreciente; décroissant

HAUSDORFF-EN ESPAZIO.....espacio de Hausdorff; espace de Hausdorff

HAZKOR.....creciente; croissant

HERTSI.....cerrado(a); fermé(é)

HERTSIDURA.....clausura; fermeture

HOMEOMORFISMO.....homeomorfismo; homeomorfisme

HOMEOMORFISMOEN TIPO.....tipo de homeomorfismos; type d'homeomorfisme

HUTS.....vacio; vide

INGURUNE.....entorno; voisinage

INGURUNE OINHARRI.....base de entornos; base de voisinages

INPLIKAPEN.....implicación; implication

INPLIKAZIO.....implicación; implication

IRAGAZKI.....filtro; filtre

IREKI (MULTZO).....abierto (conjunto); ouvert (ensemble)

IREKI ELEMENTAL.....abierto elemental; ouvert elémentaire

IREKI-OINHARRI.....base de abiertos; base d'ouverts

ISOLATU (PUNTU).....aislado (punto); isolé (point)

ISOMORFISMO .....isomorfismo; isomorfisme

ISOMORFISMO UNIFORME.....isomorfismo uniforme; isomorfisme uniforme

ITSATSI (PUNTU).....adherente (punto); adherént (point)

ITSATSI (MULTZO).....adherente (conjunto); adherént (ensemble)

KONEXU.....conexo; connexe

KONEXUTASUN.....conexión; conexité

KONPAKTU.....compacto; compact

KONPAKTASUN.....compacidad; compacité

KONTAGARRI.....contable; dénombrable

LEHEN KONTAGARRI.....1º contable; 1er dénonbrable

LIMITE (FUNTZIOEN, SUZESIOEN)..límite (de funciones, de sucesiones)
limite (des fonctiones, des suites)

LOKALKI KONPAKTU.....localmente kompacto; localement compact

MAXIMO.....máximo; maximun

METRIKA.....métrica; métrique

METRIKO (ESPAZIO).....métrico (espacio); métrique (espace)

METRIKOKI BALIOKIDE.....métricamente equivalente; métriquement
equivalent

METRIZAGAI.....metrizable; métrizable

MINIMO.....mínimo; minimun

MUGA.....frontera; frontière

MULTZO.....conjunto; ensemble

MURRIZPEN.....restricción; restriction

NORMA.....norma; norme

NORMADUN.....normado; normé

NUMERAGARRI.....numerable; dénombrable

OHIZKO TOPOLOGIA.....topología usual; topologie usuelle

OINHARRI (IREKIEN,INGURUNEEN)..base (de abiertos, de entornos);
base (dóuverts, de voisinages)

OSAGAI KONEXU.....componente conexa; composante connexe

OSAGARRI (MULTZO BATEN).....complementario (de un conjunto);
complementaire (d'un ensemble)

OSO.....completo; complet

PARTE.....parte; partie

PARTIKETA.....partición; partition

PROJEKZIO.....proyección; projection

SEMIDISTANTZIA.....semidistancia; semidistance

SEMIMETRIKA.....semimétrica; semimetrique

SUZESIO.....sucesión; suite

SUZESIO KONBERGENTE.....sucesión convergente; suite convergente

SUZESIO CAUCHYAR.....sucesión de Cauchy; suite de Cauchy

TOPOLOGIA DISKRETU.....topología discreta; topologie discrete

TOPOLOGIA INDISKRETU.....topología indiscreta; topologie indiscrete

TOPOLOGIA INDUZITU.....topología inducida; topologie induite

TOPOLOGIKOKI BALIOKIDE.....topologicamente equivalente; topologicament
equivalent

UNIFORMEKI BALIOKIDE.....uniformemente equivalente; uniformement
equivalent

ZATI.....trozo; morceau

ZENBAKIZKO FUNTZIO.....función numérica; fonction numérique

HIZTEGI: GAZTELANIA - EUSKARA

ABIERTO .....IREKI

ABIERTO ELEMENTAL.....IREKI ELEMENTAL

ACOTADO(A).....BORNATU

ACUMULACION (PUNTO).....AKUMULAPEN (PUNTU)

ADHERENTE (PUNTO, CONJUNTO).....ITSATSI (PUNTU, MULTZO)

AISLADO (PUNTO).....ISOLATU (PUNTU)

ANALISIS .....ANALISI

ANALISIS FUNCIONAL.....ANALISI FUNTZIONAL

APLICACION.....APLIKAZIO

APLICACION CONTINUA.....APLIKAZIO ETENGABE

BASE.....OINHARRI

BASE DE ABIERTOS .....IREKI OINHARRI

BASE DE ENTORNOS .....INGURUNE OINHARRI

BIYECCION.....BIJEKZIO

BOLA.....BOLA

CERRADO(A).....HERTSI

CLAUSURA.....HERTSIDURA

COMPACIDAD.....KONPAKTASUN

COMPACTO.....KONPAKTU

COMPLEMENTARIO(A).....OSAGARRI

COMPLETO.....OSO

COMPONENTE CONEXA.....OSAGAI KONEXU

COLECCION.....BILDUMA

CONEXION.....KONEXUTASUN

CONEXO.....KONEXU

CONJUNTO.....MULTZO

CONJUNTO PRODUCTO.....BIDERKADUR MULTZO

CONJUNTO SOPORTE.....MULTZO EUSKARRI

CONTABLE.....KONTAGARRI

CONTINUO(A).....ETENGABE

CONTINUIDAD.....ETENGABETASUN

CONTINUIDAD UNIFORME.....ETENGABETASUN UNIFORME

CORRESPONDENCIA.....KORRESPONDENTZIA

CRECIENTE.....HAZKOR

CUBRIMIENTO.....ESTALKI

CUBRIMIENTO ABIERTO.....ESTALKI IREKI

DECRECIENTE.....GUTTIKOR

DENSO(CONJUNTO).....DENTSO (MULTZO)

DERIVADO (CONJUNTO).....DERIBATU (MULTZO)

DIAMETRO.....DIAMETRO

DISJUNTO.....DISJUNTU

DISTANCIA.....DISTANTZIA

ENTORNO.....INGURUNE

ESFERA.....ESFERA

ESPACIO.....ESPAZIO

ESPACIO COMPACTO.....ESPAZIO KONPAKTU

ESPACIO CONEXO.....ESPAZIO KONEXU

ESPACIO DE HAUSDORFF.....HAUSDORFF-EN ESPAZIO

ESPACIO METRICO.....ESPAZIO METRIKO

ESPACIO SEPARADO.....ESPAZIO BANATU

ESPACIO TOPOLOGICO.....ESPAZIO TOPOLOGIKO

ESPACIO TOPOLOGICO HOMEOMORFO.....ESPAZIO TOPOLOGIKO HOMEOMORFO

ESPACIO TOPOLOGICO PRODUCTO.....BIDERKADUR ESPAZIO TOPOLOGIKO

ESPACIO VECTORIAL NORMADO.....ESPAZIO BEKTORIAL NORMADUN

FAMILIA.....FAMILIA

FINA(O).....FIN

FINITO(A).....FINITU

FILTRO.....IRAGAZKI

FUNCION ABIERTA.....FUNTZIO IREKI

FUNCION CERRADA.....FUNTZIO HERTSI

FUNCION CONTINUA.....FUNTZIO ETENGABE

FUNCION NUMERICA.....ZENBAKIZKO FUNTZIO

HOMEOMORFISMO.....HOMEOMORFISMO

IMAGEN.....IRUDI

IMAGEN INVERSA.....IRUDI INBERTSU

IMPLICACION.....INPLIKAZIO, INPLIKAPEN

INFINITO.....INFINITU

INTERIOR.....BARNE

ISOMORFISMO.....ISOMORFISMO

ISOMORFISMO UNIFORME.....ISOMORFISMO UNIFORME

MAXIMO.....MAXIMO

METRICO(A).....METRIKO

METRICAMENTE EQUIVALENTE.....METRIKOKI BALIOKIDE

METRIZABLE.....METRIZAGAI

MINIMO.....MINIMO

NORMA.....NORMA

NORMADO(A).....NORMADUN

NO VACIO.....EZ-HUTS

NUMERABLE.....NUMERAGARRI

PARACOMPACTO.....PARAKONPAKTU

PARTE.....PARTE

PARTICION .....PARTIKETA

PRIMERO CONTABLE.....LEHEN KONTAGARRI

PROYECCION.....PROJEKZIO

RELACION BINARIA.....ERLAZIO BINARI

RELACION DE EQUIVALENCIA.....BALIOKIDETASUN ERLAZIO

RESTRICCION.....MURRIZPEN

SEMIDISTANCIA.....SEMIDISTANTZIA

SEMIMETRICA.....SEMIMETRIKA

SEPARADO(A).....BANATU

SUBCONJUNTO.....AZPIMULTZO

SUBCUBRIMIENTO.....AZPIESTALKI

SUBESPACIO.....AZPIESPAZIO

SUBSUCESION.....AZPISUZESIO

SUCESION.....SUZESIO

SUCESION CONVERGENTE.....SUZESIO KONBERGENTE

TIPO DE HOMEOMORFISMOS.....HOMEOMORFISMOEN TIPO

TOPOLOGIA.....TOPOLOGIA

TOPOLOGIA DISCRETA.....TOPOLOGIA DISKRETU

TOPOLOGIA INDISCRETA.....TOPOLOGIA INDISKRETU

TOPOLOGIA INDUCIDA.....TOPOLOGIA INDUZITU, ERAGIN-
DAKO TOPOLOGIA

TOPOLOGIA PRODUCTO.....BIDERKADUR TOPOLOGIA

TOPOLOGIA USUAL.....OHIZKO TOPOLOGIA

TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTE.....TOPOLOGIKOKI BALIOKIDE

TROZO.....ZATI

UNIFORMEMENTE EQUIVALENTE.....UNIFORMEKI BALIOKIDE

VACIO.....HUTS

HIZTEGIA: FRANTSESA- EUSKARA

ACUMULATION (POINT).....akumulapen (puntu)

ADHERÉNT (POINT, ENSEMBLE).....itsatsi (puntu, multzo)

ANALYSE.....analisi

ANALYSE FONCTIONNELLE.....analisi funtzional

APPLICATION.....aplikazio

APPLICATION BIJECTIVE.....aplikazio bijektibo

APPLICATION CONTINUE.....aplikazio etengabe

BASE.....oinharri

BASE D´OUVERTS .....ireki-oinharri

BASE DE VOISINAGES .....ingurune-oinharri

BIJECTION.....bijekzio

BORNÉ.....bornatu

BOULE.....bola

COLECTION.....bilduma

COMPACT.....konpaktu

COMPACITÉ .....konpaktasun

COMPLEMENTAIRE (D´UN ENSEMBLE).....osagarri (multzo batan)

COMPOSANTE CONNEXE.....osagai konexu

COMPLET.....oso

CONNEXE.....konexu

CONNEXE PAR ARCS.....arkuz konexu

CONNEXITE.....konexutasun

CONNEXITE PAR ARCS.....arkuzko konexutasun

CONTINU(E).....etengabe

CONTINUITÉ.....etengabetasun

CONTINUITÉ UNIFORME.....etengabetasun uniforme

CROISSANT.....hazkor

DÉCROISSANT.....guttikor

DÉNOMBRABLE.....numeragarri

DENSE.....dentso

DERIVÉ (ENSEMBLE).....deribatu (multzo)

DIAMÉTRE.....diametro

DISJOINT.....disjuntu

DISTANCE.....distantzia

ENSEMBLE.....multzo

ENSEMBLE PRODUIT.....biderkadur multzo

ESPACE.....espazio

ESPACE DE BANACH.....Banach-en espazio

ESPACE DE HAUSDORFF.....Hausdorff-en espazio

ESPACE METRIQUE.....espazio metriko

ESPACE TOPOLOGIQUE.....espazio topologiko

ESPACE TOPOLOGIQUE PRODUIT.....biderkadur espazio topologiko

ESPHÉRE.....esfera

FAMILLE.....familia

FILTRE.....iragazki

FINI.....finitu

FERMÉ(E).....hertsi

FERMETURE.....hertsidura

FONCTION.....funtzio

FONCTION CONTINUE.....funtzio etengabe

FONCTION FERMÉE.....funtzio hertsi

FONCTION OUVERTE.....funtzio ireki

FRONTIERE.....muga

HOMEOMORFISME.....homeomorfismo

IMPLICATION.....inplikazio, inplikapen

INTÉRIEUR.....barne

ISOLÉ (POINT).....isolatu (puntu)

ISOMORFISME.....isomorfismo

ISOMORFISME UNIFORME.....isomorfismo uniforme

LARGE.....fin

LOCALEMENT COMPACT.....lokalki konpaktu

MAXIMUN.....maximo

MÉTRIQUE.....metrika

MÉTRIQUE (ESPACE).....metriko (espazio)

MÉTRIQUEMENT EQUIVALENT.....metrikoki baliokide

MÉTRIZABLE.....metrizagai

MINIMUN.....minimo

MORCEAU.....zati

NON VIDE.....ez-huts

NORME.....norma

NORMÉ.....normadun

OUVERT (ENSEMBLE).....ireki (multzo)

OUVERT ELÉMENTAIRE.....ireki elemental

PARTIE.....parte

PARTITION.....partiketa

1er DÉNOMBRABLE.....lehen kontagarri

PROJECTION.....projekzio

RECOUVREMENT.....estalki

RECOUVREMENT OUVERT.....estalki ireki

RELATION BINAIRE.....erlazio binari

RELATION D'ÉQUIVALENCE.....baliokidetasun erlazio

RESTRICTION.....murrizpen

SEMIDISTANCE.....semidistantzia

SEMIMETRIQUE.....semimetrika

SEPARÉ.....banatu

SUITE.....suzesio

SUITE CONVERGENTE.....suzesio konbergente

SUITE DE CAUCHY.....suzesio cauchyar

SOUS-ENSEMBLE.....azpimultzo

SOUS-ESPACE.....azpiespazio

SOUS-RECOUVREMENT.....azpiestalki

SOUS-SUITE.....azpisuzesio

TYPE D'HOMEOMORFISME.....homeomorfismoen tipo

TOPOLOGIE.....topologia

TOPOLOGIE DISCRETE.....topologia diskretu

TOPOLOGIE INDISKRETE.....topologia indiskretu

TOPOLOGIE INDUITE.....topologia induzitu, eragindako topologia

TOPOLOGIE PRODUIT.....biderkadur topologia

TOPOLOGIE USUELLE.....ohizko topologia

TOPOLOGICAMENT EQUIVALENT.....toplogikoki baliokide

UNIFORMEMENT EQUIVALENT.....uniformeki baliokide

VIDE.....huts

VOISINAGE.....ingurune

OHARRA

Lân hau burutu ondoren hitz batzu aldatzea posible dela pentsatua izan da. Hitz horik ondoko hauk dira:

Funtzio etengabe.....funtzio jarrai

Etengabetasun.....jarraitasun

Etengabe.....jarrai

Hitz hauen deribatuak ere modu berdinean aldatuko lirateke.

BIBLIOGRAFIA

G. CHOQUET: "Cours d'Analyse II. Topologie". Masson et C^{ie}. (gaztelaniara itzulita dago).

S. WILLARD: "General Topology". Addison-Wesley.

N. BOURBAKI: "Topologie Générale". Hermann-Paris.

KURATOWSKI: "Topology" (l. bol.). Academic Press, N.Y.

J. DUGUNDJI: "Topology". Allyn and Bacon. Boston.

CHEVALIER: "Analyse I. Topologie".