udako euskal unibertsitatea

V. UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA

IRUINEA 1977

KALKULUA

PRESTATZAILE: ELHUYAR Taldea

udako euskal unibertsitatea

V. UDAKO EUSKAL UNIBERTSITATEA

IRUINEA 1977

K A L K U L U A

PRESTATZAILE: ELHUYAR Taldea

A U R K I B I D E A

Orr.

I - ANGELUAK ETA ARKU LUZERAK 2

I.1 - Angeluen neurketa 3

I.2 - Arkuaren luzera 4

II - EDOZEIN ANGELU BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOA .. 9

II.1 - Edozein angelu baten funtzio trigonometrikoak 9

II.2 - Funtzioen zeinuak 10

II.3 - Koadranteko angeluen funtzio trigonometrikoak 11

III - ANGELU ZORROTZ BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK . 16

III.1 - Angelu zorrotz baten funtzio trigonometrikoak 16

III.2 - Angelu osagarrien funtzio trigonometrikoak 17

IV - ANGELU POSITIBO ZORROTZEN FUNTZIOETARA SOILKETA 22

V - FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN ALDAKUNTZA ETA GRAFOAK 28

V.1 - Funtzio trigonometrikoen irudikatze linealak 28

V.2 - Funtzio trigonometrikoen aldakuntzak ... 29

VI - TRIANGELU ZEIHARRAK. ASKAPEN EZ LOGARITMIKOA .. 43

VII - ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK 47

VII.1 - Alderantzizko funtzio trigonometrikoak . 47

VII.2 - Alderantzizko funtzio trigonometrikoen grafoak 48

VII.3 - Balio nagusiak 48

VII.4 - Alderantzizko funtzio trigonometrikoen balio jeneralak 50

Orr.

VIII - EKUAZIO TRIGONOMETRIKOAK 58

VIII.1 - Ekuazio trigonometriko baten emaitza 58

VIII.2 - Ekuazio trigonometrikoak askatzeko metodoak 59

IX - DERIBATUA 69

IX.1 - Funtzio baten muga 69

IX.2 - Muga buruzko teoremak 70

IX.3 - Funtzio etengabeak 71

IX.4 - Ugalpenak 72

IX.5 - Deribatua 72

IX.6 - Ordena goreneko deribatuak 73

X - FUNTZIO ALJEBRAIKOEN DERIBAZIOA 79

X.1 - Deribazio formulak 79

XI - DERIBATUAREN APLIKAZIOAK 83

XI.1 - Funtzio hazkor eta urrikorrak 83

XI.2 - Maximo eta minimo erlatiboak 84

XI.3 - Maximo eta minimoentzako beste erizpide bat 85

XI.4 - Makur baten bihurgune puntuak 86

XI.5 - Diferentzialak 86

XII - INTEGRAZIOA 90

XII.1 - Integrale definitugabeak 90

XII.2 - Integrazioaren bidezko azalera 91

XII.3 - Integrale definituak 92

XIII - BATUKETA MODUZ DEFINITURIKO INTEGRALEA 98

XIII.1 - Batuketaren bidezko azalera 98

XIII.2 - Bikaketaren bidezko bolumenak 100

* * *

ERAGIKETA	ZEINUA	ERAGIGAIAK (ERAGIKIZUNA)	ERAGIGAIAK (ERAGITZAILEA)	EMAITZA	HONDARRA	IRAKURKETA
BATUKETA	+ gehi	BATUGAIAK		BATURA	———	a+b a gehi b
KENKETA	- ken	KENKIZUNA	KENTZAILEA	KENDURA	HONDARRA	a-b a ken b
BIDERKA-KETA	x bider	BIDERKAGAIAK: BIDERKAKIZUNA	BIDERKAGAIAK: BIDERKATZAILEA	BIDERKA DURA	———	axb a bider b
ZATIKETA	÷ zati (t4)	ZATIKIZUNA	ZATITZAILEA	ZATIDURA	HONDARRA	$\frac{a}{b}$ a zati b
BERREKETA	ber	BERREKIZUNA	BERRETZAILEA	BERREDURA	———	a^b a ber b
ERROKETA	$\sqrt{}$ erro	ERROKIZUNA	ERROTZAILEA	ERRODURA	HONDARRA	$\sqrt[a]{b}$ a erro b

I - ANGELUAK ETA ARKU LUZERAK

I - ANGELUAK ETA ARKU LUZERAK

TRIGONOMETRIAK, hitzak berak dioenez, triangelu baten gaien neurketaz dihardu. Planoko trigonometria, ondorengo kapituluetan ikasiko duguna alegia, planoan dauden triangeluez dihardu. Trigonometria esferikoak, modu berean, azal esferikozko triangeluez dihardu.

Trigonometria zenbait arrazoitan oinharritzen da, eta hauei funtzio trigonometrikoak deritzogu. Funtzio trigonometrikoen lehen aplikazioak topografian, nabigazioan eta inkinerutzan egin ziren. Funtzio hauek, era berean, erabat beharrezkoak ditugu dardarazko fenomenuetan -hotsa, argia, elektritzitatea, e.a.-. Honegatik, gaiaren zati handi bat funtzio trigonometrikoen ezaugarriei eta beren arteko erlazioei begira prestatu da.

XOP angelua 2 zuzenerdiz osatuta dago: OX eta OP. Beren jatorri komuna O da. Puntu honi angeluaren erpin deritzogu, eta zuzenerdiei, aldiz, aldeak.

Sarritan, angelu bat zuzenerdi bat planoan biratuz sortua bailitz bezala kontsideratu behar da. Beste modu batetara esanez, OX zuzenerdia OP punturaino biratu bailitz bezala, O erpin moduan jarraituz. OX hastapen posizioa litzateke, eta OP, aldiz, azken posizioa. Aldeak izendatuz, OX hastapen aldea dugu, eta OP, aldiz, azken aldea.

Honela sortutako angelu bat positiboa dela diogu, biraketa direkzioa, -kurbatutako geziaz markaturik agertzen dena- erlojuorratzen alderantzizkoa bada, eta negatiboa, biraketa direkzioa aipaturiko orratzen berdina denean.

I.1 - ANGELUEN NEURKETA

A) (°) gradua honela definitzen da:

Angelu zentralaren neurria da, berak abarkatzen duen zirkuluaren arkua eta zirkulu horren zirkunferentziaren 1/360 berdinak izanik.

Minutua (') gradu baten 1/60 da; segundoa ("), berriz, minutu baten 1/60 da.

1. <u>Adibidea</u>:

(a) $\frac{1}{4}$ (36° 24') = 9° 6'

(b) $\frac{1}{2}$ (127° 24') = $\frac{1}{2}$ (126° 84') = 63° 42'

(c) $\frac{1}{2}$ (81° 15') = $\frac{1}{2}$ (80° 75') = 40°37,5' edo 40° 37'30"

(d) $\frac{1}{4}$ (74°29'20") = $\frac{1}{4}$ (72°149'20") = $\frac{1}{4}$ (72°148'80")=18°37'20"

B) Radiana honela definitzen da:

Angelu zentralaren neurria da, berak abarkatzen duen zirkuluaren arkua era erradioa berdinak izanik.

Zirkulu baten zirkunferentzia $2\pi r$ da, eta berak 360°ko angelu bat osatzen du. Honela, ba, 2π radianek 360° osatzen dituzte. Beraz,

radian bat = $\frac{180°}{\pi}$ = 57° 19' 45"

eta gradu bat = $\frac{\pi}{180°}$ = 0,017453, radian dira gutti gorabehera (π = 3,14159).

2. Adibidea

(a) $\frac{7}{12}\pi$ rad $= \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = 105°$

(b) $50° = 50 \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{5\pi}{18}$ rad

I.2 - ARKUAREN LUZERA

A) r erradioa duen zirkulu batetan, $\emptyset$ radianeko angelu baten luzerak s arku bat abarkatzen du, hots, s = r. Beraz:

arkuaren luzera = erradioa x angelu zentrala (radianetan).

OHARRA: s eta r edozein unitatetan neurt daitezke, baina unitate berdinetan adierazi behar dira.

3. Adibidea

(a) erradioa 30 cm. duen zirkulu batetan 1/3 radianek arteragozten duten arkua:

$$s = r\,\emptyset = 30 \,.\, 1/3 = 10 \text{ cm. da}$$

(b) zirkulu berean, 50°ko angulu zentral batek

$$s = r\,\emptyset = 30 . \frac{5\pi}{18} = \frac{25\pi}{3} \text{ cmko arkua arteragozten du.}$$

(c) zirkulu berean, 18 cm ko arku batek

$$\emptyset = \frac{s}{r} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \text{ radianeko angelu zentral bat behar du.}$$

B) Angelu zentrala ez bada oso handia, arkuaren luzera bere lokarria adinekoa da.

PROBLEMA ASKATUAK

1.- Adieraz ezazu angelu bakoitza radianetan:

a) 30° $\quad 30° = 30 . \frac{\pi}{180}$ rad. $= \frac{\pi}{6}$ rad., hau da, 0,5236 rad.

b) 135° $\quad 135° = 135 . \frac{\pi}{180}$ rad. $= \frac{3\pi}{4}$ rad., hau da, 2,3562 rad.

c) 25°30' $\quad 25°30' = 25,5° = 25,5 . \frac{\pi}{180} = 0,4451$ rad.

d) 42°24' 35" $\quad 42°24'35" = 42° + (\frac{24x60+35}{3600})° = 42,41° = 42,41 . \frac{\pi}{180}$ rad.
$= 0,7402$ rad.

2.- Adieraz ezazu angelu bakoitza gradutan

a) $\frac{\pi}{3}$ rad. $\quad \frac{\pi}{3} . \frac{180}{} = 60°$

b) $\frac{4}{3}$ rad. $\quad \frac{4}{3} . \frac{180}{\pi} = \frac{2400}{\pi}$ hau da, $\frac{4}{3}$ (57°17'45")=76°27'40"

3.- Gurpil bat 48 b pm biratzen da. Adieraz ezazu abiadura hau:

a) bps tan
b) rpm tan
c) rps tan

a) 48 bpm $= \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ bps

b) nolaz biraketa bat = 2π radian diren,

48 bpm = 48. 2π = 301 rpm (radian minutu bakoitzeko)

c) 48 bpm $= \frac{4}{5}$ bps $= \frac{4}{5} . 2\pi$ rps = 5,03 rps edota

48 bpm = 96π rpm $= \frac{96\pi}{6} = 5,03$ rps

4.- Erloju baten minutariak 12 cm ditu. Zer distantzia beteko du orratzak 20 minututan?

20 minututan, orratza biratu den angelua $\emptyset = 120°$ da.
Beraz, $\emptyset = 120° = \frac{2\pi}{3}$ eta $s = r\emptyset = 12.\frac{2\pi}{3} = 8\pi$ cm = 25,1 cm

5.- Lurra esfera bat dela suposatuz, kalkula ezazu 36° ipar dagoen puntu baten ekuatorearekiko distantzia.

nola $36° = \frac{\pi}{5}$ rad. diren, $s = r\emptyset = 6370.\frac{\pi}{5} = 4000$ km.

6.- 1,20 metro diametro duen gurpil bat 80 bpm biratzen da. Kalkula ezazu segundo batetan bere ertzean dagoen puntu batek egiten duen bidea.

$80 \text{ bpm} = 80 \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{8\pi}{3}$ rps

Beraz $s = r\emptyset = 0,6 \cdot \frac{8\pi}{3} = 5,02$ m/s. Bestalde, segundo bakoitzean 5,02 m. aurretzen bada, bere abiadura tangentiarra 5,02 m/s da.

7.- Kalkula ezazu txirrila baten diametroa, jakinik bera mugitzen duen lokarriaren abiadura 40 m/s, eta txirrila 360 bpm biratzen dela.

$360 \text{ bpm} = 360 \cdot \frac{2\pi}{60}$ rps = 12 rps

Segundo batetan, txirrilak $\emptyset$ angelu bat biratuko du, $\emptyset = 12\pi$ rad. izanik, eta txirrilaren ertzean dagoen puntu batek s = 40 m. kurritzen ditu

Beraz, $d = 2r = 2(\frac{s}{\emptyset}) = 2(\frac{40}{12})^{m} = \frac{20}{3\pi}$ m. = 2,12 m.

8.- Turbina baten kanpoaldeko puntu bat, gure kasuan ardatzetik 1,5 m. aldendutako puntu bat, 13,5 m/s abiadura tangentiarrez biratzen da. Kalkula ezazu turbina honen abiadura angeluarra, bai rps eta baita bps tan.

Segundo batetan, puntu honek 13,5 m. kurritzen du. Beraz, segundo batetan turbina $\emptyset = \frac{s}{r} = \frac{13,5}{1,5} = 9$ rad. biratzen da, eta bere abiadura angeluarra, rps tan, 9 rps da.

Nola biraketa bat = 2π rad. $\longrightarrow$ radian bat = $\frac{1}{2\pi}$ biraketa

Beraz, 9 rps = $9 \cdot \frac{1}{2\pi}$ bps = 1,43 bps

PROBLEMAK

1.- Adieraz itzazu radianetan:

	Emaitza:
a) 25°	$5\pi/36$
b) 160°	$8\pi/9$
c) 75°30'	$157\pi/360$
d) 112°40'	$169\pi/270$

2.- Adieraz itzazu gradutan:

	Emaitza
a) $\pi/4$ rad.	45°
b) $7\pi/10$ rad.	126°
c) $5\pi/6$ rad.	150°
c) 1/4 rad.	14°19'26"

3.- Zirkulu batek 30 cm ko erradio bat du. Zenbat radian du angelu zentral batek, bere arkuak?

	Emaitza
a) 30 cm abarkatzen baditu	1 rad.
b) 20 cm abarkatzen baditu	2/3 rad.
c) 50 cm abarkatzen baditu	5/3 rad.

4.- 40 cm ko dindil baten muturrak 5 cm ko arku bat deskribatzen du. Zenbateko angeluz oszilatzen da dindila?

1/8 rad.

5.- 25 cm ko erradioa duen bolante bat 900 bpm biratzen da. Zenbateko abiadura du kanpoaldeko puntu batek?

23,55 m/s

6.- Auto baten gurpilak 96 cm ko diametroa badu eta 800 bpm biratzen bada, zenbateko abiadura du autoak km/h tan?

144,75.

II - EDOZEIN ANGELU BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOA

II - EDOZEIN ANGELU BATEN FUNTZIO TRICONOMETRIKOA

Angeluak posizio normalean. Angelu bat posizio normalean dagoela diogu, baldin bere erpina jatorrian badago eta bere hastapen aldea eta x ardatz positiboa berdinak direnean.

Angelu bat lehen koadrantean dagoela diogu baldin, posizio normalean egonik, bere azken aldea lehen koadrantean gelditzen bada. Antzeko definizioak dira beste koadranteetarako erabiltzen direnak. Adibidez, 30°, 59°, eta -330°lehen koadrantean gelditzen diren angeluak dira 119° bigarrenean, -119° hirugarrenean eta -10° eta 710° laugarrenean.

Posizio normalean jarririk hastapen aldeak eta baita azken aldeak era bateragarriak dituzten angeluak, angelu koterminalak direla diogu. Adibidez, 30° eta -330°, -10° eta 710°, e.a. Honela, ba, segidan konturatzen gara angelu batek infinitu angelu koterminal dituela.

0°, 90°, 180° eta 270° eta beraiekin koterminal diren beste guztiak, koadrante angeluak direla diogu.

II. 1 - EDOZEIN ANGELU BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

Bedi angelu bat (baina ez koadrantezkoa) posizio normalean, eta izan bedi P (x,y) jatorria ez den beste puntu bat. Puntu hau azken aldean dagoen puntu bat da. θ ren sei funtzio trigonometrikoak pren abzisa, ordenatua eta P rainoko distantziaz definitzen dira:

sinu θ = sin θ = $\frac{\text{ordenatua}}{\text{distantzia}} = \frac{y}{r}$ Kotangente θ = ctg θ = $\frac{\text{abzisa}}{\text{ordenatua}} = \frac{x}{y}$

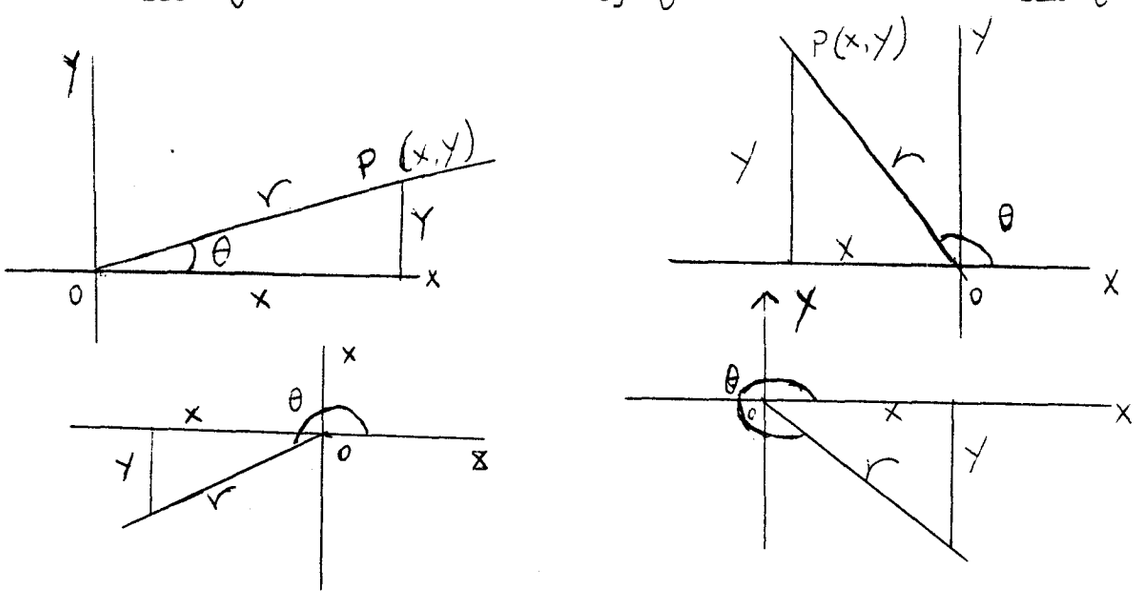
conisu θ = cos θ = $\frac{\text{abzisa}}{\text{distantzia}} = \frac{x}{r}$ sekante θ =sec θ = $\frac{\text{distantzia}}{\text{abzisa}} = \frac{r}{x}$

tangente θ= tg θ = $\frac{\text{ordenadua}}{\text{abzisa}} = \frac{y}{x}$ kosekante θ = cosec θ = $\frac{\text{distantzia}}{\text{ordenadua}} = \frac{r}{y}$

Definizio hauen bat-bateko ondorioak, alderantzizko erlazioak dira.

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$



Irudietan agertzen denez, θ ren funtzio trigonometrikoen balioak θ aldatzean ganbiatzen dira. θ angelu funtzioen balioak P puntuaren distantziak aske dira; hots, P puntu honen jatorriarekiko distantziak ez du garrantzirik, azken aldean egonik.

II. 2 - FUNTZIOEN ZEINUAK

r beti positiboa izanik, garbi dago funtzioen zeinuak koadrante bakoitzeko x eta y balioen zeinuak baldintzatuko dituztela. Zeinu hauk jakiteko, nahikoa dugu posizio normalean dagoen angelu bat imajinatzea edo ondoko irudian agertzen den artifizio bat erabiltzea. Bertan, zeinu positiboa duten funtzioak bakarrik agertzen dira.

Angelu bat emanik, bere funtzio trigonometrikoak unibokoki determinatuak daude Baina, ezagutzen duguna angelu baten funtzioaren balioa bada, angelua ez da unibokoki ezagutzen. Adibidez, sin $\theta = \frac{1}{2}$ bada, $\theta =$ 30°, 150°, 390°, ... Normalki, azken aldearen bi posizio posible aurkitzen dira, lehen kasura itzuliz, 30° eta 150°. Arau honen salbuespena, angeluak koadrantekoak direnean agertzen da.

II. 3 - KOADRANTEKO ANGELUEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

Angelu hauentzat, azken aldea eta ardatz bateragarriak bat dira. P puntu bat, jatorria ez izanik, azken aldean aurkitzen bada, $x = o$, $y \neq o$ edota $x \neq o$, $y = o$ modukoa da. Bi kasu hauetan, berdin da, sei funtzioetatik bi definitu gabe gelditzen dira. Adibidez, 0° angeluaren azken aldea eta x ardatz positiboa berdinak dira, eta, noski, P ren ordenatua 0 da. Ordenatua izendatzailean agertzen denez gero, bai kotangentea eta baita kosekantea ere definitugabe daude. Hau honela adieratzen da: $\text{ctg } 0° = \infty$, edota $\text{ctg } 0° = \pm \infty$. Koadranteko angeluen funtzio trigonometrikoak hauk dira:

θ Angelua	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\text{tg } \theta$	$\text{ctg } \theta$	$\sec \theta$	$\text{cosec } \theta$
0°	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
90°	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
180°	0	-1	0	$\pm\infty$	- 1	$\pm\infty$
270	-1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	- 1

PROBLEMA ASKATUAK

1.- a) Ondoko angelu hauk posizio normalean jarri eta esan zein tzuk diren beren koterminalar. 125°, 210°, -150°, 385°, 930°, -370°, -955°, -870

b) 125° rekin koterminal diren beste 5 angelu eman:

a) 125° eta - 955° angeluak koterminalak dira.
210° eta - 150° = 210-360°angeluak koterminalak dira.
210° eta 210 = 210+2360 angeluak koterminalak dira.
210 eta -870 = 210-3360 angeluak koterminalak dira.

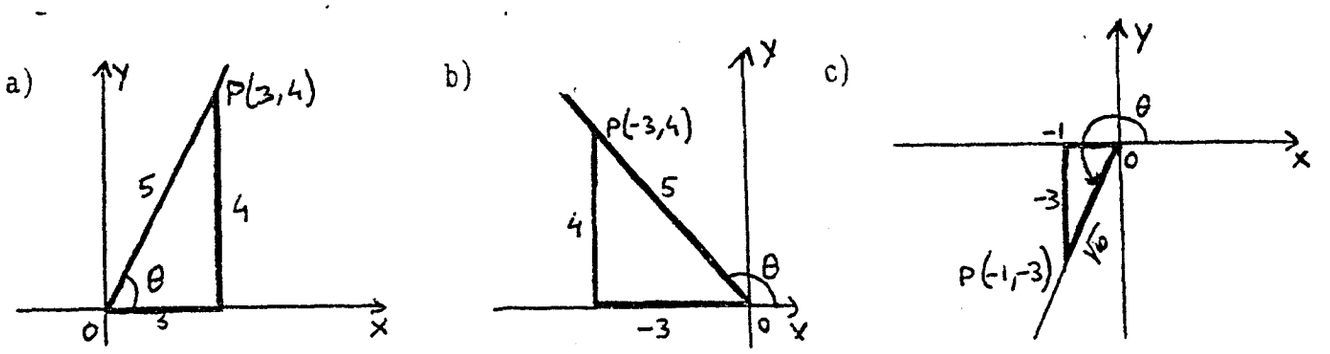
b) 485°= 125°+360; 1205°= 3.360°, 1.925° = ...

koterminale dira.

2.- θ angeluaren funtzio trigonometrikoen balioak determinatu, P, azken aldeko puntu bat bada, bere koordenatuak: a) P(3,4); b) P(-3,4); c) P(-1,-3), izanik

(a) (b) (c)

(Oharra: angeluak, ahalik angelu positiborik ttikinea eta posizio normalean dagoen behar du izan):



Alderantzizko funtzioak apuntatu. Adibidez, b) n

$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\ \theta} = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{-3}{5}$, $\text{tg}\theta = \frac{1}{\text{Lotg}\ \theta} = \frac{-4}{3}$, etc.

3.- Zein koadrantetan bukatzen du θ k,

a) $\sin\theta$ eta $\cos\theta$, biak negatiboak badira?
b) $\sin\theta$ eta $\text{tg}\ \theta$, biak positiboak badira?
c) $\sin\theta$ positiboa eta $\sec\theta$ negatiboa bada?
d) $\sec\theta$ eta $\text{tg}\ \theta$, biak negatiboak badira?.

a) $\sin\theta = \frac{y}{r}$ eta $\cos\theta = \frac{x}{r}$ izanik, x eta y negatiboak dira, zeren r beti positiboa izaten bait da. θ, beraz, hirugarren koadrantean dago.

b) $\sin\theta$ positiboa izanik, y positiboa da. era berean, $\text{tg}\ \theta$ positiboa izanik, x ere positiboa da. Honela, ba, θ lehen koadranteko angelu bat da.

c) sin positiboa izanik, y positibia da. Baina $\sec\theta$ negatiboa da, eta x ere. Beraz, θ bigarren koadranteko angelu bat da.

d) sec θ negatiboa izanik, x ek negatiboa behar du izan. Baina tg θ negatiboa da eta, beraz, y positiboa izango da. Honela, ba, θ bigarren koadranteko angelu bat da.

4.- cos θ et tg θ ren baloreak aurkitu, jakinik $\sin\theta = \frac{8}{17}$ de la eta θ lehen koadrantean dagoela.

Bedi P θ ren azken aldeko puntu bat. $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{17}$ ba da, y = 8 eta r = 17 egiten da. θ lehen koadrantean egonik, x positiboa izango da.

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

Irudia nahi badugu egin, lekura ezazu P (15,8) puntua, lotu jotorriari eta angelua adierazi.

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{15}{17} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{15}$$

y = 8 eta r = 17 aukeratzea, erraztasunagatik bakarrik egin da. $\frac{8}{17} = \frac{16}{34}$ da, eta honela y = 16 eta r = 34 har genitzakeen. Lortutako balioek, azkenik, berdin berdinak behar dute izan.

5.- Kalkula itzazu sin θ eta tg θ , jakinik cos θ = 5/6 dela. cos θ positiboa bada, θ lehen edo laugarren koadrantean dado.

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{6}$ Hemendik zera lortzen dugu, x = 5 eta r = = 6 $y = \pm\sqrt{6^2 - 5^2} = \pm\sqrt{II}$

a) θ lehen koadrantean badago:

$x = 5 \quad y = \sqrt{II} \quad r = 6$. Orduan, $\sin\theta = \frac{\sqrt{II}}{6}$ $\text{tg}\,\theta\,\frac{\sqrt{II}}{5}$

b) θ bigarren koadrantean badago:

$x = 5 \quad y = -\sqrt{II} \quad r = 6$. Orduan, $\sin\theta = \frac{-\sqrt{II}}{6}$ $\text{tg} = \frac{-\sqrt{II}}{5}$

6.- Kalkula itzazu beste funtzioen balioak, jakinik $\sin \theta = \sqrt{3/2}$ eta $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ direla.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ izanik, y positiboa dugu eta $y = \sqrt{3}$

$\cos = \frac{x}{r}$ izanik, x negatiboa dugu eta $x = -1$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$Tg\,\theta = \sqrt{3}/-1 \qquad ctg\,\theta = \frac{1}{tg\,\theta} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$Sec\,\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -2 \qquad cosec\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.- Kalkula ezazu:

a) $\sin(0°) + 2\cos 0° + 3\sin 90° + 4\cos 90° = 5\sec 0° + 6\,cosec\,90° = 0+2(1) + 3(1) + 4(0) + 5(1) + 6(1) = 16$

b) $\sin 180° + 2\cos 180° + 3\sin 270° + 4\cos 270° - 5\sec 180° - 6\sec 270° = 0+2(-1) + 3(-1) + 4(0) - 5(-1) - 6(-1) = 6$

PROBLEMAK

1 .- esan ezazu zein koadrantetan bukatzen den angelu bakoitza eta sinu, kosinu eta tangetearen zeinuak eman.

a) 125° b) 75° c) 320° d) 212° e) 460° f) 750°

2.- Esan ezazu, puntu hauetatik pasatzen diren azken aldeek sortutako angeluetan, zein den ttikiena; eta, ondoren bere funtzio trigonometrikoak kalkulatu:

a) P (-5,12) b) P (7,-24) c) P (2,3) d) P (-3,-5)

3 .- Kalkula itzazu funtzio trigonometrikoen balioak:

$\sin\theta = 7/25 \quad ctg\,\theta = 24/7 \quad tg\,\theta = 3/5 \quad sec\theta - \sqrt{5} \quad cosec\ -2/\sqrt{}$

4 .- Kalkula ezazu:

a) Tg 180°- 2 cos 180°+ 3 cosec 270°+ sen 90° = 0

b) sen o°+ 3 ctg 90°+ 5 sec 180°- 4 cos 270° = -5

III - ANGELU ZORROTZ BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

III - ANGELU ZORROTZ BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

III.1 - ANGELU ZORROTZ BATEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzen baten erpinak, jeneralean, ABC izendatzen dira. C letrak angelu zuzeneko erpina adierazten du. Triangeluaren angeluak, berriz, A, B eta C letraz, C 90° ko angelua izanik. Eta, bukatzeko, a, b eta c letrak angeluen aurkako aldeak adieratzen dituzte. A angeluari dagokionez, a bere aurkako aldea da, eta b, berriz, albokoa. B angeluari dagokionez, a bere alboko aldea eta b aurkako aldea dira; c, beti, hipotenusa izendatuko da.

Triangelu zuzen hau koordenatu sistema batetan ezartzen badugu, A angelua posizio normaleen gelditzen delarik, A angeluaren azken aldeko B puntuak (b,a) koordenatuak izango ditu. A puntutik B puntura c distantzia bat dago, eta bere balioa

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ da.

Beraz, A angeluaren funtzio trigonometrikoak triangelu zuzenaren aldeen bidez defini daitezke. Bere balioak hau dira:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{aurkako aldea}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{ctg } A = \frac{b}{a} = \frac{\text{alboko aldea}}{\text{aurkako aldea}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{alboko aldea}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{alboko aldea}}$$

$$\text{tg } A = \frac{a}{b} = \frac{\text{aurkako aldea}}{\text{alboko aldea}} \qquad \text{cosec } A = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{aurkako aldea}}$$

III.2 - ANGELU OSAGARRIEN FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

ABC triangelu zuzenaren A eta B angelu zorrotzak osagarriak dira, hots, A + B = 90. Irudian ikus daitekenez.

1. Irudia

$$\sin B = \frac{b}{c} = \cos A$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A$$

2. Irudia

$$\operatorname{cotg} B = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{c}{b} = \sec A$$

Erlazio hauek funtzioak binaka elkartzen dituzte -sinu eta kosinu, tangente eta kotangente, sekante eta kosekante-. Honela, bikote baten funtzioa bestearen kofuntzioa dela diogu. Beraz, angelu zorrotz baten funtzioak, angelu osagarriaren kofuntzioaren berdinak dira.

30°, 45° eta 60° funtzio trigonometrikoak.

Angelu θ	sin θ	cos θ	tg θ	ctg θ	sec θ	cosec θ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	3	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	2	2
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Angelua	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
15°	0,26	0,97	0,27	3,70	1,0	3,9
20°	0,34	0,94	0,36	2,70	1,1	2,9
30°	0,50	0,87	0,58	1,70	1,2	2,0
40°	0,64	0,77	0,84	1,20	1,2	1,6
45°	0,71	0,71	1,00	1,00	1,4	1,4
50°	0,77	0,64	1,20	0,84	1,60	1,30
60°	0,87	0,50	1,70	0,58	2,00	1,20
70°	0,94	0,34	2,70	0,36	2,90	1,10
75°	0,97	0,26	3,70	0,27	3,90	1,00

PROBLEMA ASKATUAK

1 - Kalkula itzazu ABC triangelu zuzenaren angelu zorotzen funtzio trigonometrikoen balioak, b = 24 eta c = 25 izanik.

$a^2 = c^2 - b^2 = 25^2 - 24^2 = 49$ —— a = 7. Beraz

$\sin A = \frac{\text{aurkako aldea}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{25}$ $\cos A = \frac{\text{Alboko aldea}}{\text{hipotenusa}} = \frac{24}{25}$

$\text{tg } A = \frac{\text{aurkako aldea}}{\text{alboko aldea}} = \frac{7}{24}$ $\text{ctg } A = \frac{\text{alboko aldea}}{\text{aurkako aldea}} = \frac{24}{7}$

$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{alboko aldea}} = \frac{25}{24}$ $\text{cosec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{aurkako aldea}} = \frac{25}{7}$

$\sin B = \frac{24}{25}$ $\cos B = \frac{7}{25}$ $\text{tg } B = \frac{24}{7}$

$\text{ctg } B = \frac{7}{24}$ $\text{Sec } B = \frac{25}{7}$ $\text{cosec} B = \frac{25}{24}$

2 - Kalkula itzazu A angelu zorrotzaren funtzio trigonometrikoak, jakinik $\sin A = \frac{3}{7}$ dela.

Lehenik, ABC triangelu zuzena kalkulatu behar da. Horretarako, badakigu a = 3 eta c = 7 direla, zeren sin A = 3/7 bait da. Beraz, $b = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = 2\sqrt{10}$

Honela:

$\sin A = \frac{3}{7}$ $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ $\operatorname{tg} A = \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$

$\operatorname{ctg} A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ $\sec A = \frac{7}{2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{20}$ $\operatorname{cosec} A = \frac{7}{3}$

3 - Kalkula itzazu A angelu zorrotzaren funtzio trigonometrikoak, jakinik $\sin A = \frac{2x}{3}$ dela.

ABC triangelu zuzena kalkulatu behar dugu. Honetarako ez dugu ahaztu behar, $3 = \sqrt{a^2 + b^2}$ behar duela izan, zeren 3 hipotenusa bait da.

Honela, ba, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9-4x^2}$ eta,hemendik $\sin A = \frac{2x}{3}$

$\cos A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$ $\operatorname{tg} A = \frac{2x}{\sqrt{9-4x2}}$ $\operatorname{ctg} A = \frac{\sqrt{9-4x2}}{2x}$

$\sec A = \frac{3}{\sqrt{9-4x2}}$ $\operatorname{cosec} A = \frac{3}{2x}$

4 - A zorrotza bada:

a) zergatik da $\sin A < 1$?

b) noiz da $\sin A = \cos A$?

c) zergatik da $\sin A < \operatorname{cosec} A$?

d) zergatik da $\sin A < \operatorname{tg} A$?

e) noiz da $\sin A < \cos A$?

f) noiz da $\operatorname{tg} A > 1$?

5 - Kalkula itzazu 45° ren funtzio trigonometrikoak ABC triangelu batetan, A = B = 45° eta a = b izaten dira. Gure kasu honetan a = b = 1 eginaz,

$c = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ eta

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

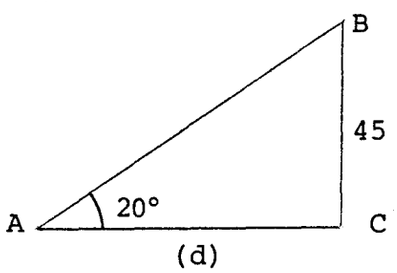
$\operatorname{tg} 45° = \frac{1}{1} = 1$

$\operatorname{cotg} 45° = 1$

$\sec 45° = \sqrt{2}$

$\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$

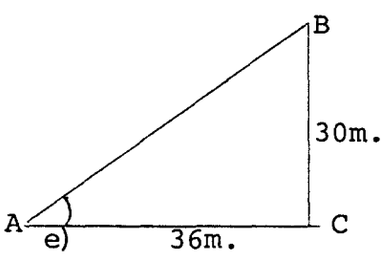
6 - Eguzkia 20° ostertz gainean dagoenan, zer luzera du 45m. altuera duen etxe baten itzalak?



(d) irudian ikus daitekeenez; A = 20° eta CB = 45. Orduan $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{CB}$ eta

AC=CB ctg A=45. ctg 20°=45.2,7 = 121,50m.

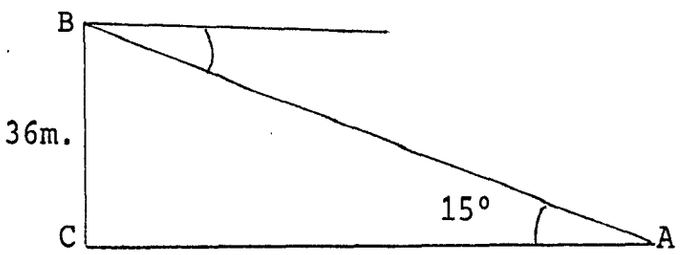
7 - 30m. altuerako arbol batek 36m. luzerako itzala du. Kalkula ezazu eguzkiaren jasotze angelua.



(e) irudian CB = 30 eta AC = 36. Orduan $\operatorname{tg} A = \frac{CB}{AC} = \frac{30}{36} = 0,83$

eta A = 40°

8 - Itsasertzean dagoen faro baten altuera 36m. da. Bertarik, txalupa bat 15° ko jaiste angeluz ikusten da. Zenbateko distantzia dago bien artean?.



g)

(g) irudian, ABC triangelu zuzenean A = 15°eta CB = 36m. dira. Orduan

$\text{ctg } A = \frac{AC}{CB}$ eta AC = CB

ctg A = 36 ctg 15°= 36 (3,7)=133m.

9 - Kalkula ezazu arbol baten altuera, jakinik bere puntaren jasotze angelua 20° tatik 40° tara pasatzen dela, aztertzailea 22,5 m. hurbiltzen bazaio.

ABC triangelu zuzenean, $\text{ctg } A = \frac{AC}{CB}$ beraz AC = CB ctg A edota DC + 22,5 = CB ctg 20.

DBC triangelu zuzenean, $\text{ctg } D = \frac{DC}{CB}$ beraz DC = CB ctg 40

Honela, ba, DC = CB ctg 20°- 22,5 = CB ctg 40

CB (ctg 20°-ctg 40°) = 22,5

CB (2,7-1,2) = 22,5 eta CB=22,5/1,5= 15m.

IV - ANGELU POSITIBO ZORROTZEN FUNTZIOETARA SOILKETE

IV - ANGELU POSITIBO ZORROTZEN FUNTZIOETARA SOILKETA

Angelu burukideak. Ø edozein angelu izanik:

sin (Ø + n360°) = sin Ø	ctg (Ø + n360°) = ctg Ø
cos (Ø + n360°) = cos Ø	sec (Ø + n360°) = sic Ø
tg (Ø + n360°) = tg Ø	cosic (Ø + n360°)=cosic Ø

n zenbaki oso positibo, negativo edo huts dela

Adibideak: sin 400° = sin (40° + 360°) = sin 40°
cos 850° = cos (130°+2360°) = cos 130°
tg (-1000°) = tg(80°- 3360°)= tg 80°

Angelu negatibo baten funtzioak Ø edozein angelu izanik.

sin (-Ø) = -sin Ø	ctg (-Ø) = -ctg Ø
cos (-Ø) = cos Ø	sec (-Ø) = sic Ø
tg (-Ø) = -tg Ø	cosic (-Ø) =-cosicØ

Adibideak: sin (-50°) = -sin 50°
cos (-30°) = cos 30°
tg(-200°) = -tg 200°

Soilketa formulak. Ø edozein angelu izanik.

sin (90°-Ø) = cos Ø	sin (90°+ Ø) = cos Ø
cos (90°-Ø) = sin Ø	cos (90°+ Ø) =-sin Ø
tg (90°-Ø) = ctg Ø	tg (90°+ Ø) = -ctg Ø
ctg (90°-Ø) = tg Ø	ctg (90°+ Ø) = -tg Ø
sic (90°-Ø) = cosicØ	sic (90°+ Ø) =-cosicØ
cosic (90°-Ø) = sic Ø	cosic (90°+ Ø) = sic Ø
sin (180°-Ø) = sin Ø	sin (180°+ Ø) = -sin Ø
cos (180°-Ø) = -cos Ø	cos (180°+ Ø) = -cos Ø
tg (180°-Ø) = -tg Ø	tg (180°+ Ø) = tg Ø
ctg (180°-Ø) = -ctg Ø	ctg (180°+ Ø) = ctg Ø
sic (180°-Ø) = -sic Ø	sic (180°+ Ø) = -sic Ø
cosic (180°-Ø) =cosic Ø	cosic (180°+ Ø) =-cosicØ

Sinplifikatzeko formula orokorra. Edozein $(n.90° \pm \emptyset)$ funtzio trigonometriko, baita $\emptyset$ edozein angelu izanik, zenbakiz zera da:

a) $\emptyset$ beraren funtzio berdina, baldin n oso eta bikoitz bada
b) $\emptyset$ ren kofuntzioaren berdina, baldin n oso eta bikoitz bada.

Aldi bakoitzean zeinua berriz, $(n.90 + \emptyset)$ dagon koadrantean funtzioak duena, baldin $\emptyset$ angelu zorrotz positiboa bada.

Exenpluak:

1.- $\sin(180°-\emptyset) = \sin(2.90 -\emptyset) = \sin \emptyset$, 180°eta 90°multiploak bait dira, eta $\emptyset$ zorrotz positiboa balitz, $(180°-\emptyset)$ ren bukaera aldea II koadrantean dago.

2.- $\cos(180°+ \emptyset) = \cos (2.90 + \emptyset)= -\cos \emptyset$; 180° nola 90°ren multiplo bikoitia den, eta baldin $\emptyset$ zorrotz positiboa bada, $(180°+ \emptyset)$ bukaeraldea III garren koadrantean dago.

3.- $tg(270°-\emptyset) = tg(3.90 -\emptyset) = ctg \emptyset$, 270° nola 90° multiploa den, eta baldin $\emptyset$ angelu positiboa balitz, $270° -\emptyset$ bukaera aldea III garren koadrantean dago.

4.- $\cos(270°+ \emptyset) = \cos (3.90 + \emptyset) = \sin \emptyset$; 270° nola 90° multiploa bikoitia den, eta $\emptyset$ zorrotz positiboa delarik, $270° + \emptyset$ bukaeraldea IV koadrantean dago.

Adierazi $\emptyset$ ren funtzio bidez:

a) $\sin (\emptyset - 90°)$
b) $\cos (\emptyset - 90°)$
d) $\sec(-\emptyset - 90°)$
e) $\cos(-180°+ \emptyset)$
f) $\sin (270°- \emptyset)$
g) $tg (\emptyset - 360°)$
h) $\sin(540°+ \emptyset)$

i) tg (720° - Ø)
j) tg (720° + Ø)
k) cos (-450°- Ø)
l) cosc(-900°+ Ø)
m) sin (-540°- Ø)

a) sin (Ø - 90°) = sin (-90° + Ø) = sin (-1. 90°+ Ø) =
= -cos Ø , zeinu negatiboa duela, nola Ø zorrotz positiboa den Ø-90° bukaeraldea IV koadrantean dago.

b) cos (Ø - 90°) = cos (-90°- Ø) = cos (-1. 90° + Ø) = sin Ø

d) sec (-Ø - 90°) = sec (-90°- Ø) = sec (-1. 90°- Ø) =
= cosec Ø, zeinu negatiboa da Ø zorrotz positiboa baitda, -Ø -90° bukaeraldea III koadrantean dago.

e) cos (-180° + Ø) = cos (-2.90° + Ø) = -cos Ø (III koadrantean)

f) sin (-270° - Ø) = sin (-3.90° - Ø) = cos Ø (I ")

g) tg (Ø - 360°) = tg (-4.90° + Ø) = tg Ø (I ")

h) sin (540° + Ø) = sin (6.90° + Ø) = -sin Ø (III ")

2.- Angelu zorrotz positiboen funtzioekin agertu bi era ezberdinetan:

a) sin 130°
b) tg 325°
d) sin 200°
e) cos 310°
f) tg 165°
g) sec 250°
h) sin 670°
i) ctg 930°
j) cosec865°
k) sin (-100°
l) cos (-680°
m) tg (-290°

a) $\sin 130° = \sin (2.90 - 50°) = \sin 50°$
$= \sin (1.90 + 40°) = \cos 40°$

b) $\text{tg } 325° = \text{tg } (4.90 - 35°) = -\text{tg } 35°$
$= \text{tg } (3.90 + 55°) = -\text{ctg } 55°$

d) $\sin 200° = \sin (2.90 + 20°) = -\sin 20°$
$= \sin (3.90 - 70°) = -\cos 70°$

f) $\text{tg } 165° = \text{tg } (2.90 - 15°) = -\text{tg } 15°$
$= \text{tg } (1.90 + 75°) = -\text{ctg } 75°$

g) $\sec 250° = \sec (2.90 + 70°) = -\sec 70°$
$= \sec (3.90 - 20°) = -\text{cosec} 20°$

h) $\sin 670° = \sin (8.90 - 50°) = \sin 50°$
$= \sin (7.90 + 40°) = -\cos 40°$
edo
$\sin 670° = \sin (310° + 360°) = \sin 310° = \sin(4.90° - 50°) = -\sin 50°$

i) $\text{ctg } 930° = \text{ctg } (10.90 + 30°) = \text{ctg } 30°$
$= \text{ctg } (11.90 - 60°) = \text{tg } 60°$
edo
$\text{ctg } 930° = \text{ctg}(210° + 2360°) = \text{ctg } 210° = \text{ctg}(2.90° + 30°) = \text{ctg } 30°$

3.- Sinua, kosinua eta tangenteak bilatu:

a) 120°
b) 210°
d) 315°
e) -135°
f) -240°
g) -330°

Jar dezagun $\emptyset$, beti zorrotz eta positiboa $\emptyset$ren angelu erlatiboa dela, baldin $\emptyset = 180° - \emptyset$, $180° + \emptyset$ edo bestela $360° - \emptyset$. Orduan $\emptyset$-ren edozein funtzio zenbakiz $\emptyset$-ren funtzio beraren berdina da. Zeinua berriz, aldi bakoitzean funtzioek $\emptyset$-ren bukaeraldea dagoen koadrantean dutena.

a) $120° = 180° - 60°$. Angelu erlatiboa 60° da, 120° II koadrantean dago. $\sin 120° = \sin 60° = \sqrt{3/2}$, $\cos 120° = -\cos 60° = -1/2$, $\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

b) $210° = 180° + 30°$. Angelu erlabitoba 30° da, 210° III koadrantean dago. $\sin 210° = -\sin 30° = -1/2$, $\cos 210° = \cos 30° = -\sqrt{3/2}$, $\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3/3}$

d) $315° = 360° - 45°$. Angelu erlatiboa 45° da, 315° IV koadrantean dago. $\sin 315° = -\sin 45° = \sqrt{2/2}$, $\cos 315° = \cos 45° = \sqrt{2/2}$, $\operatorname{tg} 315° = -\operatorname{tg} 45° = -1$

4.- Baldin $\operatorname{tg} 25° = a$, bilatu:

a) $$\frac{\operatorname{tg} 155° - \operatorname{tg} 115°}{1 + \operatorname{tg} 155° \operatorname{tg} 115°} = \frac{-\operatorname{tg} 25° - (-\operatorname{ctg} 25°)}{1 + (-\operatorname{tg} 25°)(-\operatorname{ctg} 25°)} = \frac{-a + 1/a}{1 + a(1/a)} = \frac{-a^2 + 1}{a + a} = \frac{1 - a^2}{2a}$$

b) $$\frac{\operatorname{tg} 205° - \operatorname{tg} 115°}{\operatorname{tg} 245° - \operatorname{tg} 335°} = \frac{\operatorname{tg} 25° - (-\operatorname{ctg} 25°)}{\operatorname{ctg} 25° + (-\operatorname{tg} 25°)} = \frac{a + 1/a}{1/a - a} = \frac{a^2 - 1}{1 - a^2}$$

5.- Baldin $A+B+C = 180°$, orduan

a) $\sin (B+C) = \sin (180° - A) = \sin A$

b) $\sin 1/2(B+C) = \sin 1/2(180° - A) = \sin (90° - 1/2A) = \cos 1/2\, A$

6.- Bilatu Ø-ren ahalik eta balore gehienak 360° baino txikiagoak cos Ø = 0,9063.

Bi soluzio daude, Ø = 25° I koadrantean, Ø = 360°- 25° = = 355° IV koadrantean.

7.- Angelu positibo zorrotzen funtzioen bidez adierazi:

a) sin 145°	f) sec 325°	j) tg (-1385°)
b) cos 215°	g) cosec 190°	k) ctg 610°
d) tg 440°	h) sin (-200°)	l) sec 455°
e) ctg 155°	i) cos (-760°)	m) cosec 825°

a) sin 35°o cos 55°	h) sin 20° o cos 70°
b) -cos 35° o -sin 55°	i) cos 40° o sin 50°
d) tg 80° o ctg 10°	j) tg 55° o ctg 35°
e) -ctg 25° o -tg 65°	k) ctg 70° o tg 20°
f) sec 35° o cosec 55°	l) -sec 85° o cosec 5°
g) -cosec 10° o -sec 80°	m) cosec 75° o sec 15°

8.- Sinu, kosinu eta tanjenteak bilatu:

a) 150° , b) 225°, d) 300° , e) -120°, f) -210°, g) -315°

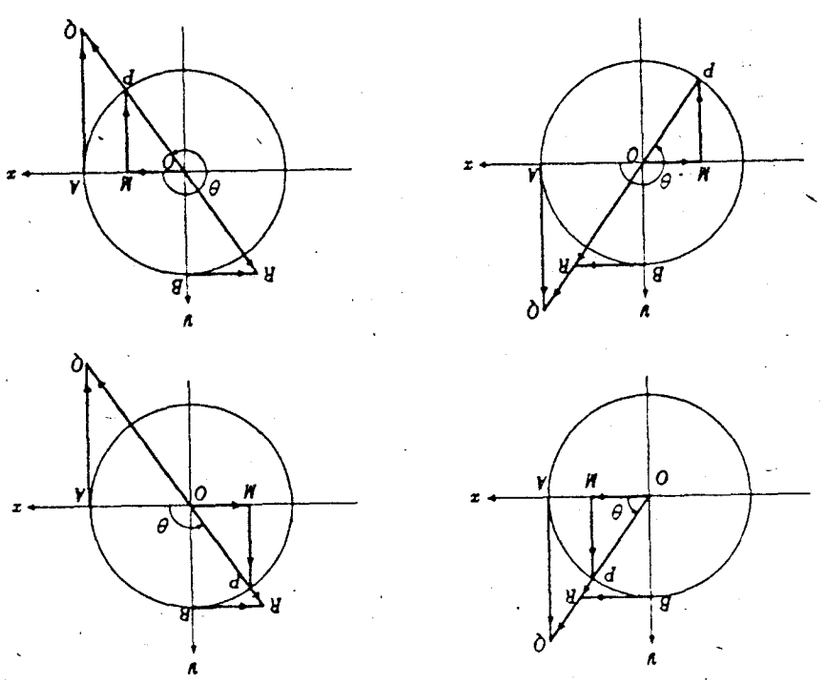
a) $1/2$, $-\sqrt{3}/2$, $-1\sqrt{3}$	e) $-\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $\sqrt{3}$
b) $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, 1	f) $1/2$, $-\sqrt{3}/2$, $-1/\sqrt{3}$
d) $-\sqrt{3}/2$, $1/2$, $-\sqrt{3}$	g) $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, 1

V - FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN ALDAKUNTZA ETA GRAFOAK

V - FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN ALDAKUNTZA ETA GRAFOAK

V.1 - FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN IRUDIKATZE LINEALAK

Bedi posizio normaleko angelu bat. Ikus irudian θ, Koadrante bakoitzean. Bertizen θ erdian jarri eta irudika dezagun zirkulu bat unitatea erradio eta θ X A puntuan moztuaz eta Y ardatza B-en. Irudike dezagun θ X en perpendikularra, M.P. Baita ere, A eta B irudika ditzagun tanjenteak θ eta R aldea mozten dutela.



Irudi bakoitzean $\overset{\triangle}{OMP}$, $\overset{\triangle}{OAQ}$ eta $\overset{\triangle}{OBR}$ hiruki zuzenangeluarrak dira.

sin θ = M P/O P = M P	ctg θ = OM/MP = BR/OB = BR
cos θ = O M/O P = O M	sec θ = OP/OM = OQ/OA = OQ
tg θ = M P/O M = AQ/OA=AQ	cosecθ = OP/MP = OR/OB = OR

Bertan $\overline{MP}$, $\overline{OM}$, $\overline{AQ}$ segmentuak zuzenduak dira eta funtzio bakoitzaren handiera segmentuen luzaerak dakar, eta zeinua berriz ezarritako norabideak. $\overline{OQ}$ eta $\overline{OR}$ segmentu zuzenduak positibotzat hartzen dira, angeluaren bukaeraldean neurtuta, eta jarraipenean neurtuta berriz negatibotzat.

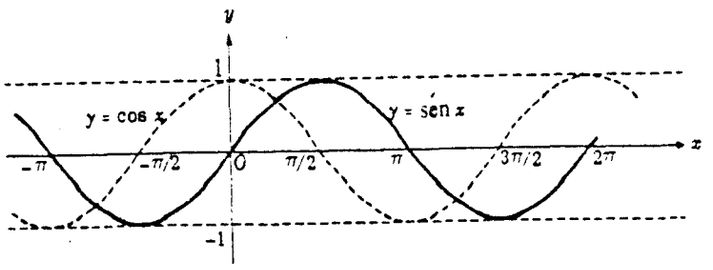
V.2 - FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN ALDAKUNTZAK

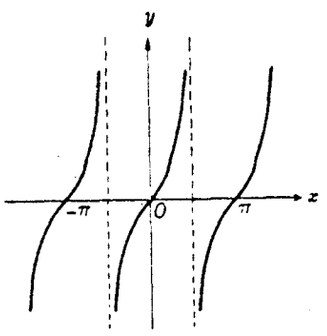
P erratioa unitate dela eta A tik hasiaz erlojuen orratzen kontrako zentzuan ibiltzan bada, θ = LXOP 0° tik 360 aldatuz. Irudietan nabari da (A = azi, D = guttitu).

	0°tik 90°	90°tik 180°	180°tik 270°	270°tik 360°
sec θ	A. 0 tik 1	D. 1 tik 0	D.o tik -1	A.-1 tik 0
cos θ	D. 1 tik 0	D. 0 tik -1	A.-1tik 0	A. 0 tik 1
tg θ	0 tik + oo	-oo tik 0	0 tik + oo	- oo tik 0
ctg θ	+ oo tik 0	0 tik - oo	+ oo tik 0	0 tik - oo
sec θ	1 tik + oo	- oo tik -1	- 1 tik -oo	+ oo tik 1
cosec θ	+ oo tik 1	1 tik + oo	- oo tik -1	- 1 tik -oo

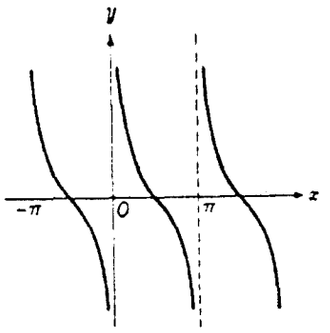
Funtzio trigonometrikoen irudiak. Honoko taula honetan X angaluaren balioa erradianetan dago.

X	y=sin x	y=cos x	y=tg x	y=ctg x	y =sec x	y= cosec x
0 π	0,00	1,00	0,00	± oo	1,00	± oo
π/6	0,50	0,87	0,58	1,73	1,15	2,00
π/4	0,71	0,71	1,00	1,00	1,41	1,41
π/3	0,87	0,50	1,73	0,58	2,00	1,15
π/2	1,00	0,00	± oo	0,00	± oo	1,00
2π/3	0,87	-0,50	-1,73	-0,58	-2,00	1,15
3π/4	0,71	-0,71	-1,00	-1,00	-1,41	1,41
5π/6	0,50	-0,87	-0,58	-1,73	-1,15	2,00
π	0,00	-1,00	0,00	± oo	-1,00	± oo
7π/6	-0,50	-0,87	0,58	1,73	-1,15	-2,00
5π/4	-0,71	-0,71	1,00	1,00	-1,41	-1,41
4π/3	-0,87	-0,50	1,73	0,58	-2,00	-1,15
3π/2	-1,00	0,00	± oo	0,00	± oo	-1,00
5π/3	-0,87	0,50	-1,73	-0,58	2,00	-1,15
11π/6	-0,50	0,87	-0,58	-1,73	1,15	-2,00
2π	0,00	1,00	0,00	± oo	1,00	± oo

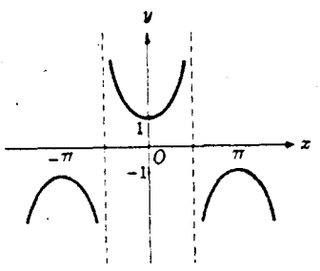




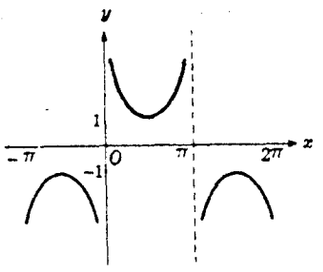
y = tg x



y = cot x



y = sec x



y = csc x

1 - Oharra: Nola sin (1/2π + X) = cos X, y = cos X irudia y = sin X irudia 1/2 π bide exkerrera eramanaz aisago egiten da.

2 - Oharra: Nola cosec (1/2π + X) = sec X, y = cosec X en irudia y = sec X irudia 1/2 π da eskubira eramanaz lortu liteke.

Aldizkako funtzioak

Xaldagaiaren funtzio bat, f (X), aldizka berritzen bada, aldizkako deitzen da.

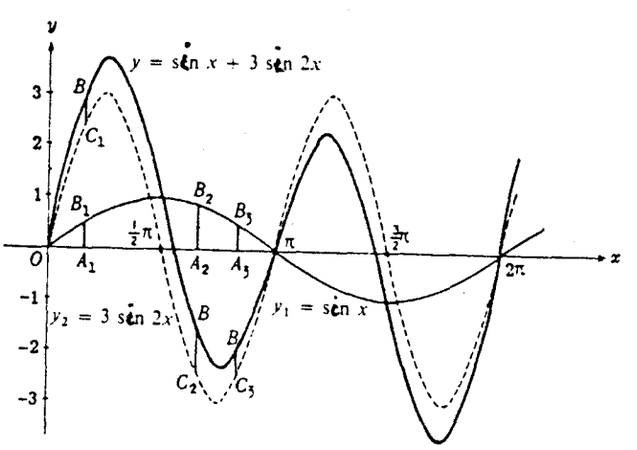
Makur sinusoidal jenerala

Y = sin X handiera (ordenatu handiena eta periodoa (uhinaren luzera) 1 eta 2π dira. Hortan X en balio batentzat y = a sin x, a $>$ 0, a aldiz handiagoa da y = sin x baino. Beraz (y = a sin x)en handiera a da eta periodoa 2π. Izan ere, bx = 2π, x= $2\pi/b$, y = sin bx, b $>$ 0 handiera 1 da, eta periodoa $2\pi/b$.

Ekuazio honen makur sinusoidal jenerala:

y = a sin bx, a $>$ 0, b $>$ 0

handiera a, eta periodoa berriz $2\pi/b$. Beraz y = 3 sin 2x irudikatuaz 3 da handiera, eta $2\pi/2$ = periodoa. Ikus a irudian y = sin x eta y = 3 sin 2x sistema berdinean.



(a)

Makur sinusoidalen konposaketa

Mugimendu ondulatuen era bihurrienak makur sinusoidal batzuk nahastuz lortu ohi dira.

Exenplua:

Irudikatu $y = \sin x + 3 \sin 2x$ (a)

Lehenbiziko $y_1 = \sin x$ eta $y_2 = 3 \sin 2x$ irudikatzen dira, gero $x = 0$ A_1 bakoitzean A_1 B $y = \sin x + 3 \sin 2x$ dagokio.

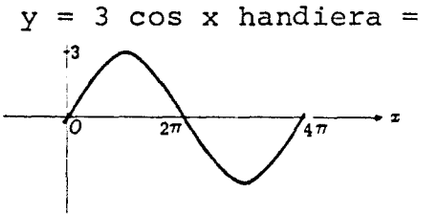
Beraz: $A_2B = A_2B_2 + A_2C_2$, $A_3B = A_3B_3 + A_3C_3$.

1 - Irudikatu honoko funtzio hauk:

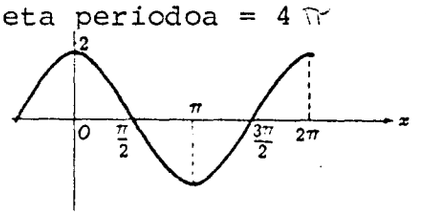
a) $y = 4 \sin x$
b) $y = \sin 3 x$
d) $y = 3 \sin \frac{1}{2}x$
e) $y = 2 \cos x = 2 \sin (x+\frac{1}{2}\pi)$
f) $y = 3 \cos \frac{1}{2}x = 3 \sin (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi)$

Aldi bakoitzean makur berdina ibiliko dugu, eta gero ardatzean unitateak handierak jartzeko aukeratuko ditugu.

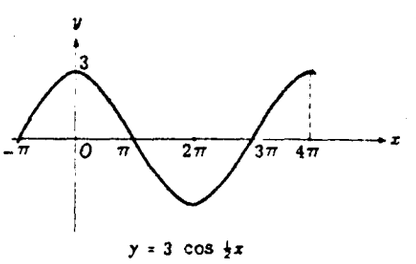
a) $y = 4 \sin x$ handiera $= 4$ eta periodoa $= 2\pi$
b) $y = \sin 3x$ handiera $= 1$ eta periodoa $= 2\pi/3$
d) $y = 3 \sin \frac{1}{2} x$ handiera $= 3$ eta periodoa $= 2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$
e) $y = 2 \cos x$ handiera $= 2$ eta periodoa $= 2\pi$
f) $y = 3 \cos x$ handiera $= 3$ eta periodoa $= 4\pi$



$y = 3 \sin \frac{1}{2}x$



$y = 2\cos x$



$y = 3 \cos \frac{1}{2}x$

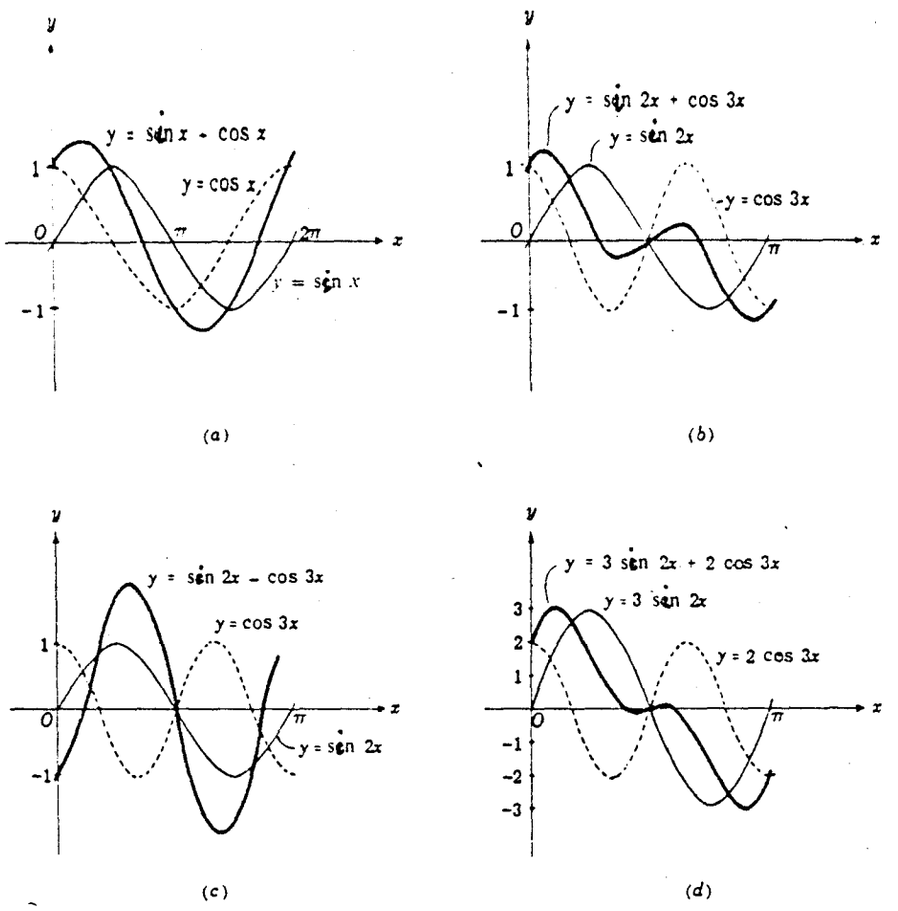
2 - Funtzio hauek irudikatu:

a) y = sin x + cos x

b) y = sin 2x + cos 3x

d) y = sin 2x - cos 3x

e) y = 3 sin 2X + 2 cos 3x



3 - Uhin luzera berdinarentzat, irudikatu honoko funtzio hauk:

a) y = 3 sin x

b) y = sin 2x

d) y = 4 sin x/2

e) y = 4cos x

f) y = 2 cos x/3

4 - Uhin luzera berdinarentzat irudikatu funtzio hauk:

a) $y = \sin x + 2 \cos x$

b) $y = \sin 3x + \cos 2x$

d) $y = \sin x + \sin 2x$

e) $y = \sin 2x + \sin 3x$

f) $y = \sin 3x - \cos 2x$

g) $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$

BESTE BI ANGELUZ OSATUTAKO ANGELUENTZAKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

BATUKETA FORMULAK

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ikus frogatzat, 1-2 problemak

KENKETA FORMULAK

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ikus frogatzat, 3 problema

ANGELU BIKOITZAREN FORMULAK

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

ikus frogatzat, 9 problema

ERDI ANGELUAREN FORMULAK

$$\sin \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

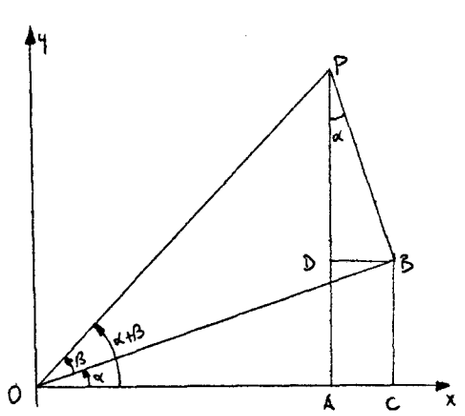
ikus frogatzat, 10 problema

PROBLEMA ASKATUAK

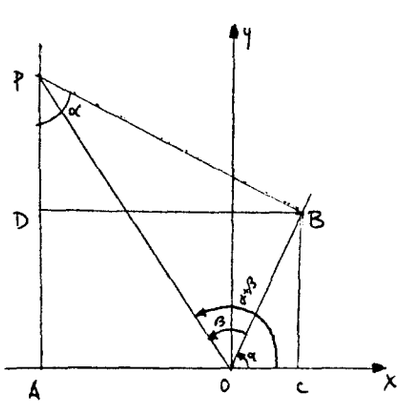
1) (1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

froga, α eta β angelu positibo zorrotz direnean



$\alpha+\beta < 90°$



$\alpha+\beta > 90°$

Irudi hauk eraikitzeko ipin α angelua egoera normalean, ipin β, erpina O-n duelarik eta hasierako aldea α-ren bukaerakoan duelarik, Har $(\alpha+\beta)$ angeluko bukaerako aldetik P puntu bat. $PA \perp OX$, $PB \perp OB$, $BC \perp OX$, $BD \perp AP$ elkarzutak narraz.

$\angle APB = \alpha$, (OA eta AP, OB eta BP) elkarzutak bait dira

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD + DP}{OP} = \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{CB}{OB} \cdot \frac{OB}{OP} + \frac{DP}{BP} \cdot$$

$$\cdot \frac{BP}{OP} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OA}{OP} = \frac{OA-AC}{OP} = \frac{OC-DB}{OP} = \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OP} - \frac{DB}{BP} \cdot$$

$$\cdot \frac{BP}{OP} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

2) froga: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

3) diferentzi angeluaren formulak froga:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha(\cos\beta) + \cos\alpha(-\sin\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =$$

$$\cos\alpha(\cos\beta) - \sin\alpha(-\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + (-\operatorname{tg}\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha(-\operatorname{tg}\beta)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

4) 15°-ren sinu, cosinu eta tangentea aurki, (a) 15°= = 45°- 30°eta (b) 15°= 60°-45°erabiliz.

a) $\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45°-30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1+\operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1(1/\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

b) $\sin 15° \sin(60°-45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\cos 15° = \cos(60°-45°) = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45°$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60°-45°) = \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 45°}{1+\operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

5) Froga: (a) $\sin(45°+\theta) - \sin(45°-\theta) = \sqrt{2}\sin\theta$

(b) $\sin(30°+\theta) + \cos(60°+\theta) = \cos\theta$

a) $\sin(45°+\theta) - \sin(45°-\theta) = (\sin 45° \cos\theta + \cos 45° \sin\theta) -$

$- (\sin 45° \cos\theta) - \cos 45° \sin\theta) = 2 \cos 45° \sin\theta =$

$= 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta = \sqrt{2} \sin\theta$

b) $\sin(30°+\theta) + \cos(60°+\theta) = (\sin 30° \cos\theta + \cos 30° \sin\theta) + (\cos 60° \cos\theta - \sin 60° \sin\theta) = (\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta) = \cos\theta$

6 - Simplifija: a) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$,

b) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

c) $\dfrac{tg(\alpha+\beta) - tg\,\alpha}{1 + tg(\alpha+\beta)\,tg\,\alpha}$

d) $(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2$

a) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

b) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

c) $\dfrac{tg(\alpha+\beta) - tg\,\alpha}{1 + tg(\alpha+\beta)\,tg\,\alpha} = tg[(\alpha+\beta)-\alpha] = tg\,\beta$

d) $(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2 = \sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1$

8 - Froga: a) $ctg(\alpha+\beta) = \dfrac{ctg\,\alpha\,ctg\,\beta - 1}{ctg\,\beta + ctg\,\alpha}$

b) $ctg(\alpha-\beta) = \dfrac{ctg\,\alpha\,ctg\,\beta + 1}{ctg\,\beta - ctg\,\alpha}$

a) $ctg(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{tg(\alpha+\beta)} = \dfrac{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{ctg\,\alpha\,ctg\,\beta}}{\dfrac{1}{ctg\,\alpha} + \dfrac{1}{ctg\,\beta}} = \dfrac{ctg\,\alpha\,ctg\,\beta - 1}{ctg\,\beta + ctg\,\alpha}$

b) $ctg(\alpha-\beta) = ctg[\alpha+(-\beta)] = \dfrac{ctg\,\alpha\,ctg(-\beta) - 1}{ctg(-\beta) + ctg\,\alpha} = \dfrac{-ctg\,\alpha\,ctg\,\beta - 1}{-ctg\,\beta + ctg\,\alpha} = \dfrac{ctg\,\alpha\,ctg\,\beta + 1}{ctg\,\beta - ctg\,\alpha}$

9 - Froga angelu bikoitzaren formulak.

Egin $\beta = \alpha$ honako formuletan

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Orduan,

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

10 - Froga erdi angeluaren formulak.

egin bedi $\alpha = \frac{1}{2}\theta$; $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$$\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{1}{2}\theta, \quad \sin^2\frac{1}{2}\theta =$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{2}, \quad \sin\frac{1}{2}\theta \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$\alpha = \frac{1}{2}\theta$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1, \quad \cos^2\frac{1}{2}\theta =$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad \cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

azkenik, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)\ (1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\ (1+\cos\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)\ (1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\ (1-\cos\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos 2\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\pm$ zeinuak ez dira beharrezko, tg $\frac{1}{2}\theta$ eta sinθ zeinu berdinekoak bait dira, eta 1-cos θ beti positibo.

BATURA, KENDURA ETA BIDERKADURA FORMULAK

SINU ETA COSINU ARTEKO BIDERKADURAK

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right.$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right.$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right.$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right.$$

ikus frogatzat, 1 problema

SINU ETA COSINU ARTEKO BATURA ETA KENDURA

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

ikus frogatzat, 2 problema

PROBLEMA ASKATUAK

1. Biderkaduren formulak ezar:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-$$

$$-\cos\alpha\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+$$

$$+\sin\alpha\sin\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

2. Ezar batura eta kendura formulak

bitez $\alpha+\beta=A$ eta $\alpha-\beta=B$. Beraz $\alpha=\frac{1}{2}(A+B)$, $\beta=\frac{1}{2}(A-B)$

Orduan (ikus 1. problema)

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\rightarrow\sin A+\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta\rightarrow\sin A-\sin B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta\rightarrow\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

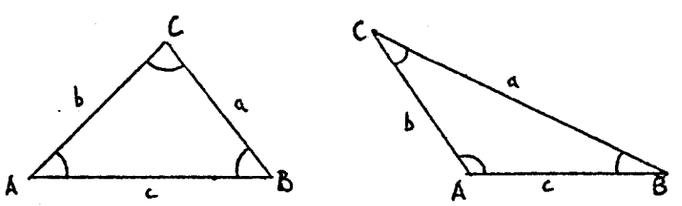
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\cos\beta\rightarrow\cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

VI - TRIANGELU ZEIHARRAK. ASKAPEN EZ LOGARITMIKOA

VI - TRIANGELU ZEIHARRAK. ASKAPEN EZ LOGARITMIKOA

TRIANGELU ZEIHAR BAT, angelu zuzenik ez duena da. Honelako triangelu batek hiru angelu zorrotz ditu, edo eta bi zorrotz eta kamuts bat.

Hemen, angeluak A, B, eta C, eta dagozkien aurkako aldeak, a, b eta c, deitzeko konbentzioa erabili da.



Hiru elementu ezagutzen badira, (hiru angeluak kanpo), triangelua, gero ikusiko den kasu batetan ezezik, determinaturik gelditzen da. Triangelu zeiharren lau kasuak hauk dira:

I. Kasua Alde bat eta bi angelu emanik
II. Kasua Bi alde eta baten aurkako angelua emanik
III. Kasua Bi alde eta osatzen duten angelua emanik
IV. Kasua Hiru aldeak emanik

SINUAREN TEOREMA. Triangelu orotan, aldeak, aurkako angeluen sinuekiko proportzionalak dira. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Hemendik honako erlazioak sortzen dira:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

MOLLWEIDE-REN FORMULAK. ABC triangelu orotan

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos 1/2\ (A-B)}{\sin 1/2\ c}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin 1/2\ (A-B)}{\cos 1/2\ c}$$

eta letren trukaketa ziklikoen bidez lortzen direnak, hau da

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos 1/2\ (B-C)}{\sin 1/2\ A}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin 1/2\ (B-C)}{\cos 1/2\ A}$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos 1/2\ (C-A)}{\sin 1/2\ B}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin 1/2\ (C-A)}{\cos 1/2\ B}$$

eta ekuazio bakoitzeko zenbakitzaileko bi letren (maiuskula eta minuskula) trukaketaz lortutakoak.

PROJEKZIO FORMULAK. ABC triangelu batetan

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

I. KASUA. Alde bat eta bi angelu emanik.

adibidea. Suposa ditzagun a, B eta C emanik

A aurkitzeko, $A = 180° - (A+C)$ erabil

b aurkitzeko, $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ erabil, eta $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$

c aurkitzeko, $\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$ erabil, eta $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$

Konprobatzeko, erabil Mollweide-ren formuletatik bat, edo projekziotako bat

II. KASUA. Bi alde eta baten aurkako angelua emanik

adibidea. Suposa ditzagun b, c eta B emanik

$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$ bada, $\sin C = \frac{C \sin B}{b}$

$\sin C > 1$ bada, ez da inolako C angelurik determinatzen.

$\sin C = 1$ bada, $C = 90°$ eta triangelu zuzen bat determinatzen da.

$\sin C < 1$ bada, bi angelu determinatzen dira: bata C, zorrotza, eta bestea $C' = 180° - C$, kamutsa.

Honela bada, bat edo bi triangelu gerta daitezke.

Kasu hau geometrikoki aztertzen da 7. probleman. Lortutako emaitzak honela labur daitezke:

angelu zorrotza bada

(a) emandako angeluaren aurkako aldea, emandako beste aldea baino handiago bada edo berdina, emaitza BAT

(b) emandako angeluaren aurkako aldea, emandako beste aldea baino txikiagoa bada, BI emaitza, BAT bakarra (triangelu zuzena), edo emaitzarik ez

angelua kamutsa bada

(c) emandako angeluaren aurkako aldea, emandako beste aldea baino txikiagoa edo berdina bada, INOLAKO emaitzarik ez

(d) emandako angeluaren aurkako aldea, emandako beste aldea baino handiago bada, emaitza BAT

adibidea. (1) $b = 30$, $c = 20$, eta $B = 40°$bada, B zorrotza denez eta b c denez, emaitza bat ba da.

(2) $b = 20$, $c = 30$, eta $B = 40°$bada, ez da emaitzarik, edo bat bakarra da, edo bi dira. Kasu berezia, $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$ kalkulatuz lortzen da.

(3) $b = 30$, $c = 20$ eta $B = 140°$ bada, emaitza bat ba da

(4) $b = 20$, $c = 30$ eta $B = 140°$ bada, ez da emaitzarik

Hau, kasu anbiguoa deritzana da, eta sinuaren teorema bidez askatzen da; Mollweide-ren formulen bidez edo projekziokoen bidez konproba daiteke.

CONSINUAREN TEOREMA. ABC triangelu batetan, alde baten karratua, beste bi aldeen karratuen batura ken bi alde hauek bidez biderkaturiko osatzen duten angeluaren cosinua, da. Hau da,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

III. KASUA. Bi alde eta osatzen duten angelua emanik.

adibidea. Suposa ditzagun a, b eta C emanik

c aurkitzeko, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ erabil

A aurkitzeko, $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ erabil

B aurkitzeko, $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$ erabil

Konprobatzeko, $A + B + C = 180°$ erabil

IV. KASUA. Hiru aldeak emanik.

adibidea. a, b eta c emanik, aska consinuaren teorema

angelu bakoitzerako.

Angeluak aurkitzeko, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Konprobatzeko, $A + B + C = 180°$ erabil.

VII - ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

VII - ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

VII.1 - ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

(1) $x = \sin y$

ekuazioak, edozein y angelurentzat, x balio bakar bat definitzen du. Baina alderantziz egiten badugu, hau da, x balio bat ematen badugu, bi kasu gerta daitezke: Ekuazioak emaitzarik ez izatea, edota infinitu izatea. Adibidez: $x = 2$ egiten badugu, ez dago emaitzarik, zeren angelu baten sinuak ez bait du 1 gainezkatzen $x = 1/2$ bada, y emaitza asko daude, hobe esan, infinitu: $y = 30°, 150°, 390°, 510°, \ldots, -210°, -330° \ldots$

y x en funtzio bezala adierazteko, era honetan idazten da:

(2) $y = \text{arc} \sin x$

hemen arku hitza agertu arren, expresio hau honela ulertu behar da: "y, bere sinua x den angelua da". Era berean

$y = \text{arc} \cos x \quad , \quad x = \cos y$ bada
$y = \text{arc tg } x \quad , \quad x = \text{tg } y$ bada, e.a.

Azken expresio hauk beste notazio honetan ere idaz daitezke:

$y = \text{arc} \sin x = \sin^{-1} x$
$y = \text{arc} \cos x = \cos^{-1} x$ e.a.

Halere, notazio hau ez da oso erabilia, konfusioak sort ez daitezen. Gogora dezagun:

$\sin^{-1} x = \text{arc} \sin x \qquad (\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$

VII. 2 - ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN GRAFOAK

$y = \text{arc sin } x$ eta $x = \sin y$ en grafoak berdinak dira. Grafo hau eta $y = \sin x$ en grafoa ere berdinak dira, x eta y ardatzak aldatuz. Grafo batetako x balioa, beste grafoan y aldagaiak hartzen du. Honela, ba, $y = \text{arc sin } x$ ren grafoa y ardatzean marraztutako kurba sinusoidal bat da.

Era berean, beste alderantzizko funtzio trigonometrikoen grafoak ere funtzio trigonometrikoen grafoak dira, x y ren ordez, eta alderantziz, jarriz.

VII. 3 - BALIO NAGUSIAK

Batzutan, halabeharrez edo, alderantzizko funtzio trigonometrikoak uniforme balira bezala kontsideratu beharko dugu. Uniforme izateak hau esan nahi du: x balio onhargarri bakoitzerako y balore bakar bat dugula.

Honetarako, x balio ezagunari dagozkien angelu guztien artetik bat aukeratzen dugu. Adibidez, $x = 1/2$ bada, y balioa = = 30° aukeratuko dugu, eta $x = -1/2$ bada, y balioa = -30° aukeratuko dugu. Aukeratutako balio honi arc sin x ren balio nagusia deritzogu. Balio nagusia bakarrik dugunean kontutan, honela idatziko dugu: arc sin x, arc cos x, ... Ondoko irudietan agertzen diren lerro lodiak, alderantzizko funtzio trigonometrikoen balio nagusien tarteei dagozkie.

x positiboa edota zero bada, eta alderantzizko funtzioa existitzen bada, balio nagusia honela definituko dugu: y ren balioa da, eta o eta $\frac{\pi}{2}$ ren artean dago. Muturreko bi balio hauk ere barruan sartzen dira. Adibidez:

$$\text{arc sin } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{zeren } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{eta} \quad o < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc cos } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{zeren } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{eta} \quad o < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{zeren tg } \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{eta} \quad o < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

Baina x negatiboa bada, eta alderantzizko funtzio existitzen bada, balio nagusia honela definituko da:

$-\frac{1}{2}\pi \leq \text{arc sin } x < 0$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\pi < \text{arc tg } x < \pi$

$\frac{1}{2}\pi < \text{arc cos } x \leq \pi$ $\qquad$ $-\pi \leq \text{arc sin } x < -\frac{1}{2}\pi$

$-\frac{1}{2}\pi < \text{arc tg } x < 0$ $\qquad$ $-\pi < \text{arc cosec } x \leq -\frac{1}{2}\pi$

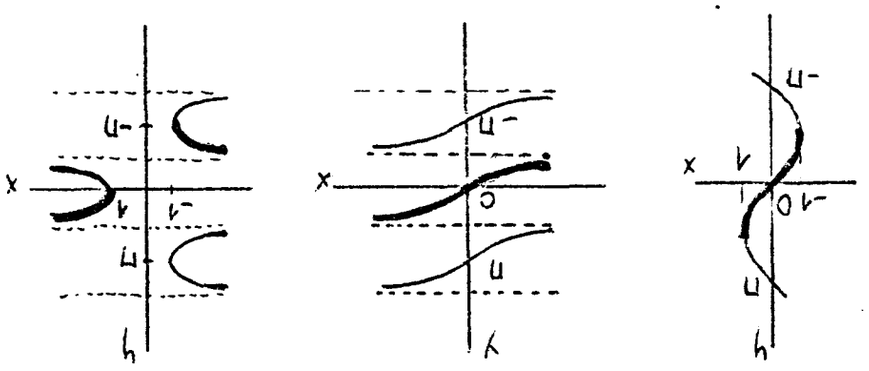
Adibidez:

$\text{arc sin } (-\sqrt{3}/2) = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\text{arc ctg } (-1) = \frac{3\pi}{4}$

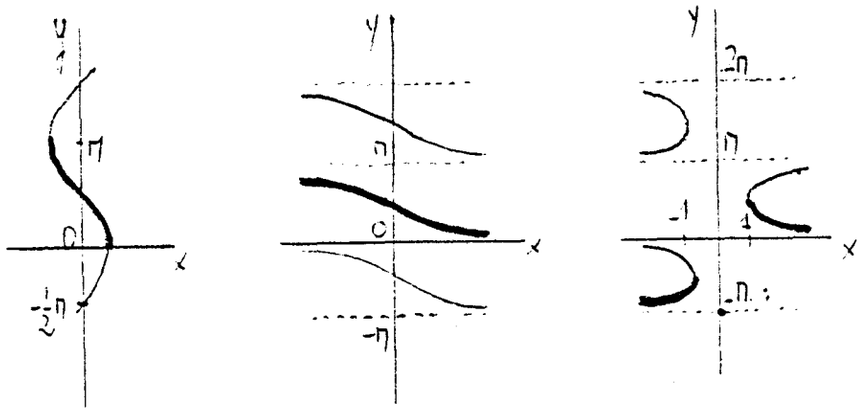
$\text{arc cos } (-1/2) = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\text{arc sec } (-2/\sqrt{3}) = -5\pi/6$

$\text{arc tg } (-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\text{arc cosec } (-\sqrt{2}) = -3\pi/4$

OHARRA: Zenbait autore ez dator bat, (x negatiboa bada), alderantzizko funtzioen balio nagusiak definitzerakoan. Hemen emandako definizioak, lagungarrienak dira kalkulurako.



y = arc sin x $\qquad$ y = arc tg x $\qquad$ y = arc sec x



y = arc cos x y = arc ctg x y = arc cosec x

VII. 4 - ALDERANTZIZKO FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN BALIO JENERALAK

Bedi y x en alderantzizko funtzio trigonometriko bat. y ren funtzio trigonometrikoaren balioa ezaguna denez gero, angeluaren alde terminalerako normalki biposizio determinatzen dira. Bitez y1 eta y2 alde terminalaren bi posizioak determinatutako angeluak. Orduan, y ren balio guztiak y1 eta y2 angeluenak dira, eta koterminale guztiak beraiekin, hau da:

$$y1 + 2\,n\pi \qquad \text{eta } y2 + 2n\pi$$

n zenbakia, zenbaki oso eta positibo, negativo edo zero izanik. Y1 edo Y2 balioa (bietako bat, berdin da hori) har daiteke beti alderantzizko funtzio trigonometrikoaren balio nagusitzat.

Adibidea:

Ondoko funtzioen balio jeneralentzat, expresioak lortu:

a) arc sin 1/2 . Honen balio nagusia $\frac{\pi}{6}$ da.

Bigarren balio bat, balio nagusiaren koterminala ez dena, berriz, $\frac{5\pi}{6}$ da. Beraz arc sin 1/2 ren balio jenerala hau da

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad , \quad \frac{5\pi}{6} + 2\,n\pi$$

n zenbakia, zenbaki oso eta positibo, negativo edo zero izanik.

b) arc cos (-1). Honen balio nagusia π da eta ez dago beste baliorik, berarekin koterminala denik. Honela, ba, bere balio jenerala $\pi+2\,n\pi$ da, n zenbaki oso bat izanik.

c) arc tg (-1) . Honen balio nagusia $-\frac{\pi}{4}$ da, eta bigarren balio bat - balio nagusiarekin koterminala ez dena - , $\frac{3\pi}{4}$ da. Honela, ba, balio jenerala hau da:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\,n\pi \qquad , \frac{3\pi}{4} + 2\,n\pi$$

n edozein zenbaki oso bat izanik.

PROBLEMA ASKATUAK

1.- Aurki itzazu balio nagusiak:

a) arc sin 0 = 0
b) arc cos (-1) = π
c) arc tg $\sqrt{3}$ = $\pi/3$
d) arc cotg $\sqrt{3}$ = $\pi/6$
e) arc sec 2 = $\pi/3$
f) arc cosec $(-\sqrt{2})$ = $-\frac{3\pi}{4}$
g) arc cos 0 = $\pi/2$
h) arc sen (-1) = $-\pi/2$
i) arc tg (-1) = $-\pi/4$
j) arc cotg 0 = $\pi/2$
k) arc sec $(-\sqrt{2})$ = $-\frac{3\pi}{4}$
l) arc cosec (-2) = $-\frac{5\pi}{6}$

2.- Aurki itzazu balio nagusiak, minuto bateko hurbilkataz:

a) arc sen 0,3333 = 19° 28'
b) arc cos 0,4000 = 66° 25'
c) arc tg 0,5000 = 56° 19'
d) arc ctg 1,1875 = 40° 6'
e) arc sec 1,0324 = 14° 24'
f) arc cosec 1,5082 = 41° 32'
g) arc sin (-0,6439)= -40° 5'
h) arc cos (-0,4519)= 116° 52'
i) arc tg (-1,4400)= -55° 13'
j) arc ctg (-0,7340)= 126° 17'
k) arc sec (-1,2067)=-145° 58'
l) arc cosec(-4,1923)=-166°12'

3.- Konproba ezazu:

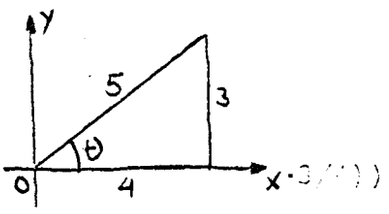
a) $\sin(\text{Arc sin } 1/2) = \text{sen } \pi/6 = 1/2$
b) $\cos(\text{Arc cos } (-1/2)) = \cos 2\pi/3 = -1/2$
c) $\cos(\text{Arc sin } (-\sqrt{2}/2)) = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$
d) $\text{Arc sen } (\text{sen } \pi/3) = \text{Arc sen } \sqrt{3}/2 = \pi/3$
e) $\text{arc cos } (\cos(-\pi/4)) = \text{arc cos } \sqrt{2}/2 = \pi/4$
f) $\text{arc sin } (\text{tg } 3\pi/4) = \text{arc sen } (-1) = -\pi/2$
g) $\text{arc cos } (\text{tg } (-5\pi/4)) = \text{arc cos } (-1) = \pi$

4.- Konproba ezazu:

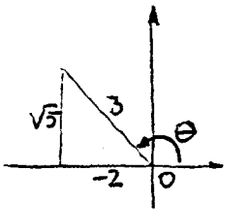
a) $\text{Arc sin } \sqrt{2}/2 - \text{Arc sin } 1/2 = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$
b) $\text{arc cos } 0 + \text{arc tg } (-1) = \pi/2 + (-\pi/4) = /4 = \text{arc tg } 1$

5.- Kalkula ezazu:

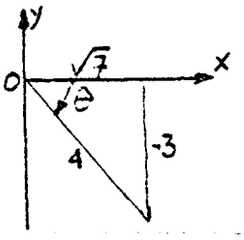
a) cos (Arc sin 3/5)



b) sen (arc cos (-2/3))



d) tg (Arc sin (-3/4))



a) Izan bedi $\emptyset$ = Arc sin 3/5; beraz sin $\emptyset$ = 3/5, zeren lehen koadrantean bait dago. (a) irudian, cos (Arc sin 3/5) = cos $\emptyset$ = 4/5

b) Izan bedi $\emptyset$ = Arc cos (-2/3); beraz cos $\emptyset$ = -2/3, zeren bigarren koadrantean bait dago. (b) irudian, sin (Arc cos (-2/3)) = sen $\emptyset$ = $\sqrt{5}/3$

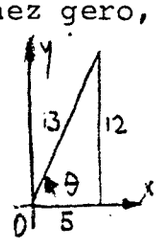
c) Izan bedi $\emptyset$ = Arc sen (-3/4); beraz sin $\emptyset$ = -3/4 , zeren laugarren koadrantean bait dago. (c) irudian, tg (Arc sen (-3/4)) = tg $\emptyset$ = $-3/\sqrt{7} = -3/\sqrt{7}/7$

6.- Kalkula ezazu (Arc sin 12/13 + Arc sin 4/5)

Izan bedi $\emptyset$ = Arc sin 12/13 eta

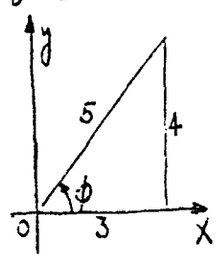
$\emptyset$ = Arc sin 4/5

Orduan, sin $\emptyset$ = 12/13 eta sin $\emptyset$ = 4/5, $\emptyset$ eta $\emptyset$ lehen koadrantean gelditurik. Ondoko irudietan ikusten denez gero,



sin (Arc sin 12/13 + Arc sin 4/5) = sin($\emptyset$+$\emptyset$) =

$= \sin\emptyset\cos\emptyset + \cos\emptyset\sin\emptyset = \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{56}{65}$



7.- Kalkula ezazu cos (Arc tg 15/8 - Arc sin 7/25)

Izan bedi $\emptyset$ = Arc tg 15/8

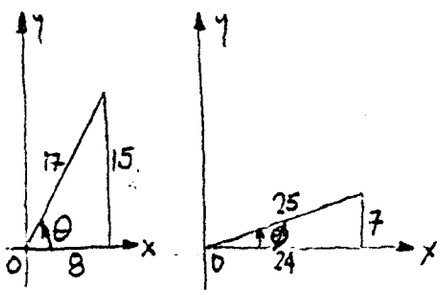
$\emptyset$ = Arc sin 7/25

Orduan, tg $\emptyset$ = 15/8 eta sin $\emptyset$ = 7/25, $\emptyset$ eta $\emptyset$ lehen koadrantean gelditurik. Ondoko irudietan ikusten denez,

cos (Arc tg 15/8 - Arc sin 7/25) = cos ($\emptyset$ - $\emptyset$) =

= cos $\emptyset$ cos $\emptyset$ + sin $\emptyset$ sin $\emptyset$ =

$= \frac{8}{17}\cdot\frac{24}{25} + \frac{15}{17}\cdot\frac{7}{25} = \frac{297}{425}$



8.- Kalkula ezazu sin (2 Arc tg 3)

Izan bedi $\emptyset$ = arc tg 3; orduan, tg $\emptyset$ = 3 eta, beraz, $\emptyset$ lehen koadrantean dago. Ondoko irudian ikusten denez, sin (2 Arc tg 3) = sin 2 $\emptyset$ = 2 sin $\emptyset$ cos $\emptyset$ = 2(3/ 10)(1/ 10)= = 3/5

9.- Froga ezazu ondoko berdintza hau 2 Arc tg 1/2 = Arc tg 4/3
Izan bedi $\emptyset$ = Arc tg 1/2 eta $\emptyset$ = Arc tg 4/3; beraz, tg $\emptyset$ = = 1/2, eta tg $\emptyset$ = 4/3. Frogatu behar duguna hau da, hots, 2 $\emptyset$ = $\emptyset$, edota, bi aldeetan tangenteak harturik, tg 2 $\emptyset$ = = tg $\emptyset$.

Gogoratuz tg $2\emptyset = \frac{2 \text{ tg } \emptyset}{1-\text{tg}^2\emptyset}$ dela, gure kasuan: tg $2\emptyset$ =

$= \frac{2\ (1/2)}{1-(1/2)^2} = \frac{4}{3} = \text{tg } \emptyset$

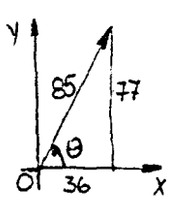
10.- Froga ezazu ondoko berdintza hau: Arc sin 77/85 - Arc sin 3/5= = Arc cos 15/17

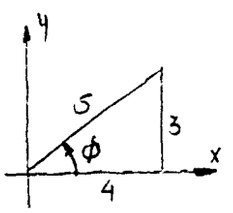
Izan bitez $\emptyset$ = Arc sin 77/85 $\emptyset$ = arc sin 3/5, eta $\emptyset$ = = Arc cos 15/17; beraz, sin $\emptyset$ = 77/85, sin $\emptyset$ = 3/5, eta cos $\emptyset$ = 15/17. Ikusten den bezala angelu guztiak lehen koadrantean aurkitzen dira. Erlazioaren bi aldeetan sinuak hartuaz, zera frogatuko dugu, hots: sin (θ - $\emptyset$) = sin $\emptyset$.

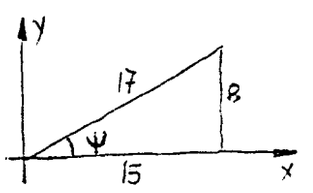
Irudiei jarraituz: sin (θ - $\emptyset$) = sin θ cos $\emptyset$ - cos $\emptyset$ sin $\emptyset$=

$= \frac{77}{85} \cdot \frac{4}{5} - \frac{36}{85} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{17} = \sin \emptyset$

$\cos \emptyset = \sqrt{1 - \text{sen}^2\emptyset} = \sqrt{1 - (\frac{8}{17})^2} = \frac{15}{17}$







11.- Froga ezazu ondoko berdintza hau:

$$\text{Arc tg } 1/2 + \text{Arc tg } 1/5 = \text{Arc tg } 1/8 = \pi/4$$

Guz orain frogatuko duguna hau da, hots:

$$\text{Arc tg } 1/2 + \text{Arc tg } 1/5 = \pi/4 - \text{Arc tg } 1/8$$

$$\text{tg } (\text{Arc tg } 1/2 + \text{Arc tg } 1/5) = \frac{1/2 + 1/5}{1-(1/2)(1/5)} = \frac{7}{9}$$

$$\text{tg } (\pi/4 - \text{Arc tg } 1/8) = \frac{1 - 1/8}{1 + 1/8} = \frac{7}{9}$$

12.- Kalkula itzazu expresio hauel balio jeneralak:

a) $\text{arc sin } \sqrt{2}/2 = \pi/4 + 2n\pi \;,\; 3\pi/4 + 2n\pi$
b) $\text{arc cos } 1/2 = \pi/3 + 2n\pi \;,\; 5\pi/3 + 2n\pi$
c) $\text{arc tg } 0 = 2n\pi \;,\; (2n + 1)\pi$

n edozein zenbaki oso izanik.

d) $\text{arc sin } (-1) = -\pi/2 + 2n\pi$
e) $\text{arc cos } 0 = \pi/2 + 2n\pi \;,\; 3\pi/2 + 2n\pi$
f) $\text{arc tg } (-\sqrt{3}) = -\pi/3 + 2n\pi \;,\; 2\pi/3 + 2n\pi$

n edozein zenbaki oso izanik.

13.- Kalkula itzazu expresio hauen balio jeneralak:

a) arc sin x

Izan bedi $\theta = \text{Arc sin } x$. Jakinik $\sin(\pi - 0) = \sin o$ dela, arc sin x ren balio guztiak modu honetakoak dira:

(1) $\theta + 2m\pi$ eta $(2)\pi - \theta + 2m\pi = (2m + 1)\pi - 0$;

$n = 2m$ bada, hau da, n bikoiti bada, (1) honela idaz daiteke: $n\pi + \theta = n\pi + (-1)^n \theta$.

Honela, ba, $\text{arc sin } x = n\pi + (-1)^n \text{ arc sin } x$, n zenbaki osoa izanik.

b) arc cos x

Izan bedi θ = arc cos x. Jakinik cos $(-\theta)$ = cos θ dela, arc cos x ren balioa guztiak modu honetakoak dira:

$\theta + 2n\pi$ eta $-\theta + 2n\pi$ edota, baita ere, $2n\pi \pm \theta =$
$= 2n\pi \pm$
$\pm$ Arc cos x , n zenbaki osoa izanik.

c) Arc tg x

Izan bedi θ = arc tg x . Jakinik tg $(\theta + \pi)$ = tg θ dela, arc tg x ren balio guztiak modu honetakoak dira:

$\theta + 2m\pi$ eta $(\pi + \theta) + 2m\pi = \theta + (2m + 1)\pi$ edota,
a) kasuan bezala: $n\pi$ + arc tg x , n edozein zenbaki osoa izanik.

14.- Idaz itzazu alderantzizko funtzio eran:

a) sin $\theta = 3/4$
b) cos $\alpha = -1$
c) tg d $= -2$
d) cotg $\beta = 1/2$

15.- Kalkula ezazu ondoko expresio hauen balio nagusia:

a) Arc sin $\sqrt{2}/2 = \pi/4 + 2n\pi$, $3\pi/4 + 2n\pi$
b) Arc cos $1/2 = \pi/3 + 2n\pi$, $5\pi/3 + 2n\pi$
c) Arc tg $0 = 2n\pi$, $(2n + 1)\pi$
d) Arc sin $(-1) = -\pi/2 + 2n\pi$
e) Arc cos $0 = \pi/2 + 2n\pi$, $3\pi/2 + 2n\pi$
f) arc tg $(-\sqrt{3}) = -\pi/3 + 2n\pi$, $2\pi/3 + 2n\pi$
g) arc sin $(-1/2) = 3\pi/4$
h) arc tg $(-\sqrt{3}) = -\pi/3$
i) arc sec $(-\sqrt{2}) = -3\pi/4$
j) arc cosec $(-1) = -\pi/2$

16.- Kalkula itzazu:

a) sin (arc sin (-1/2))	-1/2
b) cos (arc cos $\sqrt{3}/2$)	$\sqrt{3}/2$
c) tg (Arc tg (-1))	-1
d) sin (Arc cos (- $\sqrt{3}/2$))	1/2
e) tg (Arc sin 0)	0
f) sin (Arc cos 415)	315
g) cos (Arc sin (-12/13)	5/13
h) sin (Arc tg 2)	$2/\sqrt{5}$
i) Arc cos (sin 220°)	130°
j) Arc sin (cos (-105°)	-15°
k) Arc tg (ctg 230°)	40°
l) Arc ctg (tg 100°)	170°
m) Sin (2 Arc sin 2/3)	$4\sqrt{5}/9$
n) Cos (2 Arc sin 3/5)	7/25
o) Sin (1/2 Arc cos 415)	$1/\sqrt{10}$

17.- Froga itzazu ondoko berdintza hauk:

a) sin (Arc sin 5/13 + Arc sin 4/5) = 63/65
b) cos (Arc cos 15/17 - Arc cos 7/25) = 297/425
c) sin (Arc sin 1/2 - Arc cos 1/3) = 1 $-2\sqrt{6}/6$
d) tg (Arc tg 3/4 + Arc tg 15/8) = 77/36
e) cos (Arc tg -4/3 + Arc sin 12/13) = 63/65
f) tg (Arc sin -3/5 - Arc cos 5/13) = 63/16
g) tg (2 Arc sin 4/5 + Arc cos 12/13) = -253/204
h) sin (2 Arc sin 4/5 - Arc cos 12/13) = 323/325

18.- Froga itzazu ondoko berdintza hauk:

a) Arc tg 1/2 + Arc tg 1/3 = $\pi/4$
b) Arc sin 4/5 + Arc tg 3/4 = $\pi/2$
c) Arc tg 4/3 - Arc tg 1/7 = $\pi/4$
d) 2 Arc tg 1/3 + Arc tg 1/7 = $\pi/4$
e) Arc cos 12/13 + Arc tg 1/4 = Arc ctg 43/32
f) Arc sin 3/5 + Arc sin 15/17 = Arc cos -13/85
g) Arc tg a + Arc tg 1/a = $\pi/2$ ($a > 0$)

19.- Froga ezazu R erradioa duen zirkulu baten zuzenkiaren azalera - bere zentrotik d distantziara dagoena -
$K = R2$ Arc cos $d/R - d\sqrt{R2 - d2}$ dela

VIII - EKUAZIO TRIGONOMETRIKOAK

VIII - EKUAZIO TRIGONOMETRIKOAK

Angelu ezezaguneko funtzioen arteko berdintza trigonometrikoak bi eratakoak izan daitezke:

a) identitateak, edozein angeluren funtziorentzat definiturik badago.

b) berdintza baldintzazkoak edo ekuazioak, angelu ezezagunen balio partikularrekin bakarrik egiaztatzen badira.

Adibidez

a) sin x cosec x = 1; identitate bat da, edozein x balioren tzat -cosec x balio honekin definitua badago- balio duela ko.

b) sin x = 0; ekuazio bat da, zeren ez bait da $x = \frac{1}{4}\pi$ edota $\frac{1}{2}\pi$ balioentzat kunplitzen.

VIII.1 - EKUAZIO TRIGONOMETRIKO BATEN EMAITZA

sin x = 0; bada, bere emaitzak honako hauk dira: x =0 eta $x = \pi$.

Ekuazio batek emaitza bat badu jeneralean infinitu emaitza ditu; honela, ba, sin x = 0ren emaitza osoa:

$x = o+2n\pi$ eta $x = \pi + 2n$ da, n edozein zenbaki oso izanik.

Kapitulu honetan emaitza partikularrak bakarrik aipatuko dira, hauk $0 \leq x \pi 2$ tartean badaude.

VIII. 2 - EKUAZIO TRIGONOMETRIKOAK ASKATZEKO METODOAK

Esan dezagun lehenik, ez dagoela metodo jeneralik. Halere, badira 3 prozedura normalak segidan ikusiko dugunez, eta beste batzuk gehiago, problemetan agertzen direnak.

A - Ekuazio faktoriza daiteke

1 - Adibidea:

$\sin x - 2\sin x \cos x = 0$; askatu, faktoretan deskonposatuz, $\sin x - 2 \sin x \cos x = \sin x\,(1-2 \cos x) = 0$. Faktore bakoitza zerora berdinduz, zera lortzen da: $\sin x = 0$ —— $x = o, \pi$

$1-2 \cos x = 0$ —— $\cos x = 1/2$

$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

Proba:

$x = 0$; $\sin x - 2\sin x \cos x = o - 2(0)\ (1) = 0$

$x = \frac{\pi}{3}$; $\sin x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(\frac{1}{2}\sqrt{3})\ (\frac{1}{2}) = 0$

$x = \pi$; $\sin x - 2\sin x \cos x = o - 2(0)\ (-1) = 0$

$x = \frac{5\pi}{3}$; $\sin x - 2\sin x \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} - 2(-\frac{\sqrt{3}}{2})\ (1/2) = 0$

Beraz, o eta 2 artean dauden emaitzak, hau da, $o \leq x < 2\pi$, hauk dira:

$x = o, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

B - Ekuazio honetan agertzen diren funtzioak funtzio bakar batez adieraz daitezke

2 - Adibidea:

$2\ tg^2\ x + sec^2\ x = 2$

Badakigu $sec^2\ x = 1 + tg^2\ x$ dela. Beraz, ekuazioan ordezkatzen badugu $2tg^2\ x + 1 + tg^2\ x\ 2$, $3tg^2\ x + 1 = 2$, $tg\ x = \pm 1/\sqrt{3}$

$tg\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ eta $7\pi/6$

$tg\ x = -1/\sqrt{3} \longrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ eta $11\pi/6$

Balio hauk ekuazioan egiaztatu ondoren, 0 eta 2π artean dauden balioak, hots, $0 \leq x \leq 2\pi$, hauk dira: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

3 - Adibidea:

$\sec x + \operatorname{tg} x = 0$ askatu

$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$. Ekuazioa $\cos x$ biderkatzen badugu, $1 + \sin x = 0$, beraz, $\sin x = -1$. Baina ez $x = \frac{3\pi}{2}$ eta ezta $\operatorname{tg} x$ ere daude puntu horretan definiturik. Honela, ba, ekuazio honek ez du emaitzarik.

C - Ekuazioaren bi aldeak karratuak dira

4 - Adibidea:

$\sin x + \cos x = 1$ askatu

(B) ko prozedura erabiliaz, $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, edota, $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, egin beharko genuke. Baina honela erradikal bat sartzen da ekuazioan.

Horrelakorrik sort ez dadin, beste bide honi ekiten zaio. Ekuazioa modu honetara idazten da: $\sin x = 1-\cos x$ eta orain 2 aldeak karratura berretzendira.

1) $\sin^2 x = 1-2\cos x + \cos^2 x$

$1-\cos^2 x = 1-2\cos x + \cos^2 x$

$2\cos^2 x - 2\cos x = 2\cos x\,(\cos x-1) = 0$

Beraz; $\cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\cos x-1 = 0 \longrightarrow x = 0$

Proba: $x = 0$ $\sin x + \cos x = 0+1 = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\sin x + \cos x = 1+0 = 1$

$x = \frac{3\pi}{2}$ $\sin x + \cos x = -1+0 \neq 1$

Beraz, $x = 0$,

$x = \frac{3\pi}{2}$ emaitza estrainio bat besterik ez da.

Hemen agertzearen arrazoia oso sinplea da, hots: ekuazioa askatzeko bi aldeak karratura berretu ditugu.

Honela, ohar gaitezen emaitza honek ekuazio berri hau betetzen duela, baina ez hasierakoa.

PROBLEMA ASKATUAK

Ekuazio trigonometrikoen emaitzak aurkitu o eta 2 artean, hots, $0 \leq x < 2\pi$.

1) $2 \sin x - 1 = 0 \longrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

2) $\sin x \cos x = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \sin x = 0 & x = 0, \pi \\ \cos x = 0 & x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

3) $(\operatorname{tg} x - 1)(4 \sin^2 x - 3) = 0$

$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \qquad x = \pi/4, 5\pi/4$

$4 \sin^2 x - 3 = 0 \quad \sin x = \pm\sqrt{3/2} \qquad x = \pi/4, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$

eskatutako emaitzak, ba, hauk dira

$x = \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/4, 4\pi/3, 5\pi/3$

4) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

faktorizatuz, $(\sin x + 2)(\sin x - 1) = 0$

beraz, $\sin x = -2$ (ez dago emaitzarik)

$\sin x = 1$ $x = \pi/2$

eskatutako emaitza, ba , $\pi/2$ da.

5) $3\cos^2 x = \sin^2 x$

Lehen bidea: $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

ekuazio ordezkatuz, zera lortzen da:

$3\cos^2 x = 1-\cos^2 x$ edata $4\cos^2 x = 1$. Beraz, honen emaitza $\cos x = \pm 1/2$ eta $x = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3$.

Bigarren bidea:

Bi aldeek $\cos^2 x$ bidez batituz, honetara helduko gara: $3 - tg^2 x$. Beraz, $tgx = \pm\sqrt{3}$ eta x en balioak lehen bezalakoak dira.

6) $2\sin x - \operatorname{cosec} x = 1$

Ekuazio sin x z , biderkatzen badugu, $2\sin^2 x - 1 = \sin x$ eta hemendik $2\sin^2 x - \sin x - 1 = (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

Beraz, $2\sin x + 1 = 0 \longrightarrow \sin x = -1/2 \longrightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin x = 1 \longrightarrow x = \pi/2$.

<u>Proba</u>;

$x = \frac{\pi}{2}$ $2\sin x - \operatorname{cosec} x = 2(1)-1 = 1$

$x = \frac{7\pi}{6}$ eta $\frac{11\pi}{6}$, $2\sin x - \operatorname{cosec} x = 2(-1/2)-(-2) = 1$

Emaitzak, ba, hauk dira: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

7) $\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$

Lehen bidea: $\operatorname{cosec} x = \sqrt{3} - \operatorname{ctg} x$ moduan idazten badugu ekuazioa, eta gero bi aldeek karratura berretzen baditugu, $\operatorname{cosec}^2 x = 3 - 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x$ $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ z, ordezkatuz eta ekuazioa landuz, honetara heldukogara:

$$2 \operatorname{ctg} x - 2 = 0 \longrightarrow \operatorname{ctg} x = 1/\sqrt{3} \longrightarrow x = \pi/3,\ 4\pi/3$$

Proba:

$x = \pi/3$; $\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x = 2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$x = 4\pi/3$; $\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x = -2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$

Beraz, azken emaitza honek ez du balio. Ekuazio honen emaitza bakarra $x = \pi/3$ da.

Bigarren bidea:

Ekuazioa beste modu honetan ere jar daiteke $\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$ eta izendatzaileak kenduz, $1 + \cos x = \sqrt{3} \sin x$

Bi aldeak karratura berretuz

$$1 + 2\cos x + \cos^2 x = 3\sin^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$$

$$4 \cos^2 x + 2\cos x = 2 = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

Honela, ekuazio honen emaitzak hauk izango dira.

$$2 \cos x - 1 = 0 \longrightarrow \cos x = 1/2 \longrightarrow x = \pi/3,\ 5\pi/3$$

$$\cos x + 1 = 0 \longrightarrow \cos x = -1 \longrightarrow x = \pi$$

Hemen ikusten denez, 3 emaitza irten zaizkigu. Halere, bai $x = \pi$ eta baita $x = \frac{5\pi}{3}$ ere ez dute balio, seren $\operatorname{cosec} x$ ez dago puntu horietan definiturik.

ANGELUEN MULTIPLOAK SARTZEN DIREN EKUAZIOAK

8) $\sin 3x = -1/2\sqrt{2}$

x ek o eta 2π artean egon behar duenez gero, 3x ek o eta 6π artean egon beharko du, hots, $0 \leq 3x < 6\pi$

Ekuazioa askatuz, $3x = 5\pi/4,\ 7\pi/4,\ 13\pi/4,\ 21\pi/4,\ 23\pi/4$ eta $x = 5\pi/12,\ 7\pi/12,\ 13\pi/12,\ 15\pi/12,\ 21\pi/12,\ 23\pi/12$.

Balio hauetako edozein da goiko ekuazioaren emaitza.

9) $\cos 1/2\ x = 1/2$

s o eta 2π artean egon behar duenez gero, 1/2 x o eta π artean egon beharko du, hots, $0 \leq 1/2\ x < \pi$

Honela, ba $1/2\ x = \frac{\pi}{3}$ eta $x = \frac{2\pi}{3}$

10) $2\cos^2 1/2\ x = \cos^2 x$

$2\cos^2 1/2\ x = 1 + \cos x$ eginez, gure ekuazio hau beste honetan bilakatuko zaigu:

$\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Bigarren graduko ekuazio hau askatuz,

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1,6180 \\ -0,6180 \end{cases}$$

Badakigu cos x beti -1 eta 1 artean dagoela definiturik, eta, hau dela eta, 1,6190 emaitzak ez du zentzurik, hain zuzen. Beraz egiazko emaitza x = -0,6180 da, eta honen angeluak hauk dira: x = 128° 10' eta x = 231°50'

<u>OHARRA</u>: $\sqrt{2}\cos 1/2\ x = \cos x$ eta $\sqrt{2}\cos 1/2\ x = -\cos x$

ekuazioak nahi baditugu askatu, karratura berretuko ditugu, eta lehen ikusitako ekuazioa lortuko dugu. Lehengo ekuazio emaitza x = 231° 50' da, eta bigarren ekuazioaren emaitza, berriz, 128° 10'

11) $tg 2x + 2 \sin x = 0$

$tg\ 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$ dela jakinik eta ekuazioan ordezkatuz, $\dfrac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x} + 2 \sin x = 2 \sin x \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} + 1 \right)$

$= 2 \sin x \left(\dfrac{\cos x + \cos^2 x}{\cos 2x} \right) = 0$

$\sin x = 0 \longrightarrow x = 0, \pi$

$\cos x + \cos^2 x = \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$$\begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ \cos x = 1/2 \\ x = \pi/3,\ 5\pi/3 \\ \cos x + 1 = 0 \\ \cos x = -1 \\ x = \pi \\ x = \pi/3, \pi,\ 5\pi/3 \end{cases}$$

12) $\sin 2x = \cos 4x$

$\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2 \sin^2 2x$ eta honela $2 \sin^2 2x - 1 =$

$= (2 \sin 2x - 1)(\sin 2x + 1) - 0$

$2 \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1/2$; $2x = \pi/6,\ 5\pi/6,\ 13\pi/6,\ 17\pi/6$

$\sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -1$; $2x = 3\pi/2,\ 7\pi/2$

Beraz, emaitzak hauk dira:

$x = \pi/12,\ 5\pi/12,\ 13\pi/12,\ 17\pi/12,\ 3\pi/4,\ 7\pi/4$

13) $\sin 3x = \cos 2x$

$\sin 3x$ expresioa agertu ez dadin, honela jokatuko dugu.

Lehen bidea: jakinik $\cos 2x = \sin (1/2\pi - 2x)$ eta, baita ere, $\cos 2x = \sin (\pi/2 + 2x)$, direla, expresio hauek kontsideratuko ditugu.

a) $\sin 3x = \sin (\pi/2 - 2x)$, $3x = \pi/2 - 2x$, $\frac{9\pi}{2} - 2x$ lortuz.

b) $\sin 3x = \sin (\pi/2 - 2x)$, $3x = \frac{\pi}{2} + 2x$, $\frac{5\pi}{2} + 2x$, $\frac{9\pi}{2} - 2x$ lortuz.

a) tik, $5x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}, ____$ (zeren $5x < 10\pi$),

eta,

b) tik, $x = \frac{\pi}{2}$

Emaitzak hauk dira:

$$x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}$$

Bigarren bidea: jaikinik $\sin 3x = \cos (\frac{\pi}{2} - 3x)$ eta, baita ere, $\cos 2x = \cos (-2x)$ direla, expresio hauk kontsideratuko ditugu.

c) $\cos 2x = \cos (\frac{\pi}{2} - 3x)$, $5x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}$ lortuz.

d) $\cos (-2x) = \cos (\frac{\pi}{2} - 3x)$, $x = \frac{\pi}{2}$ lortuz, lehen bezala.

14) Aska ezazu ondoko sistema hau

1) $\sin x + \sin y = 1{,}2$

$0 \leq x, y < 2\pi$

2) $\cos x + \cos y = 1{,}5$

Lehen aldearen batuketak 1 baino handiagoak direnez gero, lau funtzioak positiboak dira, eta, beraz, x eta y, biok, zorrotzak dira.

Formulak hauk aplikatuz:

1') $2 \sin 1/2\ (x+y) \cos 1/2\ (x-y) = 1,2$

2') $2 \cos 1/2\ (c+y) \cos 1/2\ (c-y) = 1,5$

1'2' z zatituz, $\frac{\sin 1/2\ (x+y)}{\cos 1/2\ (x+y)} = \operatorname{tg} 1/2\ (x+y) - \frac{1,2}{1,5} = 0,8$ eta

$1/2\ (x+y) = 38°40'$ bezala ere, zorrotza da.

5) Aska ezazu $\operatorname{Arc} \cos (2x^2 -1) = 2\operatorname{Arc} \cos 1/2$

bitez $= \operatorname{Arc} \cos (2x^2 -1)$ eta $= \operatorname{Arc} \cos 1/2$; orduan, $\cos\alpha = 2x^2 -1$ eta $\cos\beta = 1/2$

Bi aldeetan kosinuak hartuz, $\cos\alpha = 2x^2-1 = \cos 2\beta = 2\cos^2\beta-1 = 2(1/2)^2-1 = 1/2$

Orduan $2x^2 = 1/2$ eta $x = \pm 1/2$

Proba: $x = \pm 1/2$ bada, $\operatorname{Arc} \cos (-1/2) = 2\operatorname{Arc} \cos 1/2$ edota, berdina dena, $120° = 2(60°)$.

AZKATZEKO PROBLEMAK

Aska itzazu ondoko ekuazioak, x o eta artean egonik.

1) $\sin x = \sqrt{3}/2$ .....emaitzak $x = \pi/3,\ 2\pi/3$

2) $\sin x \cos x = 0$ ..... " $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

3) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ ..... " $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

4) $2\,\mathrm{tg}\, x \sin x - \mathrm{tg}\, x = 0$ ..... " $x = 0, \pi/6, 5\pi/6, \pi$

5) $2 \cos x + \sec x = 3$ ..... " $x = 0, \pi/3, 5\pi/3$

IX - DERIBATUA

IX - DERIBATUA

Kapitulu honetan ondorengo hiru puntuok jakinaren gainean emanik ariko gara; zenbakiak errealak dira, edozein aldagairen hesparrua zenbaki errealezko multzo da eta f(x) aldagaisko funtzio bat funtzio uniformea da:

Kapitulo honetan, y = f(x) funtzio batetatik abiaturik beste y' edo f'(x) funtzio lortzeko bidea adierazten da: azken funtzio honek x-arekiko y-ren edo f(x)-en deribatua du izenez. Segun x eta y = f(x)-ek zer ordezkatzen duten, deribatuak, makur baten zuzen ukitzailearen malda, abiadura, azelerazioa, etab. sentzuak har ditzake.

IX-1 FUNTZIO BATEN MUGA

f(x) funtzio batek badu M muga bat, x-ek c-rako joera duenean (matematika ikurrez mug f(x) = M) baldin x, c-gandik behar hainbat hurbil dauden $x \neq c$ balioentzako, f(x) M-gandik nahi hainbat hurbil badezakegu.

I. Adibidea

Eman dezagun $f(x) = x^2 - 2$ 3tik hurbil dagoen x-entzako

Baldin x 3tik hurbil badago, alegia $2,99 < x < 3,01$, orduan $(2,99)^2 - 2 < f(x) < (3,01)^2 - 2$ edo $6,9401 < f(x) < 7,0601$.

Baldin x 3tik lehen baino hurbilago badago, alegia, $2,999 < x < 3,001$, orduan $(2,999)^2 - 2 < f(x) < (3,001)^2 - 2$ edo $6,994001 < f(x) < 7,006001$.

Baldin x 3tik oraindik hurbilago badago, alegia $2,999 < x < 3,0001$, orduan $(2,9999)^2 - 2 < f(x) < (3,0001)^2 - 2$ edo $6,99940001 < f(x) < 7,00060001$.

Hau ikusiz, logiko dirudi x 3aren inguruko ararte geroz eta txikiagotik hartzen den neurrian, f(x) balio kidekoak 7aren inguruko ararte geroz eta txikiagoan egongo direla ondorioztatzea. Alderantziz, arrazoizkoa dirudi f(x)ek 7aren inguruko ararte geroz eta txikiagoan izan ditzala bere balioak exikitzeko, x-en balioak, 3 aren inguruko ararte geroz eta txikiagoan aukeratzea ondorioztatzea.

$$\operatorname*{mug}_{x \to 3} (x^2 - 2) = 7$$

2. Adibidea

Eman dezagun $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3}$, 3tik hurbil dagoen x-entzako

$x \neq 3$ denean, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3} = x + 2$ da. Hala,

x 3tik hurbil dagoenean, x + 2 5tik hurbil dago eta,

$$\operatorname*{mug}_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x-3} = 5$$

IX-2 MUGA BURUZKO TEOREMAK

Baldin $\operatorname*{mug}_{x \to c} f(x) = M$ eta $\operatorname*{mug}_{x \to c} g(x) = W$ badira, orduan

I. $\operatorname*{mug}_{x \to c} \left\{ f(x) \pm g(x) \right\} = \operatorname*{mug}_{x \to c} f(x) \pm \operatorname*{mug}_{x \to c} g(x) = M \pm N$

II. $\operatorname*{mug}_{x \to c} \left\{ k\, f(x) \right\} = K \operatorname*{mug}_{x \to c} f(x) = KM$, K konstante bat izanik

III. $\operatorname*{mug}_{x \to c} \left\{ f(x) x g(x) \right\} = \operatorname*{mug}_{x \to c} f(x) . \operatorname*{mug}_{x \to c} g(x) = M.N.$

IV. $\underset{x \to c}{\text{mug}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\underset{x \to c}{\text{mug}} f(x)}{\underset{x \to c}{\text{mug}} g(x)} = \dfrac{M}{W}$, baldin $N \neq 0$

IX-3 FUNTZIO ETENGABEAK

f(x) funtzio bat etengabea da x = c puntuan baldin:

(I) f(x) definitua badago,

(2) $\underset{x \to c}{\text{mug}} f(x)$ existitzen bada, eta

(3) $\underset{x \to c}{\text{mug}} f(x) = f(c)$ bada

3. Adibidea

(a) I. adibideko $f(x) = x^2-2$ funtzioa etengabea da x=3 puntuan, zeren eta (I) $f(3) = 7$, (2) $\underset{x \to 3}{\text{mug}} (x^2-2) = 7$, (3) $\underset{x \to 3}{\text{mug}} (x^2-2)=f(3)$

(b) 2. adibideko $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ ez da etengabea x=3 puntuan, zeren f(3) ez bait dago definiturik.

f(x) funtzio bat etengabea da, (a,b) arartean, baldin erarteko x-en balio guztirentzako etengabea bada.

x-eko polinomio bat etengabea da x-en balio guztientzako.

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ x-eko funtzio arrazional bat, P(x) eta Q(x) polinomioak direlarik, Q(x) = 0 bilaka arazten duten x-en balio ez beste guztirentzako da etengabea. Hala, $f(x) = \dfrac{x^2+x+I}{(x-1)(x\ 2)}$ funtzioa,

x=I salbu, x-en beste balio guztientzako da etengabea.

IX-4 UGALPENAK

Eman ditzagun x_0 eta x_1 , x-en bi balio ezberdin. Ohituraz, beraien arteko kendura $(x_1 - x_0)$ alegia, Δx (delta x irakur) ikurkatzen da eta ondorioz $x + \Delta x$ batura x-en ordez.

Beraz, baldin $y = f(x)$ bada eta x_1 $x = x_0$ baliotik $x = x_0 + \Delta x$ baliora aldatzen bada, y_1 $y_0 = f(x_0)$ baliotik $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ baliora aldatuko da. x-ek, $x = x_0$-tik $x = x_0 + \Delta x$-ra aldatzean, y-en eragiten duen aldakuntza $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ da.

4. Adibidea

Kalkula x balioz aldatzean y-en sortzen den aldakuntza, $y = f(x) = x^2 - 2 + 5$ izanik.

(a) $x = 3$-tik $x = 3{,}2$-era (b) $x = 3$-tik $x = 2{,}9$-era.

(a) $x_0 = 3$ eta $\Delta x = 0{,}2$ direlarik,
$y_0 = f(x_0) = f(3) = 8$
$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = f(3{,}2) = 8{,}84$, eta
$\Delta y = 8{,}84 - 8 = 0{,}84$

(b) $x_0 = 3$ eta $\Delta x = -0{,}1$ direlarik,
$y_0 = f(3) = 8$,
$y_0 + \Delta y = f(2{,}9) = 7{,}61$ eta
$\Delta y = 7{,}61 - 8 = -0{,}39$

IX-5 DERIBATUA

$y = f(x)$-en deribatua $x = x_0$ balioan, zera da:

$$\operatorname*{mug}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname*{mug}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + x) - f(x)}{\Delta x}$$, baldin muga existitzen bada.

Deribatuak kalkulatzeko 5 urratseko erregela honetaz baliatuko gara:

1) Idatzi $y_o = f(x_o)$
2) Idatzi $y_o + \Delta y = f(x_o + \Delta x)$
3) Lortu $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$
4) Lortu $\Delta y / \Delta x$
5) Kalkulatu $\operatorname{mug}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

5. Adibidea

Aurkitu $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ funtzioaren deribatua, $x = x$ bada.

1) $y_o = f(x_o) = 2x_o^2 - 3x_o + 5$
2) $y_o + \Delta y = f(x_o + \Delta x) = 2(x_o + \Delta x)^2 - 3(x_o + \Delta x) + 5 =$
$2x_o^2 + 4x_o . \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x_o - . \Delta x + 5$
3) $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 4x_o . \Delta x - 3 . \Delta x + 2(\Delta x)^2$
4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_o - 3 + 2 . \Delta x$
5) $\operatorname{mug}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{mug}_{\Delta x \to 0} (4x_o - 3 + 2 . \Delta x) = 4x_o - 3$

Lehengo adibidetik "o" zubindizea kentzen bada, bost urratsezko erregelak x-en funtzio bat ematen du (kasu honetan 4 x -3), eta hain zuzen, emandako funtzioaren x-arekiko deribatua da. x-arekiko y = f (x) funtzioaren deribatua, ikur hauetako baten bidez adierazten da; y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, edo D x y

x-en balio zehatz batentzako deribatuaren balioa, existitzen denean noski, honela ikurkatzen da:

$y' / x = x_o$, $\frac{dy}{dx} / x = x_o$, edo $f''(x_o)$

IX-6 ORDENA GORENEKO DERIBATUAK

Funtzio baten deribatua aurkitzeko jarraitzen den prozesuari deribazio deritzaio.

Deribazioz, y = f (x) funtziotik x-arekiko f (x) edo y-ren lehenengo deribatua izendatutako beste $y' = f'(x)$ funtzio bat

lortzen da. Era berean, $y' = f'(x)$ x-arekiko deribatzen badugu, $f(x)$ edo y-ren bigarren deribatua izeneko beste $y'' = f''(x)$ funtzio berri bat lortzen dugu. Horrela jarraituaz, lor dezakegu hirugarren, laugarren, etab. deribatua:

7. <u>Adibidea</u>

Eman dezagun $y = f(x) = x^4 - 3x^2+8x+6$,

orduan: $y' = f'(x) = 4^x - 6x+8$,

$y'' = f''(x) = 12x^2-6y$ eta

$y''' = f'''(x) = 24\ x$

PROBLEMA ASKATUAK

1. Aztertu f (x) = 1/x, x = 0-tik hurbil dauden x-en baliorentzako

Baldin x 0-tik hurbil badago, adibidez,

$-0{,}01 < x < 0{,}01$, $\frac{1}{-0{,}01} < \frac{1}{x} < \frac{1}{0{,}01}$ edo

$-100 < \frac{1}{x} < 100$

Baldin x oraindik hurbilago badago, adibidez,

$-0{,}0001 < x < 0{,}0001$, $\frac{1}{-0{,}0001} < \frac{1}{x} < \frac{1}{0{,}0001}$ edo

$-10.000 < \frac{1}{x} < 10.000$, argi dago x-en balioa 0-ren inguruko ararte geroz eta txikiagotan hartzen den neurrian, f (x) kidekoak ez direla M puntu baten inguruko ararte geroz eta txikiagoen barruen gelditzen. Beraz mug (1/x) ez da existitzen

$x \to 0$

2. Kalkulatu posible denean:

a) $\underset{x\to 2}{\text{mug}} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$

$\underset{x\to 2}{\text{mug}} (x^2 + 6x + 5) = 21$ eta $\underset{x\to 2}{\text{mug}} (x^2 - 2x - 3) = -3$, beraz

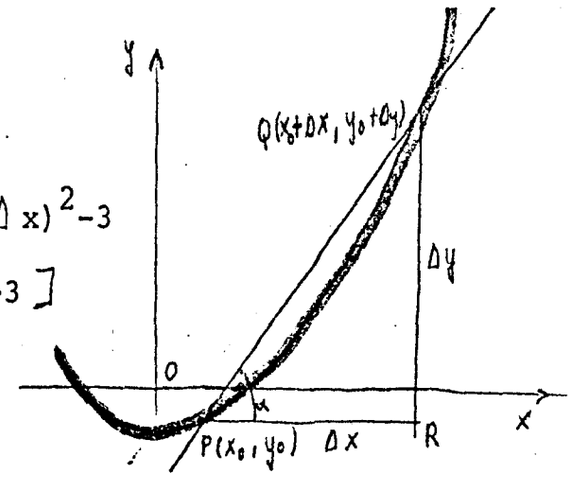
$$\underset{x\to 2}{\text{mug}} \frac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3} = \frac{\underset{x\to 2}{\text{mug}} (x^2+6x+5)}{\underset{x\to 2}{\text{mug}} (x^2-2x-3)} = \frac{21}{-3} = -7$$

b) $\underset{x\to 3}{\text{mug}} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}$

$\underset{x\to 3}{\text{mug}} (x^2+6x+5) = 32$ eta $\underset{x\to 3}{\text{mug}} (x^2-2x-3) = 0$; beraz

$\underset{x\to 3}{\text{mug}} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}$ ez da existitzen

3.- Eman ditzagun $P(x_0, y_0)$ eta $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ $y = x^2$ 3 parabolako bi puntu ezberdin. Kalkulatu $\Delta y/\Delta x$ eta argitu bere esanahia.



Kasu honeta: $y_0 = x_0^2 - 3$

$$y_0+\Delta y = (x_0+\Delta x)^2-3 = x_0^2+2x_0.\Delta x+(\Delta x)^2-3$$

$$y = [x_0^2+2x_0.\Delta x+ (\Delta x)^2-3] - [x_0^2 -3]$$

$$= 2x_0 .\Delta x+(\Delta x)^2$$

eta $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0+\Delta x$

Aldameneko irudian, PR eta x ardatza paraleloak dira, halanola QR eta y ardatza ete. Baldin zuzen sekantearen aiherdura bada, orduan $tgx=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ da; beraz, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ PQ zuzen sekantearen malda da.

4.- Aurkitu f' (x), baldin f (x) = $4x^2+3x+5$ bada

$$y = f(x) = 4x^2+3x+5$$

$$y+\Delta y = 4(x+\Delta x)^2+ 3(x+\Delta x) + 5 = 4x^2+8x.\Delta x+4(\Delta x)^2+3x+3\Delta x +5.$$

$$\Delta y = 8x.\Delta x+3\Delta x+4(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8x+3+4\Delta x$$

$$f'(x) = \operatorname*{mug}_{\Delta x\to 0} (8x+3+4\Delta x) = 8x+3$$

5.- Aurkitu y = f (x) makurraren malda eta zuzen ukitzailearen ekuazioa ondorengo puntu hauetan:

a) $y = 2x^3$, (1,2) puntuan

- 5 urratsen erregelaren bidez, $f'(x) = 6x^2$; beraz m = f' (I)=6
- Zuzen ikitzailearen ekuazioa (1,2) puntuan
  $y-2 = 6(x-1)$ edo $6x-y-4= 0$ da.

b) $y = -3x^2+4x+5$, (3,10) puntuan

- Kasu honetan $f'(x) = -6x+4$; beraz m= f'(3)= -14
- Zuzen ukitzailearen ekuazioa (3-10) puntuan $14x+y-32=0$ da.

6.- Aurkitu ondorengo polinomio honen deribatua:

$$f(x) = (x-2)^2 \ (x-3)^2$$

Biderkaketa hau egiaztatuaz:

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \text{ beraz}$$
$$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 74x - 60 = (x-2)(x-3)(4x-10)$$

7.- Aurkitu ondorengo funtzio hauen $f'(x)$, $f''(x)$ eta $f'''(x)$

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$
b) $f(x) = x^5 - x^3 + 3x$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x$; $f''(x) = 6x-12$; $f'''(x) = 6$
b) $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 3$; $f''(x)=20x^3-6x$; $f'''(x)=60x^2 - 6$

PROPOSATUTAKO PROBLEMAK

7.- Kalkulatu funtzio hauen $\underset{x}{\text{mug}}\ f(x)$, existitzen denean: I

a) $\dfrac{I}{(x-2)(x+3)}$ b) $\dfrac{x-3}{x^2-9}$

em. a) $-I/4$ b) $I/4$

8.- 5 Urratsezko erregelaren bidez aurkitu ondorengo funtzio hauen $f'(x)$:

a) $f(x) = 3x + 5$; b) $f(x) = x^2 - 3x$
em. a) 3 b) $2x-3$

9.- Aurkitu makur bakoitzaren zuzen ukitzailearen eta zuzen elkartzutaren ekuazioak, ematen den puntuan

a) $y = x^2+2$, $P(I,3)$ Em. $2x-y+1 = 0$; $x\ 2y-7 = 0$

b) $y = 2x^2-3x$, $P(I, -I)$ Em. $x-y-2 = 0$; $x+y = 0$

10.- Puntu bat x ardatzetik mugitzen ari da $s = 2t^2+8t+9$ legea beteaz, s(m) jatorri eta puntu beraren distantzia izanik, 0 puntutik zuzendua, t(s) denboran. Aurkitu puntu honen posizioa eta beraren abiadura denbora hauentzako : a) t=0, b) t=1

Em. a) 9m 0-tik eskubira, r = 8m/s
b) 19m 0-tik eskubira, r =12m/s

11.- $y = \frac{1}{2} x^2-2x3$ makurreko zein puntutan da zuzen ukitzailea (1,0) puntuko zuzen ukitzailearekiko elkartzuta,

E. (3, 3/2)

X - FUNTZIO ALJEBRAIKOEN DERIBAZIOA

X - FUNTXIO ALJEBRAIKOEN DERIBAZIOA

X.1 - DERIBAZIO FORMULAK

I.- Baldin $y = f(x) = kx^n$ bada, k eta n konstanteak izanik, orduan $y' = f'(x) = knx^{n-1}$.

II.- Baldin $y = K.u^n$ bada, k eta n konstanteak direlarik eta u x-en funtzioa izanik, orduan $y' = knu^{n-1}.\ u'$; baldin u' existintsen bada.

1. Adibidea

Aurkitu y" ondorengo kasu hauetan:

a) $y = 8\ x\ 5/4$; b) $y = (x^2 + 4\ x - I)\ 3/2$

a) kasu honetan k = 8 eta n = 5/4. Beraz,
$y' = Kn\ x^{n-1} = 8.\ 5/4.\ x^{5/4\ -\ 1} = 10\ x\ 1/4$

b) Egiten badugu $y = u^{3/2}$, orduan $u = x^2 + 4\ x - I$
x-arekiko deribatuz, $u" = 2x + 4y$; beraz,
$y' = 3/2\ u^{1/2}\ .\ u' = 3/2 \sqrt{x^2+4x-I}\ (2x+4) = 3(x+2) \sqrt{x^2+4x-I}$

III.- Baldin $y = f(x).\ g(x)$ bada, orduan $y' = f(x).\ g'(x) + g(x).\ f'(x)$ da, baldin f' (x) eta g' (x) existitzen badira.

2. Adibidea

Aurkitu y', $y = (x^3+ 3x^2+I)\ (x^2+2)$ izanik.
Har dezagun $f(x) = x^3+ 3x^2 + I$ eta $g(x) = x^2+2$, orduan,
$f'(x) = 3x^2+ 6\ x$ eta $g'(x) = 2x$
eta nola $y" = f(x)\ g'(x)+g(x)\ f'(x)$ den,
$y" = (x^3+ 3x^2+ 1)\ (2x) +(x^2+2)\ (3x^2 + 6x) = 5x4+12x^3+6x^2+14x$

IV.- Baldin $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ bada, orduan, $y^4 = \frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{g(x)}$

f' (x) eta g' (x) existitsen direnean eta g (c) $\neq$ 0 delarial.

3. Adibidea

Aurkitu y', $y = \frac{X + I}{X^2 + I}$ izanik

Har dezagun f (x) = x + I eta g(x) = x^2+ I, orduan,

$$y' = \frac{g(x) - f'(x) - f(x) - g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{(x^2+I)\ (I) - (X+1)\ (2x)}{(x^2 + I)^2} =$$

$$= \frac{1-2x - x^2}{(x^2 + I)^2}$$

PROBLEMA ASKATUAK

1.- Aurkitu y' bosta urratsezko erregelaren bidez; baldin $y = (x^2 + 4)\ 1/2$ bada.

$$y = (x^2 + 4)\ 1/2$$

$$y + \Delta y = [(x + x)^2 + 4]\ 1/2$$

$$\Delta y = [(x + x)^2 + 4]\ 1/2 - (x^2 + 4)\ 1/2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(x + \Delta x)^2 + 4]^{1/2} - (x^2 + 4)^{1/2}.}{\Delta x}$$

$$\frac{[(x + \Delta x)^2 + 4]^{1/2} + (x^2 + 4)^{1/2}}{[(x + \Delta x)^2 + 4]^{1/2} + (x^2 + 4)^{1/2}} =$$

$$= \frac{(x + \Delta x)^2 + 4 - (x^2 + 4)}{\Delta x \left\{ [(x + \Delta x)^2 + 4]^{1/2} + (x^2 + 4)^{1/2} \right\}} =$$

$$= \frac{2x + \Delta x}{[(x + \Delta x)^2 + 4]^{1/2} + (x^2 + 4)^{1/2}}$$

beraz, $y' = \underset{\Delta x \to 0}{\text{mng}} \dfrac{2x + x}{[(x + x)^2 + 4]^{1/2} + (x^2 + 4)^{1/2}} = \dfrac{2x}{2\ (x^2 + 4)^{1/2}} =$

$$\frac{x}{(x^2 + 4)^{1/2}}$$

2.- Aurkitu y' baldin $y = x^5\ (1 - x^2)^4$ bada.
jar dezagun $f\ (x) = x^5$ eta $g\ (x) = (1 - x^2)^4$.
Beraz, f' (x1 = 5 x ^{4}. g' 9x0 = 4 $(1 - x^2)^3$ (-2x), eta

$$y' = f(x1.\ g'\ (x) + g\ (x).\ f'\ (x) = x^5.\ 4\ (1 - x^2)^3\ (-2x) + (1 - x^2)^4.\ 5x4 =$$

$$= x^4\ (1 - x^2)^3\ -8x^2 + 5\ (1 - x^2) = x^4\ (1 - x^2)^3\ (5 - 13\ x^2).$$

3.- Aurkitu y', y'', y''' baldin $y = \frac{2}{x^2-I}$ bada.

$y = 2\ (x^2 - 1)^{-1}$,

$y' = 2\ (-1)\ (x^2-1)^{-2}.\ (2x) = -4\ x\ (x^2-1)^{-2} = \frac{4\ x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = 4\ (x^2-1)^{-2} - 4\ x\ (-2)\ (x^2-1)^{-3}(2x) = -4\ (x^2-1)^{-2} = 16\ x^2$

$(x^2-1)^{-3} = \frac{12\ x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''' = \frac{(x^2-1)^3\ (24x) - (12x^2+4).\ 3\ (x^2-1)^2\ (2x)}{(x^2 - 1)^6} =$

$\frac{(x^2-1)\ (24x) - 6\ x\ (12x^2 + 4)}{(x^2-1)^4} = \frac{-\ 48\ x\ (x^2 + 1)}{(x^2-1)^4}$

PROPOSATUTAKO PROBLEMAK

4.- Arkitu ondorengo funtzio hauen y', deribazio formulen bidez:

a) $y = (x-2)^4$ Em. $y' = 4\ (x-2)^3$

b) $y = (2x^2+ 4\ x-5)^6$ Em. $y' = 24\ (x+I)\ (2x^2+4x-5)^5$

c) $y = (I- x^2)^{1/2}$ Em. $y' = \frac{x}{(I-x^2)^{1/2}}$

d) $y = (x+I)^3\ (x-3)^2$ Em. $y' = (x+I)^2\ (x-3)\ (5x-7)$

e) $y = \frac{x^2 + 2\ x -3}{x^2}$ Em. $y' = \frac{6-2x}{x^3}$

f) $y = \frac{I}{(x^2 - 9)^{1/2}}$ Em. $y' = \frac{x}{(x^2-9)^{3/2}}$

g) $y = \frac{(x^2+ 2)^{1/2}}{x}$ Em. $y' = \frac{-2}{x^2\ (x^2+ 2)^{1/2}}$

5.- Aurkitu ondorengo funtzioaren f' (x), f" (x), f"' (x)

$f\ (x) = 3\ x^4 - 8\ x^3 + 12\ x^2 + 5$

Em. $f'\ (x) = 12\ x\ (\ x^2-2x+2)$

$f''\ (x) = 12\ (3\ x^2 - 4x+2)$

$f'''\ (x) = 24\ (3x-2)$

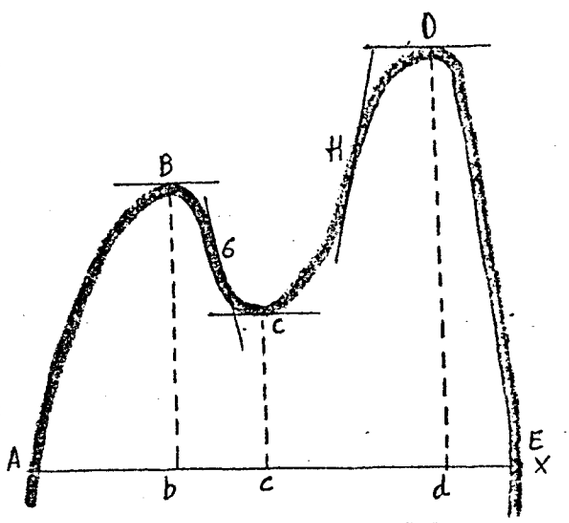
XI - DERIBATUAREN APLIKAZIOAK

XI - DERIBATUAREN APLIKAZIOAK

XI-1 FUNTZIO HAZKOR ETA URRIKORRAK

y = f(x) funtzio hazkor bat da baldin y handitzen bada x handitzendenean; eta urrikorra da baldin y txikitzen bada x txikitzean.

Eman dezagun I irudian adierazitako y=f(x) funtzioaren grafoa. Ikusten denez, y=f(x) A-tik B-ra eta C-tik D-ra hazkorra da, baina urrikorra B-tik C-ra eta D-tik E-ra. A eta B (edo C eta D) artean dauden makurraren edozein puntutan, zuzen ukitzailearen θ angelua zorrotza da; beraz f'(x)=tg θ > 0. B eta C (edo D eta E) artean dauden makurraren edozein puntutan, zuzen ukitzailearen θ angelua kamutsa da; beraz f'(x)=tg θ<0.



Beraz, f'(x) > 0 bilaka arazten duten x-en balioentzako, f(x) hazkorra da; eta f'(x)<0 bilaka arazten duten x-en balioentzako f(x) urrikorra da.

Baldin x=b, x=c eta c=d badira, orduan irudiko funtzioa ez da ez hazkorra ez eta urrikorra, zeren f'(x)=0 bait da. x-en balio hauei f(x) funtzioaren balio kritikoak deritzaie.

I. Adibidea

Eman dezagun $f(x)=x^2-6x+8$ eta deribatua f'(x)= 2x-6 da.

- f'(x)=0 eginik; x=3 balio kritikoa aurkitzen da.
- Baina f'(x)<0, baldin x<3 bada, eta f'(x)>0 baldin x>3 bada.
- Beraz, $f(x)=x^2-6x+8$ urrikorra da x<3 balioarentzako eta hazkorra x>0 baliorentzako.

XI-2 MAXIMO ETA MINIMO ERLATIBOAK

I.irudiko makurrean, A-tik hasita eskubi aldera jota; makurra jarraitzen duen punto bat B-raino igotzen da eta ondoren jeisten hasten da. B puntuan f(b) ordenatua, beste aldameneko edozein puntu baino handiagoa da. Hau kunplitzen denean, B[b,f(b)] makurraren maximo erlatiboa dela edo f(x) funtzioak, x=b puntuan, maximo erlatibo [= f(b)] bat duela, esaten da. Arrazoi berberaz, D[d,f'(d)] ere makurraren maximo erlatibo bat da, alegia f(x) funtzioak, x=d puntuan, maximo erlatibo [=f(d)] bat du.

B ondoren, puntua C-raino jeisten da eta gero berriro igotzen hasten da. C-en f(c) ordenatua makurraren C ondoko edozein puntu baino txikiagoa da. Orduan, C[c,f(c)] puntua makurraren minimo erlatiboa dela edo f(x) funtzioak, x=C puntuan, minimo erlatibo [=f(c)] bat duela esaten da.

Aipatzekoa da funtzio honen maximo eta minimo erlatiboak balio kritikoetan sortzen direla. Nahiz eta hau funtzio guztietan egia ez izan, baliozkoa da kapitulu honetan aipatzen diren funtzio guztientzat.

Maximo erlatiboentzako erizpidea: Baldin x=a balio kritiko bat bada y=f(x) funtzioarentzat eta baldin a-tik hurbil egonik txikiago diren x-en balioentzat $f'(x) < 0$ gertatzerakoan, a-tik hurbil egonik handiago diren x-en balioentzat $f'(x) < 0$ dela gertatzen bada, f(a) funtzioaren balio minimo erlatibo bat da.

Baldin x-en balioa igoz eta x=a balio kritiko bat pasa ondoren f'(x) zeinuz ez bada aldatzen, orduan f(c) ez da funtzioaren ez maximo ez eta minimo erlatibo bat.

2.Adibidea

I.adibideko funtziorako balio kritikoa x=3 da.

Eta nola $f'(x)=2(x-3) < 0$ den, $x < 3$ baliorentzako eta nola $f'(x) > 0$ den $x > 3$ balioarentzako, orduan funtzioak minimo erlatibo bat du f(3)=-I.

Gai geometrokotan idatziz, (3,-I) puntua $y=x^2-6x+8$ makurraren minimo erlatibo bat da.

XI-3 MAXIMO ETA MINIMOENTZAKO BESTE ERIZPIDE BAT

I.irudiko makurraren A puntuan zuzen ukitzailearen θ angelua zorrotza da. Puntu bat A-tik B-ra mugitzen den neurrian, θ txikitu egiten da; beraz, $f'(x)=tg\ \theta$ funtzio urrikorra da. B puntuan, $f'(x)=0$ da. Puntu bat B-tik G-ra mugitzen den neurrian, θ angelu kamutsa eta urrikorra da; beraz $f'(x)=tg\theta$ funtzio urrikorra da. Ondoren, A-tik G-ra $f'(x)$ funtzio urrikorra da eta beraren deribatua $f''(x)<0$ da. Bereziki, $f''(b)<0$. Era beretsuan, $f''(d)<0$.

Puntu bat G-tik C-ra mugitzen denean, θ kamutsa da eta handituz doa; beraz, $f'(x)$ funtzio hazkorra da. C puntuan, $f'(x)=0$ da. Puntu bat C-tik H-ra mugitzean, θ zorrotza eta hazkorra da; eta $f.(x)$ funtzio hazkorra da. Beraz G-tik H-ra, $f'(x)$ funtzio hazkorra da eta $f''(x)>0$ da. Bereziki $f''(c)>0$.

Maximo erlatiboentzako erizpidea: Baldin $x=a$ puntua $y=f(x)$ funtzioarentzako balio kritiko bat bada, eta baldin $f''(a)<0$ bada, orduan $f(a)$, $f(x)$ funtzioaren maximo erlatibo bat da.

Minimo erlatiboentzako erizpidea: Baldin $x=a$ puntua $y=f(x)$ funtzioaren balio kritiko bat bada, eta baldin $f''(a)>0$ bada, orduan $f(a)$, $f(x)$ funtzioaren minimo erlatibo bat da.

$f''(a)=0$ denean erizpideak balioa galtzen du. Hau gertatzen denean lehengo atalean aipatutako erizpideak erabili behar dira.

XI-4 MAKUR BATEN BIHURGUNE PUNTUAK

Baldin x=a puntuan (ez da beharrezkoa puntu hau f(x)-en balio kritikoa izatea) f"(a)=0 bada, eta gainera f"(a)=0 delarik, orduan [a,f(a)] puntuari y=f(x) makurraren bihurgune puntua deritzaio.

I.Irudian, G eta H makurraren bihurgune puntuok dira. Aipatzekoa da, A eta G artean makurraren zuzen ukitzaileak makurraren gainean daudela. H eta E arteko puntuentzako zuzen ukitzaileak makurpean daude eta, azkenik, H eta E artean zuzen ukitzaileak geian daude. G eta H-n, bihurgune puntuetan hain zuzen, zuzen ukitzaileak makurra ebaki egiten du.

3. Adibidea

I. Adibideko $f(x)=x^2-6x+8$ funtzioarentzako, $f'(x)=2x6$ eta $f''(x)=2$ da. x=3 balio kritikoan, $f''(x)>0$; beraz f(3)=I minimo erlatibo bat da. Eta nola $f''(x)=2\neq 0$ den, $y=x^2-6x+8$ parabolak ez du bihurgune punturik.

XI-5 DIFERENTZIALAK

Eman dezagun y=f(x). d(x) (diferentzial x irakur). $dx=\Delta x$ erlazioaren bidez definituz eta dy (diferentzial y irakur) $dy=f'(x).dx$ definituz; $dy\neq\Delta y$ dela ikusten da.

4. Adibidea

Baldin $y = f(x)=x^3$, orduan

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3= 3x^2.\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=3x^2.dx+3x(dx)^2+(dx)^3$$

$dy=f'(x).dx=3x^2.dx$ delarik. Hala baldin dx zenbakiz txikia bada, dy y-tik nahiko hurbiltze ona da eta kalkulatzeko errazagoa.

Pentsa dezagun orain x=I0 etz dx = x=0,0I, dela; orduan, lehengo funtzioarentzako;

$\Delta y=3(I0)^2(0,0I)+3(I0)(0,0I)^2+(0,0I)^3=3,003I$ eta era berean $dy=3(I0)^2(0,0I)=3$.

PROBLEMA ASKATUAK

I. Aurkitu ondorengo funtzioak zein arartetan diren hazkorrak, eta zein arartetan urrikorrak:

a) $f(x)=x^2-8x$ b) $f(x)=2x^3-24x5$

Kasu honetan, $f'(x)=2(x-4)$. Deribatua zero eginez, balio kritikoa aurkitzen da $x=4$ puntuan.

$x=4$ hartzean zera ikusten da; $f'(x)<0$ dela $x<4$ balioarentzako, eta $f'(x)>0$ x $4>$denean. Beraz, $f(x)=x^2-8x$ funtzio hazkorra da $x>4$ denean, eta urrikorra $x<4$ denean.

b) $f'(x)=6x-24=5(x+2)(x-2)$ da; balio kritikoak $x=2$ etz $x=2$ dira. Puntu hauk x ardatzean aurkituz eta ararte bakoitzean $f'(x)$-ek duen zeinua determinatuz, hain zuzen $x<-2$, $-2<x<2$ eta $x>2$, zera ikusten da; $f(x)=2x^3-24x+5$ hazkorra da $x<-2$ eta $x>2$ arartеetan eta urrikorra $-2<x<2$ arartean.

2. Aurkitu ondorengo funtzio hauen maximo eta minimo erlatiboak.

a) $f(x)=-x^3+3x^2+9x5$

b) $f(x)=x^3+3x$

a) Balio kritikoak $x=-1$ eta $x=3$ dira. Eta nola $f'(x)<0$ den $x<-I$ balioarentzako, eta $f'(x)>0$ den $-1<x<3$ baliorentzako, orduan $f(x)$-ek $f(-1)=0$ minimo erlatibo bat du. Eta nola $f'(x)>0$ den $-1<x<3$ baliorentzako eta $f'(x)<0$ den $x>3$ baliorentzako funtzioak $f(3)=32$ maximo erlatibo bar du.

b) Funtzioak ez du ez maximorik ez eta minimorik.

3. Aurkitu ondorengo funtzio hauen maximo eta minimo erlatiboak, 2. deribatuaren erizpidea erabiliz.

a) $f(x)=(x-2)^3$, $f'(x)=3(x-2)^2$, $f''(x)=6(x-2)$

$x=2$ da balio kritikoa. Baina nola $f''(2)=0$ den, erizpideak ez du baliorik.

b) $f(x)=(x-I)^3(x-2)$, $f'(x)=(x-I)^2(4x-7)$,

$f''(x)=6(2x-3)\ (x-I)$

$x=1$ eta $x = 7/4$ dira balio kritikoak.

$f''(1)= 0$ ekin erizpideak ez du baliorik

4. Aurkitu ondorengo makurren bihurgune puntuak.

a) $f(x)=x^2-8x$; b) $f(x)=2x^3-24x+5$

a) Nola $f''(x)=2$ den, parabolak ez du bihurgune punturik

b) $f''(x)=12x$ eta $f'''(x) = 12$. Nola $f''(x)=0$ den, $x=0$ denean eta $f'''(0)-12\neq 0$ izanik, $(0,5)$ bihurgune puntu bat da.

5. Aurkitu dy ondorengo funtziotan

a) $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$; b) $y=f(x)= x^4-4x^3+8$

a) $f'(x)=2x5$ izanik, $dy=f'(x)dx= (2x+5)\ dx$

b) $f'(x)=4x^3-12x^2$ izanik, $dy = (4x^3-12x^2)dx$

PROPOSATUTAKO PROBLEMAK

6. Aurkitu ondorengo funtzioak zein arartetan diren hazkorrak edo urrikorrak

   a) $f(x)=x^2$ Em. Urrik. $x<0$ entzako; Hazk. $x>0$ entzako

   b) $f(x)=4-x^2$ Em. Hazk. $x<0$ entzako; Urrik. $x>0$ entzako

7. Aurkitu ondorengo funtzioen maximo eta minimo erlatiboak

   a) $f(x)=x^2+6x-5$ Em. Min = 14

   b) $f(x)=3x^2+6x+18$ Em. Min = 15

8. Aurkitu ondorengo funtzioen maximoak, minimoak eta bihurgune puntuak

   a) $y= x^2-4x+8$; b) $y=(x-1)^3+5$

   Em. a) Min. (2,4)
   b) B.P. (1,5)

9. Ondorengo funtzio hauetako bakoitzarentzat, aurkitu Δy, dy, eta (Δy - dy)

   a) $y = \frac{1}{x}$ x 2+x; x=2, $\Delta x = \frac{1}{4}$

   Em. $\Delta y = 25/32$, dy = 3/4, Δy-dy = 1/32

   b) $y = x^2-x$; x=3, $\Delta y = 0,01$

   Em. $\Delta y = 0,0501$, dy = 0,05, Δy-dy = 0,0001

XII - INTEGRAZIOA

XII - INTEGRAZIOA

Baldin eta F(x) funtzio bat bada, eta bere deribada F'(x)= = f(x) bada, orduan F(x), f(x)-en integralea da.

Adibidez, f(x) = $3x^2$-en integralea F(x) = x^3 da; zeran eta F'(x) = $3x^2$ = f(x) da.

Halaber, G(x) = x^3+5 eta H9x) x^3-6 funtzioak, f(x)-en integraleak dira. Zergaitik?.

Baldin F(x) eta G(x), f(x) en integrale ezberdinak badira, orduan F(x) = G(x) + c, c konstante bat delarik.

XII. 1 - INTEGRALE DEFINITUGABEAK

f(x)-en integrale definitugabea, f(x)-en integralerik jenera lena da, eta $\int f(x)\,dx$ bezala adierazten da, hots

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

bertan, c edonolako konstante bat eta F(x) berriz, F'(x) = f(x) den funtzioa direlarik. Horrela, f(x)= $3x^2$-en integrale definitugabea $\int 3x^2 dx = x^3+C$ da.

Ondoko integrazio formula hauk erabili ditugu:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ bertan $n \neq -1$ delarik

II. $\int c\ f(x)\ dx = c \int f(x)\ dx$, bertan C konstante bat delarik

III. $\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

I. Adibidea:

a) $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

b) $\int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx = 4 \frac{x^4}{4} + C = x^4 + C$

c) $\int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2} x^2 + C$

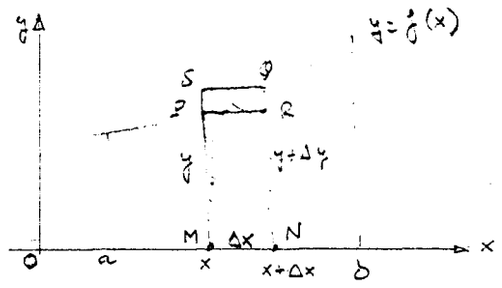
d) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = - \frac{1}{2x^2} + C$

e) $\int (x^5+4x^3+3x)\ dx = \int x^5 dx + \int 4x^3 dx + \int 3x dx = \frac{x^6}{6} + x^4 - \frac{3x^2}{2} + C$

XII. 2 - INTEGRAZIOAREN BIDEZKO AZALERA

Kontsidera dezagun $y = f(x)$ makurrak, x ardatzak, $x = a$ ordenatu fijoak eta $x = x$ ordenatu aldakorrak inguratzen duten $A(x)$ azalera. (Erosotasunez, $y \geqslant 0$ dela onhartuko dugu).

Bedi ΔA, $A(x)$ en gehikuntza (azalera marratua) x balioa xetik $x+\Delta x$-era gehitzen denean. Alboko irudian ikusten den bezala MPRN Lauk. azal $A \leqslant$ MSQN lauk, azal.



edo $y.\Delta x \leqslant \Delta A \leqslant (y+\Delta y)\Delta x$

$\Delta x \neq 0$ bidez zatituaz, zera dugu:

$$y \leqslant \frac{\Delta A}{\Delta X} \leqslant y+\Delta y$$

$\Delta x \longrightarrow 0$ egiten bada, orduan

$\Delta y \longrightarrow 0$ eta $\Delta A \longrightarrow 0$ eta.

$$y \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\overset{\text{mug}}{\leqslant}} \frac{\Delta A}{\Delta X} \leqslant y \quad \text{edo} \quad y \leqslant \frac{d\ A}{d\ x} \leqslant y$$

Honela $\frac{dA}{dx} = y = f(x)$

Beraz, $dA = f(x)\ dx$ eta $A(x) = \int f(x) dx = F(x)+C$; $F'(x) = f(x)$delari

C-aren balioa lortzeko, kontura gaitezen hontaz: x=a denean, hots, bi muturretako ordenatuak batera etortzen direnean, ez dago azalerarik, eta beraz A(a) = 0. Baina A(a) = =F(a) + C, beraz C = -F(a) eta

$$A(x) = F(x)-F(a)$$

Aurki dezagun orain y = f(x) makurra, x ardatza, eta b > a delarik x = a eta x = b bi ordenatu fijoen arteko A azalera.

Orduan: A = A(b) = F(b)-F(a)

II. Adibidea:

Aurki, $y = x^2$ parabolak, x ardatzak, eta x = 1 eta x = 3 ordenatuak mugatzen duten azalera.

$\frac{dA}{dy} = y=x^2$ denez, $A(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

x = 1 denean A(x) = 0 da, beraz, $0 = \frac{1}{3} + C$ eta $C = -\frac{1}{3}$

Beraz, $A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$ eta $A = A(3) = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ u.k.

Metodo hau era hontara erraz daiteke: $f(x) = x^2$-en integralea $F(x) = \frac{x^3}{3}$ denez, A = F(3) - F(1) = 9-1/3 = 26/3 u.k.

XII. 3 - INTEGRALE DEFINITUAK

x = a eta x = b arteko f(x) en integrale definitua (era hontara adierazten de $\int_a^b f(x)dx$) modu hontara definitzen bada:

$$\int_a^b f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F(b)-F(a)$$

orduan, $y=f(x) \geqslant 0$, x ardatzak, eta x=a eta x=b (b>a) ordenatuek mugatzen duten azalera, adierazpen honek ematen du:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

PROBLEMA ASKATUAK

1. f(x) en integraleak F(x) eta G(x) badira, eta biak ezberdinak, zera froga ezazu F(x)=G(x)+C dela, C konstante bat delarik.

f(x)-en integraleak F(x) eta G(x) badira: $F'(x)=G'(x)=f(x)$

$F(x)-G(x)=H(x)$ dela suposatzen bada, x-arekiko deribatuaz

$F'(x)-G'(x)=H'(x)$ baina $F'(x)=G'(x)$ denez, $H'(x) = 0$ da.

Beraz H(x) konstante bat izango da, eta $F(x) = G(x) + C$.

2. a) $(3x^2+5)dx = x^3+5+C$

b) $(5x^6+2x^3-4x+3)dx = \frac{5}{7}\ x\ 7+ \frac{4}{2}\ -x^4-2x^2+3x+C$

c) $(80x^{19}-32x^{15}-12x^{-3})dx = 4x^{20}-2x^{16}+ \frac{6}{x^2} + C$

3. Makur batez zera dakigu: (1,1) puntutik pasatzen dela, -1ko aiherduraz, eta gainera $y'' = 6x-10$ duela. Aurki makur horren ekuazioa.

$y'' = 6x-10 \longrightarrow y' = 3x^2-10x+C$, denez, eta x=1eko $y'=-1$bada zerá dugu: $-1=3-10+C_1$ $C_1=6$. Orduan $y' = 3x^2-10x+6$

Orduan: $y = x^3=5x^2+6x+C_2$ eta x =1eko $y = 1$ bada

$1=1-5+6+C_2$ $C_2 = -1$. Honela bada, makurraren ekuazioa

$y = x^3-5x^2+6x-1$ da.

4. Gorputz bat lerro zuzen batez $6t^2$-eko azelerazioarekin higitzen da. Gorputza geldigunetik irten bada, eta "t" segundoak eta "s" metroak direlarik, zenbat ibiliko da lehenbiziko 2 segundoetan?

Gorputza geldigunetik irten bada, orduan t = 0-rako V = 0 eta S = 0

$a = \frac{dv}{dt} = 6t^2$ denez, $dv = 6t^2\ dt$. Orduan $V = 6t^2dt = 2t^3+C_1$

Baina, t = 0, V = 0. bada, $0 = 2.0+C_1 \longrightarrow C_1 = 0$
beraz $V = 2t^3$

Baina $v = \frac{ds}{dt} = 2t^3$ denez, $ds = 2t^3dt$ da. Orduan

$s = \int 2t^3dt = \frac{1}{2}\ t^4+C_2$. Baina t = 0, s = 0, C = 0 eta

$s = \frac{1}{2}\ t^4$

Orduan t= 2 segundorako: $s\ \frac{1}{2}\ (2)^4 = 8$. Beraz lehendabiziko 2 segundoetan 8m higitzen da gorputza.

5. Hegazkin bat 98m/s abiaduraz altxatzen ari da, eta 1470 mtik bonba bat botatzen du. Aurki:

a) Bonbak erdiesten duen altuera maximoa
b) Bonbak aidean irauten duen denbora
c) Lurreraren kontra jotzean bonbak duen abiadura.

Bonbak lurra jotzen duen puntua, jatorria bezala hartzen bada, eta distantzi positiboak goruntz kontatuaz, zera dugu:

$a = \frac{dv}{dt} = -9,80$ eta $V = -9,80t+C_1$

t = 0-rako, V = 98 da. beraz $C_1 = 98$ eta $V = \frac{ds}{dt} = 9,8t+\ \frac{98}{}$

horrela, $s = -4,90\ t^2+98t^2+C_2$

t=0, s = 1470, beraz $C_2 = 1470$ eta $s = -4,90.t^2+98.t+1470$

a) t = 10rako, V = 0 da eta $s = -4,9\ (10)^2+98.(10)+1470= 1960$m. hauxe da hain zuzen, bonbaren altuera maximoa.

b) $s = 0$ denean, $-4,\ 9t^2 + 98t + 1470 = 0$ eta $t = 30,\ -10$ hots, bonbak aidean 30sg. irauten du.

c) $t = 30$rako, $v = -9{,}8(30)+98 = -196$ Hots, 196m/s abiaduraz jotzen du lurra bonbak.

6. Aurki ezazu $y = x^2+2x-3$ parabolak, x ardatzak, eta $x = 2$ eta $x = 0$ ordenatuek mugatzen duten azalera.

-2 x 0 tartean y 0.

$$A = \int_{-2}^{0}(x^2+2x-3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2-3x\right)\Big]_{-2}^{0} = 0 - \left.\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2-3(-2)\right\} =$$
$$= -\frac{22}{3}$$

Zeinu negatiboak, azalera erabat x ardatzaren azpitik dagoela esan nahi du.

7. Aurki ezazu $y = x^3-9x$ makurrak, x ardatzak, eta $x = -2$ eta $x = 4$ ordenatuek mugatzen duten azalera.

Problema honek zera adierazi nahi du: ez dela $\int_{-2}^{4}(x^3-9x)\,dx$ aurkitu behar den azalera.

Irudian ikusten denez, $x = 0$ eta $x = 3$ tartean, "y" zeinuz aldatzen da. Zeinuak alde batera utziaz, hiru sailetan datza bilatzen dugun azalera.

$$A_1 = \int_{-2}^{0}(x^3-9x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\Big]_{-2}^{0} = 0-(4-18) = 14$$
$$A_2 = \int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\Big]_{0}^{3} = \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right)-0 = -\frac{81}{4}$$
$$A_3 = \int_{3}^{4}(x^3-9x)\,dx - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\Big]_{3}^{4} = (64-72)-\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) = \frac{49}{4}$$

Beraz, $A = A_1-A_2+A_3 = 14 + \frac{81}{4} + \frac{49}{4} + \frac{93}{4}$ u.k.

Ohar ezen $\int_{-2}^{4}(x^3-9x)\,dx = 6 < A_1$ absurdoa dela.

EGITEKO ZENBAIT PROBLEMA

1. Askatu ondoko integrale definitugabeak

a) $4\int dx$

b) $\int \frac{1}{2}x.dx$

c) $\int (3x^2+4x-5)dx$

d) $\int x(1-x)dx$

e) $\int 3(x+1)^2dx$

f) $\int (x-1)(x+2)dx$

g) $\int \frac{dx}{x^2}$

h) $\int \frac{x^2-2}{x^2}\,dx$

2. Makur batek $y'' = 6x+8$ du, makur hori $m=6$ aiherdurarekin pasatzen bada (1,2) puntutik, aurkitu bere ekuazioa,

Erroa: $y = x^3+4x^2-5x+2$.

3. Hegazkin batetik eta 1600 mtik bonba bat jaurtikitzen da beherutz 31m/sko hastapeneko abiaduraz. Jatorri bezala hegazkina hartzen bada eta norantza positibo bezala beheruntzkoa, aurki:

a) bonbaren abiadura eta altuera 10 segundo barru

b) lurreraino iristeko behar duen denbora

c) lurra jotzerakoan duen abiadura.

4. "x" ardatzak, eta ematen diren makur eta ordenatuek mugatzen duten azalera aurki:

a) $y = x^2$, eta $x = 2$ eta $x = 4$ artean — Erroa 56/3 n.k.

b) $y = 4 = 3x^2$, eta $x = -1$ eta $x = 1$ artean — Erroa 6 n.k.

c) $y = x^{1/2}$, eta $x = 0$ eta $x = 9$ artean — Erroa 18 n.k.

d) $y = x^2 - x - 6$ eta $x = 0$ eta $x = 2$ artean — Erroa 34/3 n.k.

e) $y = x^3$ eta $x = -2$ eta $x = 4$ artean — Erroa 68 n.k.

f) $y = x^3 - x$ eta $x = -1$ eta $x = 1$ artean — Erroa 1/2 n.k.

XIII - BATUKETA MODUZ DEFINITURIKO INTEGRALEA

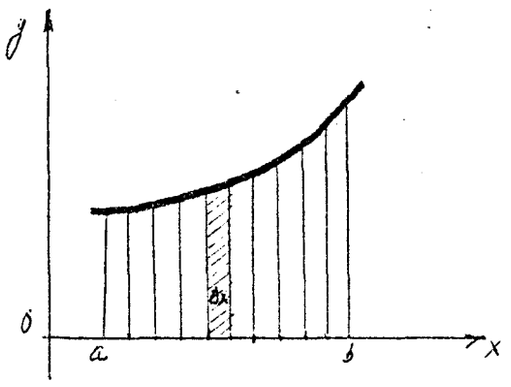
XIII - BATUKETA MODUZ DEFINITURIKO INTEGRALEA

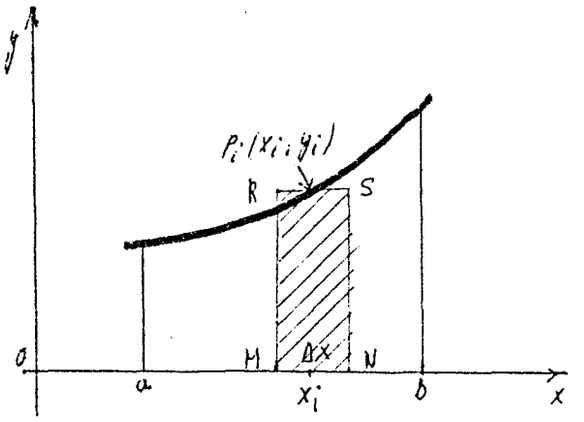
XIII. 1 - BATUKETAREN BIDEZKO AZALERA

Kontsidera dezagun $y = f(x) \geqslant 0$ makurrak, x ardatzak, eta $x = a$ eta $x = b$ ordenatuak mugatzen duten azalera ($b > a$ delarik).

$a \leqslant x \leqslant b$ tartea, "n" zati berdin eta bakoitza Δx luzerakotan zatitzen bada, eta zati puntu bakoitzean ordenatua marraztean azalera n zerrendatan zatituta gelditzen da, ikus a irudia.

Zerrenda hauen azalerak ezezagunak direnez, zerrenda bakoitzaren azalera gutti gora behera kalkula daiteke errektangulu batez hurbiltzean "b" irudian adierazten da errektangulu baten bidezko zerrendaren hurbilketa.





Bedi ezkerretik hasi ta i-garen zerrenda, eta dei dezaiogun $x = xi$ bere oinaren erdipuntuari, eta $yi = f(xi)$ abzisa bezala xi duen makurraren Pi puntuaren ordenatuari. Pi tik x ardatzarekiko paralel bat pasatzen bada, MRSN errektangulu bat osatzen da. Errektangulu honen azalera $yi \Delta x$ da, eta gutxi gora behera i-garen zerrenda bezalakoa da. Zerrenda bakoitzekin gauz bera egiten bada, billatzen dugun azaleraren hurbilketa bezala honoko adierazpen hau har daiteke:

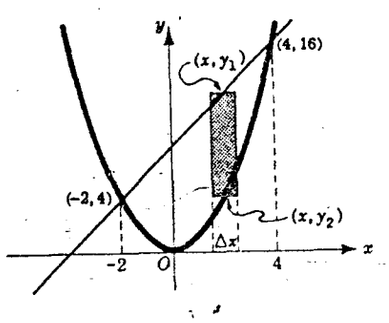
$$\Delta yi . \Delta x + y2 \Delta x + \ldots\ldots = \Sigma yi \Delta x$$

Orain, $\Delta x \to 0$ egiten delarik zerrenden kopurua etengabe gehitzen bada, errektanguluen laukizuzenen kopurua handitzen doa eta beraz, beren azaleraren batura gero eta gehiago hurbilduko zaio aurki nahi dugun azalerara, hots:

$$A = \underset{n \to \infty}{\text{mug}} \sum_{i=1}^{n} yi \quad x = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\, dx$$

I. Adibidea

$y = 2x+8$ eta $y = x^2$ makurrek mugatzen duten azalera aurkitu. Bilatzen dugun azalerari, goitik zuzenak eta behetik parabolak mugatzen duten.



Bi makur hauen elkarguneak aurkitzeko nahikoa da beren ekuazioak osatzen duten sistema askatzea. Horrela (-2,4) eta (4,16) elkarguneak aurkituko ditugu.

Alboko irudiak erakusten duen zerrenda, $y1 - y2 = (2x+8) - x^2 = 8+2x-x^2$ ko altuera eta $(8+2x-x^2)$ x eko azalera duen errektangulu batez hurbiltzen da. Orduna,

$$A = \int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)\, dx = \left(8x+x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{4} = 36 \text{ unitate karratuak}$$

OHARRA: Problema hau, aurreko kapituluan aska zitekeen. Horrela: Bedi A1, $y = 2x + 8$ zuzenak, x ardatzak eta $x = -2$ eta $x = 4$ ordenatuak gordetzen duten azalera; eta A2 berriz, $y = x^2$ parabolak, x ardatzak, eta $x = -2$ eta $x = 4$ ordenatuak gordetzen duten azalera. Orduan, eskatutako azalera:

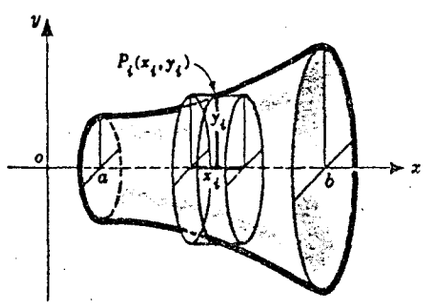
$$A = A1-A2 = \int_{-2}^{4} (8+2x)\, dx - \int_{-2}^{4} x^2\, dx = \int_{-2}^{4} (8+2x-x^2)\, dx$$

XIII.2 - BIKAKETAREN BIDEZKO BOLUMENAK

Azalera laun bat ebakitzen ez duen bere planuko zuzen batekiko biraerazten bada biratzean solido bat sortzen da. Zuzen honi biraketa-ardatz deitzen zaio.

Bedi, $y = f(x) \geqslant 0$ makurrak, x ardatzak, eta $x = a$ eta $x = b$ ordenatuak gordetzen duten azalera launa; eta jar dezagun x ardatza dela biraketa ardatza.

Lehenbizi, x ardatzerekiko zerrenda paraleletan deskonposatzen da azalera, eta lehen bezala errektanguluen bidez hurbiltzen dira.



Alboko irudian, yi erradioko eta Δx altuerako diskoaren bolumena πyi^2 da. Beraz, bilatzen dugun bolumena gutxi gora behera zera da,

$$\pi y1^2 \Delta x + \pi y2^2 \Delta x + \ldots + \pi yn^2 \Delta x = \pi \sum_{i=1}^{n} yi^2 \Delta x$$

Zerrenda kopurua etengabe ugaltzen joaten bagara eta mugara pasatzen bada, bilatzen dugun bolumena zera da:

PROBLEMA ASKATUAK

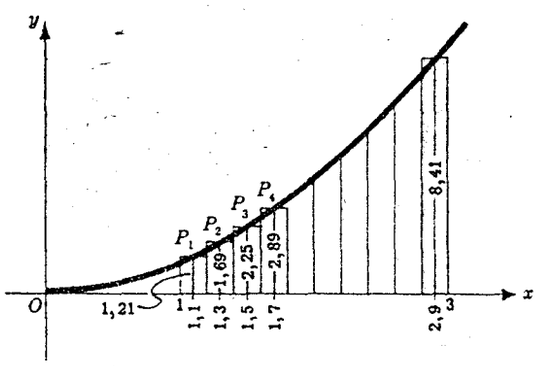
I. Zatika ezazu $y = x^2$ parabolak, x ardatzak, eta x = 1 eta x = 3 ordenatuak gordetzen duten azalera, x = 2 zabalerako 10 zerrendetan.

Zerrenda hauen oinaren erdipuntuen abzisak hauk dira:

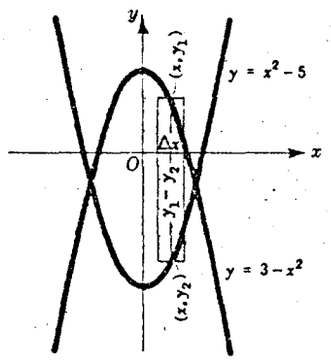
x1 = I,I , x2 = I,3 , x3 = I,5, ... x10 = 2,9

eta makurraren P1, P2, P3, ... P10 puntuen ordenatuak berriz, y1 = I, 21 .....

Errektangulu guztien azalerak batutzen badira eskatutako azaleraren hurbilketa on bat erdiesten da.



a) irudia



b) irudia

2. Aurki ezazu $y = x^2-5$ eta $y = 3-x^2$ parabolek inguratzen duten azalera.

Parabolen ekuazioak osatzen duten ekuazio sistema askatuz, (-2, -I) eta (2, -I) elkarguneak erdiesten dira.

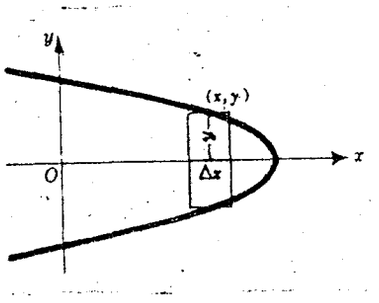
b irudian ikusten den zerrenda, errektangulu batez hurbilduko dugu.

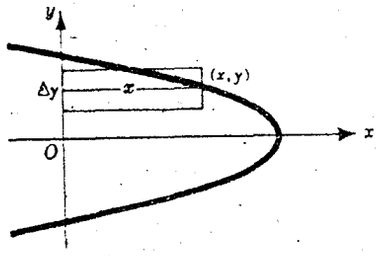
3. Aurki ezazu $y = 4-y^2$ eta y ardatzak inguratzen duten azalera Parabolak eta x ardatzak x = 4 puntuan ebakitzen dute elkar eta parabolak eta y ardatzak y = 2 puntuetan.

Lehen askabidea. Zuzen bertikal distantzikideen bidez azalera zerrendetan zatitzen da. "c" irudiak, 2y = 2 4-x altuerako eta 2 4-x x azalerako zerrenda honen errektangulu hurbildu bat erakusten digu.

Orduan,

$$A = \int_0^4 2\sqrt{4-x}\ dx = -2\,\frac{2}{3}\,(4-x)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$





Bigarren askabidea. Zuzen horizontal distantzikideen bidez azalera zerrendetan zatitzen da. "d" irudiak, Δ y zabalerako hauetako zerrenda bat erakusten digu. Zerrenda honi hurbildutako errektangulu baten oina $x = 4-y^2$ bada, azalera zera da:

$(4-y^2)\,\Delta y$, beraz,

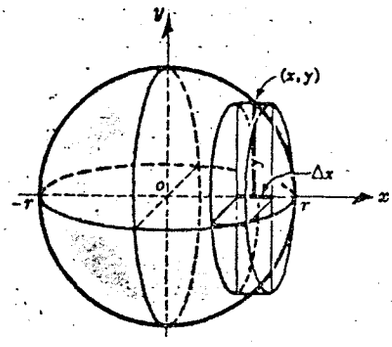
$$A = \int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy = 4y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

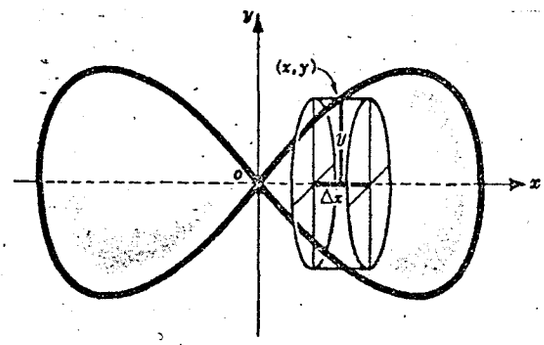
4. Aurkitu "r" erradioko esfera baten bolumena
Kontsidera dezagun x ardatzarekiko $x^2+y^2 = r^2$ zirkuluerdi goitiko biraketak sortzen duen esfera.

e Irukido errektangulu x ardatzarekiko biraerazten bada, sortutako zilindroaren bolumena
$\pi y^2 \Delta x = \pi(r^2-x^2)\Delta x$ da.

Beraz,

$$V = \int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx = \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$





5. Aurkitu $y^2 = x^2-x^4$ makurra x ardatzarekiko biraerazten denean sortzen den bolumena.

(f) Irudian ikusten denez eskatutako bolumena, lehen koadrantean aurkitzen den azalerak x ardatzarekiko biraketan sortzen duen bolumen bikoitza da.

Errektanguluak sortzen duen zilindroaren erradioa y da, eta bolumena

$\pi y^2 \Delta x = \pi(x^2-x^4)\Delta x$. Orduan:

$$V = 2\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx = 2\pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{4\pi}{15}$$

6. Aurki ezazu $y^2 = 12x$ parabolak eta fokotik ardatzarekiko el karzuta den (x=3) kordak gordetzen duten azalerak, korda ho nekiko biraeraztarakoan sortzen duen bolumena.

Azalera, distantzikideko zuzen horizontalen bidez zatitzen da. Hurbiltze errektangulu bateri, korda honekiko biraeraz terakoan 3-x eradioko, eta Δy altuerako zilindro bat sortzen da. Bere bolumena hauxe da:

$$\pi(3-x)^2\Delta y = \pi(3 - \frac{y^2}{12})^2\Delta y$$

EGITEKO ZENBAIT PROBLEMA

1. Marraz ezazu irudia, eta aurkitu azaltzen denaren azalera.

2. Marraz ezazu irudia, eta aurkitu adierazten den zuzenareki ko biratzean azalerak sortzen duen bolumena.

3. Aurki ezazu lehen koadrenteko $y = 8x^3$, $y = 0$, $x = 2$ mugatzen duten azalerak, adierazten den ardatzarekiko biraeraztean, sortzen duen bolumena.

E R A S K I N A

udako euskal unibertsitatea

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Angelu	Sin	Tg	Ctg	Cos	
0°00′	.0000	.0000	—	1.0000	90°00′
10	.0029	.0029	343.77	1.0000	50
20	.0058	.0058	171.89	1.0000	40
30	.0087	.0087	114.59	1.0000	30
40	.0116	.0116	85.940	.9999	20
50	.0145	.0145	68.750	.9999	10
1°00′	.0175	.0175	57.290	.9998	89°00′
10	.0204	.0204	49.104	.9998	50
20	.0233	.0233	42.964	.9997	40
30	.0262	.0262	38.188	.9997	30
40	.0291	.0291	34.368	.9996	20
50	.0320	.0320	31.242	.9995	10
2°00′	.0349	.0349	28.636	.9994	88°00′
10	.0378	.0378	26.432	.9993	50
20	.0407	.0407	24.542	.9992	40
30	.0436	.0437	22.904	.9990	30
40	.0465	.0466	21.470	.9989	20
50	.0494	.0495	20.206	.9988	10
3°00′	.0523	.0524	19.081	.9986	87°00′
10	.0552	.0553	18.075	.9985	50
20	.0581	.0582	17.169	.9983	40
30	.0610	.0612	16.350	.9981	30
40	.0640	.0641	15.605	.9980	20
50	.0669	.0670	14.924	.9978	10
4°00′	.0698	.0699	14.301	.9976	86°00′
10	.0727	.0729	13.727	.9974	50
20	.0756	.0758	13.197	.9971	40
30	.0785	.0787	12.706	.9969	30
40	.0814	.0816	12.251	.9967	20
50	.0843	.0846	11.826	.9964	10
5°00′	.0872	.0875	11.430	.9962	85°00′
10	.0901	.0904	11.059	.9959	50
20	.0929	.0934	10.712	.9957	40
30	.0958	.0963	10.385	.9954	30
40	.0987	.0992	10.078	.9951	20
50	.1016	.1022	9.7882	.9948	10
6°00′	.1045	.1051	9.5144	.9945	84°00′
10	.1074	.1080	9.2553	.9942	50
20	.1103	.1110	9.0098	.9939	40
30	.1132	.1139	8.7769	.9936	30
40	.1161	.1169	8.5555	.9932	20
50	.1190	.1198	8.3450	.9929	10
7°00′	.1219	.1228	8.1443	.9925	83°00′
10	.1248	.1257	7.9530	.9922	50
20	.1276	.1287	7.7704	.9918	40
30	.1305	.1317	7.5958	.9914	30
40	.1334	.1346	7.4287	.9911	20
50	.1363	.1376	7.2687	.9907	10
8°00′	.1392	.1405	7.1154	.9903	82°00′
10	.1421	.1435	6.9682	.9899	50
20	.1449	.1465	6.8269	.9894	40
30	.1478	.1495	6.6912	.9890	30
40	.1507	.1524	6.5606	.9886	20
50	.1536	.1554	6.4348	.9881	10
9°00′	.1564	.1584	6.3138	.9877	81°00′
	Cos	Ctg	Tg	Sin	Angelu

Angelu	Sin	Tg	Ctg	Cos	
9°00′	.1564	.1584	6.3138	.9877	81°00′
10	.1593	.1614	6.1970	.9872	50
20	.1622	.1644	6.0844	.9868	40
30	.1650	.1673	5.9758	.9863	30
40	.1679	.1703	5.8708	.9858	20
50	.1708	.1733	5.7694	.9853	10
10°00′	.1736	.1763	5.6713	.9848	80°00′
10	.1765	.1793	5.5764	.9843	50
20	.1794	.1823	5.4845	.9838	40
30	.1822	.1853	5.3955	.9833	30
40	.1851	.1883	5.3093	.9827	20
50	.1880	.1914	5.2257	.9822	10
11°00′	.1908	.1944	5.1446	.9816	79°00′
10	.1937	.1974	5.0658	.9811	50
20	.1965	.2004	4.9894	.9805	40
30	.1994	.2035	4.9152	.9799	30
40	.2022	.2065	4.8430	.9793	20
50	.2051	.2095	4.7729	.9787	10
12°00′	.2079	.2126	4.7046	.9781	78°00′
10	.2108	.2156	4.6382	.9775	50
20	.2136	.2186	4.5736	.9769	40
30	.2164	.2217	4.5107	.9763	30
40	.2193	.2247	4.4494	.9757	20
50	.2221	.2278	4.3897	.9750	10
13°00′	.2250	.2309	4.3315	.9744	77°00′
10	.2278	.2339	4.2747	.9737	50
20	.2306	.2370	4.2193	.9730	40
30	.2334	.2401	4.1653	.9724	30
40	.2363	.2432	4.1126	.9717	20
50	.2391	.2462	4.0611	.9710	10
14°00′	.2419	.2493	4.0108	.9703	76°00′
10	.2447	.2524	3.9617	.9696	50
20	.2476	.2555	3.9136	.9689	40
30	.2504	.2586	3.8667	.9681	30
40	.2532	.2617	3.8208	.9674	20
50	.2560	.2648	3.7760	.9667	10
15°00′	.2588	.2679	3.7321	.9659	75°00′
10	.2616	.2711	3.6891	.9652	50
20	.2644	.2742	3.6470	.9644	40
30	.2672	.2773	3.6059	.9636	30
40	.2700	.2805	3.5656	.9628	20
50	.2728	.2836	3.5261	.9621	10
16°00′	.2756	.2867	3.4874	.9613	74°00′
10	.2784	.2899	3.4495	.9605	50
20	.2812	.2931	3.4124	.9596	40
30	.2840	.2962	3.3759	.9588	30
40	.2868	.2994	3.3402	.9580	20
50	.2896	.3026	3.3052	.9572	10
17°00′	.2924	.3057	3.2709	.9563	73°00′
10	.2952	.3089	3.2371	.9555	50
20	.2979	.3121	3.2041	.9546	40
30	.3007	.3153	3.1716	.9537	30
40	.3035	.3185	3.1397	.9528	20
50	.3062	.3217	3.1084	.9520	10
18°00′	.3090	.3249	3.0777	.9511	72°00′
	Cos	Ctg	Tg	Sin	Angelu

Angelu	Sin	Tg	Ctg	Cos	
18°00′	.3090	.3249	3.0777	.9511	72°00′
10	.3118	.3281	3.0475	.9502	50
20	.3145	.3314	3.0178	.9492	40
30	.3173	.3346	2.9887	.9483	30
40	.3201	.3378	2.9600	.9474	20
50	.3228	.3411	2.9319	.9465	10
19°00′	.3256	.3443	2.9042	.9455	71°00′
10	.3283	.3476	2.8770	.9446	50
20	.3311	.3508	2.8502	.9436	40
30	.3338	.3541	2.8239	.9426	30
40	.3365	.3574	2.7980	.9417	20
50	.3393	.3607	2.7725	.9407	10
20°00′	.3420	.3640	2.7475	.9397	70°00′
10	.3448	.3673	2.7228	.9387	50
20	.3475	.3706	2.6985	.9377	40
30	.3502	.3739	2.6746	.9367	30
40	.3529	.3772	2.6511	.9356	20
50	.3557	.3805	2.6279	.9346	10
21°00′	.3584	.3839	2.6051	.9336	69°00′
10	.3611	.3872	2.5826	.9325	50
20	.3638	.3906	2.5605	.9315	40
30	.3665	.3939	2.5386	.9304	30
40	.3692	.3973	2.5172	.9293	20
50	.3719	.4006	2.4960	.9283	10
22°00′	.3746	.4040	2.4751	.9272	68°00′
10	.3773	.4074	2.4545	.9261	50
20	.3800	.4108	2.4342	.9250	40
30	.3827	.4142	2.4142	.9239	30
40	.3854	.4176	2.3945	.9228	20
50	.3881	.4210	2.3750	.9216	10
23°00′	.3907	.4245	2.3559	.9205	67°00′
10	.3934	.4279	2.3369	.9194	50
20	.3961	.4314	2.3183	.9182	40
30	.3987	.4348	2.2998	.9171	30
40	.4014	.4383	2.2817	.9159	20
50	.4041	.4417	2.2637	.9147	10
24°00′	.4067	.4452	2.2460	.9135	66°00′
10	.4094	.4487	2.2286	.9124	50
20	.4120	.4522	2.2113	.9112	40
30	.4147	.4557	2.1943	.9100	30
40	.4173	.4592	2.1775	.9088	20
50	.4200	.4628	2.1609	.9075	10
25°00′	.4226	.4663	2.1445	.9063	65°00′
10	.4253	.4699	2.1283	.9051	50
20	.4279	.4734	2.1123	.9038	40
30	.4305	.4770	2.0965	.9026	30
40	.4331	.4806	2.0809	.9013	20
50	.4358	.4841	2.0655	.9001	10
26°00′	.4384	.4877	2.0503	.8988	64°00′
10	.4410	.4913	2.0353	.8975	50
20	.4436	.4950	2.0204	.8962	40
30	.4462	.4986	2.0057	.8949	30
40	.4488	.5022	1.9912	.8936	20
50	.4514	.5059	1.9768	.8923	10
27°00′	.4540	.5095	1.9626	.8910	63°00′
	Cos	Ctg	Tg	Sin	Angelu

Angelu	Sin	Tg	Ctg	Cos	
27°00′	.4540	.5095	1.9626	.8910	63°00′
10	.4566	.5132	1.9486	.8897	50
20	.4592	.5169	1.9347	.8884	40
30	.4617	.5206	1.9210	.8870	30
40	.4643	.5243	1.9074	.8857	20
50	.4669	.5280	1.8940	.8843	10
28°00′	.4695	.5317	1.8807	.8829	62°00′
10	.4720	.5354	1.8676	.8816	50
20	.4746	.5392	1.8546	.8802	40
30	.4772	.5430	1.8418	.8788	30
40	.4797	.5467	1.8291	.8774	20
50	.4823	.5505	1.8165	.8760	10
29°00′	.4848	.5543	1.8040	.8746	61°00′
10	.4874	.5581	1.7917	.8732	50
20	.4899	.5619	1.7796	.8718	40
30	.4924	.5658	1.7675	.8704	30
40	.4950	.5696	1.7556	.8689	20
50	.4975	.5735	1.7437	.8675	10
30°00′	.5000	.5774	1.7321	.8660	60°00′
10	.5025	.5812	1.7205	.8646	50
20	.5050	.5851	1.7090	.8631	40
30	.5075	.5890	1.6977	.8616	30
40	.5100	.5930	1.6864	.8601	20
50	.5125	.5969	1.6753	.8587	10
31°00′	.5150	.6009	1.6643	.8572	59°00′
10	.5175	.6048	1.6534	.8557	50
20	.5200	.6088	1.6426	.8542	40
30	.5225	.6128	1.6319	.8526	30
40	.5250	.6168	1.6212	.8511	20
50	.5275	.6208	1.6107	.8496	10
32°00′	.5299	.6249	1.6003	.8480	58°00′
10	.5324	.6289	1.5900	.8465	50
20	.5348	.6330	1.5798	.8450	40
30	.5373	.6371	1.5697	.8434	30
40	.5398	.6412	1.5597	.8418	20
50	.5422	.6453	1.5497	.8403	10
33°00′	.5446	.6494	1.5399	.8387	57°00′
10	.5471	.6536	1.5301	.8371	50
20	.5495	.6577	1.5204	.8355	40
30	.5519	.6619	1.5108	.8339	30
40	.5544	.6661	1.5013	.8323	20
50	.5568	.6703	1.4919	.8307	10
34°00′	.5592	.6745	1.4826	.8290	56°00′
10	.5616	.6787	1.4733	.8274	50
20	.5640	.6830	1.4641	.8258	40
30	.5664	.6873	1.4550	.8241	30
40	.5688	.6916	1.4460	.8225	20
50	.5712	.6959	1.4370	.8208	10
35°00′	.5736	.7002	1.4281	.8192	55°00′
10	.5760	.7046	1.4193	.8175	50
20	.5783	.7089	1.4106	.8158	40
30	.5807	.7133	1.4019	.8141	30
40	.5831	.7177	1.3934	.8124	20
50	.5854	.7221	1.3848	.8107	10
36°00′	.5878	.7265	1.3764	.8090	54°00′
	Cos	Ctg	Tg	Sin	Angelu

Angelu	Sin	Tg	Ctg	Cos	
36°00′	.5878	.7265	1.3764	.8090	54°00′
10	.5901	.7310	1.3680	.8073	50
20	.5925	.7355	1.3597	.8056	40
30	.5948	.7400	1.3514	.8039	30
40	.5972	.7445	1.3432	.8021	20
50	.5995	.7490	1.3351	.8004	10
37°00′	.6018	.7536	1.3270	.7986	53°00′
10	.6041	.7581	1.3190	.7969	50
20	.6065	.7627	1.3111	.7951	40
30	.6088	.7673	1.3032	.7934	30
40	.6111	.7720	1.2954	.7916	20
50	.6134	.7766	1.2876	.7898	10
38°00′	.6157	.7813	1.2799	.7880	52°00′
10	.6180	.7860	1.2723	.7862	50
20	.6202	.7907	1.2647	.7844	40
30	.6225	.7954	1.2572	.7826	30
40	.6248	.8002	1.2497	.7808	20
50	.6271	.8050	1.2423	.7790	10
39°00′	.6293	.8098	1.2349	.7771	51°00′
10	.6316	.8146	1.2276	.7753	50
20	.6338	.8195	1.2203	.7735	40
30	.6361	.8243	1.2131	.7716	30
40	.6383	.8292	1.2059	.7698	20
50	.6406	.8342	1.1988	.7679	10
40°00′	.6428	.8391	1.1918	.7660	50°00′
10	.6450	.8441	1.1847	.7642	50
20	.6472	.8491	1.1778	.7623	40
30	.6494	.8541	1.1708	.7604	30
40	.6517	.8591	1.1640	.7585	20
50	.6539	.8642	1.1571	.7566	10
41°00′	.6561	.8693	1.1504	.7547	49°00′
10	.6583	.8744	1.1436	.7528	50
20	.6604	.8796	1.1369	.7509	40
30	.6626	.8847	1.1303	.7490	30
40	.6648	.8899	1.1237	.7470	20
50	.6670	.8952	1.1171	.7451	10
42°00′	.6691	.9004	1.1106	.7431	48°00′
10	.6713	.9057	1.1041	.7412	50
20	.6734	.9110	1.0977	.7392	40
30	.6756	.9163	1.0913	.7373	30
40	.6777	.9217	1.0850	.7353	20
50	.6799	.9271	1.0786	.7333	10
43°00′	.6820	.9325	1.0724	.7314	47°00′
10	.6841	.9380	1.0661	.7294	50
20	.6862	.9435	1.0599	.7274	40
30	.6884	.9490	1.0538	.7254	30
40	.6905	.9545	1.0477	.7234	20
50	.6926	.9601	1.0416	.7214	10
44°00′	.6947	.9657	1.0355	.7193	46°00′
10	.6967	.9713	1.0295	.7173	50
20	.6988	.9770	1.0235	.7153	40
30	.7009	.9827	1.0176	.7133	30
40	.7030	.9884	1.0117	.7112	20
50	.7050	.9942	1.0058	.7092	10
45°00′	.7071	1.0000	1.0000	.7071	45°00′
	Cos	Ctg	Tg	Sin	Angelu