I. KAPITULUA
Zenbakia. Aldagaia. Funtzioa

§ 1. ZENBAKI ERREALAK. ZENBAKI ERREALEN ADIERAZPENA ZENBAKIZKO ARDATZEKO PUNTUEN BIDEZ

Matematikaren oinarrizko kontzeptuetariko bat zenbakia da. Zenbakiaren kontzeptua antzinatean sortu zen eta denboran zehar hedatu eta orokortu da.

Zenbaki osoei eta frakzionarioei, positiboei zein negatiboei, zero zenbakia barne delarik, *zenbaki arrazional* deritze. Edozein zenbaki arrazional $\frac{p}{q}$ arrazoiaren bidez adieraz daiteke, p eta q bi zenbaki oso izanik. Adibidez:

$$\frac{5}{7};\ \ 1{,}25 = \frac{5}{4}.$$

Bereziki, p zenbaki osoa p eta 1 bi zenbaki osoen arteko $\frac{p}{1}$ arrazoi gisa idatz daiteke. Adibidez:

$$6 = \frac{6}{1};\ \ 0 = \frac{0}{1}.$$

Zenbaki arrazionalak frakzio dezimal finituen edo frakzio periodiko infinituen bidez idatz daitezke. Frakzio dezimal infinitu eta ez-periodikoen bidez idazten diren zenbakiei *zenbaki irrazional* deritze; adibidez: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 5-\sqrt{2},$ etab.

Zenbaki arrazionalen eta irrazionalen bildurari zenbaki *erreal*en multzo deritzo. Beren magnitudearen arabera ordenatzen dira, multzo ordenatua osatuz, hau da, edozein x eta y bi zenbaki errealetarako ondoko erlazioetariko bat eta soilik bat betetzen da:

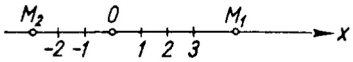
$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Zenbaki errealak zenbakizko ardatzeko puntuen bidez adieraz daitezke. Ondoko ezaugarriak dituen zuzen infinituari *zenbakizko ardatz* deritzo:

– jatorria deritzon O puntu bat;
– gezi batez adierazten den noranzko positibo bat;
– eskala edo neurri-unitate bat.

Oro har, zenbakizko ardatza horizontalean ipiniko dugu, ezkerretik

x_1 zenbakia positiboa bada, O jatorriaren eskuin aldean dagoen eta $OM_1 = x_1$ distantziara kokatzen den M_1 puntuaren bidez adierazten da; x_2 zenbakia negatiboa bada, O puntuaren ezker aldean dagoen eta $OM_2 = -x_2$ distantziara kokatzen den M_2 puntuaren bidez adieraziko dugu (1. irudia). O puntuak zero zenbakia adierazten du. Bistakoa denez, zenbaki erreal bakoitza zenbakizko ardatzeko puntu bakar baten bidez adierazten da. Bi zenbaki erreal desberdin



1. irudia.

ardatzeko puntu desberdinen bidez adierazten dira. Hots, zenbakizko ardatzeko puntu bakoitzak zenbaki erreal bakar bat adierazten du, arrazionala zein irrazionala.

Beraz, zenbaki erreal guztien eta zenbakizko ardatzeko puntu guztien artean korrespondentzia biunibokoa existitzen da: zenbaki bakoitzari zenbakizko ardatzean berori adierazten duen puntu bakar bat dagokio, eta, alderantziz, puntu bakoitzari zenbaki erreal bakar bat dagokio, puntua zenbakiaren irudia delarik. Beraz, «x zenbakia» eta «x puntua» sinonimoak dira eta horrela erabiliko ditugu liburu honetan.

Onar dezagun, frogarik gabe, zenbaki errealen multzoaren hurrengo propietate garrantzitsua: *edozein bi zenbaki errealen artean beti existitzen dira zenbaki arrazionalak eta irrazionalak.* Geometrikoki, propietate horren esanahia hau da: *zenbakizko ardatzeko edozein bi punturen artean beti daude puntu arrazionalak eta puntu irrazionalak.*

Ondorioz, teoriaren eta praktikaren arteko nolabaiteko «zubi» gisa erabiliko dugun hurrengo teorema enuntziatuko dugu.

Teorema. *Edozein α zenbaki irrazional zenbaki arrazionalen bidez adieraz daiteke nahi bezain zehazki.*

Izan ere, $\alpha > 0$ zenbaki irrazionala izanik, kalkula dezagun α zenbakia $\frac{1}{n}$ baino errore txikiago batez (adibidez, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}$, etab.).

α zenbakia edozein izanik, ondoz ondoko N eta N+1 bi zenbaki osoren artean kokatuta egongo da. Zatika dezagun N eta N+1 zenbakien arteko tartea n parte

berdinetan; orduan, α zenbakia $N+\frac{m}{n}$ eta $N+\frac{m+1}{n}$ bi zenbaki arrazionalen artean kokatuta egongo da. Zenbaki bi horien arteko kendura $\frac{1}{n}$ denez gero, bakoitzak α zenbakia adierazten du, aldez aurretik finkaturiko zehaztasunaz: lehenengoak behetik eta bigarrenak goitik.

Adibidea. $\sqrt{2}$ zenbaki irrazionala zenbaki arrazionalen bidez honela adierazten da:

1,4 eta 1,5, $\frac{1}{10}$ baino txikiagoa den erroreaz,

1,41 eta 1,42, $\frac{1}{100}$ baino txikiagoa den erroreaz,

1,414 eta 1,415, $\frac{1}{1000}$ baino txikiagoa den erroreaz, etab.

§ 2. ZENBAKI ERREAL BATEN BALIO ABSOLUTUA

Aurrera jarraitzeko nahitaezkoa den zenbaki errealen balio absolutuaren kontzeptua landuko dugu.

Definizioa. Hurrengo baldintzak betetzen dituen zenbaki erreal ez-negatiboa (bere idazkera $|x|$ delarik) x zenbaki errealaren *balio absolutua* (edo *modulua*) dela esango dugu:

$|x| = x$, $x \geq 0$ denean;
$|x| = -x$, $x < 0$ denean.

Adibideak. $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Definiziotik ondorioztatzen da edozein x zenbakitarako $x \leq |x|$ betetzen dela.

Azter ditzagun balio absolutuen zenbait propietate:

1. *Zenbaki errealen arteko batura aljebraikoaren balio absolutua ez da batugaien balio absolutuen arteko batura baino handiagoa*:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Froga. Izan bedi $x + y \geq 0$. Orduan, $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ ($x \leq |x|$ eta $y \leq |y|$ baitira).

Orain, demagun $x+y<0$ dela. Orduan: $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$, frogatu nahi genuen bezala.

Froga hori edozein batugai-kopurutara orokor daiteke erraz.

Adibideak.

$$|-2 + 3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ edo } 1 < 5;$$

$$|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ edo } 8 = 8.$$

2. *Bi zenbaki errealen arteko kenduraren balio absolutua ez da kenkizunaren eta kentzailearen balio absolutuen arteko kendura baino txikiagoa*:

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

Froga. Demagun $x - y = z$ dela. Orduan, $x = y + z$, eta aurretik frogaturikoaren arabera, hurrengoa dugu:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

eta hortik

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

hori da frogatu behar zena.

3. *Biderkaduraren balio absolutua faktoreen balio absolutuen arteko biderkadura da:*

$$|xyz| = |x||y||z|.$$

4. *Zatiduraren balio absolutua zatikizunaren balio absolutua eta zatitzailearena zatituz lortuko da*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Azken bi propietateak balio absolutuaren definiziotik zuzenean ateratzen dira.

§ 3. MAGNITUDE ALDAKORRAK ETA KONSTANTEAK

Magnitude fisiko batzuk neurtzean, hala nola denbora, luzera, azalera, bolumena, masa, abiadura, presioa, tenperatura, etab., beren zenbakizko balioak lortzen dira. Matematikak magnitudeak aztertzean dautza, horien eduki zehatzaren abstrakzioa eginez. Horregatik, magnitudeei buruz hitz egitean, beren zenbakizko balioak kontuan izango ditugu. Hainbat fenomenotan magnitude batzuk aldatzen dira, hots, beren zenbakizko balioa aldatzen da, eta beste magnitude batzuen balioa, ordea, konstante mantentzen da. Adibidez, puntu baten higidura uniformean denbora eta distantzia aldatzen dira, abiadura konstantea mantentzen delarik.

Zenbakizko balio desberdinak har ditzakeen magnitudeari *magnitude aldakor* edo, hitz bakar batez esanda, *aldagai* deritzo. Zenbakizko balioa aldatzen ez duen

magnitudeari *konstante* esaten zaio. Hemendik aurrera, aldagaiak x, y, z, u... letren bidez izendatuko ditugu, eta magnitude konstanteak a, b, c, ..., etab. letren bidez.

Oharra. Matematikan, maiz, konstanteak magnitude aldakorren edo aldagaien kasu berezitzat hartzen dira: konstante bat zenbakizko balio guztiak berdinak dituen aldagaia da.

Hala ere, hainbat fenomeno fisiko aztertzean, magnitude bera kasu batzuetan konstantea eta beste batzuetan aldakorra izan daitekeela kontuan hartzea komeni da. Adibidez, higidura uniformedun gorputzaren abiadura magnitude konstantea da, uniformeki azeleraturiko higiduran, ordea, magnitude hori aldakorra delarik.

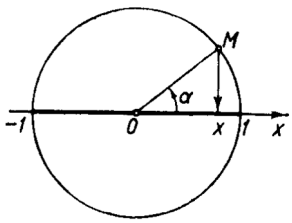
Edozein fenomenotan zenbakizko balioa aldaezin mantentzen duten magnitudeei *konstante absolutu* deritze. Adibidez, zirkunferentziaren luzeraren eta diametroaren arteko arrazoia magnitude konstantea da, bere balioa $\pi \approx 3{,}14159$ delarik.

Aurrerago ikusiko dugu aldagaiaren kontzeptua oinarrizkoa dela kalkulu diferentzialean eta integralean. Friedrich Engels-ek *Naturaren Dialektikan* hau idatzi zuen: «Matematiken bira-puntua Descartes-en magnitude aldakorra izan zen. Hark matematiketan higidura sartu zuen eta, berarekin, dialektika, baita, beraz, eta *ezinbestez*, kalkulu diferentziala eta integrala ere».

§ 4. ALDAGAI BATEN DEFINIZIO-EREMUA

Magnitude aldakor batek zenbakizko balio desberdinak har ditzake. Aztertzen den problemaren arabera, balio horien multzoa alda daiteke. Adibidez, baldintza normaletan ura berotzean, bere tenperaturak 15 °C–18 °C bitarteko ingurumen-tenperaturatik 100 °C-ko irakite-punturaino jo dezake. Beste adibide bat: $x = \cos\alpha$ aldagaiak –1 eta +1 bitarteko edozein balio har dezake.

Magnitude aldakor baten balioak zenbakizko ardatzeko puntuen bidez adierazten dira geometrikoki. Adibidez, $x = \cos\alpha$ aldagaiaren balioak, edozein α-tarako, zenbakizko ardatzean –1 eta +1 balioen artean kokatzen diren puntuen multzoa-ren bidez adierazten dira, –1 eta +1 barne direlarik (2. irudia).



2. irudia.

Definizioa. Aldagai batek har ditzakeen zenbakizko balioen multzoari aldagaiaren *definizio-eremu* deritzo.

Aipa ditzagun testuan zehar maiz azalduko diren zenbait aldagairen definizio-eremuak.

a eta b muturretako *tarte irekia* edo *tartea* emaniko a eta b ($a<b$) bi zenbakiren artean kokaturiko x-ren zenbakizko balio guztien multzoa da, a eta b muturrak izan ezik; hau da, a eta b ez daude multzoan. Hori (a,b) edo $a<x<b$ desberdintzen bidez adieraziko dugu.

a eta b muturretako *tarte itxi* edo *segmentu* deritzo a eta b artean dauden x-ren zenbakizko balioen multzoari, a eta b muturrak barne direnean. Hori $[a,b]$ idazkeraren edo $a \leq x \leq b$ desberdintzen bidez adieraziko dugu.

a edo b zenbakietariko bat (a adibidez) tartearen barnean dagoenean, eta bestea ez, tarte erdi itxia dugu; hori $a \leq x < b$ desberdintzen bidez adieraz daiteke, idazkera $[a,b)$ izanik. b zenbakia tartean badago, a ez dagoelarik, $(a,b]$ tarte erdi itxia dugu eta ondoko desberdintzen bidez adieraz dezakegu:

$$a < x \leq b.$$

x aldagaiak a baino handiagoak diren balio guztiak hartzen dituenean, tartea $(a,+\infty)$ izango da eta ohiko desberdintza hauen bidez adieraziko dugu:

$$a < x < +\infty.$$

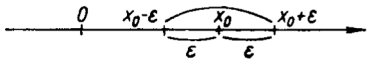
Modu berean, ondoko tarte infinituak aipa ditzakegu:

$$a \leq x < +\infty;\ -\infty < x < c;\ -\infty < x \leq c;\ -\infty < x < +\infty.$$

Adibidea. $x = \cos\alpha$ aldagaiaren definizio-eremua, α balioa edozein izanik, $[-1,1]$ tarte itxia da, $-1 \leq x \leq 1$ desberdintzen bidez adieraz dezakegularik.

Aurreko definizioetan «zenbaki» hitzaren ordez «puntu» hitza erabil dezakegu. Adibidez: a eta b (tarte itxiaren muturrak) bitartean kokaturiko puntuen multzoa *tarte itxia* dela esango dugu, a eta b muturrak multzo horren barnean direnean.

x_0 puntua barnean duen (a,b) tarte irekiari, hau da, $a<x_0<b$ betetzen duten a eta b muturretako (a,b) tarte irekiari, puntu horren *ingurune* deritzo. Maiz (a,b) tartea halako moldez aukeratzen da, non x_0 erdiko puntua den. Horrela denean, x_0 puntuari *ingurunearen zentro* deritzo eta $\frac{b-a}{2}$ magnitudeari *ingurunearen erradio* deritzo. 3. irudiak x_0 zentroko eta ε erradioko $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ingurunea adierazten du.



3. irudia.

§ 5. ALDAGAI ORDENATUA. ALDAGAI GORAKORRAK ETA BEHERAKORRAK. ALDAGAI BORNATUA

Hitzarmenez, x aldagai bat *ordenatua* da bere definizio-eremua ezagutzen bada eta bere balioen edozein bikotetarako zehaztu badaiteke zein den aurrekoa eta zein den atzekoa. Definizio horretan «aurreko» eta «atzeko» kontzeptuak ez daude denborari lotuak, aldagaiaren bi balio horiek ordenaturik dauden modua adierazten dute besterik gabe.

$x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...$ zenbaki-segida aldagai ordenatu baten kasu berezitzat har dezakegu, non, $k' < k$ izanik, $x_{k'}$ balioa aurrekoa eta x_k atzekoa diren, bietatik handiagoa zein den jakiteak garrantzirik izan gabe.

1. Definizioa. Aldagaiaren atzeko balio bakoitza aurreko balio bakoitza baino handiagoa denean, aldagaia *gorakorra* dela esango dugu. Alderantziz, atzeko balio bakoitza aurreko balio bakoitza baino txikiagoa denean, aldagaia *beherakorra* izango da.

Aldagai gorakorrei eta beherakorrei *monotono* deritze.

Adibidea. Zirkunferentzia batean inskribaturiko poligono erregular baten aldeen kopurua bikoiztean, poligonoaren S azalera aldagai gorakorra da. Zirkunferentzia baten inguruan zirkunskribaturiko poligono erregular baten aldeen kopurua bikoiztean, poligono horren azalera aldagai beherakorra da. Ohar gaitezen aldagai bat ez dela derrigorrean gorakor edo beherakor izan behar. Adibidez, $x = \sin\alpha$ aldagaia ez da monotonoa, α magnitudea $[0, 2\pi]$ tarte itxian gorakorra denean. Hasieran 0tik 1era goratzen da, ondoren 1etik –1era beheratzen da eta, azkenik, –1etik 0ra goratzen da berriro.

2. Definizioa. x aldagaia *bornatua* dela esango dugu $M > 0$ konstante bat badago, non, balio batetik aurrera, atzeko balio guztiek

$$M \le x \le M, \text{ hau da, } |x| \le M$$

baldintza betetzen duten.

Hau da, aldagai bat bornatua dela esango dugu $[-M,M]$ tarte itxi bat badago, non, balio batetik aurrera, bere atzeko balio guztiak aipatutako tarte itxian kokatzen badira. Hala ere, aldagaiak ez du $[-M,M]$ tarte itxiko balio guztiak zertan hartu. Esate baterako, $[-2,2]$ tarte itxiko balio arrazionalak har ditzakeen aldagaia bornatua da. Hala ere, ez ditu tarte itxi horretako balio guztiak hartzen (balio irrazionalak hain zuzen ere).

§ 6. FUNTZIOA

Naturako zenbait fenomeno aztertzean eta problema teknikoak, beraz, matematikoak, ebaztean magnitude batek beste baten aldakuntzarekiko duen aldakuntza aztertzeko beharra sortzen da. Adibidez, higidura aztertzean, ibilbidea denboraren mende dagoen aldagaitzat hartzen da. Hortaz, ibilbidea denboraren funtzioa da.

Ikus dezagun beste adibide bat. Jakina denez, $Q = \pi R^2$ formula ezagunak zirkuluaren azalera bere erradioaren funtzio gisa ematen du. R erradioak zenbakizko balio desberdinak hartzen dituenean, Q azalerak ere balio desberdinak hartzen ditu. Ikusten dugunez, magnitude baten aldakuntza beste baten aldakuntzaren kausa da. Aipaturiko adibidean, Q azalera R erradioaren funtzioa da. Eman dezagun «funtzio» kontzeptuaren definizioa.

1. Definizioa. x aldagaiak eremu batean hartzen duen balio bakoitzari y aldagaiaren balio bat dagokionean, y aldagaia x-ren *funtzio* dela esaten da. Aurrekoa honela adieraz daiteke sinbolikoki:

$$y = f(x),\ y = \varphi(x),\ \text{etab.}$$

x aldagaiari *aldagai independente* edo *argumentu* deritzo. x eta y aldagaien arteko erlazioari *mendekotasun funtzional* deritzo. Mendekotasun funtzionalaren $y = f(x)$ idazkera sinbolikoan agertzen den f letrak y-ri dagokion balioa lortzeko x-rekin zenbait eragiketa egin behar direla esan nahi du. $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ etab. idazkeren ordez, batzuetan $y = y(x)$, $u = u(x)$ etab. erabiltzen dira. Horrela denean, y, u, etab. letrek hala mendeko aldagaiak nola x-rekin egin beharko diren eragiketen multzoaren ikurrak adierazten dituzte.

C konstantea denean, $y = C$ idazkeraren bidez, x-ren balioa edozein izanik, C balio konstantea duen funtzioa adierazten da.

2. Definizioa. y funtzioaren balioak $f(x)$ legearen bidez emanik daudenean, x balioen multzoari *funtzioaren definizio-eremu* deritzo.

1. Adibidea. $y = \sin x$ funtzioa x-ren balio guztietarako definituta dago. Beraz, bere definizio-eremua hurrengo tarte infinitua da:

$$-\infty < x < +\infty.$$

1. Oharra. x eta $y = f(x)$ aldagaien artean mendekotasun funtzionala badago eta horiek aldagai ordenatutzat hartzen baditugu, argumentuaren x^* eta x^{**} balioei dagozkien funtzioaren $y^* = f(x^*)$ eta $y^{**} = f(x^{**})$ balioetatik atzekoa izango da argumentuaren atzeko balioari dagokiona. Horrek hurrengo definizioa ematera garamatza.

3. Definizioa. Argumentu edo aldagai independentearen balio handiagoei $y = f(x)$ funtzioaren balio handiagoak dagozkienean, $y = f(x)$ funtzioa *gorakorra* dela esaten da. Modu berean, funtzio *beherakorra* definitzen da.

2. Adibidea. $Q = \pi R^2$ funtzioa gorakorra da $0 < R < +\infty$ denean, R-ren balio handiagoei Q-ren balio handiagoak dagozkielako.

2. Oharra. Batzuetan, «funtzio» kontzeptuaren definizioan, eremu bateko x-ren balio bakoitzari y-ren balio bat baino gehiago, baita kopuru infinitua ere, dagozkiola onartzen da. Kasu horretan, funtzioa *multiformea* dela esaten da, aurrerago definitu dugun funtzioari *uniforme* deritzolarik. Hemendik aurrera, funtzio uniformeei funtzio deituko diegu, eta nahaste-arazorik sor ez dadin, funtzio multiformeak erabiltzean horrelakoak direla adieraziko dugu.

§ 7. FUNTZIOEN ZENBAIT ADIERAZPIDE

I. TAULEN BIDEZ EMANIKO FUNTZIOAK

Prozedura honetan, argumentuaren balioak era ordenatuan jartzen dira, $x_1, x_2, ..., x_n$, eta, modu berean, dagozkien funtzioaren $y_1, y_2, ..., y_n$ balioak idazten dira.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Horrelakoak dira funtzio trigonometrikoen, logaritmikoen, eta abarren taulak.

Neurturiko magnitudeen artean existitzen den mendekotasun funtzionala azaltzen duten taulak zenbait fenomenoren azterketa esperimentalaren ondorio gisa ere ager daitezke. Horrela, adibidez, egun batean zehar meteorologia-estazio batean neurturiko airearen tenperaturaren datuak, hurrengo taulan ematen dira:

t denborarekiko (ordutan) T tenperaturaren balioa (gradu zentigradutan)

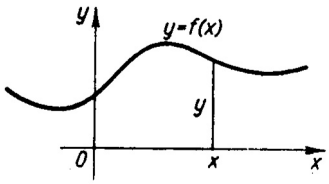
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	–1	–2	–2	–0,5	1	3	3,5	4

Taula horrek T t-ren funtzioan ematen du.

II. FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA

Koordenatu angeluzuzen edo kartesiarren sistemaren planoan $M(x,y)$ puntuen multzoa emanik, puntu pare bat ere Oy ardatzaren paraleloa den zuzen batean egon gabe, multzo horrek $y = f(x)$ funtzio bat definitzen duela esan dezakegu. Puntu

horien abzisak argumentuaren balioak dira, eta dagozkien ordenatuak funtzioarenak (4. irudia).



4. irudia.

Funtzioaren *grafiko* deritzo (*Oxy*) planoko puntuen multzoari, non abzisak aldagai independentearen balioak diren, eta ordenatuak dagozkien funtzioarenak.

III. FUNTZIOEN ADIERAZPEN ANALITIKOA

Hasteko, «adierazpen analitiko» kontzeptuaren esanahia finkatuko dugu. Magnitude konstanteak eta aldakorrak adierazten dituzten zifrekin eta letrekin emaniko ordena batean egin behar diren eragiketa matematikoen idazkera sinbolikoari *adierazpen analitiko* deritzo. Eragiketa matematikoak eragiketa elementalak (batuketa, kenketa, erroketa, etab.) ez ezik, ikastaro hau garatu ahala determinatuko direnak ere izango dira.

Ondokoak adierazpen analitikoen adibideak dira:

$$x^2-2;\quad \frac{\log x-\sin x}{5x^2+1};\quad 2^x-\sqrt{5+3x},\ \text{etab.}$$

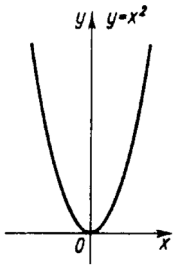
$y = f(x)$ mendekotasun funtzionalean f adierazpen analitikoa bada, x-ren y funtzioa analitikoki emanik dagoela esango dugu. Hurrengoak analitikoki emaniko funtzioen adibideak dira:

$$1)\ y=x^4-2;\quad 2)\ y=\frac{x+1}{x-1};\quad 3)\ y=\sqrt{1-x^2};$$

$$4)\ y=\sin x;\quad 5)\ Q=\pi R^2;\quad \text{etab.}$$

Hor, funtzioak formula bakar baten bidez adierazita daude analitikoki (bi adierazpen analitikoen arteko berdintzari formula deritzo). Kasu horietan definizio-eremu naturalaz hitz egin dezakegu.

Adierazpen analitikoak, edo berdintzaren bigarren atalak, ondo definituriko balio bat duen x-ren balioen multzoari, analitikoki definiturik dagoen *funtzioaren definizio-eremu natural* deritzo. Horrela, adibidez, $y = x^4 - 2$ funtzioaren definizio-eremu naturala $-\infty < x < +\infty$ tarte infinitua da, funtzioa x-ren balio guztietarako definituta baitago.



5. irudia.

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$ funtzioa, x-ren balio guztietarako definituta dago, izendatzailea anulatzen duen $x = 1$ baliorako izan ezik. $y = \sqrt{1-x^2}$ funtzioaren definizio-eremu naturala $-1 \le x \le 1$ tarte itxia da, etab.

Oharra. Batzuetan, funtzioaren definizio-eremu naturalaren parte bat besterik ez dugu kontuan hartuko. Horrela, zirkuluaren Q azalera, $Q = \pi R^2$ formularen bidez R erradioaren funtzio gisa adierazten da. Problema geometriko berezi hori aztertzean funtzio horren definizio-eremua $0 < R < +\infty$ tarte infinitua dela bistakoa da; ordea, funtzioaren definizio-eremu naturala $-\infty < R < +\infty$ tarte infinitua da.

$y = f(x)$ funtzioa analitikoki emanik dagoenean, grafikoki adieraz daiteke Oxy koordenatu-planoan. Horrela, adibidez, $y = x^2$ funtzioaren grafikoa 5. irudian agertzen den parabola da.

§ 8. FUNTZIO ELEMENTAL NAGUSIAK. FUNTZIO ELEMENTALAK

Analitikoki adierazten diren *funtzio elemental nagusiak* hurrengoak dira:

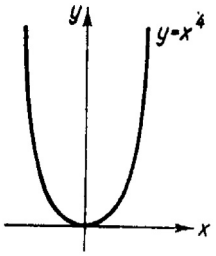
I. *Berreketa funtzioa:* $y = x^\alpha$, α zenbaki erreala delarik[1].
II. *Funtzio esponentziala:* $y = a^x$, a zenbaki positiboa eta 1en desberdina delarik ($a > 0$, $a \neq 1$).
III. *Funtzio logaritmikoa:* $y = \log_a x$ a oinarria zenbaki positiboa eta 1en desberdina delarik.
IV. *Funtzio trigonometrikoak*:
$$y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \tan x,\ \ y = \cot x,\ \ y = \sec x,\ \ y = \csc x.$$
V. *Alderantzizko funtzio trigonometrikoak*:
$$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = \arctan x,$$
$$y = \operatorname{arccot} x,\quad y = \operatorname{arcsec} x,\quad y = \operatorname{arccsc} x.$$

Definizio-eremuak emango ditugu eta funtzio elemental nagusien grafikoak eraikiko ditugu.

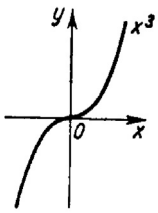
BERREKETA FUNTZIOA

1. α zenbaki oso positiboa da. Funtzioa $-\infty < x < +\infty$ tarte infinituan definituta dago. Kasu honetan, α balio desberdinei dagozkien funtzioen grafikoak 6. eta 7. irudietan adierazten dira.

1. α zenbaki irrazionala bada, funtzio hori logaritmoaren eta antilogaritmoaren bidez kalkulatzen da: $\log y = \alpha \log x$, $x > 0$ suposatuz.

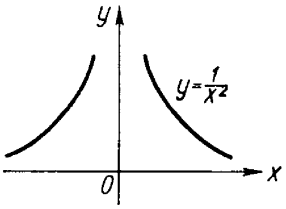


6. irudia.

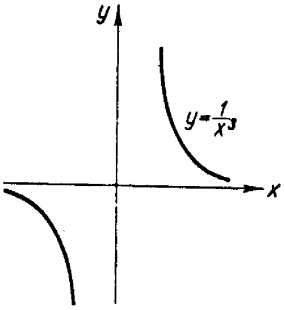


7. irudia.

2. α zenbaki oso negatiboa da. Kasu honetan, $x=0$ denean izan ezik, funtzioa x-ren balio guztietarako definituta dago. 8. eta 9. irudietan funtzio honen grafikoak adie-razten dira, α-ren balio desberdinetarako.

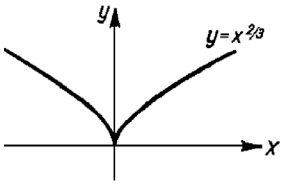


8. irudia.

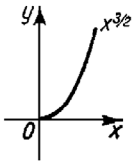


9. irudia.

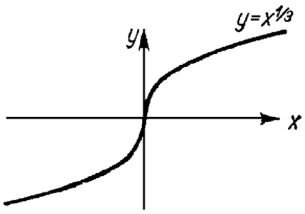
10., 11. eta 12. irudietan berreketa funtzioaren grafikoak adierazten dira α-ren balioak zenbaki arrazional frakzionarioak direnean.



10. irudia.



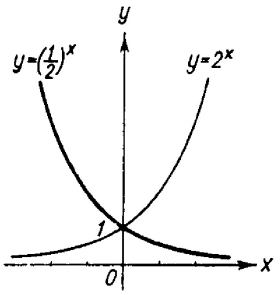
11. irudia.



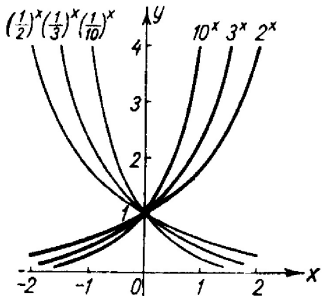
12. irudia.

FUNTZIO ESPONENTZIALA, $y=a^x$; $a>0$; $a\neq 1$

Funtzio hau x aldagaiaren balio guztietarako definituta dago. Bere grafikoa 13. eta 14. irudietan adierazten da.



13. irudia.



14. irudia.

FUNTZIO LOGARITMIKOA, $y = \log_a x$; $a > 0$; $a \neq 1$

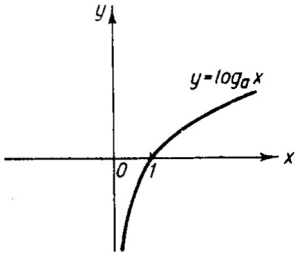
Funtzio hau $x > 0$ balioetarako definituta dago. Bere grafikoa 15. irudian azaltzen da.

FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

$y = \sin x$, etab. formuletan x aldagai independentea radianetan adierazten da. Aipaturiko funtzio trigonometriko guztiak periodikoak dira. Beren definizio orokorra hau da:

1. Definizioa. c zenbaki konstante bat existitzen bada, zein x aldagai independenteari batzean (edo kentzean) funtzioaren balioa aldatzen ez den, hots, $f(x + c) = f(x)$, $y = f(x)$ funtzioa *periodikoa* dela esango dugu. Zenbaki konstante horren balio minimoari funtzioaren *periodo* deituko diogu eta $2l$ izendatuko dugu hemendik aurrera.

Definizioaren arabera, $y = \sin x$ funtzioa periodikoa da, periodoa 2π delarik: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$. $y = \cos x$ funtzioaren periodoa ere 2π da. $y = \tan x$ eta $y = \cot x$ funtzioen periodoa π da.



15. irudia.

$y = \sin x$ eta $y = \cos x$ funtzioak x-ren balio guztietarako definiturik daude. $y = \tan x$ eta $y = \sec x$ funtzioak, $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (k = 0, 1, 2...) balioetan izan ezik, puntu guztietan daude definiturik; $y = \cot x$ eta $y = \operatorname{cosec} x$, $x = k\pi$ (k = 0, 1, 2...) balioetan izan ezik, x-ren balio guztietarako daude definituta.

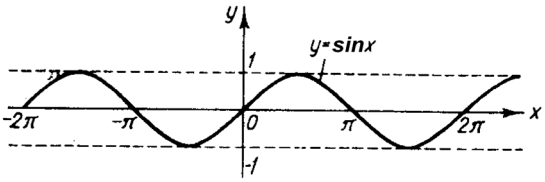
Funtzio trigonometrikoen grafikoak 16-19 irudietan azaltzen dira. Aurrerago, alderantzizko funtzio trigonometrikoak zehaztasunez aztertuko ditugu.

Sar dezagun orain «funtzioaren funtzio» kontzeptua. y aldagaia u-ren funtzioa bada eta u bera x aldagaiaren funtzioa bada, y aldagaia ere x-ren mendekoa da, $y = F(u)$ eta $u = \varphi(x)$ badira, y x-ren ondoko funtzioa izango da:

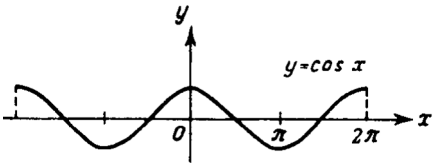
$$y = F[\varphi(x)].$$

Azken horri *funtzioaren funtzio* edo *funtzio konposatu* deritzo.

1. Adibidea. Izan bitez $y = \sin u$, $u = x^2$, $y = \sin(x^2)$ x-ren funtzio konposatua da.



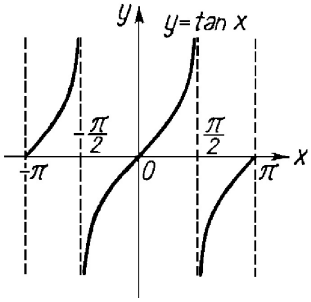
16. irudia.



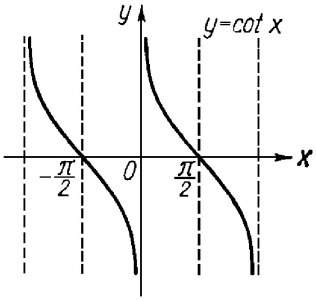
17. irudia.

1. Oharra. $y = F[\varphi(x)]$ funtzioaren definizio-eremua $u = \varphi(x)$ funtzioaren eremu osoa da, edo horren zati bat, non u-ren balioak ez diren ateratzen $F(u)$ funtzioaren definizio-eremutik.

2. Adibidea. $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\left(y = \sqrt{u},\ u = 1 - x^2\right)$ funtzioaren definizio-eremua $[-1,1]$ tarte itxia da, $|x| > 1$ denean, $u < 0$ baita eta, beraz, $\sqrt{u}$ funtzioa ez dagoelako definiturik (nahiz eta $u = 1 - x^2$ funtzioa x-ren balio guztietarako definituta egon). Funtzio honen grafikoa zentroa koordenatu-jatorrian duen bat erradioko zirkunferentziaren goi-erdia da.



18. irudia.



19. irudia.

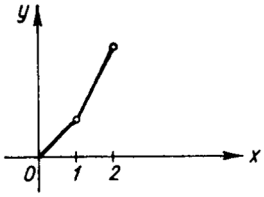
«Funtzioaren funtzio» eragiketa ez behin, baizik eta edozein aldi-kopurutan egin daiteke. Adibidez, $y = \ln\left[\sin(x^2+1)\right]$ funtzioa honako funtzioek definitzen dituzten ondoz ondoko eragiketak eginez lortzen da:

$$v = x^2 + 1, \quad u = \sin v, \quad y = \ln u.$$

Sar dezagun orain *funtzio elemental* delako kontzeptua.

2. Definizioa. $y = f(x)$ formula bakar baten bidez eman daitekeen funtzioari, non berdintzaren bigarren atala funtzio elemental nagusiz eta konstantez osaturik dagoen, batuketen, kenketen, biderketen, zatiketen eta funtzioaren funtzioen kopuru finituen bidez, *funtzio elemental* deritzo.

Definizio horretatik funtzio elementalak analitikoki definituriko funtzioen kasu berezia direla ondorioztatzen da.



20. irudia.

Honakoak funtzio elementalen adibideak dira:

$$y = \sqrt{1 + 4\sin^2 x}\,; \; y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\tan x}{10^x - x + 10}, \text{ etab.}$$

Funtzio ez-elementalen adibidea:

1. $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \left[y = f(n)\right]$ ez da funtzio elementala, y kalkulatzeko egin behar diren eragiketen kopurua n balioarekin batera handitzen baita, hots, eragiketen kopurua infinitua da.

2. Oharra. 20. irudian azaltzen den funtzioa elementala da, nahiz eta bi formularen bidez adierazita egon:

$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1$ denean;
$f(x) = 2x - 1, \quad 1 \le x \le 2$ denean.

Funtzio hori 2. definizioan aipatutako $y = f(x)$ formula bakarraren bidez adieraz daitekeela froga daiteke (ikus V. kapituluko 139-144 ariketak).

§ 9. FUNTZIO ALJEBRAIKOAK

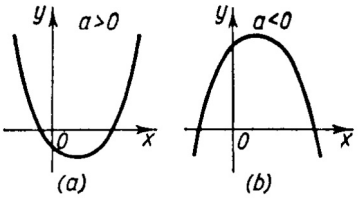
Hurrengo funtzio elementalei funtzio aljebraiko deritze:

I. FUNTZIO ARRAZIONAL OSOA EDO POLINOMIOA

$$y = a_0x^n + a_1x^n + \ldots + a_n,$$

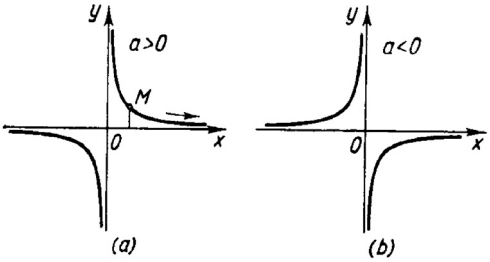
non $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koefiziente deituriko zenbaki konstanteak diren, n zenbaki oso eta positiboa polinomioaren maila delarik. Bistakoa denez, aipaturiko funtzio hori x-ren balio guztietarako definituta dago, hots, tarte infinitu batean.

Adibideak. 1. $y = ax + b$ *funtzio lineala* da. $b = 0$ denean, $y = ax$ funtzio linealak y eta x aldagaien arteko mendekotasun proportzionala adierazten du, $a = 0$ eta $y = b$ badira, funtzioa konstante da.



21. irudia.

2. $y = ax^2 + bx + c$ funtzio koadratikoa da. Funtzio koadratikoaren grafikoa parabola bat da (21. irudia). Funtzio hauek geometria analitikoaren ikasgaian aztertu dira zehaztasunez.



22. irudia.

II. FUNTZIO ARRAZIONAL FRAKZIONARIOA. Funtzio hau polinomio biren arteko zatiketaren bidez adierazten da:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Funtzio arrazional frakzionarioen adibide gisa, mendekotasun alderantziz proportzionala adierazten duen $y = \frac{a}{x}$ funtzioa eman dezakegu. Bere grafikoa 22. irudian azaltzen da. Bistakoa denez, izendatzailea anulatzen duten balioetarako izan ezik, funtzio arrazional frakzionarioa x-ren balio guztietarako definituta dago.

III. FUNTZIO IRRAZIONALA. $y = f(x)$ berdintzaren bigarren atalean batuketak, kenketak, biderketak, zatiketak eta berreketak egiten badira, berretzaileak zenbaki arrazional ez-osoak izanik, $y = f(x)$ funtzioari *funtzio irrazional* deritzo. Hurrengo funtzioak irrazionalak dira:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}, \quad y = \sqrt{x}, \quad \text{etab.}$$

1. Oharra. Funtzio aljebraiko guztiak ez dira kokatzen aipaturiko funtzioen hiru mota horietan. $y = f(x)$ funtzioak

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0 \qquad (1)$$

motako ekuazio bat betetzen duenean, $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ x-ren polinomioak direlarik, funtzio horri *funtzio aljebraiko* deritzo.

Froga daitekeenez, aipaturiko hiru motetako funtzioek (1) moduko ekuazio bat betetzen dute; ostera, ekuazioa betetzen duten funtzio guztiak ez dira izango hiru mota horietakoak.

2. Oharra. Aljebraikoa ez den funtzioari *transzendente* deritzo. Hurrengoak funtzio transzendenteak dira:

$$y = \cos x; \quad y = 10^x; \quad \text{etab.}$$

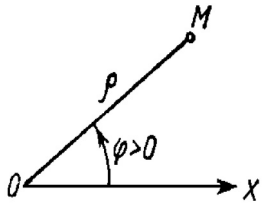
§ 10. KOORDENATU POLARREN SISTEMA

Planoko puntuen posizioa *koordenatu polar*ren sistemaren bidez adieraz daiteke.

Aukera ditzagun planoan *poloa* delako O puntu bat eta O puntuan jatorria duen *ardatz polar* izeneko zuzenerdi bat. M puntu batek planoan duen posizioa ρ eta φ bi zenbakien bidez adierazten da. Lehenengoak M puntutik polorainoko distantzia ematen du eta bigarrenak OM segmentuak ardatz polarrarekin osatzen duen angelua adierazten du. φ angeluaren noranzko positibotzat erloju-orratzen kontrakoa hartuko dugu. ρ eta φ zenbakiei M puntuaren *koordenatu polar* deritze (23. irudia).

ρ erradio bektorea ez-negatibotzat hartzen da beti. φ angelu polarraren balioa $0 \leq \varphi < 2\pi$ mugen artean aldatzen bada, poloa ez den planoko edozein punturi

ondo definituriko ρ eta φ balioen bikote bat dagokio. Poloan, $\rho = 0$ da eta φ-k edozein balio har dezake.



23. irudia.

Kalkula dezagun koordenatu polarren eta koordenatu kartesiar edo angeluzuzenen artean dagoen erlazioa. Jo dezagun koordenatu angeluzuzenen jatorria eta poloa puntu berbera direla eta Ox ardatzaren noranzko positiboa ardatz polarrarena dela. Ikus dezagun zer erlazio dagoen puntu baten koordenatu kartesiarren eta polarren artean.

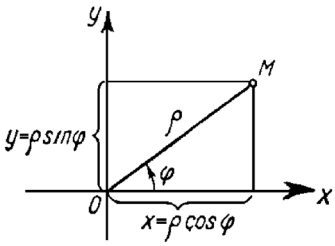
24. iruditik ondokoa ondorioztatzen da:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

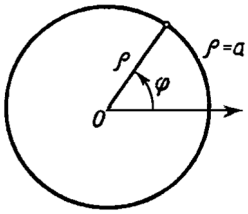
eta alderantziz

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Oharra. φ finkatzeko, puntua dagoen koadrantea kontuan izan beharko dugu, eta φ-ren balio zuzena aukeratu. Koordenatu polarren sisteman $\rho = F(\varphi)$ ekuazioak lerro bat adierazten du.



24. irudia.



25. irudia.

1. Adibidea. Koordenatu polarretan, $\rho = a$ ekuazioak, a konstantea denean, poloan zentroa duen a erradioko zirkunferentzia ematen du. Zirkunferentzia horren ekuazioa koordenatu angeluzuzenetan honako hau izango da (25. irudia):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a, \quad \text{edo} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

2. Adibidea. $\rho = a\,\varphi$, non a=kte. baita.

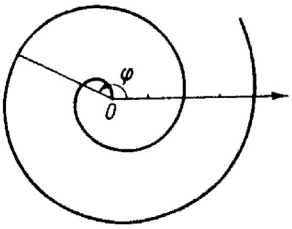
Koka ditzagun taula batean φ-ren araberako ρ-ren balio batzuk:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0{,}78a$	$\approx 1{,}57a$	$\approx 2{,}36a$	$\approx 3{,}14a$	$\approx 4{,}71a$	$\approx 6{,}28a$	$\approx 9{,}42a$	$\approx 12{,}56a$

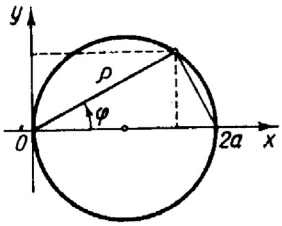
Funtzio horri dagokion kurba 26. irudian adierazten da eta *Arkimedes-en kiribil* deritzo.

3. Adibidea. $\rho = 2a\cos\varphi$.

Aurreko hori, $\rho_0 = a$ eta $\varphi = 0$ puntuan zentroa duen a erradioko zirkunferentziaren ekuazioa da (27. irudia). Idatz dezagun zirkunferentzia horren ekuazioa koordenatu angeluzuzenetan.



26. irudia.



27. irudia.

Ekuazio horretan $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ balioak ordezkatuz,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lortzen dugu, hots,

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

ARIKETAK

1. $f(x) = x^2 + 6x - 4$ funtzioa emanik, egiaztatu $f(1) = 3$ eta $f(2) = 23$ betetzen direla.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Kalkulatu ondoko balioak:

a) $f(4)$. Emaitza: 17.

b) $f\left(\sqrt{2}\right)$. Em.: 3.

c) $f(a+1)$. Em.: $a^2 + 2a + 2$.

d) $f(a) + 1$. Em.: $a^2 + 2$.

e) $f(a^2)$. Em.: a^4+1. f) $[f(a)]^2$. Em.: a^4+2a^2+1.

g) $f(2a)$. Em.: $4a^2+1$.

3. $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{3x+5}$. Aurkitu ondoko adierazpenak: $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ eta $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

Em.: $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-x}{3+5x}$; $\dfrac{1}{\varphi(x)}=\dfrac{3x+5}{x-1}$.

4. $\psi(x)=\sqrt{x^2+4}$. Aurkitu $\psi(2x)$ eta $\psi(0)$ adierazpenak.

Em.: $\psi(2x)=2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0)=2$.

5. $f(\theta)=\tan\theta$. Egiaztatu hurrengo berdintza: $f(2\theta)=\dfrac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$. Egiaztatu $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ berdintza.

7. $f(x)=\log x$; $\varphi(x)=x^3$. Aurkitu hurrengo adierazpenak:

a) $f[\varphi(2)]$. Em.: $3\log 2$. b) $f[\varphi(a)]$. Em.: $3\log a$.

c) $\varphi[f(a)]$. Em.: $[\log a]^3$.

8. Adierazi $y=2x^2+1$ funtzioaren definizio-eremu naturala. Em.: $-\infty<x<+\infty$.

9. Adierazi hurrengo funtzioen definizio-eremu naturalak:

a) $\sqrt{1-x^2}$. Em.: $-1\le x\le +1$.

b) $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. Em.: $-3\le x\le 7$.

c) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b}$. Em.: $-\infty<x<+\infty$.

d) $\dfrac{a+x}{a-x}$. Em.: $x\neq a$.

e) $\arcsin^2 x$. Em.: $-1\le x\le 1$.

f) $y=\log x$. Em.: $x>0$.

g) $y=a^x$ $(a>0)$. Em.: $-\infty<x<+\infty$.

Egin ondoko funtzioen grafikoak:

10. $y=-3x+5$. 11. $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$. 12. $y=3-2x^2$.

13. $y = x^2 + 2x - 1$.

14. $y = \dfrac{1}{x-1}$.

15. $y = \sin 2x$.

16. $y = \cos 3x$.

17. $y = x^2 - 4x + 6$.

18. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

19. $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

20. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

21. $y = \tan\dfrac{1}{2}x$.

22. $y = \cot\dfrac{1}{4}x$.

23. $y = 3^x$.

24. $y = 2^{-x^2}$.

25. $y = \mathrm{lb}\dfrac{1}{x}$.

26. $y = x^3 + 1$.

27. $y = 4 - x^3$.

28. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

29. $y = x^4$.

30. $y = x^5$.

31. $y = x^{\frac{1}{2}}$.

32. $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

33. $y = x^{\frac{1}{3}}$.

34. $y = |x|$.

35. $y = \mathrm{lb}\,|x|$.

36. $y = \mathrm{lb}\,(1 - x)$.

37. $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

38. $y = 4\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

39. $f(x)$ funtzioa honela dago definiturik [-1,1] tartean:
$f(x) = 1 + x, \quad -1 \le x < 0$ denean;
$f(x) = 1 - 2x, \quad 0 \le x \le 1$ denean.

40. $f(x)$ funtzioa honela dago definiturik [0,2] tartean:
$f(x) = x^3, \quad 0 \le x < 1$ denean;
$f(x) = x, \quad 1 \le x \le 2$ denean.

Eraiki koordenatu polarren bidez emaniko ondoko kurbak:

41. $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (kiribil hiperbolikoa).

42. $\rho = a^{\varphi}$ (kiribil logaritmikoa).

43. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniskata).

44. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (kardioidea).

45. $\rho = a \sin 3\varphi$.