

Algebra: teoria eta ariketak

Mathematica programaren aplikazioa

Elisabete Alberdi Celaya
Aitziber Unzueta Inchaurre
Isabel Eguia Ribero



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



© Udako Euskal Unibertsitatea

© Elisabete Alberdi Celaya, Aitziber Unzueta Inchaurre, Isabel Eguia Ribero

ISBN: 978-84-8438473-1

Lege-gordailua: BI-1524-2013

Inprimategia: PRINTHAUS S.L., Bilbo

Azalaren diseinua: Igor Markaida

Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1. D BILBO telf. 946790546 Faxe. 946421021

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.org

www.ueu.org

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Aurkibidea

1. MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK.....	7
1.1. Matrizeak	7
1.1.1. Matrize kontzeptua eta matrize motak.....	7
1.2. Eragiketak matrizeekin	8
1.2.1. Matrizeen arteko batuketa.....	8
1.2.2. Eskalar baten eta matrize baten arteko biderketa.....	9
1.2.3. Matrizeen arteko biderketa	9
1.3. Matrize baten determinante.....	10
1.3.1. Bi eta hiru ordenako determinanteak.....	10
1.3.2. Edozein ordenatako determinanteak.....	10
1.3.2.1. n dimentsioko determinante baten kalkulua	
adjuntuak erabilia	11
1.3.3. Determinanteen propietateak	11
1.3.4. Edozein ordenatako determinanteak kalkulatzeko beste	
era batzuk.....	12
1.3.4.1. Chio-ren metodoa.....	12
1.3.4.2. Matrize baten mailaketa	13
1.4. Matrize baten iraulia	13
1.5. Matrize baten alderantzizkoa	14
1.5.1. Alderantzizko matrizearen kalkulua adjuntuak erabiliz	14
1.5.2. Alderantzizko matrizearen kalkulua Gauss-en	
metodoa erabiliz.....	14
1.6. Matrize baten heina.....	15
1.7. Matrize baten berreturak	16
Ebatzitako ariketak	17
Ebatzitako galderak	28
Mathematica erabiliz ebatzitako ariketak	32

2. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK.....	49
2.1. Sarrera	49
2.2. Rouché-Fröbenius-en teorema	50
2.3. Cramer-en erregela.....	50
2.4. Ekuazio linealetako sistemen baliokidetzak	51
2.5. Gauss-en metodoa.....	51
2.6. Ekuazio linealetako sistemak ebazteko metodo orokorra	53
Ebatzitako ariketak	55
Ebatzitako galderak	73
Mathematica erabiliz ebazitako ariketak	76
 3. ESPAZIO BEKTORIALAK.....	 93
3.1. Konposaketa-legeak	93
3.2. Barne-konposaketa legeen propietateak	93
3.3. Kanpo-konposaketa legeen propietateak	94
3.4. Taldea	94
3.5. Eraztuna	95
3.6. Zeroren zatitzaileak. Integrazio-domeinuak	95
3.7. Gorputza.....	95
3.8. Espazio bektoriala.....	96
3.8.1. Espazio bektorialen propietateak	97
3.9. Azpiespazio bektoriala.....	97
3.10. Konbinazio linealak. Sistema sortzailea	98
3.10.1. Konbinazio lineala.....	98
3.10.2. Sistema sortzailea	99
3.11. Dependentsia eta independentzia lineala	99
3.12. Espazio bektorial bateko oinarria. Dimentsioa	100
3.12.1. Espazio bektorial bateko oinarria	100
3.12.2. Espazio bektorial baten dimentsioa.....	101
3.12.3. Azpiespazio bektorial baten ekuazio parametrikokoak.....	101
3.12.4. Azpiespazio bektorial baten ekuazio implizituak.....	102
3.13. Osatu gabeko oinarriaren teorema	102
3.14. Azpiespazio bektorialen arteko eragiketak	102
3.14.1. Azpiespazio bektorialen arteko ebakidura	102
3.14.2. Azpiespazio bektorialen arteko batuketa.....	103
3.14.3. Azpiespazio bektorialen arteko batuketa zuzena.....	103
3.14.4. Azpiespazio osagarriak.....	103
3.15. Oinarri-aldaketa matrizea.....	103

Ebatzitako ariketak	105
Ebatzitako galderak	125
Mathematica erabiliz ebatzitako ariketak	128
4. APLIKAZIO LINEALAK	145
4.1. Aplikazio linealak eta propietateak	145
4.2. Aplikazio linealen sailkapena	145
4.3. Aplikazio linealen propietateak	146
4.4. Aplikazio lineal baten irudia	147
4.5. Aplikazio lineal baten matrizea	147
4.5.1. Aplikazio lineal baten heina	148
4.6. Aplikazio lineal baten nukleoa	148
4.7. Aplikazio linealen ezaugarritzea	149
4.8. Aplikazio linealen batuketa	149
4.9. Aplikazio lineal baten eta eskalar baten arteko biderketa	150
4.10. Aplikazio linealen konposaketa	151
Ebatzitako ariketak	152
Ebatzitako galderak	168
Mathematica erabiliz ebatzitako ariketak	172
5. DIAGONALIZAZIOA	187
5.1. Bektore propioak eta balio propioak	187
5.2. Bektore propioen propietateak	187
5.3. Polinomio karakteristikoa eta anizkoiztasunak	188
5.4. Endomorfismo diagonalizagarriak	189
5.5. Endomorfismo simetrikoak	191
5.6. Endomorfismo simetrikoen diagonalizazioa	191
5.7. Jordan-en forma kanonikoa	192
5.7.1. Jordan-en forma kanonikoaren eraketa	192
5.7.2. Jordan-en forma kanonikoa lortzeko algoritmoko pausoak	193
Ebatzitako ariketak	197
Ebatzitako galderak	232
Mathematica erabiliz ebatzitako ariketak	236
6. ESPAZIO BEKTORIAL EUKLIDEARRA	263
6.1. Biderketa eskalarra	263
6.2. Espazio bektorial euklidearretako oinarrizko berdintzak	263
6.3. Biderketa eskalarraren adierazpen matriziala	264
6.4. Biderketa eskalarrak induzitutako norma	265
6.5. Ortogonalitatea eta ortonormalitatea	266
6.6. Gram-Schmidt-en metodoa	267

6.7. Azpiespazio bektorial ortogonalak	268
Ebatzitako ariketak	270
Ebatzitako galderak	283
Mathematica erabiliz ebatzitako ariketak	287

BIBLIOGRAFIA.....	297
--------------------------	------------

1 MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK

1.1 Matrizeak

1.1.1 Matrize kontzeptua eta matrize motak

Definizioa. A matrizea ($n \times p$) ordenako edo dimentsioko matrize bat da, n errenkada eta p zutabetan ($n \cdot p$) elementu baditu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notazio laburragoa erabiliz, A matrizea era honetan idatz daiteke:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n \times p}$$

Definizioa. Matrize bateko diagonal nagusia $a_{ii} \quad \forall i = 1, 2, \dots, \max(n, p)$ elementuez osatutako multzoa da.

Matrize motak: Zenbait matrize berezi aurkeztuko ditugu:

- Errenkada matrizea: errenkada bakarreko matrizea da: $n = 1$.
- Zutabe matrizea: zutabe bakarreko matrizea da: $p = 1$.
- Matrize karratua: errenkada eta zutabe kopuru bera duen matrizea da: $n = p$. Matrize karratuen multzoa $M_{n \times n}$ edo M_n notazioa erabilia adierazten da.
- Matrize errektangeluarra: errenkada eta zutabe kopuru ezberdineko matrizea da: $n \neq p$.
- Matrize nulua edo zero matrizea: elementu guztiak nuluak dituen matrizea da. Honela, $a_{ij} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$. $n \times p$ dimentsioko zero matrizea $0_{n \times p}$ edo 0 idazten da.
- Aurkako matrizea: $A = (a_{ij}) \in M_{n \times p}$ matrizea emanik, $B = (b_{ij})$ matrizea bere aurkako matrizea da, ondorengo berdintza betetzen badu: $B = -A$, edo gauza bera dena: $b_{ij} = -a_{ij} \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$.

- Matrizen goi-triangeluarra: $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratua goi-triangeluarra da, A matrizearen diagonal nagusiaren azpian kokatutako elementu guztiak zero direnean: $a_{ij} = 0, \forall i > j$.
- Matrizen behe-triangeluarra: $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratua behe-triangeluarra da, A matrizearen diagonal nagusiaren gainean kokatutako elementu guztiak zero direnean: $a_{ij} = 0, \forall i < j$.
- Matrizen diagonal: $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratua diagonal da, diagonal nagusitik kanpo dauden elementu guztiak nulua direnean: $a_{ij} = 0, i \neq j$.
- Identitate matrizea: $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize diagonal identitate matrizea da, diagonal nagusiko elementuak 1-ak direnean. n dimentsioko identitate matrizea I_n izendatuko dugu.

1.2 Eragiketako matrizeekin

1.2.1 Matrizeen arteko batuketak

$A, B \in M_{n \times p}$ matrizeak emanik, beraien batuketa honela definitzen da:

$$C = A + B = (c_{ij}) \in M_{n \times p}, \text{ non: } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$$

Matrizeen arteko batuketaren propietateak:

$A, B, C \in M_{n \times p}$ matrizeak emanik, matrizeen batuketak honako propietate hauek betetzen ditu:

- Elkartze-propietatea: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elementu neutroaren existentzia: batuketarekiko elementu neutroa matrize nulua da, $A + 0 = 0 + A = A$, 0 matrizea A matrizearen dimentsio bereko matrizea izanik.
- Elementu simetrikoaren existentzia: batuketarekiko elementu simetrikoa aurkako matrizea da: $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- Trukatze-propietatea: $A + B = B + A$

1.2.2 Eskalar baten eta matrize baten arteko biderketa

$A \in M_{n \times p}$ eta $k \in \mathbb{R}$ eskalarra emanik, beraien arteko biderketa honela definitzen da:

$$C = k \cdot A = (c_{ij}) \in M_{n \times p}, \text{ non: } c_{ij} = k \cdot a_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$$

Eskalar baten eta matrize baten arteko biderketaren propietateak:

$A, B \in M_{n \times p}$ matrizeak eta $k, m \in \mathbb{R}$ eskalarrak emanik, eskalar baten eta matrize baten arteko biderketak honako propietate hauek betetzen ditu:

- Matrizeen batuketarekiko banatze-propietatea: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- Eskalarren batuketarekiko banatze-propietatea: $(k + m) \cdot A = k \cdot A + m \cdot A$
- Elkartze-propietatea: $(k \cdot m) \cdot A = k \cdot (m \cdot A)$
- Elementu neutroaren existentzia: $1 \cdot A = A$

1.2.3 Matrizeen arteko biderketa

Bi matrize, A eta B , biderkatu ahal izateko lehenengo matrizearen zutabe kopuruak eta bigarrenaren errenkada kopuruak berdinak izan behar dute. Hau da, $A \cdot B$ biderketa egiteko, $A \in M_{n \times p}$, $B \in M_{p \times q}$ izan behar dute. Biderkadura matrizeak, C -k, A matrizeak adina errenkada eta B matrizeak adina zutabe izango ditu:

$$C = A \cdot B = (c_{ij}) \in M_{n \times q}, \text{ non: } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, q$$

Matrizeen arteko biderketaren propietateak:

Dimentsio egokiko A, B eta C hiru matrize emanik, matrizeen biderketak honako propietate hauek betetzen ditu:

- Elkartze-propietatea: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Batuketarekiko banatze-propietatea:
 - o $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
 - o $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

- Elementu neutroaren existentzia: matrizeen arteko biderketarekiko elementu neutroa identitate matrizea da: $A \cdot I = I \cdot A = A$, A matrize karratua izanik eta I matrizea A matrizearen dimentsio bereko identitate matrizea izanik.

Oharrak:

- Orohar, matrizeen biderketak ez du trukatzeko-propietatea betetzen: $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- Aurrerago ikusiko dugun moduan, kasu batzuetan bakarrik existitzen da matrize baten biderketarekiko elementu simetrikoa. A matrizearen elementu simetrikoa ondorengo berdintza betetzen duen B matrizea izango da: $A \cdot B = B \cdot A = I$.

1.3 Matrize baten determinantea

$A \in M_n$ matrize karratua emanik, eskalar bat dagokio. Eskalar horri determinante deritzo eta era honetan adierazten da:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.3.1 Bi eta hiru ordenako determinanteak

- Bi ordenako matrize baten determinantea honela kalkulatzen da:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Hiru ordenako matrize baten determinantea Sarrus-en erregela izeneko metodoa aplikatuz kalkulatzen da:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

1.3.2 Edozein ordenatako determinanteak

Lau edo ordena altuagoko matrize baten determinantea kalkulatzeko, ondorengo kontzeptuak definitu beharra dago:

Definizioa. $A \in M_n$ matrize karratua emanik, a_{ij} elementuaren minor osagarria a_{ij} izendatuko dugu eta A matrizean i . errenkada eta j . zutabea kenduz lortzen den azpimatrizaren determinantea da.

Definizioa. $A \in M_n$ matrize karratua emanik, a_{ij} elementuaren adjuntua A_{ij} izendatuko dugu eta era honetan kalkulatzen da: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$.

1.3.2.1 n dimentsioko determinante baten kalkulua adjuntuak erabilita

n dimentsioko determinante baten garapena edozein errenkada (edo edozein zutabe) erabiliz egin daiteke. Determinantearen balioa errenkada (edo zutabe) horretako elementuak beren adjuntuekin biderkatuz eta ondoren guztiak batuz kalkulatzen da.

- Determinantea garatzeko i . errenkada aukeratuz: $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$.
- Determinantea garatzeko j . zutabea aukeratuz: $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$.

1.3.3 Determinanteen propietateak

- 1 Matrize bateko bi errenkada edo bi zutabe elkartrukatzean, haren determinantearen balioa zeinuz aldatzen da.
- 2 Matrize bateko errenkada bat (edo zutabe bat) eskalar batez biderkatzean, determinantearen balioa ere eskalar horretaz biderkatzen da.
- 3 Matrize bateko errenkada bat (edo zutabe bat) beste errenkada (edo zutabe) batzuen konbinazio lineala* bada, determinanteak zero balio du. Horrela, matrize bateko errenkadak linealki independenteak** dira, baldin eta soilik baldin, zutabeak linealki independenteak badira.

***Definizioa.** Izan bitez $E_1, E_2, \dots, E_n$ A matrize bateko n errenkadak. E_i errenkada beste errenkaden konbinazio lineala izango da, $(n-1)$ zenbaki erreal existitzen badira $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non hurrengoa betetzen den:

$$E_i = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_{i-1} E_{i-1} + \alpha_{i+1} E_{i+1} + \dots + \alpha_n E_n$$

Zutabeen konbinazio linealaren definizioa era antzekoan eman daiteke. Horrela, A matrize bateko Z_j zutabea gainerako zutabeen konbinazio lineala da, $(n-1)$ zenbaki erreal existitzen badira $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ non:

$$Z_j = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \dots + \beta_{j-1} Z_{j-1} + \beta_{j+1} Z_{j+1} + \dots + \beta_n Z_n$$

****Definizioa.** Errenkada bat (edo zutabe bat) beste errenkada batzuen (edo beste zutabe batzuen) konbinazio lineala denean, errenkadak (edo zutabeak) linealki independenteak direla esaten da. Bestela, linealki independenteak direla esaten da.

- 4 Matrizen bateko errenkada bat (edo zutabe bat) zenbait elementuren batura bada, determinantea zenbait determinanteren batura da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{ij} + c_{ij} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 5 Matrizen baten errenkada bati (edo zutabe bati), beste errenkada (edo zutabe) batzuen konbinazio lineala gehitzen bazaio, determinantearen balioa ez da aldatzen.
- 6 Matrizen triangeluarren edo diagonalen determinantea diagonal nagusiko elementuen biderkadura da.
- 7 $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

1.3.4 Edozein ordenatako determinanteak kalkulatzeko beste era batzuk

Adjuntuak erabilita matrizen baten determinantea lortzeko eman ditugun formula biek, $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$ edo $|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$, lan asko eskatzen dute garapena egiteko, aukeratu dugun errenkada edo zutabeko elementu gehienak nuluak ez direnean. Hala ere, aukeratutako errenkada edo zutabeko hainbat elementu nuluak direnean, formula horiek erabiliz era eraginkor batean lortzen da emaitza. Jarraian determinanteak garatzeko beste bi metodo ikusiko ditugu.

1.3.4.1 Chio-ren metodoa

Metodo hau honetan datza: determinantean nulua ez den elementu bat aukeratu eta elementu hori dagoen errenkadako edo zutabeko gainerako elementuak zero bihurtzean. Elementu ez-nulu horri *pibote* deritzo. Demagun pibote hori a_{11} elementua dela eta helburua lehenengo errenkadako gainerako posizioetan zeroak lortzea dela. Horretarako, 2. zutabeari lehenengo zutabea $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ eskalarraz biderkatuta gehitzen zaio, 3. zutabeari lehenengo $-\frac{a_{13}}{a_{11}}$ eskalarraz

biderkatuta gehitzen zaio eta, horrela, azken zutabeari lehenengoa $\frac{-a_{1n}}{a_{11}}$ eskalarraz biderkatuta gehitu arte. Horrela, a_{11} elementua izan ezik, lehenengo errenkadako beste elementu guztiak zero izatea lortzen da. Ondoren, adjuntuak erabilia determinantea lehenengo errenkadatik garatzen da adjuntu bakarra kalkulatu, a_{11} elementuari dagokiona, hain zuzen.

1.3.4.2 Matrize baten mailaketa

Metodo hau hasierako matrizea triangeluar bihurtzean datza determinanteen bosgarren propietatea erabiliz. Behin matrize triangeluarra lortu dugunean, haren determinantea diagonal nagusiko elementuen biderketa izango da.

1.4 Matrize baten iraulia

$A = (a_{ij}) \in M_{n \times p}$ matrizea emanik, haren iraulia $A^t = (b_{ij}) \in M_{p \times n}$ idatziko dugu eta A matrizeko errenkadak eta zutabeak ordena aldatu barik elkartrukatu lortzen den matrizea da. Hau da, A matrizeko 1. errenkada A^t matrizeko 1. zutabe bihurtzen da, 2. errenkada 2. zutabe, etab.:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = 1, 2, \dots, p, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Matrize iraulien propietateak:

- $(A^t)^t = A$
- $(kA)^t = kA^t$, non $k \in \mathbb{R}$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $|A| = |A^t|$

Definizioa. $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratua simetrikoa da, ondorengo berdintza betetzen badu: $A = A^t$, edo gauza bera dena: $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n$.

Definizioa. $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratua antisimetrikoa da, ondorengo berdintza betetzen badu: $A = -A^t$, edo gauza bera dena: $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n$.

1.5 Matrizen baten alderantzizkoa

Definizioa. A matrize karratua erregularra da, haren alderantzizko matrizea existitzen bada, alegia, biderketarekiko simetrikoa existitzen bada. Hau da, $A \cdot B = B \cdot A = I$ berdintza betetzen duen B matrize karratu bat existitzen bada. Orduan, B matrizea A matrizearen alderantzizkoa da eta $B = A^{-1}$ adierazten da. Kontrakoa gertatzen denean, A matrizea singularra da.

Matrize bat erregularra izateko beharrezkoa eta nahikoa da haren determinantea nulua ez izatea:

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ matrize erregularra}$$

Propietateak:

- Alderantzizko matrizea existitzen denean, bakarra da.

$$-(A^{-1})^{-1} = A$$

$$-(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$-(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$$-|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Definizioa. $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrize karratua ortogonala da, haren alderantzizkoa eta iraulia berdinak direnean, hau da: $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$ berdintza betetzen denean, eta, beraz, $A^{-1} = A^t$ gertatzen denean.

1.5.1 Alderantzizko matrizearen kalkulua adjuntuak erabiliz

Matrize baten alderantzizkoa honako formula honen bidez kalkula daiteke:

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|}$$

$$A^d = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ matrize adjuntua izanik.}$$

1.5.2 Alderantzizko matrizearen kalkulua Gauss-en metodoa erabiliz

Gauss-en metodoa aplikatzeko $(A|I)$ matrize hedatua sortzen da, I matrizea A matrizearen dimentsio bereko identitate matrizea izanik. Ondoren, errenkadak erabiliz eragiketak egiten dira,

matrize hedatuaren ezker aldean I matrizea lortu arte. Hori lortutakoan, matrize hedatuaren eskuin aldean agertzen den matrizea A matrizearen alderantzizkoa da, A^{-1} :

$$(A|I) \xrightarrow[\text{eragiketak}]{\text{errenkadekin}} (I|A^{-1})$$

Matrize hedatuko errenkadekin egin daitezkeen eragiketak hauek dira:

- Bi errenkada elkartrukatu.
- Errenkada osoa eskalar ez-nulu batez biderkatu.
- Errenkada bati beste errenkada bat eskalar batez biderkatuta batu.

1.6 Matrize baten heina

Definizioa. $A \in M_{n \times p}$ matrizea emanik, matrize horretako m errenkada eta m zutabeko elementuek A matrizearen azpimatriz bat osatzen dute. Izan bedi B era horretan sortu den matrizea, orduan, B azpimatrizarearen determinantea m ordenako A matrizearen minor bat da.

Teorema. A matrizeak k ordenako minor ez-nulu bat badauka, minorra osatzen duten k errenkadak linealki independenteak dira. Era berean, minorra osatzen duten k zutabeak ere linealki independenteak dira.

Definizioa. $A \in M_{n \times p}$ matrizearen heina nuluak ez diren minorren artean ordenarik handieneko minorraren ordena da eta $h(A)$ edo $heina(A)$ notazioa erabiltza adierazten da.

Matrize baten heinaren propietateak: $A \in M_{n \times p}$ matrizea emanik, zera betetzen du:

- A matrizean i zutabe (edo i errenkada) linealki independenteak dira, baldin eta soilik baldin beraien elementuekin i ordenako minor ez-nulu bat osa badaiteke.
- Matrize baten heina ez da aldatzen, zutabe bat (edo errenkada bat) nulua ez den eskalar batez biderkatzean.
- Matrize baten heina ez da aldatzen, zutabe bati (edo errenkada bati) beste zutabeen konbinazio lineal bat (edo beste errenkaden konbinazio lineal bat) batzean.
- Matrize baten heina ez da aldatzen, matritzetik beste zutabe batzuen (edo beste errenkada batzuen) konbinazio lineala den zutabe bat (edo errenkada bat) kentzen denean.

1.7 Matrize baten berreturak

$A \in M_n$ matrize karratua emanik, haren k . berretura A matrizea k aldiz biderkatuz kalkulatzen da, $k \in \mathbb{N}$ izanik:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ aldiz}}$$

Propietateak:

- $\forall k, m \in \mathbb{N}, A^k \cdot A^m = A^{k+m}$
- $\forall k, m \in \mathbb{N}, (A^k)^m = A^{k \cdot m}$
- A matrizea erregularra bada, orduan: $\forall k \in \mathbb{N}, A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$

EBATZITAKO ARIKETAK

P1. Kalkulatu A matrize simetrikoa, $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ matrizearekin batzean

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ matrizea ematen duena.}$$

EBAZPENA

Kontsidera dezagun A matrize orokor simetrikoa, hau da, $A = A^t$ betetzen duena. Beraz, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, P matrizearekin batu ahal izateko 3×3 ordenakoa izan behar duena. Bi matrizeen batuketa planteatzen dugu:

$$A + P = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Elementuz elementu batuketak eginez eta berdinduz zera daukagu:

$$\begin{cases} a_{11} + 3 = 5 \\ a_{12} - 1 = -2 \\ a_{13} + 0 = 4 \\ a_{12} - 4 = -5 \\ a_{22} + 1 = 2 \\ a_{23} + 2 = 7 \\ a_{13} + 2 = 6 \\ a_{23} + 0 = 5 \\ a_{33} + 5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{12} = -1 \\ a_{13} = 4 \\ a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \\ a_{23} = 5 \\ a_{13} = 4 \\ a_{23} = 5 \\ a_{33} = 3 \end{cases}$$

Ondorioz, bila gabiltzan matrizea hau da: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

P2. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearekin trukutzen diren matrize erreal guztiak.

EBAZPENA

Bila gabiltzan B matrizea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ motakoa izango da eta $A \cdot B = B \cdot A$ bete behar duenez:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 2a - b \\ 2b + d = a + 2b \\ -a + 2c = 2c - d \\ -b + 2d = c + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases} \quad \forall d, c \in \mathbb{R}$$

Beraz, A matrizearekin trukatzan diren infinitu matrize existitzen dira eta beraien forma orokorra ondokoa da: $\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \forall d, c \in \mathbb{R}$.

P3. Kalkulatu p parametroaren balioa $A = \begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix}$ matrize simetrikoa ortogonal izan dadin.

EBAZPENA

A matrize simetrikoa ortogonal izango da, honakoa betetzen badu: $A \cdot A^t = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$.

Orduan:

$$\begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2p^2 & 0 \\ 0 & 2p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

p parametroaren bi balio lortu direnez, mota horretako bi matrize ortogonal existitzen dira:

$$\begin{aligned} - \quad p = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ denean: } A_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \\ - \quad p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ denean: } A_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A_1 eta A_2 matrizeak ortogonolak direla frogatu daiteke, $A^t = A^{-1}$ berdintza betetzen baitute:

$$A_1^t = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad A_2^t = A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P4.} \quad \text{Kalkulatu } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ matrizearen determinantea, matrizea}$$

triangeluarra bihurtuz.

EBAZPENA

Determinanteen propietateak erabiliz haxe daukagu:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} (-1) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}E_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} E_2+3E_1 \\ E_3-5E_1 \\ E_4+2E_1 \end{matrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 9 & -15 & -12 \\ 0 & 1 & 10 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} E_3+9E_2 \\ E_4+E_2 \end{matrix} \\
&= (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 15 & 20 \end{vmatrix} \begin{matrix} E_4-\frac{1}{2}E_3 \end{matrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Matrize triangeluar baten determinantea diagonal nagusiko elementuen biderkadura denez:

$$|A| = (-2) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 30 \cdot (-10) = -600$$

P5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ eta

$D = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 6 & -22 & -8 \\ 12 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, kalkulatu ondorengo ekuazioa betetzen duen X

matrizea:

$$A \cdot X - A^t \cdot E = C^2 + \frac{1}{2}D$$

EBAZPENA

Bete beharreko ekuaziotik X askatuz hurrengoa daukagu:

$$A \cdot X - A^t \cdot E = C^2 + \frac{1}{2}D \Rightarrow A \cdot X = A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D \Rightarrow X = A^{-1} \cdot \left(A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D \right)$$

A matrizearen determinantea kalkulatz hasiko gara:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2) \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 4$$

$$= 2 - 2 - 8 + 4 = -4 \Rightarrow |A| = -4$$

A matrizea erregularra da, beraz, haren alderantzizkoa A^{-1} existitzen da:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t$$

A matrizeko elementuen adjuntuak kalkulatz dira:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\
A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \\
A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6
\end{aligned}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Matrize adjuntua hauxe izanik: $A^d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Hortaz A matrizearen alderantzizkoa hauxe da: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -5/4 & 3/2 & -7/4 \end{pmatrix}$

Ondoren, C^2 kalkulatzeko da: $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot (A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D)$ denez, $(A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D)$ adierazpena kalkulatzeko da:

$$A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 6 & -22 & -8 \\ 12 & 4 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ 3 & -11 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Azkenik, X matrizea kalkulatzeko da:

$$X = A^{-1} \cdot (A^t \cdot E + C^2 + \frac{1}{2}D) = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -5/4 & 3/2 & -7/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, ebatzi ondorengo matrize-sistema: $\begin{cases} A \cdot X - A \cdot Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$.

EBAZPENA

Bigarren ekuaziotik X matrizea askatuko dugu:

$$\begin{cases} A \cdot X - A \cdot Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot X - A \cdot Y = B \\ X = C + 2Y \end{cases}$$

Eta lehenengo ekuazioan ordezkatzuko dugu:

$$A(C + 2Y) - AY = B \Rightarrow AC + 2AY - AY = B \Rightarrow AC + AY = B \Rightarrow AY = B - AC \Rightarrow Y = A^{-1}(B - AC) \Rightarrow Y = A^{-1}B - C$$

A^{-1} kalkulatzeko dugu:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^d)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} 1 = 1 & A_{21} &= (-1)^{2+1} (-1) = 1 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} (-1) = 1 & A_{22} &= (-1)^{2+2} 2 = 2 \end{aligned}$$

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^d)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beraz, ondokoa daukagu:

$$\begin{aligned} Y &= A^{-1} \cdot B - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ Y &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Behin Y matrizea daukagunean, X matrizea kalkulatzeko da, $X = C + 2Y$ adierazpena erabilia:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P7. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa Gauss-en metodoaren bidez.

EBAZPENA

Errenkadak elkartrukatzu edo beraiekin eragiketak eginez, zera daukagu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - E_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E_1 + E_3 \\ -3E_3 + E_2 \\ E_2 - E_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)E_3 \\ E_2/3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} E_1 - E_3 \\ E_2 + E_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Beraz, A matrizearen alderantzizkoa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrizea da. $A \cdot A^{-1} = I$

berdintza betetzen dela konproba daiteke:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

P8. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ a & 3 & -2 & -2 \\ a & 5 & 1 & a \end{pmatrix}$ matrizearen heina a parametro errearen menpe.

EBAZPENA

A matrizea parametro baten menpe dagoen matrize karratua denez, haren ordenarik handieneko minorraren balioa kalkulatu hasiko gara. Minor horretatik abiatuz kasu berezietara iritsiko gara. Lehendabizi, A matrizearen determinantea kalkulatu dugu Chio-ren metodoa erabilita. Pibote bezala $a_{22} = 1$ elementua aukeratu dugu eta 2. zutabean zeroak egingo ditugu:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ a & 3 & -2 & -2 \\ a & 5 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{E_1 - E_2} \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ a & 3 & -2 & -2 \\ a & 5 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{E_3 - 3E_2} \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ a - 6 & 0 & -2 - 3a & -11 \\ a & 5 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_4 - 5E_2} \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a & 3 \\ a - 6 & 0 & -2 - 3a & -11 \\ a - 10 & 0 & 1 - 5a & a - 15 \end{vmatrix} =$$

Determinantea 2. zutabea erabiliz garatuko dugu:

$$= (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ a-6 & -2-3a & -11 \\ a-10 & 1-5a & a-15 \end{vmatrix}$$

Berriro Chio-ren metodoa aplikatuko dugu eta lehenengo errenkadako elementuen adjuntuak erabiliz determinantearen balioa kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-50 & -2-3a & -11 \\ 5a-70 & 1-5a & a-15 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a-50 & -2-3a \\ 5a-70 & 1-5a \end{vmatrix} = \\ &= (a-50)(1-5a) - (5a-70)(-2-3a) = \\ &= a - 5a^2 - 50 + 250a - (-10a - 15a^2 + 140 + 210a) = \\ &= 10a^2 + 51a - 190 \end{aligned}$$

A matrizearen determinantea zero egiten duten parametroen balioak kalkulatu dira:

$$10a^2 + 51a - 190 = 0 \Rightarrow a = \frac{-51 \pm \sqrt{51^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-190)}}{20} \Rightarrow a = \frac{-51 \pm 101}{20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ a = -\frac{38}{5} \end{cases}$$

1. kasua: $a \neq \frac{5}{2}$ eta $a \neq -\frac{38}{5}$ direnean $\Rightarrow h(A) = 4$

2. kasua: $a = \frac{5}{2}$ denean $\Rightarrow h(A) \leq 3$

Kasu honetan A matrizea ondokoa da:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5/2 & 4 \\ 2 & 1 & 5/2 & 3 \\ 5/2 & 3 & -2 & -2 \\ 5/2 & 5 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Kalkula dezagun zein den A matrizearen heina:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5/2 \\ 2 & 1 & 5/2 \\ 5/2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 38 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 3$$

3. kasua: $a = -\frac{38}{5}$ denean $\Rightarrow h(A) \leq 3$

Kasu honetan A matrizea ondokoa da:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -38/5 & 4 \\ 2 & 1 & -38/5 & 3 \\ -38/5 & 3 & -2 & -2 \\ -38/5 & 5 & 1 & -38/5 \end{pmatrix}$$

Kalkula dezagun zein den A matrizearen heina:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -38/5 \\ 2 & 1 & -38/5 \\ -38/5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -416/5 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 3$$

Laburbilduz, hauxe da A matrizearen heina:

1. kasua: $a \neq \frac{5}{2}$ eta $a \neq -\frac{38}{5}$ direnean $\Rightarrow h(A) = 4$

2. kasua: $a = \frac{5}{2}$ denean $\Rightarrow h(A) = 3$

3. kasua: $a = -\frac{38}{5}$ denean $\Rightarrow h(A) = 3$

P9. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} -4 & 4a & 2a \\ 4a & -4 & -3+b \\ -4 & 4a & -2 \end{pmatrix}$ matrizearen heina a eta b parametroen menpe.

EBAZPENA

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 4a & 2a \\ 4a & -4 & -3+b \\ -4 & 4a & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_1 - E_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a+2 \\ 4a & -4 & -3+b \\ -4 & 4a & -2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+3}(2a+2) \begin{vmatrix} 4a & -4 \\ -4 & 4a \end{vmatrix} = 2(a+1) \underbrace{(16a^2 - 16)}_{16(a-1)(a+1)} = 32(a+1)^2(a-1)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & \forall b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. kasua: $a \neq 1$ eta $a \neq -1$, $\forall b \in \mathbb{R}$ direnean $\Rightarrow h(A) = 3$

2. kasua: $a = 1, \forall b \in \mathbb{R}$ denean $\Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -3+b \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

A matrizeko lehenengo bi zutabeak proportzionalak dira, beraz:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -3+b \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Ondorioz, A matrizearen heina ondokoa da:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

3. kasua: $a = -1, \forall b \in \mathbb{R}$ denean $\Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -3+b \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

A matrizeko lehenengo bi zutabeak berdinak dira eta lehenengo eta azken errenkadak ere bai. Beraz, A matrizearen heina ondorengoa da:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -3+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -3+b \end{vmatrix} = -4(-3+b) - 8 = 12 - 4b - 8 = -4b + 4$$

3.1 kasua: $b = 1$ denean $\Rightarrow h(A) = 1$

3.2 kasua: $b \neq 1$ denean $\Rightarrow h(A) = 2$

Laburbilduz:

1. kasua: $a \neq 1$ eta $a \neq -1, \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow h(A) = 3$

2. kasua: Si $a = 1, \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow h(A) = 2$

3. kasua: $a = -1$ denean:

3.1 kasua: $b = 1 \Rightarrow h(A) = 1$

3.2 kasua: $b \neq 1 \Rightarrow h(A) = 2$

P10. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} a-1 & b+1 & b \\ b & a & b \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen heina a eta b parametroen menpe.

EBAZPENA

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-1 & b+1 & b \\ b & a & b \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} \stackrel{Z_1-Z_3}{=} \begin{vmatrix} a-b-1 & b+1 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & -a & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1}(a-b-1) \begin{vmatrix} a & b \\ -a & 1 \end{vmatrix} = (a-b-1)(a+ab) = \\ &= (a-b-1)a(b+1) = -a(b+1)(b-(a-1)) \end{aligned}$$

Beraz, $|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ b = a-1 \end{cases}$

1. kasua: $a \neq 0, b \neq -1$ eta $b \neq a-1 \Rightarrow h(A) = 3$

2. kasua: $a = 0 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b+1 & b \\ b & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b \neq 0$ denean, A matrizeko 2. eta 3. errenkadak proportzionalak dira. Bestalde, $b = 0$ denean, 2. errenkada nulua da. Beraz, bi kasuetan zera daukagu:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} -1 & b+1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matrizearen heina kalkulatzeko bi ordenako minorrak aztertu beharra dago:

$$\begin{vmatrix} -1 & b+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+b), \quad \begin{vmatrix} -1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-b, \quad \begin{vmatrix} b+1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+b$$

Bi ordenako minor guztiak nuluak dira, $b = -1$ betetzen denean. Beraz:

2.1 kasua: $a = 0$ eta $b = -1 \Rightarrow h(A) = 1$

2.2 kasua: $a = 0$ eta $b \neq -1 \Rightarrow h(A) = 2$

3. kasua: $b = -1 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

A matrizeko 2. eta 3. errenkadak proportzionalak direnez:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Kasu honetan ere bi ordenako minorrak aztertu behar dira:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a(a-1), \quad \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(a-1) - 1 = -a, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = a$$

Bi ordenako minor guztiak nuluak dira, $a = 0$ denean.

3.1 kasua: $b = -1$ eta $a = 0 \Rightarrow h(A) = 1$

3.2 kasua: $b = -1$ eta $a \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$

4. kasua: $b = a - 1 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & a & a-1 \\ a-1 & a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, lehenengo bi errenkadak berdina dira, baita lehenengo eta azken zutabeak ere. Beraz:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} a-1 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-1 & a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = (a-1)(-a) - a = -a^2 + a - a = -a^2$$

Beraz, honakoa daukagu:

4.1 kasua: $b = a - 1$ eta $a = 0 \Rightarrow h(A) = 1$

4.2 kasua: $b = a - 1$ eta $a \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$

Laburbilduz:

1. kasua: $a \neq 0$, $b \neq -1$ eta $b \neq a - 1 \Rightarrow h(A) = 3$

2. kasua: $a = 0$ denean:

2.1 kasua: $b = -1$, $h(A) = 1$

2.2 kasua: $b \neq -1$, $h(A) = 2$

3. kasua: $b = -1$ denean:

3.1 kasua: $a = 0$, $h(A) = 1$

3.2 kasua: $a \neq 0$, $h(A) = 2$

4. kasua: $b = a - 1$ denean:

4.1 kasua: $a = 0, h(A) = 1$

4.2 kasua: $a \neq 0, h(A) = 2$

EBATZITAKO GALDERAK

G1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, eta $|A| = 2$ eta

$|B| = -1$ direla jakinik, kalkulatu ondorengo determinanteen balioak propietateak erabiliz:

a) $|2A|$ b) $|AB|$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

EBAZPENA

a) $|2A| = 2^3|A| = 2^4$

b) $|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-1) = -2$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1-2 & 1+1 & -1+2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{|A|} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{|B|} = |A| + |B| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &\stackrel{Z_1 \leftrightarrow Z_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{Z_2 \leftrightarrow Z_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(-1)Z_1}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{(c)}{=} (-1)1 = -1 \end{aligned}$$

G2. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4$ dela jakinik, kalkulatu $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ determinantearen balioa

propietateez baliatuz.

EBAZPENA

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{Z_2 - Z_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{Z_1 \leftrightarrow Z_3}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{|A| = |A'|}{=} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}_{|A|} = -(-4) = 4$$

G3. Dimentsio bereko A, B eta C matrize erregularrak emanik, askatu X matrizea ondoko adierazpenetatik:

a) $X \cdot A = B^{-1} - A$

b) $A \cdot X^t + B = C$

EBAZPENA

a) $X \cdot A = B^{-1} - A \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (B^{-1} - A) \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = B^{-1} \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1}$

$$\Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} - I$$

b) $A \cdot X^t + B = C \Rightarrow (A \cdot X^t + B)^t = C^t \Rightarrow (A \cdot X^t)^t + B^t = C^t \Rightarrow$
 $(X^t)^t \cdot A^t = C^t - B^t \Rightarrow X \cdot A^t = C^t - B^t \Rightarrow X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = (C^t - B^t) \cdot (A^t)^{-1}$

$$\Rightarrow X = (C - B)^t (A^t)^{-1}$$

G4. Arrazoitu ondorengo baieztapenak egia ala gezurra diren:

a) A eta B matrize erregularrak badira, orduan $A^2 \cdot B$ eta $A^t \cdot A \cdot B$ ere erregularrak dira.

b) A matrizea singularra bada, orduan haren alderantzizkoa ere singularra da.

EBAZPENA

a) Egia. A eta B matrizeak erregularrak direnez, $|A| \neq 0$ eta $|B| \neq 0$ betetzen dira. Ikus dezagun ea $A^2 \cdot B$ eta $A^t \cdot A \cdot B$ erregularrak diren:

$$|A^2 \cdot B| = |A^2| |B| = \underbrace{|A| |A|}_{|A^2|} |B| \neq 0 \Rightarrow A^2 \cdot B \text{ erregularra da.}$$

$$|A^t \cdot A \cdot B| = |A^t \cdot A| |B| = \underbrace{|A^t| |A|}_{|A|} |B| = |A|^2 |B| \neq 0 \Rightarrow A^t \cdot A \cdot B \text{ erregularra da.}$$

Beraz, baieztapen hori egia da.

b) Gezurra. A matrizea singularra denez, $|A| = 0$ betetzen da eta $\nexists A^{-1}$. Beraz, baieztapena gezurra da.

G5. Aurkitu aldi berean simetrikoak eta antisimetrikoak diren 3×3 ordenako matrize erreal guztiak.

EBAZPENA

$A \in M_3(\mathbb{R})$ matrizea simetrikoa da, $A = A^t$ betetzen badu, hau da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Gainera, $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrizea antisimetrikoa izango da, $A = -A^t$ betetzen badu. Beraz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan, $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrizea aldi berean simetrikoa eta antisimetrikoa izango da, ondorengoa betetzen badu: $A = A^t = -A^t$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{12} = -a_{12} \Rightarrow a_{12} = 0 \\ a_{13} = -a_{13} \Rightarrow a_{13} = 0 \\ a_{23} = -a_{23} \Rightarrow a_{23} = 0 \end{cases}$$

Hau da, aldi berean simetrikoa eta antisimetrikoa den matrize bakarra matrize nulua dela:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G6. Kalkulatu ondorengo adierazpenen balioak:

- $(A - B)^2 - (A + B) \cdot A + (A + B)^2 - A^2 + 2B \cdot A$.
- $A[(A \cdot B^{-1})^{-1}(B \cdot A^t)^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1}$.
- $A^t \cdot (A - B)^t - (A - B)^2 - (A \cdot B^t)^t$, A eta B matrizeak simetrikoak izanik.
- $(A + B) \cdot A - [(A + B) \cdot A]^t + [(B^2)^t - A \cdot B]^t - [(A^2)^t - B \cdot A]^t$, A eta B matrizeak simetrikoak izanik.
- $(A^2 - B)^t - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - (A^{-1})^2 + (A \cdot B)^t$, A eta B matrizeak ortogonalak izanik.

EBAZPENA

$$a) (A - B)^2 - (A + B) \cdot A + (A + B)^2 - A^2 + 2B \cdot A$$

$$= (A - B) \cdot (A - B) - (A + B) \cdot A + (A + B) \cdot (A + B) - A^2 + 2B \cdot A$$

$$= A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2 - A^2 - B \cdot A + A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 - A^2 + 2B \cdot A$$

$$= 2B^2 + B \cdot A$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & A \cdot [(A \cdot B^{-1})^{-1}(B \cdot A^t)^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} \\
&= A \cdot [(B^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A^t)^t \cdot B^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} \\
&= A \cdot [B \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B^t]^{-1}(B \cdot B^t)^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} \\
&= A \cdot [B \cdot B^t]^{-1} \cdot (B^t)^t \cdot B^t - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} \\
&= A \cdot [B \cdot B^t]^{-1} \cdot [B \cdot B^t] - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} \\
&= A - A^t \cdot (B \cdot A^t)^{-1} = A - A^t \cdot (A^t)^{-1} \cdot B^{-1} = A - B^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } & A^t \cdot (A - B)^t - (A - B)^2 - (A \cdot B^t)^t \\
&= A^t \cdot (A - B)^t - (A - B) \cdot (A - B) - (A \cdot B^t)^t \\
&= A^t \cdot (A^t - B^t) - (A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2) - (B^t)^t A^t \\
&= (A^t)^2 - A^t \cdot B^t - A^2 + A \cdot B + B \cdot A - B^2 - B \cdot A^t \\
&= A^2 - A \cdot B - A^2 + A \cdot B + B \cdot A - B^2 - B \cdot A = -B^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } & (A + B) \cdot A - [(A + B) \cdot A]^t + [(B^2)^t - A \cdot B]^t - [(A^2)^t - B \cdot A]^t \\
&= A \cdot A + B \cdot A - [A^t \cdot (A^t + B^t)] + [(B^t)^2 - A \cdot B]^t - [(A^t)^2 - B \cdot A]^t \\
&= A^2 + B \cdot A - [A \cdot (A + B)] + [B^2 - A \cdot B]^t - [A^2 - B \cdot A]^t \\
&= A^2 + B \cdot A - A^2 - A \cdot B + (B^2)^t - B^t \cdot A^t - (A^2)^t + A^t \cdot B^t \\
&= A^2 + B \cdot A - A^2 - A \cdot B + (B^t)^2 - B \cdot A - (A^t)^2 + A \cdot B = B^2 - A^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } & (A^2 - B)^t - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - (A^{-1})^2 + (A \cdot B)^t = \\
&= (A^2)^t - B^t - (B^{-1} \cdot A^{-1}) + B^t - (A^t)^2 + B^t \cdot A^t = \\
&= (A^t)^2 - B^t \cdot A^t - (A^t)^2 + B^t \cdot A^t = 0
\end{aligned}$$

MATHEMATICA ERABILIZ EBATZITAKO ARIKETAK

M1. Kalkulatu A matrize simetrikoa $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ matrizearekin batzean,

$Q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ matrizea ematen duena.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

```
P = {{3, -1, 0}, {-4, 1, 2}, {2, 0, 5}}; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

```
Q = {{5, -2, 4}, {-5, 2, 7}, {6, 5, 8}}; MatrixForm[Q]
```

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

P eta Q matrizeen arteko batuketa egin ahal izateko, hiru matrizeek dimentsio bera izan behar dute:

```
A = Array[x, {3, 3}]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} x[1, 1] & x[1, 2] & x[1, 3] \\ x[2, 1] & x[2, 2] & x[2, 3] \\ x[3, 1] & x[3, 2] & x[3, 3] \end{pmatrix}$$

Bestalde, A matrizea simetrikoa izango da, $A = A^t$ betetzen bada. Berdintza hori planteatzean lortzen den sistema ebatzi eta matrize simetrikorokorra lortzen da:

```
sol = Reduce[A == Transpose[A]]; sol = {ToRules[sol]}
```

```
{ {x[2, 3] -> x[3, 2], x[1, 3] -> x[3, 1], x[1, 2] -> x[2, 1]} }
```



```
A = A /. Flatten[sol]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} x[1, 1] & x[2, 1] & x[3, 1] \\ x[2, 1] & x[2, 2] & x[3, 2] \\ x[3, 1] & x[3, 2] & x[3, 3] \end{pmatrix}$$

Ondoko ekuazioa ebatziz bila gabiltzan A matrizea lortuko dugu:

```
sol = Solve[A + P == Q]
```

```
{ {x[1, 1] → 2, x[2, 1] → -1, x[2, 2] → 1, x[3, 1] → 4, x[3, 2] → 5, x[3, 3] → 3} }
```

```
A = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

M2. Izan bedi A 4 x 4 dimentsioko matrize antisimetrikoa.

a) Zehaztu A matrizearen adierazpen orokorra.

b) Kalkulatu A matrize antisimetrikoa $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin biderkatuta

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ matrizea ematen duena.}$$

c) Kalkulatu A matrizearen determinantea eta atera haren diagonal nagusia.

d) Egiaztatu b) atalean lortu den matrizea antisimetrikoa dela.

EBAZPENA

a)

```
Remove["Global`*"]
```

4 x 4 dimentsioko matritze orokorra definituko dugu:

```
A = Array[x, {4, 4}]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} x[1, 1] & x[1, 2] & x[1, 3] & x[1, 4] \\ x[2, 1] & x[2, 2] & x[2, 3] & x[2, 4] \\ x[3, 1] & x[3, 2] & x[3, 3] & x[3, 4] \\ x[4, 1] & x[4, 2] & x[4, 3] & x[4, 4] \end{pmatrix}$$

A matritzea antisimetrikoa izango da, $A = -A^t$ berdintza betetzen bada. Berdintza hori planteatzean lortzen den sistema ebatzi eta dimentsio egokiko matritze simetrikorokorra lortzen da:

```
sol = Reduce[A == -Transpose[A]]; sol = {ToRules[sol]}
```

```
{ {x[4, 4] -> 0, x[3, 4] -> -x[4, 3], x[3, 3] -> 0,
  x[2, 4] -> -x[4, 2], x[2, 3] -> -x[3, 2], x[2, 2] -> 0, x[1, 4] -> -x[4, 1],
  x[1, 3] -> -x[3, 1], x[1, 2] -> -x[2, 1], x[1, 1] -> 0} }
```

```
A = A /. Flatten[sol]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -x[2, 1] & -x[3, 1] & -x[4, 1] \\ x[2, 1] & 0 & -x[3, 2] & -x[4, 2] \\ x[3, 1] & x[3, 2] & 0 & -x[4, 3] \\ x[4, 1] & x[4, 2] & x[4, 3] & 0 \end{pmatrix}$$

b) B eta F matritzeak definituko ditugu:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

Bila gabiltzan A matritzea lortzeko, matritze antisimetrikorearen koefizienteak ezezagun bezala dituen ekuazio matritzala ebatziz:

```
sol = Solve[A.B == F, {x[2, 1], x[3, 1], x[4, 1], x[3, 2], x[4, 2], x[4, 3]}]
```

```
{ {x[2, 1] -> -1, x[3, 1] -> 2, x[4, 1] -> 0, x[3, 2] -> -2, x[4, 2] -> 3, x[4, 3] -> 0} }
```

```
A = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

```
Det[A]
```

```
36
```

```
Diagonal[A]
```

```
{0, 0, 0, 0}
```

Ezaguna den moduan, matrize antisimetriko baten diagonal nagusiko elementuak nuluak dira eta horixe da kasu honetan ere lortu duguna.

d) Eta A matrizea antisimetrikoa da $A = -A^t$ betetzen baitu:

```
A == -Transpose[A]
```

```
True
```

M3. Ondorengo matrizea emanik $A = \begin{pmatrix} 2 & k^2 & 1 & 2 & 0 & k \\ k & 2 & 2k & k & 1 & k^2 \\ 0 & k & -2 & k^2 & k & 1 \\ -k & -2 & k^2 & 2 & -1 & 0 \\ k & 2k & k^2 & k & -2 & -1 \\ 1 & k & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, zehaztu

haren determinantea 100.000 izatea posible egiten duen k parametroaren balioa.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

A matrizea definituko dugu eta haren determinantea kalkulatu dugu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k^2 & 1 & 2 & 0 & k \\ k & 2 & 2k & k & 1 & k^2 \\ 0 & k & -2 & k^2 & k & 1 \\ -k & -2 & k^2 & 2 & -1 & 0 \\ k & 2k & k^2 & k & -2 & -1 \\ 1 & k & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{Det}[A] // \text{Simplify}$$

$$56 + 50k + 17k^2 + 29k^3 + 33k^4 - 2k^5 - 9k^6 - 4k^7$$

Solve agindua erabilita $|A| = 0$ ekuazioa askatzen saiatuko gara:

$$\text{Solve}[\text{Det}[A] == 100000, k]$$

$$\left\{ \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 1\right], \right\}, \right. \\ \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 2\right], \right\}, \\ \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 3\right], \right\}, \\ \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 4\right], \right\}, \\ \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 5\right], \right\}, \\ \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 6\right], \right\}, \\ \left. \left\{ k \rightarrow \text{Root}\left[99944 - 50 \sqrt{1} - 17 \sqrt{1}^2 - 29 \sqrt{1}^3 - 33 \sqrt{1}^4 + 2 \sqrt{1}^5 + 9 \sqrt{1}^6 + 4 \sqrt{1}^7 \&, 7\right], \right\} \right\}$$

Solve agindua erabiliz ekuazioaren soluzio zehatza lortzen ez dugunez, NSolve agindua erabilita soluzioaren hurbilpen bat lortuko dugu:

$$\text{NSolve}[\text{Det}[A] == 100000, k]$$

$$\left\{ \left\{ k \rightarrow -4.56796 \right\}, \left\{ k \rightarrow -3.02299 - 3.33164 i \right\}, \left\{ k \rightarrow -3.02299 + 3.33164 i \right\}, \right. \\ \left\{ k \rightarrow 0.59423 - 4.06314 i \right\}, \left\{ k \rightarrow 0.59423 + 4.06314 i \right\}, \\ \left. \left\{ k \rightarrow 3.58774 - 1.77663 i \right\}, \left\{ k \rightarrow 3.58774 + 1.77663 i \right\} \right\}$$

k parametroa erreala denez, haren balioa $k = -4,56796$ izango da.

M4. $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -k & -1 & 1 \\ 3 & -6 & k+2 \end{pmatrix}$ matrizea emanik:

- Zehatzu k parametroaren balioa, A matrizea B matrize batekin biderkatzean 4×5 dimentsioko matrize nulua eman dezan. Interpretatu lortutako emaitzak.
- Zein da B matrize ez-nuluaren adierazpen orokorra? Zehatzu bi kasu berezi.

EBAZPENA

a)

```
Remove["Global`*"]
```

NU matrize nulua eta A matrizea definitzen dira:

```
NU = ConstantArray[0, {4, 5}]; MatrixForm[NU]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A = {{k, 1, -1}, {1, 1, 1}, {-k, -1, 1}, {3, -6, k + 2}};
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -k & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 + k \end{pmatrix}$$

Bi matrizeen biderketa zehaztu den ordenan egin ahal izateko dimentsio egokiko B matrize orokorra definitzen da:

```
B = Array[x, {3, 5}]; MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} x[1, 1] & x[1, 2] & x[1, 3] & x[1, 4] & x[1, 5] \\ x[2, 1] & x[2, 2] & x[2, 3] & x[2, 4] & x[2, 5] \\ x[3, 1] & x[3, 2] & x[3, 3] & x[3, 4] & x[3, 5] \end{pmatrix}$$

Ondorengo ekuazioa askatuz k parametroaren balioak lortzen dira:

```
sol = Reduce[A.B == NU, Flatten[B]]; sol = {ToRules[sol]}

{{k -> -5, x[2, 1] -> 1/2 (-x[1, 1] - k x[1, 1]), x[2, 2] -> 1/2 (-x[1, 2] - k x[1, 2]),
  x[2, 3] -> 1/2 (-x[1, 3] - k x[1, 3]), x[2, 4] -> 1/2 (-x[1, 4] - k x[1, 4]),
  x[2, 5] -> 1/2 (-x[1, 5] - k x[1, 5]), x[3, 1] -> 1/2 (-x[1, 1] + k x[1, 1]),
  x[3, 2] -> 1/2 (-x[1, 2] + k x[1, 2]), x[3, 3] -> 1/2 (-x[1, 3] + k x[1, 3]),
  x[3, 4] -> 1/2 (-x[1, 4] + k x[1, 4]), x[3, 5] -> 1/2 (-x[1, 5] + k x[1, 5])},
{k -> -2, x[2, 1] -> 1/2 (-x[1, 1] - k x[1, 1]), x[2, 2] -> 1/2 (-x[1, 2] - k x[1, 2]),
  x[2, 3] -> 1/2 (-x[1, 3] - k x[1, 3]), x[2, 4] -> 1/2 (-x[1, 4] - k x[1, 4]),
  x[2, 5] -> 1/2 (-x[1, 5] - k x[1, 5]), x[3, 1] -> 1/2 (-x[1, 1] + k x[1, 1]),
  x[3, 2] -> 1/2 (-x[1, 2] + k x[1, 2]), x[3, 3] -> 1/2 (-x[1, 3] + k x[1, 3]),
  x[3, 4] -> 1/2 (-x[1, 4] + k x[1, 4]), x[3, 5] -> 1/2 (-x[1, 5] + k x[1, 5])},
{x[1, 1] -> 0, x[1, 2] -> 0, x[1, 3] -> 0, x[1, 4] -> 0, x[1, 5] -> 0,
  x[2, 1] -> 0, x[2, 2] -> 0, x[2, 3] -> 0, x[2, 4] -> 0, x[2, 5] -> 0,
  x[3, 1] -> 0, x[3, 2] -> 0, x[3, 3] -> 0, x[3, 4] -> 0, x[3, 5] -> 0}}
```

$k = -5$ edo $k = -2$ bada, B matrizea ez-nulua izan daiteke. Eta $k \neq -5$ eta $k \neq -2$ bada, B matrizea matrize nulua izango da.

- b) $k = -5$ edo $k = -2$ bada, B matrizeko koefizienteek ondoko baldintzak bete behar dituzte:

```
B = B /. sol[[1]]; MatrixForm[B]


$$\begin{pmatrix} x[1, 1] & x[1, 2] & x[1, 3] & x[1, 4] & x[1, 5] \\ \frac{1}{2}(-x[1, 1] - k x[1, 1]) & \frac{1}{2}(-x[1, 2] - k x[1, 2]) & \frac{1}{2}(-x[1, 3] - k x[1, 3]) & \frac{1}{2}(-x[1, 4] - k x[1, 4]) & \frac{1}{2}(-x[1, 5] - k x[1, 5]) \\ \frac{1}{2}(-x[1, 1] + k x[1, 1]) & \frac{1}{2}(-x[1, 2] + k x[1, 2]) & \frac{1}{2}(-x[1, 3] + k x[1, 3]) & \frac{1}{2}(-x[1, 4] + k x[1, 4]) & \frac{1}{2}(-x[1, 5] + k x[1, 5]) \end{pmatrix}$$

```

Ezezagunei balio ezberdinak emanaz bi kasu berezi lortzen dira eta $A \cdot B = NU$ betetzen dela egiaztatzen daiteke:

```
B1 = B /. {k -> -5, x[1, 1] -> 0, x[1, 2] -> 1, x[1, 3] -> -1, x[1, 4] -> 2,
  x[1, 5] -> 3};
MatrixForm[B1]


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

```

```
A1 = A /. k → -5; A1.B1 == NU
```

```
True
```

```
B2 = B /. {k → -2, x[1, 1] → -4, x[1, 2] → 2, x[1, 3] → 0, x[1, 4] → 2,
           x[1, 5] → 6};
```

```
MatrixForm[B2]
```

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

```
A2 = A /. k → -2; A2.B2 == NU
```

```
True
```

M5. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ m & 3 & -2 & -2 \\ m & 5 & 1 & m \end{pmatrix}$ matrizearen heina m parametroaren menpe.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

```
A = {{-2, 1, m, 4}, {2, 1, m, 3}, {m, 3, -2, -2}, {m, 5, 1, m}};
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ m & 3 & -2 & -2 \\ m & 5 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Mathematica programa ez da gai matrize baten heinaren kalkulua parametroen menpe egiteko. Beraz, A matrizearen heina pausoz pauso kalkulatu behar da:

```
Det[A]
```

```
-190 + 51 m + 10 m^2
```

```
Solve[Det[A] == 0]
```

```
{{m -> -38/5}, {m -> 5/2}}
```

1. kasua: $m \neq -\frac{38}{5}$ eta $m \neq \frac{5}{2}$ denean, $h(A) = 4$.

2. kasua: $m = -\frac{38}{5}$ denean:

```
m = -38 / 5; MatrixForm[A]
```

```
( -2  1  -38/5  4 )
(  2  1  -38/5  3 )
( -38/5 3   -2  -2 )
( -38/5 5    1  -38/5 )
```

Kasu honetan matrizea parametroaren menpe ez dagoenez, MatrixRank agindua erabil daiteke heina kalkulatzeko:

```
MatrixRank[A]
```

```
3
```

3. kasua: $m = \frac{5}{2}$ denean:

```
m = 5 / 2; MatrixRank[A]
```

```
3
```

Laburbilduz:
$$\begin{cases} m \neq -\frac{38}{5} \text{ eta } m \neq \frac{5}{2} \Rightarrow h(A) = 4 \\ m = -\frac{38}{5} \text{ edo } m = \frac{5}{2} \Rightarrow h(A) = 3 \end{cases}$$

M6. Kalkulatu $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matrizearen heina a eta b parametro

errealen menpe.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

M matrizea definitzen da eta haren determinantea zero egiten duten balioak kalkulatzen dira:

```
M = {{a, 1, 2, 0}, {2, -3, b, 1}, {2, 1, b, -1}, {0, 2 b - 1, 0, 4}};
MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & -1 \\ 0 & -1 + 2b & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Horrela, sor daitezkeen kasu ezberdinak azter daitezke:

```
Det[M]
sol = Reduce[Det[M] == 0]
sol = {ToRules[sol]}
```

$$56 + 16b - 14ab - 4ab^2$$

$$\left(b \neq 0 \ \&\& \ a = \frac{4}{b}\right) \ || \ b = -\frac{7}{2}$$

$$\left\{\left\{a \rightarrow \frac{4}{b}\right\}, \left\{b \rightarrow -\frac{7}{2}\right\}\right\}$$

1. kasua: $b \neq -\frac{7}{2}$ eta $a \neq \frac{4}{b}$ eta $b \neq 0 \Rightarrow h(M) = 4$

2. kasua: $a = \frac{4}{b}$ eta $b \neq 0$:

```
M1 = M /. a -> 4 / b; MatrixForm[M1]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{b} & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & -1 \\ 0 & -1 + 2b & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
Det[M1]
```

```
0
```

$M1$ matrizeko hiru ordenako minor guztiak kalkulatuko ditugu:

```
j = Minors[M1]; MatrixForm[j]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 + \frac{8}{b} & 0 & -4 - 2b \\ 0 & -16 - \frac{44}{b} & 0 & 22 + 8b \\ 0 & \frac{12}{b} & 0 & -6 \\ 0 & 28 + 8b & 0 & -14b - 4b^2 \end{pmatrix}$$

Minor horietakoren bat ez-nulua izatea nahikoa da $M1$ matrizearen heina 3 izan dadin.

```
Solve[j[[1, 2]] == 0]
```

```
{{b -> -2}}
```

```
Solve[j[[2, 2]] == 0]
```

```
{{b -> -\frac{11}{4}}}
```

Ez da existitzen b parametroaren baliorik 3 ordenako bi minorrak batera zero egiten dituenik. Beraz, $M1$ matrizearen heina 3 da, hau da, $h(M) = 3$.

3. kasua: $b = -\frac{7}{2}$ denean, M matrizean $b = -\frac{7}{2}$ balioa ordezkatu eta, horrela, $M2$ matrizea lortuko dugu. a parametroaren edozein baliotarako matrize honen determinantea zero dela egiaztatzen dugu:

```
M2 = M /. b -> -7 / 2; MatrixForm[M2]
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{7}{2} & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
Det[M2]
```

```
0
```

$M2$ matrizeko hiru ordenako minor guztiak kalkulatu ditugu:

```
j = Minors[M2]; MatrixForm[j]
```

$$\begin{pmatrix} 16 + 14 a & 4 + 2 a & 8 + 7 a & 3 \\ -32 - 28 a & -8 - 4 a & -16 - 14 a & -6 \\ -32 - 28 a & -8 - 4 a & -16 - 14 a & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Minor horietakoren bat ez-nulua izatea nahikoa da $M2$ matrizearen heina 3 izan dadin.

```
Solve[j[[1, 2]] == 0]
```

```
{{a -> -2}}
```

```
Solve[j[[2, 3]] == 0]
```

```
{{a -> -\frac{8}{7}}}
```

$M2$ matrizeko hiru ordenako minorrak batera zero egiten dituen a parametroaren baliorik ez da existitzen. Beraz, $M2$ matrizearen heina 3 da, hau da, $h(M) = 3$.

$$\text{Laburbilduz: } \begin{cases} b \neq -\frac{7}{2} \text{ eta } a \neq \frac{4}{b} \text{ eta } b \neq 0 \Rightarrow h(M) = 4 \\ b = -\frac{7}{2} \Rightarrow h(M) = 3 \\ a = \frac{4}{b} \text{ eta } b \neq 0 \Rightarrow h(M) = 3 \end{cases}$$

M7. Kalkulatu A matrize behe-triangeluar bat, haren diagonal nagusiko elementuek osatzen duten bektorea $(1, -1, 1)$ izanik, $A \cdot B = G$ betetzen dela jakinik eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 10 & 67 & -1 \\ 4 & 65 & m \end{pmatrix} \text{ eta } |G| = -84 \text{ izanik.}$$

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

3×3 dimentsioko A matrize behe-triangeluar orokorra definitzen da, diagonal nagusiko elementuak $(1, -1, 1)$ dituenak. Era berean, B eta G matrizeak ere definitzen dira:

```
A = {{1, 0, 0}, {a21, -1, 0}, {a31, a32, 1}}; MatrixForm[A]
B = {{1, 8, 0}, {-1, 5, 1}, {7, -2, 2}}; MatrixForm[B]
G = {{1, m-1, 0}, {10, 67, -1}, {4, 65, m}};
MatrixForm[G]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & -1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ 10 & 67 & -1 \\ 4 & 65 & m \end{pmatrix}$$

G matrizearen determinantea -84 izatea ahalbidetzen duten m parametroaren balioak lortzen dira:

```
Solve[Det[G] == -84, m]
```

$$\left\{ \left\{ m \rightarrow -\frac{17}{10} \right\}, \left\{ m \rightarrow 9 \right\} \right\}$$

m parametroaren bi balio lortu direnez, bi kasuak bereizita aztertuko ditugu:

- $m = 9$ denean:

```
m = 9; sol = Solve[A.B == G]
{{a21 -> 9, a31 -> 4, a32 -> 7}}
```

Kasu honetan, bila gabiltzan A matrizea hauxe da:

```
A = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

```

- $m = -\frac{17}{10}$ denean:

```
m = -17 / 10; Solve[A.B == G]
{}
```

Kasu honetan sistemak ez dauka soluziorik. Beraz, ez da existitzen ezarritako baldintzak betetzen dituen beste A matrizerik.

Beraz, ariketa honen soluzioa hauxe da: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

M8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 61 & 3 & -9 \\ -9 & 56 & 32 \\ 5 & 18 & 30 \end{pmatrix}$ eta $G = \begin{pmatrix} 34 & 20 & 15 \\ -29 & -1 & 13 \\ -14 & 21 & 14 \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, kalkulatu ondorengo matrize-sistema betetzen duten X eta

Y matrizeak: $\begin{cases} X + Y \cdot A^t = F \\ X \cdot A - Y = G \end{cases}$.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

A , B , F eta G matrizeak definituko ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 61 & 3 & -9 \\ -9 & 56 & 32 \\ 5 & 18 & 30 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 34 & 20 & 15 \\ -29 & -1 & 13 \\ -14 & 21 & 14 \end{pmatrix};$$

Matrize-sistema ebatzea ahalbidetuko duten dimentsio egokiko X eta Y matrizeak definituko ditugu:

```
X = Array[m1, {3, 3}]; MatrixForm[X]
```

$$\begin{pmatrix} m1[1, 1] & m1[1, 2] & m1[1, 3] \\ m1[2, 1] & m1[2, 2] & m1[2, 3] \\ m1[3, 1] & m1[3, 2] & m1[3, 3] \end{pmatrix}$$

```
Y = Array[m2, {3, 3}]; MatrixForm[Y]
```

$$\begin{pmatrix} m2[1, 1] & m2[1, 2] & m2[1, 3] \\ m2[2, 1] & m2[2, 2] & m2[2, 3] \\ m2[3, 1] & m2[3, 2] & m2[3, 3] \end{pmatrix}$$

Sistema askatzen da, X eta Y matrizeak lortuz:

```
sol = Solve[{X + Y.Transpose[A] == F, X.A - Y == G}]
```

```
{ {m1[1, 1] -> 2, m1[1, 2] -> 5, m1[1, 3] -> 0, m2[1, 1] -> -3,
  m2[1, 2] -> 5, m2[1, 3] -> 4, m1[2, 1] -> 2, m1[2, 2] -> -3, m1[2, 3] -> 1,
  m2[2, 1] -> 8, m2[2, 2] -> 1, m2[2, 3] -> 0, m1[3, 1] -> 3, m1[3, 2] -> 0,
  m1[3, 3] -> -1, m2[3, 1] -> 4, m2[3, 2] -> -5, m2[3, 3] -> 5} }
```

```
X = X /. sol[[1]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Y = Y /. sol[[1]] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

M9. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearekin trukutzen diren matrize erreal guztiak.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

A matrizea eta haren dimentsio bereko B matrize orokorra definitzen dira:

```
A = {{2, 1}, {-1, 2}}
```

```
{2, 1}, {-1, 2}}
```

```
B = Array[x, {2, 2}]
```

```
{{x[1, 1], x[1, 2]}, {x[2, 1], x[2, 2]}}
```

$A \cdot B = B \cdot A$ ekuazioa askatzen da:

```
sol = Reduce[A.B == B.A]; sol = {ToRules[sol]}
```

```
{{x[1, 2] → -x[2, 1], x[1, 1] → x[2, 2]}}
```

```
B = B /. Flatten[sol] // MatrixForm
```

```

$$\begin{pmatrix} x[2, 2] & -x[2, 1] \\ x[2, 1] & x[2, 2] \end{pmatrix}$$

```

Emandako A matrizearekin trukutzen diren matrizeek diagonal nagusian elementu bera dute eta kontrako diagonaleko elementuak bata bestearen aurkakoak dira.

M10. Kalkulatu p parametroaren balioa $A = \begin{pmatrix} p & p \\ p & -p \end{pmatrix}$ matrize simetrikoa ortogonal izan dadin.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

```
A = {{p, p}, {p, -p}}
```

```
{{p, p}, {p, -p}}
```

A matrizea ortogonala izango da, $A \cdot A^t = I$ berdintza betetzen badu. Berdintza betearaziko duen p parametroaren balioa kalkulatuko dugu:

```
sol = Solve[A.Transpose[A] == IdentityMatrix[2]]
```

```
{{p -> -\frac{1}{\sqrt{2}}}, {p -> \frac{1}{\sqrt{2}}}}
```

p parametroaren bi balio lortzen direnez, mota horretako bi matrize ortogonal daude:

```
A1 = A /. sol[[1]]; MatrixForm[A1]
```

```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```

```
A2 = A /. sol[[2]]; MatrixForm[A2]
```

```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```

A_1 eta A_2 matrizeak ortogonalak direla frogatu daiteke, $A^t = A^{-1}$ berdintza betetzen baitute:

```
Transpose[A1] == Inverse[A1]
```

```
True
```

```
Transpose[A2] == Inverse[A2]
```

```
True
```


2 EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK

2.1 Sarrera

Definizioa. Mota honetako n berdintzaz osatutako sistemari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

n ekuazio eta p ezezaguneko $x_1, x_2, \dots, x_p$ ekuazio linealetako sistema deritzo, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ terminoak koefizienteak izanik eta $b_i \in \mathbb{R}$ gai askeak izanik.

Zenbait kontsiderazio:

- $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^t \in \mathbb{R}^p$ motako p -kote batek ekuazio linealetako sistemako berdintza guztiak betetzen baditu, orduan ekuazio linealetako sistemaren emaitza da.
- Ekuazio linealetako sistema batek emaitza duenean, sistema bateragarria dela esaten da. Emaitzarik ez duen sistema bateraezina da.
- Sistema bateragarri batek emaitza bakarra izan dezake edo infinitu emaitza izan ditzake. Sistemak emaitza bakarra duenean, sistema bateragarri determinatua dela esaten da, eta infinitu emaitza dituen, aldiz, sistema bateragarri indeterminatua da.
- Ekuazio linealetako sistema bat homogeneoa da, sistemako gai aske guztiak nuluak direnean, hau da: $b_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Sistema homogeneo guztiak bateragarriak dira, $x_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, p$ soluzio tribiala edo nabaria sistemaren emaitza baita beti.

Hasierako ekuazio linealetako sistema matrize eran honela idatz daiteke:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

A koefizienteen matrizea izanik, $\vec{x}$ ezezagunen bektorea eta $\vec{b}$ gai askeen bektorea.

A matrizeak eta $\vec{b}$ gai askeen bektoreak osatzen duten matrizeari matrize hedatua deritzo eta M edo $(A|\vec{b})$ notazioa erabiltza idazten da:

$$M = (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right)$$

2.2 Rouché-Fröbenius-en teorema

Teorema. n ekuazio eta p ezezaguneko ekuazio linealetako sistema bat bateragarria da, baldin eta soilik baldin koefizienteen matrizearen heina eta matrize hedatuaren heina berdinak badira:

$$h(A) = h(M)$$

- $h(A) = h(M) = p$ betetzen bada, sistema bateragarri determinatua da.
- $h(A) = h(M) < p$ betetzen bada, sistema bateragarri indeterminatua da.

Bestela, ekuazio linealetako sistema bateraezina izango da eta desberdintza hau beteko da:

$$h(A) \neq h(M)$$

Oharra:

Ekuazio linealetako sistema homogeneo guztiak bateragarriak dira, $h(A) = h(M)$ beti betetzen baita.

2.3 Cramer-en erregela

Cramer-en erregela ekuazio linealetako sistema ebazteko erabiltzen da. Erregela hau aplikatzen da ekuazio kopurua eta ezezagun kopurua bat datozenean eta koefizienteen matrizea erregularra denean. Hau da, sistema bateragarri determinatua denean.

Izan bedi n ekuazio eta n ezezaguneko ekuazio linealetako sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

non $|A| \neq 0$. Cramer-en erregela erabilita x_i ezezaguna kalkulatzeko, koefizienteen matrizeko i . zutabea gai askeen zutabeaz ordezkatu ondoren lortutako matrizearen determinantea koefizienteen matrizearen determinanteaz zatitzen da:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

2.4 Ekuazio linealetako sistemen baliokidetzak

Definizioa. Ekuazio linealetako bi sistema S_1 eta S_2 baliokideak dira, emaitza berdinak dituztenean, eta honela adierazten da: $S_1 \Leftrightarrow S_2$.

Ekuazio linealetako sistema bat emanik, harekiko baliokideak diren sistemak sortzeko ondorengo eragiketak egin daitezke:

- Sistemako zenbait ekuazioren konbinazio lineala den ekuazio bat sistematik kenduz edo erantsiz.
- Sistemako ekuazioren bat nulua ez den eskalar batez biderkatuz.
- Sistemako ekuazio bati beste ekuazioren konbinazio lineal bat batuz.

2.5 Gauss-en metodoa

Gauss-en metodoa ekuazio linealetako sistemak ebazteko erabiltzen da eta ebatzi beharreko sistema bera baino sinpleagoa den beste sistema baliokide bat bihurtzen du. Adibidez, Gauss-en metodoa erabilita n ekuazio eta n ezezaguneko sistema bat sistema mailakatu edo triangeluar bihur daiteke:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss-en metodoa}} \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ddots \\ c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$$

non:

- $c_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ direnean, sistema berriko azken ekuazioa erabiliz x_n ezezaguna kalkula daiteke. Behin x_n kalkulatu dugunean, hura $(n - 1)$. ekuazioan ordezkatuz x_{n-1} lortzen da. Prozesu horri jarraitzen diogu, harik eta lehen ekuaziotik x_1 ezezagunaren balioa lortu arte.
- Gauss-en metodoaren bidez lortu den sistemako c_{ii} koefizienteren bat nulua bada, i . ekuazioan berdintza bat edo kontraesan bat lortuko da. Lehenengo kasuan, sistema bateragarri indeterminatua izango da, eta bigarreanean, aldiz, bateraezina.

Izan bedi S_1 hasierako sistema:

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

k . ekuazioa ondokoa izanik:

$$E_k: a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

Sistema mailakatua lortzeko ondoko eragiketak egin daitezke:

- Ekuazioen elkartrukaketak: i . ekuazioa eta j . ekuazioa trukatzuz, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

- i . ekuazioa nulua ez den bere multiplo batez ordezkatuz:

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ \alpha E_i, \text{ non: } \alpha \neq 0 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

- j . ekuazioari i . ekuazioaren multiplo bat batuz:

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_j + \alpha E_i \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}, \text{ non } \alpha \neq 0$$

2.6 Ekuazio linealetako sistemak ebazteko metodo orokorra

Izan bedi n ekuazio eta p ezezaguneko ekuazio linealetako sistema bateragarri orokorra:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Hau da: $h(A) = h(M) = k \leq p$.

Sistemaren soluzioa aurkitzeko prozedura ondorengoa da:

- k dimentsiodun minor ez-nulua aukeratu behar da. Suposatu minor hori lauki barruan adierazi ditugun elementuek osatzen dutela:

$$S_1 \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kp}x_p = b_k \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Minor horretako koefizienteek biderkatzen dauden ezezagunak oinarritzko ezezagunak dira eta oinarritzko aldagaiak deritze. Gainerako ezezagunei aldagai askeak deritze.

- Minorrean parte hartzen ez duten errenkadak sistematik kendu egiten dira:

$$S_1 \Leftrightarrow S_2 \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kp}x_p = b_k \end{cases}$$

- Minorrean parte hartzen ez duten ezezagunak berdintzen alde bietan eranstean dira kontrako ikurrak:

$$S_2 \Leftrightarrow S_3 \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 - (a_{1k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1p}x_p) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 - (a_{2k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2p}x_p) \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k = b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kp}x_p) \end{cases}$$

Lortu den sistema ebazteko Cramer-en erregela erabil daiteke, eta oinarritzko aldagaien balioak, $x_1, x_2, \dots, x_k$, aldagai askeen menpe $x_{k+1}, \dots, x_p$ lortuko dira.

Berdintzen eskuinetara dauden gaiak sistema berriko gai askeak direla kontuan hartuz,

$$c_i = b_i - (a_{i,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{ip}x_p), \forall i = 1, 2, \dots, k:$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1k} \\ c_2 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_k & a_{k2} & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \dots & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & c_2 & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & c_k & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}, \dots, x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & c_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}}$$

EBATZITAKO ARIKETAK

P1. Ebatzi ondoko ekuazio linealetako sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 6 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$ Cramer-en erregela

erabilita.

EBAZPENA

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua honakoak dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatu dugu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 3$$

$h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 =$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

Cramer-en metodoa erabiliz ebatziko dugu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-4}{-1} = 4, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3}{-1} = -3, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

P2. Ebatzi ondoko ekuazio linealetako sistema $\begin{cases} 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 4x - y + 2z - t = -10 \\ x + 2y + t = 2 \\ 2x - 2y - 4z - 2t = 0 \end{cases}$ Gauss-en metodoa

erabilita.

EBAZPENA

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 4x - y + 2z - t = -10 \\ x + 2y + t = 2 \\ 2x - 2y - 4z - 2t = 0 \end{cases} & \xrightarrow[E_1 \leftrightarrow E_4]{E_4/2} \begin{cases} x - y - 2z - t = 0 \\ 4x - y + 2z - t = -10 \\ x + 2y + t = 2 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3 \end{cases} & \xrightarrow[E_4 - 2E_1]{\begin{smallmatrix} E_2 - 4E_1 \\ E_3 - E_1 \end{smallmatrix}} \\ \begin{cases} x - y - 2z - t = 0 \\ 3y + 10z + 3t = -10 \\ 3y + 2z + 2t = 2 \\ 4y + z + 3t = 3 \end{cases} & \xrightarrow[E_4 - \frac{4}{3}E_2]{E_3 - E_2} \begin{cases} x - y - 2z - t = 0 \\ 3y + 10z + 3t = -10 \\ -8z - t = 12 \\ -\frac{37}{3}z - t = \frac{49}{3} \end{cases} & \xrightarrow{E_4 - \frac{37}{24}E_3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - y - 2z - t = 0 \\ 3y + 10z + 3t = -10 \\ -8z - t = 12 \\ \frac{13}{24}t = \frac{-13}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2(-1) - 4 = -2 \\ y = \frac{1}{3}(-10 + 10 + 12) = 4 \\ z = \frac{-1}{8}(12 - 4) = -1 \\ t = \frac{24}{13} \cdot \left(\frac{-13}{6}\right) = -4 \end{cases}$$

Sistemaren emaitza hauxe da:
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = -1 \\ t = -4 \end{cases}$$

P3. Eztabaidatu $\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ -x - 2y + t = 1 \\ z + t = 2 \end{cases}$ ekuazio linealetako sistema eta ebatzi posible denean.

EBAZPENA

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua honakoak dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizearen heina kalkulatu dugu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 3$$

$$h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 < \text{ezezagun kopurua} = 4 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$$

Heina kalkulatzeko erabili den minorra erabiliz aurreko sistema ebatzen da:

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ -x - 2y + t = 1 \\ z + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = -\lambda \\ -x - 2y = 1 - \lambda \\ z = 2 - \lambda \\ t = \lambda \end{cases}$$

Hirugarren ekuazioa lehenengoan ordezkatzuz eta x eta y-ren balioak askatuz zera daukagu:

$$x = 9 - 7\lambda, \quad y = -5 + 4\lambda, \quad z = 2 - \lambda, \quad t = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P4. Eztabaidatu ondoko ekuazio linealetako sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ -3x - y - 3z = -2 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$ eta ebatzi posible denean.

EBAZPENA

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua honakoak dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen heina kalkulatu dugu:

A matrizeko lehenengo eta azken errenkadak proportzionalak direnez, eta lehenengo eta azken zutabeak berdinak direnez:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Ondoren, matrize hedatuaren heina kalkulatu dugu:

$$h(A|\vec{b}) = h \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3$$

$h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina da, beraz, ez da soluziorik existitzen.

P5. Ondorengo sistema emanik: $\begin{cases} x - 2y + 2z - 2t = 6 \\ x - y + 4z + at = a - 3 \end{cases}$

a) Sailkatu a parametroaren arabera.

b) Ebatzi posible denean.

EBAZPENA

a) Kontsidera ditzagun koefizienteen matrizea eta matrize hedatua:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & a \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 & a & a-3 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 4$$

Sistema Bateragarri Indeterminatua da a parametroaren edozein baliotarako.

b) Aurreko ataleko minorra erabiliz zera daukagu:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z - 2t = 6 \\ x - y + 4z + at = a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 6 - 2\lambda + 2\mu \\ x - y = a - 3 - 4\lambda - a\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

Bi ekuazioen kenketa eginez zera lortzen da:

$$y = -9 + a - 2\lambda - (2 + a)\mu$$

Aurreko ekuazioa bigarren ekuazioan ordezkatzuz x ezezaguna lortzen da:

$$x = -12 + 2a - 6\lambda - (2a + 2)\mu$$

Ondorioz, sistemaren soluzioa hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 2a \\ -9 + a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2a - 2 \\ -2 - a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

P6. Ondorengo sistema emanik:
$$\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \\ y - z = 2 \\ -2x + ay - 10z = 2a \end{cases},$$

- a) Erabili Rouché-Fröbenius-en teorema sistema bateragarri determinatu egiten duen a parametroaren balioa kalkulatzeko.
- b) Ebatzi sistema kasu horretan.

EBAZPENA

a) Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & a & -10 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & a & -10 & 2a \end{array} \right)$$

A matrizea 4×3 dimentsioko matrizea denez, $h(A) \leq 3$ betetzen du. Haren heina hau da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 3$$

Sistema bateragarria izango da, $h(A) = h(A|\vec{b}) = 3$ betetzen bada.

Bestalde, zera daukagu: $3 \leq h(A) = h(A|\vec{b}) \leq 4$.

$$\begin{aligned} |A|\vec{b}| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & a & -10 & 2a \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -10 & 2a \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & a & 2a \end{vmatrix} \\ &\quad + 2(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & a & -10 \end{vmatrix} = 12 - 2a \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|A|\vec{b}| = 12 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 6$$

Laburbilduz:

1. kasua: $a = 6 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 =$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri

Determinatua.

2. kasua: Baldin $a \neq 6 \Rightarrow h(A) = 3 \neq h(A|\vec{b}) = 4 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

b) Ebatzi beharreko sistema hau da:
$$\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \\ y - z = 2 \\ -2x + 6y - 10z = 12 \end{cases}$$

Sistema hori beste honen baliokidea da:
$$\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Haren emaitza $x = 4, y = 0, z = -2$ da.

P7. Eztabaidatu ondorengo sistema $\begin{cases} ax - y - z = 1 \\ x + ay + 2az = a \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ a parametroaren arabera eta ebatzi

posible den kasuetan.

EBAZPENA

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatu dugu:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a(a+1), \quad |A| = 0 \Leftrightarrow -a(a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Kasu hauek bereiz daitezke:

1. kasua: $a \neq 0$ eta $a \neq -1$:

$$h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Determinatua.}$$

Cramer-en bidez ebartziz emaitza lortzen da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a & a & 2a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a+1)} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a+1)} = \frac{3a(a+1)}{-a(a+1)} = -3, z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-a(a+1)} = \frac{-2a(a+1)}{-a(a+1)} = 2$$

2. kasua: $a = 0 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

A eta $(A|\vec{b})$ matrizeen heinak kalkulatu ditugu. Matrize horietako bigarren eta hirugarren zutabeak berdinak direnez, zera daukagu:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Bestalde, matrize hedatuko bigarren eta laugarren zutabeak proportzionalak dira, beraz:

$$h(A|\vec{b}) = h \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eta zera daukagu: $h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$

Heina kalkulatzeko erabili den minor ez-nulua kontuan hartuz:

$$\begin{cases} -y - z = 1 \\ x = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 1 + \lambda \\ x = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3. kasua: $a = -1 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

A eta $(A|\vec{b})$ matrizeen heinak aztertuko ditugu. Koefizienteen matrizeko lehenengo eta hirugarren errenkadak proportzionalak direnez:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Matrize hedatuari dagokionez, lehenengo eta azken errenkadak proportzionalak dira, baita lehenengo eta azken zutabeak ere, beraz:

$$h(A|\vec{b}) = h\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2$$

$$h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$$

Aurreko kasuan bezala, A matrizearen heina eman digun minorra erabilita ebatziko dugu sistema:

$$\begin{cases} -x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 1 + \lambda \\ x - y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P8. Ondorengo sistema emanik:
$$\begin{cases} ax + 4y + az = -1 \\ x + 4ay + z = 1 \\ 3x - (4a - 2)y + 2z = 3 \end{cases},$$

- Eztabaidatu sistema a parametroaren arabera.
- Ebatzi bateragarri indeterminatua den kasuetan.

EBAZPENA

- Koefizienteen matrizearen heina eta matrize hedatuarena kalkulatu ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & -(4a-2) & 2 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a & 4 & a & -1 \\ 1 & 4a & 1 & 1 \\ 3 & -(4a-2) & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & -(4a-2) & 2 \end{vmatrix} \stackrel{Z_1-Z_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & a \\ 0 & 4a & 1 \\ 1 & -(4a-2) & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & a \\ 4a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(1 - a^2), \quad |A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

1. kasua: $a \neq -1$ eta $a \neq 1 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Determinatua.}$

2. kasua: $a = -1 \Rightarrow h(A) \leq 2:$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A matrizearen lehenengo bi errenkadak proportzionalak direnez, zera daukagu:

$$h(A) = h\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Bestalde, matrize hedatua sortzeko eranstean den zutabea lehenengo zutabearen berdina denez, matrize hedatuaren heina koefizienteen matrizearen heinarekin bat dator:

$$h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$$

3. kasua: $a = 1 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, A matrizeko lehen bi errenkadak berdinak dira, beraz:

$$h(A) = h\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Matrize hedatuaren heina kalkulatuko dugu:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3$$

Hau da, $h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateriaezina.}$

Laburbilduz:

1. kasua: $a \neq -1$ eta $a \neq 1 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Determinatua.}$

2. kasua: $a = -1 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$

3. kasua: $a = 1 \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateriaezina.}$

b) Sistema ebatziko dugu $a = -1$ den kasuan. A matrizearen heina kalkulatzeko erabili den minorra erabilita planteatzen da sistemaren ebazpena:

$$\begin{cases} -x + 4y - z = -1 \\ x - 4y + z = 1 \\ 3x + 6y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ -4y + z = 1 - \lambda \\ 6y + 2z = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

Cramer-en erregela erabilita sistema ebatziko dugu: $\begin{cases} -4y + z = 1 - \lambda \\ 6y + 2z = 3 - 3\lambda \end{cases}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3-3\lambda & 2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{1-\lambda}{14}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1-\lambda \\ 6 & 3-3\lambda \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-9}{7}(\lambda-1)$$

Sistemaren emaitza hauxe da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/14 \\ 9/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1/14 \\ -9/7 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P9. Ondorengo sistema emanik:
$$\begin{cases} (a+1)y + 2(a+1)z = 2a \\ 3ax + (2a-1)z = 0 \\ (a+1)y = -4a \end{cases}$$

- a) Eztabaidatu sistema a parametroaren arabera.
- b) Ebatzi posible den kasuetan.

EBAZPENA

a) Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua definituko ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & 2(a+1) \\ 3a & 0 & (2a-1) \\ 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a+1 & 2(a+1) & 2a \\ 3a & 0 & (2a-1) & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & -4a \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a+1 & 2(a+1) \\ 3a & 0 & (2a-1) \\ 0 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(a+1) \begin{vmatrix} 0 & 2(a+1) \\ 3a & (2a-1) \end{vmatrix} = 6a(a+1)^2$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

1. kasua: $a \neq -1$ eta $a \neq 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 =$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua: $a = -1 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

A matrizeko lehenengo eta azkeneko errenkadak eta bigarren zutabea nuluak dira, beraz

$h(A) = 1$. Kalkula dezagun matrize hedatuaren heina:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2$$

$h(A) = 1 \neq h(A|\vec{b}) = 2 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3. kasua: $a = 0 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ondoko bi ordenako minorrak A matrizearen heina emango digu:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Behin A matrizearen heina kalkulatu dugunean, matrize hedatuaren heina kalkulatu dugu. Matrize hedatua eranstean den zutabea nulua denez, sistema homogeneoa da eta, beraz, bateragarria: $h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

Laburbilduz:

1. kasua: $a \neq -1$ eta $a \neq 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua: $a = -1 \Rightarrow h(A) = 1 \neq h(A|\vec{b}) = 2 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3. kasua: $a = 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

b) Lehenengo kasuan, $a \neq -1$ eta $a \neq 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua daukagu:

$$\begin{cases} (a+1)y + 2(a+1)z = 2a \\ 3ax + (2a-1)z = 0 \\ (a+1)y = -4a \end{cases}$$

Cramer-en erregela erabiliz zera lortzen da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2a & a+1 & 2(a+1) \\ 0 & 0 & (2a-1) \\ -4a & a+1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1-2a}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2a & 2(a+1) \\ 3a & 0 & (2a-1) \\ 0 & -4a & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4a}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a+1 & 2a \\ 3a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & -4a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3a}{a+1}$$

Beraz, sistemaren soluzioa honakoa da:

$$\begin{cases} x = \frac{1-2a}{a+1} \\ y = \frac{-4a}{a+1} \\ z = \frac{3a}{a+1} \end{cases}$$

Hirugarren kasuan, $a = 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua daukagu. Ebatzi beharreko sistema hau xe da:}$

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ -z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Eta sistemaren emaitza honakoa da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P10. Ebatzi ondoko sistema homogeneoa $\begin{cases} (a+1)x + y + 3z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ 3x - y + (a+1)z = 0 \end{cases}$, a parametroaren menpe.

EBAZPENA

Sistema homogeneoa denez, bateragarria da: $h(A) = h(A|\vec{b}) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 3 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 3 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 3 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = (-2+a)(1+a)(4+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Kasu hauek bereiz daitezke:

1. kasua: $a \neq -4$ eta $a \neq -1$ eta $a \neq 2 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Determinatua (soluzio tribiala).}$

2. kasua: $a = -4 \Rightarrow h(A) \leq 2:$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$

A matrizearen heina kalkulatzeko erabilitako minorren arabera planteatzen da sistemaren ebazpidea:

$$\begin{cases} -3x + y + 3z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y + 3z = 3\lambda \\ -3y + z = -\lambda \end{cases}$$

Cramer-en erregela erabilita, sistema baliokidearen emaitzak diren x eta y ezezagunak kalkulatu dira:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{3\lambda}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}}{10} = \frac{4\lambda}{5}$$

Eta sistemaren emaitza hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3. kasua: $a = -1 \Rightarrow h(A) \leq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

$h(A) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua}$. Aurreko kasuan erabilitako prozesuari jarraituz:

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y + 3z = 0 \\ z = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Eta sistemaren emaitza hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4. kasua: $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Aurreko minorra erabilita, hasierako sistemaren baliokidea den sistema planteatzen da:

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y + 3z = -3\lambda \\ 3y + z = -\lambda \end{cases}$$

Azkenik, Cramer-en erregelaz baliatuz x eta y ezezagunak kalkulatu ditugu:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3\lambda & 3 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-8} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3\lambda \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}}{-8} = -\lambda$$

Eta sistemaren soluzioa hauxe da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

P11. Eztabaidatu ondoko sistema $\begin{cases} x + by - z = 1 \\ x + ay + 2bz = a \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ a eta b parametroen arabera. Ebatzi

bateragarri indeterminatua denean.

EBAZPENA

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 1 & a & 2b \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -1 & 1 \\ 1 & a & 2b & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatu dugu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & -1 \\ 1 & a & 2b \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2b^2 - b - 1 = 2(b-1)\left(b + \frac{1}{2}\right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2(b-1)\left(b + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1. kasua: $b \neq 1$ eta $b \neq -\frac{1}{2}$: $h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun}$ kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua: $b = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

A eta $(A|\vec{b})$ matrizeen heinak kalkulatu ditugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3$$

$h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3. kasua: $b = -\frac{1}{2}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & | & 1 \\ 1 & a & -1 & | & a \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

A eta $(A|\vec{b})$ matrizeen heinak kalkulatuko ditugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5a}{2} + 1 \Rightarrow \frac{-5a}{2} + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2 \\ a \neq \frac{2}{5} \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3 \end{cases}$$

3.1 kasua: $b = -\frac{1}{2}$ eta $a = \frac{2}{5} \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

Heina kalkulatzeko erabilitako minorraren arabera ebazten da:

$$\begin{cases} x - \frac{y}{2} - z = 1 \\ x + \frac{2}{5}y - z = \frac{2}{5} \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 1 + \lambda \\ x + y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \lambda \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3.2 kasua: $b = -\frac{1}{2}$ eta $a \neq \frac{2}{5} \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

Laburbilduz:

1. kasua: $b \neq 1$ eta $b \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua: $b = 1 \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3. kasua: $b = -\frac{1}{2}$ denean:

3.1 kasua: $a = \frac{2}{5} \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

3.2 kasua: $a \neq \frac{2}{5} \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

P12. Eztabaidatu ondoko sistema
$$\begin{cases} (a-1)y - bz = 1 \\ ax + y = b \\ x + y + bz = 1 \end{cases}$$
 a eta b parametroen arabera. Ebatzi bateragarri indeterminatua denean.

EBAZPENA

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & -b \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-1 & -b & 1 \\ a & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatu dugu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a-1 & -b \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = -b(a^2 - 1), \quad |A| = 0 \Leftrightarrow -b(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

1. kasua: $b \neq 0$ eta $a \neq 1$ eta $a \neq -1$: $h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 =$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua: $b = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen heina kalkulatu dugu:

$$A \text{ matrizearen 3. zutabea nulua denez: } h(A) = h \begin{pmatrix} 0 & a-1 \\ a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bi ordenako minorrak hauek dira:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a(a-1), \quad \begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1), \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1$$

Bi ordenako hiru minorrak a parametroaren balio bererako nuluak direnez:

$$- \quad a = 1 \Rightarrow h(A) = 1$$

$$- \quad a \neq 1 \Rightarrow h(A) = 2$$

Matrize hedatuaren heina kalkulatu dugu:

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2$$

Determinante hori zero da, $a = 1$ denean. Kasu honetan matrize hedatuaren heina $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ minorra erabiltzaile kalkulatu da eta, beraz, $h(A|\vec{b}) = 2$. Orduan:

$$- \quad a = 1 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2$$

$$- \quad a \neq 1 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3$$

Koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuaren heinak konparatuz kasu hauek bereiz daitezke:

2.1 kasua: $a \neq 1 \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

2.2 kasua: $a = 1 \Rightarrow h(A) = 1 \neq h(A|\vec{b}) = 2 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3. kasua: $a = 1$ denean, hauek dira matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -b & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen heina kalkulatu dugu. A matrizeko lehenengo bi zutabeak berdina direnez:

$$h(A) = h \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Bi ordenako hiru minorrak kontsideratuz:

$$\begin{vmatrix} 0 & -b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = b, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b, \quad \begin{vmatrix} 0 & -b \\ 1 & b \end{vmatrix} = b$$

Bi ordenako hiru minorrak nuluak dira b parametroaren balio bererako. Orduan:

$$- \quad b = 0 \Rightarrow h(A) = 1$$

$$- \quad b \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Ondoren, matrize hedatuaren heina kalkulatuko dugu:

$$\begin{vmatrix} 0 & -b & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = -b^2 + 2b$$

Determinante hori zero da, $b = 0$ edo $b = 2$ denean. Kasu honetan matrize hedatuaren heina

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ minorra erabilita kalkulatzeko da eta, beraz, } h(A|\vec{b}) = 2.$$

Beraz:

- $b = 0 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2$
- $b = 2 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2$
- $b \neq 0$ eta $b \neq 2 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3$

Koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuaren heinak konparatuz kasu hauek bereiz daitezke:

3.1 kasua: $b \neq 0$ eta $b \neq 2 \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3.2 kasua: $b = 0 \Rightarrow h(A) = 1 \neq h(A|\vec{b}) = 2 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3.3 kasua: $b = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

- $a = 1$ eta $b = 2$ kasuko ebazpidea:

$$\begin{cases} -2z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2z = 1 \\ x + 2z = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Eta haren emaitza honakoa da: $z = -\frac{1}{2}$, $y = \lambda$, $x = 2 - \lambda$. Hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4. kasua: $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -b \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -b & 1 \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array} \right)$$

Koefizienteen matrizearen heina kalkulatu dugu:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow h(A) = 2$$

Eta matrize hedatuaren heina ere kalkulatu dugu. $h(A) = 2$ denez eta zutabeak (edo errenkadak) proportzionalak ez direnez, konbinazio lineal bat existitzen da hiru zutabeen (edo errenkaden) artean. Beraz, heina kalkulatzeko edozein zutabe ken daiteke. Ken dezagun 3. zutabea:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2b - 4$$

Determinante hori zero da, $b = -2$ denean. Orduan:

$$- \quad b = -2 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 2$$

$$- \quad b \neq -2 \Rightarrow h(A|\vec{b}) = 3$$

Koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuaren heinak konparatuko ditugu b parametroaren arabera:

4.1 kasua: $b \neq -2 \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Baterazina.

4.2 kasua: $b = -2 \Rightarrow h(A) = 2 = h(A|\vec{b}) <$ ezezagun kopurua $= 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

$a = -1$ eta $b = -2$ kasuko ebazpidea:

$$\begin{cases} -2y + 2z = 1 \\ -x + y = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 1 - 2\lambda \\ -x + y = -2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Eta haren emaitza honakoa da: $x = \frac{3}{2} + \lambda$, $y = -\frac{1}{2} + \lambda$, $z = \lambda$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

EBATZITAKO GALDERAK

G1. Arrazoitu ondoko baieztapena egia den. Izan bitez $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea eta $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema. Gai askeen bektorea, $\vec{b}$, 2. ezezagunari dagozkion koefizienteekiko proportzionala bada, orduan $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema bateraezina da.

EBAZPENA

Gezurra. Gai askeen bektorea, $\vec{b}$, A matrizeko zutabe batekiko proportzionala bada, orduan, $h(A) = h(A|\vec{b})$ beteko da. Beraz, sistema bateragarri determinatua edo indeterminatua izango da, heina ezezagun kopuruaren berdina bada edo txikiagoa bada.

G2. Arrazoitu ondoko baieztapena egia den. $(A|\vec{b})$ matrize hedatuaren heina beti da koefizienteen matrizearen heina baino handiagoa.

EBAZPENA

Gezurra. Baieztapen zuzena hauxe litzateke: $(A|\vec{b})$ matrize hedatuaren heina beti da koefizienteen matrizearen heina baino handiagoa edo berdina: $h(A) \leq h(A|\vec{b})$. Kontuan izan behar baita, koefizienteen matrizea matrize hedatuaren azpimatriz bat dela.

G3. Izan bitez $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea eta $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema. A matrizean gutxienez hiru zutabe berdinak badira eta $h(A) = h(A|\vec{b})$ betetzen bada, arrazoitu ondoko baieztapenak egia diren:

- $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema bateragarri indeterminatua da.
- Sistemak $(n - 2)$ oinarritzko aldagai eta 2 aldagai aske ditu.

EBAZPENA

- Egia. $h(A) = h(A|\vec{b})$ betetzen denez, sistema bateragarria da. Bestalde, A matrizean gutxienez hiru zutabe berdinak direnez, $h(A) \leq n - 2$ beteko da eta n ezezaguneko sistema daukagunez, $h(A) \leq n$. Beraz, sistema bateragarri indeterminatua izango da.
- Gezurra. A matrizean gutxienez hiru zutabe berdinak direnez, $h(A) \leq n - 2$ beteko da, n ezezagun kopurua izanik. Demagun $h(A) = k$ betetzen dela. k ordenako minor

horretako koefizientei biderkatzen dauden ezezagunak oinarrizko ezezagunak dira eta oinarrizko aldagaiak deritze. Gainerako $(n - k)$ ezezagunak, aldiz, aldagai askeak dira. $h(A) = k \leq n - 2$ betetzen denez, sistemak gehienez $(n - 2)$ oinarrizko aldagai eta 2 aldagai aske ditu.

G4. Izan bitez $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrizea, $A\vec{x} = \vec{b}$ ekuazio linealetako sistema eta $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$ aurreko sistemaren emaitza. Arrazoitu ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren:

- $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema bateragarri indeterminatua bada, orduan $k\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ motako edozein n -kote ere sistemaren emaitza da.
- $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema homogenea bada, orduan $k\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ motako edozein n -kote ere sistemaren emaitza da.

EBAZPENA

- Gezurra. Aurreko baieztapena gezurra dela frogatzeko kontraadibide bat erabiliko dugu. Hau da, sistema bateragarri indeterminatu bat planteatu eta ebatzi ondoren, sistemako emaitza bat abiapuntutzat hartuz ikusiko dugu haren multiplo bat ez dela sistemaren soluzioa.

Izan bedi $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$ ekuazio linealetako sistema. Sistemako koefizienteen matrizea eta matrize hedatua hurrengoak dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuen heinak kalkulatu ditugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema}$$

Bateragarri Indeterminatua.

A matrizearen heina zehaztu duen minorra erabilita sistema ebatziko dugu:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ x + z = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases}$$

Sistemaren soluzioa $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ da.

Beraz, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$ -ko bektorea sistemaren emaitzetako bat da. Ikus dezagun

orain $2 \cdot \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ bektoreak sistemako berdintza guztiak betetzen dituen:

$$\begin{cases} 2 + 0 = 2 \neq 1 \\ 2 + 0 - 6 = -4 \neq -2 \end{cases}$$

Beraz, $2 \cdot \vec{\alpha}$ ez da sistemaren soluzioa, ondorioz, aurreko baieztapena gezurra dela frogatu dugu.

- b) Egia. $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$ $\mathbb{R}^n$ -ko bektorea $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema homogeneoaren soluzioa denez, $A\vec{\alpha} = \vec{0}$ berdintza betetzen da. Bestalde, $k\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ motako edozein n -kote $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema homogeneoaren soluzioa izateko $A(k\vec{\alpha}) = \vec{0}$ bete behar da. Frogatu beharreko berdintzaren ezker aldea garatuz ondorengoa daukagu:

$$A(k\vec{\alpha}) = k \cdot \underbrace{A\vec{\alpha}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Beraz, $k\vec{\alpha}$ sistemaren soluzioa dela frogatu dugu.

MATHEMATICA ERABILIZ EBATZITAKO ARIKETAK

M1. Ondorengo sistema emanik:
$$\begin{cases} ax + 4y + az = -1 \\ x + 4ay + z = 1 \\ 3x - (4a - 2)y + 2z = 3 \end{cases},$$

- Eztabaidatu sistema a parametroaren arabera.
- Ebatzi sistema posible den kasuetan.

EBAZPENA

- Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua definitzen dira:

```
Remove["Global`*"]
```

```
matkoef = {{a, 4, a}, {1, 4 a, 1}, {3, -(4 a - 2), 2}};
MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & 2 - 4a & 2 \end{pmatrix}$$

```
matzab = {{a, 4, a, -1}, {1, 4 a, 1, 1}, {3, -(4 a - 2), 2, 3}};
MatrixForm[matzab]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a & -1 \\ 1 & 4a & 1 & 1 \\ 3 & 2 - 4a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizea karratua denez, haren determinantea zero egiten duten a parametroaren balioak kalkulatzeko dira:

```
Det[matkoef] // Factor
```

$$-4 (-1 + a) (1 + a)$$

```
Solve[Det[matkoef] == 0]
```

$$\{ \{a \rightarrow -1\}, \{a \rightarrow 1\} \}$$

1. kasua: $a \neq -1$ eta $a \neq 1 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Determinatua.}$

2. kasua: $a = -1$ denean matrizeen heinak kalkulatuko ditugu:

```
a = -1; MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[matkoef]
```

```
2
```

```
MatrixRank[matkoef] == MatrixRank[matzab]
```

```
True
```

Kasu honetan, $h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$

3. kasua: $a = 1$ kasuan matrizeen heinak kalkulatuko ditugu:

```
a = 1; MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[matkoef] == MatrixRank[matzab]
```

```
False
```

Kasu honetan, $h(A) \neq h(A|\vec{b}) \Rightarrow \text{Sistema Bateriaezina.}$

b) Sistema bateragarria denean, haren soluzioa kalkulatuko dugu:

1. kasua: $a \neq -1$ eta $a \neq 1 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 = \text{ezezagun kopurua} \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Determinatua.}$

```
Clear[a]; MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 1 & 4a & 1 \\ 3 & 2 - 4a & 2 \end{pmatrix}$$

Sistema a parametroaren menpekoea denez, Reduce agindua erabiltza ebazten da:

```
sol = Reduce[matkoeff.{x, y, z} == {-1, 1, 3}, {x, y, z}]
```

$$\left(a == -1 \ \&\& \ y == \frac{1-x}{14} \ \&\& \ z == -\frac{9}{7}(-1+x) \right) \ || \ \left((-1+a)(1+a) \neq 0 \ \&\& \ x == \frac{-3+8a}{2(-1+a)} \ \&\& \ y == \frac{1}{70}(-19-24a+x+6ax) \ \&\& \ z == \frac{1}{35}(53+8a-47x-2ax) \right)$$

```
sol = {ToRules[sol]};
```

Sistemaren emaitza kasu honetan hauxe da:

```
x = x /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{3-8a}{2-2a}$$

```
y = y /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{1}{4(-1+a)}$$

```
z = z /. sol[[2]] // Simplify
```

$$\frac{1-8a}{2(-1+a)}$$

Beraz, kasu honetan soluzioa $x = \frac{3-8a}{2-2a}, y = \frac{1}{4(-1+a)}, z = \frac{1-8a}{-2+2a}$ da.

2. kasua: $a = -1$ denean, $h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

```
Clear[x, y, z, sol]
```

```
a = -1; MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Berriro ere Reduce agindua erabilita ebatziko dugu sistema:

```
sol = Reduce[matkoef.{x, y, z} == {-1, 1, 3}, {x, y, z}];
sol = {ToRules[sol]}
```

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \frac{1}{14} - \frac{x}{14}, z \rightarrow \frac{9}{7} - \frac{9x}{7} \right\} \right\}$$

```
y = y /. sol[[1]] // Simplify
```

$$\frac{1-x}{14}$$

```
z = z /. sol[[1]] // Simplify
```

$$-\frac{9}{7}(-1+x)$$

Kasu honetan sistemaren emaitza hurrengoa da: $y = \frac{1-x}{14}, z = \frac{-9(-1+x)}{7}, \forall x \in \mathbb{R}$.

M2. Eztabaidatu eta ebatzi ondoko ekuazio linealetako sistema: $\begin{cases} x + by - z = 1 \\ x + ay + 2bz = a, a \text{ eta} \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

b parametro errealean menpe.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua definitzen dira:

```
matkoef = {{1, b, -1}, {1, a, 2 b}, {1, 1, -1}}
```

```
{{1, b, -1}, {1, a, 2 b}, {1, 1, -1}}
```

```
matzab = {{1, b, -1, 1}, {1, a, 2 b, a}, {1, 1, -1, 0}}
{{1, b, -1, 1}, {1, a, 2 b, a}, {1, 1, -1, 0}}
```

Koefizienteen matrizea karratua denez, haren determinantea kalkulatu dugu eta zero egiten duten parametroen balioak kalkulatu ditugu. Lortutako balioak kontuan hartuz, aurkez daitezkeen kasuak aztertuko dira:

```
Solve[Det[matkoef] == 0]
{{b -> -1/2}, {b -> 1}}
```

Bi kasu bereizi behar dira:

1. kasua: $b \neq -\frac{1}{2}$ eta $b \neq 1$, $h(A) = h(A|\vec{b}) = 3 =$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

2. kasua: $b = -\frac{1}{2}$ denean, koefizienteen matrizearen heina kalkulatu dugu:

```
matkoef1 = matkoef /. b -> -1/2; MatrixForm[matkoef1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Minors[matkoef1] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + a & 0 & \frac{1}{2} + a \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 - a & 0 & 1 - a \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizearen heina 2 da, bi ordenako minor ez-nulu bat existitzen baita. Kalkula dezagun $b = -\frac{1}{2}$ denean matrize hedatuaren heina:


```
matzab1 = matzab /. b -> -1 / 2; MatrixForm[matzab1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m1 = matzab1[[{1, 3}, {1, 2}]]; MatrixForm[m1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Det[m1]
```

$$\frac{3}{2}$$

Matrize hedatuaren heina gutxienez 2 da. Bestalde, matrize hedatuko lehenengo eta hirugarren zutabeak proportzionalak direnez, matrize hedatuaren heina beste matrize honen heinarekin bat dator:

```
m2 = matzab1[[{1, 2, 3}, {1, 2, 4}]]; MatrixForm[m2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Det[m2]
```

$$1 - \frac{5a}{2}$$

```
Solve[% == 0]
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{2}{5} \right\} \right\}$$

$a = \frac{2}{5}$ denean, $h(A|\vec{b}) = 2$, ez baita existitzen hiru ordenako minor ez-nulurik. $a \neq \frac{2}{5}$ denean, $h(A|\vec{b}) = 3$, gutxienez existitzen baita hiru ordenako minor ez-nulu bat. Hau da:

2.1 kasua: $a = \frac{2}{5}$, $h(A) = h(A|\vec{b}) = 2 < \text{ezezagun kopurua} = 3 \Rightarrow \text{Sistema Bateragarri Indeterminatua.}$

2.2 kasua: $a \neq \frac{2}{5}$, $h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

3. kasua: $b = 1$ denean, kalkula dezagun koefizienteen matrizearen heina:

```
matkoef2 = matkoef /. b -> 1; MatrixForm[matkoef2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Minors[matkoef2]
```

```
{{-1 + a, 3, 2 + a}, {0, 0, 0}, {1 - a, -3, -2 - a}}
```

Koefizienteen matrizearen heina 2 da, gutxienez bi ordenako minor ez-nulu bat existitzen baita.

Matrize hedatuaren heina ere kalkulatuko dugu $b = 1$ den kasurako:

```
matzab2 = matzab /. b -> 1; MatrixForm[matzab2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m1 = matzab2[{{1, 2}, {1, 3}}]; MatrixForm[m1]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Det[m1]
```

```
3
```

Matrize hedatuaren heina gutxienez 2 da.

```
m2 = matzab2[{{1, 2, 3}, {1, 3, 4}}]; MatrixForm[m2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Det[m2]
```

```
-3
```

Azkenik, matrize hedatuaren heina $h(A|\vec{b}) = 3$ da $\forall a \in \mathbb{R}$. Kasu honetan, $h(A) = 2 \neq h(A|\vec{b}) = 3 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina.

Reduce agindua erabil daiteke lortu dugun sailkapena lortzeko eta sistema bateragarria denean emaitza lortzeko:

```
sol = Reduce[{x + b*y - z == 1, x + a*y + 2*b*z == a, x + y - z == 0}, {y, x, z}]
```

$$\left(b \rightarrow -\frac{1}{2} \ \&\& \ a \rightarrow \frac{2}{5} \ \&\& \ y \rightarrow -\frac{2}{3} \ \&\& \ z \rightarrow \frac{1}{3} (-2 + 3x) \right) \ ||$$

$$\left(-1 + b \neq 0 \ \&\& \ y \rightarrow \frac{1}{-1+b} \ \&\& \ 1 + 2b \neq 0 \ \&\& \ x \rightarrow \frac{-2 + a - 2y - ay}{1 + 2b} \ \&\& \ z = x + y \right)$$

Aurreko output-etik sistemaren emaitza haxe dela ondorioztatzen da:

1. kasua: $b \neq -\frac{1}{2}$ eta $b \neq 1$ kasuetan emaitza haxe da: $x = \frac{2a+2b-ab}{1+b-2b^2}$, $y = \frac{1}{-1+b}$,

$z = -\frac{1+a(-2+b)}{1+b-2b^2}$. Beraz, sistema bateragarri determinatua da.

```
soll = {ToRules[sol]}
```

$$\left\{ \left\{ b \rightarrow -\frac{1}{2}, a \rightarrow \frac{2}{5}, y \rightarrow -\frac{2}{3}, z \rightarrow \frac{1}{3} (-2 + 3x) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ y \rightarrow \frac{1}{-1+b}, x \rightarrow \frac{-2 + a - 2y - ay}{1 + 2b}, z \rightarrow x + y \right\} \right\}$$

```
{x, y, z} = {x, y, z} /. soll[[2]] // Simplify
```

$$\left\{ \frac{2a + 2b - ab}{1 + b - 2b^2}, \frac{1}{-1 + b}, -\frac{1 + a(-2 + b)}{1 + b - 2b^2} \right\}$$

2. kasua:

2.1 kasua: $b = -\frac{1}{2}$ eta $a = \frac{2}{5}$ direnean, sistemaren emaitza hauxe da: $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{(-2+3x)}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Beraz, sistema bateragarri indeterminatua da.

2.2 kasua: $b = -\frac{1}{2}$ eta $a \neq \frac{2}{5}$ kasua ez da agertzen Mathematica programak ematen digun emaitzan. Beraz, kasu honetan sistema bateraezina da.

3. kasua: $b = 1$ kasua ere ez da Mathematica programak ematen digun emaitzan agertzen. Beraz, kasu honetan ere sistema bateraezina da.

M3. Eztabaidatu eta ebatzi ondoko ekuazio linealetako sistema:
$$\begin{cases} -y + 2z + t = 0 \\ x - 2ay - z = 1 \\ y - 2z - at = 0 \\ x - z - t = a \end{cases}, a$$

parametro errealearen menpe.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

Ekuazio linealetako sistema definitzen da:

```
sistema = {-y + 2 z + t == 0, x - 2 a * y - z == 1, y - 2 z - a * t == 0, x - z - t == a};
```

Koefizienteen matrizea eta matrize hedatua definitzen ditugu:

```
matkoef = {{0, -1, 2, 1}, {1, -2 a, -1, 0}, {0, 1, -2, -a}, {1, 0, -1, -1}};
MatrixForm[matkoef]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -a \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
b = {0, 1, 0, a}; matzab = Transpose[Join[Transpose[matkoef], {b}]];
MatrixForm[matzab]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2a & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Koefizienteen matrizea karratua denez, haren determinantea kalkulatu dugu eta zero egiten duten parametroaren balioak kalkulatu ditugu. Lortutako balioak kontuan hartuz, aurkez daitezkeen kasuak aztertzen dira:

```
Solve[Det[matkoef] == 0]
{{a -> 0}, {a -> 1}}
```

1. kasua: $a \neq 0$ eta $a \neq 1$, $h(A|\vec{b}) = 4 =$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ Sistema Bateragarri Determinatua.

```
Solve[sistema, {x, y, z, t}]
{{x -> -\frac{1-a-4a^2}{4a}, y -> -\frac{1-a}{2a}, z -> -\frac{1-a}{4a}, t -> 0}}
```

2. kasua: $a = 1$ denean, koefizienteen matrizearen heina eta matrize hedatuarena kalkulatu ditugu:

```
matkoef1 = matkoef /. a -> 1; MatrixRank[matkoef1]
3
```

```
matzab1 = matzab /. a -> 1; MatrixRank[matzab1]
3
```

Kasu honetan, $h(A|\vec{b}) = 3 <$ ezezagun kopurua $= 4 \Rightarrow$ Sistema Bateragarri Indeterminatua.

Sistemaren soluzioa bilatuko dugu $a = 1$ den kasuan:

```
sistemat1 = sistema /. a -> 1; Solve[sistemat1, {x, y, z, t}]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow 1 + \frac{3t}{4}, y \rightarrow \frac{t}{2}, z \rightarrow -\frac{t}{4} \right\} \right\}$$

3. kasua: $a = 0$ denean, koefizienteen matrizearen heina eta matrize hedatuarena kalkulatu ditugu:

```
matkoeff2 = matkoeff /. a -> 0; MatrixRank[matkoeff2]
```

3

```
matzab2 = matzab /. a -> 0; MatrixRank[matzab2]
```

4

Beraz, kasu honetan, $h(A) = 3 \neq h(A|\vec{b}) = 4 \Rightarrow$ Sistema Bateriaezina da.

Reduce agindua erabilia ere lortuko genituzke lortu berri dugun sailkapena eta sistemaren emaitza.

```
Reduce[sistema, {x, y, z, t}]
```

$$\left(a == 1 \ \&\& \ y == \frac{2}{3} (-1 + x) \ \&\& \ z == \frac{1-x}{3} \ \&\& \ t == \frac{4}{3} (-1 + x) \right) \ ||$$

$$\left((-1 + a) a \neq 0 \ \&\& \ x == \frac{-1 + a + 4 a^2}{4 a} \ \&\& \ y == \frac{1}{3} (-1 - 5 a + 4 a^2 + 6 x - 4 a x) \ \&\& \right.$$

$$\left. z == \frac{1}{3} (-1 - 2 a + 4 a^2 + 3 x - 4 a x) \ \&\& \ t == \frac{1}{3} (1 - a - 4 a^2 + 4 a x) \right)$$

Eta aurreko output-etik sistemaren emaitza ondoriozta daiteke:

1. kasua: $a \neq 0$ eta $a \neq 1$ denean, sistema bateragarri determinatua da. Eta kasu honetan sistemaren emaitza hauxe da:

$$x = \frac{4a^2+a-1}{4a}, y = \frac{-1+a}{2a}, z = \frac{-1+a}{4a}, t = 0$$

$$y = \frac{1}{3} (-1 - 5a + 4a^2 + 6x - 4ax) /. x \rightarrow \frac{-1 + a + 4a^2}{4a} // \text{Simplify}$$

$$\frac{-1 + a}{2a}$$

$$z = \frac{1}{3} (-1 - 2a + 4a^2 + 3x - 4ax) /. x \rightarrow \frac{-1 + a + 4a^2}{4a} // \text{Simplify}$$

$$\frac{-1 + a}{4a}$$

$$t = \frac{1}{3} (1 - a - 4a^2 + 4ax) /. x \rightarrow \frac{-1 + a + 4a^2}{4a} // \text{Simplify}$$

$$0$$

2. kasua: $a = 1$ denean, sistema bateragarri indeterminatua da eta haren emaitza hauxe da:

$$y = \frac{2}{3}(x - 1), z = \frac{1}{3}(1 - x), t = \frac{4}{3}(x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$$

3. kasua: $a = 0$ kasua ez da agertzen Mathematica programak ematen digun emaitzan. Beraz, kasu honetan sistema bateraezina da.

M4. Ebatzi ondoko ekuazio linealetako sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 6 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

EBAZPENA

Remove["Global`*"]

Koefizienteen matrizea eta gai askeen bektorea definitzen dira:

$m = \{\{1, 1, -1\}, \{2, 1, 1\}, \{-1, -1, 2\}\}; b = \{0, 6, 1\};$

Ekuazio linealetako sistema definitzen da:

```
ekuazioak = Thread[m.{x, y, z} == b]
{x + y - z == 0, 2 x + y + z == 6, -x - y + 2 z == 1}
```

```
Det[m]
-1
```

Koefizienteen matrizearen determinantea ez-nulua denez, sistema bateragarri determinatua da, beraz, x , y eta z ezezagunen balioak LinearSolve agindua erabilita kalkula daitezke:

```
soll = LinearSolve[m, b]
{4, -3, 1}
```

Solve agindua erabilita ere ebatz daiteke sistema:

```
sol2 = Solve[ekuazioak, {x, y, z}]
{{x -> 4, y -> -3, z -> 1}}
```

M5. Ebatzi ondoko sistema homogenea $\begin{cases} (a+1)x + y + 3z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ 3x - y + (a+1)z = 0 \end{cases}$, a parametroaren menpe.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```


Sistema homogeneoa denez, aski da koefizienteen matrizea definitzea:

```
matkoeff = {{a + 1, 1, 3}, {1, 1 + a, 1}, {3, -1, a + 1}};
MatrixForm[matkoeff]
```

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 3 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 3 & -1 & 1+a \end{pmatrix}$$

```
sol = Reduce[matkoeff.{x, y, z} == ConstantArray[0, 3], {x, y, z}]
```

$$\left((a = -4 \mid \mid a = -1 \mid \mid a = 2) \ \&\& \right. \\ \left. y = \frac{1}{10} (26x - 7ax - 3a^2x) \ \&\& \ z = \frac{1}{10} (-12x - ax + a^2x) \right) \mid \mid \\ (-8 - 6a + 3a^2 + a^3 \neq 0 \ \&\& \ x = 0 \ \&\& \ y = 0 \ \&\& \ z = 0)$$

```
Solve[-8 - 6a + 3a^2 + a^3 == 0]
```

```
{{a -> -4}, {a -> -1}, {a -> 2}}
```

Output-ean ikusten den bezala, $a = -4$ edo $a = -1$ edo $a = 2$ denean, sistemaren emaitza ondokoa da:

$$y = \frac{26x - 7ax - 3a^2x}{10}, z = \frac{-12x - ax + a^2x}{10}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bestalde, $a \neq -4$ eta $a \neq -1$ eta $a \neq 2$ denean, sistemaren soluzioa triviala da:

$$x = y = z = 0$$

```
sol = {ToRules[sol]}
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow -4, y \rightarrow \frac{1}{10} (26x - 7ax - 3a^2x), z \rightarrow \frac{1}{10} (-12x - ax + a^2x) \right\}, \right. \\ \left\{ a \rightarrow -1, y \rightarrow \frac{1}{10} (26x - 7ax - 3a^2x), z \rightarrow \frac{1}{10} (-12x - ax + a^2x) \right\}, \\ \left\{ a \rightarrow 2, y \rightarrow \frac{1}{10} (26x - 7ax - 3a^2x), z \rightarrow \frac{1}{10} (-12x - ax + a^2x) \right\}, \\ \left. \{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0\} \right\}$$

Ondoren, kasu guztiak aztertuko dira:

1. kasua: $a = -4$ denean, sistema bateragarri indeterminatua da:

```
a = a /. sol[[1]]
```

```
-4
```

```
{x, y, z} = {x, y, z} /. sol[[1]]
```

```
{x, 3 x / 5, 4 x / 5}
```

2. kasua: $a = -1$ denean, sistema bateragarri indeterminatua da:

```
Clear[a, x, y, z]
```

```
a = a /. sol[[2]]
```

```
-1
```

```
{x, y, z} = {x, y, z} /. sol[[2]]
```

```
{x, 3 x, -x}
```

3. kasua: $a = 2$ denean ere, sistema bateragarri indeterminatua da:

```
Clear[a, x, y, z]
```

```
a = a /. sol[[3]]
```

```
2
```

```
{x, y, z} = {x, y, z} /. sol[[3]]
```

```
{x, 0, -x}
```

4. kasua: $a \neq -4$ eta $a \neq -1$ eta $a \neq 2$ denean, sistema bateragarri determinatua da eta haren emaitza tribiala da:

```
Clear[a, x, y, z]
```

```
a = a /. sol[[4]]
```

```
a
```

```
{x, y, z} = {x, y, z} /. sol[[4]]
```

```
{0, 0, 0}
```


3 ESPAZIO BEKTORIALAK

3.1 Konposaketa-legeak

Definizioa. Izan bitez A , B eta C multzoak eta $f: A \times B \rightarrow C$ aplikazioa. Konposaketa-lege deritzo mota honetako edozein aplikaziori:

$$f: A \times B \rightarrow C$$

$$f(a, b) = c, \forall a \in A, \forall b \in B, \text{ non } c \in C$$

Edo gauza bera dena: $a * b = c, \forall a \in A, \forall b \in B, \text{ non } c \in C$

Oharrak:

- $A = B = C$ badira, hau da, $f: A \times A \rightarrow A$ barne-konposaketa legea da.
- $A \neq C$ eta $B = C$ badira, hau da, $f: A \times B \rightarrow B$ kanpo-konposaketa legea da.

3.2 Barne-konposaketa legeen propietateak

Izan bedi $f: A \times A \rightarrow A$ barne-konposaketa lege bat «*» sinboloaz adieraziko duguna, honek hurrengo propietateak betetzen ditu:

- Propietate elkarkorra: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in A$
- Propietate trukakorra: $a * b = b * a, \forall a, b \in A$
- Elementu neutroaren existentzia: $e \in A$ elementua, A multzoan definitutako «*» barne-konposaketa legearekiko elementu neutroa da, ondorengo berdintzak betetzen baditu: $a * e = e * a = a, \forall a \in A$.
- Elementu simetrikoen existentzia: $a' \in A$ elementua A multzoan definitutako «*» barne-konposaketa legearekiko $a \in A$ elementuaren simetrikoa da, ondorengo berdintzak

betetzen badira: $a * a' = a' * a = e$, e elementua «*» barne-konposaketa legearekiko elementu neutroa izanik.

- Barne-konposaketa lege baten banatze-propietatea beste barne-konposaketa lege batekiko. Izan bitez « Δ » eta «*» bi barne-konposaketa lege. « Δ » barne-konposaketa legeak «*» legearekiko banatze-propietatea betetzen duela esaten da, ondorengo berdintzak betetzen badira:

$$a\Delta(b * c) = (b * c)\Delta a = (a * b)\Delta(a * c) = (b * a)\Delta(c * a), \forall a, b, c \in A$$

Teorema. A multzoan definitutako «*» barne-konposaketa legearekiko elementu neutroa existitzen denean, hau bakarra da.

Teorema. Izan bedi A multzoa, non bertan definitutako «*» barne-konposaketa legea elkarkorra den eta e elementu neutroa. Orduan, $a \in A$ elementuak «*» barne-konposaketa legearekiko elementu simetrikoa $a' \in A$ izatekotan, hau bakarra izango da.

3.3 Kanpo-konposaketa legeen propietateak

Izan bedi $f_1: A \times B \rightarrow B$ kanpo-konposaketa legea eta, $f_2: A \times A \rightarrow A$ eta $f_3: B \times B \rightarrow B$ bi barne-konposaketa lege, « $\circ$ », « $\cdot$ » eta «*» sinboloen bidez adieraziko ditugunak hurrenez hurren. Orduan:

- « $\circ$ » kanpo-konposaketa legeak « $\cdot$ » barne-konposaketa legearekiko elkartze-propietatea beteko du baldin eta soilik baldin:

$$(\alpha \cdot \beta) \circ b = \alpha \circ (\beta \circ b), \forall \alpha, \beta \in A, \forall b \in B$$

- « $\circ$ » kanpo-konposaketa legeak «*» barne-konposaketa legearekiko banatze-propietatea beteko du baldin eta soilik baldin:

$$\alpha \circ (b * b') = (b * b') \circ \alpha = (\alpha \circ b) * (\alpha \circ b'), \forall \alpha \in A, \forall b, b' \in B$$

3.4 Taldea

Definizioa. Izan bedi G multzo ez-hutsa eta «*» bertan definitutako barne-konposaketa legea. $(G, *)$ taldea dela esaten da, «*» barne-konposaketa legeak elkartze-propietatea betetzen badu, elementu neutroa existitzen bada eta edozein $a \in G$ elementuk «*» barne-konposaketa legearekiko simetrikoa baldin badu.

Definizioa. $(G, *)$ taldea abeldarra da, «*» barne-konposaketa legeak trukatze-propietatea betetzen badu.

3.5 Eratzuna

Definizioa. Izan bedi A multzoa, ondoko bi barne-konposaketa legeak definituta dituen: «+» eta «·». A eratzuna da eta $(A, +, \cdot)$ adierazten da, ondoko baldintzak betetzen baditu:

- $(A, +)$ talde abeldarra da.
- «·» barne-konposaketa legeak propietate elkarkorra betetzen du.
- «·» barne-konposaketa legeak «+» barne-konposaketa legearekiko alde bietatik banatze-propietatea betetzen du.

Definizioa. Eratzun bat unitarioa da, «·» barne-konposaketa legeak elementu neutroa badu.

Definizioa. Eratzun bat trukakorra edo abeldarra da, «·» barne-konposaketa legeak trukatze-propietatea betetzen badu.

3.6 Zeroren zatitzaileak. Integrazio-domeinuak

Definizioa. Izan bedi $(A, +, \cdot)$ eratzuna. $a, b \in A - \{0\}$ elementuak zeroren zatitzaileak direla esaten da, $a \cdot b = 0$ betetzen bada, 0 «+» barne-konposaketa legearekiko elementu neutroa izanik.

Definizioa. Osotasun-eratzun deritzo zeroren zatitzailearik ez duen eratzun abeldarrari.

Definizioa. Integrazio-domeinu deritzo elementu neutrodun osotasun-eratzunari.

3.7 Gorputza

Definizioa. $(K, +, \cdot)$ integritate domeinua emanik, hau gorputza izango da, $a \in K - \{0\}$ elementuek «·» konposaketa-legearekiko simetrikoa badute.

3.8 Espazio bektoriala

Definizioa. $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ hirukotea espazio bektoriala da, honako baldintza hauek betetzen badira:

- $(E, +)$ talde abeldarra da, bere elementuei bektore deritze eta $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ bezala adierazten dira. «+» eragiketa bektoreen arteko batuketa barne-konposaketa legea izanik.
- $(K, +, \cdot)$ gorputza da, bertako elementuei eskalar deritze eta $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sinboloen bidez adierazten dira. «+» eta « $\cdot$ » eragiketek eskalarren arteko batuketa eta biderketa izanik.
- « $\circ$ » ikurrak $f: K \times E \rightarrow E$ kanpo-konposaketa legea adierazten du, $(\alpha, \vec{v}) \in K \times E$ bikote bakoitzari $\vec{u} = \alpha \circ \vec{v}$ bektorea egokitzen diona. Kanpo-konposaketa lege honek honako propietate hauek betetzen ditu:

- o Bektoreen batuketarekiko banatze-propietatea:

$$\alpha \circ (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \circ \vec{u} + \alpha \circ \vec{v}, \quad \forall \alpha \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$$

- o Eskalarren batuketarekiko banatze-propietatea:

$$(\alpha + \beta) \circ \vec{u} = \alpha \circ \vec{u} + \beta \circ \vec{u}, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{u} \in E$$

- o Eskalarren biderketarekiko elkartze-propietatea:

$$(\alpha \cdot \beta) \circ \vec{u} = \alpha \circ (\beta \circ \vec{u}), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{u} \in E$$

- o « $\circ$ » konposaketa-legearekiko elementu neutroaren existentzia:

$$1 \circ \vec{u} = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in E$$

Ohikoa da $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala $(E, K, \circ)$ bezala adieraztea. Horrela, E, K gorputzaren gaineko espazio bektoriala dela esaten da edo bakarrik E espazio bektoriala dela.

K gorputza zenbaki errealek osatzen duten $\mathbb{R}$ gorputza bada, ohiko batuketa eta biderketa definituta dituen, orduan, $((E, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala erreala dela esaten da, definitutako kanpo-konposaketa legea eskalar eta bektorearen arteko biderketa izanik: $\alpha \circ \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E$.

Espazio bektorialen zenbait adibide:

- $\mathbb{R}^2$ multzoan definitutako espazio bektorial erreala kontsideratuko dugu: $((\mathbb{R}^2, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$, bektoreak $\vec{u} = (u_1, u_2)$ formakoak izanik. «+» barne-konposaketa legea, $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, bektoreen arteko batuketa da: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

v_2). « $\circ$ » kanpo-konposaketa legeak, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, eskalar baten eta bektore baten arteko biderketa adierazten du: $\alpha \circ \vec{u} = \alpha \circ (u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$.

Antzera definitzen dira $((\mathbb{R}^3, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$ espazio bektorialeko eragiketak, edo orohar $((\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$ espazio bektorialekoak.

- n mailako polinomioen multzoak $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gorputzean definitutako espazio bektoriala osatzen du: $((\mathbb{P}_n(x), +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$, barne-konposaketa legea polinomioen arteko batuketa izanik eta kanpo-konposaketa legea eskalar baten eta polinomio baten arteko biderketa.

- $n \times m$ dimentsiodun matrizeek ere $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gorputzean definitutako espazio bektoriala osatzen dute: $((M_{n \times m}, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$, barne-konposaketa legea matrizeen arteko batuketa izanik eta kanpo-konposaketa legea eskalar baten eta matrize baten arteko biderketa.

3.8.1 Espazio bektorialen propietateak

$(E, K, \circ)$ espazio bektorial batean honako berdintzak betetzen dira:

$$- \alpha \circ \vec{u} = \vec{0}, \forall \vec{u} \in E \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$- (-\alpha) \circ \vec{u} = \alpha \circ (-\vec{u}) = -(\alpha \circ \vec{u}), \forall \alpha \in K, \forall \vec{u} \in E$$

$$- -\alpha \circ (-\vec{u}) = \alpha \circ \vec{u}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{u} \in E$$

$$- \alpha \circ \vec{u} = \beta \circ \vec{u}, \vec{u} \neq \vec{0} \text{ izanik} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$- \alpha \circ \vec{u} = \alpha \circ \vec{v}, \alpha \neq 0 \text{ izanik} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

3.9 Azpiespazio bektoriala

Definizioa. Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta S , E multzoko azpimultzo bat. S multzoa E -n definitutako legeekin espazio bektoriala baldin bada, orduan $((S, +), (K, +, \cdot), \circ)$, $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektorialaren azpiespazio bektoriala dela esaten da.

Teorema. Izan bedi $S, ((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektorialeko azpimultzo bat. $((S, +), (K, +, \cdot), \circ)$ azpiespazio bektoriala izango da, ondoko baldintzak betetzen badira:

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} \in S, & \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \\ \alpha \circ \vec{u} \in S, & \forall \alpha \in K, \forall \vec{u} \in S \end{cases}$$

Edo aurreko baldintza bien baliokidea den baldintza bakar hau betetzen bada:

$$S \text{ azpiespazio bektoriala} \Leftrightarrow \alpha \circ \vec{u} + \beta \circ \vec{v} \in S, \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in S$$

Zenbait kontsiderazio:

1.- Azpiespazio bektorial guztien barnean bektore nulua dago. Edo gauza bera dena, bektore nulua ez daukan multzoa ezin daiteke azpiespazio bektoriala izan.

2.- Bakarrik bektore nuluak osatzen duen multzoa, $\{\vec{0}\}$, edozein espazio bektorialetako azpiespazio bektoriala da.

3.- $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala emanik, E espazioa bere buruaren azpiespazio bektoriala da.

4.- $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala emanik, $\{\vec{0}\}$ eta E azpiespazio bektorialak ez bezalakoak diren beste azpiespazio bektorialeak azpiespazio propio deritze.

3.10 Konbinazio linealak. Sistema sortzailea

3.10.1 Konbinazio lineala

Definizioa. Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta bertako bektoreek osatzen duten $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ multzo edo sistema finitua. $\vec{u} \in E$ bektorea P multzoko elementuen konbinazio lineala dela esaten da, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$ eskalarrak existitzen badira, zeintzuentzat ondorengo berdintza betetzen den:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

Zenbait kontsiderazio:

- $\vec{0}$ bektore nulua edozein multzotako bektoreen konbinazio lineal gisa idatz daiteke. Horretarako, nahikoa da koefiziente guztiak nuluak hartzea: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$:

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_p$$

- $\vec{u} \in E$ bektorea $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ multzoko elementuen konbinazio lineala bada, eta era berean, multzo horretako $\vec{v}_i$ bektore bakoitza $Q = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_q\}$ multzoko elementuen konbinazio lineala bada, orduan $\vec{u} \in E$ bektorea Q multzoko elementuen konbinazio lineala da.

3.10.2 Sistema sortzailea

Definizioa. Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ E espazioko zenbait bektorek osatutako sistema. P sistemako bektoreen konbinazio linealen multzoari $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ multzoko bektoreen itxidura lineala deritzo eta $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle \equiv \langle P \rangle \equiv \alpha(P)$ notazioa erabiltza adierazten da.

Teorema. P multzoko bektoreen konbinazio linealek osatzen duten multzoa E espazio bektorialeko azpiespazio bektoriala da.

Definizioa. Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala. $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ multzoa E espazio bektorialeko sistema sortzailea dela esaten da, E espazioko edozein bektore sistemako bektoreen konbinazio lineal gisa idatz badaiteke. Hau da:

$$\forall \vec{u} \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}: \vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

Oharra:

Espazio bektorial bateko sistema sortzaile batean, beste bektoreen konbinazio lineala den bektore bat kentzean geratzen diren bektoreek sortzen duten espazio bektoriala hasierakoaren berdina da.

3.11 Dependentsia eta independentzia lineala

Definizioa. Izan bedi $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ E espazio bektorialeko bektore-sistema finitu bat. P sistema askea dela esaten da edo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ bektoreak linealki independenteak direla, baldin eta ondorengo berdintza $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}$ koefiziente guztiak nulua direnean bakarrik betetzen bada, hau da: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ direnean. Kontrako kasuan, hau da, $\alpha_i \neq 0$ balioren bat existitzen denean, edo gauza bera dena $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ betetzen denean, P sistema menpekoea edo lotua dela edo bektoreak linealki dependenteak direla esaten da.

Teorema. $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ sistema lotua bada, sistema hori barnean duen beste $Q = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_q\}$ sistema bat ere lotua da.

Teorema. $P = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ sistema askea bada, haren edozein azpimultzok osatutako edozein $A \subseteq P$ azpistema ere askea da.

Teorema. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ bektore-sistema lotua da, baldin eta soilik baldin sistemako bektoreen bat beste bektoreen konbinazio lineala bada. Zehazki $\vec{0}$ bektorea bere baitan duen edozein sistema lotua da.

Teorema. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ sistema askea bada eta $\vec{v}_{p+1} \notin \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$ bada, orduan, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$ sistema ere askea da.

3.12 Espazio bektorial bateko oinarria. Dimentsioa

3.12.1 Espazio bektorial bateko oinarria

Definizioa. $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala emanik, $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bektore-sistema askea bada eta E espazioaren sistema sortzailea bada, V sistema E espazioaren oinarri bat dela esaten da.

Teorema. Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ haren oinarri bat. $\vec{u} \in E$ edozein bektore, V -ko bektoreen konbinazio lineal gisa idatz daiteke:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ eskalarrak $\vec{u}$ bektorearen V oinarriarekiko osagaiak edo koordenatuak dira eta $\vec{u}$ bektorea ondoko notazioa erabiltzen da: $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_V$.

Propietateak:

- Edozein espazio bektorialek gutxienez oinarri bat du.
- Espazio bektorial bateko edozein oinarri bektore kopuru berberaz osatuta dago.

3.12.2 Espazio bektorial baten dimentsioa

Definizioa. E espazio bektorial bateko $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ oinarri bat emanik, oinarriko bektore kopurua espazio bektorialaren dimentsioa da: $\dim(E) = n$.

Oharra:

Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta S haren azpiespazio bektorial bat. Orduan: $\dim S \leq \dim E$.

Ondorioak:

- n dimentsiodun espazio bektorial bateko n elementuz osatutako edozein sistema sortzaile askea da.
- n dimentsiodun espazio bektorial bateko edozein sistema aske gehienez n bektorez osatua dago.
- n dimentsiodun espazio bektorial bateko n bektore baino gehiago dituen edozein sistema lotua da.
- n dimentsiodun espazio bektorial bateko edozein sistema sortzaile gutxienez n bektorez osatua dago.

3.12.3 Azpiespazio bektorial baten ekuazio parametrikokoak

Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ n dimentsioko espazio bektoriala eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bere oinarri bat. Izan bedi $((S, +), (K, +, \cdot), \circ)$ E -ko azpiespazio bektorial bat eta $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_r\}$ S -ren sistema sortzaile bat, non:

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})_V \\ \vec{s}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})_V \\ &\vdots \\ \vec{s}_r &= (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr})_V\end{aligned}$$

Orduan, S azpiespazio bektoriala V oinarriarekiko ondoko eran adieraz daiteke:

$$S \equiv \left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1r}t_r \\ x_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2r}t_r \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nr}t_r \end{aligned} \right\}_V$$

$t_1, t_2, \dots, t_r$ parametroak K gorputzekoak izanik eta $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_V \in S$, S azpiespazioa edozein bektore izanik. Ekuazio horiei S azpiespazioaren V oinarriarekiko ekuazio parametrikokoak deritze.

3.12.4 Azpiespazio bektorial baten ekuazio inplizituak

Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ n dimentsioko espazio bektoriala eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ haren oinarri bat. Izan bedi $((S, +), (K, +, \cdot), \circ)$ E -ko azpiespazio bektorial bat. Orduan, S ekuazio linealetako sistema homogeneo baten emaitza bezala adieraz daiteke:

$$S \equiv \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}_V$$

Ekuazio horiei S azpiespazioaren V oinarriarekiko ekuazio inplizituak deritze. Azpiespazio bateko linealki independenteak diren ekuazio inplizituek ondoko berdintza betetzen dute:

$$\dim E = \dim S + \text{linealki independenteak diren ekuazio inplizitu kopurua}$$

3.13 Osatu gabeko oinarriaren teorema

Izan bedi E n dimentsiodun espazio bektoriala, eta izan bitez $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ linealki independenteak diren E espazio bektorialeko p bektore, $p \leq n$ izanik. Orduan, E espazioan beraien artean eta V sistemako bektoreekiko linealki independenteak diren $(n - p)$ bektore, $\vec{w}_{p+1}, \vec{w}_{p+2}, \dots, \vec{w}_n \in E$, aurki daitezke non $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{w}_{p+1}, \dots, \vec{w}_n\}$ sistema E espazio bektorialeko oinarria den.

3.14 Azpiespazio bektorialen arteko eragiketak

3.14.1 Azpiespazio bektorialen arteko ebakidura

Izan bitez E espazio bektoriala eta S_1 eta S_2 bertako bi azpiespazio bektorial. S_1 eta S_2 espazioen ebakidura aldi berean S_1 eta S_2 azpiespazioetan dauden elementuez osatutako azpiespazio bektoriala da eta $S_1 \cap S_2$ notazioa erabiltza adierazten da:

$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{u} \in E : \vec{u} \in S_1 \wedge \vec{u} \in S_2\}$$

3.14.2 Azpiespazio bektorialen arteko batuketa

S_3 azpiespazio bektoriala S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialen batuketa da, S_3 -ko edozein bektore S_1 -eko bektore baten eta S_2 -ko beste baten arteko batuketa gisa adieraz daitekeenean:

$$\forall \vec{u} \in S_3, \exists \vec{v}_1 \in S_1, \exists \vec{v}_2 \in S_2: \vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Kasu honetan, espazio bektoriala $S_3 = S_1 + S_2$ notazioa erabiltza adierazten da. Gainera, dimentsioek berdintza hau betetzen dute:

$$\dim(S_3) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

3.14.3 Azpiespazio bektorialen arteko batuketa zuzena

E espazio bektorialeko edozein bektoreren deskonposaketa S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialetako elementuen batuketa gisa bakarra denean, E espazio bektoriala S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialen batuketa zuzena dela esaten da eta honela idazten da: $E = S_1 \oplus S_2$.

Teorema. E espazio bektoriala S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialen batuketa zuzena denean, $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ eta $V_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_q\}$ S_1 eta S_2 azpiespazio bektorialetako oinarri bana izanik, $V_1 \cup V_2$ E espazio bektorialeko oinarri bat da eta zera betetzen da:

$$\dim(E) = \dim(S_1) + \dim(S_2)$$

Teorema. Azpiespazio bektorialen arteko batuketa $E = S_1 + S_2$ zuzena da, baldin eta soilik baldin $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

3.14.4 Azpiespazio osagarriak

Izan bedi E espazio bektoriala eta F haren azpiespazio bektorial bat. G azpiespazioa F -ren E -rekiko osagarria dela esaten da, ondoko berdintzak betetzen badira:

$$\begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ F + G = E \end{cases}$$

Orduan, $E = F \oplus G$ beteko da.

3.15 Oinarri-aldaketa matrizea

Izan bedi E n dimentsiodun espazio bektoriala, eta izan bitez $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ bertako bi oinarri. V oinarrian idatzita daukagun edozein bektore U oinarrian idazteko, V oinarritik U oinarriarako aldaketa ematen digun formula erabil daiteke:

$$(\vec{x})_U = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U (\vec{x})_V$$

non:

- $(\vec{x})_V$: $\vec{x} \in E$ bektorearen V oinarriarekiko koordinatuen zutabe bektorea.
- $(\vec{x})_U$: $\vec{x} \in E$ bektorearen U oinarriarekiko koordinatuen zutabe bektorea.
- $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U$: Oinarri aldaketa matrizea da. Matrize hau n dimentsioko matrize karratua da, i . zutabeko elementuak V oinarriko $\vec{v}_i$ bektorearen U oinarriarekiko koordinatuak izanik.

Oharra:

Goiko formula erabiliz, U oinarritik V oinarrirako aldaketa ematen digun formula ondoriozta daiteke:

$$(\vec{x})_U = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U (\vec{x})_V \Rightarrow (\vec{x})_V = ((\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U)^{-1} (\vec{x})_U$$

EBATZITAKO ARIKETAK

P1. Esan ondoko azpimultzoak hurrenez hurren $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazioak diren:

- a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 3z, x - y = 0\}$.
- b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = t, x + y = 2t - 1\}$.

EBAZPENA

- a) Ikusiko dugu ea zero bektorea edo bektore nulua $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ V azpimultzoan dagoen. Ez balego, V ez litzateke azpiespazio bektoriala izango: $\begin{cases} 2 \cdot 0 + 0 = 3 \cdot 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases}$

Bete beharreko berdintza biak betetzen direnez, bektore nulua V -n dago, beraz, V azpimultzoa $\mathbb{R}^3$ -ko azpiespazio bektoriala izan daiteke. Azpiespazio bektoriala dela ziurtatzeko ondokoa frogatu behar dugu:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in V$$

Izan bitez $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1) \in V$ eta $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2) \in V$. Beraz, ondoko berdintzak beteko dira hurrenez hurren:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 3z_1 & (1) \\ x_1 - y_1 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{eta} \quad \begin{cases} 2x_2 + y_2 = 3z_2 & (3) \\ x_2 - y_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$ bektorea osatuko dugu:

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in V$ beteko da, ondoko ekuazioak betetzen badira:

$$\begin{cases} 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = 3(\alpha z_1 + \beta z_2) \\ (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) = 0 \end{cases}$$

(1) adierazpeneko berdintzaren alde biak α eskalarraz eta (3) ekuaziokoak β eskalarraz biderkatuz lortzen diren ekuazioak batuz zera lortzen da:

$$\begin{cases} \alpha(2x_1 + y_1) = \alpha(3z_1) \\ + \\ \beta(2x_2 + y_2) = \beta(3z_2) \end{cases} \Rightarrow 2\alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\beta x_2 + \beta y_2 = 3\alpha z_1 + 3\beta z_2 \Rightarrow$$

$$2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = 3(\alpha z_1 + \beta z_2) \quad (5)$$

Era berean, (2) adierazpeneko berdintzaren alde biak α eskalarraz eta (4) ekuazioak β eskalarraz biderkatuz lortzen diren ekuazioak batuz hurrengoa daukagu:

$$\begin{cases} \alpha(x_1 - y_1) = 0 \\ + \\ \beta(x_2 - y_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha x_1 - \alpha y_1 + \beta x_2 - \beta y_2 = 0 \Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) = 0 \quad (6)$$

Beraz, $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ betetzen da, (5) eta (6) ekuazioak betetzen baitira, eta, ondorioz, V $\mathbb{R}^3$ -ko azpiespazio bektoriala da.

b) Zero bektorea W azpimultzokoa den ikusiko dugu: $\begin{cases} 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ 0 + 0 \neq 2 \cdot 0 - 1 \end{cases}$

Bigarren berdintza betetzen ez denez, zero bektorea ez dago W azpimultzoan. Ondorioz, W ez da $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bektoriala.

P2. Kalkulatu a eta b parametroek bete beharreko erlazioa $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax + y = bz, bx - 2y + a = t - b\}$ multzoa $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bektoriala izan dadin.

EBAZPENA

V multzoa $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bektoriala izateko ezinbestekoa da bektore nuluak, hau da $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ bektoreak, V multzoko ekuazioak betetzea:

$$\vec{0} \in V \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + 0 = b \cdot 0 \\ b \cdot 0 - 2 \cdot 0 + a = 0 - b \end{cases} \Rightarrow a = -b \Rightarrow a + b = 0$$

Orain ikus dezagun ea $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ betetzen den.

Izan bedi $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in V$. Beraz, ondoko berdintzak beteko dira:

$$\begin{cases} ax_1 + y_1 = bz_1 \quad (1) \\ bx_1 - 2y_1 + a = t_1 - b \quad (2) \end{cases}$$

Eta izan bedi $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in V \Rightarrow \begin{cases} ax_2 + y_2 = bz_2 \quad (3) \\ bx_2 - 2y_2 + a = t_2 - b \quad (4) \end{cases}$

$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ bektorea osatuko dugu:

$$\begin{aligned} \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} &= \alpha(x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta(x_2, y_2, z_2, t_2) = \\ &= (\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{x_3}, \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{y_3}, \underbrace{\alpha z_1 + \beta z_2}_{z_3}, \underbrace{\alpha t_1 + \beta t_2}_{t_3}) \end{aligned}$$

$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ izateko ondokoak bete behar dira:

$$\begin{cases} ax_3 + y_3 = bz_3 \quad (5) \\ bx_3 - 2y_3 + a = t_3 - b \quad (6) \end{cases}$$

(1) adierazpeneko berdintzaren alde biak α eskalarraz eta (3) ekuaziokoak β eskalarraz biderkatuz lortzen diren ekuazioak batuz zera lortzen da:

$$\begin{cases} \alpha(ax_1 + y_1) = \alpha(bz_1) \\ + \\ \beta(ax_2 + y_2) = \beta(bz_2) \end{cases} \Rightarrow a\alpha x_1 + \alpha y_1 + a\beta x_2 + \beta y_2 = b\alpha z_1 + b\beta z_2$$

$$\Rightarrow a(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) = b(\alpha z_1 + \beta z_2) \Rightarrow \alpha x_3 + y_3 = b z_3$$

Eta beraz, $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ bektoreak (5) ekuazioa betetzen du.

Era berean, (2) adierazpeneko berdintzaren alde biak α eskalarraz eta (4) ekuaziokoak β eskalarraz biderkatuz lortzen diren ekuazioak batuz zera daukagu:

$$\begin{cases} \alpha(bx_1 - 2y_1 + a) = \alpha(t_1 - b) \\ + \\ \beta(bx_2 - 2y_2 + a) = \beta(t_2 - b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b\alpha x_1 - 2\alpha y_1 + a\alpha + b\beta x_2 - 2\beta y_2 + a\beta = \alpha t_1 - \alpha b + \beta t_2 - \beta b$$

$$\Rightarrow b(\alpha x_1 + \beta x_2) - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + a(\alpha + \beta) = (\alpha t_1 + \beta t_2) - b(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow bx_3 - 2y_3 + a(\alpha + \beta) = t_3 - b(\alpha + \beta)$$

Azken adierazpenetik $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ bektoreak (6) ekuazioa betetzeko berdintza hauek bete behar direla ondorioztatzen da:

$$\begin{cases} a(\alpha + \beta) = a \\ b(\alpha + \beta) = b \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ eta } b = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$a = 0$ eta $b = 0$ badira, $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ bektoreak (6) ekuazioa beteko du. Eta orduan, V $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bektoriala izango da. Ohartu, kasu honetan zero bektorea V -n egoteko baldintza betetzen dela, hau da: $a + b = 0$.

Laburbilduz, V $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bektoriala izateko beharrezkoa da $a = b = 0$ betetzea.

P3. Esan $\vec{u} = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, -2, 0)$, $\vec{w} = (0, 3, -2, -1)$ eta $\vec{t} = (1, 0, 1, -1)$ bektoreak linealki dependenteak diren.

EBAZPENA

Dependentzia edo independentzia linealaren erlazioa planteatzen da. Berdintza hau koefiziente guztiak nuluak direnean bakarrik betetzen bada, bektoreak linealki independenteak izango dira, eta, bestela, linealki dependenteak:

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} + \delta \cdot \vec{t} = \vec{0}$$

$$\alpha(-2, 1, 0, 1) + \beta(0, 1, -2, 0) + \gamma(0, 3, -2, -1) + \delta(1, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -2\beta - 2\gamma + \delta = 0 \\ \alpha - \gamma - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\delta}{2}, \quad \beta = \delta, \quad \gamma = -\frac{\delta}{2} \quad \forall \delta \in \mathbb{R}$$

Kasu honetan posible da konbinazio lineala zero izatea koefizienteren bat ez-nulua izanik. Beraz, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ eta $\vec{t}$ bektoreak linealki dependenteak dira.

P4. Frogatu sistema sortzailearen definizioa erabilita $S = \{(1, 2, 1), (-2, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ sistema $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialeko sistema sortzailea dela.

EBAZPENA

S sistema $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialeko sistema sortzailea izango da, $\mathbb{R}^3$ -ko edozein bektore S -ko bektoreen konbinazio lineal gisa idatz badaiteke. Hau da, ondokoa da frogatu beharrekoa:

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists a, b, c \in \mathbb{R} : \vec{x} = a(1, 2, 1) + b(-2, 0, 1) + c(1, 0, 1)$$

Eragiketak eginez ondoko sistema lortzen da:

$$\begin{cases} x = a - 2b + c \\ y = 2a \\ z = a + b + c \end{cases}$$

Sistema horren soluzioa, adibidez, Cramer-en erregela erabilita lor daiteke:

$$\begin{cases} b = \frac{z - x}{3} \\ a = \frac{y}{2} \\ c = \frac{-y}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{x}{3} \end{cases}$$

Sistemak soluzioa duenez, frogatuta geratzen da edozein $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bektorerentzat existitzen direla $a, b, c \in \mathbb{R}$ eskalarrak non aukeratutako bektorea S -ko elementuen konbinazio lineal gisa idatz daitekeen. Ondorioz, S sistema $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialeko sistema sortzailea da.

P5. $P = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ sistema emanik, non $\vec{u} = (1, m, -2)$, $\vec{v} = (m+1, 0, 1)$ eta $\vec{w} = (2, 0, 2m-1)$ diren:

- Kalkulatu m parametro errealearen balioa P bektore-sistema askea izan dadin.
- Posiblea al da P bektore-sistema $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat izatea? Baiezko kasuan, kalkulatu $\vec{x} = (-2, 2, 2)$ bektorearen osagaiak oinarri horretan $m = -1$ denean.

EBAZPENA

- P bektore-sistema askea izango da, bektore horiek osatutako matrizearen heina 3 denean.

$$\text{Hau da, } h \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2m-1 \end{pmatrix} = 3 \text{ denean.}$$

Bektore horiek osaturiko determinantearen balioa kalkulatu dugu eta zerorekin berdinduko dugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m - m^2 - 2m^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Determinantea zero da $m = 0$ edo $m = 1$ edo $m = -3/2$ denean, eta kasu hauetan bektoreek osatzen duten matrizearen heina ez da 3 izango. Hau da, P sistema ez da askea izango. Bestela esanda, $m \neq 0$ eta $m \neq 1$ eta $m \neq -3/2$ denean, P sistema askea izango da.

- Aurreko atalean lortu ditugun m parametroaren balioetarako, $m \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, 0, 1\}$, P sistema askea izateaz gain $\mathbb{R}^3$ -ko oinarria ere bada, $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialaren dimentsioa 3 baita eta P sistema hiru bektore askez osatuta baitago. Hortaz, $m = -1$ denean ere, P sistemako bektoreek $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat osatzen dute non $\vec{u} = (1, -1, -2)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$ eta $\vec{w} = (2, 0, -3)$ diren.

$\vec{x} = (-2, 2, 2)$ bektorearen osagaiak kalkulatzeko nahikoa da P oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa idaztea:

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}$$

Eragiketak eginez eta berdinuz zera daukagu:

$$(-2, 2, 2) = \alpha(1, -1, -2) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(2, 0, -3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = \alpha + 2\gamma \\ 2 = -\alpha \\ 2 = -2\alpha + \beta - 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 0 \Rightarrow \vec{x}_P = (-2, -2, 0)_P$$

P6. Izan bedi $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \mathbb{R}^3$ espazio bektorialeko oinarri bat, non $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, 0, -1)$ eta $\vec{v}_3 = (2, -1, 1)$, eta $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ bektorea. Izan bedi $S \mathbb{R}^3$ -ko azpiespazio bektorial bat eta $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ haren oinarri bat, $\vec{u}_1 = (0, 1, -1)$ eta $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ izanik.

- Kalkulatu $\vec{v}$ bektorearen koordenatuak $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoarekiko.
- Esan ea $\vec{v}$ bektorea S azpiespazio bektorialean dagoen ala ez, eta egotekotan, kalkulatu bektore horren koordenatuak B oinarriarekiko.

EBAZPENA

- $\vec{v}$ bektorearen adierazpenean $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ eta $\vec{v}_3$ bektoreak ordezkatzuz zera daukagu:
 $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v} = 3(1, 0, 1) - 2(-2, 0, -1) - (2, -1, 1) \Rightarrow \vec{v} = (5, 1, 4)$

Beraz, $\vec{v}$ bektorearen oinarri kanonikoarekiko koordenatuak hauek dira: $\vec{v}_K = (5, 1, 4)_K$.

- $S = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ denez:

$$\forall \vec{x} \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \vec{x} = \alpha(0, 1, -1) + \beta(1, 0, 1) = (\beta, \alpha, -\alpha + \beta)$$

$\vec{v}$ bektorea S azpiespaziokoa izango da, $(\beta, \alpha, -\alpha + \beta)$ forma badu. Ikus dezagun:

$$(5, 1, 4) = (\beta, \alpha, -\alpha + \beta) \Rightarrow \begin{cases} 5 = \beta \\ 1 = \alpha \\ 4 = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ eta } \beta = 5$$

Beraz, $\vec{v}$ bektorea S azpiespaziokoa da eta bere koordenatuak B oinarriarekiko $\vec{v}_B = (1, 5)_B$ dira.

P7. Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ bigarren mailako edo bigarren maila baino txikiagoko polinomioek osatutako espazio bektoriala: $p(x) = ax^2 + bx + c$ non $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- a) $p_1(x) = 3$ polinomioa emanik, frogatu $V = \{p_1(x), \int p_1(x)dx, \iint (p_1(x)dx)dx\}$ sistema $\mathbb{P}_2(x)$ -eko oinarri bat dela. Integrazio konstantea nulua kontsideratu.
- b) Kalkulatu $2x^2 + 3x - 1$ bektorearen koordenatuak V oinarriarekiko.

EBAZPENA

- a) V sistemako bektoreak kalkulatz hasiko gara:

$$\int p_1(x)dx = 3x, \quad \iint (p_1(x)dx)dx = \frac{3}{2}x^2$$

$V = \left\{3, 3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ sistemako bektoreak linealki independenteak edo independenteak diren ikusteko beraien konbinazio lineal orokorrak zero ematen duen kasua planteatzen da:

$$\gamma \cdot \frac{3}{2}x^2 + \beta \cdot 3x + \alpha \cdot 3 = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

Aurreko ekuazioa betetzeko $\alpha = \beta = \gamma = 0$ bete beharko da. Hau da, $V = \left\{3, 3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ sistema askea da. $\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialaren dimentsioa 3 denez eta V sistema linealki independenteak diren hiru bektorek osatzen dutenez, sistema hori $\mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri bat da.

- b) Aurreko ataleko oinarriarekiko $2x^2 + 3x - 1$ bektorearen koordenatuak kalkulatzeko, bektore hori oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa idatziko dugu:

$$2x^2 + 3x - 1 = \gamma \cdot \frac{3}{2}x^2 + \beta \cdot 3x + \alpha \cdot 3$$

Berdintza hori beteko da ondokoak betetzen direnean:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\gamma = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3} \\ 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1 \\ 3\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Beraz, $2x^2 + 3x - 1$ bektorearen $V = \left\{3, 3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ oinarriarekiko koordenatuak $\left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)_V$ dira.

P8. Kalkulatu ondoko azpiespazio bektorialen dimentsioa, ekuazio inplizituak eta parametrikokoak.

- a) $S = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 0) \rangle$.
- b) $S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.
- c) $S = \langle (1, 0, 2, 0), (2, 0, 0, -1) \rangle$.

EBAZPENA

- a) $S = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 0) \rangle$ azpiespazioaren dimentsioa kalkulatzeko:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim S = 2$$

Bestalde, $\dim S = \dim \mathbb{R}^3 - p$ berdintza betetzen da, p linealki independenteak diren azpiespazio bektorialeko ekuazio inplizituen kopurua izanik. Kasu honetan: $p = 3 - 2 = 1$. Beraz, S azpiespazio bektorialeko ekuazio inplizitua bakarra da eta era honetan kalkulatzeko da:

Izan bedi $(x, y, z) \in S$ bektorea, $(1, -1, 0)$ eta $(0, 1, 0)$ bektoreen konbinazio lineala dena. Hiru bektore horiek linealki dependenteak izango direnez, determinanteak zero emango du:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$$

Beraz, S azpiespazio bektorialeko ekuazio inplizitua $z = 0$ da.

Ekuazio parametrikokoak lortzeko, S -ko edozein bektorearen adierazpena aztertuko dugu:

$$(x, y, z) = \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0) = (\alpha, -\alpha + \beta, 0)$$

Honela, S -ko ekuazio parametrikokoak hauek dira:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

- b) $S = \langle (1, 2, 1, 0), (2, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ azpiespazioaren dimentsioa kalkulatzeko:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim S = 3$$

Berriz ere, $\dim S = \dim \mathbb{R}^4 - p$ berdintza erabiliko dugu, p linealki independenteak diren azpiespazio bektorialeko ekuazio inplizituen kopurua izanik. Beraz, $p = 4 - 3 = 1$ betetzen da, hau da, azpiespazio bektorialeko ekuazio inplizitua bakarra da. $(x, y, z, t) \in S$ bektorea $(1, 2, 1, 0)$, $(2, -1, 1, 0)$ eta $(0, 0, 0, 1)$ bektoreen konbinazio lineala izango da.

Hortaz, bektore hauek osatutako determinantea zero izango da:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ y & 2 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ y & 2 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - 5z = 0$$

Hala bada, S azpiespazio bektorialeko ekuazio inplizitua $3x + y - 5z = 0$ da.

Ekuazio parametrikokoak lortzeko, S -ko edozein bektorearen adierazpena aztertuko dugu:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 2, 1, 0) + \beta(2, -1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 0, 1) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta, \alpha + \beta, \gamma)$$

Ondorioz, S -ko ekuazio parametrikokoak hauek dira:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha - \beta \\ z = \alpha + \beta \\ t = \gamma \end{cases}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

- c) Aurreko kasuetan jarraitutako prozesua erabiliz, $S = \langle (1, 0, 2, 0), (2, 0, 0, -1) \rangle$ azpiespazioaren dimentsioa kalkulatu dugu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \dim S = 2$$

Ondorengo berdintzatik linealki independenteak diren ekuazio inplizituen kopurua kalkulatu da:

$$\dim S = \dim \mathbb{R}^4 - p \Rightarrow 2 = 4 - p \Rightarrow p = 2$$

$(x, y, z, t) \in S$ bektore orokorra $(1, 0, 2, 0)$ eta $(2, 0, 0, -1)$ bektore linealki independenteen konbinazio lineala denez, beraiek osatzen duten matrizearen heina 2 izango da:

$$h \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 0 & 0 \\ z & 2 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$p = 2$ denez, linealki independenteak diren bi ekuazio inplizitu behar ditugu, beraz, hiru ordenako bi minorren determinanteek nuluak izan behar dutela planteatu dugu:

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ z & 2 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ z & 2 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 4t + z = 0$$

Beraz, hauek dira S azpiespazio bektorialaren ekuazio inplizituak:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2x - 4t + z = 0 \end{cases}$$

Ekuazio parametrikoak kalkulatzeko, S azpiespazio bektorialeko sistema sortzailea osatzen duten bi bektoreen konbinazio lineal orokorra planteatzen da:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 2, 0) + \beta(2, 0, 0, -1) = (\alpha + 2\beta, 0, 2\alpha, -\beta)$$

S azpiespazio bektorialaren ekuazio parametrikoak hauek dira:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 0 \\ z = 2\alpha \\ t = -\beta \end{cases}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

P9. Izan bedi $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \mid p'(-1) = 0\}$.

- Frogatu S azpimultzoa $\mathbb{P}_3(x)$ espazioko azpiespazio bektoriala dela.
- Kalkulatu S azpiespazioaren dimentsioa eta haren oinarri bat.
- Osatu S azpiespazioko oinarria $\mathbb{P}_3(x)$ -ren oinarri bat lortu arte.

EBAZPENA

- S azpiespazio bektoriala izateko ondoko baldintza bete behar da:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall p(x), q(x) \in S \Rightarrow r(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \in S$$

Hau da, S -ko bi polinomialatik abiatuz, beraien edozein konbinazio lineal ere S -n dagoela frogatu behar da. $r(x)$ polinomioa S -n egongo da, $r'(-1) = 0$ baldintza betetzen badu. $r(x)$ polinomioaren adierazpena deribatuz eta $x = -1$ ordezkatzuz zera daukagu:

$$r'(x) = \alpha p'(x) + \beta q'(x) \Rightarrow r'(-1) = \alpha p'(-1) + \beta q'(-1) \stackrel{\substack{p(x) \in S \\ q(x) \in S}}{=} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Ondorioz, $r(x) \in S$ betetzen da eta S azpiespazio bektoriala izango da.

- Izan bedi $p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \Rightarrow p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Polinomio hori S azpiespazio bektorialean egongo da, $p'(-1) = 0$ betetzen bada. Ikus dezagun baldintza hori betetzeko parametroek bete beharreko erlazioa:

$$p'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = -3a + 2b$$

Hau da, S azpiespazioko polinomio orokor baten adierazpena haxe da:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + (-3a + 2b)x + d \Rightarrow p(x) = a(x^3 - 3x) + b(x^2 + 2x) + d$$

Beraz, S azpiespazioko edozein elementu $B = \{x^3 - 3x, x^2 + 2x, 1\}$ sistemako elementuen konbinazio lineal gisa idatz daiteke. Hau da, B sistema S azpiespazioko sistema sortzaile bat da. Ikus dezagun ea sistema hori askea den. Horretarako, dependentzia edo independentzia linealeko erlazioa definitzen da:

$$\alpha_1(x^3 - 3x) + \alpha_2(x^2 + 2x) + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + (-3\alpha_1 + 2\alpha_2)x + \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow B \text{ sistema askea da.}$$

Laburbilduz $B = \{x^3 - 3x, x^2 + 2x, 1\}$ sistema sortzailea eta askea denez gero, S azpiespazio bektorialeko oinarri bat da eta $\dim S = 3$ betetzen da.

- c) Hirugarren mailako edo hirugarren maila baino txikiagoko polinomioen espazio bektorialak hau betetzen du: $\dim \mathbb{P}_3(x) = 4$. Gainera, $\dim S = 3$ dela daukagu. Horrela, S -ko B oinarritik abiatuz $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialeko oinarri bat kalkulatzeko, nahikoa da B -ko bektoreekiko linealki independentea den bektore bat aurkitzea.

Izan bedi $B' = \{x^3 - 3x, x^2 + 2x, x, 1\}$ sistema, B sisteman x elementua gehituta lortzen den sistema. Sistema hori askea izango da sistemako bektoreen edozein konbinazio lineal nulutako eskalar guztiak nuluak direnean:

$$\alpha_1(x^3 - 3x) + \alpha_2(x^2 + 2x) + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + (-3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Beraz, $B' = \{x^3 - 3x, x^2 + 2x, x, 1\}$ sistema askea da eta $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialeko oinarri bat da.

P10. Izan bitez $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ eta $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\} \mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko bi oinarri, non $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_4$ eta $\vec{a}_4 = \vec{b}_2 - \vec{b}_3$ diren.

- Kalkulatu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko, A oinarriarekiko haren koordenatuak $\vec{x}_A = (1, 0, -1, -1)_A$ direla jakinik.
- Kalkulatu $\vec{y}$ bektorearen koordenatuak A oinarriarekiko, B oinarriarekiko haren koordenatuak $\vec{y}_B = (1, 1, 0, -1)_B$ direla jakinik.

EBAZPENA

- a) Suposa dezagun $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)_B$ direla. Orduan:

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \cdot \vec{b}_2 + x_3 \cdot \vec{b}_3 + x_4 \cdot \vec{b}_4 \quad (1)$$

$(1, 0, -1, -1)$ osagaiak $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak A oinarriarekiko direnez, zera betetzen da:

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + (-1) \cdot \vec{a}_3 + (-1) \cdot \vec{a}_4$$

Azken ekuazio horretan A oinarriko bektoreek B oinarriko bektoreen menpe dituzten erlazioak ordezkatzuz zera daukagu:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= 1 \cdot (\vec{b}_1 - \vec{b}_2) + 0 \cdot 2\vec{b}_3 + (-1) \cdot (\vec{b}_1 + 2\vec{b}_4) + (-1) \cdot (\vec{b}_2 - \vec{b}_3) \\ \Rightarrow \vec{x} &= -2\vec{b}_2 + \vec{b}_3 - 2\vec{b}_4 \quad (2) \end{aligned}$$

Azkenik, (1) eta (2) adierazpenak berdinduz ondorengoa daukagu: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$. Beraz, $\vec{x}$

bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko $\vec{x}_B = (0, -2, 1, -2)_B$ dira.

$\vec{x}$ bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko kalkulatzeko beste era bat oinarri-aldaketako adierazpena erabiltzean datza. Hau da:

$$\vec{x}_B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)_B \cdot \vec{x}_A$$

Aurretik lortu dugun emaitza bera lortzen dela egiazta daiteke:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B$$

- b) Suposa dezagun $\vec{y}$ bektorearen koordenatuak A oinarriarekiko $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)_A$ direla. Orduan, definizioaren arabera zera betetzen da:

$$\vec{y} = y_1 \cdot \vec{a}_1 + y_2 \cdot \vec{a}_2 + y_3 \cdot \vec{a}_3 + y_4 \cdot \vec{a}_4$$

Azken adierazpen horretan A oinarriko bektoreek B oinarriko bektoreen menpe dituzten erlazioak ordezkatzuz zera daukagu:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= y_1 \cdot (\vec{b}_1 - \vec{b}_2) + y_2 \cdot 2\vec{b}_3 + y_3 \cdot (\vec{b}_1 + 2\vec{b}_4) + y_4 \cdot (\vec{b}_2 - \vec{b}_3) \\ \Rightarrow \vec{y} &= (y_1 + y_3)\vec{b}_1 + (-y_1 + y_4)\vec{b}_2 + (2y_2 - y_4)\vec{b}_3 + 2y_3\vec{b}_4 \quad (3) \end{aligned}$$

$\vec{y}$ bektorearen koordinatuak B bektorearekiko hauek direnez $\vec{y}_B = (1, 1, 0, -1)_B$:

$$\vec{y} = 1 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 + (-1) \cdot \vec{b}_4 \quad (4)$$

Eta (3) eta (4) adierazpenak berdinuz y_i , non $i = 1, 2, 3, 4$ den, eskalarren balioak kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ -y_1 + y_4 = 1 \\ 2y_2 - y_4 = 0 \\ 2y_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3/2 \\ y_2 = 5/4 \\ y_3 = -1/2 \\ y_4 = 5/2 \end{cases}$$

Beraz, $\vec{y}$ bektorearen koordinatuak A oinarriarekiko $\vec{y}_A = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_A$ dira.

Kasu honetan ere oinarri-aldaketako adierazpena erabili ahal izango genuke koordinatu hauek kalkulatzeko:

$$\vec{y}_B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)_B \cdot \vec{y}_A$$

Aurreko ekuazioan ezagutzen ditugun gaien balioak ordezkatzuz eta eragiketak eginez $\vec{y}_A$ ezezagunaren balioa lortzen da:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/4 \\ -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}_A \end{aligned}$$

P11. Izan bedi ondoko bektore-sistema $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Frogatu B sistema $M_2(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko oinarri bat dela.
- Izan bedi $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, B oinarrian idatzitako matrizea. Kalkulatu A_1 matrizearen koordinatuak oinarri kanonikoarekiko.
- Izan bedi $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ oinarri kanonikoan idatzitako matrizea. Kalkulatu A_2 matrizearen koordinatuak B oinarriarekiko.

EBAZPENA

- a) Bi dimentsioko matrize karratuen espazio bektorialaren dimentsioa 4 da: $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$. B sistema $M_2(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko oinarri bat izateko aski da sistemako lau bektoreak linealki independenteak direla ikustea:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \delta & -\alpha + \gamma \\ -\beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

B sistema askea denez, $M_2(\mathbb{R})$ espazioko oinarri bat da.

- b) A_1 matrizearen B oinarriarekiko adierazpena erabilita posible da oinarri kanonikoarekiko haren koordenatuak lortzea:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_c = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}_c$$

A_1 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordenatuak hauek dira: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}_c$.

Oinarri-aldaketako adierazpena erabilita ere emaitza bera lortuko genuke:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}_c$$

- c) A_2 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordenatuak ezagutzen ditugu:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_c$$

Matrize honek B oinarriarekiko dituen osagaiak kalkulatzeko ondoko berdintza planteatzen dugu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_c = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \delta & -\alpha + \gamma \\ -\beta & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 3 \\ -\alpha + \gamma = -1 \\ -\beta = 2 \\ \delta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 2 \\ \delta = 2 \end{cases}$$

Beraz, A_2 matrizearen B oinarriarekiko koordenatuak hauek dira: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. Berriz ere,

oinarri-aldaketako adierazpena erabilita emaitza bera lortuko genukeela egiazta daiteke:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

P12. Izan bedi $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $M_2(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko azpimultzo bat.

- Frogatu S azpimultzoa $M_2(\mathbb{R})$ espazioko azpiespazio bektoriala dela.
- Kalkulatu S azpiespazioaren oinarri bat.
- Izan bedi $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $M_2(\mathbb{R})$ -ko beste azpiespazio bektorial bat. Kalkula ezazu $S \cap T$ azpiespazio bektoriala.

EBAZPENA

- S azpimultzoa azpiespazio bektoriala izango da, ondokoa betetzen bada:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A, B \in S \Rightarrow C = \alpha A + \beta B \in S$$

Izan bitez A eta B S multzoko bi matrize, non: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d+c & c \end{pmatrix}$.

$C = \alpha A + \beta B$ matrizea eraikiko dugu:

$$C = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & d \\ d+c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \alpha b + \alpha a + \beta d + \beta c & \alpha a + \beta c \end{pmatrix}$$

Ondoko aldagaiak definituz, $b' = \alpha b + \beta d$ eta $a' = \alpha a + \beta c$, C matrizearen adierazpena honela geratzen da:

$$C = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' + a' & a' \end{pmatrix}$$

Ikusten da C matrizeak S azpimultzoko matrizeen forma bera duela, beraz, S azpimultzoa $M_2(\mathbb{R})$ espazioko azpiespazio bektoriala da.

- b) S azpiespazio bektorialeko oinarri bat aurkitzeko, bertako sistema sortzaile bat lortuz hasiko gara:

$$\forall A \in S, \exists a, b \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix}$$

S azpiespazioko A matrize orokorra beste bi matrize hauen batura bezala idatz daiteke:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beraz, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ sistema S azpiespazioko sistema sortzaile bat da. Sistema sortzaile bat oinarria izango da, askea bada. Ikus dezagun ea B sistema askea den:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Beraz, B sistema sortzailea izateaz gain askea ere bada. Orduan, B sistema S azpiespazioko oinarri bat da.

- c) $S \cap T$ azpiespazioko edozein matrize, bi azpiespazioetan dago. Hau da:

$$\forall A \in S \cap T \Rightarrow A \in S \text{ eta } A \in T$$

$$\begin{aligned} A \in S &\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} \\ A \in T &\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} \ A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b+a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ b+a = y \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0$$

Beraz, $S \cap T$ azpiespazioko edozein matrizek forma hau dauka: $A = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$, non $y \in \mathbb{R}$.

Beraz: $S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

P13. Izan bitez $S = \{(0, -\alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ eta $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 = -x_3\}$ $\mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko bi azpiespazio bektorial.

- Kalkulatu S eta T azpiespazio bektorialen oinarri bana.
- Kalkulatu $S \cap T$ azpiespazio bektorialeko oinarri bat.
- Kalkulatu $S + T$ azpiespazio bektorialeko oinarri bat barnean duen $\mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko oinarri bat.

EBAZPENA

a) S azpiespazioko oinarri bat kalkulatz hasiko gara:

$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(0, -1, 0, 0) + \beta(0, 0, 0, 1)$$

Hau da, $B_S = \{(0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ sistema S -ko sistema sortzaile bat da. B_S sistema askea izateko bertako bektoreen konbinazio lineal nulua, eskalarrek nuluak diren kasuan bakarrik lortuko da:

$$\alpha_1(0, -1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

B_S sistema askea ere badenez, S -ko oinarri bat da.

Prozesu berari jarraituz T azpiespazioko oinarri bat kalkula daiteke. Lehenengo bertako sistema sortzaile bat kalkulatu dugu. $\forall \vec{x} \in T, \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, -x_3)$, hau da:

$$\vec{x} = (x_1, 0, 0, 0) + (0, x_2, 0, 0) + (0, 0, x_3, -x_3) = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, -1)$$

$B_T = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ sistema T azpiespazioko sistema sortzailea da. Askea den aztertuko dugu:

$$\alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

B_T askea ere badenez, T azpiespazioko oinarri bat da.

b) $\forall \vec{x} \in S \cap T \Rightarrow \vec{x} \in S$ eta $\vec{x} \in T$ beteko dira. Azpiespazio bietan dagoen bektore bat kontsideratuko dugu:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{x} = (0, -\alpha, 0, \beta) \\ \vec{x} \in T, \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, -x_3) \end{array} \right\}$$

$$\text{Adierazpen biak berdinduta zera daukagu:} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 0 \\ -x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -x_2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Ondorioz, $\forall \vec{x} \in S \cap T \Rightarrow \vec{x} = (0, x_2, 0, 0) = x_2(0, 1, 0, 0), \forall x_2 \in \mathbb{R}$

Hau da, $B_{S \cap T} = \{(0,1,0,0)\}$ sistema $S \cap T$ azpiespazioko sistema sortzailea da. Gainera, bektore ez-nulu bakarrak osatutako sistema denez, sistema askea da. Ondorioz, $B_{S \cap T}$ ebakidurako oinarri bat da.

- c) $S + T$ azpiespazio bektorialeko oinarri bat barnean duen $\mathbb{R}^4$ -ko oinarri bat lortzeko $S + T$ -ko oinarri baten kalkulua eginez hasiko gara. Azpiespazio hori bektore hauek osatzen dute:

$$S + T = \langle (0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$$

Bestalde, $S + T$ azpiespazioaren dimentsioa kalkulatzeko berdintza hau erabil daiteke:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2 + 3 - 1 = 4$$

Beraz, $S + T$ azpiespazioko sistema aske bat lortzeko nahikoa da haren sistema sortzailean askeak diren lau bektore aukeratzea. Adibidez, $\{(0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ bektoreek osatutako sistema askea izango da, beraien determinantea ez-nulua bada:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Beraz, $B_{S+T} = \{(0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ $S + T$ azpiespazioko oinarri bat da. Gainera, $\left. \begin{matrix} S + T \subseteq \mathbb{R}^4 \\ \dim(S + T) = \dim \mathbb{R}^4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S + T = \mathbb{R}^4$. Beraz, B_{S+T} da bila gabiltzan $\mathbb{R}^4$ -ko oinarri bat.

P14. Izan bitez $S = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle$ eta $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$ $\mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko bi azpiespazio bektorial.

- Kalkulatu S eta T azpiespazio bektorialen oinarri bana.
- Kalkulatu $S \cap T$ azpiespazio bektoriala.
- Kalkulatu $S + T$ azpiespazio bektoriala. Batura zuzena al da?

EBAZPENA

- S azpiespazio bektorialeko sistema sortzailea osatzen dute $\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ bektoreek. Gainera sistema hau askea da, bertako bi bektoreak ez baitira proportzionalak. Hau da, $B_S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ S espazioaren oinarri bat da.

T azpiespazioaren oinarri bat lortzeko bertako edozein bektorek izan beharreko formari erreparatuko diogu: $\forall \vec{x} \in T, \exists x_3, x_4 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_3 + x_4, -x_4, x_3, x_4)$. Hau da:

$$\vec{x} = (x_4, -x_4, 0, x_4) + (x_3, 0, x_3, 0) \Rightarrow \vec{x} = x_4(1, -1, 0, 1) + x_3(1, 0, 1, 0)$$

$B_T = \{(1, -1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ sistema T -ren sistema sortzailea da eta bera osatzen duten bektoreak proportzionalak ez direnez, askea ere bada. Ondorioz, B_T T azpiespazioko oinarri bat da.

- b) $S \cap T$ ebakidura-espazioko oinarri bat kalkulatzeko, bertako elementu orokor batek duen forma aztertu behar da:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in S, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{x} = (\alpha, 0, \beta, \alpha + \beta) \\ \vec{x} \in T, \exists x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \vec{x} = (x_3 + x_4, -x_4, x_3, x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_4 + x_3 = \alpha \\ -x_4 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = 0 \\ x_4 = x_3 = 0 \end{cases}$$

Hau da, $\vec{x} \in S \cap T$ bektore bakarra $\vec{x} = (0, 0, 0, 0)$ bektorea da. Beraz, $S \cap T = \{\vec{0}\}$.

- c) $S + T$ azpiespazio bektorialaren dimentsioa kalkulatu dugu:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 0 = 4$$

$\dim(S + T) = 4$ betetzen da eta $S + T \subseteq \mathbb{R}^4$ denez, $S + T = \mathbb{R}^4$ izango da. Gainera, aurreko ataletik $S \cap T = \{\vec{0}\}$ betetzen dela daukagu, beraz, batura zuzena da: $S \oplus T = \mathbb{R}^4$.

P15. Izan bitez $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0\}$ eta $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_4 = 0\} \mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko bi azpiespazio bektorial.

- Kalkulatu S eta T azpiespazio bektorialen oinarri bana.
- Kalkulatu $S \cap T$ azpiespazio bektorialeko oinarri bat.
- Kalkulatu $S + T$ azpiespazio bektoriala. Batura zuzena al da?

EBAZPENAK

- S azpiespazioko sistema sortzaile bat kalkulatu dugu, bertako bektore orokor batek zera betetzen du: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S, \exists x_2, x_4 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (-x_2, x_2, 2x_4, x_4)$. Hau da: $\vec{x} = (-x_2, x_2, 0, 0) + (0, 0, 2x_4, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 2, 1)$

$B_S = \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ sistema S azpiespazioko sistema sortzaile bat da. Bera osatzen duten bektoreak proportzionalak ez direnez, sistema askea ere bada. Beraz, B_S sistema S azpiespazioko oinarri bat da.

Era antzekoan, T azpiespazio bektorialeko sistema sortzaile bat lortuko dugu: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in T, \exists x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_1, x_1 + x_4, x_3, x_4)$. Hau da:

$$\vec{x} = (x_1, x_1, 0, 0) + (0, 0, x_3, 0) + (0, x_4, 0, x_4) = x_1(1, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(0, 1, 0, 1)$$

$B_T = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ sistema T azpiespazioko sistema sortzaile bat da. Sistema hau gainera askea da:

$$\alpha_1(1, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, 1, 0) + \alpha_3(0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Beraz, $B_T = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ T azpiespazioko sistema oinarri bat da.

- b) $S \cap T$ ebakidurako edozein bektorek bi azpiespazio bektorialetako ekuazio inplizituak bete behar ditu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_4 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = -4x_1 \\ x_4 = -2x_1 \end{cases}$$

$\forall \vec{x} \in S \cap T, \exists x_1 \in \mathbb{R}: \vec{x} = (x_1, -x_1, -4x_1, -2x_1)$. Beraz, $B_{S \cap T} = \{(1, -1, -4, -2)\}$ sistema ebakidurako sistema sortzaile bat da. Gainera askea da, bektore ez-nulu bakarrek osatzen baitu. Beraz, $B_{S \cap T}$ ebakidura azpiespazioko oinarri bat da.

- c) $S + T$ azpiespazioaren dimentsioa kalkulatu dugu:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2 + 3 - 1 = 4$$

$\dim(S + T) = 4$ betetzen da eta $S + T \subseteq \mathbb{R}^4$ denez, $S + T = \mathbb{R}^4$ izango da. Aurreko ataletik $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$ betetzen dela daukagu, beraz, ez da batura zuzena izango.

EBATZITAKO GALDERAK

G1. Esan ondoko baieztapenak egiak ala gezurrak diren. Izan bedi $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat. Orduan,

- a) $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da.
- b) $V_2 = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da.
- c) $V_3 = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, 2\vec{v}_3 - \vec{v}_1\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da.

EBAZPENA

- a) Egia. $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat bada, hura osatzen duten hiru bektoreak linealki independenteak dira eta hiru bektore horiek zutabetzat dituen determinantea ez-nulua da, hau da: $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \neq 0$. Determinanteen propietateengatik zera dakigu:

$$|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \stackrel{Z_2-Z_1}{=} |\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3|$$

Eta $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \neq 0$ denez, orduan $|\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3| \neq 0$ daukagu. Beraz, $V_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ sistema askea da. $\mathbb{R}^3$ -ren dimentsioa 3 denez eta V_1 sistema 3 bektore aske osatzen dutenez, sistema hau $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da.

- b) Egia. Aurreko atalekoa bezalako prozedurari jarraituz zera daukagu:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| &\stackrel{Z_2-Z_1}{=} |\vec{v}_1, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1| \stackrel{Z_1+Z_2+Z_3}{=} |-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1| \stackrel{Z_2-Z_3}{=} \\ &= |-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3 - \vec{v}_1| \stackrel{Z_3-Z_1+Z_2}{=} |-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3| \end{aligned}$$

Eta $|\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3| \neq 0$ denez, orduan $|-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3| \neq 0$. Beraz, $V_2 = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, -\vec{v}_3\}$ sistema askea da. $\mathbb{R}^3$ -ren dimentsioa 3 denez eta V_2 sistema 3 bektore aske osatzen dutenez, sistema hau $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da.

- c) Gezurra. V_3 sistemako 3. bektorea beste bi bektoreen konbinazio lineala da:

$$2\vec{v}_3 - \vec{v}_1 = (-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) - (\vec{v}_2 - \vec{v}_3)$$

Beraz, V_3 sistema ez da askea eta ondorioz ezin da izan $\mathbb{R}^3$ -ko oinarria.

G2. Esan ondoko baieztapena egia ala gezurra den: $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sistemak $\mathbb{R}^3$ -ko sistema askeak badira, orduan $W = \{\vec{v}_1 + \vec{u}_1, \vec{v}_2 + \vec{u}_2, \vec{v}_3 + \vec{u}_3\}$ sistema ere askea da.

EBAZPENA

Gezurra. $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sistema askea emanik, nahikoa da $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sistema askea kontsideratzea non $\vec{v}_i = -\vec{u}_i$ betetzen den $i = 1, 2, 3$ indizeren baterako. Suposa dezagun $\vec{v}_1 = -\vec{u}_1$ dela, orduan, $W = \{\vec{0}, \vec{v}_2 + \vec{u}_2, \vec{v}_3 + \vec{u}_3\}$ sistema ez da askea, bektore nulua bere baitan baitu.

G3. Esan ondoko baieztapena egia ala gezurra den. Zero bektorearen koordinatuak $\mathbb{R}^n$ espazioko edozein oinarrirekiko nuluak dira.

EBAZPENA

Egia. Absurdura eramanez frogatuko dugu. Suposa dezagun $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ $\mathbb{R}^n$ -ren oinarri bat existitzen dela non zero bektorea era honetan idazten den:

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n, \text{ non indizeren baterako } \alpha_i \neq 0 \text{ den}$$

Kasu honetan, $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ sistema ez litzateke askea izango. Hori gertatzea ezinezkoa da zeren V $\mathbb{R}^n$ -ren oinarri bat dela esan baitugu hasieran. Ondorioz suposatu duguna absurdua da eta, beraz, zero bektorearen koordinatuak $\mathbb{R}^n$ espazioko edozein oinarrirekiko nuluak dira.

G4. Esan ondoko baieztapenak egia ala gezurrak diren. $\mathbb{R}^5$ espazio bektorialean S eta T azpiespazioak kontsideratzen dira, beraien dimentsioak, hurrenez hurren, $\dim S = 2$ eta $\dim T = 4$ izanik.

- Ondoko desberdintza betetzen da: $\dim S + \dim T \geq \dim (S + T)$.
- $\dim(S \cap T) = 1$ betetzen da.
- $1 \leq \dim(S \cap T) \leq 2$ betetzen dira.

EBAZPENA

- a) Egia. Azpiespazioen baturaren dimentsioak honako berdintza hau betetzen du:

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

$\dim(S \cap T) \geq 0$ denez, orduan, $\dim S + \dim T \geq \dim(S + T)$. Beraz, frogatuta geratzen da.

- b) Gezurra. $\dim(S \cap T) = 1$ berdintza $S + T = \mathbb{R}^5$ kasuan bakarrik beteko litzateke. Kasu horretan, $\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$ berdintza beteko bailitzateke.

Orohar, $\dim(S + T) \leq 5$ betetzen da, beraz:

$$\begin{aligned} \dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) &\leq 5 \Rightarrow 2 + 4 - \dim(S \cap T) \leq 5 \\ &\Rightarrow \dim(S \cap T) \geq 1 \end{aligned}$$

- c) Egia. Aurreko ataletik $\dim(S \cap T) \geq 1$ dela daukagu. Gainera, $S \cap T \subseteq S$ betetzen denez, zera daukagu:

$$\dim(S \cap T) \leq \dim S = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T) \leq 2$$

Eta desberdintza kontuan hartuz, hauxe da daukaguna:

$$1 \leq \dim(S \cap T) \leq 2$$

Ondorioz, $\dim(S \cap T) = 1$ edo $\dim(S \cap T) = 2$ izan behar du.

MATHEMATICA ERABILIZ EBATZITAKO ARIKETAK

M1. Esan ondoko azpimultzoak hurrenez hurren $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazioak diren:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 3z, x - y = 0\}.$

b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = t, x + y = 2t - 1\}.$

EBAZPENA

a) V multzoko ekuazioak definituko ditugu eta ikusiko dugu ea bektore nuluak ekuazio hauek betetzen dituen:

```
Remove["Global`*"]
```

```
ek1[{a_, b_, c_}] = 2 a + b - 3 c; ek2[{a_, b_, c_}] = a - b - 0;
nulua = {0, 0, 0};
```

```
ek1[nulua] == 0
```

```
True
```

```
ek2[nulua] == 0
```

```
True
```

Bektore nulua V multzoko bektorea da, bertan egoteko baldintza biak betetzen baititu. Hortaz, V azpiespazio bektoriala izan daiteke.

Ondoren, V azpiespazio bektoriala dela frogatzeko ondoko berdintza ea betetzen den ikusiko dugu:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in V$$

Horretarako, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V$ eta $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V$ bektoreak definituko ditugu eta, ondoren, beraien konbinazio lineala den $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ bektorea eraikiko dugu:

```
x = {x1, x2, x3}; y = {y1, y2, y3};
```

```
bek =  $\alpha$  * x +  $\beta$  * y
```

```
{x1  $\alpha$  + y1  $\beta$ , x2  $\alpha$  + y2  $\beta$ , x3  $\alpha$  + y3  $\beta$ }
```

$\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreak V multzokoak direnez, V multzoko ekuazio hauek betetzen dituzte:

```
ek1x = ek1[x]
```

```
2 x1 + x2 - 3 x3
```

```
ek2x = ek2[x]
```

```
x1 - x2
```

```
ek1y = ek1[y]
```

```
2 y1 + y2 - 3 y3
```

```
ek2y = ek2[y]
```

```
y1 - y2
```

$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ bektorea V multzokoa izango da, bertan egoteko bi ekuazioak betetzen baditu:

```
ek1[bek]
```

```
x2  $\alpha$  + y2  $\beta$  + 2 (x1  $\alpha$  + y1  $\beta$ ) - 3 (x3  $\alpha$  + y3  $\beta$ )
```

```
ek2[bek]
```

```
x1  $\alpha$  - x2  $\alpha$  + y1  $\beta$  - y2  $\beta$ 
```

```
ek1[bek] ==  $\alpha$  * ek1[x] +  $\beta$  * ek1[y] // Simplify
```

```
True
```

```
ek2[bek] ==  $\alpha$  * ek2[x] +  $\beta$  * ek2[y] // Simplify
```

```
True
```

$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$ bektorea V multzoan dagoenez, V $\mathbb{R}^3$ -ko azpiespazio bektorial bat da.

- b) W azpimultzoan egoteko bektore batek bete beharreko bi ekuazioak definitzen dira eta ikusiko dugu ea bektore nuluak ekuazio horiek betetzen dituen ala ez:

```
ek1 = x - y + 2 z == t; ek2 = x + 2 y == 2 t - 1;
```

```
ek1 /. {x -> 0, y -> 0, z -> 0, t -> 0}
```

```
True
```

```
ek2 /. {x -> 0, y -> 0, z -> 0, t -> 0}
```

```
False
```

Bektore nuluak W azpimultzoan egoteko bigarren berdintza betetzen ez duenez, W ez da $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bektorial bat.

M2. Esan $\vec{u} = (-2, 1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, -2, 0)$, $\vec{w} = (0, 3, -2, -1)$ eta $\vec{t} = (1, 0, 1, -1)$ bektoreak linealki independenteak diren ala ez.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

Lau bektoreak definituko ditugu:

```
u = {-2, 1, 0, 1}; v = {0, 1, -2, 0}; w = {0, 3, -2, -1};  
t = {1, 0, 1, -1};
```

Dependentzia edo independentzia linealeko erlazioa planteatzen da:

```
sol = Solve[ $\alpha_1 * u + \alpha_2 * v + \alpha_3 * w + \alpha_4 * t == \{0, 0, 0, 0\}$ ]
```

```
{ $\{\alpha_1 \rightarrow \frac{\alpha_4}{2}, \alpha_2 \rightarrow \alpha_4, \alpha_3 \rightarrow -\frac{\alpha_4}{2}\}$ }
```

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ soluzio tribialaz gain, infinitu soluzio existitzen dira, hau da, posible da konbinazio lineala zero izatea koefizienteren bat ez-nulua izanik. Beraz, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ eta $\vec{t}$ bektoreak linealki dependenteak dira.

M3. $P = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ bektore-sistema emanik, non $\vec{u} = (1, m, -2)$, $\vec{v} = (m + 1, 0, 1)$ eta $\vec{w} = (2, 0, 2m - 1)$,

- Kalkulatu m parametro errealearen balioa P bektore-sistema askea izan dadin.
- Posible al da P bektore-sistema $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat izatea? Baiezko kasuan, kalkulatu $\vec{x} = (-2, 2, 2)$ bektorearen osagaiak oinarri horretan $m = -1$ denean.

EBAZPENA

- Bektoreak definituko ditugu eta P bektore-sistema askea izatea posible egingo duen m parametroaren balioa kalkulatu dugu, dependentzia edo indepentzia linealeko baldintza planteatuz:

```
Remove["Global`*"]
```

```
u = {1, m, -2}; v = {m + 1, 0, 1}; w = {2, 0, 2 m - 1};
```

```
Reduce[a * u + b * v + c * w == {0, 0, 0}]
```

```
(m == 0 && b == -c && a == -c) || ((m == - $\frac{3}{2}$  || m == 1) && b == c - 2 c m && a == 0) ||  
(-3 + m + 2 m^2 != 0 && c == 0 && b == 0 && a == 0)
```

```
Solve[-3 + m + 2 m^2 == 0, m]
```

```
{m -> - $\frac{3}{2}$ }, {m -> 1}
```

Ekuazio linealetako sistemaren emaitzatik ondorioztatzen da $m = 0$ edo $m = 1$ edo $m = -3/2$ denean P sistema ez dela askea. Bestela esanda, $m \neq 0$ eta $m \neq 1$ eta $m \neq -3/2$ denean, P sistema askea izango da.

Matrizeen heina erabiliz ere kalkula daiteke P bektore-sistema askea izateko m parametroak bete beharreko baldintza:

```
mat = Transpose[{u, v, w}]; MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+m & 2 \\ m & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1+2m \end{pmatrix}$$

```
Solve[Det[mat] == 0]
```

$$\left\{ \left\{ m \rightarrow -\frac{3}{2} \right\}, \left\{ m \rightarrow 0 \right\}, \left\{ m \rightarrow 1 \right\} \right\}$$

$m = 0$ edo $m = 1$ edo $m = -3/2$ denean, hiru bektoreek osatzen duten matrizearen heina 3 baino txikiagoa da, matrizearen determinantea zero baita. Kasu horretan, P bektore-sistema lotua da. Hau da, $m \neq 0$ eta $m \neq 1$ eta $m \neq -3/2$ denean, P sistema askea izango da.

- b) Aurreko atalean lortu ditugun m parametroaren balioetarako, $m \in \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}, 0, 1\}$, P sistema askea izateaz gain $\mathbb{R}^3$ -ko oinarria ere bada, espazio bektorial honen dimentsioa 3 baita eta P sistema hiru bektore askez osatua baitago.

$m = -1$ denean ere, P sistemako bektoreek $\mathbb{R}^3$ espazioko oinarri bat osatzen dute non $\vec{u} = (1, -1, -2)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$ eta $\vec{w} = (2, 0, -3)$ diren. Oinarri horrekiko $\vec{x} = (-2, 2, 2)$ bektorearen osagaiak kalkulatzeko bektore hori oinarri horretako bektoreen konbinazio lineal gisa idaztea aski da:

```
u = u /. m -> -1; v = v /. m -> -1; w = w /. m -> -1;
```

```
sol = Solve[a * u + b * v + c * w == {-2, 2, 2}]
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow -2, b \rightarrow -2, c \rightarrow 0 \right\} \right\}$$

```
xp = {a, b, c} /. sol[[1]]
```

```
{-2, -2, 0}
```

Beraz, $\vec{x} = (-2, 2, 2)$ bektorearen P oinarriarekiko osagaiak hauek dira:

$$\vec{x}_P = (-2, -2, 0)_P.$$

M4. Izan bedi $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialeko oinarri bat, non $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, 0, -1)$ eta $\vec{v}_3 = (2, -1, 1)$, eta $\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ bektorea. Izan bedi S $\mathbb{R}^3$ -ko azpiespazio bektorial bat eta $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ haren oinarri bat, $\vec{u}_1 = (0, 1, -1)$ eta $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ izanik.

- Kalkulatu $\vec{v}$ bektorearen koordenatuak $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoarekiko.
- Esan ea $\vec{v}$ bektorea S azpiespazio bektorialean dagoen ala ez, eta hala balitz, kalkulatu bektore horren koordenatuak B oinarriarekiko.

EBAZPENA

- A eta B sistemetako bektoreak definituko ditugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
v1 = {1, 0, 1}; v2 = {-2, 0, -1}; v3 = {2, -1, 1}; u1 = {0, 1, -1};  
u2 = {1, 0, 1};
```

$\vec{v}$ bektorearen oinarri kanonikoarekiko osagaiak hauek dira:

```
vc = 3*v1 - 2*v2 - v3
```

```
{5, 1, 4}
```

Beraz: $\vec{v}_C = (5, 1, 4)_C$.

- b) S azpiespazioaren ekuazio parametrikok kalkulatu ditugu haren oinarri bateko bektoreetatik abiatuz:

```
ekuazioak =  $\alpha \star u1 + \beta \star u2$ 
```

```
{ $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $-\alpha + \beta$ }
```

$\vec{v}$ bektorea S azpiespaziotikoa izango da, S azpiespazioaren ekuazio parametrikok betetzen baditu:

```
Solve[vc == ekuazioak]
```

```
{{ $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow 5$ }}
```

$\vec{v}$ bektorea S azpiespaziotikoa da, ekuazio parametrikok betetzen baititu. Ondoren, $\vec{v}$ bektorearen B oinarriarekiko koordenatuak kalkulatu ditugu:

```
sol = Solve[a  $\star$  u1 + b  $\star$  u2 == vc]
```

```
{{a  $\rightarrow$  1, b  $\rightarrow$  5}}
```

```
vb = {a, b} /. sol[[1]]
```

```
{1, 5}
```

Beraz, $\vec{v}$ bektorearen B oinarriarekiko koordenatuak hauek dira: $\vec{v} = (1, 5)_B$.

M5. Izan bedi $\mathbb{P}_2(x)$ bigarren mailako edo bigarren maila baino txikiagoko polinomioek osatutako espazio bektoriala: $p(x) = a + bx + cx^2$ non $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- $p_1(x) = 3$ polinomioa emanik, frogatu $A = \{p_1(x), \int p_1(x)dx, \iint (p_1(x)dx)dx\}$ sistema $\mathbb{P}_2(x)$ -ko oinarri bat dela. Integrazio-konstantea nulua kontsideratu.
- Kalkulatu $-1 + 3x + 2x^2$ bektorearen koordenatuak aurreko ataleko oinarriarekiko.

EBAZPENA

- a) Ariketa ebazteko polinomioak bektoreak direla kontsideratuko da, beraien osagaiak $\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialeko $\{1, x, x^2\}$ oinarri kanonikoarekiko osagaiak izanik. Hau da, $p(x) = a + bx + cx^2$ non $a, b, c \in \mathbb{R}$ polinomioa $\{a, b, c\}$ bezala adieraziko da.

```
Remove["Global`*"]
```

$A = \{p_1(x), \int p_1(x)dx, \iint (p_1(x)dx)dx\}$ sistemako bektoreak kalkulatz hasiko gara.

```
p1 = 3
```

```
3
```

```
p1k = {3, 0, 0}
```

```
{3, 0, 0}
```

```
p2 = Integrate[p1, x]
```

```
3 x
```

```
p2k = {0, 3, 0}
```

```
{0, 3, 0}
```

```
p3 = Integrate[p2, x]
```

```
 $\frac{3 x^2}{2}$ 
```

```
p3k = {0, 0, 3/2}
```

```
 $\{0, 0, \frac{3}{2}\}$ 
```

Bektore horiek $\mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri bat osatzen dutela frogatzeko aski da A sistema askea dela ikustea, $\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialaren dimentsioa 3 baita eta A sistema hiru bektore askek osatua egongo litzatekeelako.

```
Reduce[ $\alpha * p1k + \beta * p2k + \gamma * p3k == \{0, 0, 0\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}]$ 
 $\gamma == 0 \ \&\& \ \beta == 0 \ \&\& \ \alpha == 0$ 
```

A sistema askea dela frogatu dugu, beraz, $\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialeko oinarri bat da.

- b) Aurreko ataleko oinarriarekiko $-1 + 3x + 2x^2$ bektorearen koordenatuak kalkulatzeko, bektore hori oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa idatziko dugu:

```
Solve[ $\{-1, 3, 2\} == a * p1k + b * p2k + c * p3k, \{a, b, c\}]$ 
 $\{\{a \rightarrow -\frac{1}{3}, b \rightarrow 1, c \rightarrow \frac{4}{3}\}\}$ 
```

Beraz, $-1 + 3x + 2x^2$ bektorearen $A = \left\{3, 3x, \frac{3}{2}x^2\right\}$ oinarriarekiko koordenatuak $\left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)_A$ dira.

M6. Izan bitez $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ eta $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ $\mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko bi oinarri, non $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_4$ eta $\vec{a}_4 = \vec{b}_2 - \vec{b}_3$ diren.

- a) Kalkulatu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak B oinarriarekiko, A oinarriarekiko haren koordenatuak $\vec{x}_A = (1, 0, -1, -1)_A$ direla jakinik.
- b) Kalkulatu $\vec{y}$ bektorearen koordenatuak A oinarriarekiko, B oinarriarekiko haren koordenatuak $\vec{y}_B = (1, 1, 0, -1)_B$ direla jakinik.

EBAZPENA

- a) Oinarri-aldaketa matrizea erabiliz $\vec{x}$ bektorearen B oinarriarekiko koordenatuak kalkulatuko ditugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
 $\mathbf{xa} = \{1, 0, -1, -1\}; \mathbf{xb} = \{\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}, \mathbf{x4}\};$ 
```



```
a1 = {1, -1, 0, 0}; a2 = {0, 0, 2, 0}; a3 = {1, 0, 0, 2}; a4 = {0, 1, -1, 0};
mat = Transpose[{a1, a2, a3, a4}];
MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
sol = Solve[xb == mat.xa]; xb = xb /. sol[[1]]
```

```
{0, -2, 1, -2}
```

Beraz, $\vec{x}$ bektorearen koordinatuak B oinarriarekiko $\vec{x}_B = (0, -2, 1, 2)_B$ dira.

- b) $\vec{y}$ bektorearen koordinatuak A oinarriarekiko kalkulatuko ditugu oinarri aldaketarako formula erabilita:

```
yb = {1, 1, 0, -1}; ya = {y1, y2, y3, y4};
```

```
sol = Solve[yb == mat.ya]; ya = ya /. sol[[1]]
```

```
{3/2, 5/4, -1/2, 5/2}
```

Beraz, $\vec{y}$ bektorearen koordinatuak A oinarriarekiko $\vec{y}_A = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)_A$ dira.

M7. Izan bedi ondoko bektore-sistema $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Frogatu B sistema $M_2(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko oinarri bat dela.
- Izan bedi $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, B oinarrian idatzitako matrizea. Kalkulatu A_1 matrizearen koordinatuak oinarri kanonikoarekiko.
- Izan bedi $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ oinarri kanonikoan idatzitako matrizea. Kalkulatu A_2 matrizearen koordinatuak B oinarriarekiko.

EBAZPENA

- a) $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ denez, B sistema $M_2(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko oinarri bat izateko aski da sistemako lau bektoreak linealki independenteak direla ikustea:

```
Remove["Global`*"]
```

```
b1 =  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; b2 =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; b3 =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; b4 =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
```

```
Solve[ $\alpha_1$  b1 +  $\alpha_2$  b2 +  $\alpha_3$  b3 +  $\alpha_4$  b4 == 0, { $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ }]
```

```
{{ $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_3 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_4 \rightarrow 0$ }}
```

B sistema askea denez, $M_2(\mathbb{R})$ espazioko oinarri bat da.

- b) A_1 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordinatuak kalkulatzeko koordinatuen definizioa edota oinarri-aldaketa matrizea erabil daitezke. Definizioa erabiliz:

```
a1 = 2 b1 + 4 b2 + 3 b3 - 2 b4; a1 = Flatten[a1]
```

```
{4, 1, -4, -2}
```

Beraz, A_1 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordinatuak hauek dira: $A_1 = (4, 1, -4, -2)_C$.

Emaitza bera lortzen dugu oinarri-aldaketako P matrizea erabilita. P matrizeak B oinarriko bektoreak ditu zutabetzat, hau da:

```
P = Transpose[{{1, -1, 0, 0}, {1, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}}];  
MatrixForm[P]
```

```
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
```

P matrizea A_1 matrizearen B oinarriarekiko koordinatuez biderkatuz, A_1 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordinatuak kalkulatzeko dira. Ikus daitekeenez aurretik lortu den emaitza bera lortzen da:

```
P.{2, 4, 3, -2}
```

```
{4, 1, -4, -2}
```

Beraz, A_1 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordinatuak hauek dira: $A_1 = (4, 1, -4, -2)_C$.

c) Bektore baten oinarri batekiko koordinatuen definizioa erabilita zera daukagu:

```
a2 = {a1, a2, a3, a4};
```

```
sol = Solve[a1 b1 + a2 b2 + a3 b3 + a4 b4 == {{3, -1}, {2, 2}}, {a1, a2, a3, a4}]
```

```
{{a1 -> 3, a2 -> -2, a3 -> 2, a4 -> 2}}
```

```
a2 = a2 /. sol[[1]]
```

```
{3, -2, 2, 2}
```

Beraz, A_2 matrizearen B oinarriarekiko koordinatuak hauek dira: $A_2 = (3, -2, 2, 2)_B$.

Berrir ere, oinarri-aldaketako adierazpena erabilita emaitza bera lortuko genukeela egiazta daiteke. Kasu honetan, aurreko ataleko P matrizearen alderantzizkoaz biderkatu behar dira A_2 matrizearen oinarri kanonikoarekiko koordinatuak:

```
Inverse[P] // MatrixForm
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
Inverse[P].{3, -1, 2, 2}
```

```
{3, -2, 2, 2}
```

M8. Izan bitez $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 - 2x_4 = 0\}$ eta $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_4 = 0\} \mathbb{R}^4$ espazio bektorialeko bi azpiespazio bektorial.

- Kalkulatu S eta T azpiespazio bektorialen oinarri bana.
- Kalkulatu $S \cap T$ azpiespazio bektorialeko oinarri bat.
- Kalkulatu $S + T$ azpiespazio bektoriala. Batura zuzena al da?

EBAZPENA

- S espazioko sistema sortzaile bat kalkulatz hasiko gara:

```
Remove["Global`*"]
```

```
soll = Solve[{x1 + x2 == 0, x3 - 2 x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
{{x1 -> -x2, x3 -> 2 x4}}
```

```
x = {x1, x2, x3, x4} /. soll[[1]]
{-x2, x2, 2 x4, x4}
```

```
bs1 = x /. {x2 -> 1, x4 -> 0}
{-1, 1, 0, 0}
```

```
bs2 = x /. {x2 -> 0, x4 -> 1}
{0, 0, 2, 1}
```

Beraz, $B_S = \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ sistema S azpiespazioko sistema sortzaile bat da. B_S sistema S azpiespazioko oinarria izango da, askea bada. Ikus dezagun ea askea den:

```
Solve[a1 bs1 + a2 bs2 == 0, {a1, a2}]
{{a1 -> 0, a2 -> 0}}
```

B_S sistema askea ere badenez, S azpiespazioko oinarri bat da.

Era berdintsuan T azpiespazioko oinarri bat lortuko dugu:

```
sol2 = Solve[x1 - x2 + x4 == 0, {x1, x2, x3, x4}]
{{x1 -> x2 - x4}}
```

```
x = {x1, x2, x3, x4} /. sol2[[1]]
{x2 - x4, x2, x3, x4}
```

```
bt1 = x /. {x2 -> 1, x3 -> 0, x4 -> 0}
{1, 1, 0, 0}
```

```
bt2 = x /. {x2 -> 0, x3 -> 1, x4 -> 0}
{0, 0, 1, 0}
```

```
bt3 = x /. {x2 -> 1, x3 -> 0, x4 -> 1}
{0, 1, 0, 1}
```

$B_T = \{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,1)\}$ sistema T azpiespazioko sistema sortzaile bat da.

Ikus dezagun ea sistema hau askea den:

```
Solve[a1 bt1 + a2 bt2 + a3 bt3 == 0, {a1, a2, a3}]
{{a2 -> 0, a1 -> 0, a3 -> 0}}
```

Ondorioz, $B_T = \{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,1)\}$ T azpiespazioko oinarri bat da.

b) $S \cap T$ ebakidurako edozein bektore bi azpiespazioetan dagoenez:

```
sol3 = Solve[{x1 + x2 == 0, x3 - 2 x4 == 0, x1 - x2 + x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
{{x1 -> -x4/2, x2 -> x4/2, x3 -> 2 x4}}
```

```
x = {x1, x2, x3, x4} /. sol3[[1]]
```

$$\left\{-\frac{x_4}{2}, \frac{x_4}{2}, 2x_4, x_4\right\}$$

Kontsideratu aurreko adierazpena duen edozein bektore:

```
int1 = x /. x4 -> -2
```

$$\{1, -1, -4, -2\}$$

$B_S \cap T = \{(1, -1, -4, -2)\}$ sistema ebakidurako sistema sortzaile bat da. Gainera askea da, bektore ez-nulu bakarrak osatzen baitu. Beraz, $B_S \cap T$ ebakidura azpiespazioko oinarri bat da.

c) $S + T$ azpiespazioa ondoko bektoreek sortua da:

$$S + T = \langle (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

$S + T$ azpiespazioa zein den kalkulatzeko haren oinarri bat kalkulatu dugu. Horretarako aski da S eta T azpiespazioetako oinarriek osatutako sisteman linealki independenteak diren bektoreak kontsideratzea:

```
m = Transpose[{bs1, bs2, bt1, bt2, bt3}]; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
MatrixRank[m]
```

4

```
Det[m][[{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}]]
```

-2

Aurreko matrizea osatzen duten lehenengo lau zutabe-bektoreak linealki independenteak direnez, $\{(-1,1,0,0), (0,0,2,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ $S + T$ azpiespazioko oinarri bat da. Oinarri hori erabilita $S + T$ azpiespazioko ekuazio parametrikokoak kalkula daitezke:

$$\alpha * bs1 + \beta * bs2 + \gamma * bt1 + \delta * bt2$$

$$\{-\alpha + \gamma, \alpha + \gamma, 2\beta + \delta, \beta\}$$

Bukatzeko $S \cap T \neq \{\vec{0}\}$ denez, bi azpiespazio hauen arteko batura ez da zuzena izango.

4 APLIKAZIO LINEALAK

4.1 Aplikazio linealak eta propietateak

Definizioa. Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ eta $((F, +), (K, +, \cdot), \circ)$ K gorputzean definitutako bi espazio bektorial eta izan bedi f E -tik F -ra definitutako aplikazioa:

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow F \\ \vec{u} &\rightarrow f(\vec{u}) \end{aligned}$$

f aplikazioa lineala da, ondorengo bi baldintzak betetzen baditu:

- i) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$
- ii) $f(\alpha \circ \vec{u}) = \alpha \circ f(\vec{u}), \forall \vec{u} \in E, \forall \alpha \in K$

Teorema. Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ eta $((F, +), (K, +, \cdot), \circ)$ K gorputzean definitutako bi espazio bektorial eta izan bedi f E -tik F -ra definitutako aplikazioa. f aplikazioa lineala da, ondorengo baldintza betetzen bada:

$$f(\alpha \circ \vec{u} + \beta \circ \vec{v}) = \alpha \circ f(\vec{u}) + \beta \circ f(\vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \alpha, \beta \in K$$

4.2 Aplikazio linealen sailkapena

Definizioak. Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazioa:

- Aplikazio bat injektiboa da, irudi bati gehienez aurreirudi bakarra dagokionean. Hau da, ez dira irudi bereko elementu bi edo gehiago existitzen:

$$\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{u}_1) \neq f(\vec{u}_2)$$

Edo gauza bera dena: $f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2) \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

- Aplikazio bat suprajektiboa da, helmuga edo amaiera multzoko elementu guztiek gutxienez aurreirudi bat dutenean:

$$\forall \vec{w} \in F, \exists \vec{u} \in E: f(\vec{u}) = \vec{w}$$

- Funtzio bat bijektiboa da, injektiboa eta suprajektiboa denean. Hau da, amaiera multzoko elementu guztiek aurreirudi bakarra dutenean:

$$\forall \vec{w} \in F, \exists! \vec{u} \in E: f(\vec{u}) = \vec{w}$$

Aplikazio linealei, espazio bektorialen arteko morfismo edo homomorfismo ere deritze.

- f aplikazio lineala suprajektiboa denean, epimorfismo deritzo.
- f aplikazio lineala injektiboa denean, monomorfismo deritzo.
- f aplikazio lineala bijektiboa denean, isomorfismo deritzo.
- f aplikazio linealean $E = F$ betetzen denean, endomorfismo deritzo.
- f endomorfismoa bijektiboa denean, automorfismo deritzo.

4.3 Aplikazio linealen propietateak

Izan bedi hurrengo aplikazio lineala:

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow F \\ \vec{u} &\rightarrow f(\vec{u}) \end{aligned}$$

1.- Izan bedi $\vec{0}_E$, E espazio bektorialeko batuketarekiko elementu neutroa, eta $\vec{0}_F$, F espazio bektorialekoa, orduan, ondorengo berdintza betetzen da: $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

2.- $\forall \vec{u} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.

3.- $W \subseteq E$ azpiespazio bektoriala bada, orduan $f(W) \subseteq F$ azpiespazio bektoriala da.

4.- $f(W) \subseteq F$ azpiespazio bektoriala bada, orduan $W \subseteq E$ azpiespazio bektoriala da.

5.- $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema lotua bada, orduan $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ sistema ere lotua da.

6.- $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ sistema askea bada, orduan $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema ere askea da.

4.4 Aplikazio lineal baten irudia

Definizioa. Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazio lineala. E espazio bektorialeko bektore guztien irudiek F espazioan osatzen duten multzoari f aplikazioaren irudia deritzo eta $Im(f)$ notazioa erabilia izendatzen da:

$$Im(f) = \{f(\vec{u}): \vec{u} \in E\}$$

Teorema. Izan bitez E p dimentsioko espazio bektoriala eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ haren oinarri bat, orduan $Im(f)$ F -ren azpiespazio bektorial bat da, non $Im(f) = \langle f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p) \rangle$ betetzen den.

4.5 Aplikazio lineal baten matrizea

Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazio lineala, E eta F espazio bektorialak hurrenez hurren p eta n dimentsiokoak izanik. Izan bitez $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ E espazioko oinarri bat eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ F espazioko oinarri bat.

Definizioa. f aplikazio linealaren U eta V oinarriekiko matrizea $f(U) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ sistemako bektoreen V oinarriarekiko koordenatuez osatua dago. Aplikazio linealaren matrizea honako notazioa erabilia idatziko dugu: $(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p))_{U,V}$.

Izan bitez U oinarriko elementuen irudiak V oinarriarekiko:

$$f(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}_V, f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} \end{pmatrix}_V, \dots, f(\vec{u}_p) = \begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ \vdots \\ f_{np} \end{pmatrix}_V$$

Orduan, f aplikazio linealaren U eta V oinarriekiko matrizea hau da:

$$(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p))_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} \equiv f_{U,V}$$

U sistema E espazioko oinarri bat denez, $\forall \vec{u} \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K: \vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p$ f aplikazio linealaren U eta V oinarriekiko matrizea ezagutuz gero, $f(\vec{u})$ kalkula daiteke. f aplikazioa lineala denez, zera daukagu:

$$f(\vec{u}) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_p f(\vec{u}_p)$$

Eta $(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p))_{U,V}$ balioak aurreko adierazpenean ordezkatzuz $f(\vec{u})$ -ren balioa V oinarrian daukagu:

$$f(\vec{u})_V = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_p f(\vec{u}_p) = \alpha_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}_V + \alpha_2 \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} \end{pmatrix}_V + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ \vdots \\ f_{np} \end{pmatrix}_V$$

Ondorioz:

$$f(\vec{u})_V \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}_U \Rightarrow (\vec{y})_V = f_{U,V} \cdot (\vec{u})_U$$

4.5.1 Aplikazio lineal baten heina

Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazio lineala, E eta F espazio bektorialak p eta n dimentsiokoak izanik hurrenez hurren, eta izan bitez $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ E espazioko oinarri bat eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ F espazioko oinarri bat. Aplikazio lineal baten heina $Im(f)$ azpiespazioaren dimentsioa da. Izan ere, $Im(f) = \langle f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p) \rangle$ denez, sistema horretatik linealki independenteak diren bektoreak hartuz gero, $Im(f)$ espazio bektorialaren oinarri bat izango dugu eta $Im(f)$ -ren dimentsioa oinarriko bektore kopurua izango da.

$f_{U,V}$ matrizeak $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_p)\}$ bektoreen V oinarriarekiko koordinatuak ditu zutabetzat, haren heina linealki independenteak diren zutabe kopurua da, eta, ondorioz, irudiaren dimentsioarekin bat dator:

$$h(f_{U,V}) = \dim Im(f)$$

4.6 Aplikazio lineal baten nukleoa

Definizioa. Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazio lineala eta E eta F p eta n dimentsioko espazio bektorialak hurrenez hurren. $\vec{0}_F \in F$ irudia duten E espazioko bektoreek osatzen duten multzoari f aplikazioaren nukleoa deritzo eta $Ker(f)$ izendatzen da:

$$Ker(f) = \{\vec{u} \in E: f(\vec{u}) = \vec{0}_F\}$$

Propietateak:

- f aplikazioaren nukleoa E espazio bektorialeko azpiespazio bat da.
- Dimentsioen arteko ondorengo berdintza betetzen da:

$$\dim(E) = \dim Ker(f) + \dim Im(f) \Rightarrow \dim(E) = \dim Ker(f) + h(f_{U,V})$$

4.7 Aplikazio linealen ezaugarritzea

- f aplikazio lineala injektiboa da bere nukleoa bektore nulua denean:

$$f \text{ injektiboa da} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$$

- f aplikazio lineala injektiboa da dimentsioen arteko ondoko berdintza betetzen denean:

$$f \text{ injektiboa da} \Leftrightarrow \dim(E) = \dim \text{Im}(f)$$

- f aplikazio lineala suprajektiboa da bere irudia F espazio bektorial osoa denean:

$$f \text{ suprajektiboa da} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$$

- f aplikazio lineala bijektiboa da batera injektiboa eta suprajektiboa denean:

$$f \text{ bijektiboa da} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im}(f) = F \\ \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\} \end{cases}$$

4.8 Aplikazio linealen batuketa

Izan bitez $f: E \rightarrow F$ eta $g: E \rightarrow F$ aplikazio linealak eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ E eta F espazio bektorialetako oinarri bana. Bi aplikazio lineal horien batuketa $f + g: E \rightarrow F$ honela definitutako aplikazio lineala da:

$$(f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}), \forall \vec{u} \in E$$

$f + g$ aplikazio linealari lotutako matrizea aplikazio lineal bakoitzari lotutako matrizeen arteko batura da:

$$(f + g)_{U,V} = f_{U,V} + g_{U,V}$$

$f_{U,V}$ eta $g_{U,V}$ matrizeak f eta g aplikazioen U eta V oinarriekiko matrizeak izanik.

U oinarriko bektoreen irudiak f eta g aplikazioen bidez V oinarriarekiko hauexek dira:

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}_V, f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} \end{pmatrix}_V, \dots, f(\vec{u}_p) = \begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ \vdots \\ f_{np} \end{pmatrix}_V \\ g(\vec{u}_1) &= \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}_V, g(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{n2} \end{pmatrix}_V, \dots, g(\vec{u}_p) = \begin{pmatrix} g_{1p} \\ g_{2p} \\ \vdots \\ g_{np} \end{pmatrix}_V \end{aligned}$$

$f + g$ aplikazioaren linealtasuna erabiliz, U oinarriko bektoreen irudiak V oinarriarekiko era honetan kalkula daitezke:

$$\left\{ \begin{array}{l} (f + g)(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_1) + g(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} f_{11} + g_{11} \\ f_{21} + g_{21} \\ \vdots \\ f_{n1} + g_{n1} \end{pmatrix}_V \\ (f + g)(\vec{u}_2) = f(\vec{u}_2) + g(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} f_{12} + g_{12} \\ f_{22} + g_{22} \\ \vdots \\ f_{n2} + g_{n2} \end{pmatrix}_V \\ \vdots \\ (f + g)(\vec{u}_p) = f(\vec{u}_p) + g(\vec{u}_p) = \begin{pmatrix} f_{1p} + g_{1p} \\ f_{2p} + g_{2p} \\ \vdots \\ f_{np} + g_{np} \end{pmatrix}_V \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f + g)_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11} + g_{11} & f_{12} + g_{12} & \cdots & f_{1p} + g_{1p} \\ f_{21} + g_{21} & f_{22} + g_{22} & \cdots & f_{2p} + g_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} + g_{n1} & f_{n2} + g_{n2} & \cdots & f_{np} + g_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1p} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{np} \end{pmatrix}_{U,V} = f_{U,V} + g_{U,V}$$

4.9 Aplikazio lineal baten eta eskalar baten arteko biderketa

Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazio lineala eta izan bitez $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, E eta F espazio bektorialetako bi oinarri hurrenez hurren. Izan bedi $f_{U,V}$, f aplikazio linealaren U eta V oinarriekiko matrizea:

$$f_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V}$$

Definizioa. $\alpha \in K$ emanik, α eskalarraren eta f aplikazio linealaren arteko biderketa honela definitutako aplikazio lineala da:

$$\alpha \circ f: E \rightarrow F$$

$$\vec{u} \rightarrow (\alpha \circ f)(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

4.7 atalean erabilitako antzeko arrazoibidea erabiliz, $\alpha \circ f$ aplikazio linealari lotutako matrizea lor daiteke:

$$(\alpha f)_{U,V} = \begin{pmatrix} \alpha f_{11} & \alpha f_{12} & \cdots & \alpha f_{1p} \\ \alpha f_{21} & \alpha f_{22} & \cdots & \alpha f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha f_{n1} & \alpha f_{n2} & \cdots & \alpha f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} = \alpha \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} = \alpha(f)_{U,V}$$

4.10 Aplikazio linealen konposaketa

Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$, $((F, +), (K, +, \cdot), \circ)$ eta $((H, +), (K, +, \cdot), \circ)$ K gorputzean definitutako p , n eta q dimentsioko hiru espazio bektorial, eta izan bitez $f: E \rightarrow F$ eta $g: F \rightarrow H$ aplikazioa linealak. f eta g aplikazioen konposaketa era honetan definitutako $g \circ f: E \rightarrow H$ aplikazio lineala da:

$$\begin{aligned} (g \circ f): E &\xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} H \\ \vec{u} &\rightarrow f(\vec{u}) \rightarrow (g \circ f)(\vec{u}) = g[f(\vec{u})] \end{aligned}$$

Izan bitez $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$, $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ eta $T = \{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_q\}$, E , F eta H espazio bektorialetako oinarri bana hurrenez hurren. $g \circ f$ aplikazio linealaren matrizea aplikazio lineal bakoitzari dagozkion matrizeen arteko biderkadura da:

$$\underbrace{(g \circ f)_{U,T}}_{\in M_{q \times p}} = \underbrace{(g)_{V,T}}_{\in M_{q \times n}} \cdot \underbrace{(f)_{U,V}}_{\in M_{n \times p}}$$

non:

- $f_{U,V}$, f aplikazio linealaren U eta V oinarriekiko matrizea den.
- $g_{V,T}$, g aplikazio linealaren V eta T oinarriekiko matrizea den.

EBATZITAKO ARIKETAK

P1. Adierazi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, -x + 2y + z)$ aplikazioa lineala den ala ez.

EBAZPENA

f aplikazioa lineala izango da, ondokoa betetzen badu:

$$f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Edo baliokidea dena:

$$\begin{cases} f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \end{cases} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

f aplikazioaren linealtasuna frogatzeko ikusiko dugu ea azken bi berdintza hauek betetzen diren. Izan bitez $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ eta $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ bektoreak, orduan:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Hiru bektore horien irudiak kalkulatu ditugu:

$$f(\vec{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$$

$$f(\vec{y}) = (2y_1 + y_2, y_1 - y_3, -y_1 + 2y_2 + y_3)$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) - (x_3 + y_3),$$

$$-(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) \Rightarrow$$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2, x_1 + y_1 - x_3 - y_3, -x_1 - y_1 + 2x_2 + 2y_2 + x_3 + y_3) \quad (1)$$

$f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ ere kalkulatu dugu:

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3) + (2y_1 + y_2, y_1 - y_3, -y_1 + 2y_2 + y_3)$$

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = (2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2, x_1 - x_3 + y_1 - y_3, -x_1 + 2x_2 + x_3 - y_1 + 2y_2 + y_3) \quad (2)$$

(1) eta (2) adierazpenak berdinak direnez, f aplikazioa lineala izateko bete beharreko lehenengo baldintza bete egiten da:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Ikus dezagun ea bigarren baldintza betetzen den. Horretarako, $\alpha\vec{x} = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ bektorea osatuko dugu eta haren irudia kalkulatu dugu:

$$f(\alpha\vec{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_3, -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3) \quad (3)$$

Ondoren, $\alpha f(\vec{x})$ kalkulatu dugu:

$$\alpha f(\vec{x}) = \alpha(2x_1 + x_2, x_1 - x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3) \Rightarrow$$

$$\alpha f(\vec{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_3, -\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + \alpha x_3) \quad (4)$$

(3) eta (4) adierazpenak berdinak direnez, f aplikazioa lineala izateko bete beharreko bigarren baldintza ere bete egiten da: $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$. Beraz, f aplikazioa lineala da.

P2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala emanik eta $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, x - z)$ izanik.

- Kalkulatu f aplikazioaren nukleoa.
- Kalkulatu $Im(f)$ -ren oinarri bat eta haren dimentsioa.
- Sailkatu f aplikazio lineala.

EBAZPENA

- Nukleoaren definizioa kontuan izanda, zera dakigu:

$$\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Hau da: $\vec{x} = (x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, x - z) = (0, 0)$.

Beraz, aplikazio linealaren nukleoa kalkulatzeko aski da azken bi bektore horien osagaiak berdinduz lortzen den ekuazio linealetako sistema ebaztea:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ x = z \end{cases}$$

Beraz, f aplikazioaren nukleoa hurrengo da: $Ker(f) = \left\{ \left(\frac{2}{3}y, y, \frac{2}{3}y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

- Izan bedi $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoa. Aplikazio linealaren irudiaren definizioagatik badakigu $Im(f) = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3) \rangle$ dela. Beraz, oinarri kanonikoko bektoreen irudiak kalkulatu hasiko gara:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) \\ f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (-2, 0) \\ f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = (2, -1) \end{cases} \Rightarrow Im(f) = \langle (1, 1), (-2, 0), (2, -1) \rangle$$

$Im(f)$ azpiespazioaren oinarri bat kalkulatzeko, aski da haren sistema sortzailean linealki independenteak diren bektoreak hartzea. Hau da:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow h \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Hau da, $B = \{(1,1), (-2,0)\}$ $Im(f)$ azpiespazioaren oinarri bat da eta $\dim Im(f) = 2$. Gainera, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ denez eta $Im(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ denez, orduan $Im(f) = \mathbb{R}^2$ dela ondorioztatzen da.

c) $\dim Ker(f) = 1 \neq 0$ denez, f ez da injektiboa. Eta $\dim Im(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ denez, f suprajektiboa da. Beraz, f epimorfismoa da.

P3. $f: \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x)$ aplikazio lineala emanik, non $f(p(x)) = k^2 p(x) - p(1)$, $\forall k \neq 0$:

- Kalkulatu aplikazio linealaren matrizea oinarri kanonikoarekiko.
- Kalkulatu nukleoaren oinarri bat eta haren dimentsioa.
- Kalkulatu $Im(f)$ -ren oinarri bat.
- Sailkatu f aplikazio lineala.

EBAZPENA

a) Izan bedi $C_2 = \{1, x, x^2\}$ $\mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri kanonikoa. Oinarri horretako bektoreen irudien koordenatuak oinarri kanonikoarekiko kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} f(1) = k^2 - 1 = (k^2 - 1, 0, 0)_{C_2} \\ f(x) = k^2 x - 1 = (-1, k^2, 0)_{C_2} \\ f(x^2) = k^2 x^2 - 1 = (-1, 0, k^2)_{C_2} \end{cases}$$

Irudiok zutabeetan jartzean lortzen den matrizea da aplikazio linealari lotutako matrizea:

$$f_{C_2, C_2} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 & -1 & -1 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}_{C_2, C_2}$$

b) Nukleoaren definizioa erabilita zera daukagu:

$$p(x) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(p(x)) = 0 = 0x^2 + 0x + 0$$

Izan bedi $p(x)$, $\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialeko edozein polinomio:

$$\forall p(x) \in \mathbb{P}_2(x): p(x) = ax^2 + bx + c$$

Polinomio hori nukleoan egongo da, honako berdintza hau betetzen badu:

$$f(p(x)) = ak^2x^2 + bk^2x + ck^2 - a - b - c = 0x^2 + 0x + 0$$

Aurreko berdintzaren alde bietako polinomioen koefizienteak berdinduz zera daukagu:

$$\begin{cases} ak^2 = 0 \\ bk^2 = 0 \\ ck^2 - a - b - c = 0 \end{cases} \xrightarrow{k \neq 0} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c(k^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Eta beraz, kasu ezberdinak bereizi behar dira:

1. kasua: $k \neq \pm 1 \Rightarrow c = 0$. Kasu honetan, sistemaren soluzioa $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ da. Beraz, aplikazio linealaren nukleoa polinomio nulua da. Hau da: $\text{Ker}(f) = \{0\}$ eta $\dim \text{Ker}(f) = 0$.

2. kasua: $k = \pm 1$. Kasu honetan, sistemaren soluzioa $a = 0$, $b = 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$ da. Beraz, aplikazio linealaren nukleoa polinomio konstantez osatuta dago. Hau da: $\text{Ker}(f) = \{p(x) = c \mid c \in \mathbb{R}\}$, eta $B = \{1\}$ honen oinarri bat izanik. Beraz, $\dim \text{Ker}(f) = 1$.

c) $\text{Im}(f)$ azpiespazioaren oinarri bat lortzeko dimentsioen arteko erlazioa erabiliko dugu:

$$\dim(\mathbb{P}_2(x)) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Nukleoaren dimentsioa k parametroaren arabera denez, aurreko atalean bezala, bi kasu bereizi behar dira:

1. kasua: $k \neq \pm 1$ denean: $\dim \text{Ker}(f) = 0 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = \dim(\mathbb{P}_2(x))$. Gainera, $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{P}_2(x) \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{P}_2(x)$. Beraz, $\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialaren edozein oinarri $\text{Im}(f)$ -ren oinarria da. Konkreteki, oinarri kanonikoa $C = \{1, x, x^2\}$ aplikazio linealaren irudiaren oinarri bat da.

2. kasua: $k = \pm 1$ denean:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(f) = 1 &\Rightarrow \dim \text{Im}(f) = \dim(\mathbb{P}_2(x)) - \dim \text{Ker}(f) \\ &\Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

$\text{Im}(f)$ azpiespazioaren definizioa erabilita zera daukagu:

$$\text{Im}(f) = \langle f(1), f(x), f(x^2) \rangle = \langle k^2 - 1, k^2x - 1, k^2x^2 - 1 \rangle$$

$Im(f)$ azpiespazioaren dimentsioa 2 denez, nahikoa da aurreko sistema sortzailetik linealki independenteak diren bi bektore hartzea. Horrela, adibidez sistema sortzaileko bigarren eta hirugarren polinomioak linealki independenteak diren aztertuko dugu:

$$\alpha_1(k^2x^2 - 1) + \alpha_2(k^2x - 1) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 k^2 x^2 - \alpha_1 + \alpha_2 k^2 x - \alpha_2 = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 k^2 = 0 \\ \alpha_2 k^2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Beraz, $B = \{k^2x - 1, k^2x^2 - 1\}$ $Im(f)$ -ren oinarri bat da.

- d) Lehenengo kasuan, $k \neq \pm 1$ eta $\dim Ker(f) = 0$ dira, beraz, f injektiboa da. Gainera, $\dim Im(f) = 3 = \dim \mathbb{P}_2(x)$ denez, $Im(f) = \mathbb{P}_2(x)$ betetzen da eta f suprajektiboa da. Beraz, kasu honetan f automorfismo bat da.

Bigarren kasuan, $k = \pm 1$ eta $\dim Ker(f) = 1 \neq 0$ dira, beraz, f ez da injektiboa. Gainera, $\dim Im(f) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{P}_2(x)$ betetzen denez, f ez da suprajektiboa. Hortaz, kasu honetan f homomorfismo bat baino ez da.

P4. $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ aplikazio lineala emanik, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$ eran definitua dagoena:

- Kalkulatu f aplikazio linealaren $M_2(\mathbb{R})$ -ko oinarri kanonikoarekiko matrizea.
- Kalkulatu nukleoa, haren oinarri bat eta haren dimentsioa.
- Kalkulatu $Im(f)$ azpiespazioaren dimentsioa.
- Sailkatu f aplikazio lineala.

EBAZPENA

- a) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ azpiespazioko oinarri kanonikoa:
- $$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
- f aplikazio linealaren oinarri kanonikoarekiko matrizea kalkulatzeko, oinarri kanonikoko bektoreen f -ren bidezko irudiak kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1, 0)_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0)_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1)_c \end{cases}$$

Lortu ditugun irudiak matrize bateko zutabe bihurtuz, f aplikazio linealaren $M_2(\mathbb{R})$ -ko oinarri kanonikoarekiko matrizea daukagu:

$$f_{c,c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{c,c}$$

b) f aplikazioaren nukleoa bektore hauek osatzen dute:

$$\text{Ker}(f) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Izan bedi $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Orduan, haren irudia hauxe da: $f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix}$. A

matrizea nukleoan egongo da, $f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ betetzen badu. Hau da:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 0=0 \\ x=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0, z=-t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beraz, $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ eta nukleoaren oinarri bat hurrengo da: $B =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ondorioz, $\dim \text{Ker}(f) = 1$.

- c) $Im(f)$ -ren dimentsioa lortzeko f aplikazioaren matrizearen heina kalkulatu dugu:

$$h \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim Im(f) = 3$$

- d) $\dim Ker(f) = 1 \neq 0$ denez, f ez da injektiboa. Gainera, $\dim Im(f) = 3 \neq \dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$ denez, f ez da suprajektiboa. Orduan, f homomorfismo bat baino ez da.

P5. Izan bedi $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, $f(x, y, z, t) = (2x + y - t, x + z + t, -x - y + z + 2t)$ bezala definitua dagoena.

- a) Kalkulatu $\vec{v} = (0, 4, -1, 3)$ bektorearen f bidezko irudia. $\vec{v} \in Ker(f)$ betetzen al da?
- b) Kalkulatu $\vec{w} = (1, 4, 3)$ bektorea iruditzen duen bektore bat.

EBAZPENA

- a) $\vec{v}$ bektorearen irudia kalkulatu dugu:

$$f(\vec{v}) = f(0, 4, -1, 3) = (4 - 3, -1 + 3, -4 + (-1) + 2 \cdot 3) = (1, 2, 1)$$

$\vec{v}$ bektorea ez da nukleoko bektore bat, hau da, $\vec{v} \notin Ker(f)$, bere irudia ez baita bektore nulua.

- b) $f(\vec{u}) = \vec{w}$ betetzen duen $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ bektorea aurkitu behar da. Horretarako, $f(x, y, z, t) = (1, 4, 3)$ berdintzatik eratortzen den sistema ebatzi beharra dago:

$$f(x, y, z, t) = (1, 4, 3) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - t = 1 \\ x + z + t = 4 \\ -x - y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

Sistema hau askatzeko koefizienteen matrizearen eta matrize hedatuaren heinak kalkulatu ditugu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Bi matrize horietan, 3. errenkada lehenengo bi errenkaden konbinazio lineala da:

$$E_3 = E_2 - E_1$$

Beraz, $h(A) = h(A|b) \leq 2$. Zehazki, ondorengoa daukagu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow h(A) = h(A|\vec{b}) = 2$$

$h(A) = 2 = h(A|b) < \text{ezezagun kopurua} = 4$ betetzen denez, Sistema Bateragarri Indeterminatua da. Daukagun sistemaren baliokidea da hurrengo sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - t = 1 \\ x + z + t = 4 \\ -x - y + z + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + t \\ x = 4 - z - t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 + \mu \\ x = 4 - \lambda - \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \Rightarrow x = 4 - \lambda - \mu, y = -7 + 2\lambda + 3\mu, z = \lambda, t = \mu$$

Nahikoa da λ eta μ parametroei balioak ematea, sistemak dituen infinitu emaitzen artean emaitza bat lortzeko. Adibidez, $\lambda = 0$ eta $\mu = 0$ hartuz, $x = 4$, $y = -7$, $z = 0$ eta $t = 0$ emaitza lortzen da. Beraz, $\vec{w} = (1, 4, 3)$ bektorea iruditzen duen bektore bat $\vec{u} = (4, -7, 0, 0)$ bektorea litzateke.

P6. Izan bedi $f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ aplikazio lineala, non:

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+d & c+g \\ d-b & 0 & f+h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen f aplikazioaren bidezko irudia.
- b) Kalkulatu $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen aurre irudia.

EBAZPENA

a) $f(A) = f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

- b) B matrizea iruditzen duen $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ matrizea aurkitu behar da. Horretarako, ondoko

sistema ebatzi beharra dago:

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b+d & c+g \\ d-b & 0 & f+h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aurreko matrizeak osagaiz osagai berdinduz, zera lortzen da:

$$\begin{cases} b + d = 3 \\ d - b = -3 \\ c + g = 5 \\ g - c = 3 \\ f + h = 1 \\ h - f = 1 \end{cases} \Rightarrow d = 0, b = 3, g = 4, c = 1, h = 1, f = 0$$

Beraz, $\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 4 & 1 & i \end{pmatrix} \forall a, e, i \in \mathbb{R}$ motako edozein matrize B matrizearen aurre irudia da.

Hau da, infinitu matrize daude f aplikazioaren bidezko iruditzen B matrizea dutenak.

Horietako bat $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ matrizea da.

P7. Izan bedi $f: \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{P}_1(x)$ aplikazio lineala $f(p(x)) = 2p'(x)$ izanik.

- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{P}_2(x)$ eta $\mathbb{P}_1(x)$ espazioetako oinarri kanonikoekiko.
- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{P}_2(x)$ -ko oinarri kanonikoarekiko eta $\mathbb{P}_1(x)$ -ko $V = \{x, x - 2\}$ oinarriarekiko.
- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{P}_2(x)$ -ko $U = \{2, 1 + 2x, x + x^2\}$ oinarriarekiko eta $\mathbb{P}_1(x)$ -ko oinarri kanonikoarekiko.
- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{P}_2(x)$ -ko $U = \{2, 1 + 2x, x + x^2\}$ oinarriarekiko eta $\mathbb{P}_1(x)$ -ko $V = \{x, x - 2\}$ oinarriarekiko.

EBAZPENA

- Izan bedi $C_2 = \{1, x, x^2\}$ $\mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri kanonikoa eta $C_1 = \{1, x\}$ $\mathbb{P}_1(x)$ espaziokoa. C_2 oinarriko bektoreen irudiak kalkulatu ditugu eta C_1 oinarriarekiko dagozkien koordenatuak lortu ditugu:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x^2) = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow f(1) = (0, 0)_{C_1} \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow f(x) = (2, 0)_{C_1} \\ 4x = 0 \cdot 1 + 4 \cdot x \Rightarrow f(x^2) = (0, 4)_{C_1} \end{cases}$$

Beraz hauxe da f aplikazioaren C_2 eta C_1 oinarriarekiko matrizea hauxe da: $f_{C_2, C_1} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{C_2, C_1}.$$

- b) Izan bitez $C_2 = \{1, x, x^2\} \mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri kanonikoa eta $V = \{x, x-2\} \mathbb{P}_1(x)$ espazioko oinarria. C_2 oinarriko bektoreen irudiak lortuko ditugu eta, ondoren, V oinarriarekiko dagozkien koordenatuak kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x^2) = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot (x-2) \Rightarrow f(1) = (0,0)_V \\ 2 = a \cdot x + b \cdot (x-2) \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow f(x) = (1, -1)_V \\ 4x = a \cdot x + b \cdot (x-2) \Rightarrow a = 4, b = 0 \Rightarrow f(x^2) = (4,0)_V \end{cases}$$

Beraz, f aplikazioaren C_2 eta V oinarriekiko matrizea hauxe da: $f_{C_2, V} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{C_2, V}.$$

- c) Izan bitez $U = \{2, 1+2x, x+x^2\} \mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri bat eta $C_1 = \{1, x\} \mathbb{P}_1(x)$ espazioko oinarri kanonikoa. U oinarriko bektoreen irudiak lortuko ditugu eta, ondoren, C_1 oinarriarekiko dagozkien koordenatuak kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1+2x) = 4 \\ f(x+x^2) = 2+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow f(2) = (0,0)_{C_1} \\ 4 = 4 \cdot 1 + 0 \cdot x \Rightarrow f(1+2x) = (4,0)_{C_1} \\ 2+4x = 2 \cdot 1 + 4 \cdot x \Rightarrow f(x+x^2) = (2,4)_{C_1} \end{cases}$$

Beraz, f aplikazioaren U eta V oinarriekiko matrizea hauxe da: $f_{U, C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{U, C_1}.$

- d) Izan bitez $U = \{2, 1+2x, x+x^2\} \mathbb{P}_2(x)$ espazioko oinarri bat eta $V = \{x, x-2\} \mathbb{P}_1(x)$ espazioko oinarri bat. U oinarriko bektoreen irudiak lortuko ditugu eta, ondoren, V oinarriarekiko dagozkien koordenatuak kalkulatu ditugu:

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1+2x) = 4 \\ f(x+x^2) = 2+4x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot (x-2) \Rightarrow f(2) = (0,0)_V \\ 4 = a \cdot x + b \cdot (x-2) \Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow f(1+2x) = (2, -2)_V \\ 2+4x = a \cdot x + b \cdot (x-2) \Rightarrow a = 5, b = -1 \Rightarrow f(x+x^2) = (5, -1)_V \end{cases}$$

Beraz, f aplikazioaren U eta C_1 oinarriekiko matrizea hauxe da:

$$f_{U, V} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{U, V}.$$

P8. Izan bedi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, $f(x, y) = (x - y, 0, y - x)$ bidez definitua dagoena.

- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazioetako oinarri kanonikoekiko. Matrice hori erabiliz $\text{Ker}(f)$ kalkulatu.
- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{R}^2$ -ko $A = \{(1, -1), (2, 1)\}$ oinarriarekiko eta $\mathbb{R}^3$ -ko $B = \{(0, 1, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ oinarriarekiko. Kalkulatu $\text{Ker}(f)$ matrize hori erabiliz.
- Frogatu aurreko bi ataletan kalkulaturako nukleoak berdinak direla.

EBAZPENA

- Izan bitez $C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ eta $C_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialetako oinarri kanonikoak hurrenez hurren. C_2 oinarriko bektoreen irudiak C_3 oinarrikoen menpe kalkulaturako ditugu:

$$\begin{cases} f(1, 0) = (1, 0, -1) \\ f(0, 1) = (-1, 0, 1) \end{cases}$$

Beraz, $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazioetako oinarri kanonikoekiko f aplikazioaren matrizea hau da:

$$f_{C_2, C_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{C_2, C_3}$$

Matrice hori erabiliz $\text{Ker}(f)$ kalkulaturako dugu:

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{x}) = (0, 0, 0)\}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ bektore orokorra hartuz, ondokoa daukagu:

$$f(\vec{x}) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_1 - x_2 \\ 0 = -x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Beraz, $\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ da, $B = \{(1, 1)\}$ nukleoaren oinarri bat izanik. Ondorioz, nukleoaren dimentsioa 1 da.

- Kasu honetan $A = \{(1, -1), (2, 1)\}$ oinarriko bektoreen irudiak kalkulatu eta irudi horiek B oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa idatzi behar dira:

$$\begin{aligned} f(1, -1) &= (2, 0, -2)_{C_3} \Rightarrow (2, 0, -2) = a(0, 1, 1) + b(2, 1, 0) + c(-1, 0, 1) \\ &\Rightarrow a = b = 0, c = -2 \Rightarrow f(1, -1) = (0, 0, -2)_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2, 1) &= (1, 0, -1)_{C_3} \Rightarrow (1, 0, -1) = a(0, 1, 1) + b(2, 1, 0) + c(-1, 0, 1) \\ &\Rightarrow a = b = 0, c = -1 \Rightarrow f(2, 1) = (0, 0, -1)_B \end{aligned}$$

Beraz, $\mathbb{R}^2$ -ko $A = \{(1, -1), (2, 1)\}$ oinarriarekiko eta $\mathbb{R}^3$ -ko $B = \{(0, 1, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ oinarriarekiko f aplikazioaren matrizea hau da:

$$f_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{A,B}$$

Matrize hori erabiliz $\text{Ker}(f)$ kalkulatu dugu:

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\vec{z}) = (0, 0, 0)\}$$

$\vec{z} = (z_1, z_2)$ bektore orokorra hartuz, zera daukagu:

$$f(\vec{z}) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = -2z_1 - z_2 \Rightarrow z_2 = -2z_1$$

Beraz, $\text{Ker}(f) = \{(z_1, -2z_1) : z_1 \in \mathbb{R}\}$ da, $B' = \{(1, -2)\}$ nukleoaren oinarri bat izanik. Ondorioz, nukleoaren dimentsioa 1 da.

- c) Lehenengo ataleko nukleoa $\mathbb{R}^2$ -ko oinarri kanonikoarekiko adierazi da, eta bigarren atalekoa, aldiz, $\mathbb{R}^2$ -ko A oinarriarekiko. Hori dela-eta, oinarriek begi-bistaz ezberdinak dirudite, baina frogatzen direla.

Har dezagun A oinarrian adierazita dagoen $(1, -2)$ $\text{Ker}(f)$ -ko oinarriko bektorea. Bektore hori oinarri kanonikoan adieraziko dugu:

$$(1, -2)_A = 1 \cdot (1, -1) + (-2) \cdot (2, 1) = (-3, -3)_{C_2}$$

Eta $(-3, -3)$ bektorea $(1, 1)$ bektorearekiko proportzionala da, hau da, lehen atalean lortutako nukleoaren oinarria osatzen duen bektorearekiko proportzionala da. Ondorioz, bi bektore horiek sortzen dituzten azpiespazioak berdinak dira, hau da, atal bietan lortu diren nukleoak berdinak dira.

P9. Izan bitez $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eta $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio linealak, era honetan definituta daudenak: $f(x, y, z) = (2x + y, x + z, 2z, x + 2y)$, $g(x, y, z, t) = (x + y + z, x + 2z, y + 2t)$ eta $h(x, y, z) = (x, y, y - z)$. Kalkulatu posible denean, oinarri kanonikoekiko ondoko aplikazio linealen ekuazioak eta matrizeak.

- a) fog .
- b) $fogoh$.
- c) $fogh$.

EBAZPENA

$$a) \text{ fog}: \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$$

fog aplikazioaren matrizea kalkulatzeko nahikoa da f eta g aplikazioei dagozkien matrizeak biderkatzea. Beraz, f eta g aplikazioen matrizeak kalkulatu ditugu lehendabizi:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (2,1,0,1) \\ f(0,1,0) = (1,0,0,2) \\ f(0,0,1) = (0,1,2,0) \end{cases} \Rightarrow f_{C_3, C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{C_3, C_4}$$

$$\begin{cases} g(1,0,0,0) = (1,1,0) \\ g(0,1,0,0) = (1,0,1) \\ g(0,0,1,0) = (1,2,0) \\ g(0,0,0,1) = (0,0,2) \end{cases} \Rightarrow g_{C_4, C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{C_4, C_3}$$

Bukatzeko, fog konposaketaren matrizea kalkulatu dugu:

$$(\text{fog})_{C_4, C_4} = f_{C_3, C_4} \cdot g_{C_4, C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{C_4, C_4}$$

Aplikazioaren ekuazioak kalkulatzeko matrizearen eta $\mathbb{R}^4$ -ko bektore orokor baten arteko biderketa egin daiteke:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 + 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Beraz, fog aplikazioaren ekuazioak hauexek dira:

$$(\text{fog})(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_2 + 4x_4, 3x_1 + x_2 + 5x_3)$$

Emaitza bera lortuko genuke $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ bektore orokorrari dagokion $f(g(\vec{x}))$ irudia kalkulatzeko, lehenengo, g aplikazioa aplikatuta, eta, ondoren, f aplikatuta. Hau da, definizioa erabiliz:

$$(\text{fog})(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_4) \Rightarrow$$

$$(\text{fog})(\vec{x}) = (2(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + 2x_3), (x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + 2x_4), 2(x_2 + 2x_4),$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1 + 2x_3)) \Rightarrow$$

$$(f \circ g)(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_2 + 4x_4, 3x_1 + x_2 + 5x_3)$$

b) Konposaketa hau ezin da egin, g aplikazioaren jatorri-espazioa ez baita h aplikazioaren helmuga-espazioaren berdina.

$$c) f \circ h \circ g : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$$

Lehenengo atalean bezala, hemen ere konposaketa-aplikazioari dagokion matrizea lortzeko konposaketan parte hartzen duten aplikazioei dagozkien matrizeak biderkatuko ditugu. Dagoeneko lehen atalean kalkulatu ditugu f eta g aplikazioei dagozkien matrizeak:

$$f_{C_3, C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{C_3, C_4}, \quad g_{C_4, C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{C_4, C_3}$$

h aplikazioari dagokion matrizea lortuko dugu:

$$\begin{cases} h(1,0,0) = (1,0,0) \\ h(0,1,0) = (0,1,1) \\ h(0,0,1) = (0,0,-1) \end{cases} \Rightarrow h_{C_3, C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{C_3, C_3}$$

Eta $f \circ h \circ g$ aplikazioaren oinarri kanonikoekiko matrizea hauxe da:

$$\begin{aligned} (f \circ h \circ g)_{C_4, C_4} &= f_{C_3, C_4} \cdot [h_{C_3, C_3} \cdot g_{C_4, C_3}] \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{C_4, C_4} \end{aligned}$$

Aplikazioaren ekuazioak kalkulatzeko matrizearen eta $\mathbb{R}^4$ -ko bektore orokor baten arteko biderketa egin daiteke:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Beraz, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ bektorea emanik $f \circ h \circ g$ aplikazioaren ekuazioak hauexek dira:

$$(f \circ h \circ g)(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_3 - 2x_4, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4, 3x_1 + x_2 + 5x_3)$$

P10. Kalkulatu $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplikazio linealaren ekuazioak, ondokoa jakinik: $f(2,0,1) = (4,1)$, $f(-1,1,0) = (-2,0)$ eta $f(1,1,2) = (2,2)$.

EBAZPENA

Izan bitez $C_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ espazioko oinarri kanonikoa, non $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ eta $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ diren, eta $C_2 = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ $\mathbb{R}^2$ -koa, non $\vec{e}'_1 = (1,0)$ eta $\vec{e}'_2 = (0,1)$ diren.

$(2,0,1)$ bektorea honela adieraz daiteke oinarri kanonikoko bektoreen konbinazio lineal gisa:
 $(2,0,1) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Aplikazio linealen propietateak aplikatuz, ondokoa daukagu:

$$f(2,0,1) = (4,1) \Rightarrow f(2\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = (4,1)_{C_2}$$

$(-1,1,0)$ eta $(1,1,2)$ bektoreekin prozesu bera errepikatuz:

$$f(-1,1,0) = (-2,0) \Rightarrow f(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = (-2,0)_{C_2}$$

$$f(1,1,2) = (2,2) \Rightarrow f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + 2f(\vec{e}_3) = (2,2)_{C_2}$$

Hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema lineala osatzen dugu, ezezagunak $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoko bektoreen irudien $\mathbb{R}^2$ -ko oinarri kanonikoarekiko koordenatuak izanik:

$$\begin{cases} 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = (4,1) \\ -f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = (-2,0) \\ f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + 2f(\vec{e}_3) = (2,2) \end{cases}$$

Sistema ebatzi eta ondoko emaitza lortzen da: $f(\vec{e}_1) = (2,0)$, $f(\vec{e}_2) = (0,0)$ eta $f(\vec{e}_3) = (0,1)$. Azkenik, aplikazio linealaren matrizea lortzeko kalkulaturako irudiak zutabeka kokatzen dira:

$$f_{C_3, C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{C_3, C_2}$$

Matrize hau erabilita f aplikazio linealari dagozkion ekuazioak lor daitezke:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_3)$$

P11. Kalkulatu $f: \mathbb{P}_1(x) \rightarrow \mathbb{P}_1(x)$ aplikazio linealari dagokion matrizea, jatorri-espazioan $B = \{2+x, x-1\}$ oinarria eta helmuga-espazioan oinarri kanonikoa kontsideratuz eta $f(4x+2) = x-2$ eta $f(x-4) = 2x+1$ betetzen direla jakinik.

EBAZPENA

$(4x + 2)$ bektorea B oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa adieraziko dugu:

$$4x + 2 = a(2 + x) + b(x - 1) \Rightarrow a = 2 \text{ eta } b = 2 \Rightarrow 4x + 2 = 2(2 + x) + 2(x - 1)$$

Ondoren, aplikazioaren linealtasunaz eta B oinarriko bektoreen irudien balioez baliatuz, $(4x + 2)$ bektorearen irudia kalkulatu dugu:

$$f(4x + 2) = x - 2 \Rightarrow f[2(2 + x) + 2(x - 1)] = 2f(2 + x) + 2f(x - 1) = x - 2$$

$(4x + 2)$ bektorearekin jarraitutako prozesu bera errepikatzen dugu $(x - 4)$ bektorearekin. Lehendabizi, B oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa adieraziko dugu:

$$x - 4 = a(2 + x) + b(x - 1) \Rightarrow a = -1 \text{ eta } b = 2 \Rightarrow x - 4 = -(2 + x) + 2(x - 1)$$

$f(x - 4)$ ezaguna denez hurrengoa daukagu:

$$f(x - 4) = 2x + 1 \Rightarrow f[-(2 + x) + 2(x - 1)] = -f(2 + x) + 2f(x - 1) = 2x + 1$$

Bi ekuazio eta bi ezezaguneko sistema lineala osatzen dugu, ezezagunak B oinarriko bektoreen irudien oinarri kanonikoarekiko koordenatuak izanik:

$$\begin{cases} 2f(2 + x) + 2f(x - 1) = x - 2 \\ -f(2 + x) + 2f(x - 1) = 2x + 1 \end{cases}$$

Sistemaren emaitza hau da:

$$f(2 + x) = -\frac{1}{3}x - 1 \quad \text{eta} \quad f(x - 1) = \frac{5}{6}x$$

Irudiak dagoeneko $\mathbb{P}_1(x)$ espazioko oinarri kanonikoarekiko adierazita daudenez, eskatutako f aplikazio linealaren matrizea ondorengoa da:

$$f_{B,C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/3 & 5/6 \end{pmatrix}_{B,C}$$

EBATZITAKO GALDERAK

G1. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ -n definitutako endomorfismo bat, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoa eta $f(\vec{e}_1) = \vec{u}$, $f(\vec{e}_2) = \vec{v}$ eta $f(\vec{e}_3) = \vec{u} + \vec{v}$, non $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak linealki independenteak diren. Esan honako baieztapen hauek egia diren ala ez.

- a) f injektiboa da.
- b) f suprajektiboa da.

EBAZPENA

- a) Gezurra. f injektiboa izango da, baldin eta soilik baldin $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ bada. Ikus dezagun ea berdintza hau betetzen den:

$$\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}\}$$

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ oinarri kanonikoko bektoreen konbinazio lineal gisa honela idazten da:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

f aplikazioa lineala dela kontuan hartuz:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} + x_3 (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= (x_1 + x_3) \vec{u} + (x_2 + x_3) \vec{v} \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker}(f)$ beteko da, baldin eta soilik baldin $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}$ bada. Hau da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3) \vec{u} + (x_2 + x_3) \vec{v} = \vec{0}$$

$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak linealki independenteak direnez, ez-nuluak dira, ondorioz:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = -x_3$$

Beraz, nukleoa hurrengoa da:

$$\text{Ker}(f) = \{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} \neq \{\vec{0}\}$$

Eta ondorioz, planteatutako baieztapena gezurra da.

- b) Gezurra. f suprajektiboa izango da, baldin eta soilik baldin, $\dim \text{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ bada. Edozein $f: E \rightarrow F$ aplikazio linealek ondorengoa betetzen du:

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Orduan $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoaren kasu berezian, ondokoa betetzen da:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Aurreko ataletik $\text{Ker}(f) = \{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, -1, 1) \rangle$ dela badakigu, eta, beraz, $\dim \text{Ker}(f) = 1$. Balio hori aurreko ekuazioan ordezkatzuz zera lortzen da:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_{=1} + \dim \text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2$$

Eta, beraz, baieztapena gezurra da.

G2. Esan ondoko baieztapenak egiak ala gezurrak diren:

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ motako aplikazio lineal bat injektiboa izan daiteke.
- b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ motako aplikazio lineal bat suprajektiboa izan daiteke.
- c) $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ motako aplikazio lineal bat injektiboa izan daiteke.
- d) $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ motako aplikazio lineal bat suprajektiboa izan daiteke.

EBAZPENA

- a) Egia. Nukleoaren, irudiaren eta hasierako espazioaren dimentsioak erlazionatzen dituen berdintza erabiliz zera daukagu:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

f injektiboa izango da, baldin eta soilik baldin $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ bada, edo gauza bera dena, baldin eta soilik baldin $\dim \text{Ker}(f) = 0$ bada. Kasu honetan irudiaren dimentsioa hauxe da:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{=2} = \underbrace{\dim \text{Ker}(f)}_{=0} + \dim \text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2$$

$\text{Im}(f)$ $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bat denez, $\dim \text{Im}(f) \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$ bete behar da. Eta baldintza horrek ez du kontraesanik sortzen $\dim \text{Im}(f) = 2$ baldintzarekin.

- b) Gezurra. f suprajektiboa izango da, baldin eta soilik baldin $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^4$ bada. Hau da, $\dim \text{Im}(f) = 4$ betetzen bada:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^2}_{=2} = \dim \text{Ker}(f) + \underbrace{\dim \text{Im}(f)}_{=4} \Rightarrow 2 = \dim \text{Ker}(f) + 4 \Rightarrow \dim \text{Ker}(f) = -2$$

Eta azken berdintza hori absurdua da, zeren edozein azpiespazioren dimentsioa zero edo zero baino handiagoa baita, bereziki, nukleoaren kasuan $\dim Ker(f) \geq 0$.

- c) Gezurra. Ez da posible $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ motako aplikazio lineal injektiborik aurkitzerik. g aplikazioa injektiboa izango da, baldin eta soilik baldin $Ker(g) = \{\vec{0}\}$ bada, eta, beraz, $\dim Ker(g) = 0$ bada. Berriz ere dimentsioen arteko erlazioa erabiliz zera lortzen da:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4} = \underbrace{\dim Ker(g)}_{=0} + \dim Im(g) \Rightarrow \dim Im(g) = 4$$

Bestalde, $Im(g)$ $\mathbb{R}^2$ -ren azpiespazio bektoriala denez, $\dim Im(g) \leq 2$ bete behar da. Beraz, ezin daiteke aplikazio lineala suprajektiboa izateko baldintza $\dim Im(g) = 4$ bete.

- d) Egia. g suprajektiboa izango da, baldin eta soilik baldin $Im(g) = \mathbb{R}^2$ bada, eta, beraz, $\dim Im(g) = 2$ bada. Kasu honetan, nukleoaren dimentsioa hauxe izango da:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4} = \dim Ker(g) + \underbrace{\dim Im(g)}_{=2} \Rightarrow \dim Ker(g) = 2$$

Eta azken berdintza hori betetzea posible da, zeren $Ker(g)$ $\mathbb{R}^4$ -ko azpiespazio bat baita eta $\dim Ker(g) \leq 4$ betetzen baita.

G3. Izan bedi $f: E \rightarrow F$ aplikazio lineala, non $\dim E = n$ eta $\dim F = m$, $n < m$ diren. Esan ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren.

- a) E espazio bektorialeko $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema askea bada, orduan F espazio bektorialeko $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ sistema askea da.
- b) F espazio bektorialeko $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ sistema askea bada, orduan E espazio bektorialeko $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema askea da.

EBAZPENA

- a) Gezurra. Izan bitez $E = \mathbb{R}^2$ eta $F = \mathbb{R}^3$ espazio bektorialak eta $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $\mathbb{R}^2$ -ko oinarri kanonikoa. Izan bedi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, non $f(\vec{e}_1) = (1,1,0)$, $f(\vec{e}_2) = (2,2,0)$ diren. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sistema askea izan arren, $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)\} = \{(1,1,0), (2,2,0)\}$ sistema ez da askea.
- b) Egia. Absurdura eramanez frogatuko dugu. Suposa dezagun E espazio bektorialeko $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema lotua dela. Hau da, existitzen dela $\vec{u}_i$ bektore bat, sistemako

gainerako bektoreen konbinazio lineala dena. Suposa dezagun sistemako gainerako bektoreen konbinazio lineala den bektorea lehenengoa dela:

$$\vec{u}_1 = \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n, \text{ non } \exists \alpha_i \neq 0$$

f aplikazioa lineala denez, zera daukagu:

$$f(\vec{u}_1) = \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \alpha_3 f(\vec{u}_3) + \cdots + \alpha_n f(\vec{u}_n), \text{ non } \exists \alpha_i \neq 0$$

Azken berdintza horretatik $f(\vec{u}_1)$ bektorea $\{f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ bektoreen konbinazio lineala dela ondorioztatzen da, beraz, $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$ sistema lotua da. Hau da, lortutakoa absurdua denez, suposatu duguna ez da egia eta, ondorioz, planteatutako baieztapena egia da.

MATHEMATICA ERABILIZ EBATZITAKO ARIKETAK

M1. Adierazi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, -x + 2y + z)$ aplikazioa lineala den.

EBAZPENA

Remove["Global`*"]

f aplikazioa eta $\mathbb{R}^3$ espazioko bi bektore orokor definituko ditugu:

$\mathbf{x} = \{\mathbf{x1}, \mathbf{x2}, \mathbf{x3}\}; \mathbf{y} = \{\mathbf{y1}, \mathbf{y2}, \mathbf{y3}\};$

$f[\{\mathbf{a_}, \mathbf{b_}, \mathbf{c_}\}] = \{2 \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{c}, -\mathbf{a} + 2 \mathbf{b} + \mathbf{c}\};$

f aplikazioa lineala izango da, ondoko bi baldintzak betetzen baditu:

$$\begin{cases} f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \end{cases} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Lehenengo baldintza betetzen dela ikusiko dugu:

$f[\mathbf{x}]$

$\{2 \mathbf{x1} + \mathbf{x2}, \mathbf{x1} - \mathbf{x3}, -\mathbf{x1} + 2 \mathbf{x2} + \mathbf{x3}\}$

$f[\mathbf{y}]$

$\{2 \mathbf{y1} + \mathbf{y2}, \mathbf{y1} - \mathbf{y3}, -\mathbf{y1} + 2 \mathbf{y2} + \mathbf{y3}\}$

$f[\mathbf{x} + \mathbf{y}]$

$\{\mathbf{x2} + 2 (\mathbf{x1} + \mathbf{y1}) + \mathbf{y2}, \mathbf{x1} - \mathbf{x3} + \mathbf{y1} - \mathbf{y3}, -\mathbf{x1} + \mathbf{x3} - \mathbf{y1} + 2 (\mathbf{x2} + \mathbf{y2}) + \mathbf{y3}\}$

```
f[x + y] == f[x] + f[y] // Simplify
```

```
True
```

Bigarren baldintza betetzen dela ikusiko dugu:

```
f[α * x]
```

```
{2 x1 α + x2 α, x1 α - x3 α, -x1 α + 2 x2 α + x3 α}
```

```
α * f[x]
```

```
{(2 x1 + x2) α, (x1 - x3) α, (-x1 + 2 x2 + x3) α}
```

```
f[α * x] == α * f[x] // Simplify
```

```
True
```

Beraz, f aplikazioa lineala da.

M2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala emanik eta $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, x - z)$ izanik.

- Kalkulatu aplikazio linealaren matrizea.
- Kalkulatu f aplikazioaren nukleoa.
- Kalkulatu $\text{Im}(f)$ -ren oinarri bat eta haren dimentsioa.
- Sailkatu f aplikazio lineala.

EBAZPENA

- f aplikazioa definituko dugu eta berari lotutako matrizea kalkulatu dugu, oinarri kanonikoko bektoreen irudiak kalkulatu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[{x_, y_, z_}] = {x - 2 y + 2 z, x - z};
```

```
fe1 = f[{1, 0, 0}]; fe2 = f[{0, 1, 0}]; fe3 = f[{0, 0, 1}];
```

```
mat = Transpose[{fe1, fe2, fe3}]; MatrixForm[mat]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Aplikazioaren nukleoa kalkulatzeko $\vec{x} = (x, y, z) \in \text{Ker}(f)$ bektorea kontsideratuko dugu. Bektore horrek $f(\vec{x}) = \vec{0}$ beteko du.

```
nuk = {x1, x2, x3};
```

```
sol = Solve[f[nuk] == {0, 0}]
```

$$\left\{ \left\{ x1 \rightarrow \frac{2x2}{3}, x3 \rightarrow \frac{2x2}{3} \right\} \right\}$$

```
nuk = nuk /. Flatten[sol]
```

$$\left\{ \frac{2x2}{3}, x2, \frac{2x2}{3} \right\}$$

Nukleoko bektoreek duten forma orokorra kalkulatu ondoren, nuklearen oinarri bat kalkulatu dugu $x2$ aldagaiari edozein balio emanez:

```
bnuk = nuk /. x2 -> 1
```

$$\left\{ \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3} \right\}$$

Beste aukera bat da NullSpace agindua erabiltzea eta, era horretan lortzen den nuklearen oinarritik abiatuz, nukleoko bektoreen forma orokorra kalkulatzeko:

```
bnuk = Flatten[NullSpace[mat]]
```

$$\{2, 3, 2\}$$

```
nukleoa =  $\alpha$  * bnuk
```

$$\{2\alpha, 3\alpha, 2\alpha\}$$

- c) Irudiek osatutako azpiespazioaren dimentsioa kalkulatzeko, aski da aplikazioaren matrizearen heina kalkulatzeari:

```
dimimag = MatrixRank[mat]
```

```
2
```

$Im(f)$ azpiespazioaren oinarri bat kalkulatzeko aski da $Im(f)$ -ren sistema sortzailean linealki independenteak diren bektoreak hartzea. Hau da:

```
Det[mat[[{1, 2}, {1, 2}]]]
```

```
2
```

$B = \{(1,1), (-2,0)\}$ $Im(f)$ azpiespazioaren oinarri bat da eta, beraz, $\dim Im(f) = 2$. Gainera, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ denez eta $Im(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ denez, orduan $Im(f) = \mathbb{R}^2$ dela ondorioztatzen da.

- d) $\dim Ker(f) = 1 \neq 0$ denez, f ez da injektiboa. Eta $\dim Im(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ denez, f suprajektiboa da. Beraz, f epimorfismoa da.

M3. $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ aplikazio lineala emanik, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$ eran definitua dagoena:

- Kalkulatu f aplikazio linealaren $M_2(\mathbb{R})$ -ko oinarri kanonikoarekiko matrizea.
- Kalkulatu nukleoa, haren oinarri bat eta haren dimentsioa.
- Kalkulatu $Im(f)$ azpiespazioaren dimentsioa.
- Esan zein motatako aplikazio lineala den f .

EBAZPENA

- f aplikazio lineala definituko dugu eta berari lotutako matrizea kalkulatzeko oinarri kanonikoko bektoreen irudiak kalkulatu ditugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[{{a_, b_}, {c_, d_}}] = {{a + b, 0}, {a, c + d}}
{{a + b, 0}, {a, c + d}}
```

```
fe1 = f[{{1, 0}, {0, 0}}]; fe2 = f[{{0, 1}, {0, 0}}]; fe3 = f[{{0, 0}, {1, 0}}];
fe4 = f[{{0, 0}, {0, 1}}];
```

```
mat = Transpose[{Flatten[fe1], Flatten[fe2], Flatten[fe3], Flatten[fe4]}];
MatrixForm[mat]
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

- b) $M_2(\mathbb{R})$ espazioko bektore bat hartuko dugu eta $\text{Ker}(f)$ -n egoteko bete beharreko baldintzak zeintzuk diren kalkulatu dugu:

```
ker = {{x1, x2}, {x3, x4}};
```

```
sol = Solve[f[ker] == {{0, 0}, {0, 0}}]
{{x1 -> 0, x2 -> 0, x3 -> -x4}}
```

```
ker = ker /. sol[[1]]
{{0, 0}, {-x4, x4}}
```

Behin $\text{Ker}(f)$ espazioko bektoreen forma orokorra definitu ostean, x_4 aldagaiari balio bat emanaz oinarri bat kalkulatu dugu:

```
bker = ker /. x4 -> 1; MatrixForm[bker]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

Nukleoaren oinarria bektore ez-nulu bakarrek osatzen duenez, $\dim \text{Ker}(f) = 1$ da.

- c) Irudiek osatutako azpiespazioaren dimentsioa aplikazioaren matrizearen heinaren berdina da. Beraz, matrize honen heina kalkulatu dugu:

```
dimimg = MatrixRank[mat]
```

```
3
```

- d) $\dim \text{Ker}(f) = 1 \neq 0$ enez, f ez da injektiboa. Gainera, $\dim \text{Im}(f) = 3 \neq 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$ enez, f ez da suprajektiboa. Orduan, f homomorfismo bat baino ez da.

M4. Izan bedi $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, $f(x, y, z, t) = (2x + y - t, x + z + t, -x - y + z + 2t)$ bezala definitua dagoena.

- a) Kalkulatu $\vec{v} = (0, 4, -1, 3)$ bektorearen f bidezko irudia. $\vec{v} \in \text{Ker}(f)$ betetzen al da?
- b) Kalkulatu $\vec{w} = (1, 4, 3)$ bektorea iruditzen duen bektore bat.

EBAZPENA

- a) f aplikazioa definituko dugu eta $\vec{v}$ bektorearen irudia kalkulatu dugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[{x_, y_, z_, t_}] = {2 x + y - t, x + z + t, -x - y + z + 2 t}
```

```
{-t + 2 x + y, t + x + z, 2 t - x - y + z}
```

```
v = {0, 4, -1, 3}; f[v]
```

```
{1, 2, 1}
```

```
f[v] == {0, 0, 0}
```

```
False
```

$\vec{v}$ bektorea ez da nukleoko bektore bat, $f(\vec{v}) \neq \vec{0}$ baita.

b) $\vec{w}$ bektorea iruditzat duen $\mathbb{R}^4$ -ko bektore orokor bat definitzen da:

```
bektorea = {x, y, z, t}; w = {1, 4, 3};
```

```
sol = Solve[f[bektorea] == w]
```

```
{{t -> 7/3 + y/3 - 2z/3, x -> 5/3 - y/3 - z/3}}
```

```
bektorea = bektorea /. sol[[1]]
```

```
{5/3 - y/3 - z/3, y, z, 7/3 + y/3 - 2z/3}
```

$\vec{w}$ bektorea iruditzat duten bektoreak infinitu dira. Horietariko bat kalkulatzeko nahikoa da y eta z parametroei balioak ematea:

```
bektorea = bektorea /. {y -> -7, z -> 0}
```

```
{4, -7, 0, 0}
```

M5. Izan bedi $f: M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ aplikazio lineala, non:

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+d & c+g \\ d-b & 0 & f+h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen f aplikazioaren bidezko irudia.

b) Kalkulatu $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen aurre irudia.

EBAZPENA

a) f aplikazioa definituko dugu eta A matrizearen irudia kalkulatu dugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[{{a_, b_, c_}, {d_, e_, f_}, {g_, h_, i_}}] =
  {{0, b+d, c+g}, {d-b, 0, f+h}, {g-c, h-f, 0}}

{{0, b+d, c+g}, {-b+d, 0, f+h}, {-c+g, -f+h, 0}}
```

```
A = {{1, 2, 0}, {-1, 1, 2}, {4, 0, 1}}; f[A] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) B matrizea eta 3×3 dimentsioko matrize orokor bat definituko ditugu:

```
B = {{0, 3, 5}, {-3, 0, 1}, {3, 1, 0}}; aureirudi = Array[m, {3, 3}];
MatrixForm[aureirudi]
```

$$\begin{pmatrix} m[1, 1] & m[1, 2] & m[1, 3] \\ m[2, 1] & m[2, 2] & m[2, 3] \\ m[3, 1] & m[3, 2] & m[3, 3] \end{pmatrix}$$

f aplikazioaren bidez B matrizean eraldatzen diren matrizeak kalkulatu ditugu:

```
sol = Solve[f[aureirudi] == B]
```

```
{{m[1, 2] → 3, m[2, 1] → 0, m[1, 3] → 1, m[3, 1] → 4, m[2, 3] → 0, m[3, 2] → 1}}
```

```
aureirudi = aureirudi /. sol[[1]]; MatrixForm[aureirudi]
```

$$\begin{pmatrix} m[1, 1] & 3 & 1 \\ 0 & m[2, 2] & 0 \\ 4 & 1 & m[3, 3] \end{pmatrix}$$

$m(1,1)$, $m(2,2)$ eta $m(3,3)$ parametroek infinitu balio har ditzaketenez, infinitu dira B matrizea iruditzen duten matrizeak. Parametro horiei balioak emanda, hauetako matrize bat zehaztuko dugu:

```
aureirudi = aureirudi /. {m[1, 1] → 1, m[2, 2] → 10, m[3, 3] → -10};
MatrixForm[aureirudi]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

M6. Izan bitez $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eta $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio linealak, era honetan definituta daudenak: $f(x, y, z) = (2x + y, x + z, 2z, x + 2y)$, $g(x, y, z, t) = (x + y + z, x + 2z, y + 2t)$ eta $h(x, y, z) = (x, y, y - z)$. Kalkulatu, posible denean, oinarri kanonikoekiko ondoko aplikazio linealen ekuazioak eta matrizeak.

- a) fog .
- b) $fogoh$.
- c) $fohog$.

EBAZPENA

- a) Lehendabizi f, g eta h aplikazioak definituko ditugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[{x_, y_, z_}] = {2 x + y, x + z, 2 z, x + 2 y};
g[{x_, y_, z_, t_}] = {x + y + z, x + 2 z, y + 2 t};
h[{x_, y_, z_}] = {x, y, y - z};
```

Hiru aplikazio horien oinarri kanonikoekiko matrizeak kalkulatu ditugu:

```
fe1 = f[{1, 0, 0}]; fe2 = f[{0, 1, 0}]; fe3 = f[{0, 0, 1}];
```

```
matf = Transpose[{fe1, fe2, fe3}]; MatrixForm[matf]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
ge1 = g[{1, 0, 0, 0}]; ge2 = g[{0, 1, 0, 0}]; ge3 = g[{0, 0, 1, 0}];
ge4 = g[{0, 0, 0, 1}];
```

```
matg = Transpose[{ge1, ge2, ge3, ge4}]; MatrixForm[matg]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
he1 = h[{1, 0, 0}]; he2 = h[{0, 1, 0}]; he3 = h[{0, 0, 1}];
```

```
math = Transpose[{he1, he2, he3}]; MatrixForm[math]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ondoren, fog aplikazioaren matrizea kalkulatu dugu f -ren matrizea g -ren matrizearekin biderkatuz:

```
matfg = matf.matg
```

```
{ {3, 2, 4, 0}, {1, 2, 1, 2}, {0, 2, 0, 4}, {3, 1, 5, 0} }
```

Aurreko matrizea erabiliz, fog aplikazioaren ekuazioak zehaztuko ditugu:

```
{y1, y2, y3, y4} = matfg.{x1, x2, x3, x4}
```

```
{3 x1 + 2 x2 + 4 x3, x1 + 2 x2 + x3 + 2 x4, 2 x2 + 4 x4, 3 x1 + x2 + 5 x3}
```

fog aplikazioaren ekuazioak kalkulatzeko beste era bat zera da, zuzenean aplikazioen konposaketaren definizioa erabiltzea:

```
f[g[{x1, x2, x3, x4}]] // Simplify
```

```
{3 x1 + 2 x2 + 4 x3, x1 + 2 x2 + x3 + 2 x4, 2 (x2 + 2 x4), 3 x1 + x2 + 5 x3}
```

- b) Aurreko atalean jarraitutako prozesu berari jarraitzen zaio $fogoh$ aplikazioaren matrizea lortzeko. Ondorengo eragiketetan ikus daitekeenez, ezinezkoa da aplikazioari lotutako matrizea eta ekuazioak lortzea, zeren g aplikazioaren jatorri-espazioa ez baita h aplikazioaren amaiera-espazioaren berdina.

```
f[g[h[{x1, x2, x3}]]] // Simplify
```

```
f[g[{x1, x2, x2 - x3}]]
```

```
matf.matg.math
```

Dot::dotsh:

Tensors {{3, 2, 4, 0}, {1, 2, 1, 2}, {0, 2, 0, 4}, {3, 1, 5, 0}} and {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 1, -1}} have incompatible shapes. >>

```
{{3, 2, 4, 0}, {1, 2, 1, 2}, {0, 2, 0, 4}, {3, 1, 5, 0}}.  
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 1, -1}}
```

- c) Prozesu berari jarraituz, *fohog* aplikazioaren matrizea eta ekuazioak lortuko ditugu:

```
f[h[g[{x1, x2, x3, x4}]]] // Simplify
```

```
{3 x1 + 2 x2 + 4 x3, 2 x1 + 3 x3 - 2 x4, 2 (x1 - x2 + 2 x3 - 2 x4), 3 x1 + x2 + 5 x3}
```

```
matf.math.matg
```

```
{{3, 2, 4, 0}, {2, 0, 3, -2}, {2, -2, 4, -4}, {3, 1, 5, 0}}
```

M7. Izan bedi $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala, $f(x, y) = (x - y, 0, y - x)$ bidez definitua dagoena.

- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazioetako oinarri kanonikoekiko. Matrize hori erabiliz, $\text{Ker}(f)$ kalkulatu.
- Kalkulatu f aplikazioaren matrizea $\mathbb{R}^2$ -ko $A = \{(1, -1), (2, 1)\}$ oinarriarekiko eta $\mathbb{R}^3$ -ko $B = \{(0, 1, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ oinarriarekiko. Matrize hori erabiliz, $\text{Ker}(f)$ kalkulatu.
- Frogatu aurreko bi ataletan kalkulaturako nukleoak berdinak direla.

EBAZPENA

- a) Aplikazioaren oinarri kanonikoekiko matrizea kalkulatu dugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[{x_, y_}] = {x - y, 0, y - x};
```

```
fe1 = f[{1, 0}]; fe2 = f[{0, 1}];
```

```
matcc = Transpose[{fe1, fe2}]; MatrixForm[matcc]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

f aplikazioaren matrizea erabiliz, $\text{Ker}(f)$ eta honen oinarri bat kalkulatuko ditugu:

```
ker1 = {x1, x2}; sol = Solve[matcc.ker1 == {0, 0, 0}]
```

```
{{x1 -> x2}}
```

```
ker1 = ker1 /. Flatten[sol]
```

```
{x2, x2}
```

```
bker1 = ker1 /. x2 -> 1
```

```
{1, 1}
```

Beraz, $B = \{(1,1)\}$ nukleoaren oinarri bat da. Ondorioz, nukleoaren dimentsioa 1 da.

b) f aplikazioaren A eta B oinarriekiko matrizea kalkulatuko dugu:

```
a1 = {1, -1}; a2 = {2, 1}; b1 = {0, 1, 1}; b2 = {2, 1, 0};  
b3 = {-1, 0, 1};
```

```
fa1 = f[a1]
```

```
{2, 0, -2}
```

```
sol = Solve[fa1 ==  $\alpha$ *b1 +  $\beta$ *b2 +  $\gamma$ *b3, { $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ }]
```

```
{{ $\alpha$  -> 0,  $\beta$  -> 0,  $\gamma$  -> -2}}
```

```
fa1baseb = {α, β, γ} /. sol[[1]]
```

```
{0, 0, -2}
```

```
fa2 = f[a2]
```

```
{1, 0, -1}
```

```
sol = Solve[fa2 == α * b1 + β * b2 + γ * b3, {α, β, γ}]
```

```
{{α → 0, β → 0, γ → -1}}
```

```
fa2baseb = {α, β, γ} /. sol[[1]]
```

```
{0, 0, -1}
```

```
matab = Transpose[{fa1baseb, fa2baseb}]; MatrixForm[matab]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

f aplikazioaren matrizea erabiliz, $\text{Ker}(f)$ eta honen oinarri bat kalkulatuko ditugu:

```
ker2 = {x1, x2}; sol = Solve[matab.ker2 == {0, 0, 0}]
```

```
{{x1 → - $\frac{x2}{2}$ }}
```

```
ker2 = ker2 /. Flatten[sol]
```

```
{- $\frac{x2}{2}$ , x2}
```

```
bker2 = ker2 /. x2 → -2
```

```
{1, -2}
```

Beraz, $B' = \{(1, -2)\}$ A eta B oinarriekiko kalkulatuak nukleoaren oinarri bat da.

- c) Aurreko bi ataletan kalkulatu diren nukleoak oinarri kanonikoarekiko eta A oinarriarekiko adierazi dira hurrenez hurren. Hori dela-eta oinarriek begi-bistaz ezberdinak diruditen arren, berdinak direla frogatuko dugu. Horretarako, bigarren atalean lortu den nukleoak edozein bektorek oinarri kanonikoarekiko duen adierazpena lortuko dugu:

```
bker2kanonikoa = 1 * a1 + (-2) * a2
```

```
{-3, -3}
```

```
bker2kanonikoa == (-3) * bker1
```

```
True
```

Eta $(-3, -3)$ bektorea $(1, 1)$ bektorearekiko proportzionala da. Ondorioz, bi bektore horiek sortzen dituzten azpiespazioak berdinak dira, hau da, atal bietan lortu diren nukleoak berdinak dira.

5 DIAGONALIZAZIOA

5.1 Bektore propioak eta balio propioak

Definizioa. Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta A matrizea lotuta duen f endomorfismoa:

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow E \\ \vec{x} &\rightarrow f(\vec{x}) \end{aligned}$$

$\vec{x} \in E$ bektore ez-nulua f -ren bektore propioa edo autobektorea da, existitzen bada $\lambda \in K$ eskalar bat non $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ betetzen den. $\lambda \in K$ eskalarrari $\vec{x}$ bektore propioari egokitutako f -ren balio propio edo autobalio deritzo. A matrizea f endomorfismoari lotutako matrizea denez, orduan $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ betetzen da, beraz, $\vec{x} \in E$ bektorea f -ren edo A -ren autobektorea da, existitzen bada $\lambda \in K$ eskalar bat $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ betetzen duena.

Oharra:

- Kasu tribiala ekiditeko $\vec{x} \neq \vec{0}$ baldintza inposatzen da, edozein $\lambda \in K$ baliok $A \cdot \vec{0} = \lambda \vec{0}$ berdintza betetzen baitu.

5.2 Bektore propioen propietateak

Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala eta f E -n definitutako endomorfismo bat. Orduan:

- Bektore propio bati $\lambda_1 \in K$ balio propio bakarra dagokio. Demagun $\vec{x} \in E$ bektore propioari bi balio propio $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ dagozkiola. Orduan, horiek berdinak izan behar dute, hau da, $\lambda_1 = \lambda_2$. Demagun λ_1 eta λ_2 $\vec{x}$ autobektoreari lotutako autobalioak direla, orduan:

$$f(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x} \text{ eta } f(\vec{x}) = \lambda_2 \vec{x}, \text{ ondorioz, } \lambda_1 \vec{x} = \lambda_2 \vec{x} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ii) $\vec{x} \in E$ f -ren bektore propioari $\lambda \in K$ balio propioa badagokio, $(\delta \vec{x}) \in E$ bektorea ere f -ren bektore propioa da eta $\lambda \in K$ balio propio bera dagokio.

iii) $\lambda \in K$ balio propioa emanik, honek infinitu bektore propio ditututa.

iv) $\lambda \in K$ balio propioari lotutako bektore propioek azpiespazio bektorial bat osatzen dute. Azpiespazio horri λ balio propioari lotutako azpiespazio propioa deritzo eta E_λ adieraziko dugu:

$$E_\lambda = \{ \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$$

Edo gauza bera dena, $E_\lambda = \{ \vec{x} \in E : (f - \lambda i)(\vec{x}) = \vec{0} \} = \text{Ker}(f - \lambda i)$, i identitate-aplikazioa izanik: $i(\vec{x}) = \vec{x}$.

v) Balio propio ezberdinei lotutako bektore propioak linealki independenteak dira.

5.3 Polinomio karakteristikoa eta anizkoiztasunak

Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ n dimentsio finituko espazio bektoriala, f E -n definitutako endomorfismoa eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ E -ko oinarri bat. Izan bedi $\vec{x} \in E$ f -ren bektore propioa, eta λ berari dagokion autobalioa. Orduan:

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \text{ izanik}$$

Aurreko berdintza matrizialki adieraz daiteke:

$$f_{U,U} \cdot (\vec{x})_U = \lambda (\vec{x})_U$$

$f_{U,U}$ matricea U oinarriarekiko f endomorfismoari lotutako matricea izanik. Hau da:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{U,U} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_U = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_U$$

Aurreko berdintza ondorengo ekuazio linealetako sistemaren baliokidea da:

$$\begin{cases} (f_{11} - \lambda)x_1 + f_{12}x_2 + \cdots + f_{1n}x_n = 0 \\ f_{21}x_1 + (f_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + f_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \cdots + (f_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Sistema homogeenoko batek soluzio trivialez gain beste soluzio bat izateko, koefizienteen matrizearen determinanteak nulua izan behar du:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & \cdots & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & \cdots & f_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Aurreko determinantei f endomorfismoaren polinomio karakteristikoa deritzo eta $P_f(\lambda)$ bidez adieraziko dugu:

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & \cdots & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & \cdots & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & \cdots & f_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$P_f(\lambda)$ polinomioaren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ erroak f endomorfismoaren balio propioak edo autobalioak dira.

Definizioa. λ autobalio baten anizkoiztasun aljebraikoa, λ autobalioak polinomio karakteristikokoan duen anizkoiztasuna da.

Definizioa. λ autobalio baten anizkoiztasun geometrikoa, λ autobalioari lotutako azpiespazio propioaren dimentsioa da.

Proposizioa. Izan bedi λ f -ren autobalioa, orduan:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

$m_g(\lambda)$ λ autobalioaren anizkoiztasun geometrikoa eta $m_a(\lambda)$ λ autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa izanik.

5.4 Endomorfismo diagonalizagarriak

Definizioa. A eta B matrizeak antzekoak dira, baldin $B = P^{-1}AP$ betetzen duen P matrize erregularra existitzen bada.

Proposizioa. A eta B matrizeak antzekoak badira, hau da, $B = P^{-1}AP$ betetzen bada, orduan:

i) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

ii) $|A| = |B|$

- iii) $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, tr matrizearen azterna edo traza izanik, hau da, matrizeko diagonal nagusiko elementuen batura.

Definizioa. Endomorfismo bat diagonalizagarria izango da, berari lotutako A matrizea matrize diagonal baten antzekoa bada. Hau da, ondoko berdintza betetzen duten P matrize erregularra eta D matrize diagonal existitzen badira:

$$D = P^{-1}AP$$

Definizioa. $f: E \rightarrow E$ endomorfismo bat diagonalizagarria izango da, existitzen bada E espazioko oinarri bat non berari lotutako matrizea diagonal den. Oinarri hori linealki independenteak diren f -ren bektore propioz osatuta dago.

Teorema. Dimentsio finitudun E espazio bektorialean definitutako f endomorfismoa diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin $(f - \lambda_j i)$, $j = 1, 2, \dots, r$ aplikazioen nukleoen dimentsioen baturak E espazio bektorialaren dimentsioa ematen badu, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ endomorfismoaren balio propioak izanik:

$$\dim(\text{Ker}(f - \lambda_1 i)) + \dim(\text{Ker}(f - \lambda_2 i)) + \dots + \dim(\text{Ker}(f - \lambda_r i)) = \dim(E)$$

Teorema. Izan bedi $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ n dimentsio finituko espazio bektoriala eta f E -n definitutako endomorfismo bat. Endomorfismo hori diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin honakoak betetzen badira:

- $P_f(\lambda)$ polinomio karakteristikoa bere osotasunean K gorputzean deskonposatzen da.
- λ_j autobalioen anizkoiztasun aljebraikoak bat datoz anizkoiztasun geometrikoekin.

Hau da, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ autobalioen anizkoiztasun aljebraikoak $m_a(\lambda_1), m_a(\lambda_2), \dots, m_a(\lambda_r)$ badira eta anizkoiztasun geometrikoak $m_g(\lambda_1), m_g(\lambda_2), \dots, m_g(\lambda_r)$ badira, f diagonalizagarria da ondokoak betetzen badira:

$$\begin{cases} m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \dots + m_a(\lambda_r) = n \\ m_a(\lambda_j) = m_g(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

Oharra:

- n autobalio ezberdin dituen f endomorfismoa beti da diagonalizagarria, aurreko bi baldintzak betetzen baititu.

5.5 Endomorfismo simetrikoak

Definizioa. Izan bedi f E espazio bektorialean definitutako endomorfismoa. f simetrikoa da ondokoa betetzen denean:

$$f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$$

Definizioa. f endomorfismoa simetrikoa da, berari lotutako matrizea simetrikoa denean.

5.6 Endomorfismo simetrikoen diagonalizazioa

Definizioa. A matrizea ortogonalki diagonalizagarria da, ondoko berdintza betetzen duten P matrize ortogonalak ($P^{-1} = P^t$) eta D matrize diagonalak existitzen direnean:

$$D = P^{-1}AP = P^tAP$$

Teorema. f endomorfismoa ortogonalki diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin, f endomorfismoa simetrikoa bada.

Teorema. Izan bitez E n dimentsioko espazio bektoriala eta f E -n definitutako endomorfismo simetrikoa. Orduan, hurrengo hiru baieztapenak betetzen dira:

- i) f -ren balio propio eta bektore propio guztiak errelak dira.
- ii) Balio propio bakoitzaren anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa bat datoz.
- iii) f endomorfismoa diagonalizagarria da.

Teorema. Izan bitez E n dimentsioko espazio bektoriala eta f E -n definitutako endomorfismo simetrikoa. Orduan, autobalio ezberdinei lotutako autobektoreak binaka ortogonalak dira ohiko biderketa eskalarrekiko.

Teorema. Izan bitez E n dimentsioko espazio bektoriala eta f E -n definitutako endomorfismo simetrikoa. Orduan, posible da f -ko bektore propioez osatutako E espazioko oinarri ortonormal bat osatzea. Oinarri ortonormal hori f -ren balio propioei lotutako azpiespazio propioen oinarri ortonormalen bildura da.

5.7 Jordan-en forma kanonikoa

Definizioa. λ autobalioari lotutako m ordenako Jordan-en oinarritzko matrizea edo oinarritzko blokea, $J(\lambda)$ adieraziko duguna, m ordenako matrize karratua da, diagonal nagusiko elementuak λ dituen eta diagonal nagusiaren gaineko diagonalean batakatutakoak dituen, matrizeko gainerako elementuak nuluak izanik:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{m \times m}$$

Definizioa. J matrizea Jordan-en matrizea edo Jordan-en forma kanonikoa dela esaten da, blokeak diagonalak diren. Hau da, Jordan-en $J(\lambda_1), J(\lambda_2), \dots, J(\lambda_s)$ oinarritzko blokeak existitzen direnean, non:

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & J(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

5.7.1 Jordan-en forma kanonikoaren eraketa

Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala, $f: E \rightarrow E$ endomorfismo bat eta A berari lotutako matrizea, non $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$ edo $K = \mathbb{C}$ diren. f endomorfismoa ez da beti diagonalizagarria izango, beraz, beti ez da posible izango $D = P^{-1}AP$ beteko duten D matrize diagonalak eta P matrize erregularra topatzea. f endomorfismoa diagonalizagarria ez den zenbait kasutan posible da $J = P^{-1}AP$ berdintza betetzen duten J Jordan-en matrize bat eta P matrize erregular bat bilatzea. Ohartu, $K = \mathbb{C}$ denean, beti existitzen dela J Jordan-en matrize bat eta P matrize erregular bat non, $J = P^{-1}AP$.

Proposizioa. Izan bitez $f: E \rightarrow E$ n dimentsioko E espazioan definitutako endomorfismoa eta $m_a(\lambda)$ anizkoiztasun aljebraikoa duen λ autobalioa. Demagun, $m_g(\lambda) = \dim E_\lambda < m_a(\lambda)$ betetzen dela, orduan existitzen da $p \in \mathbb{N}$, non:

$$E_\lambda \subsetneq E_\lambda^2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_\lambda^p = E_\lambda^{p+1}, \quad \text{non} \quad E_\lambda^j = \text{Ker}(f - \lambda i)^j$$

Gainera, $\forall q \in \mathbb{N}: q > p$ kontsideratzen badugu, orduan $E_\lambda^p = E_\lambda^q$ betetzen da.

Bestalde, aurreko azpiespazio-katearen dimentsioek honakoa betetzen dute:

$$\dim E_\lambda < \dim E_\lambda^2 < \cdots < \dim E_\lambda^p = m_a(\lambda)$$

E_λ^p azpiespazioaren dimentsioa λ autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoaren berdina dela azpimarratu beharra dago: $\dim E_\lambda^p = m_a(\lambda)$. E_λ^p azpiespazioari λ autobalioari egokitutako azpiespazio maximoa deritzo.

Teorema. Izan bitez $f: E \rightarrow E$ endomorfismoa eta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ f -ren autobalioak. Ondorioz, $f|_{E_{\lambda_k}}: E_{\lambda_k} \rightarrow E_{\lambda_k}$ aplikazio lineal bakoitzak $B(\lambda_k)$ oinarri bat onartzen du, non $f|_{E_{\lambda_k}}$ aplikazioari elkartutako matrizea $B(\lambda_k)$ oinarriarekiko Jordan-en matrizea den. $B = B(\lambda_1) \cup B(\lambda_2) \cup \dots \cup B(\lambda_s)$ bektore-sistemak E azpiespazioaren oinarri bat osatzen du, Jordan-en oinarria deituko duguna. B oinarriarekiko f endomorfismoari lotutako matrizea hurrengo Jordan-en forma kanonikoa da:

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

P matrizea Jordan-en B oinarriko bektoreen koordenatuak zutabeka jarritz eraikitzen da eta hurrengo berdintza betetzen da: $J = P^{-1}AP$.

5.7.2 Jordan-en forma kanonikoa lortzeko aloritmoko pausoak

Izan bitez $((E, +), (K, +, \cdot), \circ)$ espazio bektoriala, $f: E \rightarrow E$ endomorfismo bat eta A berari lotutako matrizea, non $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$ edo $K = \mathbb{C}$ diren. $J = P^{-1}AP$ berdintza beteko duten J Jordan-en forma kanonikoa eta P matrize erregularra lortzeko honako pauso hauek eman behar dira:

1.- A matrizearen autobalioak kalkulatu dira, hau da $|A - \lambda I|$ polinomio karakteristikoaren erroak, baita beraien anizkoiztasunak ere. Izan bitez $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in K$, A matrizearen autobalioak, beraien anizkoiztasun aljebraikoak $m_a(\lambda_1), m_a(\lambda_2), \dots, m_a(\lambda_s)$ izanik.

2.- λ_k autobalio bakoitzari lotutako E_{λ_k} azpiespazioa kalkulatu da. Kontuan izan autobalio baten anizkoiztasun geometrikoa beti anizkoiztasun aljebraikoa baino txikiagoa edo berdina dela, $m_g(\lambda_k) \leq m_a(\lambda_k)$. Ondorioz, bi kasu ezberdin bereizi behar dira:

2.1- $m_g(\lambda_k) = m_a(\lambda_k)$ betetzen denean, linealki independenteak diren $m_a(\lambda_k)$ bektore existitzen dira, Jordan-en $B(\lambda_k)$ oinarria osatuko dutenak hain zuzen. Oinarri horretako bektoreei lotutako Jordan-en matrizea diagonal izango da:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}_{m_a(\lambda_k) \times m_a(\lambda_k)}$$

2.2- $m_g(\lambda_k) < m_a(\lambda_k)$ betetzen denean, λ_k autobalioari lotutako Jordan-en $m_g(\lambda_k)$ oinarritzko bloke existitzen dira. Ondokoa betetzen duen $E_{\lambda_k}^j = \text{Ker}(f - \lambda_k i)^j$ azpiespazio-katea kalkulatzeko da $k = 1, 2, \dots, s$ balioetarako:

$$E_{\lambda_k} \subsetneq E_{\lambda_k}^2 \subsetneq \dots \subsetneq E_{\lambda_k}^{p_k} = E_{\lambda_k}^{p_k+1}, \text{ non } k = 1, 2, \dots, s$$

Kasu honetan hurrengo prozesua jarraitzen da:

a) $E_{\lambda_k}^{p_k}$ eta $E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ azpiespazioen dimentsioen kenketa kalkulatzeko da:

$$q_{p_k} = \dim E_{\lambda_k}^{p_k} - \dim E_{\lambda_k}^{p_k-1}$$

q_{p_k} zenbakiak $E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ azpiespazio bektorialean linealki independenteak diren bektore kopurua adierazten du. Hau da, q_{p_k} zenbakiak $E_{\lambda_k}^{p_k}$ azpiespazioan egonik $E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ azpiespazioan ez dauden eta linealki independenteak diren bektoreen kopurua adierazten du. Ohartu bektore horiek $E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ azpiespazioko oinarri bat osatuko dutela. Izan bedi $\tilde{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{q_{p_k}}\}$ oinarria. Oinarri horretako bektore bakoitzarentzat p_k ordenako eta λ_k autobaliodun Jordan-en oinarritzko bloke bat lortzen da. Beraz, guztira λ_k autobaliodun eta $p_k \times p_k$ dimentsiodun Jordan-en q_{p_k} bloke elemental lortzen dira. Jordan-en bloke horietako bakoitza $\tilde{B}$ oinarriko bektore bakoitzaren $(f - \lambda_k i)$ aplikazioarekiko irudi jarraituen bidez lortzen da. Horrela, $j = 1, 2, \dots, q_{p_k}$ indize bakoitzerako, p_k bektorez osatutako multzoa lortzen da:

$$B_{p_k}^j(\lambda_k) = \{\vec{u}_j^{p_k-1} = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j^{p_k-2}, \dots, \vec{u}_j^2 = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j^1, \vec{u}_j^1 = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j, \vec{u}_j\}$$

Ohartu honakoak betetzen direla:

$$(A - \lambda_k I)\vec{u}_j^{p_k-1} = (A - \lambda_k I)^2 \vec{u}_j^{p_k-2} = \dots = (A - \lambda_k I)^{p_k-1} \vec{u}_j^1 = (A - \lambda_k I)^{p_k} \vec{u}_j$$

$\vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k}$ betetzen denez, orduan $(A - \lambda_k I)^{p_k} \vec{u}_j = 0$ eta ondorioz:

$$\begin{cases} (A - \lambda_k I)\vec{u}_j^{p_k-1} = 0 \\ (A - \lambda_k I)^2 \vec{u}_j^{p_k-2} = 0 \\ \vdots \\ (A - \lambda_k I)^{p_k-1} \vec{u}_j^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_j^{p_k-1} \in E_{\lambda_k} \\ \vec{u}_j^{p_k-2} \in E_{\lambda_k}^2 \\ \vdots \\ \vec{u}_j^1 \in E_{\lambda_k}^{p_k-1} \end{cases}$$

Beste alde batetik, absurdua eramanez $u_j^1 \notin E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ frogatu daiteke. Suposa dezagun $\vec{u}_j^1 \in E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ betetzen dela, orduan $(A - \lambda_k I)^{p_k-2} \vec{u}_j^1 = 0$ daukagu eta $\vec{u}_j^1 = (A - \lambda_k I) \cdot \vec{u}_j$ dela kontuan hartuz ondokoa daukagu:

$$(A - \lambda_k I)^{p_k-1} \vec{u}_j = 0 \Rightarrow \vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k-1}$$

Baina, $\vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ absurdua da, $\vec{u}_j$ bektorea $E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ azpiespazioan baitago.

Era antzekoan beste hauek frogatu daitezke: $u_j^2 \notin E_{\lambda_k}^{p_k-3}, \dots, \vec{u}_j^{p_k-2} \notin E_{\lambda_k}$. Ondorioz,

$B_{p_k}^j(\lambda_k)$ oinarriko bektoreek ondokoa betetzen dutela ziurta daiteke:

$$\begin{aligned} \vec{u}_j^{p_k-1} &\in E_{\lambda_k}, \vec{u}_j^{p_k-2} \in E_{\lambda_k}^2 - E_{\lambda_k}, \dots, \vec{u}_j^2 \in E_{\lambda_k}^{p_k-2} - E_{\lambda_k}^{p_k-3}, \\ \vec{u}_j^1 &\in E_{\lambda_k}^{p_k-1} - E_{\lambda_k}^{p_k-2}, \vec{u}_j \in E_{\lambda_k}^{p_k} - E_{\lambda_k}^{p_k-1} \end{aligned}$$

$B_{p_k}^j(\lambda_k)$ oinarri bakoitzari lotutako Jordan-en oinarrizko blokea ondokoa izanik:

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}_{p_k \times p_k}$$

Oinarri guztien bildura, $B_{p_k}^1(\lambda_k) \cup B_{p_k}^2(\lambda_k) \cup \dots \cup B_{p_k}^{q_{p_k}}(\lambda_k)$, sortzen ari garen Jordan-en oinarriaren parte izango da.

b) $\dim E_{\lambda_k}^{p_k-1} - \dim E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ diferentzia kalkulatu da eta, aurreko atalean bezalaxe, diferentzia horrek $E_{\lambda_k}^{p_k-1} - E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ azpiespazioan linealki independenteak diren bektoreen kopurua ematen digu.

Prozesu honetako a) atalean $E_{\lambda_k}^{p_k-1} - E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ azpiespazioko q_{p_k} bektore lortu dira. Zehazki $\tilde{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{q_{p_k}}\}$ oinarriko bektore bakoitzeko bektore bat lortu da. Nahikoa da $E_{\lambda_k}^{p_k-1}$ azpiespaziokoak izanik, $E_{\lambda_k}^{p_k-2}$ azpiespazioan ez dauden $q_{p_k-1} = \dim E_{\lambda_k}^{p_k-1} - \dim E_{\lambda_k}^{p_k-2} - q_{p_k}$ bektore aukeratzea. Bektore berri horiek beren artean ez ezik, orain arte eraikitako $B_{p_k}^1(\lambda_k) \cup B_{p_k}^2(\lambda_k) \cup \dots \cup B_{p_k}^{q_{p_k}}(\lambda_k)$ bektoreekiko ere linealki independenteak izan behar dute.

Ondoren, a) ataleko antzeko prozedura erabilia, hau da, bektore berrien $(f - \lambda_k i)$ aplikazioaren bidezko irudi jarraituak kalkulatz, λ_k autobaliodun $p_k - 1$ ordenako Jordan-en oinarritzko blokea lortzen da.

c) Atal honetan b) atalean azaldutako prozesua errepikatzen da E_{λ_k} azpiespaziora iritsi arte. E_{λ_k} azpiespazioan aurreko bektoreekin batera $E_{\lambda_k}^{p_k}$ azpiespazio maximoko $B(\lambda_k)$ oinarria osatuko duten bektoreak aukeratzen dira.

EBATZITAKO ARIKETAK

P1. Oinarri batean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoari lotutako matrizea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dela

jakinik, kalkulatu f -ren bektore eta balio propioak.

EBAZPENA

f endomorfismoaren polinomio karakteristikoa kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 5 \end{aligned}$$

Ekuazio karakteristikoaren ebatziz f endomorfismoaren balio propioak kalkulatu ditugu:

$$P_f(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = +\sqrt{5} \\ \lambda_3 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Balio propio bakoitzari lotutako bektore propioak kalkulatu dira:

- $\lambda_1 = 1$ balio propioari dagozkion bektore propioak kalkulatzeko aski da $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ ekuazio-sistema askatzea, $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ izanik:

$$\begin{aligned} (A - I)\vec{v} = \vec{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &y = 0, \quad x = -z, \quad \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ balio propioari lotutako bektore propioek ondoko espazio bektoriala osatzen dute:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, y, z): x = -z, y = 0\} = \{(-z, 0, z): z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

- $\lambda_2 = +\sqrt{5}$ balio propioari dagozkion bektore propioak kalkulatzeko ere aski da $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$ ekuazio sistema askatzea, $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ izanik:

$$\begin{aligned} (A - \sqrt{5}I)\vec{v} = \vec{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2 & -1-\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 1 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{5})x + y = 0 \\ 2x + (-1-\sqrt{5})y + 2z = 0 \Rightarrow y = -(1-\sqrt{5})z, \quad x = z, \quad \forall z \in \mathbb{R} \\ y + (1-\sqrt{5})z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = +\sqrt{5}$ balio propioari lotutako bektore propioek ondoko azpiespazio bektoriala osatzen dute:

$$E_{\lambda_2} = \{(x, y, z): x = z, y = -(1 - \sqrt{5})z\} = \{(z, (-1 + \sqrt{5})z, z): z \in \mathbb{R}\} \\ = \langle (1, -1 + \sqrt{5}, 1) \rangle$$

- Era berean $\lambda_3 = -\sqrt{5}$ autobalioari lotutako bektore propioak kalkulatu ditugu:

$$(A + \sqrt{5}I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2 & -1 + \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 1 & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{5})x + y = 0 \\ 2x + (-1 + \sqrt{5})y + 2z = 0 \Rightarrow y = -(1 + \sqrt{5})z, x = z, \forall z \in \mathbb{R} \\ y + (1 + \sqrt{5})z = 0 \end{cases}$$

Horrela, $\lambda_3 = -\sqrt{5}$ autobalioari lotutako bektoreez osatutako azpiespazioa hauxe da:

$$E_{\lambda_3} = \{(x, y, z): x = z, y = -(1 + \sqrt{5})z\} = \{(z, (-1 - \sqrt{5})z, z): z \in \mathbb{R}\} \\ = \langle (1, -1 - \sqrt{5}, 1) \rangle$$

P2. Kalkulatu 3×3 ordenako A matrizea, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ eta $\lambda_3 = -2$ autobalioak dituen, eta $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4, 1)$ eta $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$ autobalioei dagozkien autobektoreak izanik.

EBAZPENA

Hasierako datuetatik ondorengo matrizeak lor daitezke:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

non $D = P^{-1}AP$ betetzen den. $D = P^{-1}AP$ bada, orduan, $A = PDP^{-1}$. Eta eragiketak eginez eskatzen diguten A matrizea lor daiteke:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

P3. Izan bedi $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ matrizea, a, b eta c parametroak errealak izanik, M matrizearen traza 6 dela eta $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)$ eta $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$ bektoreak M matrizearen autobektoreak direla jakinik.

- Kalkulatu M matrizea.
- Kalkulatu $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ adierazpenaren balioa, bektore eta balio propioen kontzeptuak erabilita.

EBAZPENA

- M matrizearen traza edo aztarna 6 bada, orduan:

$$2 + b + c = 6 \Rightarrow b + c = 4$$

$\vec{v}_1$ bektorea M matrizearen autobektorea denez, orduan $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} : M\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$. Hau da:

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \lambda_1$$

Era berean, $\vec{v}_2$ bektorea M matrizearen autobektorea denez, orduan $\exists \lambda_2 \in \mathbb{R} : M\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a = \lambda_2 \\ 1 - b = -\lambda_2 \\ 2 + 2c = 2\lambda_2 \end{cases}$$

Aurreko baldintzetatik eratorri den 5 ekuazio eta 5 ezezaguneko ekuazio linealetako sistema askatzen da:

$$\begin{cases} b + c = 4 \\ c = \lambda_1 \\ 2 - a = \lambda_2 \\ 1 - b = -\lambda_2 \\ 2 + 2c = 2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \\ c = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Ondorioz, bila ari garen matrizea hau da: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- M matrizearen λ_3 balio propioa kalkulatzeko matrize baten traza balio propioen baturaren berdina dela erabiliko dugu:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 \Rightarrow \lambda_3 = 3$$

$\lambda_3 = 3$ balio propioari $\vec{v}_3 = (x, y, z)$ bektore propioa badagokio, orduan:

$$M\vec{v}_3 = \lambda_3\vec{v}_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3x \\ x + 3y = 3y \\ 2x + z = 3z \end{cases} \Rightarrow x = 0, z = 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

Beraz, $\lambda_3 = 3$ balio propioaren bektore propioak $\vec{v}_3 = (0, y, 0)$ motakoak dira, $y \in \mathbb{R}$ izanik. Adibidez, $y = 1$ kontsideratuz, $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)$ bektore propioa daukagu. Era horretan, ondoko D eta P matrizeak ditugu:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

non $D = P^{-1}MP$ betetzen duten. Berdintza hori erabilita, M^2 -ren adierazpena ondoriozta daiteke:

$$M = PDP^{-1} \Rightarrow M^2 = M \cdot M = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

Eta era berean, M^n -ren adierazpena hurrengoa da:

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

Azken adierazpen hori erabilita eskatzen diguten adierazpenaren balioa kalkula daiteke:

$$\begin{aligned} 3M^3 - 7M^2 + 2M - I &= 3PD^3P^{-1} - 7PD^2P^{-1} + 2PDP^{-1} - PIP^{-1} \\ &= P(3D^3 - 7D^2 + 2D - I)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 - 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 24 & 23 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

P4. Izan bitez E espazio bektoriala eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ E -ko oinarri bat. Izan bedi f E espazioan definitutako endomorfismoa, non $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ betetzen den, $\vec{v} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$ $\lambda_1 = 1$ autobalioari lotutako autobektorea izanik eta $\vec{w} = (1, -1, 2)$ $\lambda_2 = 2$ -ri lotutakoa.

- Kalkulatu U oinarriarekiko f endomorfismoari lotutako matrizea.
- Kalkulatu aurreko ataleko matrizearen antzekoa den matrize diagonal bat eta E espazioko oinarri bat, non oinarri horrekiko f endomorfismoari lotutako matrizea diagonal den.

EBAZPENA

- a) U oinarriarekiko f endomorfismoari lotutako matrizea kalkulatzeko, aski da $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ eta $f(\vec{u}_3)$ kalkulatzeko eta zutabeetan jartzea.

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 = (1, -3, 0)_U \text{ denez, eskatzen duten matrizeko lehenengo zutabea } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ da.}$$

$\vec{v}$ bektorea f endomorfismoaren $\lambda_1 = 1$ autobaliodun bektore propio bat denez, orduan:

$$f(\vec{v}) = 1\vec{v} \Rightarrow f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$$

Bestalde, f -ren linealtasuna erabiliz ondokoa daukagu:

$$f(\vec{v}) = f(\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3) = f(\vec{u}_1) + 3f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$$

Aurreko berdintzan $f(\vec{u}_1)$ ordezkatuz, $f(\vec{u}_3)$ balioa lor dezakegu:

$$f(\vec{v}) = f(\vec{u}_1) + 3f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3 \Rightarrow 3f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_3 - (\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2) \Rightarrow$$

$$f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (0, 1, 1)_U$$

Beraz, eskatzen duten matrizeko hirugarren zutabea $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da. Momentuz, U oinarriarekiko

f endomorfismoari lotutako matrizea hurrengoa dela daukagu:

$$f_{U,U} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -3 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}_{U,U}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Azkenik, $\vec{w} = (1, -1, 2)$ bektorea $\lambda_2 = 2$ autobalioari lotutako autobektorea dela erabiliko dugu:

$$f(\vec{w}) = 2\vec{w} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -3 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a = 2 \\ -3 - b + 2 = -2 \\ -c + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Ondorioz, f endomorfismoari lotutako matrizea hurrengoa da: $f_{U,U} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{U,U}.$$

- b) Bila gabiltzan matrize diagonalak aurkitzeko $f_{U,U}$ matrizearen autobalioak kalkulatu behar dira. Momentuz, $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = 2$ autobalioak ezagutzen dira. Bakarrik hirugarren autobalioa λ_3 kalkulatzeko geratzen da. λ_3 autobalioa kalkulatzeko $f_{U,U}$ matrizearen traza edo azterna 3 dela erabiliko dugu:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + \lambda_3 = \underbrace{1 + 1 + 1}_{f_{U,U}\text{-ren traza}} \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

Beraz, $f_{U,U}$ matrizearen antzekoa den D matrize diagonalak ondorengoa da:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f endomorfismoari lotutako matrizea diagonalak bihurtzen duen E espazioko oinarria lortzeko autobalio bakoitzari lotutako autobektoreak kalkulatzeko geratzen da. Badakigu $\lambda_1 = 1$ autobalioari lotutako autobektorea $\vec{v}$ dela eta $\lambda_2 = 2$ autobalioari lotutakoa $\vec{w}$ dela. $\lambda_3 = 0$ autobalioari lotutako $\vec{t} = (x, y, z)$ autobektorea kalkulatzeko ondoko sistema planteatzen dugu:

$$f(\vec{t}) = \lambda_3 \vec{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{z}{2}, y = \frac{z}{2}, \forall z \in \mathbb{R}$$

$\lambda_3 = 0$ autobalioari lotutako autobektoreak $\vec{t} = \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z\right)$ motakoak dira, $z \in \mathbb{R}$ izanik.

Adibidez, $z = 2$ eginez $\vec{t} = (1, 1, 2)$ bektore propioa daukagu. Beraz, f endomorfismoari lotutako matrizea diagonalak izateko aukeratutako E espazio bektorialeko oinarria $B = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ da, $\vec{v} = (1, 0, 3)$, $\vec{w} = (1, -1, 2)$ eta $\vec{t} = (1, 1, 2)$ izanik.

P5. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ berari lotutako matrizea.

Kalkulatu a parametroaren balioak A matrizea diagonalizagarria izan dadin eta diagonalizatu posible den kasuetan.

EBAZPENA

Ekuazio karakteristikoa ebatziz A matrizearen autobalioak kalkulatzeko dira:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 0 & a & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| \Rightarrow$$

$$|A - \lambda I| = (a - \lambda)((-1 - \lambda)^2 - a^2) = (a - \lambda)(a - 1 - \lambda)(-a - 1 - \lambda) \Rightarrow$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = a - 1 \\ \lambda_3 = -a - 1 \end{cases}$$

Ekuazio karakteristikoaren hiru erro lortu dira. Horrela, a parametroak hartzen dituen balioen arabera, erro horiek sinpleak edo anizkoitzak izango dira, ondorioz, kasu ezberdinak izango ditugu aztergai.

1. kasua: $a \neq 0$ eta $a \neq -\frac{1}{2}$. Kasu honetan hiru autobalio ezberdin daude:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = a - 1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = -a - 1, \text{ non } m_a(\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Autobalio horiei lotutako azpiespazio propioak kalkulatuko ditugu:

- $\lambda_1 = a$ denean, $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ ebatzi behar da, non $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(A - aI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1-a & a \\ 0 & a & -1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ (-1-a)y + az = 0 \\ ay + (-1-a)z = 0 \end{cases}$$

$$y = 0, z = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 = a$ autobaliori lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_1) = 1$$

- $\lambda_2 = a - 1$ denean ere $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$ ebatzi behar da, non $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(A - (a-1)I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -ay + az = 0 \\ ay - az = 0 \end{cases}$$

$$x = z, y = z, \forall z \in \mathbb{R}$$

Eta $\lambda_2 = a - 1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_2} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_2) = 1$$

- Azkenik, $\lambda_3 = -a - 1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko dugu:

$$(A - (-a-1)I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & -1 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (2a+1)x - z = 0 \\ ay + az = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = -(2a+1)x, z = (2a+1)x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Eta $\lambda_3 = -a - 1$ autobalioari lotutako azpiespazioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_3} = \{(x, -(2a+1)x, (2a+1)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -(2a+1), 2a+1) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_3) = 1$$

$$\text{Lehenengo kasuaren laburpena: } \begin{cases} \lambda_1 = a, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = a - 1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2) \\ \lambda_3 = -a - 1, \text{ non } m_a(\lambda_3) = 1 = m_g(\lambda_3) \end{cases}$$

Kasu honetan, A matrizea diagonalizagarria da eta D eta P matrizeak lor daitezke, non $D = P^{-1}AP$:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1-2a \\ 0 & 1 & 1+2a \end{pmatrix}$$

2. kasua: $a = 0$ denean, f endomorfismoari lotutako A matrizea ondokoa da:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, bi autobalio ezberdin lortzen dira: $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$

$\lambda_1 = 0$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ sistema ebartziko dugu, $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ izanik:

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, z = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Orduan $\lambda_1 = 0$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_1) = 1$$

Era berean, $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z, \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Beraz: $E_{\lambda_2} = \{(z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$, non $m_g(\lambda_2) = 2$.

Bigarren kasuko laburpena hurrengoa da: $\begin{cases} \lambda_1 = 0, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2) \end{cases}$

Kasu honetan ere A matrizea diagonalizagarria da eta $D = P^{-1}AP$ berdintza beteko duten D eta P matrizeak hurrengoak dira:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. kasua: $a = -\frac{1}{2}$ denean, f endomorfismoari lotutako A matrizea ondokoa da:

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

A matrizeak bi autobalio ezberdin ditu: $\begin{cases} \lambda_1 = -3/2, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = -1/2, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$

$\lambda_1 = -3/2$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatzeko ondoko ekuazio sistema ebartziko dugu:

$$\left(A + \frac{3}{2}I\right)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)y - \left(\frac{1}{2}\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = z, y = z, \forall z \in \mathbb{R}$$

Horrela, $\lambda_1 = -3/2$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa lortuko dugu:

$$E_{\lambda_1} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_1) = 1$$

Era berean, $\lambda_2 = -1/2$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatzeko ebartzi beharreko sistema ebartziko dugu, $(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0}$, non $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left(A + \frac{1}{2}I\right)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)y - \left(\frac{1}{2}\right)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Eta $\lambda_2 = -1/2$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_2} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_2) = 1$$

Azken kasu honetako laburpena hurrengoa da:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{3}{2}, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -1/2, \quad \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 \neq m_g(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

Ondorioz, kasu honetan, A matrizea ez da diagonalizagarria.

P6. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $A = \begin{pmatrix} -a & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ berari lotutako matrizea.

Kalkulatu a eta b parametro errealeen balioak A matrizea diagonalizagarria izan dadin eta diagonalizatu posible den kasuetan.

EBAZPENA

Ekuazio karakteristikoa ebatziz A matrizearen autobalioak kalkulatzeko dira:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -a - \lambda & 1 & b \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & b - \lambda \end{vmatrix} = (-a - \lambda)(-1 - \lambda)(b - \lambda) \Rightarrow$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = b \end{cases}$$

Ekuazio karakteristikoaren hiru erro lortu dira. Horrela, a eta b parametroek hartzen dituzten balioen arabera, erro horiek sinpleak edo anizkoitzak izango dira eta kasu ezberdinak izango ditugu aztergai.

1. kasua: $a \neq 1$ eta $b \neq -1$ eta $a \neq -b$ direnean, hiru autobalio ezberdin daude:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -a, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = b, \text{ non } m_a(\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Autobalio horiei lotutako azpiespazio propioak kalkulatu behar dira:

- $\lambda_1 = -a$ denean, $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ sistema ebatzi behar da, $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ izanik:

$$(A + aI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 1 & a + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + bz = 0 \\ (a - 1)y = 0 \\ y + (a + b)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Eta autobalio horri lotutako azpiespazio propioa hau da:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_1) = 1$$

- $\lambda_2 = -1$ denean ere berari lotutako azpiespazio propioa kalkulatu behar da ondoko sistema ebatziz:

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a + 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1 - a)x + y + bz = 0 \\ y + (b + 1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{1-a}z, y = (-1-b)z, \forall z \in \mathbb{R}$$

$\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \left(\frac{1}{1-a}z, (-1-b)z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(\frac{1}{1-a}, -1-b, 1 \right) \right\rangle, \text{ non } m_g(\lambda_2) = 1$$

- Azkenik, $\lambda_3 = b$ autobalioari lotutako espazio propioa kalkulatzeko da:

$$(A - bI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-b & 1 & b \\ 0 & -1-b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-a-b)x + y + bz = 0 \\ (-1-b)y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{b}{a+b}z, y = 0, \forall z \in \mathbb{R}$$

$\lambda_3 = b$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_3} = \left\{ \left(\frac{b}{a+b}z, 0, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(\frac{b}{a+b}, 0, 1 \right) \right\rangle, \text{ non } m_g(\lambda_3) = 1$$

Lehenengo kasu honetako laburpena hauxe da:
$$\begin{cases} \lambda_1 = -a, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2) \\ \lambda_3 = b, \text{ non } m_a(\lambda_3) = 1 = m_g(\lambda_3) \end{cases}$$

Kasu honetan A matrizea diagonalizagarria da eta $D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen duten D eta P matrizeak lor daitezke:

$$D = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-a} & \frac{b}{a+b} \\ 0 & -1-b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. kasua: $a = 1$ eta $b \neq -1$ direnean, f endomorfismoari lotutako A matrizea hauxe da:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Kasu honetan bi autobalio ezberdin daude:
$$\begin{cases} \lambda_1 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = b, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatzeko da $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$ sistema ebatziz, non $(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0}$:

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + bz = 0 \\ y + (b+1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Beraz, $\lambda_1 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa $E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ da, $m_g(\lambda_1) = 1$ izanik. Kasu honetan, $m_a(\lambda_1) = 2 \neq m_g(\lambda_1) = 1$ direnez, A matrizea ez da diagonalizagarria.

3. kasua: $b = -1$ eta $a \neq 1$ direnean, f endomorfismoari lotutako A matrizea ondokoa da:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Kasu honetan bi autobalio ezberdin lortzen dira: $\begin{cases} \lambda_1 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = -a, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 \end{cases}$

$\lambda_1 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = 0, z = (1-a)x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa ondokoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, (1-a)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1-a) \rangle$$

Autobalioaren anizkoitzasun aljebraikoa eta geometrikoa ezberdinak dira, $m_a(\lambda_1) = 2 \neq m_g(\lambda_1) = 1$, beraz, A matrizea ez da diagonalizagarria.

4. kasua: $a = -b$ eta $a \neq 1$ direnean, f endomorfismoari lotutako A matrizea hau da:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

Bi autobalio ezberdin daude: $\begin{cases} \lambda_1 = -a, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 \end{cases}$

$\lambda_1 = -a$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar da:

$$(A + aI)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - az = 0 \\ (a-1)y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow az = 0$$

Bi kasu ezberdin daude:

4.1 kasua: $a \neq 0$ denean, sistemaren soluzioa $y = 0$ eta $z = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ da. Ondorioz $\lambda_1 = -a$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa ondokoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_1) = 1$$

$\lambda_1 = -a$ autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa bat ez datozenez, $m_a(\lambda_1) = 2 \neq m_g(\lambda_1) = 1$, A matrizea ez da diagonalizagarria.

4.2 kasua: $a = 0$ denean, sistemaren soluzioa $y = 0$ eta $\forall x, z \in \mathbb{R}$ da. Beraz $\lambda_1 = -a$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa ondokoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_1) = 2$$

$\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = z, y = -z, \forall z \in \mathbb{R}$$

Ondorioz, $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa ondokoa da:

$$E_{\lambda_2} = \{(z, -z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 1) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_2) = 1$$

4.2 kasuko laburpena hau da: $\begin{cases} \lambda_1 = -a, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1) \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2) \end{cases} a \neq 0$ izanik.

Kasu honetan A matrizea diagonalizagarria da eta $D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen duten D eta P matrizeak lor daitezke:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. kasua: $a = 1$ eta $b = -1$ direnean, f endomorfismoari lotutako A matrizea ondorengoa da:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autobalio bakarra lortzen da, $\lambda_1 = -1$, non $m_a(\lambda_1) = 3$ den.

$\lambda_1 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

$$(A + I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\lambda_1 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa:

$$E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle \quad \text{non} \quad m_g(\lambda_1) = 1$$

Kasu honetan, $m_a(\lambda_1) = 3 \neq m_g(\lambda_1) = 1$ direnez, A matrizea ez da diagonalizagarria.

P7. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ berari lotutako

matrizea. Kalkulatu f -rekiko matrizea diagonalara egingo duen oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA

f endomorfismoari lotutako matrizea erreala eta simetrikoa denez, f diagonalizagarria da. f endomorfismoaren autobalioak kalkulatzeko ditugu, $|A - \lambda I| = 0$ ekuazio karakteristikoa ebatziz:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0$ autobalioari lotutako autobektoreak kalkulatzeko ditugu ondoko sistema ebatziz:

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Beraz, $\lambda_1 = 0$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

Era berean, $\lambda_2 = 1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko dugu:

$$E_{\lambda_2} = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

Bukatzeko prozedura berari jarraituz, $\lambda_3 = 3$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa lortzen da:

$$E_{\lambda_3} = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -2, 1) \rangle$$

Autobalioei lotutako azpiespazio propioak kalkulatu ondoren, f endomorfismoari lotutako matrizea diagonalazitea posible egiten duen $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat daukagu. D matrizea diagonalazitea ondorengoa izanik:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eta $\mathbb{R}^3$ -ko oinarria, adibidez, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ izanik non $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (-1,0,1)$ eta $\vec{v}_3 = (1,-2,1)$ diren. Oinarri hori ortogonal da, bektore propio bakoitza balio propio ezberdin bati lotuta baitago. Beraz, oinarri hori oinarri ortonormala bilakatzeko nahikoa da bektoreak unitario bihurtzea, beraien normaz zatituz:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{u}_2 &= \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \vec{u}_3 &= \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{(1,-2,1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

Orduan, $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ oinarria $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri ortonormal bat da, $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eta $\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ izanik, eta f endomorfismoaren oinarri horrekiko matrizea ondorengo matrize diagonalazitea da:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

P8. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ berari lotutako matrizea.

Kalkulatu f -rekiko matrizea diagonalazitea egiteko duen oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA

f endomorfismoari lotutako matrizea erreala eta simetrikoa denez, f diagonalizagarria da. f endomorfismoaren autobalioak kalkulatu ditugu, $|A - \lambda I| = 0$ ekuazio karakteristikoa ebatziz:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+9)(\lambda-9)^2 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -9 \\ \lambda_2 = 9 \end{cases}$$

non $m_g(\lambda_1) = 1$ eta $m_g(\lambda_2) = 2$ diren.

- $\lambda_1 = -9$ autobalioari lotutako autobektoreak kalkulatzeko ondoko sistema ebatziko dugu:

$$(A + 9I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 16 & 4 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 4y + 8z = 0 \\ -4x + 16y + 4z = 0 \\ 8x + 4y + 10z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -z, y = -\frac{z}{2}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Ondorioz, $\lambda_1 = -9$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \left(-z, -\frac{z}{2}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \langle (2, 1, -2) \rangle$$

- Era berdintsuan $\lambda_2 = 9$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkula daiteke:

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \left(-\frac{y}{2} + z, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \langle (1, -2, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

Behin autobalioei lotutako azpiespazio propioak kalkulatu, f endomorfismoari lotutako matrizea diagonalaz izatea posible egiten duen $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat daukagu. D matrize diagonalaz ondokoa izanik:

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Eta $\mathbb{R}^3$ -ko oinarria, adibidez $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ izango da, non $\vec{v}_1 = (2, 1, -2)$, $\vec{v}_2 = (1, -2, 0)$ eta $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$ diren. Oinarri hori ez da ortogonal, $\vec{v}_2$ eta $\vec{v}_3$ bektoreak ez baitira ortogonalak:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (1, -2, 0) \cdot (1, 0, 1) = 2 \neq 0$$

$\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ autobalio ezberdinei lotutako autobektoreak direnez, ortogonalak dira. Arrazoi beragatik $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_3$ bektoreak ere ortogonalak dira. Hiru bektoreak ortogonalak izateko aski da autobalio anizkoitzari lotutako autobektoreetako bat eraldatzea. Gram-Schmidt-en metodoa erabiliko dugu.

Izan bedi $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 + \lambda \vec{v}_2$ bektorea:

$$\vec{w}_3 = (1, 0, 1) + \lambda(1, -2, 0) = (1 + \lambda, -2\lambda, 1)$$

λ parametroaren balioa zehaztuko dugu $\vec{v}_2$ eta $\vec{w}_3$ bektoreak ortogonalak izan daitezen. Horretarako, $\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_3 = 0$ berdintza planteatuko dugu:

$$(1, -2, 0) \cdot (1 + \lambda, -2\lambda, 1) = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + 4\lambda + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/5$$

λ parametroaren balioa $\vec{w}_3$ bektorean ordezkatzuz zera daukagu:

$$\vec{w}_3 = \left(1 - \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right)$$

Era horretan lortutako $\vec{w}_3$ bektorea $\vec{v}_1$ bektorearekiko ere ortogonal dela frogatu daiteke:

$$\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \cdot (2, 1, -2) = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} - 2 = 0$$

Beraz, $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3\}$ f endomorfismoaren bektore propioez osatutako $\mathbb{R}^3$ -ko ortogonal bat da. Oinarri hori ortonormal bihurtzeko nahikoa da bektoreak unitario bihurtzea, beraien normaz zatituz:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{(2, 1, -2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ \vec{u}_2 &= \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{(1, -2, 0)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \\ \vec{u}_3 &= \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2}} = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\end{aligned}$$

Beraz, $B'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ oinarria $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri ortonormal bat da, $\vec{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ eta $\vec{u}_3 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ izanik. Eta f endomorfismoaren oinarri horrekiko matrizea ondorengo matrize diagonal da: $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Gainera, $D = P^t A P$ berdintza betetzen dela frogatu daiteke, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ izanik.

P9. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordan-en forma

kanonikoa.

EBAZPENA

A matrizearen autobalioak kalkulatu ahal izateko, lehendabizi polinomio karakteriskoa lortuko dugu:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^4 (\lambda + 1)^2$$

Hauek dira A matrizearen autobalioak eta haien anizkoiztasun aljebraikoak:

$$(\lambda - 1)^4(\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \text{non } m_a(\lambda_1) = 4 \\ \lambda_2 = -1, \text{non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

Gogoratu, matrizea diagonalizagarria denean, Jordan-en forma kanonikoa matrize diagonal delako. Aldiz, matrizea diagonalizagarria ez denean, $E_{\lambda_j}^i \forall j = 1, 2$ azpiespazio-katea kalkulatu behar da. A matrizea diagonalizagarria den aztertuz hasiko gara. Horretarako, autobalio bakoitzari lotutako azpiespazio propioak kalkulatu ditugu eta anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa berdinak diren ikusiko dugu.

- $\lambda_1 = 1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_1) = 4$ da. Bestalde, autobalio honi lotutako azpiespazio propioa $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$ kalkulatu da:

$$E_{\lambda_1} = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$$

E_{λ_1} azpiespazioa lortzeko ondoko sistema ebatzi beharra dago:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 + 3x_6 = 0 \\ -x_2 + x_4 - 3x_6 = 0 \\ -2x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

Ondorioz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{ (x_1, 0, 0, 0, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0) \rangle$$

E_{λ_1} azpiespazioa bektore ez-nulu bakarrik sortu duenez, $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 1$ daukagu. Beraz, anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 1 \neq m_a(\lambda_1) = 4$. Ondorioz, A matrizea ez da diagonalizagarria eta $E_{\lambda_1}^i$ azpiespazio-katea eraikiko dugu, azpiespazioaren dimentsioa eta autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa bat etorri arte.

Gainera, $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 1$ betetzen denez, λ_1 autobaliodun Jordan-en oinarritzko bloke bakarra dago.

Azpiespazio-katea osatzen hasiko gara:

$$E_{\lambda_1}^2 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$$

$E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioaren sistema sortzaile bat lortzeko ondoko ekuazio linealetako sistema askatu behar da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ -x_5 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 - 8x_6 = 0 \\ -x_5 + 4x_6 = 0 \\ 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $E_{\lambda_1}^2 = \{ (x_1, x_2, 0, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0) \rangle$. Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioa linealki independenteak diren bi bektorek osatzen dutenez, $\dim E_{\lambda_1}^2 = 2$ da. Azpiespazioaren dimentsioa anizkoiztasun aljebraikoarekin bat ez datorrenez, $\dim E_{\lambda_1}^2 = 2 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, azpiespazio-katea eratzen jarraitu beharra dago:

$E_{\lambda_1}^3$ azpiespazioa kalkulatu dugu:

$$E_{\lambda_1}^3 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^3 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^3$$

$E_{\lambda_1}^3$ azpiespazioaren sistema sortzaile bat lortzeko ondoko ekuazio linealetako sistema askatu behar da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & -8 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_5 = 0 \\ 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 + 20x_6 = 0 \\ -8x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ \forall x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, ondorengoa daukagu:

$$E_{\lambda_1}^3 = \{ (x_1, x_3 + x_4, x_3, x_4, 0, 0) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0) \rangle$$

Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^3$ azpiespazioa linealki independenteak diren hiru bektorek osatzen dutenez, $\dim E_{\lambda_1}^3 = 3$ da. Eta oraindik ere azpiespazioaren dimentsioa anizkoiztasun aljebraikoarekin bat ez datorrenez, $\dim E_{\lambda_1}^3 = 3 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, azpiespazio-katea eratzen jarraitu beharra dago.

$E_{\lambda_1}^4$ azpiespazioa kalkulatu dugu:

$$E_{\lambda_1}^4 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^4 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^4$$

$E_{\lambda_1}^4$ azpiespazioaren sistema sortzaile bat lortzeko ondoko ekuazio linealetako sistema askatu behar da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 16 & 16 & 16 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -16x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 16x_5 - 48x_6 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 + x_4 + x_5 \\ x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

Beraz, hurrengoa daukagu:

$$E_{\lambda_1}^4 = \{ (x_1, x_3 + x_4 + x_5, x_3, x_4, x_5, 0) \mid x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$E_{\lambda_1}^4 = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0) \rangle$$

Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^4$ azpiespazioa linealki independenteak diren lau bektorek osatzen dutenez, $\dim E_{\lambda_1}^4 = 4 = m_a(\lambda_1) = 4$ betetzen da. Beraz, ez dago azpiespazio-katea osatzen jarraitu beharrik.

Laburbilduz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion azpiespazio-katea hauxe da:

$$E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2 \subset E_{\lambda_1}^3 \subset E_{\lambda_1}^4, \text{ non } \dim E_{\lambda_1} = 1 < \dim E_{\lambda_1}^2 = 2 < \dim E_{\lambda_1}^3 = 3 < \dim E_{\lambda_1}^4 = 4$$

Kontuan izan, $\dim E_{\lambda_1}^{i+1} - \dim E_{\lambda_1}^i = 1$ betetzen dela $\forall i = 1, 2, 3$ balioetarako. Beraz, $E_{\lambda_1}^{i+1} - E_{\lambda_1}^i$ azpiespazio bektorial bakoitzean linealki independentea den bektore bakarra egongo da, $\forall i = 1, 2, 3$ balioetarako.

$\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion eta Jordan-en bloke bakarrari lotutako Jordan-en oinarria $B_{J_2} = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5, \vec{u}_6\}$ era honetan osatuko da:

$\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4 - E_{\lambda_1}^3$ aukeratuko dugu, hau da, $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4$ eta $\vec{u}_6 \notin E_{\lambda_1}^3$ betetzen duen bektore bat. Izan bedi $\vec{u}_6 = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$ baldintza horiek betetzen dituen bektorea. Bektore horren $(f - \lambda_1 I)$ aplikazioarekiko irudi jarraituak kalkulatzeko dira:

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = (-1, 0, 1, -1, 0, 0) \in E_{\lambda_1}^3 - E_{\lambda_1}^2$$

$$\vec{u}_4 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = (2, -1, 0, -1, 0, 0) \in E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}^1$$

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \in E_{\lambda_1}^1$$

Ondorioz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion Jordan-en oinarria hau da:

$$B_{J_2} = \{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (2, -1, 0, -1, 0, 0), (-1, 0, 1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0)\}$$

Jarraian, oinarri horri lotutako Jordan-en oinarritzko blokea zein den ikusiko dugu. Horretarako, $\vec{u}_3$ bektorearen irudia kalkulatu hasiko gara:

$$f(\vec{u}_3) = A \cdot \vec{u}_3$$

Beste alde batetik, ondoko berdintza-katea betetzen da:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)^2 \vec{u}_4 = (A - \lambda_1 I)^3 \vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)^4 \vec{u}_6$$

Eta $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4$ betetzen dela kontuan hartuz, $(A - \lambda_1 I)^4 \vec{u}_6 = 0$ betetzen da, ondorioz:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_3 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_3 = \lambda_1 \vec{u}_3 \Rightarrow f(\vec{u}_3) = \lambda_1 \vec{u}_3$$

$\vec{u}_4, \vec{u}_5$ eta $\vec{u}_6$ bektoreekin antzeko arrazoibidea erabiliz honakoak lortzen dira:

$$f(\vec{u}_4) = A \cdot \vec{u}_4$$

Horretarako, ondoko eragiketak egingo ditugu:

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 \Rightarrow \vec{u}_3 = A\vec{u}_4 - \lambda_1 \vec{u}_4 \Rightarrow A\vec{u}_4 = \vec{u}_3 + \lambda_1 \vec{u}_4 \Rightarrow f(\vec{u}_4) = \vec{u}_3 + \lambda_1 \vec{u}_4$$

Aurreko prozedurari jarraituz, $f(\vec{u}_5)$ eta $f(\vec{u}_6)$ irudiak kalkulatu ditugu:

$$f(\vec{u}_5) = A \cdot \vec{u}_5$$

$$\vec{u}_4 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 \Rightarrow \vec{u}_4 = A\vec{u}_5 - \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \vec{u}_4 + \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow f(\vec{u}_5) = \vec{u}_4 + \lambda_1 \vec{u}_5$$

$$f(\vec{u}_6) = A \cdot \vec{u}_6$$

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I) \vec{u}_6 \Rightarrow \vec{u}_5 = A \vec{u}_6 - \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow A \vec{u}_6 = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow f(\vec{u}_6) = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarritzko matrizea ondorengoa da:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = -1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_2) = 2$ da. Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$ kalkulatzeko da:

$$E_{\lambda_2} = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I) \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$$

E_{λ_2} azpiespazioa lortzeko ondoko sistema ebatzi beharra dago:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 - x_5 + 3x_6 = 0 \\ -x_2 + 3x_4 - 3x_6 = 0 \\ 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

$\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_2} = \{ (0, 0, x_3, 0, 0, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = \langle (0, 0, 1, 0, 0, 0) \rangle$$

E_{λ_2} azpiespazioa bektore bakarrik sortu duenez, $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1$ eta anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2$. Gainera, $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1$ betetzen denez, λ_2 autobaliodun Jordan-en oinarritzko bloke bakarra dago. Azpiespazio-katea osatzen hasiko gara:

$$E_{\lambda_2}^2 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)^2$$

$E_{\lambda_2}^2$ azpiespazioaren sistema sortzaile bat lortzeko ondoko ekuazio linealetako sistema askatu

behar da:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -9 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 9x_4 - 7x_5 + 9x_6 = 0 \\ 4x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 0 \\ 4x_2 - 4x_4 + 4x_6 = 0 \\ -4x_2 + 8x_4 - x_5 - 8x_6 = 0 \\ 4x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = x_6 \\ x_5 = 0 \\ \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $E_{\lambda_2}^2 = \{(0,0,x_3,x_4,0,x_4) \mid x_3,x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1) \rangle$. Kasu honetan, $E_{\lambda_2}^2$ azpiespazioa linealki independenteak diren bi bektorek osatzen dutenez, $\dim E_{\lambda_2}^2 = 2 = m_a(\lambda_2)$ betetzen da. Ondorioz, ez dago azpiespazio-katea osatzen jarraitu beharrik.

Laburbilduz, $\lambda_2 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio-katea hauxe da:

$$E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_2}^2, \text{ non } \dim E_{\lambda_2} = 1 < \dim E_{\lambda_2}^2 = 2$$

Hau da, $\dim E_{\lambda_2}^2 - \dim E_{\lambda_2} = 1$ betetzen denez, nahikoa da $E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}$ azpiespazio bektorialean bektore ez-nulu bat aukeratzea eta bektore horren $(f - \lambda_2 i)$ aplikazioarekiko irudia kalkulatzeko. Kasu honetan, $\lambda_2 = -1$ autobalioari dagokion eta Jordan-en bloke bakarrari lotutako Jordan-en oinarriak bi bektore izango ditu $B_{J_1} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ eta era honetan osatuko da:

$\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}$ aukeratuko dugu, hau da, $\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2$ eta $\vec{u}_2 \notin E_{\lambda_2}$ den bektore bat aukeratuko dugu. Izan bedi $\vec{u}_2 = (0,0,0,1,0,1)$ baldintza horiek betetzen dituen bektorea. Bektore horren $(f - \lambda_2 i)$ aplikazioarekiko irudia kalkulatzeko da:

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 = (0,0,1,0,0,0) \in E_{\lambda_2}$$

Beraz, $\lambda_2 = -1$ autobalioaren Jordan-en oinarria hauxe da:

$$B_{J_1} = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1)\}$$

Jarraian, oinarri horri lotutako Jordan-en oinarrizko blokea zein den ikusiko dugu. Horretarako, $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreen f aplikazioaren bidezko irudiak kalkulatu ditugu, $\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5$ eta $\vec{u}_6$ bektoreekin jarraitutako antzeko arrazoibidea erabiliz:

$$f(\vec{u}_1) = A \cdot \vec{u}_1$$

Aurreko irudia kalkulatzeko kontuan izango dugu ondoko berdintza betetzen dela:

$$(A - \lambda_2 I) \vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)^2 \vec{u}_2$$

$\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2$ betetzen denez, orduan zera daukagu:

$$(A - \lambda_2 I) \vec{u}_1 = 0 \Rightarrow A \vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_1$$

Eta ondorioz, $f(\vec{u}_1) = \lambda_2 \vec{u}_1$.

Era antzekoan $f(\vec{u}_2)$ kalkulatu dugu:

$$f(\vec{u}_2) = A \cdot \vec{u}_2$$

$$f(\vec{u}_2) = A \cdot \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I) \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = A \vec{u}_2 - \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow A \vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

$$\Rightarrow f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarritzko matrizea hau da:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Behin autobalio bakoitzari dagozkion Jordan-en oinarriak eta Jordan-en oinarritzko matrizeak kalkulatuak, Jordan-en oinarri osoa eta Jordan-en forma kanonikoa eratzen dira. Jordan-en oinarri osoa autobalio bakoitzaren oinarrien bildura izango da, $B = B_{J_1} \cup B_{J_2}$, hau da:

$$B = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1), (1,0,0,0,0,0), (2, -1, 0, -1, 0, 0), \\ (-1, 0, 1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0)\}$$

Eta Jordan-en forma kanonikoa diagonal nagusian autobalio bakoitzari lotutako Jordan-en oinarritzko matrizeak jarritik lortzen da:

$$J = \left(\begin{array}{c|c} J_1 & 0_{2 \times 4} \\ \hline 0_{4 \times 2} & J_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ berdintza betetzen duen P matrize erregularra Jordan-en oinarriko bektoreak zutabekara jartzean lortzen den matrizea izanik:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P10. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordan-en forma

kanonikoa.

EBAZPENA

A matrizearen autobalioak kalkulatu ahal izateko, lehendabizi polinomio karakteriskoa lortuko dugu:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^4(\lambda + 1)^2$$

Hauek dira A matrizearen autobalioak eta beraien anizkoiztasun aljebraikoak:

$$(\lambda - 1)^4(\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 4 \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

Autobalio bakoitzari lotutako azpiespazio propioak kalkulatu ditugu eta anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa berdinak diren ikusiko dugu. Gogoratu autobalio bakoitzarentzat anizkoiztasun biak berdinak direnean izango dela A matrizea diagonalizagarria.

- $\lambda_1 = 1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_1) = 4$ da. Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

$$E_{\lambda_1} = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$$

E_{λ_1} azpiespazioa lortzeko ondoko sistema ebatzi beharra dago:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -2x_1 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_6 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_2 = -x_6 \\ \forall x_3, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz $\lambda_1 = 1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{ (0, -x_6, x_3, 0, 0, x_6) \mid x_3, x_6 \in \mathbb{R} \} = \langle (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

E_{λ_1} azpiespazioa linealki independenteak diren bi bektorek sortu dutenez, $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 2$ eta anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 2 \neq m_a(\lambda_1) = 4$. Ondorioz, A matrizea ez da diagonalizagarria eta $E_{\lambda_1}^i$ azpiespazio-katea eraiki beharra dago, azpiespazioaren dimentsioa eta autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa bat etorri arte.

Azpiespazio-katea osatzen hasiko gara:

$$E_{\lambda_1}^2 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$$

$E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioaren sistema sortzaile bat lortzeko ondoko ekuazio linealetako sistema askatu behar da:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_6 \\ \forall x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $E_{\lambda_1}^2 = \{ (0, -x_6, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \}$, bere sistema sortzaile bat ondorengoa izanik:

$$E_{\lambda_1}^2 = \langle (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioa linealki independenteak diren lau bektorek osatzen dutenez $\dim E_{\lambda_1}^2 = 4$ da. Eta azpiespazioaren dimentsioa anizkoiztasun aljebraikoarekin bat datorrenez, $\dim E_{\lambda_1}^2 = 4 = m_a(\lambda_1) = 4$, ez dago azpiespazio-katea eratzen jarraitu beharrik.

Laburbilduz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion azpiespazio-katea ondorengoa da:

$$E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2, \text{ non } \dim E_{\lambda_1} = 2 < \dim E_{\lambda_1}^2 = 4$$

Kasu honetan, $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 2$ betetzen denez, λ_1 autobaliodun Jordan-en oinarrizko bi bloke daude.

Gainera, $\dim E_{\lambda_1}^2 - \dim E_{\lambda_1} = 2$ denez, $E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ azpiespazio bektorialean linealki independenteak diren bi bektore aukeratu behar dira, hau da, bloke bakoitzeko bektore bat. Eta bi bektore horien $(f - \lambda_1 i)$ aplikazioarekiko irudiak kalkulatu behar dira, era horretan E_{λ_1} azpiespazioko bi bektore lortzen direlarik. Izan bitez $\vec{u}_6, \vec{u}_4 \in E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ bi bektore, $\vec{u}_6 = (0,0,0,1,0,0)$ eta $\vec{u}_4 = (0,0,0,0,1,0)$ izanik. Bektore horien $(f - \lambda_1 i)$ aplikazioarekiko irudiak kalkulatu ditugu, $\vec{u}_5$ eta $\vec{u}_3$ bektoreak hurrenez hurren:

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = (0, -1, 0, 0, 0, 1) \in E_{\lambda_1}$$

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \in E_{\lambda_1}$$

$E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ azpiespazioko bektore bakoitzak eta bere irudiak Jordan-en oinarri bat osatzen dute, Jordan-en lehenengo oinarria ondorengoa izanik:

$$B_{J_3} = \{\vec{u}_5, \vec{u}_6\} = \{(0, -1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0, 0)\}$$

Lehenengo oinarri hori lotutako Jordan-en blokea lortzeko oinarriko bektoreen f endomorfismoaren bidezko irudiak kalkulatu behar dira:

$$f(\vec{u}_5) = A \cdot \vec{u}_5$$

Beste alde batetik, $(A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)^2 \vec{u}_6$ berdintza betetzen da, eta $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2$ dela kontuan hartuz, zera daukagu:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow f(\vec{u}_5) = \lambda_1 \vec{u}_5$$

Azkenik, $\vec{u}_6$ bektorearen irudia kalkulatu da:

$$f(\vec{u}_6) = A \cdot \vec{u}_6$$

Horretarako, ondoko eragiketak egingo ditugu:

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 \Rightarrow \vec{u}_5 = A\vec{u}_6 - \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow f(\vec{u}_6) = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarritzko matrizea ondorengoa da:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jordan-en bigarren oinarria hurrengoa izanik:

$$B_{J_2} = \{\vec{u}_3, \vec{u}_4\} = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0)\}$$

Oinarri horri lotutako Jordan-en blokea lortzeko oinarriko bektoreen f endomorfismoaren bidezko irudiak kalkulatu behar dira, hau da:

$$f(\vec{u}_3) = A \cdot \vec{u}_3$$

Beste alde batetik, $(A - \lambda_1 I)\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)^2 \vec{u}_4$ berdintza betetzen da, eta $\vec{u}_4 \in E_{\lambda_1}^2$ dela kontuan hartuz, zera daukagu:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_3 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_3 = \lambda_1 \vec{u}_3 \Rightarrow f(\vec{u}_3) = \lambda_1 \vec{u}_3$$

Bukatzeko, $\vec{u}_4$ bektorearen irudia ere kalkulatu beharra dago:

$$f(\vec{u}_4) = A \cdot \vec{u}_4$$

Ondoko eragiketak eginez $f(\vec{u}_4)$ balioa lortuko dugu:

$$\vec{u}_3 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_4 \Rightarrow \vec{u}_3 = A\vec{u}_4 - \lambda_1 \vec{u}_4 \Rightarrow A\vec{u}_4 = \vec{u}_3 + \lambda_1 \vec{u}_4 \Rightarrow f(\vec{u}_4) = \vec{u}_3 + \lambda_1 \vec{u}_4$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarritzko matrizea hauxe da:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = -1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_2) = 2$ da. Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

$$E_{\lambda_2} = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$$

E_{λ_2} azpiespazioa lortzeko ondoko sistema ebatzi beharra dago:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = -x_6 \\ \forall x_1, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hauxe da:

$$E_{\lambda_2} = \{ (x_1, x_1, 0, 0, -x_6, x_6) \mid x_1, x_6 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1, 1) \rangle$$

E_{λ_2} azpiespazioa bi bektore linealki independentek sortu dutenez, $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 2$ eta anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa bat datoz: $m_g(\lambda_2) = m_a(\lambda_2) = 2$. Ondorioz, ez dago azpiespazio-katea eratu beharrik. Jordan-en oinarriko bektoreak $\lambda_2 = -1$ autobalioaren autobektoreak dira, honi dagokion Jordan-en blokea matrize diagonal izanik. Jordan-en oinarria honakoa da:

$$B_{J_1} = \{ (1, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1, 1) \}$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarrizko matrizea hauxe da:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bukatzeko, Jordan-en oinarri osoa autobalio bakoitzaren oinarrien bildura da, $B = B_{J_1} \cup B_{J_2} \cup B_{J_3}$, hau da:

$$B = \{ (1, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0, 0) \}$$

Jordan-en forma kanonikoa diagonal nagusian autobalio bakoitzari lotutako Jordan-en oinarrizko matrizeak jarritz lortzen da:

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & J_2 & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & J_3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ berdintza betetzen duen P matrize erregularra Jordan-en oinarriko bektoreak zutabeka jartzean lortzen den matrizea izanik:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P11. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordan-en forma

kanonikoa.

EBAZPENA

A matrizearen polinomio karakteriskoa hauxe da:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^4(\lambda + 1)^2$$

Beraz, hauek dira A matrizearen autobalioak eta beraien anizkoiztasun aljebraikoak:

$$(\lambda - 1)^4(\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 4 \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

Autobalio bakoitzari lotutako azpiespazio propioak kalkulatu ditugu eta anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa berdinak diren ikusiko dugu.

- $\lambda_1 = 1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_1) = 4$ da eta autobalio honi lotutako azpiespazio propioa ondorengoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$$

E_{λ_1} azpiespazioa lortzeko ondoko sistema ebatzi beharra dago:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_6 = 0 \\ 16x_3 + 8x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_4 = -2x_3 \\ x_6 = 0 \\ x_5 = 0 \\ \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hauxe da:

$$E_{\lambda_1} = \{ (x_1, x_2, x_3, -2x_3, 0, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -2, 0, 0) \rangle$$

E_{λ_1} azpiespazioa linealki independenteak diren hiru bektorek sortu dutenez, $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 3$, anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 3 \neq m_a(\lambda_1) = 4$. Ondorioz, A matrizea ez da diagonalizagarria eta $E_{\lambda_1}^i$ azpiespazio-katea osatuko dugu, azpiespazioaren dimentsioa eta autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa bat etorri arte. Azpiespazio-katea osatzen hasiko gara:

$$E_{\lambda_1}^2 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$$

$E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioaren sistema sortzaile bat lortzeko ondoko ekuazio linealetako sistema askatu behar da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -64 & -32 & -16 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -16x_3 - 8x_4 - 4x_5 + 4x_6 = 0 \\ -64x_3 - 32x_4 - 16x_5 + 16x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_6 = 0 \\ x_5 = -4x_3 - 2x_4 \\ \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $E_{\lambda_1}^2 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, -4x_3 - 2x_4, 0) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$, bere sistema sortzaile bat ondorengoa izanik:

$$E_{\lambda_1}^2 = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, -4, 0), (0, 0, 0, 1, -2, 0) \rangle$$

Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioa linealki independenteak diren lau bektorek osatzen dute: $\dim E_{\lambda_1}^2 = 4$. Eta azpiespazioaren dimentsioa anizkoiztasun aljebraikoarekin bat datorrenez, $\dim E_{\lambda_1}^2 = 4 = m_a(\lambda_1) = 4$, ez dago azpiespazio-katea eratzen jarraitu beharrik.

Laburbilduz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion azpiespazio-katea hurrengoa da:

$$E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2, \text{ non: } \dim E_{\lambda_1} = 3 < \dim E_{\lambda_1}^2 = 4$$

Kasu honetan $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 3$ denez, λ_1 autobaliodun Jordan-en oinarritzko hiru bloke daude. Gainera, $\dim E_{\lambda_1}^2 - \dim E_{\lambda_1} = 1$ betetzen denez, $E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ azpiespazio bektorialean bektore bakarra aukeratuko dugu, bektore hori eta E_{λ_1} espazioko beste hiru bektore Jordan-en oinarri osoko parte izanik. Aukera dezagun $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ bektore bakarra,

$\vec{u}_6 = (0,0,1,0,-4,0)$ izanik. Bektore horren $(f - \lambda_1 I)$ aplikazioaren bidezko irudia kalkulatu dugu:

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 = (-2,0,-2,4,0,0) \in E_{\lambda_1}$$

Era horretan, $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2 - E_{\lambda_1}$ eta $\vec{u}_5 \in E_{\lambda_1}$ bektoreak ditugu. Baina $\dim E_{\lambda_1} = 3$ enez, E_{λ_1} azpiespazioko beste bi bektore behar ditugu, beren artean eta $\vec{u}_5$ eta $\vec{u}_6$ bektoreekiko linealki independenteak izango direnak. Izan bitez $\vec{u}_4 = (1,0,0,0,0,0)$ eta $\vec{u}_3 = (0,1,0,0,0,0)$ bi bektore horiek. Horrela, Jordan-en lehenengo oinarria hauxe izango da:

$$B_{J_4} = \{\vec{u}_5, \vec{u}_6\} = \{(-2,0,-2,4,0,0), (0,0,1,0,-4,0)\}$$

Oinarri horri dagokion Jordan-en oinarritzko matrizea kalkulatzeko $\vec{u}_5$ eta $\vec{u}_6$ bektoreen f aplikazioaren bidezko irudiak kalkulatu behar dira:

$$f(\vec{u}_5) = A \cdot \vec{u}_5$$

Beste alde batetik, $(A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)^2 \vec{u}_6$ berdintza eta $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^2$ betetzen dela kontuan hartuz, zera daukagu:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{u}_5 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_5 = \lambda_1 \vec{u}_5 \Rightarrow f(\vec{u}_5) = \lambda_1 \vec{u}_5$$

Era berean, $f(\vec{u}_6) = A \cdot \vec{u}_6$ kalkulatu dugu:

$$\vec{u}_5 = (A - \lambda_1 I)\vec{u}_6 \Rightarrow \vec{u}_5 = A\vec{u}_6 - \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow A\vec{u}_6 = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6 \Rightarrow f(\vec{u}_6) = \vec{u}_5 + \lambda_1 \vec{u}_6$$

Beraz, lehenengo oinarriarekiko Jordan-en oinarritzko matrizea ondokoa da:

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion Jordan-en bigarren oinarria hauxe da:

$$B_{J_3} = \{\vec{u}_4\} = \{(1,0,0,0,0,0)\}$$

$\vec{u}_4 \in E_{\lambda_1}$ betetzenenez, $f(\vec{u}_4) = 1 \cdot \vec{u}_4$ dugu. Ondorioz, oinarri horrekiko Jordan-en oinarritzko matrizea hauxe da:

$$J_3 = (1)$$

Azkenik, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion Jordan-en hirugarren oinarria hurrengoa da:

$$B_{J_2} = \{\vec{u}_3\} = \{(0,1,0,0,0,0)\}$$

Aurreko arrazoi beragatik, hirugarren oinarriarekiko Jordan-en oinarritzko matrizea ondorengoa da:

$$J_2 = (1)$$

- $\lambda_2 = -1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_2) = 2$ da. Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

$$E_{\lambda_2} = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I) \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$$

E_{λ_2} azpiespazioa lortzeko ondoko sistema ebatzi beharra dago:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_4 = 0 \\ 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_5 - x_6 = 0 \\ 16x_3 + 8x_4 + 4x_5 - 2x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 2x_5 \\ \forall x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa ondorengoa da:

$$E_{\lambda_2} = \{ (0,0,0,0, x_5, 2x_5) \mid x_5 \in \mathbb{R} \} = \langle (0,0,0,0,1,2) \rangle$$

E_{λ_2} azpiespazioa bektore ez-nulu bakarrik sortu duenez, $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1$ eta anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2$.

Beraz, $E_{\lambda_2}^2$ azpiespazioa kalkulatu behar da, ondoko sistema askatuz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_2 = 0 \\ -4x_3 - 4x_4 = 0 \\ 16x_3 + 12x_4 = 0 \\ -16x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \forall x_5, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beraz, azpiespazio-kateko bigarren azpiespazioa hauxe da:

$$E_{\lambda_2}^2 = \{ (0,0,0,0, x_5, x_6) \mid x_5, x_6 \in \mathbb{R} \} = \langle (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) \rangle$$

Eta $\dim E_{\lambda_2}^2 = 2 = m_a(\lambda_2)$ betetzen denez, $E_{\lambda_2}^2$ azpiespazio-kateko azken azpiespazioa da. Kasu honetan, hauxe da lortu den azpiespazio-katea:

$$E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_2}^2, \text{ non } \dim E_{\lambda_2} = 1 < \dim E_{\lambda_2}^2 = 2$$

Kateko azpiespazioen dimentsioen kendura $\dim E_{\lambda_2}^2 - \dim E_{\lambda_2} = 1$ da. Gainera, kasu honetan Jordan-en oinarrizko bloke bakarra daukagu eta nahikoa izango da $\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}$ bektore bakarra aukeratzea eta bektore horren $(f - \lambda_2 i)$ aplikazioaren bidezko irudia aurkitzea Jordan-en oinarria lortzeko:

$$B_{J_1} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Izan bedi $\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}$ baldintza betetzen duen $\vec{u}_2 = (0,0,0,0,1)$ bektorea. Bektore horren irudia kalkulatu dugu:

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 = (0,0,0,0,-1,-2) \in E_{\lambda_2}$$

Ondorioz, $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako Jordan-en oinarria ondokoa da:

$$B_{J_1} = \{(0,0,0,0,-1,-2), (0,0,0,0,0,1)\}$$

Ondoren, $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako Jordan-en oinarrizko matrize bakarra osatzen da. Horretarako, $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreen f bidezko irudiak kalkulatu behar dira:

$$f(\vec{u}_1) = A \cdot \vec{u}_1$$

Bestalde, $(A - \lambda_2 I)\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)^2 \vec{u}_2$ berdintza daukagu eta $\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2$ betetzen dela kontuan hartuz:

$$(A - \lambda_2 I)\vec{u}_1 = 0 \Rightarrow A\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_1 \Rightarrow f(\vec{u}_1) = \lambda_2 \vec{u}_1$$

$$f(\vec{u}_2) = A \cdot \vec{u}_2$$

Aurreko irudia kalkulatzeko ondoko eragiketak egingo ditugu:

$$\vec{u}_1 = (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = A\vec{u}_2 - \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarrizko matrizea hauxe da:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bukatzeko, Jordan-en oinarri osoa autobalio bakoitzaren oinarrien bildura da:

$$B = B_{J_1} \cup B_{J_2} \cup B_{J_3} \cup B_{J_4}$$

Hau da:

$$B = \{(0,0,0,0,-1,-2), (0,0,0,0,0,1), (0,1,0,0,0,0), (1,0,0,0,0,0), (-2,0,-2,4,0,0), (0,0,1,0,-4,0)\}$$

Jordan-en forma kanonikoa diagonal nagusian autobalio bakoitzari lotutako Jordan-en oinarritzko matrizeak jarritz lortzen da:

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 2} & J_2 & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 1} & J_3 & 0_{1 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & J_4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ berdintza betetzen duen P matrize erregularra Jordan-en oinarritzko bektoreak zutabeka jartzean lortzen den matrizea izanik:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EBATZITAKO GALDERAK

G1. Izan bitez f, p dimentsioko $(E, K, \circ)$ espazio bektorialean definitutako endomorfismoa eta A hari lotutako matrize erregularra. Frogatu ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren, eta egia direnean dagokien autobalioa zehaztu:

- $\vec{v}$ bektorea A matrizearen autobektorea bada, orduan $\vec{v}$ bektorea A^n matrizearen autobektorea da, $n \geq 0$ izanik.
- $\vec{v}$ bektorea A matrizearen autobektorea bada, orduan $\vec{v}$ bektorea A^{-1} matrizearen autobektorea da.

EBAZPENA

- Egia. $\vec{v}$ bektorea A matrizearen autobektorea denez, orduan $\exists \lambda \in K: A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Bestalde, $\vec{v}$ bektorea A^n matrizearen autobektorea izango da $\exists \mu \in K: A^n\vec{v} = \mu\vec{v}$.

Indukzio-metodoa erabilita frogatuko dugu $\vec{v}$ bektorea A^n matrizearen autobektorea dela. Has gaitezen baieztapena $n = 2$ baliorako egia dela frogatuz. $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ berdintzatik abiatuz eta berdintza horren alde biak A matrizeaz biderkatuz, zera daukagu:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A \cdot (A\vec{v}) = A \cdot (\lambda\vec{v}) \Rightarrow A^2\vec{v} = \lambda(A\vec{v})$$

$\vec{v}$ A matrizearen autobektorea dela kontuan hartuz, zera daukagu:

$$A^2\vec{v} = \lambda \underbrace{(A\vec{v})}_{\lambda\vec{v}} \Rightarrow A^2\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$$

Beraz, $\vec{v}$ bektorea A^2 matrizearen autobektorea da eta λ^2 da berari dagokion autobalioa.

Suposa dezagun $\vec{v}$ bektorea A^{n-1} matrizearen autobektorea dela eta λ^{n-1} dela berari dagokion autobalioa, hau da, $A^{n-1}\vec{v} = \lambda^{n-1}\vec{v}$. Frogapena bukatzeko, $\vec{v}$ bektorea A^n matrizearen autobektorea dela frogatzea geratzen zaigu:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A^{n-1} \cdot (A\vec{v}) = A^{n-1} \cdot (\lambda\vec{v}) \Rightarrow A^n\vec{v} = \lambda \underbrace{(A^{n-1}\vec{v})}_{\lambda^{n-1}\vec{v}} \Rightarrow A^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$$

Beraz, frogatuta geratzen da $\vec{v}$ bektorea A^n matrizearen autobektorea dela eta λ^n berari dagokion autobalioa izanik.

b) Egia. $\vec{v}$ bektorea A matrizearen autobektorea denez, orduan $\exists \lambda \in K: A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

$\vec{v}$ bektorea A^{-1} matrizearen autobektorea izango da, $\exists \mu \in K: A^{-1}\vec{v} = \mu\vec{v}$ betetzen bada.

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ berdintzatik abiatuz eta berdintza horren alde biak A^{-1} matrizeaz biderkatuz, zera daukagu:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A^{-1} \cdot (A\vec{v}) = A^{-1} \cdot (\lambda\vec{v}) \Rightarrow I\vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v}) \Rightarrow \vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v})$$

Kasu hauek bereizi beharra dago:

- $\lambda \neq 0$ denean, existitzen da K gorputzean bere elementu simetrikoa $\frac{1}{\lambda} \in K$. Ondorioz,

azken berdintza honela geratzen da:

$$\vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v}) \Rightarrow A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$$

Hau da, $\exists \mu = \frac{1}{\lambda} \in K: A^{-1}\vec{v} = \mu\vec{v}$, eta, beraz, $\vec{v}$ bektorea A^{-1} matrizearen autobektorea da, $\mu = \frac{1}{\lambda}$ berari lotutako autobalioa izanik.

- $\lambda = 0$ denean, bere elementu simetrikoa ez denez existitzen, ezingo genioke aurreko prozesuari jarraitu. Baina, $\lambda = 0$ denean, eta $\vec{v}$ bektorea A matrizearen autobektorea denez, $A\vec{v} = \vec{0}$ betekoa da eta, beraz, $\langle \vec{v} \rangle \in \text{Ker}(f)$ eta $\dim \text{Ker}(f) \geq 1$ da. Bestalde, $\dim E = p$ eta $h(A) = \dim \text{Im}(f) = p$ direnez:

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Ker}(f) = 0$$

Azken berdintza $\dim \text{Ker}(f) \geq 1$ desberdintzarekin kontraesanean dagoenez, ezinezkoa da $\lambda = 0$ kasua ematea.

G2. Izan bitez $f(E, K, \circ)$ espazio bektorialean definitutako endomorfismoa eta $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ linealki independenteak diren bi bektore, beraien autobalioak hurrenez hurren λ_1 eta λ_2 izanik ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Esan ondoko baieztapenak egia diren, eta egia diren kasuetan kalkulatu autobektore bakoitzari lotutako autobalioak.

a) $\vec{w} = 2\vec{u}_1$ bektorea f -ren autobektorea da.

b) $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ bektorea f -ren autobektorea da.

EBAZPENA

- a) Egia. $\vec{u}_1$ bektorea f -ren autobektorea da, λ_1 berari lotutako autobalioa izanik. Orduan, $f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1$ betetzen da. $f(\vec{w})$ balioa kalkulatu dugu f -ren linealtasunaz eta $\vec{u}_1$ bektorea f -ren autobektorea izateaz baliatuz:

$$f(\vec{w}) = f(2\vec{u}_1) = 2f(\vec{u}_1) = 2\lambda_1 \vec{u}_1 \Rightarrow f(\vec{w}) = \mu_1 \vec{u}_1, \text{ non } \mu_1 = 2\lambda_1$$

Beraz, frogatuta geratzen da: $\vec{u}_1$ bektorea f -ren autobektorea bada, λ_1 haren autobalioa izanik, orduan, $\vec{w} = 2\vec{u}_1$ f -ren autobektorea da, $\mu_1 = 2\lambda_1$ haren autobalioa izanik. Prozedura bera erabiliz, $\vec{w} = \alpha \vec{u}_1$ bektorea $\mu_1 = \alpha \lambda_1$ autobaliodun f -ren autobektorea dela frogatu daiteke.

- b) Gezurra. Absurdura eramanez, demagun $\vec{v}$ bektorea f -ren autobektorea dela, hau da, $\mu \in K$ existitzen dela zeinentzat $f(\vec{v}) = \mu \vec{v}$ betetzen den. Hau da:

$$f(\vec{v}) = \mu(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2)$$

f -ren linealtasuna erabiliz eta $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreak f -ren autobalioak direla jakinik, $f(\vec{v})$ balioa kalkulatu dugu:

$$f(\vec{v}) = f(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = 2f(\vec{u}_1) + 3f(\vec{u}_2) = 2\lambda_1 \vec{u}_1 + 3\lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow f(\vec{v}) = 2\lambda_1 \vec{u}_1 + 3\lambda_2 \vec{u}_2$$

$f(\vec{v})$ -rentzat ditugun adierazpen biak berdinduz, zera daukagu:

$$\begin{cases} f(\vec{v}) = \mu(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) \\ f(\vec{v}) = 2\lambda_1 \vec{u}_1 + 3\lambda_2 \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \mu(2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = 2\lambda_1 \vec{u}_1 + 3\lambda_2 \vec{u}_2 \Rightarrow$$

$$2(\mu - \lambda_1)\vec{u}_1 + 3(\mu - \lambda_2)\vec{u}_2 = 0$$

$\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreak linealki independenteak direnez, aurreko berdintzatik zera ondorioztatzen da: $\mu - \lambda_1 = 0$, $\mu - \lambda_2 = 0$. Hau da, $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$. Baina hori absurdua da, λ_1 eta λ_2 autobalioak ezberdinak baitira. Ondorioz, suposatutakoa gezurra da eta $\vec{v}$ ez da f -ren autobektorea.

G3. Esan ondoko baieztapena egia ala gezurra den.

Izan bitez f eta g ($E, K, \circ$) espazio bektorialean definitutako bi endomorfismo eta izan bitez A eta B beraiei lotutako matrizeak. $\vec{v}$ bektorea A eta B matrizeen autobektorea bada, orduan, $\vec{v}$ bektorea $A \cdot B$ matrizearen autobektorea da.

EBAZPENA

Egia. $\vec{v}$ bektorea A matrizearen autobektorea denez, $\exists \lambda \in K: A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Era berdintsu, $\vec{v}$ bektorea B matrizearen autobektorea denez, $\exists \alpha \in K: B\vec{v} = \alpha\vec{v}$.

$\vec{v}$ bektorea $A \cdot B$ matrizearen autobektorea izango da, existitzen bada $\mu \in K: (A \cdot B)\vec{v} = \mu\vec{v}$ betetzen den. $(A \cdot B)\vec{v}$ adierazpena abiapuntutzat hartuz:

$$(A \cdot B)\vec{v} = A \cdot \underbrace{(B\vec{v})}_{\alpha\vec{v}} = A \cdot \alpha\vec{v} = \alpha \cdot \underbrace{A\vec{v}}_{\lambda\vec{v}} = \alpha\lambda\vec{v} \Rightarrow (A \cdot B)\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v}$$

Beraz, existitzen da $\mu = \alpha\lambda \in K: (A \cdot B)\vec{v} = \mu\vec{v}$. Hau da, $\vec{v}$ bektorea $A \cdot B$ matrizearen autobektorea da.

G4. Izan bedi $f: \mathbb{R}^n$ espazioan definitutako endomorfismo diagonalizagarria eta A berari lotutako matrizea. Izan bitez $\lambda_1 = 0$ eta $\lambda_2 = 2$ f -ren autobalioak, beraien anizkoiztasun aljebraikoak $m_a(\lambda_1) = (n-1)$ eta $m_a(\lambda_2) = 1$ izanik. Esan ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren:

a) $\dim \text{Ker} f = n - 1$

b) A matrizea erregularra da.

EBAZPENA

a) Egia. f endomorfismoa diagonalizagarria denez, autobalio bakoitzaren anizkoiztasun aljebraikoak eta geometrikoak bat datoz. Hau da, $\dim E_{\lambda_i} = m_a(\lambda_i)$, $m_a(\lambda_i)$ balioa λ_i autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa izanik.

$\lambda_1 = 0$ denez, $E_{\lambda_1} = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}) = \text{Ker}(f)$ betetzen da, ondorioz, $\dim E_{\lambda_1} = \dim \text{Ker}(f) = n - 1$ daukagu. Beraz, baieztapena frogatuta geratzen da.

b) Gezurra. f diagonalizagarria denez, hurrengoa betetzen da:

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{n-1}(\lambda - \lambda_2) = \lambda^{n-1}(\lambda - 2)$$

Aurreko adierazpenean $\lambda = 0$ ordezkatuz, zera lortzen da:

$$P_f(0) = |A| = 0$$

A matrizearen determinantea nulua denez, A matrizea ez da erregularra.

MATHEMATICA ERABILIZ EBATZITAKO ARIKETAK

M1. Oinarri batean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoari lotutako matrizea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dela

jakinik, kalkulatu f -ren bektore eta balio propioak.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

f matrizeari lotutako A matrizea definituko dugu:

```
a = {{1, 1, 0}, {2, -1, 2}, {0, 1, 1}}; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Haren polinomio karakteristikoa kalkulatu dugu:

```
pol = Det[a - λ * IdentityMatrix[3]]
```

$$-5 + 5\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

$P_f(\lambda) = 0$ ekuazioa askatuz, f endomorfismoaren balio propioak kalkulatu ditugu:

```
sol = Solve[pol == 0]
```

$$\{\{\lambda \rightarrow 1\}, \{\lambda \rightarrow -\sqrt{5}\}, \{\lambda \rightarrow \sqrt{5}\}\}$$

```
λ1 = sol[[1]]
```

$$\{\lambda \rightarrow 1\}$$

```
λ1 = λ /. Flatten[λ1]
```

$$1$$

```
 $\lambda_2 = \text{sol}[[2]]; \lambda_2 = \lambda /. \text{Flatten}[\lambda_2]$ 
```

```
 $-\sqrt{5}$ 
```

```
 $\lambda_3 = \text{sol}[[3]]; \lambda_3 = \lambda /. \text{Flatten}[\lambda_3]$ 
```

```
 $\sqrt{5}$ 
```

$\lambda_1 = 1$ balio propioari dagozkion bektore propioak kalkulatuko dira:

```
 $x = \{x_1, x_2, x_3\};$ 
```

```
 $v1 = \text{Solve}[(a - \lambda_1 * \text{IdentityMatrix}[3]).x == \{0, 0, 0\}]$ 
```

```
 $\{\{x_2 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow -x_3\}\}$ 
```

```
 $v1 = x /. v1[[1]]$ 
```

```
 $\{-x_3, 0, x_3\}$ 
```

```
 $v1 = v1 /. x_3 \rightarrow 1$ 
```

```
 $\{-1, 0, 1\}$ 
```

Ondorioz, $\lambda_1 = 1$ balio propioari lotutako azpiespazio propioa ondokoa da:

$$E_{\lambda_1} = \{(-x_3, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

E_{λ_1} azpiespazioko oinarria bektore bakarrak osatua dago, hau da, haren dimentsioa 1 da:

Era antzekoan, $\lambda_2 = -\sqrt{5}$ balio propioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatuko dugu:

```
 $v2 = \text{Solve}[(a - \lambda_2 * \text{IdentityMatrix}[3]).x == \{0, 0, 0\}]$ 
```

```
 $\{\{x_1 \rightarrow x_3, x_2 \rightarrow -(1 + \sqrt{5}) x_3\}\}$ 
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
```

```
{x3, -(1 + Sqrt[5]) x3, x3}
```

```
v2 = v2 /. x3 -> 1
```

```
{1, -1 - Sqrt[5], 1}
```

$\lambda_2 = -\sqrt{5}$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa ondokoa da:

$$E_{\lambda_2} = \{(z, (-1 - \sqrt{5})z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1 - \sqrt{5}, 1) \rangle$$

Azkenik, $\lambda_3 = +\sqrt{5}$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatu du:

```
v3 = Solve[(a - λ3 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}]
```

```
{ {x1 -> x3, x2 -> -(1 - Sqrt[5]) x3} }
```

```
v3 = x /. v3[[1]]
```

```
{x3, -(1 - Sqrt[5]) x3, x3}
```

```
v3 = v3 /. x3 -> 1
```

```
{1, -1 + Sqrt[5], 1}
```

Ondorioz, $E_{\lambda_3} = \{(z, (-1 + \sqrt{5})z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1 + \sqrt{5}, 1) \rangle$.

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ eta $\vec{v}_3$ autobektoreek $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat osatzen dute. Oinarri horrekiko f aplikazioari lotutako matrizea diagonal da, diagonaleko elementuak autobalioak izanik:

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}]; MatrixForm[d]
```

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

```

$D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen dela ikusiko dugu, P matrizea linealki independenteak diren autobektoreak zutabetzat dituen matrizea izanik:

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
d = Inverse[p].a.p
```

```
True
```

Pausoz pauso D matrize diagonalak lortu arte egindako guztia Mathematica programak eskaintzen dituen aginduen multzoa erabilia ere egin daiteke:

Polinomio karakteristikoa kalkulatzeko:

```
CharacteristicPolynomial[a, λ]
```

$$-5 + 5\lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

Autobalioak kalkulatzeko:

```
Eigenvalues[a]
```

$$\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1\}$$

Autobektoreak kalkulatzeko:

```
Eigenvectors[a]
```

$$\{\{1, -1 - \sqrt{5}, 1\}, \{1, -1 + \sqrt{5}, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$$

Beste agindu hau erabilia, autobalioak eta autobektoreak batera kalkula daitezke:

```
sol = Eigensystem[a]
```

$$\{\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1\}, \{\{1, -1 - \sqrt{5}, 1\}, \{1, -1 + \sqrt{5}, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}\}$$

Eta azkenik, $D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen dela ikusiko dugu:

```
d = DiagonalMatrix[sol[[1]]]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[sol[[2]]]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
d == Inverse[p].a.p
```

```
True
```

M2. Kalkulatu 3×3 ordenako A matrizea, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ eta $\lambda_3 = -2$ autobalioak dituen, eta $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4, 1)$ eta $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$ autobalioei dagozkien autobektoreak izanik.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

Autobalioak eta autobektoreak definituko ditugu. Hauek ezagutzen ditugunez, posible da D matrize diagonal eta P oinarri-aldaketa matrizea kalkulatzeari:

```
 $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -2; \mathbf{v1} = \{1, 2, 1\}; \mathbf{v2} = \{-1, 4, 1\};$   
 $\mathbf{v3} = \{1, -1, -1\};$ 
```

```
d = DiagonalMatrix[{ $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ )]; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$


```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A 3 x 3 ordenako matrize orokorra definitu dugu eta $D = P^{-1}AP$ berdintza erabilia haren elementuak kalkulatu ditugu:

```
a = Array[x, {3, 3}];
```

```
sol = Solve[d == Inverse[p].a.p]
```

```
{ {x[1, 1] → 1, x[1, 2] → -1, x[1, 3] → 4, x[2, 1] → 3,
  x[2, 2] → 2, x[2, 3] → -1, x[3, 1] → 2, x[3, 2] → 1, x[3, 3] → -1} }
```

```
a = a /. sol[[1]]; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A matrizea lortzeko beste era bat zera litzateke, $D = P^{-1}AP$ berdintza erabiliz $A = PDP^{-1}$ askatzea:

```
a = p.d.Inverse[p]; MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

M3. Izan bedi $M = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ matrizea, a, b eta c parametroak errealak izanik, M matrizearen traza 6 dela eta $\vec{v}_1 = (0,0,1)$ eta $\vec{v}_2 = (1,-1,2)$ bektoreak M matrizearen autobektoreak direla jakinik.

- Kalkulatu M matrizea.
- Kalkulatu $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ adierazpenaren balioa, bektore eta balio propioen kontzeptuak erabilia.

EBAZPENA

a)

```
Remove["Global`*"]
```

M matrizea, haren traza eta $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ bektore propioak definituko ditugu:

```
m = {{2, a, 0}, {1, b, 0}, {2, 0, c}}; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 2 & 0 & c \end{pmatrix}$$

```
v1 = {0, 0, 1}; v2 = {1, -1, 2};
```

```
traza = 2 + b + c
```

```
2 + b + c
```

Matrize baten autobalioen eta autobektoreen definizioa erabilita, $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$, ondorengo ekuazioak lortzen dira:

```
sol = Solve[m.v1 == λ1 * v1]
```

```
{{c → λ1}}
```

```
sol = Solve[m.v2 == λ2 * v2]
```

```
{{a → 3 - b, λ2 → -1 + b, c → -2 + b}}
```

Aurreko bi ekuazioak eta trazaren ekuazioa erabilita, eskatzen dizkiguten a, b eta c balioak eta $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ bektoreei dagozkien autobalioak lor daitezke:

```
sol = Solve[{traza == 6, c == λ1, a == 3 - b, λ2 == -1 + b, λ1 == -2 + b},  
{a, b, c, λ1, λ2}]
```

```
{{a → 0, b → 3, c → 1, λ1 → 1, λ2 → 2}}
```

```
a = a /. sol[[1]]; b = b /. sol[[1]]; c = c /. sol[[1]];  $\lambda_1 = \lambda_1 /. sol[[1]]$ ;
 $\lambda_2 = \lambda_2 /. sol[[1]]$ ;
```

```
m; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Matrice baten autobalioen batura trazaren berdina dela kontuan hartuz, matrizearen 3. autobalioa lor daiteke, λ_3 , eta hura erabilita D matrize diagonal:

```
sol = Solve[traza ==  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $\lambda_3$ ]
```

```
{ $\{\lambda_3 \rightarrow 3\}$ }
```

```
 $\lambda_3 = \lambda_3 /. sol[[1]]$ 
```

```
3
```

```
d = DiagonalMatrix[{ $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ }] ; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice baten autobalio eta autobektore izateko baldintza erabilita, λ_3 autobalioari dagokion autobektorea eta P matrize erregularra lor daitezke:

```
v3 = {x, y, z}; sol = Solve[m.v3 ==  $\lambda_3 * v3$ ]
```

```
{ $\{x \rightarrow 0, z \rightarrow 0\}$ }
```

```
v3 = v3 /. sol[[1]]
```

```
{0, y, 0}
```

```
v3 = v3 /. y -> 1
```

```
{0, 1, 0}
```

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}]; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eskatutako $3M^3 - 7M^2 + 2M - I$ adierazpena lortzeko $M^n = PD^nP^{-1}$ adierazpena erabiliko dugu:

```
exp = p.(3 d.d.d - 7 d.d + 2 d - IdentityMatrix[3]).Inverse[p];  
MatrixForm[exp]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 24 & 23 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Zuzenean adierazpena erabiliz aurreko pausoan lortu dugun emaitza bera lortzen dela ziurta daiteke:

```
exp == 3 MatrixPower[m, 3] - 7 MatrixPower[m, 2] + 2 m - IdentityMatrix[3]
```

```
True
```

M4. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ berari lotutako matrizea.

Kalkulatu a parametroaren balioak A matrizea diagonalizagarria izan dadin eta diagonalizatu posible den kasuetan.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

M matrizea definituko dugu eta haren autobalioak kalkulatu ditugu:

```
m = {{a, 0, -1}, {0, -1, a}, {0, a, -1}}; MatrixForm[m]
```

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

```
sol = Eigenvalues[m]
```

```
{-1 - a, -1 + a, a}
```

```
 $\lambda_1 = -1 - a; \lambda_2 = -1 + a; \lambda_3 = a;$ 
```

a parametroak hartzen dituen balioen arabera, erro hauek sinpleak edo anizkoitzak izango dira eta kasu ezberdinak izango ditugu aztergai. Horretarako, autobalioak a parametroaren zein baliotarako berdinak diren kalkulatu dugu:

```
Solve[ $\lambda_1 == \lambda_2$ ]
```

```
{{a → 0}}
```

```
Solve[ $\lambda_1 == \lambda_3$ ]
```

```
{{a →  $-\frac{1}{2}$ }}
```

```
Solve[ $\lambda_2 == \lambda_3$ ]
```

```
{}
```

1. kasua: $a \neq 0$ eta $a \neq -\frac{1}{2}$. Kasu honetan hiru autobalio ezberdin lortzen dira, bakoitzaren anizkoiztasun aljebraikoa 1 izanik. Autobalio horien azpiespazio propioak eta beraien dimentsioak (edo anizkoiztasun geometrikoak) kalkulatu dira:

$\lambda_1 = -1 - a$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa:

```
x = {x1, x2, x3};
```

```
v1 = Solve[(m - (-1 - a) * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x1 →  $-\frac{x3}{-1 - 2a}$ , x2 →  $-x3$ }}
```

```
v1 = x /. v1[[1]]
```

```
{-x^3 / (-1 - 2 a), -x^3, x^3}
```

```
v1 = v1 /. x^3 -> 1 + 2 a // Simplify
```

```
{1, -1 - 2 a, 1 + 2 a}
```

$\lambda_1 = -1 - a$ autobalioari lotutako azpiespazioa hurrengoa da:

$E_{\lambda_3} = \{(x, -(2a+1)x, (2a+1)x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -(2a+1), 2a+1) \rangle$, non $m_g(\lambda_3) = 1$ den.

$\lambda_2 = -1 + a$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa:

```
v2 = Solve[(m - (-1 + a) * IdentityMatrix[3]) . x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x1 -> x3, x2 -> x3}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
```

```
{x3, x3, x3}
```

```
v2 = v2 /. x3 -> 1 // Simplify
```

```
{1, 1, 1}
```

$E_{\lambda_2} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$ da, non $m_g(\lambda_2) = 1$ den.

Azkenik, $\lambda_3 = a$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

```
v3 = Solve[(m - a * IdentityMatrix[3]) . x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{{x2 -> 0, x3 -> 0}}
```

```
v3 = x /. v3[[1]]
```

```
{x1, 0, 0}
```

```
v3 = v3 /. x1 -> 1 // Simplify
{1, 0, 0}
```

$E_{\lambda_3} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ da, non $m_g(\lambda_1) = 1$ den.

Lortu diren azpiespazio propioen dimentsioa 1 da eta anizkoitzasun aljebraikoaren berdina denez, lehenengo kasu honetan, M matrizea diagonalizagarria da, D eta P ondorengo matrizeak izanik:

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ3}] ; MatrixForm[d]

$$\begin{pmatrix} -1-a & 0 & 0 \\ 0 & -1+a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

```

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}] ; MatrixForm[p]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1-2a & 1 & 0 \\ 1+2a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Ikus dezagun ea $D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen den:

```
d == Inverse[p].m.p // Simplify
True
```

2. kasua: $a = 0$ denean, bi autobalio ezberdin lortzen dira:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, & \text{non } m_a(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = -1, & \text{non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

Kalkula ditzagun autobalio bakoitzaren azpiespazio propioak, anizkoitzasun aljebraikoa eta geometrikoa bat datozen ikusteko:

```
m1 = m /. a -> 0 ; λ1 = 0 ; λ2 = -1 ; x = {x1, x2, x3} ;
```

$\lambda_1 = 0$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

```
v1 = Solve[(m1 - λ1 * IdentityMatrix[3]) . x == {0, 0, 0}, x]
{{x2 -> 0, x3 -> 0}}
```

```
v1 = x /. v1[[1]]
{x1, 0, 0}
```

```
v1 = v1 /. x1 -> 1 // Simplify
{1, 0, 0}
```

Ondorioz, $E_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$ da, non $m_g(\lambda_1) = 1$ den.

Era berean $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

```
v2 = Solve[(m1 - λ2 * IdentityMatrix[3]) . x == {0, 0, 0}, x]
{{x1 -> x3}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
{x3, x2, x3}
```

```
v21 = v2 /. {x2 -> 1, x3 -> 0}
{0, 1, 0}
```

```
v22 = v2 /. {x2 -> 0, x3 -> 1}
{1, 0, 1}
```

Beraz, $E_{\lambda_2} = \{(z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$, non $m_g(\lambda_2) = 2$ den.

Autobalio bakoitzaren anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa bat datozenez, M matrizea diagonalizagarria da, D eta P ondorengo matrizeak izanik:

```
d = DiagonalMatrix[{λ1, λ2, λ2}] ; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[{v1, v21, v22}] ; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ikus dezagun $D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen den:

```
d == Inverse[p].m1.p // Simplify
```

```
True
```

3. kasua: $a = -\frac{1}{2}$ denean, bi autobalio ezberdin lortzen dira:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3/2, \text{non } m_a(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = -1/2, \text{non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

Ikus dezagun autobalio bakoitzaren anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa bat datozen:

```
m2 = m /. a -> -1/2 ; λ1 = -3/2 ; λ2 = -1/2 ; x = {x1, x2, x3} ;
```

$\lambda_1 = -3/2$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

```
v1 = Solve[(m2 - λ1 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
```

```
{ {x1 -> x3, x2 -> x3} }
```

```
v1 = x /. v1[[1]]
```

```
{x3, x3, x3}
```

```
v1 = v1 /. x3 -> 1 // Simplify
```

```
{1, 1, 1}
```

Beraz, $E_{\lambda_1} = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$, non $m_g(\lambda_1) = 1$ den.

Era berean, $\lambda_2 = -1/2$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

```
v2 = Solve[(m2 - λ2 * IdentityMatrix[3]).x == {0, 0, 0}, x]
{{x2 → 0, x3 → 0}}
```

```
v2 = x /. v2[[1]]
{x1, 0, 0}
```

```
v2 = v2 /. x1 → 1
{1, 0, 0}
```

λ_2 autobalioari dagokion azpiespazio propioa hau da:

$$E_{\lambda_2} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle, \text{ non } m_g(\lambda_2) = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2 \text{ izanik.}$$

Beraz, kasu honetan M matrizea ez da diagonalizagarria.

M5. Izan bedi $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ berari lotutako matrizea. Kalkulatu f -rekiko matrizea diagonal egingo duen oinarri ortonormal bat.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

A matrizea definituko dugu eta haren autobalioak eta autobektoreak kalkulatu ditugu:

```
a = {{1, -1, 0}, {-1, 2, -1}, {0, -1, 1}}; MatrixForm[a]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
Eigenvalues[a]
```

```
{3, 1, 0}
```

```
sol = Eigenvectors[a]
```

```
{{1, -2, 1}, {-1, 0, 1}, {1, 1, 1}}
```

Balio propioak honakoak dira:

```
 $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 0;$ 
```

Balio propioei lotutako bektoreak ondokoak izanik:

```
v1 = sol[[1]]
```

```
{1, -2, 1}
```

```
v2 = sol[[2]]
```

```
{-1, 0, 1}
```

```
v3 = sol[[3]]
```

```
{1, 1, 1}
```

Ondorioz, D matrize diagonal eta P matrize erregularra ondorengoak dira eta $D = P^{-1}AP$ berdintza betetzen dute:

```
d = DiagonalMatrix[{ $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ }] ; MatrixForm[d]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
p = Transpose[{v1, v2, v3}] ; MatrixForm[p]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bektore propioak $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri bat osatzen dute, oinarri horrekiko f aplikazioari lotutako matrizea D diagonal izanik. Oinarri ortonormal bat lortzeko, bektoreak binaka ortogonalak eta unitarioak diren ikusi behar da:

```
v1.v2 == 0
```

```
True
```

```
v1.v3 == 0
```

```
True
```

```
v2.v3 == 0
```

```
True
```

Bektore propioek osatzen duten oinarria ortogonal da, oinarria bektore propioz osatua baitago eta horietako bakoitza autobalio bati lotuta baitago. Hala eta guzti, oinarri hori ez da ortonormala, bektoreak ez baitira unitarioak. Bektoreak normalizatuko ditugu:

```
u1 = Normalize[v1]
```

```
 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$ 
```

```
u2 = Normalize[v2]
```

```
 $\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ 
```

```
u3 = Normalize[v3]
```

```
 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ 
```

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ bektoreek $\mathbb{R}^3$ -ren oinarri ortonormal bat osatzen dute, oinarri horrekiko f aplikazioari lotutako matrizea D diagonal izanik eta $D = P^t A P$ berdintza betetzen delarik:

```
q = Transpose[{u1, u2, u3}]; MatrixForm[q]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

```
d = Transpose[q].a.q
```

```
True
```

M6. Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordan-en forma

kanonikoa.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

A matrizea definituko dugu:

```
A = {{1, 1, 0, -2, -2, 2}, {0, 0, 0, 1, 1, -1}, {0, 2, -1, -2, -1, 3},  
      {0, -1, 0, 2, 0, -3}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, -1}};  
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomio karakteristikoa eta autobalioak lortuko ditugu:

```
pol = CharacteristicPolynomial[A, x] // Factor
```

```
(-1 + x)^4 (1 + x)^2
```

```
Solve[pol == 0, x]
```

```
{{x -> -1}, {x -> -1}, {x -> 1}, {x -> 1}, {x -> 1}, {x -> 1}}
```

Beraz, hauek dira A matrizearen autobalioak eta beraien anizkoiztasun aljebraikoak:

$$(\lambda - 1)^4(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \text{ non } m_a(\lambda_1) = 4 \\ \lambda_2 = -1, \text{ non } m_a(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

- $\lambda_1 = 1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_1) = 4$ da. Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko da:

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
 $\lambda_1 = 1;$ 
```

```
sol = Solve[(A -  $\lambda_1$  IdentityMatrix[6]).x == {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
```

```
{{x2 -> 0, x4 -> 0, x6 -> 0, x5 -> 0, x3 -> 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
```

```
{x1, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa hau da:

$$E_{\lambda_1} = \{ (x_1, 0, 0, 0, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0) \rangle$$

Anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 1 \neq m_a(\lambda_1) = 4$. Ondorioz, A matrizea ez da diagonalizagarria eta $E_{\lambda_1}^i$ azpiespazio-katea osatuko dugu, azpiespazioaren dimentsioa eta autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa bat etorri arte. Gainera, $m_g(\lambda_1) = \dim E_{\lambda_1} = 1$ betetzen denez, λ_1 autobaliodun Jordan-en oinarritzko bloke bakarra dago.

Azpiespazio-katea osatzen hasiko gara:

$$E_{\lambda_1}^2 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ1 IdentityMatrix[6]), 2].x ==  
  {0, 0, 0, 0, 0, 0}]  
  
{ {x5 → 0, x6 → 0, x2 → x4, x3 → 0} }
```

```
x = x /. sol[[1]]
```

```
{x1, x4, 0, x4, 0, 0}
```

$E_{\lambda_1}^2 = \{ (x_1, x_4, 0, x_4, 0, 0) \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0) \rangle$. Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^2$ azpiespazioa linealki independenteak diren bi bektorek osatzen dute: $\dim E_{\lambda_1}^2 = 2$. Eta azpiespazioaren dimentsioa anizkoiztasun aljebraikoarekin bat ez datorrenez, $\dim E_{\lambda_1}^2 = 2 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, azpiespazio-katea eratzen jarraitu behar da. Hau da, $E_{\lambda_1}^3$ azpiespazioa kalkulatu dugu:

$$E_{\lambda_1}^3 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^3 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^3$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ1 IdentityMatrix[6]), 3].x ==  
  {0, 0, 0, 0, 0, 0}]  
  
{ {x5 → 0, x6 → 0, x2 → x3 + x4} }
```

```
x = x /. sol[[1]]
```

```
{x1, x3 + x4, x3, x4, 0, 0}
```

Beraz, ondokoa lortu dugu:

$$E_{\lambda_1}^3 = \{ (x_1, x_3 + x_4, x_3, x_4, 0, 0) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0) \rangle$$

Kasu honetan, $\dim E_{\lambda_1}^3 = 3$ da. Oraindik ere, azpiespazioaren dimentsioa anizkoiztasun aljebraikoarekin bat ez datorrenez, $\dim E_{\lambda_1}^3 = 3 \neq m_a(\lambda_1) = 4$, azpiespazio-katea eratzen jarraitu behar da.

$E_{\lambda_1}^4$ azpiespazioa kalkulatu dugu:

$$E_{\lambda_1}^4 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_1 I)^4 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^4$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ1 IdentityMatrix[6]), 4].x ==
  {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
{ {x6 -> 0, x2 -> x3 + x4 + x5} }
```

```
x = x /. sol[[1]]
{x1, x3 + x4 + x5, x3, x4, x5, 0}
```

Beraz, zera daukagu:

$$E_{\lambda_1}^4 = \{ (x_1, x_3 + x_4 + x_5, x_3, x_4, x_5, 0) \mid x_1, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$E_{\lambda_1}^4 = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0) \rangle$$

Kasu honetan, $E_{\lambda_1}^4$ azpiespazioa linealki independenteak diren lau bektorek osatzen dute eta $\dim E_{\lambda_1}^4 = 4 = m_a(\lambda_1) = 4$ betetzen da. Beraz, ez dago azpiespazio-katea osatzen jarraitu beharrik.

Laburbilduz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion azpiespazio-katea hau xe da:

$$E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_1}^2 \subset E_{\lambda_1}^3 \subset E_{\lambda_1}^4, \text{ non } \dim E_{\lambda_1} = 1 < \dim E_{\lambda_1}^2 = 2 < \dim E_{\lambda_1}^3 = 3 < \dim E_{\lambda_1}^4 = 4$$

Kontuan izan, $\dim E_{\lambda_1}^{i+1} - \dim E_{\lambda_1}^i = 1$ betetzen dela $\forall i = 1, 2, 3$ balioetarako. Beraz, $E_{\lambda_1}^{i+1} - E_{\lambda_1}^i$ azpiespazio bektorial bakoitzean linealki independentea den bektore bakarra egongo da, $\forall i = 1, 2, 3$ balioetarako. $\lambda_1 = 1$ autobalioari lotutako Jordan-en oinarria $B_{J_2} = \{ \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5, \vec{u}_6 \}$ era honetan osatuko da: $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4 - E_{\lambda_1}^3$ aukeratuko dugu.

Hau da, $\vec{u}_6 \in E_{\lambda_1}^4$ eta $\vec{u}_6 \notin E_{\lambda_1}^3$ den bektore bat aukeratuko dugu. Izan bedi $\vec{u}_6 = (0,1,0,0,1,0)$ baldintza horiek betetzen dituen bektorea. Bektore horren $(f - \lambda_1 i)$ aplikazioarekiko irudi jarraituak kalkulatzeko dira:

```
u6 = {0, 1, 0, 0, 1, 0};
```

```
u5 = (A - λ1 IdentityMatrix[6]) . u6
```

```
{-1, 0, 1, -1, 0, 0}
```

```
u4 = (A - λ1 IdentityMatrix[6]) . u5
```

```
{2, -1, 0, -1, 0, 0}
```

```
u3 = (A - λ1 IdentityMatrix[6]) . u4
```

```
{1, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Ondorioz, $\lambda_1 = 1$ autobalioari dagokion Jordan-en oinarria hurrengoa da:

$$B_{j_2} = \{(1,0,0,0,0), (2, -1, 0, -1, 0, 0), (-1, 0, 1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0)\}$$

Eta ondorioz, Jordan-en oinarritzko matrizea hauxe da:

```
J2 = {{1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 1}};  
MatrixForm[J2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = -1$ autobalioa:

Autobalio honen anizkoiztasun aljebraikoa $m_a(\lambda_2) = 2$ da. Autobalio honi lotutako azpiespazio propioa kalkulatzeko dira:

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
λ2 = -1;
sol = Solve[(A - λ2 IdentityMatrix[6]).x == {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
{{x5 → 0, x2 → 0, x4 → 0, x6 → 0, x1 → 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
{0, 0, x3, 0, 0, 0}
```

Eta $\lambda_2 = -1$ autobalioari lotutako azpiespazio propioa hauxe da:

$$E_{\lambda_2} = \{ (0, 0, x_3, 0, 0, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = \langle (0, 0, 1, 0, 0, 0) \rangle$$

E_{λ_2} azpiespazioa bektore bakarrik sortu duenez, $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1$ eta anizkoiztasun geometrikoa eta aljebraikoa ez datoz bat: $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1 \neq m_a(\lambda_2) = 2$. Gainera, $m_g(\lambda_2) = \dim E_{\lambda_2} = 1$ betetzen denez, λ_2 autobaliodun Jordan-en oinarritzko bloke bakarra dago.

Azpiespazio-katea osatzen hasiko gara:

$$E_{\lambda_2}^2 = \{ \vec{x} \in E : (A - \lambda_2 I)^2 \vec{x} = \vec{0} \} = \text{Ker}(A - \lambda_2 I)^2$$

```
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6};
```

```
sol = Solve[MatrixPower[(A - λ2 IdentityMatrix[6]), 2].x == {0, 0, 0, 0, 0, 0}]
{{x5 → 0, x2 → 0, x4 → x6, x1 → 0}}
```

```
x = x /. sol[[1]]
{0, 0, x3, x6, 0, x6}
```

Beraz, $E_{\lambda_2}^2 = \{ (0, 0, x_3, x_6, 0, x_6) \mid x_3, x_6 \in \mathbb{R} \} = \langle (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 1) \rangle$. Kasu honetan, $E_{\lambda_2}^2$ azpiespazioa linealki independenteak diren bi bektorek osatzen dute eta $\dim E_{\lambda_2}^2 = 2 = m_a(\lambda_2)$ betetzen denez, ez dago azpiespazio-katea osatzen jarraitu beharrik.

Laburbilduz, $\lambda_2 = -1$ autobalioari dagokion azpiespazio-katea hauxe da:

$$E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_2}^2, \text{ non } \dim E_{\lambda_2} = 1 < \dim E_{\lambda_2}^2 = 2$$

$\dim E_{\lambda_2}^2 - \dim E_{\lambda_2} = 1$ betetzen denez, nahikoa da $E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}$ azpiespazio bektorialean bektore ez-nulu bat aukeratzea eta bektore horren $(f - \lambda_2 i)$ aplikazioarekiko irudia kalkulatzeko. $\lambda_2 = -1$ autobalioari dagokion eta Jordan-en bloke bakarrari lotutako Jordan-en oinarriak bi bektore izango ditu $B_{J_1} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ eta era honetan osatuko da:

$\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}$ aukeratuko dugu. Hau da, $\vec{u}_2 \in E_{\lambda_2}^2$ eta $\vec{u}_2 \notin E_{\lambda_2}$ den bektore bat aukeratuko dugu. Izan bedi $\vec{u}_2 = (0,0,0,1,0,1)$ baldintza horiek betetzen dituen bektorea. Bektore horren $(f - \lambda_2 i)$ aplikazioarekiko irudia kalkulatzeko da:

```
u2 = {0, 0, 0, 1, 0, 1};
u1 = (A - λ2 IdentityMatrix[6]).{0, 0, 0, 1, 0, 1}
{0, 0, 1, 0, 0, 0}
```

$\lambda_2 = -1$ autobalioaren Jordan-en oinarria hauxe da:

$$B_{J_1} = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1)\}$$

Eta Jordan-en oinarritzko matrizea hurrengoa da:

```
J1 = {{-1, 1}, {0, -1}}; MatrixForm[J1]

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

Behin autobalio bakoitzari dagozkion Jordan-en oinarriak eta Jordan-en oinarritzko matrizeak kalkulatu ondoren, Jordan-en oinarri osoa eta Jordan-en forma kanonikoa eratzen dira. Jordan-en oinarri osoa autobalio bakoitzaren oinarrien bildura izango da, $B = B_{J_1} \cup B_{J_2}$, hau da:

$$B = \{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,1), (1,0,0,0,0,0), (2, -1,0, -1,0,0), (-1,0,1, -1,0,0), (0,1,0,0,1,0)\}$$

Eta Jordan-en forma kanonikoa diagonal nagusian autobalio bakoitzari lotutako Jordan-en oinarrizko matrizeak jarritz lortzen da:

```
J = {{-1, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 0, 0},
      {0, 0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};
MatrixForm[J]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ berdintza betetzen duen P matrize erregularra Jordan-en oinarriko bektoreak zutabeka jartzean lortzen den matrizea izanik:

```
P = Transpose[{u1, u2, u3, u4, u5, u6}]; MatrixForm[P]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Azkenik, $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ berdintza betetzen dela frogatzen da:

```
J == Inverse[P].A.P
```

```
True
```

Mathematica programak Jordan-en forma kanonikoa lortzeko JordanDecomposition agindua du:

```
Remove["Global`*"]
```

```
a = {{1, 1, 0, -2, -2, 2}, {0, 0, 0, 1, 1, -1}, {0, 2, -1, -2, -1, 3},
      {0, -1, 0, 2, 0, -3}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, -1}};
MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
m = JordanDecomposition[a]
```

```
{{{0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 2, -4}, {1, 0, 0, 0, 1, -2},
   {0, 1, 0, -1, 1, -3}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}},
 {{-1, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 1, 0, 0},
   {0, 0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}}
```

```
j = m[[2]]; MatrixForm[j]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
b = m[[1]]; MatrixForm[b]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Inverse[b].a.b == j
```

```
True
```

Ohartu agindu hau erabiliz lortutako Jordan-en oinarria eta aurrekoa desberdinak direla; izan ere, Jordan-en oinarria ez da bakarra. Era berean, Jordan-en forma kanonikoa aurrean lortutakoaren permutazio bat izan daiteke.

6 ESPAZIO BEKTORIAL EUKLIDEARRA

6.1 Biderketa eskalarra

Izan bedi $((E, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$ espazio bektorial erreal bat. $E \times E$ -tik $\mathbb{R}$ -ra definitutako f aplikazio bati $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreen biderketa eskalarra deritzo $(\vec{x}, \vec{y})$ bektore bikote bakoitzari zenbaki bat egokitzen badio:

$$\begin{aligned} f: E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Biderketa eskalarra $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ notazioa erabilia adieraz daiteke.

f aplikazioak honako propietate hauek betetzen ditu:

- Trukatze-propietatea: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$
- Positiboki definitua:
$$\begin{cases} \forall \vec{x} \in E - \{\vec{0}\}, f(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \\ f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$
- Bilinealtasuna: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ emanik, zera betetzen da:
$$f(\alpha \circ \vec{x} + \beta \circ \vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{z}) + \beta f(\vec{y}, \vec{z})$$

Definizioa. Izan bedi $f: E \times E$ -tik $\mathbb{R}$ -ra definitutako aplikazio bilinear trukakorra eta definitu positiboa, orduan f forma bilinear simetrikoki definitua da.

Definizioa. $((E, +), (\mathbb{R}, +, \cdot), \circ)$ biderketa eskalardun espazio bektorial erreala espazio bektorial euklidea da, forma bilinear simetrikoki definitua definitua badu. $(E, \cdot)$ notazioa erabilia adierazten da, « $\cdot$ » eragiketa E espazioan definitutako biderketa eskalarra izanik.

6.2 Espazio bektorial eukldearretako oinarritzko berdintzak

$(E, \cdot)$ espazio bektorial eukldearrean definituta dagoen biderketa eskalarra honako propietate hauek betetzen ditu:

- i) $\vec{x} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{x} = 0, \forall \vec{x} \in E$
- ii) $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0, \forall \vec{x} \in E \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{0}$
- iii) $(\vec{x} \cdot \vec{y}) \circ \lambda = \vec{x} \cdot (\lambda \circ \vec{y})$
- iv) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

6.3 Biderketa eskalarraren adierazpen matritziala

Izan bedi $(E, \cdot)$ n dimentsioko espazio bektorial euklidearra eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ bere oinarri bat. Orduan, edozein $\vec{x}, \vec{y} \in E$ oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa honela idatz daitezke:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n \\ \vec{y} &= y_1 \vec{u}_1 + y_2 \vec{u}_2 + \dots + y_n \vec{u}_n\end{aligned}$$

Bi bektore horien arteko biderketa eskalarra hauxe da:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n) \cdot (y_1 \vec{u}_1 + y_2 \vec{u}_2 + \dots + y_n \vec{u}_n)$$

Aurreko biderketa eskalarra garatuz, zera daukagu:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &= x_1 y_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + x_1 y_2 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \dots + x_1 y_n \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_n + x_2 y_1 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + x_2 y_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots \\ &\quad + x_2 y_n \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_n + \dots + x_n y_1 \vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 + x_n y_2 \vec{u}_n \cdot \vec{u}_2 + \dots + x_n y_n \vec{u}_n \cdot \vec{u}_n\end{aligned}$$

Biderketa eskalar hori matritzialki adieraz daiteke:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{(\vec{x})_U^t} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_n \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_n \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_n \cdot \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \cdot \vec{u}_n \end{pmatrix}}_{G_U} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{(\vec{y})_U}$$

$$\text{Edo gauza bera dena: } \vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x})_U^t \cdot G_U \cdot (\vec{y})_U$$

G_U matritzea biderketa eskalarraren U oinarriarekiko matritzea da, Gramm-en matrize izenez ere ezagutzen dena.

Oharrak:

- G_U matritzea simetrikoa da:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \vec{u}_j \cdot \vec{u}_i, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

- G_U definitu positiboa da:

$$\begin{cases} (\vec{x})_U G_U (\vec{x})_U^t > 0, & \forall \vec{x} \in E - \{\vec{0}\} \\ (\vec{x})_U G_U (\vec{x})_U^t = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

- G_U matrizeko diagonal nagusiko elementuak positiboak dira:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Teorema. Izan bitez $(E, \cdot)$ n dimentsioko espazio euklidearra eta U eta V E -ko bi oinarri. Biderketa eskalarren matrizeak U eta V oinarrietan honela erlazionatuta daude:

$$G_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U^t \cdot G_U \cdot (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U$$

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)_U$ matrizea oinarri-aldaketa matrizea izanik.

Definizioa. A eta B dimentsio bereko bi matrize kongruenteak dira, H matrize erregularra existitzen bada, zeinentzat $B = H^t \cdot A \cdot H$ berdintza betetzen den.

6.4 Biderketa eskalarrek induzitutako norma

Definizioa. $(E, \cdot)$ espazio bektoriala normaduna dela esaten da, hurrengo baldintzak betetzen dituen $h: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ aplikazioa existitzen bada:

- i) $h(\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in E$
- ii) $h(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- iii) $h(\lambda \vec{x}) = |\lambda| h(\vec{x}), \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- iv) $h(\vec{x} + \vec{y}) \leq h(\vec{x}) + h(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

Definizioa. Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearra. Biderketa eskalarren lotutako norma $h: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ aplikazio bat da, $\|\cdot\|$ notazioa erabiltza adieraziko duguna eta honela emana dagoena:

$$\begin{aligned} h: E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} &\rightarrow \|\vec{x}\| = +\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

Normaren propietateak:

- i) $\|\vec{x}\| \geq 0, \forall \vec{x} \in E$
- ii) $\|\vec{x}\| = 0$, baldin eta soilik baldin, $\vec{x} = \vec{0}$

iii) $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, orduan: $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$

Definizioa. $\vec{x} \in E$ bektorearen luzera bere norma da: $\|\vec{x}\|$.

Definizioa. $\vec{x}, \vec{y} \in E$ bi bektoreen arteko distantzia, $\vec{x} - \vec{y}$ bektorearen luzera da: $\|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Definizioa. $\vec{x}, \vec{y} \in E$ bi bektore ez-nuluk osatzen duten θ angelua era honetan kalkulatzen da:

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right)$$

6.5 Ortogonalitatea eta ortonormalitatea

Definizioa. $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidear bateko $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ bektoreak ortogonalak dira beraien arteko biderketa eskalarra nulua denean: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Definizioa. $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidear bateko $\vec{x}$ bektorea normala edo unitarioa da, $\|\vec{x}\| = 1$ betetzen bada.

Proposizioa. $\vec{x} \in E - \{\vec{0}\}$ emanik, $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ bektorea normala da. Prozesu honi $\vec{x}$ bektorearen normalizazioa deritzo.

Definizioa. $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidear bateko $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema ortogonal da, sistemako bektore guztiak binaka ortogonalak badira:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j \text{ izanik}$$

Teorema. Bektore nulua barnean ez duen edozein sistema ortogonal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ askea da. Aurkakoa ez da egia, hau da, sistema aske bat ez da zertan ortogonal izan.

Definizioa. $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidear bateko $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema ortonormala da, ortogonal baldin bada eta bektore guztiak unitarioak baldin badira.

Proposizioa. $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ sistema ortogonal bada, orduan $\left\{ \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \dots, \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|} \right\}$ sistema ere ortogonal da. Are gehiago, $\left\{ \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \dots, \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|} \right\}$ sistema ortonormala da.

6.6 Gram-Schmidt-en metodoa

n dimentsioko $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearrean posible da oinarri ortonormal bat aurkitzea. Gram-Schmidt-en metodoak ahalbidetzen du E espazioko edozein $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ oinarritatik abiatuz E espazioko oinarri ortonormal bat lortzea.

Izan bedi $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ E espazio euklidearrean aurkitu nahi dugun oinarri ortonormala. Oinarri horretako $\vec{v}_i$ bektore bakoitza lortzeko jarraitu beharreko prozesua hauxe da:

$\vec{v}_1$ bektore unitarioa era honetan kalkulatzen da: $\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$

Ondoren, $\vec{w}_2$ bektore bat ondoko eran sortzen da: $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1$. Bertan, λ -ren balioa zehaztuko dugu $\vec{w}_2$ eta $\vec{v}_1$ bektoreak ortogonalak izateko:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{v}_1 \cdot (\vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1) = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

λ -ren balioa $\vec{w}_2$ bektorearen adierazpenean ordezkatzuz, hauxe daukagu:

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1 = \vec{u}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2) \vec{v}_1$$

$\vec{w}_2$ bektorea ez da nulua, zeren nulua izango balitz, $\vec{v}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreak, hortaz $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreak linealki dependenteak izango bailirateke, eta badakigu linealki independenteak direna, U sistema askea baita. $\vec{w}_2$ bektorea normalizatuko dugu:

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

Beraz, momentuz $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ sistema ortonormala daukagu. Eta $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ bektoreak $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreen konbinazio lineala direnez, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bektoreek sortzen duten azpiespazio bektoriala $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ bektoreek osatzen duten azpiespazio bektorialaren parte da:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \subseteq \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$$

Bestalde, aurreko bi azpiespazio bektorialek dimentsio bera dutela kontuan izanez, ondoko berdintza betetzen da:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$$

Ondoren, $\vec{w}_3$ bektorea definituko dugu, honela: $\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$ eta μ_1 eta μ_2 -ren balioak zehaztuko ditugu $\vec{w}_3$ bektorea $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ bektoreekiko ortogonalak izateko eran:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_3 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3 + \mu_1 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3 + \mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3) \\ \mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3) \end{cases}$$

Beraz, $\vec{w}_3$ bektorea hau da:

$$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3)\vec{v}_1 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3)\vec{v}_2$$

Bektore hori ez da nulua, nulua izango balitz $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ eta $\vec{u}_3$ bektoreen artean menpekotasun linealeko erlazio bat existituko litzateke eta. Eta $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \subseteq \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ betetzen dela kontuan hartuz, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3 \rangle \subseteq \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ izango genuke, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ bektoreak linealki independenteak liratekeela ondorioztatuz, eta hori ez da egia.

$\vec{w}_3$ bektorea normalizatuko dugu: $\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$

Eta aurreko kasuan bezala arrazoituz, ondoko berdintza betetzen dela frogatu daiteke: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$.

Prozesuari jarraituz, E espazio bektorialeko $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ oinarri ortonormal bat lortzen da.

6.7 Azpiespazio bektorial ortogonalak

Definizioa. Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearra eta S_1 eta S_2 E espazio bektorial euklidearreko azpiespazio bektorialak. S_1 eta S_2 azpiespazioak ortogonalak dira, S_1 azpiespazioko edozein bektore S_2 -ko edozein bektorearekiko ortogonalak bada. Hau da:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} = 0, \forall \vec{x} \in S_1, \forall \vec{y} \in S_2$$

Proposizioa. Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearra, S_1 eta S_2 E -ko bi azpiespazio bektorial eta $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ beraien oinarriak hurrenez hurren. S_1 eta S_2 azpiespazioak ortogonalak dira, baldin eta soilik baldin:

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, p$$

Proposizioa. Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearra eta S_1 eta S_2 E espazio bektorial euklidearreko bi azpiespazio bektorial ortogonal, orduan: $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

Proposizioa. Izan bitez $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearra eta F bere azpiespazio bektorial bat. F -ko bektoreekiko ortogonalak diren bektoreek E -ren azpiespazio bektorial bat osatzen dute eta $F^\perp$ notazioaren bidez adieraziko dugu:

$$F^\perp = \{\vec{x} \in E : \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in F\}$$

Teorema. Izan bitez F eta G E espazioko bi azpiespazio bektorial. Orduan, ondoko propietateak betetzen dira:

$$\text{i)} \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$$\text{ii)} \quad (F^\perp)^\perp = F$$

$$\text{iii)} \quad F \subseteq G \Rightarrow G^\perp \subseteq F^\perp$$

$$\text{iv)} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Teorema. Izan bedi $(E, \cdot)$ espazio bektorial euklidearra eta F bere azpiespazio bektorial bat. Orduan, $E = F \oplus F^\perp$ berdintza betetzen da. Hau da:

$$\text{i)} \quad F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$$

$$\text{ii)} \quad E = F + F^\perp$$

EBATZITAKO ARIKETAK

P1. Izan bedi $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ espazio euklidearra eta $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bektorea. Esan ea ondoko funtzioak espazio bektorial horretako biderketa eskalarrari lotutako normak diren ala ez.

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

b) $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}$

EBAZPENA

Definitutako funtzioak normak izango dira, ondoko baldintzak betetzen badira:

i) $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

ii) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

iii) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, zera betetzen da: $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ funtzioa norma den ikusteko, aurreko baldintzak ea betetzen diren ikusi beharra dago:

i) Lehenengo baldintza betetzen da:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

ii) Bigarren baldintza betetzen den ikusiko dugu. Batugai guztiek $x_i^2 \geq 0$ baldintza hau betetzen dutenez, orduan:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \Rightarrow x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

iii) Hirugarren baldintza ere bete egiten dela frogatuko dugu:

$$\begin{aligned} \|\lambda \vec{u}\| &= \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\lambda| \|\vec{u}\|, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Emandako funtzioak hiru baldintzak betetzen dituenez, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ norma bat da, norma euklidearra deitua.

b) $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ funtzioak norma izateko baldintzak ea betetzen dituen ikusiko dugu:

i) Lehenengo baldintza betetzen da:

$$\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

ii) Bigarren baldintza ere betetzen da. Batugai guztiek $|x_i| \geq 0$ baldintza betetzen dutenez:

$$\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 0 \Rightarrow x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

iii) Eta hirugarren baldintza ere bete egiten da:

$$\begin{aligned} \|\lambda \vec{u}\| &= \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\| = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \dots + |\lambda x_n| = |\lambda|(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \\ &= |\lambda| \|\vec{u}\|, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beraz, $\|\vec{u}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ funtzioak norma bat definitzen du.

c) Azkenik, $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}$ funtzioak ea norma izateko bete beharreko baldintzak betetzen dituen ikusiko dugu:

i) Lehenengo baldintza betetzen da:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|} \geq 0, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$

ii) Bigarren baldintza ere betetzen da:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|} = 0 \Rightarrow x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

iii) Baina hirugarren baldintza ez da betetzen:

$$\begin{aligned} \|\lambda \vec{u}\| &= \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\| = \sqrt{|\lambda x_1| + |\lambda x_2| + \dots + |\lambda x_n|} = \sqrt{|\lambda|(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)} \\ &= \sqrt{|\lambda|} \sqrt{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|} = \sqrt{|\lambda|} \|\vec{u}\| \neq |\lambda| \|\vec{u}\|, \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eta baldintzetako bat betetzen ez duenez, $\|\vec{u}\| = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|}$ funtzioak ez du norma bat definitzen.

P2. Izan bedi $\mathbb{P}_1(x)$ bat edo maila txikiagoko polinomioek osatzen duten espazio bektoriala, hau da: $p(x) = ax + b$, non $a, b \in \mathbb{R}$, eta izan bedi $f: \mathbb{P}_1(x) \times \mathbb{P}_1(x) \rightarrow \mathbb{R}$, non $f(p_1(x), p_2(x)) = \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x) dx$.

- Frogatu f biderketa eskalarra dela.
- Zein angelu osatzen dute $p(x) = x + 2$ eta $q(x) = 3x + 1$ polinomioek?

EBAZPENA

- f aplikazioa biderketa eskalarra izango da, ondoko propietateak betetzen baditu:

- Trukatze-propietatea:

$$\forall p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{P}_1(x), f(p_1(x), p_2(x)) = f(p_2(x), p_1(x))$$

Goiko berdintza frogatzeko aski da polinomioen biderketa trukakorra dela erabiltzea:

$$f(p_1(x), p_2(x)) = \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x) dx = \int_0^1 p_2(x) \cdot p_1(x) dx = f(p_2(x), p_1(x))$$

- Funtzioak definitu positiboa izan behar du:

$$\begin{cases} \forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x) - \{0\}, f(p(x), p(x)) > 0 \\ f(p(x), p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \end{cases}$$

$\forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x) - \{0\}, f(p(x), p(x)) > 0$ baldintza betetzen dela frogatu behar da.

$\forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x) - \{0\}$ polinomioa hartuta zera betetzen da:

$$f(p(x), p(x)) = \int_0^1 p(x) \cdot p(x) dx = \int_0^1 p^2(x) dx$$

Integral mugatuaren propietateak erabilita zera daukagu:

$$g(x) > 0, x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 g(x) dx > 0$$

Gure kasuan zera gertatzen da: $\forall p(x) \in \mathbb{P}_1(x) - \{0\}, p^2(x) > 0, x \in \mathbb{R}$. Eta integral

mugatuaren propietateak erabiliz zera daukagu:

$$p^2(x) > 0, x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 p^2(x) dx > 0$$

Orain, $f(p(x), p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$ baldintza betetzen dela egiaztatuko dugu:

$$f(p(x), p(x)) = \int_0^1 p(x) \cdot p(x) dx = \int_0^1 p^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow p^2(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$$

Horrela, aurreko bi baldintzak frogatuta f funtzioa definitu positiboa dela ondorioztatzen da.

- iii) Azkenik, f aplikazioak bilineala izan behar du. Bilineala izango da, ondoko baldintza betetzen badu:

$$f(\alpha \circ p_1(x) + \beta \circ p_2(x), p_3(x)) = \alpha f(p_1(x), p_3(x)) + \beta f(p_2(x), p_3(x)),$$

$$\forall p_1(x), p_2(x), p_3(x) \in \mathbb{P}_1(x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Kasu honetan, « $\circ$ » kanpo-konposaketa legea, polinomio eta eskalarren arteko biderketa da. Aurreko berdintzako ezker aldea garatuz hasiko gara:

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot p_1(x) + \beta \cdot p_2(x), p_3(x)) &= \int_0^1 (\alpha \cdot p_1(x) + \beta \cdot p_2(x)) \cdot p_3(x) dx \\ &= \int_0^1 \alpha \cdot p_1(x) \cdot p_3(x) dx + \int_0^1 \beta \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) dx \\ &= \alpha \int_0^1 p_1(x) \cdot p_3(x) dx + \beta \int_0^1 p_2(x) \cdot p_3(x) dx \\ &= \alpha f(p_1(x), p_3(x)) + \beta f(p_2(x), p_3(x)) \end{aligned}$$

Beraz, f aplikazioa bilineala ere bada. Biderketa eskalarra izateko baldintza guztiak betetzen dituzenez, f aplikazioa biderketa eskalarra da.

- b) $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_1(x)$ polinomio ez-nuluek osatzen duten angelua ondoko adierazpenaren bidez kalkula daiteke:

$$\cos \theta = \frac{p(x) \cdot q(x)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{p(x) \cdot q(x)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|} \right)$$

$p(x)$ eta $q(x)$ polinomioen biderketa eskalarra kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx = \int_0^1 (x+2) \cdot (3x+1) dx = \int_0^1 (3x^2 + 7x + 2) dx \\ &= x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x \Big|_0^1 = 1 + \frac{7}{2} + 2 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Era berean, $p(x)$ eta $q(x)$ polinomioen normak kalkulatu ditugu:

$$\begin{aligned} \|p(x)\| &= \sqrt{p(x) \cdot p(x)} = \sqrt{\int_0^1 p(x) \cdot p(x) dx} = \sqrt{\int_0^1 (x+2) \cdot (x+2) dx} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (x^2 + 4x + 4) dx} = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{3} + 2 + 4} = \sqrt{\frac{19}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|q(x)\| &= +\sqrt{q(x) \cdot q(x)} = \sqrt{\int_0^1 q(x) \cdot q(x) dx} = \sqrt{\int_0^1 (3x+1) \cdot (3x+1) dx} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (9x^2 + 6x + 1) dx} = \sqrt{3x^3 + 3x^2 + x|_0^1} = \sqrt{3 + 3 + 1} = \sqrt{7}\end{aligned}$$

Beraz, bi polinomioek osatzen duten angelua hauxe da:

$$\cos \theta = \frac{p(x) \cdot q(x)}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|} = \frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \sqrt{7}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\frac{13}{2}}{\sqrt{\frac{19}{3}} \cdot \sqrt{7}}\right) = 12,53^\circ$$

P3. Izan bitez f eta g hurrenez hurren $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ -n definitutako bi forma bilineal eta izan bitez F eta G oinarri kanonikoarekiko beraiei lotutako matrizeak. Esan ea ondoko baieztapenak egiak diren ala ez:

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak biderketa eskalar bat definitzen du.

b) $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeak biderketa eskalar bat definitzen du.

EBAZPENA

a) Gezurra. F matrizeak biderketa eskalarra definituko du, simetrikoa eta definitu positiboa denean. F matrizea simetrikoa da; izan ere, $F = F^t$ betetzen da.

F definitu positiboa izango da, edozein $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ bektorearentzat $\vec{v}F\vec{v}^t \geq 0$ betetzen bada:

$$\begin{aligned}\vec{v}F\vec{v}^t &= (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - 2y, -2x + y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 4xy \\ &= (x - y)^2 - 2xy\end{aligned}$$

$\vec{v}F\vec{v}^t \geq 0$ baldintza ez dela betetzen agerikoa da, $\vec{v} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ bektorea kontsideratuz zera baitauekagu:

$$\vec{v}F\vec{v}^t = (x - y)^2 - 2xy = -2 < 0$$

Beraz, F matrizeak ez du biderketa eskalar bat definitzen.

- b) Gezurra. G matrizeak biderketa eskalarra definituko du, simetrikoa eta definitu positiboa denean. $G \neq G^t$ denez, G matrizea ez da simetrikoa eta, beraz, ezin du biderketa eskalarrik definitu.

P4. $\mathbb{R}^n$ espazio euklidearrean $\|\cdot\|$ norma euklidearra kontsideratuz frogatu ondoko berdintzak:

- a) Paralelogramoaren legea: $2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$
- b) $4\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$
- c) Desberdintza triangeluarra: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$, Cauchy Schwartz-en desberdintza erabilita: $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

EBAZPENA

- a) Izan bitez $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ espazioan era honetan definitzen dira norma euklidearra eta bi bektoreen arteko biderketa eskalarra:

o Norma euklidearra: $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

o Biderketa eskalarra: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Paralelogramoaren legea frogatu behar dugu:

$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$$

Aurreko berdintzako ezker aldea garatuko dugu:

$$2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

Eta eskuineko aldea ere garatuko dugu ondoko berdintzak kontuan izanez:

$$\begin{cases} \|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \\ \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \end{cases}$$

Eta ondoren eragiketak eginez:

$$\begin{aligned} & \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \\ &= [(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2] + [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2] \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \end{aligned}$$

Frogatuta geratu da paralelogramoaren legeko ezker eta eskuin aldeak berdinak direla, beraz, berdintza frogatu da.

- b) Izan bitez $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ bektoreak. Frogatu beharreko berdintzako ezker aldea hurrengo da:

$$4\vec{x} \cdot \vec{y} = 4(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)$$

Eta eskuin aldea garatuz zera lortzen da:

$$\begin{aligned} & \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \\ &= [(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2] - [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2] \\ &= 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \\ &= 4(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \end{aligned}$$

Kasu honetan ere, frogatu beharreko berdintzaren ezker eta eskuin aldeak berdinak direnez, berdintza frogatu da.

- c) $\|\vec{x} + \vec{y}\|$ adierazpenaren karratua garatuz hasiko gara:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2|\vec{x} \cdot \vec{y}|$$

Azken adierazpen horretan, Cauchy Schwartz-en desberdintza aplikatuko dugu:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Beraz, zera daukagu:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

Azken desberdintzako alde bietan erro karratuak hartuz, eskatu diguten desberdintza frogatzea lortzen dugu:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

P5. Izan bedi ondoko biderketa eskalarra: $f(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$, non $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ eta $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

- Kalkulatu oinarri kanonikoarekiko Gramm-en matrizea.
- Kalkulatu $\vec{u} = (1, -1, 0)$ eta $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ bektoreek osatzen duten angelua.
- Kalkulatu $\vec{u} = (1, -1, 0)$ bektorearekiko perpendikularrak diren bektoreen forma orokorra eta zehaztu horietako hiru bektore.

EBAZPENA

- a) Izan bedi $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri kanonikoa. Gramm-en matrizea lortzeko oinarriko bektoreen biderketa eskalarra kalkulatu beharra dago. Baina, matrize hori simetrikoa denez, ez dago zertan bederatzi biderketa eskalarra kalkulatu, aski da ondoko sei biderketa eskalarra lortzea, alegia:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 3 \\ f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2 = f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = -1 = f(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 3 \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0 = f(\vec{e}_3, \vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Izan bedi θ $\vec{u} = (1, -1, 0)$ eta $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ bektoreek osatzen duten angelua, orduan:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Aurreko bektoreen arteko biderketa eskalarra hauex da:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = f(\vec{u}, \vec{v}) = -1$$

Eta bektore horien normak hauek dira:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})} = \sqrt{2} \text{ eta } \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{f(\vec{v}, \vec{v})} = \sqrt{1} = 1$$

Beraz, bi bektoreek osatzen duten angelua ondorengoa da:

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

- c) Izan bedi $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ $\mathbb{R}^3$ -ko bektore orokor bat. Bektore hori $\vec{u}$ bektorearekiko ortogonal izango da, ondokoa betetzen bada: $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$.

$\vec{w} \cdot \vec{u}$ biderketa eskalarra garatuz, hauex lortzen da:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = f(\vec{w}, \vec{u}) = w_1 - w_2 - w_3 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2 + w_3$$

Beraz, $\vec{u}$ bektorearekiko ortogonalak diren bektoreen forma orokorra hurrengoa da:

$$\vec{w} = (w_2 + w_3, w_2, w_3), \forall w_2, w_3 \in \mathbb{R}$$

w_2 eta w_3 parametroei balio ezberdinak emanaz, forma hori daukaten hiru bektore lor daitezke. Adibidez: $\vec{w} = (2, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ eta $\vec{t} = (1, 0, 1)$.

P6. Ortonormalizatu $\mathbb{R}^3$ -ko $B = \{(1,2,2), (3,1,2), (5,0,-1)\}$ oinarria ohiko biderketa eskalarra erabilita.

EBAZPENA

Gram-Schmidt-en metodoa erabiliko dugu B oinarria ortonormalizatzeko. Horretarako, hasierako $B = \{(1,2,2), (3,1,2), (5,0,-1)\}$ oinarritik abiatuz $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ oinarri bat eraikitzen da, bertako bektoreak unitarioak eta binaka ortogonalak izanik.

Izan bedi $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ hasierako oinarria, non $\vec{u}_1 = (1,2,2)$, $\vec{u}_2 = (3,1,2)$ eta $\vec{u}_3 = (5,0,-1)$. Lehenik eta behin, $\vec{v}_1$ bektorea lortuz hasiko gara:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = 3 \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Ondoren, $\vec{v}_2$ bektorea lortuko dugu. Horretarako, $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1$ bektorea osatuko dugu eta λ parametroaren balioa zehaztuko dugu, $\vec{w}_2$ bektorea $\vec{v}_1$ bektorearekiko ortogonal izateko. Hau da, $\lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2)$:

$$\lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2) = -\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot (3,1,2) = -3$$

Beraz, $\vec{v}_1$ bektorearekiko ortogonal den $\vec{w}_2$ bektorea hauxe da:

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1 = (3,1,2) - 3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (2, -1, 0)$$

V oinarriko bigarren bektoreak $\vec{v}_1$ bektorearekiko ortogonal izateaz gain unitarioa izan behar du, beraz:

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

$$\|\vec{w}_2\| = \sqrt{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Azkenik, $\vec{v}_3$ bektorea lortuko dugu. Horretarako, $\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$ bektorea osatuko dugu eta μ_1 eta μ_2 parametroen balioak zehaztuko ditugu, $\vec{w}_3$ bektorea $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ bektoreekiko ortogonal izateko eran. Hau da, $\mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3)$ eta $\mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3)$:

$$\mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3) = -\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot (5,0,-1) = -1$$

$$\mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3) = -\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) \cdot (5,0,-1) = -2\sqrt{5}$$

Beraz, $\vec{w}_3$ bektorea hau da:

$$\vec{w}_3 = (5, 0, -1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

V oinarri ortonormaleko gainerako bektoreen antzera, $\vec{v}_3$ bektoreak ere unitarioa izan behar duenez:

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$$

$$\|\vec{w}_3\| = \sqrt{\vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{v}_3 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}}\right)$$

Ondorioz, bila gabiltzan V oinarri ortonormala hurrengoa da:

$$V = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}}\right) \right\}$$

P7. $\mathbb{R}^3$ -ko $S = \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = 0\}$ azpiespazioa emanik,

- Kalkulatu S -rekiko ortogonal den azpiespazioa.
- $\vec{v} = (1, 1, 2)$ bektorea azpiespazio horretan al dago?

EBAZPENA

- S -rekiko ortogonal den azpiespazioa S -ko edozein bektorerekiko ortogonalak diren bektoreek osatzen dute:

$$S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \forall \vec{y} \in S\}$$

S azpiespazioko edozein bektorek ondokoa betetzen du:

$$\forall \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S: y_1 + y_2 - 2y_3 = 0$$

Hau da, S azpiespazioko edozein bektore $\vec{x} = (1, 1, -2)$ bektorearekiko ortogonal da:

$$y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \Leftrightarrow (y_1, y_2, y_3) \cdot (1, 1, -2) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} \cdot (1, 1, -2) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} \perp (1, 1, -2)$$

Beraz, $\vec{x} = (1, 1, -2) \in S^\perp \Rightarrow \langle (1, 1, -2) \rangle \subseteq S^\perp$.

Bestalde, $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^\perp$ betetzen denez, orduan:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim S + \dim S^\perp \xrightarrow{\dim S=2} \dim S^\perp = 1$$

Eta ondorioz, S -rekiko ortogonal den azpiespazioa hau da: $S^\perp = \langle (1, 1, -2) \rangle$.

b) $\vec{v}$ bektorea $S^\perp$ azpiespazioan egongo da, ondokoa betetzen bada:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{u} \in S$$

Izan bedi $\vec{u} = (1,1,1) \in S$, bektore horren eta $\vec{v} = (1,1,2)$ bektorearen biderketa eskalarra ez da zero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \neq 0$$

Beraz, bi bektore horiek ez dira ortogonalak, ondorioz $\vec{v}$ bektorea ez dago $S^\perp$ azpiespazioan.

Ohartu baita ere, $\vec{v} = (1,1,2) \notin S^\perp = \langle (1,1,-2) \rangle$ betetzen dela.

P8. Aurkitu $\mathbb{R}^4$ -ko $S = \{(x,y,z,t) \mid x-2y+t=0, x+y+z+t=0\}$ azpiespazioarekiko azpiespazio ortogonalak.

EBAZPENA

S -rekiko ortogonalak den azpiespazioa S -ko edozein bektorearekiko ortogonalak diren bektoreek osatzen dute:

$$S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in S\}$$

S azpiespazioko edozein bektore bere oinarriko bektoreen konbinazio lineala denez, azpiespazio ortogonaleko edozein bektore S azpiespazioko oinarriko bektoreekiko ortogonalak izango da. S azpiespazioko oinarri bat kalkulatuz hasiko gara. $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ bektoreentzat ondoko berdintzak betetzen dira:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 + 2x_2 \\ x_3 = -3x_2 \end{cases}$$

Hau da, S espazioko edozein bektoreen forma orokorra hau da:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, -3x_2, -x_1 + 2x_2) = x_1(1, 0, 0, -1) + x_2(0, 1, -3, 2)$$

Gainera, $(1, 0, 0, -1)$ eta $(0, 1, -3, 2)$ bektoreak linealki independenteak direnez, $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -3, 2)\}$ S espazioko oinarri bat da.

Izan bedi $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^\perp$, orduan, $\vec{y} \perp (1, 0, 0, -1)$ eta $\vec{y} \perp (0, 1, -3, 2)$ betetzen dira. Biderketa eskalarren garapenak eginez, zera lortzen da:

$$\begin{aligned} \vec{y} \perp (1, 0, 0, -1) &\Rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot (1, 0, 0, -1) = 0 \Rightarrow y_1 - y_4 = 0 \\ \vec{y} \perp (0, 1, -3, 2) &\Rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot (0, 1, -3, 2) = 0 \Rightarrow y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0 \end{aligned}$$

Ondorioz, S azpiespazioarekiko ortogonal den azpiespazioa hau da:

$$S^\perp = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_4 = 0, y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

P9. Frogatu $\mathbb{R}^4$ -ko $V = \langle (1, 0, -2, -1), (2, 0, 1, -2) \rangle$ eta $W = \{(a + b, a, 0, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ azpiespazioak ortogonalak direla.

EBAZPENA

V eta W azpiespazioak ortogonalak direla frogatzeko nahikoa da ondokoa frogatzea:

$$\forall \vec{v} \in V \wedge \forall \vec{w} \in W, \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Izan bitez $\vec{w} = (a + b, a, 0, a + b)$ eta $\vec{v} = x(1, 0, -2, -1) + y(2, 0, 1, -2) = (x + 2y, 0, -2x + y, -x - 2y)$ W eta V azpiespazioetako bektoreak hurrenez hurren. Beraien biderketa eskalarra nulua den ikusiko dugu:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 &\Rightarrow (x + 2y, 0, -2x + y, -x - 2y) \cdot (a + b, a, 0, a + b) \Rightarrow \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= xa + xb + 2ya + 2yb - xa - xb - 2ya - 2yb = 0 \end{aligned}$$

$\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreen biderketa eskalarra nulua denez, bi bektoreak ortogonalak dira eta, ondorioz, bi azpiespazioak ortogonalak.

Bi azpiespazioak ortogonalak direla frogatzeko beste era bat hau da: V azpiespazioko oinarri bateko bektoreak eta W azpiespazioko beste oinarri batekoak ortogonalak direla ikustea.

P10. Izan bedi $\mathbb{R}^3$ -ko $V_1 = \{(-a - b, -b, 3a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. Zehaztu V_1 azpiespazioarekiko ortogonal den azpiespazioaren ekuazio implizituak.

EBAZPENA

$V_1^\perp$ azpiespazioa V_1 azpiespazioarekiko ortogonal bada:

$$\forall \vec{u} \in V_1 \wedge \forall \vec{w} \in V_1^\perp, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

V_1 azpiespazioko edozein bektorek hurrengoak betetzen du:

$$\begin{aligned} \vec{u} \in V_1, \exists a, b \in \mathbb{R}: \vec{u} &= (-a - b, -b, 3a) \Rightarrow \\ \vec{u} &= a(-1, 0, 3) + b(-1, -1, 0) = \langle (-1, 0, 3), (-1, -1, 0) \rangle \end{aligned}$$

Gainera, $\vec{u}_1 = (-1, 0, 3)$ eta $\vec{u}_2 = (-1, -1, 0)$ bektoreak linealki independenteak direnez, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ V_1 azpiespazioko oinarria da.

Bestalde, V_1 eta $V_1^\perp$ azpiespazioak osagarriak direnez:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim V_1 + \dim V_1^\perp \Rightarrow \dim V_1^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V_1 = 3 - 2 = 1$$

Beraz, $V_1^\perp = \langle \vec{w} \rangle$, $\vec{w} = (a, b, c)$ bektoreak eta $\vec{u}_1 = (-1, 0, 3)$ eta $\vec{u}_2 = (-1, -1, 0)$ bektoreek osatzen duten $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$ sistema askea izanik eta ondoko baldintzak betetzen direlarik:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{eta} \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{w} = 0$$

Orduan:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{w} &= (-1, 0, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow -a + 3c = 0 \Rightarrow c = a/3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{w} &= (-1, -1, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow -a - b = 0 \Rightarrow b = -a \end{aligned}$$

Beraz, $\vec{w} = (a, -a, a/3)$ bektorea zehaztuta geratzen da eta ondorioz:

$$V_1^\perp = \{(a, -a, a/3): a \in \mathbb{R}\} = \langle (3, -3, 1) \rangle$$

Ohartu horrela eraikitako $\vec{w}$ bektorea ez dela $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bektoreen konbinazio lineala, eta, beraz, $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat dela. $V_1^\perp$ azpiespazioaren ekuazio inplizituak kalkulatzeko nahikoa da ondoko matrizearen heina bat izatera behartzea:

$$h \begin{pmatrix} 3 & x \\ -3 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = 1$$

Bestalde, $V_1^\perp$ azpiespazioaren dimentsioa bat denez, linealki independenteak diren bi ekuazio inplizitu behar dira. Hortaz, hurrengo minorrak kontsideratzen dira:

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ -3 & y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eta} \quad \begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3y + 3x = 0 \\ 3z - x = 0 \end{cases}$$

Beraz, $V_1^\perp$ azpiespazioaren ekuazio inplizituak hauek dira: $x = -y$, $x = 3z$.

EBATZITAKO GALDERAK

G1. Izan bedi $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow f(\vec{u}, \vec{v})$ aplikazioa, non $f(\vec{u}, \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 3$ den eta «·»

ohiko biderketa eskalarra. Esan ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren.

- a) f positiboki definitua da.
- b) f trukakorra da.
- c) f aplikazioak bilinealtasun-propietatea betetzen du.

EBAZPENA

- a) Gezurra. f positiboki definitua izango da, hurrengo baldintzak betetzen badira:

$$\begin{cases} \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, f(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \\ f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}, f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$ baldintza betetzen den aztertuko da:

Izan bedi $\vec{u} = (x, y)$, orduan: $f(\vec{u}, \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 3 = 2(x^2 + y^2) - 3$.

$\vec{u} = (1, 0)$ bektorea aukeratuz, $f(\vec{u}, \vec{u}) = -1 < 0$ betetzen da. Ondorioz, f ez da positiboki definitua.

- b) Egia. f trukakorra izango da, ondoko baldintza betetzen badu:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$

Honako berdintzak ditugu:

$$\begin{cases} f(\vec{u}, \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 3 \\ f(\vec{v}, \vec{u}) = 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 3 \end{cases}$$

Ohiko biderketa eskalarra trukakorra denez, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ betetzen da, beraz, $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$. Ondorioz, f trukakorra da.

- c) Gezurra. f bilineala izango da, baldin eta soilik baldin ondoko berdintza betetzen badu:

$$f(\alpha \circ \vec{u} + \beta \circ \vec{v}, \vec{w}) = \alpha f(\vec{u}, \vec{w}) + \beta f(\vec{v}, \vec{w}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

«·» eskalar eta bektore arteko biderketa izanik.

Ondoko berdintzak ditugu:

$$\begin{cases} f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w}) = 2(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot \vec{w} - 3 \\ \alpha f(\vec{u}, \vec{w}) + \beta f(\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(2\vec{u} \cdot \vec{w} - 3) + \beta(2\vec{v} \cdot \vec{w} - 3) = 2(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot \vec{w} - 3(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Aurreko berdintza biak berdinak izateko $\alpha + \beta = 1$ bete behar da. Baina, aurreko berdintzak $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -rako bete behar direnez, orokorrean ez direnez berdinak, f ez da bilineala.

G2. Izan bedi $\mathbb{R}^n$ espazio bektorial euklidearra. Esan ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren:

- $\mathbb{R}^n$ espazioko oinarri kanonikoko bektoreek $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ sistema ortonormal bat osatzen dute.
- $\mathbb{R}^n$ espazioko bektore ortonormalen edozein multzo, espazioko oinarri bat da.

EBAZPENA

- Egia. $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ bektore-sistema ortonormala izango da, bektoreak unitarioak badira eta binaka ortogonalak badira. Oinarri kanonikoko bektoreez dihardugunez, hau da, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$, bektore horiek unitarioak dira:

$$\|\vec{e}_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

Bektore horiek binaka ortogonalak ere badira, ondoko baldintza betetzen baitute:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, i \neq j$$

Beraz, frogatuta geratzen da $\mathbb{R}^n$ espazioko oinarri kanonikoko bektoreek $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ sistema ortonormal bat osatzen dutela.

- Gezurra. Gezurra dela frogatzeko nahikoa da oinarri kanonikoa osatzen duten bektoreen sistemako azpimultzo bat hartzea. Izan bedi $B_k = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$, non $k < n$ den. B_k multzoko bektore guztiak unitarioak eta binaka ortogonalak direnez, B_k bektore-sistema ortogonal da. Hala eta guzti, B_k sistemako bektoreek ez dute $\mathbb{R}^n$ espazioko oinarri bat osatzen. B_k sistemako bektoreak linealki independenteak izan arren, ez baitute $\mathbb{R}^n$ espazioko sistema sortzaile bat osatzen.

G3. Izan bedi E n dimentsioko espazio bektorial euklidearra. Esan ondoko baieztapenak egia ala gezurra diren:

- a) E espazioko edozein $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ bektore normalez osatutako sistema askea, ortonormala da.
- b) E espazioko edozein bektore sistema ortonormal askea da.

EBAZPENA

- a) Gezurra. Sistema ortonormala izango da, ondoko baldintzak betetzen baditu:

- i) Bektoreak normalak edo unitarioak dira, hau da: $\|\vec{v}_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, m$
- ii) Bektoreak binaka ortogonalak dira, hau da: $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0, i \neq j$ izanik

Lehenengo baldintza bete egiten da, enuntziatuan V sistemako bektoreak normalak direla esaten baita. Bigarren baldintza ea betetzen den ikusiko dugu. Izan bedi $V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{v}\}$ bektore-sistema, non $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ eta $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. V sistema askea da, hiru bektoreek osatzen duten matrizearen determinantea ez-nulua baita:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Gainera, V sistemako bektoreak normalak dira: $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{v}\| = 1$. Unitarioak izateaz gain, bektore horiek binaka ortogonalak izango balira, orduan sistema ortonormala litzateke. Ikus dezagun bektore horien arteko biderketa eskalarra nulua den:

- $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1$ eta $\vec{e}_2$ ortogonalak dira.
- $\vec{e}_2 \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{e}_2$ eta $\vec{v}$ ortogonalak dira.
- Baina, $\vec{e}_1 \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow \vec{e}_1$ eta $\vec{v}$ ez dira ortogonalak.

Beraz, V sistema ez da ortogonal, eta, ondorioz, ezin da ortonormala izan.

- b) Egia. Izan bedi E espazioko bektore ortonormalez osatutako $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ sistema. Hau da, A sistemako bektoreak unitarioak dira: $\|\vec{u}_i\| = 1, i = 1, 2, \dots, p$, eta binaka ortogonalak dira: $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0, i \neq j$ izanik.

Absurdura eramanez, suposa dezagun baieztapena ez dela egia. Hau da, suposa dezagun A bektore-sistema ortonormala lotua dela. Orduan, existitzen da $\vec{u}_i$ bektorea sistemako gainerako bektoreen konbinazio lineala dena. Izan bedi $\vec{u}_k$ bektore hori, orduan:

$$\exists \alpha_i \neq 0: \vec{u}_k = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p$$

$\vec{u}_k$ bektorearen eta sistemako gainerako bektoreen arteko biderketa eskalarra kalkulatu:

$$\begin{cases} \vec{u}_k \cdot \vec{u}_1 = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_2 = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k-1} = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_{k-1} \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k+1} = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_p = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \vec{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p) \cdot \vec{u}_p \end{cases}$$

Bektoreak binaka ortogonalak direnez, zera daukagu:

$$\begin{cases} \vec{u}_k \cdot \vec{u}_1 = \alpha_1 \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k-1} = \alpha_{k-1} \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_{k+1} = \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \vec{u}_k \cdot \vec{u}_p = \alpha_p \end{cases}$$

Eta $\vec{u}_k$ sistemako gainerako bektoreen konbinazio lineala denez, gutxienez $\alpha_i \neq 0$ balio bat existitzen da. Ondorioz, aurreko biderketa eskalarretako bat gutxienez ez-nulua izango da eta, beraz, kontsideratutako bektore-sistema ez da ortogonal izango. Hau da, suposatu duguna ez da zuzena. Hortaz, E espazioko edozein bektore-sistema ortonormal askea da.

MATHEMATICA ERABILIZ EBATZITAKO ARIKETAK

M1. Izan bitez f eta g hurrenez hurren $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ -n definitutako bi forma bilineal eta izan bitez F eta G oinarri kanonikoarekiko beraiei lotutako matrizeak. Esan ea ondoko baieztapenak egiak diren ala ez:

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak biderketa eskalar bat definitzen du.

b) $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ matrizeak biderketa eskalar bat definitzen du.

EBAZPENA

- a) F matrizeak biderketa eskalarra definituko du, simetrikoa eta definitu positiboa denean. Ikus dezagun matrizea simetrikoa den:

```
Remove["Global`*"]
```

```
F = {{1, -2}, {-2, 1}}; MatrixForm[F]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Transpose[F] == F
```

```
True
```

Beraz, F matrizea simetrikoa da. F definitu positiboa izango da, edozein $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ bektorearentzat $\vec{v}F\vec{v}^t \geq 0$ betetzen bada:

```
v = {x, y};  
pol = v.F.v // Simplify
```

$$x^2 - 4xy + y^2$$

```
pol /. {x -> 1, y -> 1}
```

```
-2
```

Aurreko polinomioak $\vec{v} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ bektorearentzat balio negatiboa hartzen duenez, F matrizea ez da definitu positiboa eta ez du biderketa eskalarrik definituko.

b) G matrizea simetrikoa den aztertuko dugu:

```
G = {{3, -1, 4}, {5, 6, 7}, {4, -3, 0}}; MatrixForm[G]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Transpose[G] == G
```

```
False
```

G matrizea simetrikoa ez denez, ez du biderketa eskalarrik definituko.

M2. Izan bedi ondoko biderketa eskalarra: $f(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$, non $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ eta $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

- Kalkulatu oinarri kanonikoarekiko Gramm-en matrizea.
- Kalkulatu $\vec{u} = (1, -1, 0)$ eta $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ bektoreek osatzen duten angelua.
- Kalkulatu $\vec{u} = (1, -1, 0)$ bektorearekiko perpendikularrak diren bektoreen forma orokorra eta zehaztu horietako hiru bektore.

EBAZPENA

a) Biderketa eskalarra, horrek induzitutako norma eta oinarri kanonikoa definituko ditugu:

```
Remove["Global`*"]
```

```
f[x_?VectorQ, y_?VectorQ] :=  
  3 x[[1]] y[[1]] + 2 x[[1]] y[[2]] - x[[1]] y[[3]] + 2 x[[2]] y[[1]] +  
  3 x[[2]] y[[2]] - x[[3]] y[[1]] + x[[3]] y[[3]];  
Norma[x_?VectorQ] := Sqrt[f[x, x]];
```

```
B = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```


Oinarriko bektoreen biderketa eskalarrek kalkulatu eta, ondoren, Gramm-en matrizea eratuko dugu. Ohartu, biderketa eskalarrek egiteko Mathematica programak duen Do agindua erabili dugula:

```
Gramm = ConstantArray[0, {3, 3}];
Do[Gramm[[i, j]] = f[B[[i]], B[[j]]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
MatrixForm[Gramm]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen arteko angelua kalkulatzeko ondoko adierazpena erabiliko dugu:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

```
u = {1, -1, 0}; v = {-1, 1, -1};
Theta = ArcCos[f[u, v] / (Norma[u] * Norma[v])]
3 π
4
```

- c) Izan bedi $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ -ko bektore orokor bat. Bektore hori $\vec{u}$ bektorearekiko ortogonalak izango da, ondokoa betetzen bada: $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$:

```
w = {w1, w2, w3};
sol = Solve[f[w, u] == 0]
{{w1 -> w2 + w3}}
```

Beraz, $\vec{u}$ bektorearekiko ortogonalak diren bektoreen forma orokorra hau da:

```
w = w /. sol[[1]]
{w2 + w3, w2, w3}
```

Forma hori daukaten hiru bektore lortzeko nahikoa da $\vec{w}$ bektoreko parametroei, hau da, w_2 eta w_3 parametroei, balio desberdinak ematea, adibidez:

```
v1 = w /. {w2 -> 1, w3 -> 1}
{2, 1, 1}
```

```
v2 = w /. {w2 -> 1, w3 -> 0}
{1, 1, 0}
```

```
v3 = w /. {w2 -> 0, w3 -> 1}
{1, 0, 1}
```

M3. Ortonormalizatu $\mathbb{R}^3$ -ko $B = \{(1,2,2), (3,1,2), (5,0,-1)\}$ oinarria ohiko biderketa eskalarra erabilita.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

Gram-Schmidt-en metodoa erabiliko dugu B oinarria ortonormalizatzeko. Horretarako, hasierako $B = \{(1,2,2), (3,1,2), (5,0,-1)\}$ oinarritik abiatuko gara eta $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ oinarri bat eraikiko dugu, bertako bektoreak unitarioak eta binaka ortogonalak izanik. Izan bedi $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ hasierako oinarria, non $\vec{u}_1 = (1,2,2)$, $\vec{u}_2 = (3,1,2)$ eta $\vec{u}_3 = (5,0,-1)$ diren. Orduan, V oinarriko bektoreak hauek izango dira:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \\ \vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}, \text{ non } \vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1 \text{ eta } \lambda = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2) \\ \vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}, \text{ non } \vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2, \mu_1 = -(\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_3) \text{ eta } \mu_2 = -(\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_3) \end{cases}$$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ bektoreak definituko ditugu:

```
u1 = {1, 2, 2}; u2 = {3, 1, 2}; u3 = {5, 0, -1};
```

V oinarriko lehenengo bektorea lortuko dugu:

```
v1 = u1 / Norm[u1]
{1/3, 2/3, 2/3}
```

V oinarriko bigarren bektorea lortuko dugu:

$$\mathbf{w2} = \mathbf{u2} - \mathbf{v1} \cdot \mathbf{u2} \, \mathbf{v1}$$

$$\{2, -1, 0\}$$

$$\mathbf{v2} = \mathbf{w2} / \text{Norm}[\mathbf{w2}]$$

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right\}$$

Eta azkenik, V oinarriko hirugarren bektorea lortuko dugu:

$$\mathbf{w3} = \mathbf{u3} - \mathbf{v1} \cdot \mathbf{u3} \, \mathbf{v1} - \mathbf{v2} \cdot \mathbf{u3} \, \mathbf{v2}$$

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right\}$$

$$\mathbf{v3} = \mathbf{w3} / \text{Norm}[\mathbf{w3}]$$

$$\left\{ \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{3} \right\}$$

Ondorioz, bila gabiltzan V oinarri ortonormala hurrengoa da:

$$V = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Oinarri ortonormal bera lortuko genuke, Mathematica programak oinarri ortonormalak lortzeko duen Orthogonalize agindua erabilita:

$$\text{Orthogonalize}[\{\mathbf{u1}, \mathbf{u2}, \mathbf{u3}\}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right\}, \left\{ \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{3} \right\} \right\}$$

M4. $\mathbb{R}^4$ -ko $S = \{(x, y, z, t) \mid x - 2y + t = 0, x + y + z + t = 0\}$ azpiespazioarekiko azpiespazio ortogonalak aurkitu.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

S -rekiko ortogonalak den azpiespazioa S -ko edozein bektorearekiko ortogonalak diren bektoreak osatzen dute:

$$S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \forall \vec{y} \in S\}$$

S espazioko edozein bektore bere oinarriko bektoreen konbinazio lineala denez, azpiespazio ortogonaleko edozein bektore S espazioko oinarriko bektoreekiko ortogonalak izango da. Has gaitetzen S espazioko oinarri bat kalkulatz:

```
sol = Solve[{x - 2 y + t == 0, x + y + z + t == 0}, {x, y, z, t}]
{{z -> -3 y, t -> -x + 2 y}}
```

```
b = {x, y, z, t} /. sol[[1]]
{x, y, -3 y, -x + 2 y}
```

```
b1 = b /. {x -> 1, y -> 0}
{1, 0, 0, -1}
```

```
b2 = b /. {x -> 0, y -> 1}
{0, 1, -3, 2}
```

Beraz, $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, -3, 2)\}$ S espazioko sistema sortzailea da. Oinarria izango da, bertako bektoreak linealki independenteak badira:

```
Solve[a1 b1 + a2 b2 == 0, {a1, a2}]
{{a1 -> 0, a2 -> 0}}
```

Ondorioz, $B = \{(1,0,0,-1), (0,1,-3,2)\}$ S espazioko oinarri bat da.

Izan bedi $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^\perp$, orduan, $\vec{y} \perp (1,0,0,-1)$ eta $\vec{y} \perp (0,1,-3,2)$ betetzen dira. Hau da, $\vec{y}$ bektorearen eta bektore hauen arteko biderketa eskalarra nulua izango da:

```
y = {y1, y2, y3, y4};
Solve[{y.b1 == 0, y.b2 == 0}, {y1, y2, y3, y4}]
{{y3 -> 2 y1/3 + y2/3, y4 -> y1}}
```

Beraz, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^\perp$ bektorearen osagaiek berdintza hauek betetzen dituzte:

$$\begin{cases} y_1 = y_4 \\ y_2 + 2y_4 = 3y_3 \end{cases}$$

Ondorioz, S azpiespazioarekiko ortogonal den azpiespazioa ondorengoa da:

$$S^\perp = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_4 = 0, y_2 - 3y_3 + 2y_4 = 0\}$$

M5. Izan bedi $\mathbb{R}^3$ -ko $V_1 = \{(-a-b, -b, 3a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ azpiespazio bektoriala. Zehaztu V_1 azpiespazioarekiko ortogonal den azpiespazioaren ekuazio inplizituak.

EBAZPENA

```
Remove["Global`*"]
```

V_1 azpiespazioko oinarri bat kalkulatu dugu:

```
b1 = {-a - b, -b, 3 a} /. {a -> 1, b -> 0}
{-1, 0, 3}
```

```
b2 = {-a - b, -b, 3 a} /. {a -> 0, b -> 1}
{-1, -1, 0}
```

$\vec{u}_1 = (-1, 0, 3)$ eta $\vec{u}_2 = (-1, -1, 0)$ bektoreak linealki independenteak direnez, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ V_1 azpiespazioko oinarria da.

Bestalde, V_1 eta $V_1^\perp$ azpiespazioak osagarriak direnez:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim V_1 + \dim V_1^\perp \Rightarrow \dim V_1^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V_1 = 3 - 2 = 1$$

Beraz, $V_1^\perp = \langle \vec{w} \rangle$, $\vec{w} = (a, b, c)$ bektoreak eta $\vec{u}_1 = (-1, 0, 3)$ eta $\vec{u}_2 = (-1, -1, 0)$ bektoreek osatzen duten $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$ sistema askea da eta ondoko baldintzak betetzen dira: $\vec{u}_1 \cdot \vec{w} = 0$ eta $\vec{u}_2 \cdot \vec{w} = 0$:

```
w = {w1, w2, w3};
sol = Solve[{b1.w == 0, b2.w == 0}]
{{w1 -> 3 w3, w2 -> -3 w3}}
```

Beraz, $\vec{w}$ bektorearen forma orokorra hurrengoa da:

```
w = w /. sol[[1]]
{3 w3, -3 w3, w3}
```

Eta bektore horren kasu berezi bat hauxe izanik:

```
w = w /. w3 -> 1
{3, -3, 1}
```

Ikus dezagun $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}\}$ sistema askea dela, $\vec{u}_1 = (-1, 0, 3)$, $\vec{u}_2 = (-1, -1, 0)$ eta $\vec{w} = (3, -3, 1)$ izanik:

```
Solve[a1 b1 + a2 b2 + a3 w == 0, {a1, a2, a3}]
{{a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 0}}
```

Beraz, $\vec{w} = (3, -3, 1)$ bektoreak eskatutako hiru baldintzak betetzen dituenaz, $V_1^\perp = \langle (3, -3, 1) \rangle$.

Izan bedi A , $V_1^\perp$ azpiespazioko bektore sortzaileak eta $\mathbb{R}^3$ -ko bektore orokor batek osatutako matrizea:

```
A = Transpose[{{3, -3, 1}, {x, y, z}}]; MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ -3 & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

$V_1^\perp$ azpiespazioaren ekuazio implizituak kalkulatzeko nahikoa da A matrizearen heina bat izatera behartzea:

$$h \begin{pmatrix} 3 & x \\ -3 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = 1$$

$V_1^\perp$ azpiespazioaren dimentsioa bat denez, linealki independenteak diren bi ekuazio implizitu behar ditugu. Ondorioz, hurrengo bi minorrak kontsideratzen dira:

```
Det[A][{1, 2}, {1, 2}]]
```

```
3 x + 3 y
```

```
Det[A][{1, 3}, {1, 2}]]
```

```
-x + 3 z
```

Beraz, $V_1^\perp$ azpiespazioaren ekuazio implizituak $x = -y$ eta $x = 3z$ dira.

Oharra:

Matrize baten minorrak kalkulatzeko Mathematica programak Minors izeneko agindua du. Agindu hori erabiliz, A matrizearen bi ordenako hiru minorrak kalkula daitezke:

```
Minors[A, 2]
```

```
{{3 x + 3 y}, {-x + 3 z}, {-y - 3 z}}
```

Minor horiek zerorekin berdinduz, $V_1^\perp$ azpiespazioaren ekuazio implizituak lortuko genituzke. Ohartu, era honetan lortzen den hirugarren baldintza, $y = -3z$, errepikatuta agertzen dela, lehen eta bigarren baldintzen ondorioa baita.

BIBLIOGRAFIA

- Autore anitz (2007): *Algebra lineal. Klaseko apunteak*, Bilboko Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa, Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU).
- Broida, J. G. eta Williamson, S. G. (1989): *A comprehensive Introduction to Linear Algebra*, Addison-Wesley, Redwood City, CA.
- Castellet, M. eta Llerena, I. (1991): *Álgebra Lineal y Geometría*, Reverté, Bartzelona.
- De Burgos, J. (1993): *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, Madril.
- De la Villa, A. (2010): *Problemas de Álgebra*, Clagsa, Madril.
- Granero, F. (1992): *Álgebra y Geometría Analítica*, McGraw-Hill, Madril.
- Raya, A.; Ríder A. eta Rubio R. (2007): *Álgebra y Geometría Lineal*, Reverté, Bartzelona.
- Royo, J. eta Martín, I (2005): *Ejercicios y problemas de Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, Madril.
- Sanz, P.; Vázquez, F.J. eta Ortega, P. (1998): *Problemas de Álgebra Lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive®*, Prentice Hall, Madril.
- Vera López, A. eta Vera López, F. (1991): *Aljebrrako Sarrera*, Ellacuria, Erandio.
- Wicks, J. R. (1996): *Linear Algebra: an Interactive Laboratory Approach with Mathematica*, Addison-Wesley, Indiana, AEB.
- Zurutuza, I. (2000): *Oinarritzko Algebra*, Elhuyar Fundazioa, Usurbil.

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Bioestatistika

Arantza Urkaregi
1991n argitaratua
ISBN: 84-86967-37-6

Kalkulu diferentziala eta integrala I

Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-47-3

Kalkulu diferentziala eta integrala II

Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-48-1

Ekuzio diferentzialak. Aplikazioak eta ariketak

Elena Agirre (euskaratzailea)
1994an argitaratua
ISBN: 84-86967-63-5

Optimizazioa. Programazio lineala

Victoria Fernandez eta Ana Zelaia
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-65-1

Estatistikarako Sarrera

Karmele Fernandez
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-70-8

Estatistikarako Sarrera. Ariketak

Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1997an argitaratua
ISBN: 84-86967-80-5

Estatistika I eta Estatistika II. Ariketak

Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-79-1

R Hasiberrientzat

Gorka Azkune eta Yosu Yurramendi (itzul.)
2005ean PDFn argitaratua
ISBN: 84-86967-077-7

Estatistikaren oinarriak. Ariketak

Elena Agirre Basurko
2006an argitaratua
ISBN: 84-86967-079-3

Kalkulu diferentziala eta integrala (2. argitalpena)

Patxi Angulo
2009an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-236-2

Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak. Datu-analisirako lanabesak

Xabier Isasi Balanzategi
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-290-4

Estatistikaren Oinarriak. Ariketak (2. argitalpena)

Elena Agirre Basurko
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-288-1

Ekuaizio diferentzial arruntak askatzeko zenbakizko metodoak

Elisabete Alberdi Celaya
2012an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-419-9

R Commander eta Datuen Analisia

Paula Elosua Oliden, Juan Etxeberria Murgiondo
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-443-4

Irakaslegaiantzako matematika eta bere didaktika

Jesús García, Josu Gotzon Ruiz de Gauna, Joxemari Sarasua
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-445-8

