

# AUTOMATISMOAK

## ETA

# KONTROLA

Haritza Camblong Ruiz  
Nora Barroso Moreno  
Aitzol Ezeiza Ramos



Lowattboy

# **AUTOMATISMOAK**

## **ETA**

# **KONTROLA**

*Egileak:* Haritza Camblong Ruiz

Nora Barroso Moreno

Aitzol Ezeiza Ramos



© Elhuyar – UEU (Udako Euskal Unibertsitatea)

© Egileak: **Haritza Camblong Ruiz, Nora Barroso Moreno** eta **Aitzol Ezeiza Ramos**

ISBN: 978-84-8438-771-8

Inprimatzailea: Leitzaran Grafikak. Martin Ugalde Kultur Parkea. 20140 Andoain (Gip.)

# Hitzaurrea

Liburu honek EHU/UPVko Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoko (UEP-D) Industria alorreko Graduetako *Automatismoak eta Kontrola* irakasgaia du jatorri. Irakasgai horretan eskolak euskaraz ematen dituzten irakasleengandik heldu da ideia eta ikasgaiko material pedagogikoa hartu du oinarritzat. Liburuaren edukiak irakasgaiaren programa kontuan hartzen du, baina eskolan ematen dena baino haratago doa, ingurumaria azalduz eta gaietako batzuk sakonduz.

UEP-Dko ikasleez gain, irakasgai hau ematen den beste EHU/UPVko zentroetako ikasleei ere zuzendua dago liburua. Gainera, automatismoei eta kontrolari buruzko oinarritzko kontzeptu, metodologia eta teknikak azaltzen direnez, halako ikasgaiak ematen diren Euskal Herriko beste unibertsitateetako ikasleentzat ere baliagarria da liburua, baita Lanbide Heziketako hainbat gradutako ikasleentzat ere. Idazlana ahal bezain modu pedagogikoan idatzia izana da, jakintza-arlo hauetako hasiberriei begira.

Gaiek elkarren artean harreman handia izan arren, liburua bi atal nagusitan zatitu da. Lehen zatia automatismoei buruzkoa da. Automatismo sekuentzialen oinarriak aipatzen dira. Hiru kapitulu ditu lehen zati honek: lehena, automatismoei buruzko sarrera da. Hor automatismo sekuentzialei buruzko oinarritzko definizio batzuk, historia pixka bat, helburuak, ondorioak, egitura nagusia eta espezifikazioak aipatzen dira. Bigarren kapituluak, automatismo sekuentzialak diseinatzeko Grafcet izeneko lengoia eta tresna azaltzen da. Oinarritzko kontzeptu batzuk aipatu ondoren, haren osagaiak, eboluzio-arauak eta egitura nagusiak aztertzen dira. Hirugarren kapitulua automatismoen inplementazioari buruzkoa da eta kontrolagailu logiko programagarrien kasua landuko du, Grafcet-a automata programagarrietan nola inplementatzen den azaldu baino lehen.

Bigarren zatia kontrolari buruzkoa da. Sarrera gisa egina den lehen kapituluak, oinarritzko definizio, hiztegi, kontzeptu eta metodologiak aipatzen dira. Ondoren, bigarren kapituluak, sistemen ereduztapena azaltzen da. Jakintza-arlo desberdinetako sistemak ereduztatzeko, dagozkien ekuazio diferentzialak lortu ondoren, Laplace-ren transformatua erabiliz, esplikatzen da nola lortzen den sistemei dagokien transferentzia-funtzioa (TF). TFen ezaugarri nagusiak ere ematen dira. Liburu honetan soilik sarrera eta artea bakarrik duten sistema linealak aztertzen dira. Hirugarren kapituluak, sistemen joerari buruzko hiru oinarritzko kontzeptu aztertzen dira: egonkortasuna, egoera iragankorreko ezaugarriak eta egoera iraunkorreko zehaztasuna. Kapitulu hau 2. zati honen bihotz gisa ikus daiteke. Bukatzeko, 4. kapituluak, Dena/Ezer ez eta PID kontrolagailu klasikoak aztertzen dira. Haien egitura, aplikazioak eta abantaila eta desabantailak eman ondoren, PIDak esperimentera eta analitiko nola doitu daitezkeen azaltzen da. Bi zatietan, ariketa zuzendu batzuk ematen dira, baita oinarritzko bibliografia ere.

# Aurkibidea

|                  |   |
|------------------|---|
| Hitzaurrea.....  | 3 |
| Aurkibidea ..... | 5 |

## I zatia: AUTOMATISMOAK ..... 11

### 1. Automatismoetarako sarrera .....13

#### 1.1. Definizioak .....14

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 1.1.1. Automatismoa .....             | 14 |
| 1.1.2. Automata.....                  | 14 |
| 1.1.3. Automatizazioa.....            | 15 |
| 1.1.4. Ingeniaritza automatikoa ..... | 15 |

#### 1.3. Automatismoen sailkapena .....18

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 1.3.1. Konbinazionalak eta sekuentzialak.....             | 18 |
| 1.3.2. Neurritza egindakoak edo programagarriak .....     | 19 |
| 1.3.3. Automatismoak garatzeko aukera teknologikoak ..... | 21 |

### 2. Grafcet diagramak.....23

#### 2.1. Sarrera .....23

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 2.1.1. Jatorria eta normak .....                      | 23 |
| 2.1.2. Zertarako balio du? Zein abantaila ditu? ..... | 24 |
| 2.1.3. Adierazpen-mailak.....                         | 25 |
| 2.1.3.1. Lehen mailako Grafqueta.....                 | 25 |
| 2.1.3.2. Bigarren mailako Grafqueta.....              | 25 |

#### 2.2. Oinarrizko osagaiak .....27

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| 2.2.1. Etapak.....                                 | 27 |
| 2.2.2. Ekintzak .....                              | 28 |
| 2.2.2.1. Ekintza jarraitua edo ez-memorizatua..... | 28 |
| 2.2.2.2. Ekintza baldintzatua .....                | 29 |
| 2.2.2.3. Ekintza atzeratua .....                   | 30 |
| 2.2.2.4. Ekintza mugatua denboran.....             | 30 |
| 2.2.2.5. Pultsu motako ekintza .....               | 31 |
| 2.2.2.6. Ekintza memorizatua .....                 | 32 |
| 2.2.2.7. Ekintza anizkoitzak .....                 | 32 |
| 2.2.3. Trantsizioak .....                          | 33 |
| 2.2.4. Harmenak.....                               | 33 |
| 2.2.4.1. Maila motako harmena .....                | 34 |
| 2.2.4.2. Beti egia den harmena.....                | 34 |
| 2.2.4.3. Harmen tenporizatua.....                  | 34 |
| 2.2.4.4. Pultsu motako harmena .....               | 34 |

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.5. Lotura-lerroak.....                                                           | 34        |
| <b>2.3. Eboluzio/bilakaera arauak .....</b>                                          | <b>35</b> |
| 2.3.1. 1. araua: hasierako egoera edo hasierako etapa.....                           | 36        |
| 2.3.2. 2. araua: trantsizio baten zeharkatzea .....                                  | 36        |
| 2.3.3. 3. araua: zeharkatzea edo etapa aktiboen bilakaera.....                       | 37        |
| 2.3.4. 4. araua: trantsizioen aldibereko / baterako zeharkatzea .....                | 38        |
| 2.3.5. 5. araua: etapa baten aldibereko aktibazio eta desaktibazioa .....            | 38        |
| <b>2.4. Grafcetaren oinarritzko egiturak.....</b>                                    | <b>39</b> |
| 2.4.1. Sekuentzia bakarra .....                                                      | 39        |
| 2.4.2. Sekuentzia-hautaketak EDO egiturari lotuak.....                               | 39        |
| 2.4.2.1. Sekuentzia eskusiboak .....                                                 | 40        |
| 2.4.2.2. Etapa-saltoa .....                                                          | 41        |
| 2.4.2.3. Etapa berreskuratzea.....                                                   | 41        |
| 2.4.3. Batera egiten diren sekuentziak ETA egiturari lotuak .....                    | 42        |
| 2.4.3.1. Batera egin beharreko sekuentzia .....                                      | 44        |
| 2.4.3.2. Baliabide baten partekatzea.....                                            | 46        |
| <b>2.5. Sakonduz.....</b>                                                            | <b>46</b> |
| <b>2.6. Ariketak.....</b>                                                            | <b>47</b> |
| 2.6.1. Orga sinple baten ibilaldia automatizatzea .....                              | 47        |
| 2.6.2. Bi organen ibilbide bitan sinkronizatua automatizatzea .....                  | 48        |
| 2.6.3. Bi organen sinkronizazio edo hitzordu bakarreko ibilbidea automatizatzea..... | 49        |
| 2.6.4. Lehenetasunen kudeaketa .....                                                 | 50        |
| 2.6.5. Baliabide fisiko baten partekatzea .....                                      | 55        |
| 2.6.6. Funtzionamendu modu desberdinak kontuan hartzea .....                         | 58        |
| <b>3. Automatismoen inplementazioa .....</b>                                         | <b>65</b> |
| 3.1. Sarrera .....                                                                   | 65        |
| 3.2. Automata programagarriak: OMRON CJ serieko PLCak.....                           | 66        |
| 3.3. Ladder Diagrama (LD) programazio-hizkuntza.....                                 | 69        |
| 3.4. Grafcetaren inplementazioa automata programagarri batean .....                  | 72        |
| 3.4.1. Inplementatzeko 1. aukera.....                                                | 74        |
| 3.4.2. Inplementatzeko 2. aukera.....                                                | 75        |
| 3.4.3. Inplementatzeko 3. aukera.....                                                | 75        |
| 3.4.4. Inplementatzeko 4. aukera (gomendatua).....                                   | 75        |
| 3.5. Grafcetak interpretatzeko algoritmoa.....                                       | 76        |
| 3.5.1. Algoritmoaren azalpena .....                                                  | 76        |
| 3.5.2. Ariketak .....                                                                | 77        |
| 3.5.2.1. Sekuentzia bakarreko Grafcet sinplearen inplementazioa.....                 | 77        |
| 3.5.2.2. Denboragailuak erabiltzen dituen sekuentzia paralelodun Grafceta.....       | 80        |
| 3.5.3. Azken oharrak.....                                                            | 86        |
| <b>Bibliografia .....</b>                                                            | <b>87</b> |

|                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| <b>II zatia: KONTROLA</b>                                    | <b>89</b>  |
| <b>1. Kontrolerako sarrera</b>                               | <b>91</b>  |
| 1.1. Sistema                                                 | 91         |
| 1.2. Linealtasuna                                            | 92         |
| 1.3. Sistema aldakorak eta ez-aldakorak                      | 93         |
| 1.4. SISO eta MIMO sistemak                                  | 93         |
| 1.5. Seinale jarraitua eta digitala/diskretua                | 94         |
| 1.6. Kontrola begizta irekian eta begizta itxian             | 94         |
| 1.6.1. Kontrola begizta irekian                              | 94         |
| 1.6.2. Kontrola begizta itxian                               | 96         |
| 1.7. Kontrol-sistema baten oinarritzko bloke eta seinaleak   | 97         |
| 1.8. Erregulazioa eta jarraipen-kontrola edo serbomekanismoa | 98         |
| 1.9. Kontrolaturiko sistema baten espezifikazioak            | 98         |
| 1.10. Diseinu-metodoa                                        | 99         |
| 1.12. Konklusioak                                            | 100        |
| <b>2. Sistema fisikoen ereduztapena</b>                      | <b>101</b> |
| 2.1. Sarrera                                                 | 101        |
| 2.1.1. Sistemen ereduztapena                                 | 101        |
| 2.1.2. Ereduztapenaren garrantzia                            | 102        |
| 2.1.3. Ereduztapena zertarako                                | 102        |
| 2.1.4. Ezagutza-eredua                                       | 103        |
| 2.1.5. Adierazpen-eredua                                     | 103        |
| 2.1.6. Ezagutza-ereduak lortzeko metodologia                 | 104        |
| 2.2. Sistemen ekuazio diferentzialak lortzea                 | 105        |
| 2.2.1. Sistema mekanikoak (1)                                | 106        |
| 2.2.2. Sistema mekanikoak (2): engranajeak                   | 107        |
| 2.2.3. Sistema elektrikoak                                   | 110        |
| 2.2.4. Sistema hidraulikoak                                  | 112        |
| 2.2.5. Funtzionamendu-puntu baten inguruko linealizazioa     | 113        |
| 2.2.6. Aldagai fisikoen arteko analogia                      | 114        |
| 2.3. Laplace-ren transformatua                               | 115        |
| 2.3.1. Definizioa                                            | 115        |
| 2.3.2. Funtzio erabiliaren transformatua                     | 116        |
| 2.3.3. Transformatuaren propietateak                         | 118        |
| 2.3.3.1. Linealtasuna                                        | 118        |
| 2.3.3.2. Deribazioa                                          | 118        |
| 2.3.3.3. Integrazioa                                         | 119        |
| 2.3.3.4. Desplazamendua denbora-espazioan                    | 119        |
| 2.3.3.5. Desplazamendua Laplace-ren espazioan                | 119        |
| 2.3.4. Transformatuaren teorema                              | 119        |
| 2.3.4.1. Bukaerako balioaren teorema                         | 119        |
| 2.3.4.2. Hasierako balioaren teorema                         | 120        |
| 2.4. Transferentzia-funtzioa                                 | 120        |
| 2.4.1. Transferentzia-funtzioaren definizioa                 | 120        |
| 2.4.2. Oharrak                                               | 121        |

|                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.4.3. Adibideak.....                                                          | 122        |
| 2.4.4. Transferentzia-funtzioen ezaugarri nagusiak .....                       | 123        |
| 2.4.5. Transferentzia-funtzioen konexioak.....                                 | 124        |
| 2.4.5.1. <i>Transferentzia-funtzioen elkartzea seriean</i> .....               | 124        |
| 2.4.5.2. <i>Transferentzia-funtzioen elkartzea paraleloan</i> .....            | 125        |
| 2.4.5.3. <i>Begizta itxiko transferentzia-funtzio baliokidea</i> .....         | 125        |
| <b>2.5. Ariketak.....</b>                                                      | <b>126</b> |
| 2.5.1. Ekuazio diferentzialetik transferentzia-funtzioetara .....              | 126        |
| 2.5.2. Zirkuitu elektriko baten ereduztapena .....                             | 127        |
| 2.5.3. Korrante zuzeneko motor (KZM) baten ereduztapena.....                   | 130        |
| 2.5.4. Bloke-diagramak.....                                                    | 132        |
| 2.5.5. Perturbazioen eta irteeraren arteko transferentzia-funtzioa.....        | 133        |
| 2.5.6. Laplace-ren transformatua eta frakzio sinpleetan zatiketa .....         | 134        |
| 2.5.7. Ekuazio diferentzialak Laplace-ren transformatuaren bidez ebaztea ..... | 139        |
| 2.5.8. Hasierako eta bukaerako balioak Laplace-ren bidez .....                 | 140        |
| <b>3. Sistemen erantzuna denboraren eremuan.....</b>                           | <b>142</b> |
| <b>3.1. Sarrera .....</b>                                                      | <b>142</b> |
| 3.1.1. Denboraren eremuko erantzunaren azterketaren helburuak.....             | 142        |
| 3.1.2. Sistemak frogatzeko seinale tipikoak .....                              | 143        |
| 3.1.3. Erantzun egonkorra edo ezegonkorra .....                                | 143        |
| 3.1.4. Denboraren eremuko erantzuna: erantzun librea eta behartua .....        | 144        |
| 3.1.5. Denboraren eremuko erantzunaren ezaugarriak .....                       | 145        |
| 3.1.5.1. <i>Egonkortze-denbora, ts</i> .....                                   | 146        |
| 3.1.5.2. <i>Haziera-denbora, tr</i> .....                                      | 146        |
| 3.1.5.3. <i>Atzerapen-denbora garbia, td</i> .....                             | 146        |
| 3.1.5.4. <i>Puntako denbora, tp</i> .....                                      | 147        |
| 3.1.5.5. <i>Gehienezko gainditzea, Mp</i> .....                                | 147        |
| 3.1.5.6. <i>Egoera iraunkorreko errorea edo errore estatikoa, ess</i> .....    | 147        |
| 3.1.6. Sistema baten kontrol-prestazioak edo helburuak .....                   | 147        |
| <b>3.2. Egonkortasuna .....</b>                                                | <b>148</b> |
| 3.2.1. Definizioa.....                                                         | 148        |
| 3.2.2. Intuitiboki .....                                                       | 149        |
| 3.2.3. Egonkortasunerako baldintza orokorrak .....                             | 149        |
| 3.2.4. Egonkortasuna begizta irekian eta itxian.....                           | 150        |
| 3.2.5. Routh-Hurwitz-en irizpidea .....                                        | 151        |
| <b>3.3. Erregimen iragankorra.....</b>                                         | <b>153</b> |
| 3.3.1. Integratzaile soila .....                                               | 153        |
| 3.3.1.1. <i>Adibide hidraulikoa</i> .....                                      | 154        |
| 3.3.1.2. <i>Adibide elektrikoa</i> .....                                       | 155        |
| 3.3.1.3. <i>Mailarekiko erantzuna</i> .....                                    | 156        |
| 3.3.1.4. <i>Ondorioak</i> .....                                                | 156        |
| 3.3.2. Atzerapen-denbora garbia .....                                          | 156        |
| 3.3.2.1. <i>Mailarekiko erantzuna</i> .....                                    | 157        |
| 3.3.2.2. <i>Ondorioak</i> .....                                                | 157        |
| 3.3.3. 1. ordenako sistemak .....                                              | 158        |



|                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3.3.1. Parametro karakteristikoak eta poloa .....                                   | 158        |
| 3.3.3.2. Adibide elektrikoa .....                                                     | 159        |
| 3.3.3.3. Pultsuarekiko erantzuna .....                                                | 159        |
| 3.3.3.4. Mailarekiko erantzuna.....                                                   | 162        |
| 3.3.3.5. Arrapalarekiko erantzuna .....                                               | 165        |
| 3.3.4. 2. ordenako sistemak .....                                                     | 168        |
| 3.3.4.1. Parametro karakteristikoak .....                                             | 168        |
| 3.3.4.2. Adibide elektrikoa .....                                                     | 169        |
| 3.3.4.3. Adibide mekanikoa .....                                                      | 169        |
| 3.3.4.4. Mailarekiko erantzuna.....                                                   | 170        |
| 3.3.4.4.1. Erregimen ez-oszilakorra .....                                             | 171        |
| 3.3.4.4.2. Erregimen oszilakorra .....                                                | 172        |
| 3.3.4.5. Poloen kokapenaren eta erantzunaren ezaugarrien arteko harremana...          | 177        |
| 3.3.5. Ordena handiagoko sistemak eta haien sinplifikazioa.....                       | 179        |
| 3.3.6. Ondorioak.....                                                                 | 183        |
| <b>3.4. Zehaztasuna erregimen iraunkorrean. Errore estatikoa .....</b>                | <b>184</b> |
| 3.4.1. Errorearen kalkulua .....                                                      | 184        |
| 3.4.2. Posizio-errorea: sarrera maila motakoa delarik .....                           | 185        |
| 3.4.3. Abiadura-errorea: sarrera arrapala motakoa delarik .....                       | 186        |
| 3.4.4. Azelerazio-errorea: sarrera parabola motakoa delarik .....                     | 188        |
| 3.4.5. Sistema tipoa .....                                                            | 189        |
| <b>3.5. Ondorioak .....</b>                                                           | <b>190</b> |
| <b>3.6. Ariketak.....</b>                                                             | <b>191</b> |
| 3.6.1. 1., 2. eta 3. ordenako transferentzia-funtzioen egonkortasuna.....             | 191        |
| 3.6.2. Sistema ezegonkor baten polo ezegonkorra .....                                 | 193        |
| 3.6.3. Transferentzia-funtzio baten egonkortasun-baldintzak .....                     | 194        |
| 3.6.4. Begizta itxiko sistema baten egonkortasun-baldintzak .....                     | 195        |
| 3.6.5. Dinamika.....                                                                  | 196        |
| 3.6.6. Gehienezko gainditze maximoa.....                                              | 197        |
| 3.6.7. Transferentzia-funtzioa aurkitzea erantzunaren arabera.....                    | 198        |
| 3.6.8. Sistemen sailkapena poloen kokapenaren arabera.....                            | 200        |
| 3.6.9. 1. eta 2. ordenako transferentzia-funtzioen parametro karakteristikoak .....   | 202        |
| 3.6.10. Polo dominanteak.....                                                         | 203        |
| 3.6.11. Egoera iraunkorra eta poloak ezagutuz, transferentzia-funtzioa lortzea.....   | 205        |
| 3.6.12. Errore estatikoak.....                                                        | 207        |
| 3.6.13. Posizio-errore estatikoa begizta itxiko berrelikadura ez-unitarioarekin ..... | 209        |
| <b>4. Oinarrizko kontrol-ekintzak eta haien doiketa .....</b>                         | <b>210</b> |
| <b>4.1. Sarrera .....</b>                                                             | <b>210</b> |
| 4.1.1. Begizta itxiko kontrol-sistema tipikoa .....                                   | 210        |
| 4.1.2. Kontrolagailuaren helburu nagusiak .....                                       | 211        |
| 4.1.3. Kontrol-ekintza nagusiak .....                                                 | 212        |
| <b>4.2. Dena/Ezer ez motako kontrolagailua .....</b>                                  | <b>212</b> |
| 4.2.1. Prozesu hidrauliko baten adibidea .....                                        | 212        |
| 4.2.2. Prozesu termiko baten adibidea.....                                            | 213        |
| <b>4.3. PID motako kontrolagailuak .....</b>                                          | <b>215</b> |

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.1. Ekintza proportzionala (P) .....                                    | 215        |
| 4.3.2. Ekintza integrala (I) .....                                         | 217        |
| 4.3.3. Ekintza deribatzailea (D) .....                                     | 219        |
| 4.3.4. PI kontrolagailua (era mistoan) .....                               | 220        |
| 4.3.5. PD kontrolagailua (era mistoan) .....                               | 221        |
| 4.3.6. PID kontrolagailua (era mistoan) .....                              | 222        |
| <b>4.4. PIDaren doiketa esperimentalki .....</b>                           | <b>224</b> |
| 4.4.1. Begizta irekiko entsegua .....                                      | 224        |
| 4.4.2. Begizta itxiko entsegua .....                                       | 226        |
| 4.4.3. Oharra .....                                                        | 228        |
| <b>4.5. PIDaren doiketa analitikoki .....</b>                              | <b>228</b> |
| 4.5.1. Konpentsaziorik gabe .....                                          | 228        |
| 4.5.2. Polo/zeroen konpentsazio edo deuseztatzearekin .....                | 231        |
| <b>4.6. Ondorioak .....</b>                                                | <b>233</b> |
| <b>4.7. Ariketak .....</b>                                                 | <b>233</b> |
| 4.7.1. PI kontrolagailuaren doiketa analitikoki .....                      | 233        |
| <b>5. Bibliografia .....</b>                                               | <b>237</b> |
| <b>ERANSKINAK .....</b>                                                    | <b>239</b> |
| <b>A eranskina: Frakzio sinpleetako deskonposizioa .....</b>               | <b>241</b> |
| <b>B eranskina: Bloke-diagramak grafikoki sinplifikatzeko arauak .....</b> | <b>242</b> |
| <b>C eranskina: Funtzio erabilieneen Laplace-ren transformatua .....</b>   | <b>244</b> |

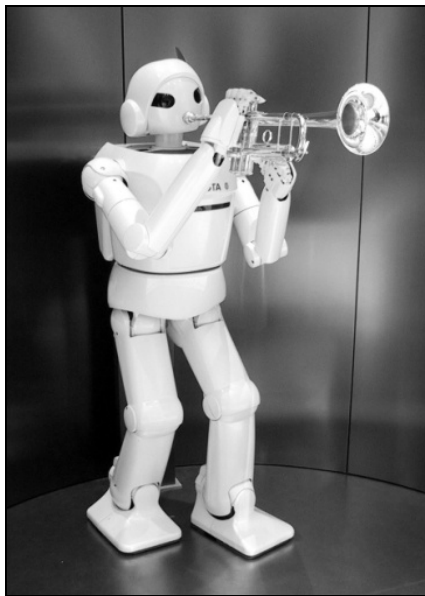
I zatia:

**AUTOMATISMOAK**



# 1. Automatismoetarako sarrera

Automatismoen jatorria historiaurrean koka daiteke, orduko pertsonen ehizarako erabiltzen zituzten tranpek mekanismo automatikoak erabiltzen baitzituzten, adibidez lurtean zulo bat eginez eta animaliaren pisuarekin batera aktibatzen zirenak. Garai haietatik sistema automatiko ugari diseinatu dira, ingeniartzaren erroetako bat bihurtuz. Berez, gizateriaren une erabakigarri asko automatizazioarekin harremana duten garapen teknologiko berriei lotuta etorri dira, lurrin-makina izaki. Industria Iraultzaren hasieratik (XIX. mendearen bukaeran eta XX. mendearen hasieran) gaur arte handitu egin da automatismoekiko zientzialariek eta ingeniariak duten interesa eta, elektronikaren iraultzaren eskutik, azken urteetan sistema automatikoen hazkuntza esponentziala izan da. Arlo honetako asmakizun nabarmenetakoak robotak dira.



1.1 irudia. Giza itxurako robota (Chris 73, Wikimedia Commons).

Automatikaren zientziak eragiketa fisiko zein mentaletan pertsona-eragilearen ekintza eragile artifizial batengatik ordezkatzeko helburua duten metodoak eta prozedurak aztertu eta garatzen ditu. Egun, automatikaren ahaleginaren helburua hau da: pertsonen egin beharreko lan astunak, errepikakorrek eta arriskutsuak arintzea, estres-egoerak murriztu eta ongizatea hobetzea, prozesuetan gertatzen diren erroreak saihestea, kalitate-parametroak neurri konstanteetan mantentzea eta kostuak murriztea.

Baina zer da automatismoa? Zein izan da haren garapena? Zeintzuk dira haren helburuak eta espezifikazioak? Kapitulu honetan automatismoen ingurura gerturatu eta haien ikuspegi sakonduko da.

## 1.1. Definizioak

1.1, 1.2, 1.3 eta 1.4 irudietan sistema automatiko batzuk ikus daitezke. Definizioak garrantzitsuak dira baina adibideek askotan kokatzen laguntzen dute. 1.1 irudiko robota sistema automatikoa da eta, besteak beste, bere kabuz ibiltzeko eta tronpetak jotzeko gai da. 1.2 irudiko kartoia banatzeko sistema industrian aurki ditzakegun automatismoen adibidea da, eta 1.3 irudian Falkirk gorpila ikus daiteke, ingeniartzaren asmakizun handienetakoa (literalki). Gorpil erraldoi horrek barkuak 24 metro altza ditzake altuera ezberdineko bi kanalen artean desplazatzeko. Hauek guztiak automatismo modernoek adibideak dira, 1.4 irudiko ur-erlojua eta 1.5 irudiko ahate mekanikoa automata zaharren irudiak direlarik. Nola sailkatuko genituzke hauek guztiak?

### 1.1.1. Automatismoa

Mekanismo, sistema edo prozesu batean kanpoko eraginik gabeko funtzionamendua da automatismoaren esanahia. Automatismoa definizio orokorra da eta gaur egun industrian zein eguneroko inguruneetan aurki ditzakegun gailu eta sistema ugari hartzen ditu bere baitan.

### 1.1.2. Automata

Automata bat zenbait mugimendu edo eragiketa gauzatzeko bere barnean mekanismoak dituen tresna edo gailua da. Hau da, problema jakin bat berez, kanpoko esku-hartzerik gabe, ebazteko gai den makina abstraktua, mekanismoa edo sistema da automata.



1.2 irudia. Kartoi-banatzaillea (TGW Mechanics GmbH, Wikimedia Commons).

### 1.1.3. Automatizazioa

Gailu, prozesu edo sistema bat automatizatzeko ematen diren prozeduren multzoa da automatizazioa. Horregatik, automatikaren zientziari ere askotan automatizazioa deitzen zaio, terminoak elkarri trukatzuz, prozedura egokiak zientziarekin estu loturik daudelako.

### 1.1.4. Ingeniaritza automatikoa

Ingeniaritza automatikoa automaten eta bestelako prozesu automatikoen sorkuntzaz eta garapenez arduratzen den jakintza anitzeko alorra da. Egun ingeniaritza automatikoak nagusiki ondorengo eremuetan du eragina: industria elektroniko, elektriko zein mekanikoan, domotikan, robotikan, automobilgintzan, aeronautikan, astronautikan, medikuntzan, biologian, prozesu kimikoetan, etab. Sistemen Ingeniaritza terminoa ere oso hurbil dago termino bezala, automatika ia beti sistemetan aplikatzen delako, alegia, osagai ezberdinak konbinatzen dituzten makinetan.



1.3 irudia. Falkirk gurpila (Lowattboy, Wikimedia Commons).

## 1.2. Historia

Zaila da kontzeptu honen jatorria datatzea. Lehen katebegia historiaurreko Paleolito garaian koka genezake gure lehen arbasoek ehiza egiteko erabiltzen zituzten tranpa mekanikoak aintzat hartuz gero.

Antzina, gizakiak ohartu ziren zenbait ekintza zailtasun-maila desberdineko sistema mekanikoen, hidraulikoen eta abarren garapenen laguntzaz modu automatikoan gauzatzeko aukera zegoela. Mota desberdinetako tresneriak sortu zituzten beren eguneroko bizitzan sortzen ziren betebeharrak arintzeko edo/eta hobetzeko. Sortutako gailu guztiak ez ziren praktikoak, garai hartako automatikak alde ludikoa ere elikatzen zuen eta makina batzuk pertsona bizidunen mugimendu errepikakorrak egiteko edota soinuak sortzen zituzten jostailuak ziren.

K.a. 1500. urtean Etiopian Emenhotep-ek eguneko lehen eguzki-izpiekin batera soinuak sortzen zituen Menon erregearen estatua bat sortu zuen. K.a. 500. urtean Txinan King-su Tse-k hegan egiteko gai zen egurrez eta banbuz eginiko mika bat eta salto egiten zuen zaldia sortu zituen. K.a IV. mendean Grezia zaharreko Ktesibios matematiko, mekaniko eta asmatzaileak Clepsydra izenarekin ezagutzen den urezko erlojua sortu zuen. Clepsydraren mekanismoaren helburua ur-andel bat abiadura konstantean betetzea ahalbidetzea zen. Horretarako, bigarren mailako andelaren ur-sarrera erregulatzen zuen flotagailu bat erabiltzen zuen, andel horren ur-maila konstante mantentzearen eta, hartara, andel nagusirako ur irteera konstante mantentzen zen. Ondoren, Clepsydraren mekanismoan oinarrituta, Platonek alarma-sistema bat sortu zuen, bere ikasleek goizetan esnatzeko zituzten arazoak konpontze aldera.



1.4 irudia. Clepsydra (Marsyas, Wikimedia Commons).

Alexandriako Heronek zenbait gailuren deskribapenak eman eta automaten inguruko informazio interesgarria bildu zuen. Antzerkigintzan eta geodesian ekarpen handiak



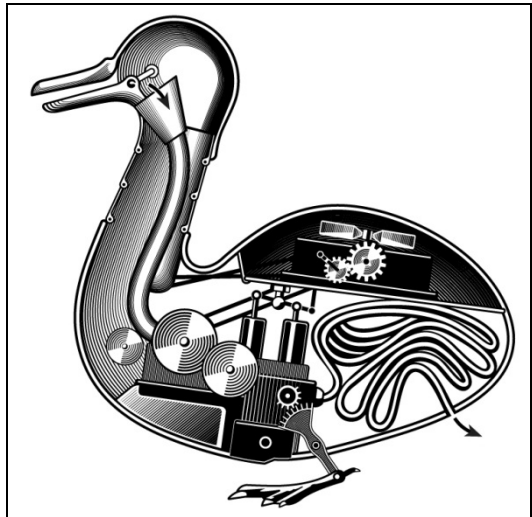
burutu zituen. Besteren artean jauretxeen ateak modu automatikoan irekitzea ahalbidetu zuen, baita gune horietan sartzean musika entzuteko aukera egotea ere. Aztia zela pentsatzen zuten askok, baina oso asmatzaile ona zen. Jauretxeetara sartu baino lehen, sua pizten zen. Bero horrek lur azpian zegoen ur-andel bateko airea berotzen zuen. Presioa igotzeak airea ondoan zegoen ontzi batera bideratzen zuen. Ontzi horren pisua handitzean engranaje batzuei tira egin eta ateak mugitzen ziren. Erroman apopiloak ondo pasatzeko jostailu automatikoak erabiltzeko ohitura zegoen.

Arabiar kulturak greziarrek zuten automaten inguruko jakintza aintzat hartu eta hura hedatu eta garatu zuten arlo ludikotik haratago erabilera praktikoa emanaz. Garai hartako adibideak dira: edateko eta garbitzeko erabiltzen ziren ur-banatzaille automatikoak, erloju mekanikoa, eta abar.

Erdi Aroan automata batzuk garatzen dira baina garai hartan egindakoak ez daude behar bezala dokumentatuak. Adibide gisa hitz egiteko gai zen Roger Bacon zientzialari, filosofo eta teologo ingelesaren burua.

XV. eta XVI. mendeetan Errenazimentuko izen esanguratsuenak greziarren asmakizunekin interesatu ziren. Ezagunenetakoa Leonardo da Vinci-ren Lehoi mekanikoa da. XVII. eta XVIII. mendeen artean gaurko erroboten ezaugarriak zituzten makina mekanikoak sortu ziren.

Historiako automaten sortzaile ospetsuenen artean Vaucanson ingeniari eta asmatzaile frantsesa dago. Besteren artean Coysevox-en estatuen faunoaren eredua adierazten duen flauta-jotzailea da. Jotzailea mingain, ezpain eta hatzen mugimenduei esker doinuak jotzeko gai zen. Geroago bihotza eta zainak zituen eredua sortzeko proposamena jaso zuen Luis XV.a erregearen eskutik baina lana bukatu baino lehen hil egin zen. Urte batzuk geroago Danbolinjolea eta Digestio-aparatua duen ahatea sortu zituen. Ahateak adibidez 400 zati mugikor zituen, hegoak astintzeko, igeri egiteko, ura edateko, aleak jateko eta gorotzaren antzeko zerbait botatzeko gai zen.



1.5 irudia. Vaucanson-en Ahatea.

Pierre Jaquet Droz eta bere bi semeek idazteko (1770), marrazteko (1772) eta organo batean doinuak jotzeko gai ziren (1773) panpinak sortu zituzten. XVIII. mendearen bukaera eta XIX. mendearen hasiera artean maillardetarrek (Henri, Jean-David, Julien-Auguste eta Jacques-Rodolphe) mutiko baten itxura zuen idazle-margolari automatikoa sortu zuten,

zein arkatza eskutan zuela ingelesez eta frantsesez idazteko eta paisaiak marrazteko gai zen.

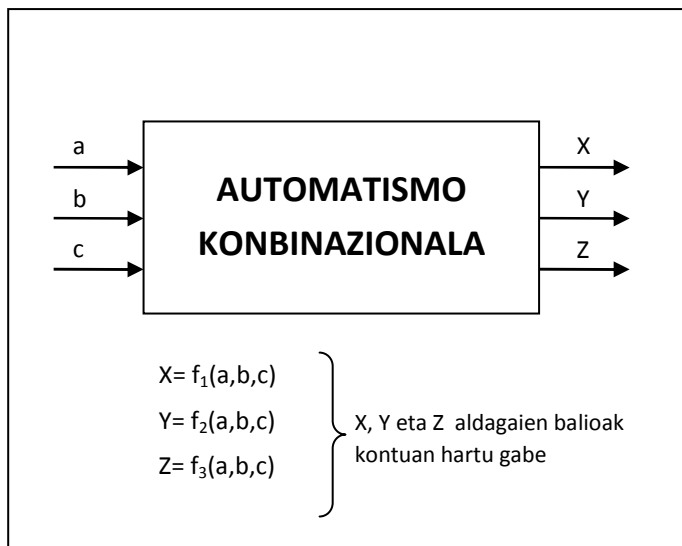
XVIII. mendearen bukaeran ere automatismoak ehunkien industrian sartzen hasi ziren, besteak beste, 1770. urtean Hargreaves-ek egin zuen irule biratzailea, Crompton-ek 1779. urtean sortu zuen irule mekanikoa, eta abar. Ehungintzaren ondoren, automatismoak mehatze-industria eta industria metalurgikora gehitu ziren.

Azkenik, aro garaikidean sistema elektronikoek izan duten ziztu biziko garapenak eragina izan zuen automatismoen garapenean, gailu programagarriak ohiko sistema elektro-mekanikoekin edota haien aldaera berriekin konbinatzeko aukera sortu baita.

### 1.3. Automatismoen sailkapena

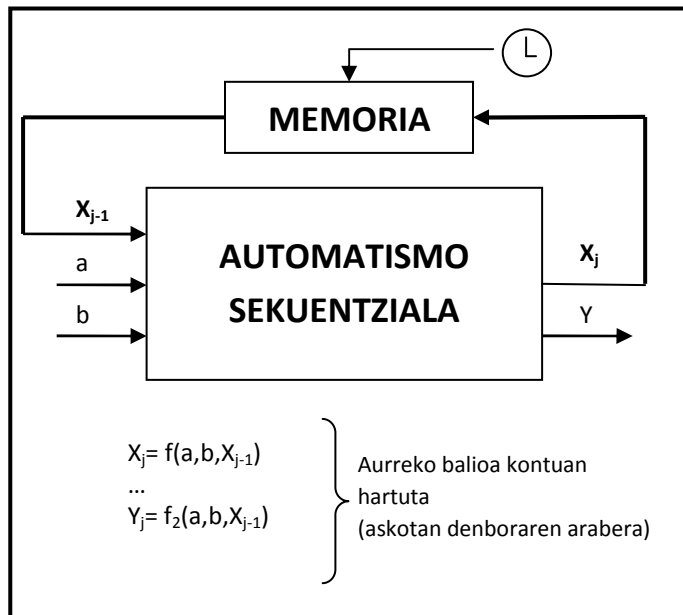
#### 1.3.1. Konbinazionalak eta sekuentzialak

Automatismo konbinazionalak irteerak sarrerako seinaleen menpe daude, inolako aldaerarik gabe denboran zehar. Adibidez, gela bateko argiak piztu eta itzal daitezke hiru etengailu desberdin erabilita.



1.6 irudia. Automatismo konbinazionalak.

Automatismo sekuentzialetan, ordea, irteerak sarrerako seinaleen eta irteeren aurreko egoeren menpekoak dira. Memoria-eremu bat egon behar da non aurreko egoera zein zen gorde daitekeen.



1.7 irudia. Automatismo sekuentzialak

Sistema automatikoetan, oro har, bi mota hauetako zirkuituak konbinatzen dira, batetik automatismo sekuentzialek bere baitan atal konbinazionalak izaten dituztelako, eta, bestetik, sistemetan protagonismo ezberdina izan dezaketelako aplikazioaren arabera. Bestetik, sekuentzian erabaki egokiak hartu ahal izateko beharrezkoak izan daitezke bloke konbinazional konplexuak (hala nola aldagai anitzeko ekuazio bat ebazteko orduan).

Edonola ere, sistemen automatizazioaren diseinuan duen eraginarengatik, automatismo sekuentzialen diseinuari arreta berezia eskainiko zaio liburu honetan.

### 1.3.2. Neurritza egindakoak edo programagarriak

Badago automatismoak sailkatzeko beste modu bat, hardwarearen muntaketaren arabera: automatismo kableatuak edo neurritza egindakoak eta programagarriak. Lehenengoak automatismoen aitzindariak dira eta bigarrenak gaur egungo automatizazioan oinarritutakoak.

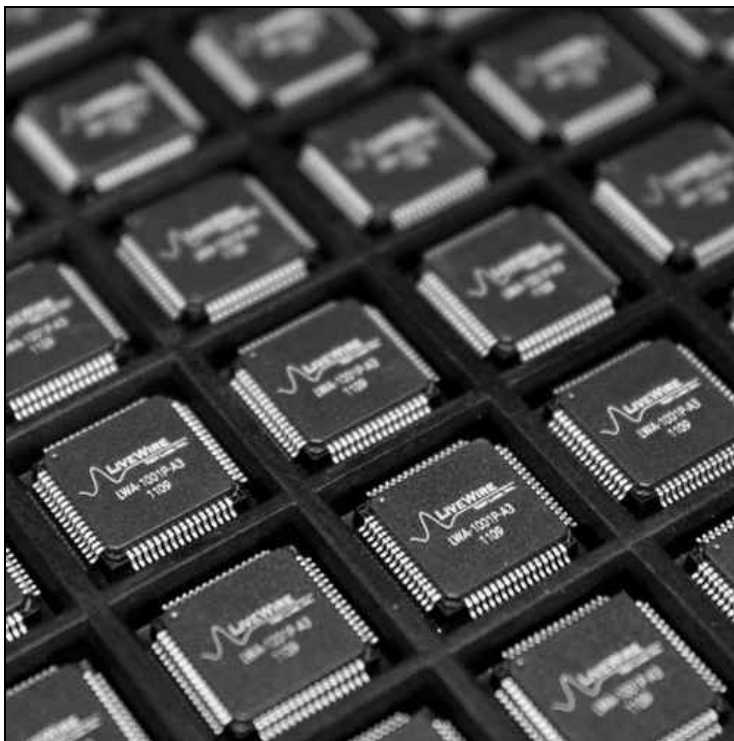
Neurritza egindako automatismo kableatuetan (ASIC, *Application-Specific Integrated Circuit*) kontrolerako funtzio zehatza egiten da eta funtzio hori automatismoaren diseinu eta sorkuntzan erabiltzen diren erreleen, ate logikoen eta bestelako osagaien menpeko dago. Kontrolerako funtzioa aldatu nahi bada, zirkuitua aldatu behar da eta kasu askotan egitura guztia ere aldatu behar da. Hartara, erabilgarritasuna murriztua daukate eta kableatu konplexuen diseinua aldatzea ez da batere erraza. Horra automatismo hauen muga. Bestalde, beraien abantaila nagusia da neurri eta kostu aldetik aplikazio

espezifikotarako oso egokiak izan daitezkeela, hala nola milaka unitate produzitu behar direnean edo sistema txertatu baten kontrola gauzatzeko.

Aldiz, automatismo programagarriak, laburrean esanda, makina elektroniko programagarriak dira, hau da, programa batean espezifikatutako agindu-segida exekutzeko diseinatuta dauden makina generikoak dira. Sistemak aginduak interpretatzen ditu eta horren emaitza azaleratzen du irteeretan, programatu denaren arabera. Aginduek funtzio logikoak, denboragailuak, etab. burutzen dituzte.

Dituzten abantailen artean programazioak ematen duen malgutasuna dago. Automata programagarriak erabiltzen hasteko arrazoi nagusia automata kableatuetan zirkuituak aldatzeko dagoen konplexutasuna da. Automatismo kableatuetan koadro elektrikoaren funtzioa aldatzeko, kableatu guztia (edo zati handi bat) aldatu beharra dago, eta, jakina, lan zaila eta luzea da. Automata programagarriaren bitartez, ordea, nahikoa da programa aldatzea.

Gaur egun, neurrira garatzen diren zirkuitu espezifikoak ere maiz gailu programagarrietan oinarritzen dira, ia beti interesgarria delako sistemaren logikaren oinarria modu sistematikoan lantzea eta garatzaileen ezagutza partekatzea eta berrerabiltzea. Automatismo kableatu soilean hori egitea posible bada ere, gailu programagarrien malgutasuna faktore erabakigarria da automatizazio-sistema bat definitzeko orduan.



1.8 irudia. ASIC txipen erretilua (LiveWireInnovation, Wikimedia Commons).

### 1.3.3. Automatismoak garatzeko aukera teknologikoak

Sistema automatikoak gailu programagarrietan oinarrituta garatzea interesgarria da eta kasu gehienetan jarraitzen den estrategia da. Dena den, gailu programagarri ugari dago eta gehienek eskaintzen dute aukeraren bat sistema automatiko baten garapenean parte hartzeko, bakoitzak abantaila ezberdinak eskainiz. Ondorioz, sistema diseinatzeko orduan ez da berehalako erabakia izango gailu horien aukeraketa.

Automatismoen oinarria izateko aukera eskaintzen duten gailu programagarrien artean nagusi dira kontrolagailu logiko programagarriak (PLC, *Programmable Logic Controller*). Gailu horiek bereziki diseinatu daude sistema automatiko industrialetan kontrolagailu-lana egiteko eta, ondorioz, oso erabiliak dira aplikazio horretarako. Berez, hain dira erabiliak automatizazioan, ezen maiz *automata* hitza erabiltzen baita PLCak izendatzeko. PLCen ezaugarri nagusia sendotasuna da, alegia, ingurune industrialetan modu jarraian lan egiteko diseinatu daude. Liburu honetan PLCen erabilera eta programazioa modu sakonean landuko dira.



1.9 irudia. Allen-Bradley PLCa (Elmschrat Coaching-Blog, Wikimedia Commons).

PLCez gain, automatismoak garatzeko beste aukera ugari aurki daitezke. Sinpletasunera jota, mikrokontrolagailuan oinarritutako sistema sinpleekin automatismoak kontrola daitezke. Sistema horiek kostu baxukoak izan ohi dira, baina askotan haien fidagarritasuna ez da hain sendoa PLCekin konparatuta. Konplexutasunera jota, industria-PCak izango genituzke eta PLCen eta PCen artean erdibidean aurki ditzakegun automatizaziorako kontrolagailu programagarriak (PAC, *Programmable Automation Controller*). Horrelako gailuetan programa sofistikatuagoak karga daitezke, baina gero eta lausoagoa da gailu

horien guztien arteko muga. Esan bezala, liburu honetan PLC (edo automata) terminoaren inguruan lan egingo da, adibide zehatzak gailu horrekin garatuz, baina azaldutako teknikak bestelako gailuetan ere landu ahal izango dira.

Liburu honen lehenengo zatian automatismoak diseinatzeko oinarrizko tresna bat erakutsiko da (2. kapituluaz azaltzen den Grafcet diagramena) eta diagrama horiek PLC automatetan inplementatzeko teknikak azalduko dira (3. kapituluaz). Horrekin ez dira metodo eta teknika guztiak aztertuko (adibidez, diseinu-tresna orokorrak daude sistemak errorean ondorioetatik babesteko), ezta automatismoak inplementatzeko ditugun aukera guztiak nola programatzen diren azalduko ere, baina sistemen ingeniariak eta automatikarako oinarriak ahalik eta ongien ezagutzen saiatuko gara.

## 2. Grafcet diagramak

### 2.1. Sarrera

Grafcet-a automatismo sekuentzialak definitzeko tresna bat da. Adierazpen grafiko bat erabiltzen du. Lengoaia argi bat da, zehatza, anbiguotasunik gabekoa. Erraterako, bezeroari espezifikazioak nola ulertu diren azaltzeko erabil daiteke. Lengoaia unibertsala da, hasiera batean inplementazio/errealizazio praktikotik independentea dena. Horrela, beraz, automatizatu behar den makinaren diseinuan, erabileran edo mantentze-lanetan parte hartzen duten jendeen artean ulertzeko tresna bakarra da.

Liburu honetako lehen kapituluak automatizatu beharreko sistema baten sinoptiko orokorra agertzen zen. Grafqueta Kontrolaren zatian kokatzen da.

#### 2.1.1. Jatorria eta normak

Grafcet tresna AFCET elkarteak (*Association Française pour la Cybernétique Economique et Technique*) sortu zuen 1977an. Lehenago asmatua zen Petri-ren sareen eredu matematikotik deribatua da (1962, Carl Adam Petri).

Grafcet hitza frantsesetik heldu den akronimo bat da: *GRAPhe Fonctionnel de Commande d'Étapes-Transition*, edo euskaraz, **etapak-trantsizioak kontrolatzeko grafiko funtzionala**.

Grafqueta lehenbizikoz 1982ko ekainean normalizatua izan zen Frantzian (NFC 03-190). 1988an, Elektroteknikako Nazioarteko Batzordeak normalizatu zuen (IEC 60848 norma bilakatuz). Norma hori oraintsu eguneratu da, 2013an. Era berean, 1993ko martxoaz geroztik, IEC 61131.3 normak PLCak programatzeko programazio-hizkuntzak normalizatu zituen eta definitutako bost programazio-hizkuntzen artean Grafcetetik oso hurbil den Sequential Function Chart (SFC) hizkuntza dago. Norma hori ere 2013an eguneratu da.

Nahiz eta bi ideia horiek antzekoak izan, desberdintasun nabarmen batzuk dituzte:

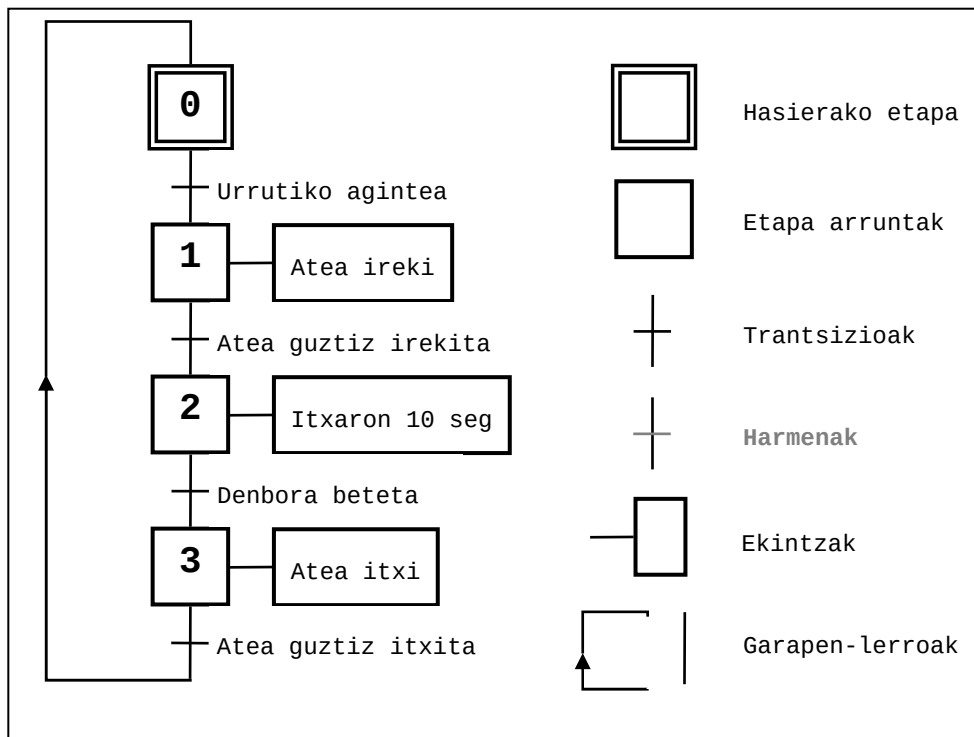
- Lengoiaren helburua:
  - SFCa PLCan inplementatua izateko programazio-hizkuntza da.
  - Grafqueta adierazpen-lengoaia da. Erabilia izan daiteke sistema baten nahi den joera espezifikatzeko edo jada existitzen den batena azaltzeko.
- Sintaxia:
  - Grafcetean ez bezala, EDO dibergentzia batean SFCan trantsizioak eksklusiboak dira bata bestetik.
  - SFCaren ekintzak ezberdin adierazten dira.

### 2.1.2. Zertarako balio du? Zein abantaila ditu?

Makina baten funtzionamenduari loturik diren jende guzientzat, makina horren ziklo automatikoen azalpena argia izan behar da. Alta, espezifikazio batzuk gure hizkuntza arruntetan adieraziak direlarik, etengabeko ez-ulertze arrisku bat dago. Hitz batzuk ez dira oso zehatzak, gaizki definituak dira edo zentzu desberdinak dituzte. Gainera, gure hizkuntza arruntak ez dira sistema sekuentzialak adierazteko egokiak.

Grafqueta automatismoak adierazteko, aztertze, gauzatzeko eta ustiatzeko lengoaia grafikoa da. Automatismoaren zikloaren garapena adierazten duten etapa eta trantsizio multzo batez osatua da. Adierazpen grafiko honen bidez, inplikatuak diren jende guziek hobeki ulertzen dute automatismoa eta elkarrekin kolabora dezakete sistemaren diseinuan eta inplementazioan.

Adibide gisa, ondoko irudiak Grafcetean irudikaturiko sekuentzia bat erakusten du. Bertan, pertsona batek ate bat irekitzeko eskaera egiten du agente baten bidez. Eskaera horri loturiko seinalea detektatzean, ate irekitzen da, 10 segundoz irekirik atxikitzen da eta gero ixten da.



2.1 irudia. Osagaiak identifikatzeko adibidezko Grafqueta.



Horrela, makina bakoitzaren diseinuan Grafcet bat gauza daiteke eta gero makinaren bizi osoan erabili: implementazioa, abian jartzea, mantentze-lana, aldaketak, doiketak. Horregatik, etapa bakoitzean esku hartzen duten jende guziek ezagutu behar dute Grafcet hizkuntza.

Hauek dira Grafcet adierazpen-hizkuntzaren abantaila nagusiak:

- Gauzatzearen teknologikoarekiko independentea da.
- Espezifikazioak modu koherentean adierazten ditu.
- Sistema automatizatuari egokitua da.

### **2.1.3. Adierazpen-mailak**

Automatismo baten gauzatzea progresiboki egiteko, Grafcetaren diseinua bi mailatan egin ohi da. Lehen maila espezifikazio funtzionalei lotua da, bigarrena espezifikazio teknologikoez arduratzen delarik. Grafceta automatan implementatzeari lotua den hirugarren maila bat ere aipa daiteke, baina ez da bete beharrezkoa eta gehienetan ez da erabilia.

#### **2.1.3.1. Lehen mailako Grafceta**

Maila honetako helburua automatismoaren funtzionamendua ulertzea da. Zati eragilearekiko kontrol zatiaren joera identifikatu edo zehaztu behar da.

Lehen maila honetan ez da eragingailu eta sentsoreen teknologiaz kezkatu beharrik. Lehen mailako Grafcetak nahi diren sekuentzien funtzionamendua adierazteko helburua du soilik. Ate bat ireki edo itxi behar bada, 2.1 irudian azaltzen den moduan, maila horretako Grafcetean adierazten da, atea zein teknologiarekin kontrolatua den aipatu gabe. Soilik atea noiz ireki behar den eta noiz itxi behar den jakin behar dugu. Automatismoaren sekuentzien adierazpena eguneroko hitzekin adierazten da.

Lehen mailako Grafcetak automatismoak osatu behar dituen funtzioak identifikatzea ahalbidetzen du. Momentuz gauzatzeko erabiliko den teknologia aipatu gabe, funtzio bakoitzarentzat hainbat zehaztapen egin behar dira: zein diren gauzatu behar diren ekintzak; nola jakin dezakegun ekintza bat egina izan dela; nola segurtasuna bermatu.

#### **2.1.3.2. Bigarren mailako Grafceta**

Bigarren mailako Grafceta osatzeko, lehen mailako Grafceta erabiliko da, aipatu diren funtzioei loturiko ekintzak gauzatzeko eragingailuak eta informazioak lortzeko sentsoreak hautatzeko.

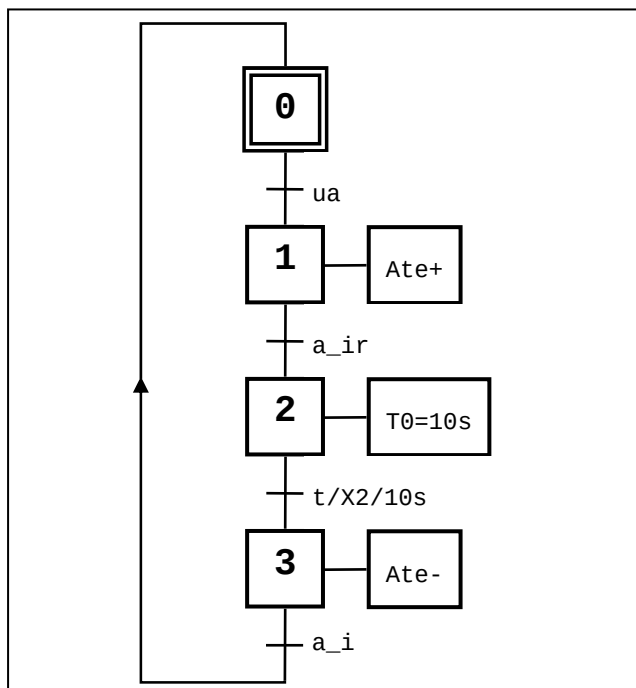
Beraz, automatismoaren diseinuan, bigarren etapa honetako eginkizun nagusia behar ditugun teknologiak hautatzea da. Esaterako, maila honetan erabakiko da lehen aipaturiko adibidean atea irekitzeko eta ixteko zilindro hidrauliko bat edo beste eragingailu bat erabiltzea. Sentsore eta eragingailu bakoitza izen edo sinbolo logiko batekin identifikatu behar da. Izen logiko edo aldagai horrek adierazpen literarioa ordezkatzeko du, eta

2. mailako Grafcetean eta haren inplementazioan/programazioan erabilia da. Horregatik, bigarren mailako Grafceta egin aitzin, komeni da sinboloen taula bat sortzea, sinbolo bakoitzak duen zentzua eta natura (bereziki sentsoreei loturiko sarrera edo eragingailuei loturiko irteera seinalea den) adieraziz, 2.1 taulan agertzen den bezala aurreko adibidearentzat.

2.1 taula. Adibideko sinboloen taula.

|                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| <b>ua (CIO000.00)</b>   | <b>Urrutiko agintea</b>    |
| <b>a_ir (CIO000.01)</b> | <b>Atea guztiz irekita</b> |
| <b>a_it (CIO000.02)</b> | <b>Atea guztiz itxita</b>  |
| <b>Ate+ (CIO001.00)</b> | <b>Atea ireki</b>          |
| <b>Ate- (CIO001.01)</b> | <b>Atea itxi</b>           |
| <b>T0</b>               | <b>Denbora beteta</b>      |

2.2 irudiak aurreko adibidearen bigarren mailako Grafceta erakusten du.



2.2 irudia. 2. mailako Grafceta.

## 2.2. Oinarrizko osagaiak

Lehenago ikusi dugun gisan, Grafcetaren bidez automatismoaren sekuentzia adierazten da, gertakarien arabera zein ekintza egiten den azalduz. Grafqueta honako osagai hauek erabiliz definitzen da:

- **Etapak**, zeini **ekintzak** lotzen zaizkien.
- Etapen arteko **trantsizioak**, zeini **harmenak** lotzen zaizkien (trantsizioari elkartutako baldintza logikoaren adierazpen boolearrak/logika konbinazional-ekoak);
- **Lotura-lerroak**, etapak eta trantsizioak lotzen dituztenak.

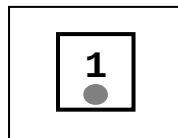
Ondoko azpisekzioetan osagai bakoitza aurkezten da.

### 2.2.1. Etapak

Etapek automatismoaren egoera egonkor desberdinak adierazten dituzte.

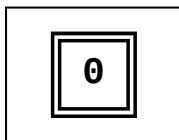
Etapak bat lauki batekin adierazten da, barnean zenbaki positibo bat duelarik. Bi etapak ezin dute zenbaki bera izan. Etaparen egoeraren informazioa gordetzeko erabiltzen den bit bakarreko memoriaren helbidea ere ager daiteke, baina ez da beharrezkoa eta normalki ez da idazten.

Etapak bi egoera izan ditzake, aktiboa edo ez. Aktiboa izateak erran nahi du automatismoa, bere sekuentzian, egoera horretan aurkitzen dela. Logika-ikuspegi batetik,  $i$  etapa  $X_i$  aldagai boolear batekin adieraziko da. Beraz,  $X_i=1$  izango da etapa **aktiboa** delarik eta  $X_i=0$  ez delarik **aktiboa**. Grafcetaren bilakaera aztertzen delarik, etapa bat aktiboa dela adierazteko, puntu bat marrazten da lauki barnean, azpiko aldean, 2.3 irudian agertzen den modura. Jakin behar da etapa bat baino gehiago izan daitezkeela aktibo denbora berean.



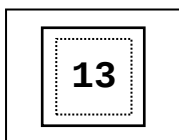
2.3 irudia. Etapa aktiboa.

Automatismoa abiatzean egoera batean aurkitzen da. Hasierako egoera hori zein den adierazteko, **hasierako etapak** erabiltzen dira. Hasierako etapak (bat baino gehiago izan daitezke) aktibatzen dira automatismoaren kontrol-zatia abiatzean. Etapa arruntetatik desberdintzeko, lauki bikoitza dute (2.4 irudia).



2.4 irudia. Hasierako etapa.

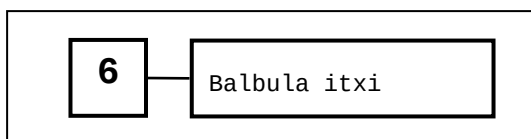
Automatismoa dabilen bitartean, ekintza berezi batek (kapitulua bukaera aipatzen dira halako ekintzak) etapa bat hasieratu dezake. Beraz, nahiz eta gutxi erabiltzen diren, **etapa hasieragarriak** ere existitzen dira. Bi laukiz adierazten dira, baina barneko laukia marratxoekin/puntutxoekin osatua da (ikus 2.5 irudia).



2.5 irudia. Etapa hasieragarria.

### 2.2.2. Ekintzak

Gehienetan, etapa bat, denbora batez ekintza bat (edo gehiago) gauzatu behar den fase bati lotua da. Beraz, kasu horietan, Grafceteko etapei ekintza bat (edo gehiago) elkartzen zaie eskuineko aldean, 2.6 irudian agertzen den bezala. Ekintza, etapari lerro horizontal baten bidez loturik den laukizuzen batean adierazten da. Ekintza bat baino gehiago adierazi behar badira, bakoitza bere laukizuzenean adierazten da. Lehen mailako Grafcetean, ekintzak eguneroko hizkuntzan adierazten dira, infinitiboan diren aditzak erabiliz (ireki, itxi, jaitsi, hoztu...).



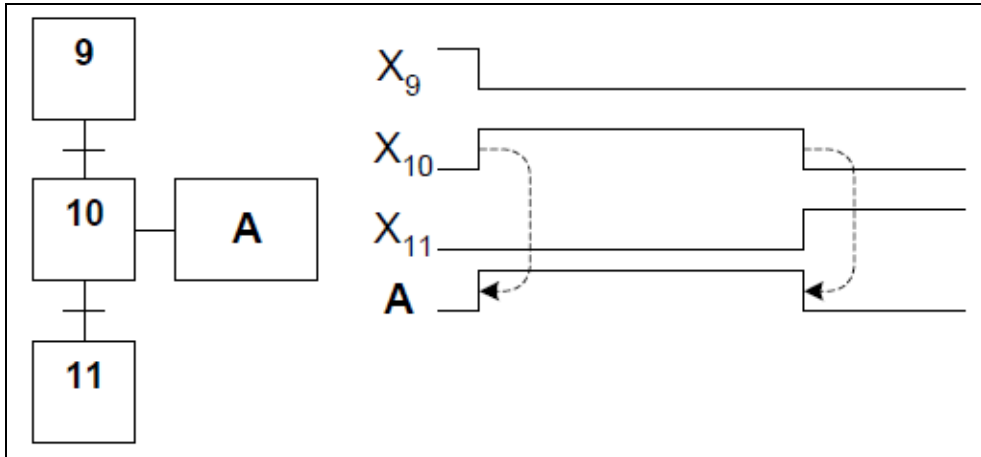
2.6 irudia. Ekintza.

Gorago aipatu gisan, bigarren mailako Grafcetean, ekintzak sinbolo logiko baten bidez adierazten dira, adierazpen konpaktuago bat lortuz. Sarreretatik desberdintzeko hizki larriaz adieraz daitezke, baina hori ez da ezinbesteko araua.

Ekintzak mota desberdinetakoak izan daitezke. Ekintza mota laukizuzen barneko ezkerraldean adieraz daiteke. Ondorengo sekzioek mota horiek aztertzen dituzte.

#### 2.2.2.1. Ekintza jarraitua edo ez-memorizatua

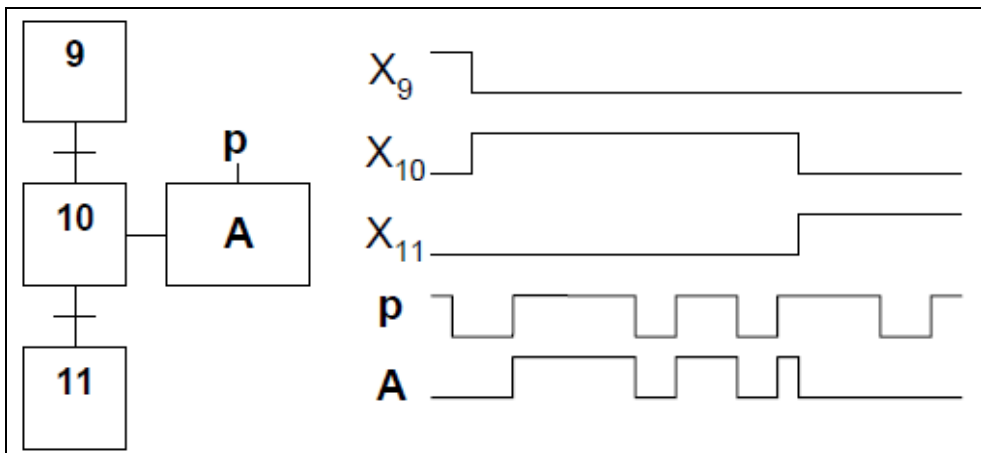
Ekintza mota hau etapa aktiboa den bitartean gauzatzen da. 2.7 irudiak Grafcetean adierazten den ekintza eta Grafcetari loturiko kronograma erakusten ditu. Grafcet zati hori ikusiz, ondoriozta daiteke logika-ikuspegitik  $A=X_2$  lortzen dela.



2.7 irudia. Ekintza ez-memorizatua.

### 2.2.2.2. Ekintza baldintzatua

Halako ekintza bat gauzatzeko, loturik den etapa aktiboa izan behar da, eta, gainera, ekintzari loturiko baldintza bat bete behar da. Baldintza hori adierazpen boolear baten bidez definitzen da, harmenak bezala. 2.8 irudian Grafctean adierazten den ekintza eta Grafcetari loturiko kronograma erakusten dira. Baldintza adierazteko, ekintzaren laukizuzenaren gaineko lerroari loturik, marratxo bertikal bat marrazten da, eta horren gainean baldintza zein den idazten da.

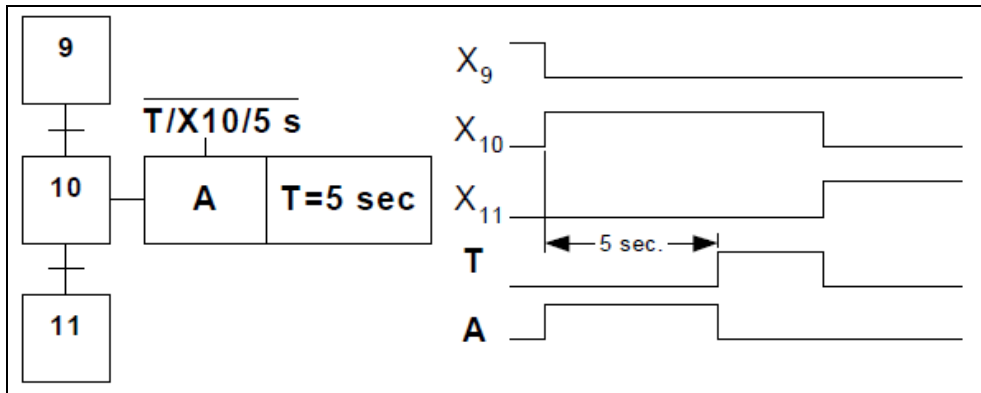


2.8 irudia. Ekintza baldintzatua.

Grafcet zati hori ikusiz, ondoriozta daiteke logika-ikuspegitik  $A=p$  ETA  $X_{10}$  lortzen dela.

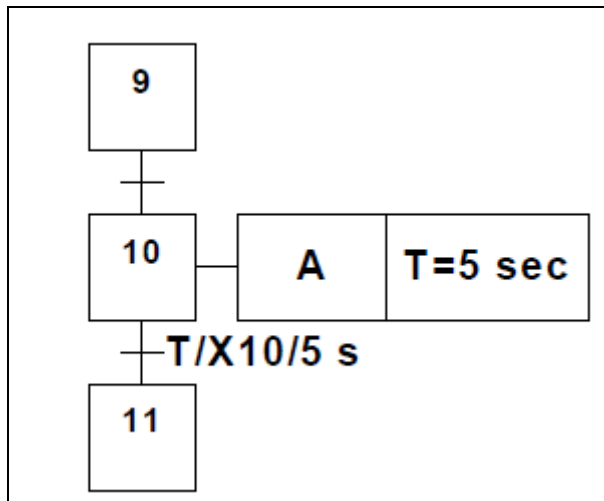
Lehen mailako Grafctean, ekintza eta baldintza laukizuzenaren barnean adierazten dira, esaterako: «Leihua ireki tenperatura  $25^{\circ}$  baino handiagoa bada».





2.10 irudia. Ekintza mugatua denboran.

Lehen aipatu gisan, etapa 5 segundo aitzin desaktibatzen bada, ekintza ez da 5 segundoetan aplikatuko. Ekintza 5 segundoz aplikatu nahi balitz, 2.11 irudian agertzen den aukera erabiltzen ahalko litzateke. Aukera horretan, denboragailua trantsizioari lotua da (2.2.4 atalean aztertuko ditugu zehazkiago trantsizioak eta harmenak).



2.11 irudia. Denborazko trantsizioa.

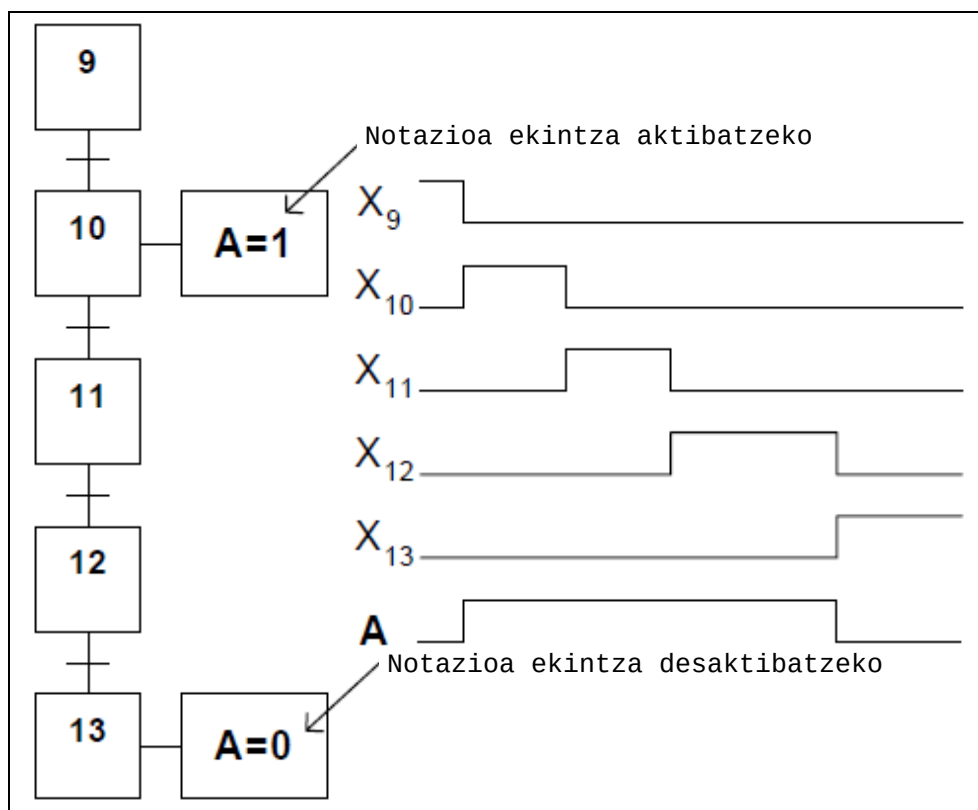
### 2.2.2.5. Pultsu motako ekintza

Ekintza hau aurrekoa bezalakoa da, non T denbora 0-rantz doan. Beraz, ekintza etapa aktibatzen den unean soilik aplikatzen da, scan ziklo bakarrean.

### 2.2.2.6. Ekintza memorizatua

Ekintza memorizatu bat bi etapari elkartua da, lehenean abiatzen da eta bigarreanean gelditzen. Beraz, ekintza mota hau abiatze-etapa aktibatu bezain laster gauzatzen da, eta gelditze-etapa aktibatzean gelditzen da.

Esaterako 2.12 irudian, ekintza 10. etapa aktibatzean hasten da, eta 13. etapa aktibatzean gelditzen da.



2.12 irudia. Ekintza memorizatua.

Ekintza mota hau ezin da adierazpen logiko soil batekin erakutsi. Horretarako, x irudian ikusten den moduan, RS baskula bat erabili behar da. Abiatze-etapa SET sarrerari lotua da, eta gelditze-etapa RESET sarrerari.

### 2.2.2.7. Ekintza anizkoitzak

Hain erabiliak ez izan arren, jakin behar da nazioarteko normak ekintza anizkoitzak ere onartzen dituela:

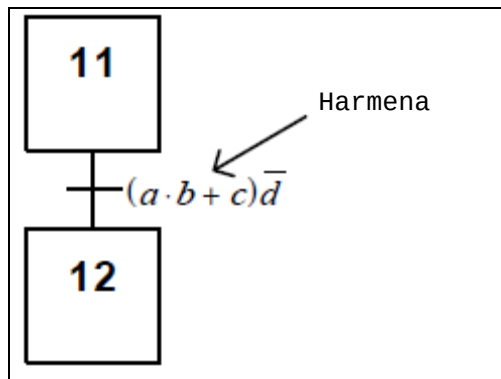
- Memorizatua eta mugatua denboran.



- Memorizatua eta atzeratua.
- Atzeratua eta memorizatua.
- Memorizatua eta baldintzatua.
- Baldintzatua eta memorizatua.

### 2.2.3. Trantsizioak

Bi etaparen arteko hesiak dira trantsizioak. Hesi horiek **zeharkatzeko**, trantsizioei loturiko harmenean adierazten diren baldintza batzuk bete behar dira. 2.13 irudian erakusten den bezala, trantsizioa loturarekiko perpendikularra den marratxo batekin adierazten da (normalki marratxoa horizontala da beraz).



2.13 irudia. Trantsizioa eta harmena.

Trantsizio aurreko etapa (edo etapak) aktibatua delarik, trantsizioa **balidatua** dela erraten da.

Normalki, etapak ez bezala, trantsizioak ez dira zenbatzen. Hala ere, geroago ikusiko dugun bezala, Grafcetak automata programagarrietan inplementatzeko, baliagarria izan daiteke trantsizioak zenbatzea. Hori trantsizioaren ezkerraldean, parentesien artean, zenbaki bat idatziz egin daiteke.

### 2.2.4. Harmenak

Harmenak trantsizioak **zeharkatzeko** baldintzak dira, beraz, trantsizioei elkartuak dira, gorago idatzi gisan. Trantsizioa **zeharkatzeko**, **balidatua** izan beharko da, eta, gainera, **harmena egia** izan beharko da.

Harmena trantsizioaren eskuineko aldean idazten da, 2.13 irudian erakusten den bezala. Harmenean agertzen diren aldagaiak jatorri desberdina izan dezakete:

- Kanpoko informazioa adierazten dutenak, sentsoreek edo operadoreak bidalitakoak.
- Baliabide-aldagaiak: kontagailuak eta denboragailuak.
- Etapen egoera adierazten duten Xi aldagaiak.

Mota desberdinetako harmenak daude eta ondoko azpisekzioetan zehazten dira. Dena den, kasu guzietan, harmen edo trantsizio-baldintza guzien emaitza 1 (egia) edo 0 (faltsua) balioa hartzen duen aldagai bitarra da.

#### **2.2.4.1. Maila motako harmena**

Baldintza logiko bat duen harmen bat da, goiko 2.13 irudian agertzen den moduan:  $(a \cdot b + c) \cdot \bar{d}$ . Errezeptibitate honi loturiko trantsizioa balidatua den bezain laster zeharkatua da.

Jakin behar da Xi aldagai bitarraren bidez adierazten den etapen egoera ere erabil daitekeela aldagai logiko gisa harmenetan.

#### **2.2.4.2. Beti egia den harmena**

Harmen honen balio logikoa beti 1 da. Hori adierazteko, trantsizioaren eskuinean «=1» idazten da.

#### **2.2.4.3. Harmen tenporizatua**

Harmen mota honek denbora erabiltzen du baldintza modura. Ondorioz, denboragailu bat erabili behar da hau kudeatzeko. Baldintza mota hau adierazteko erabiltzen den notazioa hau da:  $T/i/q$  edo  $T/i/\bar{q}$ , non  $i$  denboragailu ekintza duen etaparen zenbakia den, eta  $q$   $i$  etapa aktibatzen denetik denboragailuaren irteera 1 izateko pasa behar den denbora den. 2.11 irudia ikus daiteke adibide gisa.

#### **2.2.4.4. Pultsu motako harmena**

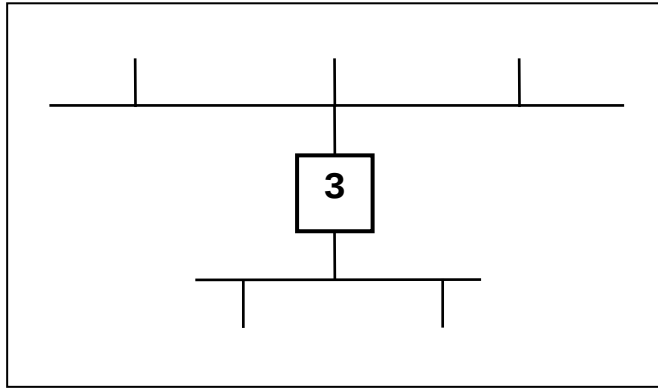
Gertakari bati loturiko harmen mota da. Gertakaria goranzko geziaren bidez ( $\uparrow a$ ) edo beheranzko geziaren bidez ( $\downarrow a$ ) adieraz daiteke.

### **2.2.5. Lotura-lerroak**

Lotura-lerroak etapak eta trantsizioak haien artean lotzeko erabiltzen dira. Loturen zentzua goitik behera da bertikala delarik, eta ezkerretik eskuinera horizontala delarik. Zentzua desberdina bada, erraterako behetik gora, loturan gehitzen den gezi baten bidez azaltzen da.

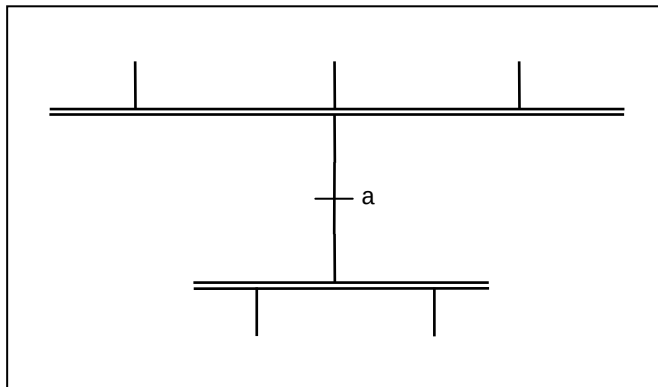
Lotura anitz heltzen badira etapa batera, Grafcetaren argitasuna bermatzeko, etaparen alde bateko ber puntu batera helarazi ordez, lerro horizontal batera helarazten dira.

Gauza bera egiten da lotura anitz ber etapa batetik abiatzen badira (begira 2.14 irudia). Lerro horiek etapa baten aldearen handitze modura ikus daitezke.



2.14 irudia. Lotura-lerroak elkartzen.

Era berean, lotura anitz heltzen badira trantsizio batera, trantsizioa aitzin jartzen den lerro bikoitz batera lotzen dira, 2.14 irudian agertzen den gisan. Trantsizioaren goiko zatia adierazpena bezala ikus daiteke lerro bikoitz hori. Trantsizioaren ondoren lotura lerro bat baino gehiago bada, gauza bera egiten da.



2.15 irudia. Lotura-lerroak ETA egituraren.

Beraz, laburbilduz, lotura-lerroei loturiko lerro horizontalek etapei atxikiak dira, eta lerro bikoitzak, aldiz, trantsizioei.

### 2.3. Eboluzio/bilakaera arauak

Grafcetaren bilakaera nola gertatzen den zehazteko, normak 5 arau ematen ditu. Arau horiek nahikoak dira Grafcet baten joera kudeatzeko. Ondoko azpisekzioetan arauak ematen eta zehazten dira.

Arau hauetaz gain, oso garrantzitsua da etapa eta trantsizioen alternantzia errespetatzea: bi etapen artean beti trantsizio bat izan behar da eta bi trantsizioen artean etapa bat.

### 2.3.1. 1. araua: hasierako egoera edo hasierako etapa

Definizioz funtzionamenduaren hasieran aktiboak diren hasierako etapek karakterizatzen dute hasierako egoera. Gutxienez hasierako etapa bat bada.

Normalki, ez zaie ekintzarik elkartzen hasierako etapei, eta, beraz, atsedeen-etapak dira.

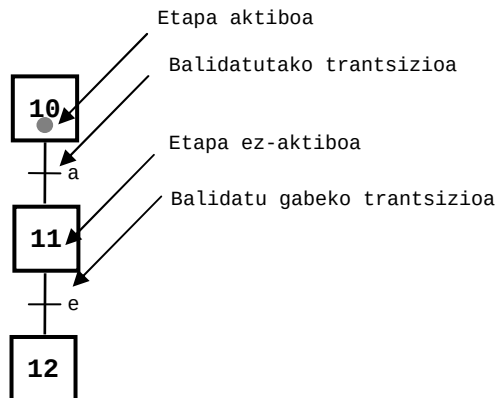
### 2.3.2. 2. araua: trantsizio baten zeharkatzea

Trantsizio bat **balidatua da edo ez**. Balidatua dela erraten da, justu haren aurretik diren etapa guztiak aktiboak direlarik, bestela, ez da balidatua.

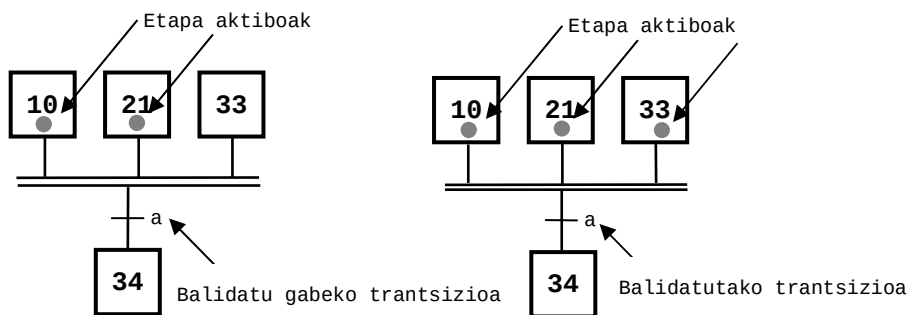
Trantsizio bat **zeharkagarria** da **balidatua** delarik eta loturik den harmen edo trantsizio-baldintza **egia** delarik. Zeharkagarria den trantsizio oro zeharkatua da.

2.16 irudiak kontzeptu hauek hobeki ulertzeko adibide batzuk erakusten ditu.

## Sekuentzia bakarreko Grafceta



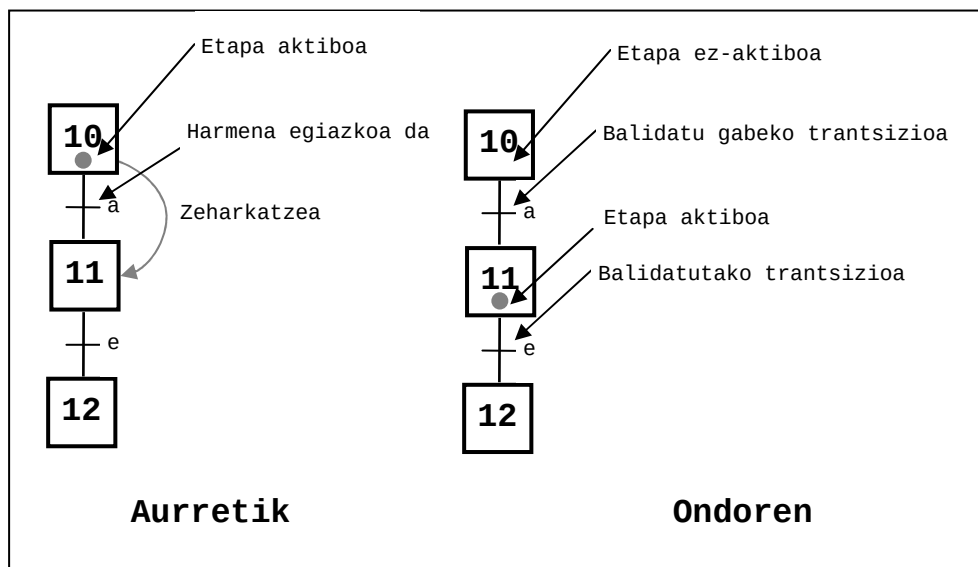
## Sekuentzia simultaneoak dituen Grafceta



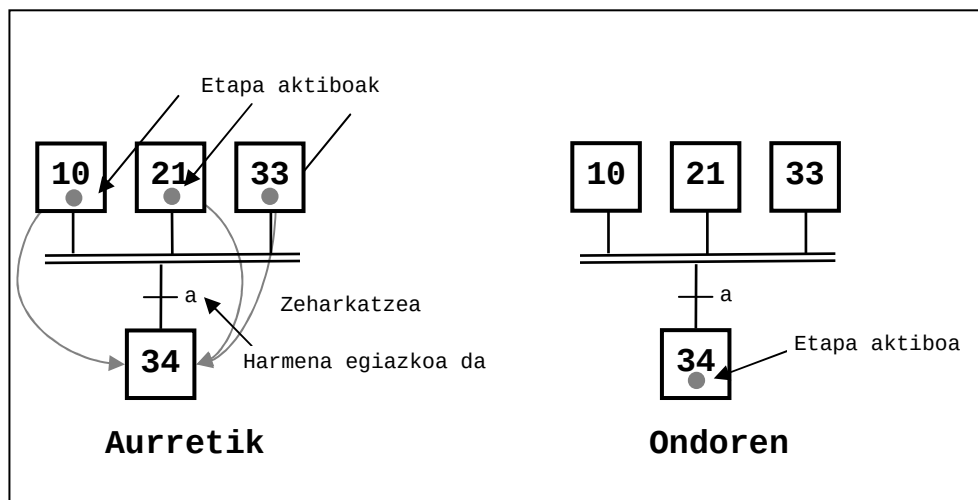
2.16 irudia. Trantsizioen balidazioaren azalpena.

### 2.3.3. 3. araua: zeharkatzea edo etapa aktiboaren bilakaera

Trantsizio baten zeharkatzeak, aldi berean, justu ondorengo etapen aktibazioa eta justu aitzinetik diren etapen desaktibazioa eragiten ditu. 2.17. eta 2.18. irudiek adibideekin irudikatzen dute arau hori, kasuan kasu, sekuentzia bakarreko Grafceten kasuan eta sekuentzia anitz paraleloan aktibo dauden kasuetarako irudiotan ikus daiteke Grafcetaren funtzionamenduko oinarrietako bat eta erabiltzen den terminologia (etapa aktibo/ez-aktiboak, balidazioa, trantsizioak, zeharkatzea, etab.).



2.17 irudia. Sekuentzia bakarreko Grafcten zeharkatze adibidea.



2.18 irudia. Sekuentzia anitzeko Grafcten zeharkatze adibidea.

### 2.3.4. 4. araua: trantsizioen aldibereko / baterako zeharkatzea

Aldi berean trantsizio anitz zeharkagarriak badira, batera zeharkatuak dira.

### 2.3.5. 5. araua: etapa baten aldibereko aktibazio eta desaktibazioa

Etapa bat aldi berean aktibatu eta desaktibatu behar bada, aktibatutik geratzen da. Aktibatua geratzeak lehentasuna du.

Grafcetaren barne-koherentzia deritzo arau honi.

## 2.4. Grafcetaren oinarritzko egiturak

Beheko azpisekzioetan Grafcetetan agertzen diren oinarritzko egiturak edo sekuentzia motak azaltzen dira. Bereziki EDO eta ETA konbergentzia eta dibergentziekin osatuak dira.

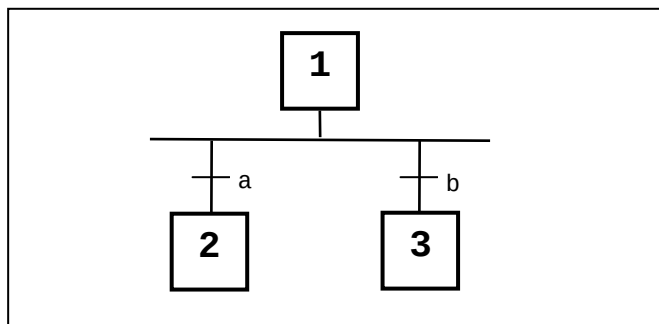
### 2.4.1. Sekuentzia bakarra

Izan daitekeen Grafcet xumeena 2.1 irudian agertzen den sekuentzia bakarra da. Kasu hauetan ez dago konbergentzia ez dibergentziarik eta hauek implementatzea erraza izaten da oro har. Sinpleak iruditu arren, sistema ugari du honelako Grafcet eskema oinarritzat.

### 2.4.2. Sekuentzia-hautaketak EDO egiturari lotuak

Sekuentzia mota hauetan, sekuentzia adar desberdinen artean hautaketa batzuk egin behar dira. Hautaketa horiek EDO motako dibergentzia dute.

EDO dibergentzia gertatzen da harmenen arabera etapa desberdinen aktibazioa egiteko hautua delarik. 2.19 irudian ikus daitekeen moduan, 1 aktiboa bada, bi trantsizioak balidatuak dira. a harmena egia bada eta ez b, lehen trantsizioa zeharkagarria da eta orduan 1 desaktibatua da, 2 aktibatua eta bi trantsizioak ez dira gehiago balidatuak. Kontrakoa ere gerta daiteke, b egia izatea eta a ez. Orduan 3 aktibatuko litzateke 1en orde.



2.19 irudia. EDO dibergentzia.

Aldiz, a eta b egiak badira batera, 1 aktibo bihurtzean, bi trantsizioak zeharkagarriak dira eta 2 eta 3 aktibatzen dira.

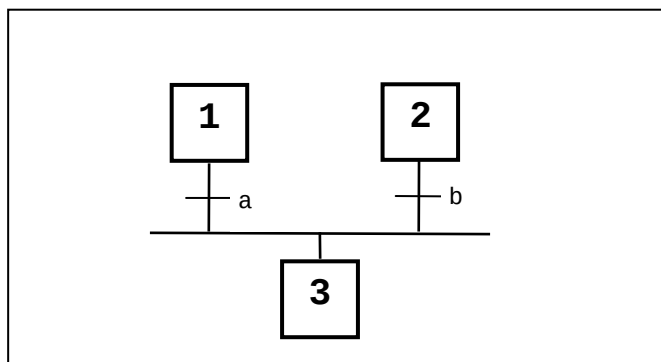
Gogoratu lerro horizontal hori etapari lotua dela.

**Oharra:** kasu praktiko gehienetan EDO dibergentziak eksklusiboak dira. Erran nahi da soilik sekuentzia adar bat aktibatzen dela. Batzuetan, naturalki gertatzen da. Esaterako, a ur-ontzi bat badugu eta a egia bada betea delarik eta b aldiz hutsa delarik, ezinezkoa da a eta

b batera egiak izatea. Beste batzuetan eskusibotasun hori ez da hain argia, eta orduan harmenetan adierazi behar da.

EDO konbergentziak ere lerro horizontal edo barra bera du. Trantsizio askok etapa bakarrean konbergitzen dutelarik gertatzen da. 2.20 irudian lerro sinplea 3. etaparen goiko aldea bezala kontsidera daiteke. 1 aktiboa bada, (1) trantsizioa balidatua da. a egia bada, trantsizioa zeharkatua da, eta 3. arauaren arabera 3 aktibatua da eta 1 desaktibatua.

1 eta 2 aktiboak balira batera eta a eta b harmenak egiak, 3 aktibatuko litzateke eta 1 eta 2 desaktibatuko.



2.20 irudia. EDO konbergentzia.

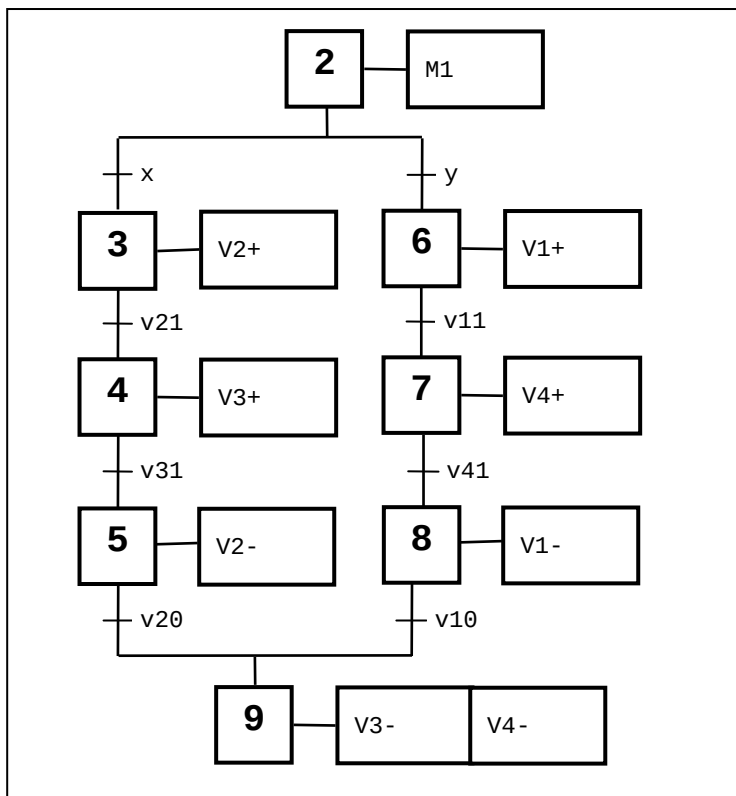
Hurrengo azpiatalean mota honetako hiru sekuentzia-hautaketa arrunt erakusten dira.

#### 2.4.2.1. Sekuentzia eskusiboak

Sekuentzia mota hauek bi etapa-serieren artean zein gauzatuko den hautatzea ahalbidetzen dute. Erraterako, 2.21 irudiko adibidean, x eta y aldagai bitarren balioen arabera, 2. etapa desaktibatzean 3.a edo 6.a aktibatuko da. Beraz, sekuentzia bakarra hautatua da, «esklusibo» izenak dioen bezala. x eta y-ren balioak elkarrengandik eskusiboak izan behar dira.

Irudi berari begiratuz, erran daiteke 2. etaparen ondoren den dibergentzia EDO dibergentzia bat dela, eta 9. etaparen aitzineko konbergentzia EDO motako konbergentzia dela.





2.21 irudia. EDO dibergentziaren adibidea.

#### 2.4.2.2. Etapa-saltoa

Etapa-saltoak etapa-serie bat gauzatzea edo ez ahalbidetzen du. 2.22 irudian agertzen den adibidean, 3, 4, 5 eta 6 etapak aktibatuko dira banan-banan, y egia bada. Bestenaz, x egia bada, 2. etapatik zuzenean 7.era saltatuko dugu. Hemen ere, x eta y aldagaiaik esklusiboak izan behar dira.

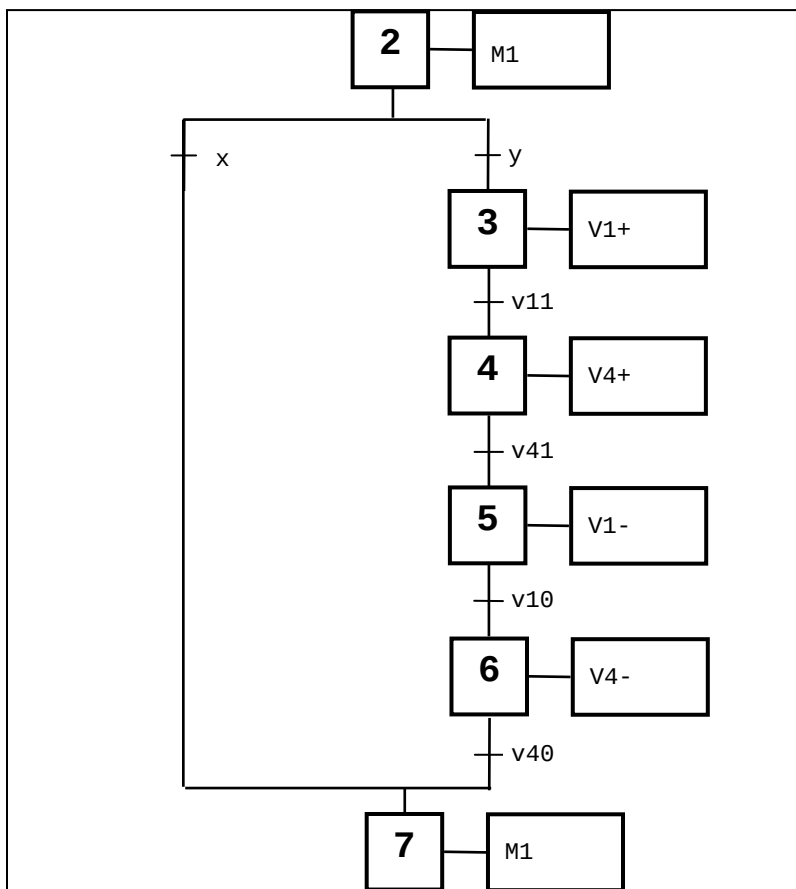
#### 2.4.2.3. Etapa berreskuratzea

Etapa berreskuratzearen bidez, etapa-serie bat anitz alditan berriz aktiba daiteke. Erraterako 2.23 irudiko adibidean, 3, 4, 5 eta 6 etapak soilik behin aktibatuko dira, y aldagaia egia bada, baina x aldagaia bada egia, etapa horiek berriz kontsideratuko/aktibatuko dira.

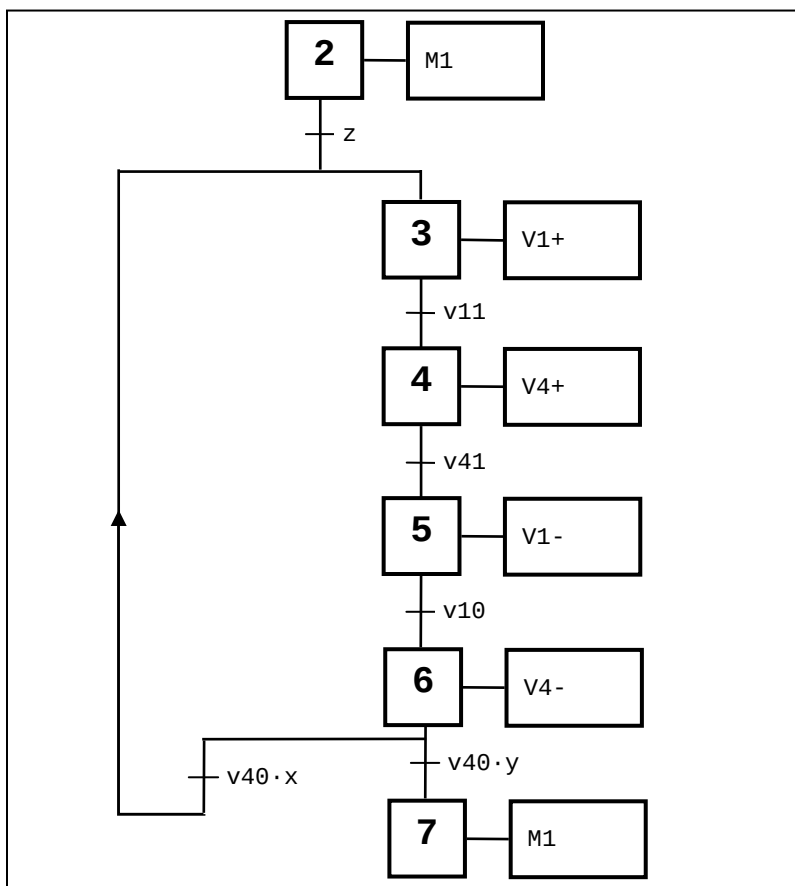
Hemen ere x eta y aldagaiaik esklusiboak izan behar dira.

### 2.4.3. Batera egiten diren sekuentziak ETA egiturari lotuak

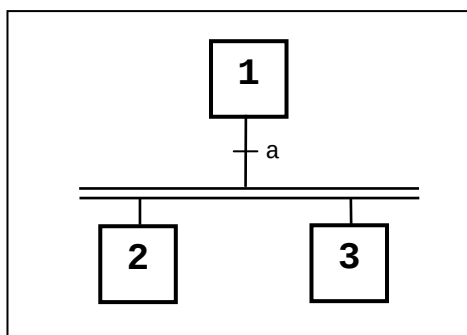
ETA dibergentziak erabiltzen dira etapa baten ondoren sekuentzia-adar bat baino gehiago batera aktibatu nahi direlarik (begira 2.24 irudiari). Gogoratu irudi horretan agertzen den lerro bikoitza trantsizioaren beheko aldeari lotua dela. 1 aktiboa bada, harmena balidatua da, eta a egia bada, zeharkagarria da. Orduan segitzen duten etapak guztiak (2 eta 3) batera aktibatuta dira, eta 1 etapa desaktibatua da.



2.22 irudia. Etapa-saltoak.



2.23 irudia. Etapa berreskuratzea.



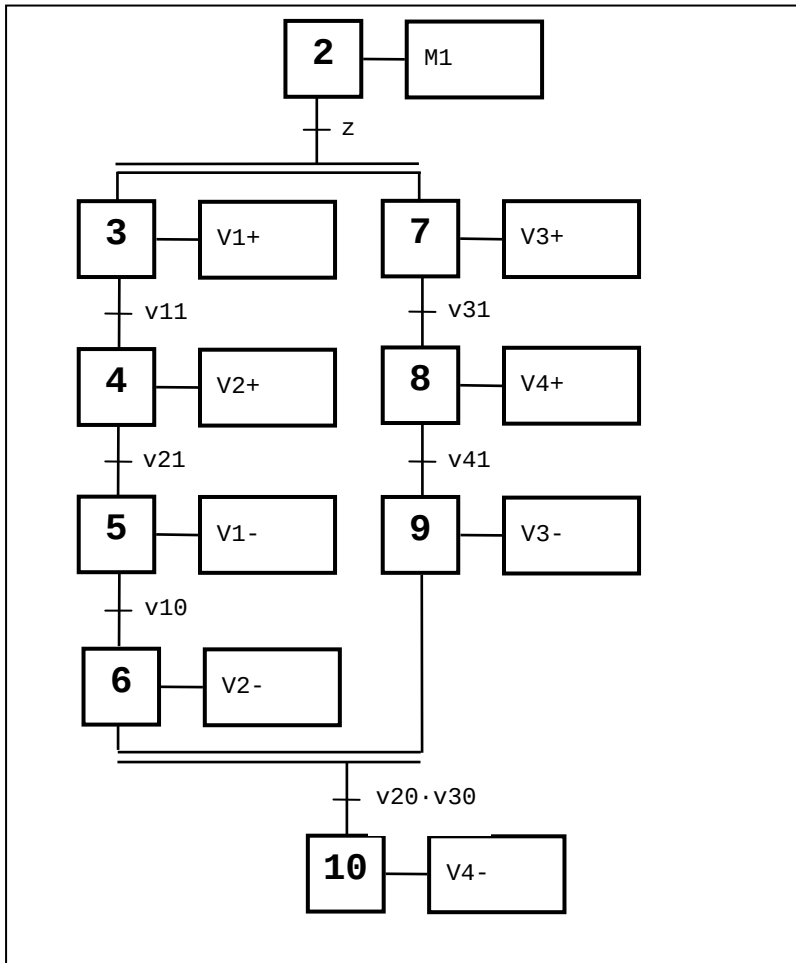
2.24 irudia. ETA dibergentzia.

Barra edo lerro bikoitz hori ETA barra deitzen da, eta aipatu gisa, trantsizioaren zati modura ikus daiteke.

A diagram of a balanced lever. A horizontal beam is supported by a central fulcrum. Three weights are attached to the beam: weight 1 is on the left, weight 2 is on the right, and weight 3 is hanging from the center of the beam. The fulcrum is labeled 'a'.

Ondorengo azpisekzioetan, ETA dibergentzia eta konbergentziarekin osa daitezkeen konfigurazio arrunt batzuk aipatzen dira.

Automatismoak operazio batzuk batera egin ditzakeenean (erraterako ontzi bat bete eta denbora berean beste bat estali), ETA barrak erabil daitezke sekuentzia batzuk batera egiteko. 2.26 irudian, 3 eta 7 etapecin hasten diren bi sekuentziak batera aktibatzen dira, ETA barrari loturiko trantsizioa zeharkatzen denean. Gero adar bakoitzeko operazioak independenteki gauzatzen dira, bakoitza bere erritmoan. 10. etapa aitzin den ETA konbergentzia gainditzeko, 9 eta 6 etapak aldi berean aktibatuak izan behar dira. Hitzordu moduko bat dute beraz. Trantsizioari loturiko harmena egia bada, trantsizioa zeharkatuko da, 10 aktibatuz eta 6 eta 9 desaktibatuz.

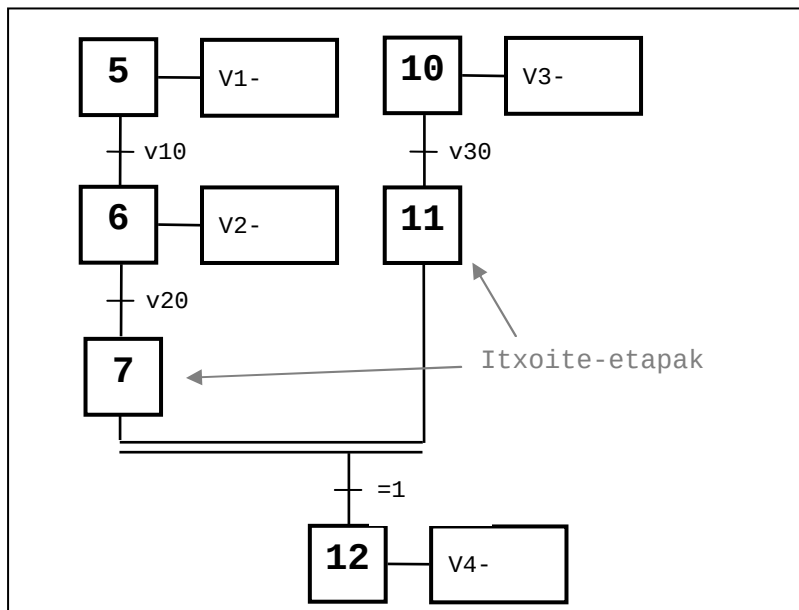


2.26 irudia. Aldibereko sekuentzien adibidea.

Aplikazio batzuetan, sekuentzia bakoitza itxoite-etapa batekin bukatzea komeni da. Hori bereziki egia da eragingailu elektrikoak erabiltzen direlarik. Pentsa 2.26 irudiko 6. etapako ekintzak orga baten desplazamendua adierazten duela.  $v_{20}$  seinale bitarra egia bihurtzen bada, hau da, dagokion sentsoreak orga heldu behar zen lekura iritsi dela detektatzen badu, baina beste adarreko 9 etapa ez bada oraindik aktibatua, orduan ez gara 10. etapara pasatzen eta 6k aktibatua segitzen du. Beraz, orgak bere bidea pasatzen du, gelditu behar zuen lekuan geratu gabe.

Itxoite-etapa bat gehitzeak halako arazoak saihesten ditu, itxoite-etapa aktibatua den bitartean ez baita deus gertatzen. Erraterako 2.27 irudian, 6. etaparen aktiboa delarik,  $v_{20}$  egia bihurtzen den bezain laster, 7 aktibatzen da eta 6 desaktibatzen, eta, beraz, orga behar zuen lekuan dago. Bi itxoite-etapak aktibatuak direlarik, egin behar ziren operazio

guziak eginak izan dira, eta, beraz, normala da ondoko harmena, ETA barraren trantsizioari lotua dena, beti egia izatea (=1).



2.27 irudia. Itxoite-etapak.

### 2.4.3.2. Baliabide baten partekatzea

Automatismo bateko aldibereko bi sekuentziek baliabide bat partekatu behar dutenean, estrategiaren bat erabili behar da. Adibidez, hasierako etapan edo dibergentzian sartu baino lehenagoko etapan baliabidea libre den edo ez adieraz daiteke. Hasieran adibidez, etapa hori aktiboa da eta, beraz, baliabidea libre da. ETA barra bati lotua den beste etapa bat aktibatzean eta trantsizioari loturiko harmena egia izatean, ETA egitura barruko hasierako etapan baliabidea erreserbatzen da ez dela libre adieraziz. Beste adarra baliabidea libre geratu zain geldituko da itxoite-etapa batean, eta aurreneko adarrak amaitzen duenean, baliabidea libre utziko du.

## 2.5. Sakonduz

Kapitulu honetan, Grafcetak egiteko eta ulertzeko oinarritzko kontzeptuak aipatu eta lantzen dira. Hala ere, aplikazio batzuk nahiko konplexuak dira, eta konplexutasun hori hobeki kudeatzen da hemen ikusi ez ditugun tresna batzuekin: makroetapa eta makroekintzekin.

Problema konplexuak ebazteko, Grafcet anitz egin behar dira, eta makroetapek eta makroekintzek Grafcet horien arteko harremanak eta elkarrekintzak modu sinpleagoan kudeatzea ahalbidetzen dute.

Kapitulu honetan agertzen diren adibide eta ariketek automatismo baten funtzionamendu normala aztertzen dute. Baina proiektu orokor batean, problema operazionalak ere aztertu behar dira: nola abiarazi automatismoa laneguna hastean, nola gelditu laneguna bukatzean, zer motatako pana edo matxura gerta daitezkeen, nola kudeatu matxura horiek, etab. Azterketa operazional hori GEMMA (*Guide d'Etude des Modes de Marche et d'Arrêt* edo Funtzionamendu eta Gelditze Moduak Aztertze Gida euskaraz) izeneko gida edo metodologia erabiliz egiten da.

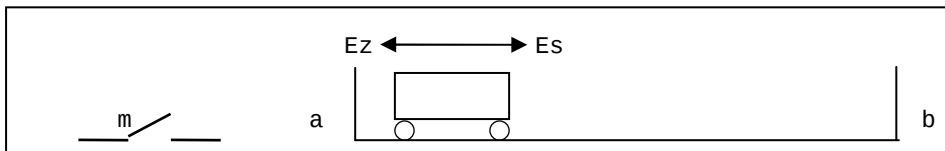
GEMMA osatu ondoren, operazio bakoitzari loturiko Grafcetak osatzen dira, operazio edo funtzionamendu normalekoa barne. Operazio desberdinei dagozkien Grafcetak haien artean ahal bezain modu sinple eta eraginkorrean ibilarazteko oso baliagarriak dira lehen aipaturiko tresnak, bereziki makroekintzak. Dena den, GEMMA kontuan hartu gabe ere, soilik automatismo baten operazio normala aztertuz, operazio hori konplexua bada, anitz Grafcten bidez eta makroetapa eta makroekintzen bidez gauzatzea argiagoa eta errazagoa izan daiteke.

## 2.6. Ariketak

Sail honetan, problema sorta bat ematen, aztertzen eta ebazten da.

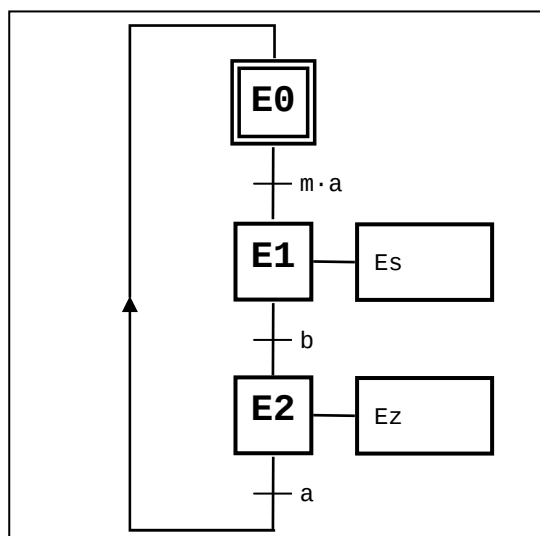
### 2.6.1. Orga sinple baten ibilaldia automatizatzea

Demagun O orga bat dugula, burdinbide bateko a eta b puntuen artean ibil daitekeena.



2.28 irudia. Orgaren eskema funtzionala.

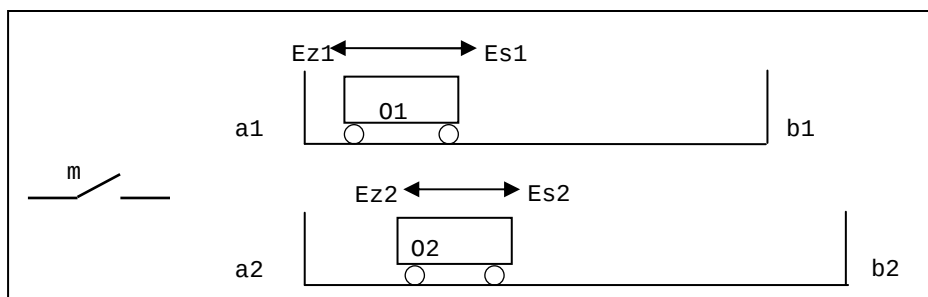
Operadoreak  $m$  botoian zapaltzen duelarik, eta orga  $a$  puntuan geldirik bada, orga eskuinera mugitzen da,  $Es$  ekintzaren bidez,  $b$  punturaino.  $b$  puntura heltzen delarik, orga berehala  $a$  puntura itzultzen da,  $Ez$  ekintzaren bidez. Sarrera eta irteeren taula eman ondoren, osa ezazu automatismo hori gauzatzeko Grafqueta.

**Ebazpena**

2.29 irudia. 2.6.1. ariketaren ebazpena.

**2.6.2. Bi orgaren ibilbide bitan sinkronizatua automatizatzea**

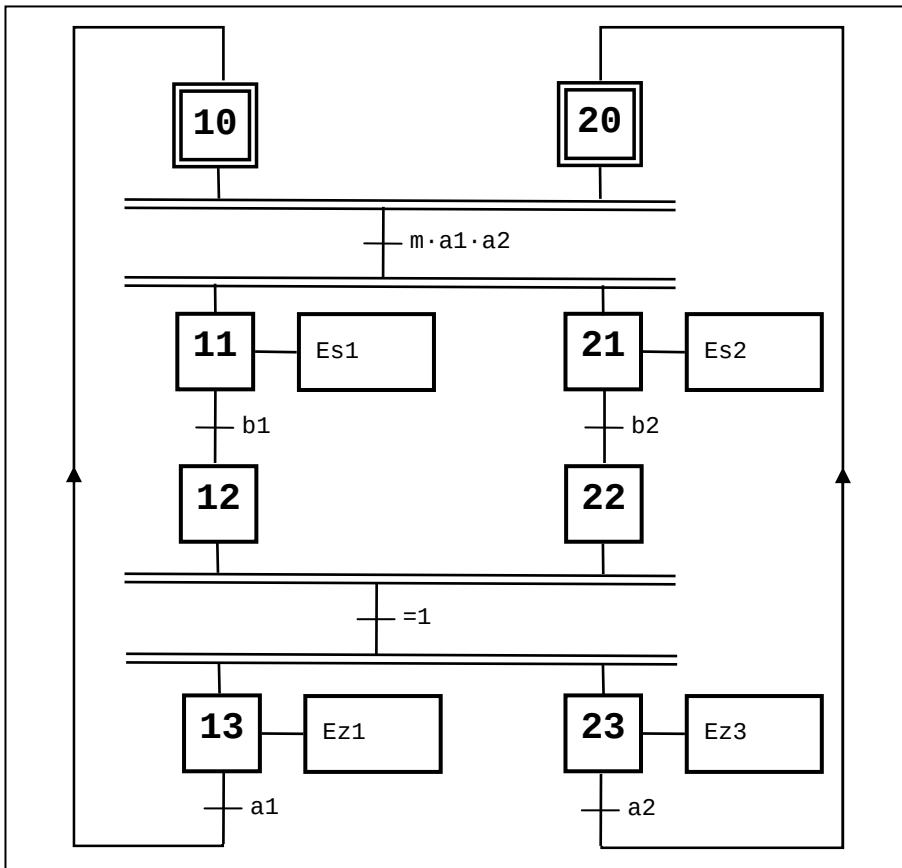
Demagun *O1* eta *O2* izeneko bi orga ditugula, burdinbide batzuetan *a1* eta *b1* puntuen artean, eta *a2* eta *b2* puntuen artean mugi daitezkeenak.



2.30 irudia. Bi orga sinkronizatu.

Operadoreak *m* botoia zapaltzen duelarik, bi orgak *a1* eta *a2* puntuetan geldirik badira, eskuinera doaz *Es1* eta *Es2* ekintzen bidez. *O1* *b1* puntura heltzen delarik, gelditzen da eta *O2* itxaroten du. *O2* *b2* puntura iristean geratzen da eta *O1*-en beha egoten da. Modu horretan, hitzordu edo sinkronizazio bat osatzen dugu bi orgen artean *b1* eta *b2* puntuetan. Hitzordua gauzatu ondoren, bi orgak ezkerretara doaz *Ez1* eta *Ez2* ekintzen bidez, *a1* eta *a2*-raino. Sarrera eta irteeren taula eman ondoren, osa ezazu automatismo hori gauzatzeko Grafcata.



**Ebazpena**

2.31 irudia. 2.6.2. ariketaren ebazpena.

**2.6.3. Bi orgaren sinkronizazio edo hitzordu bakarreko ibilbidea automatizatzea**

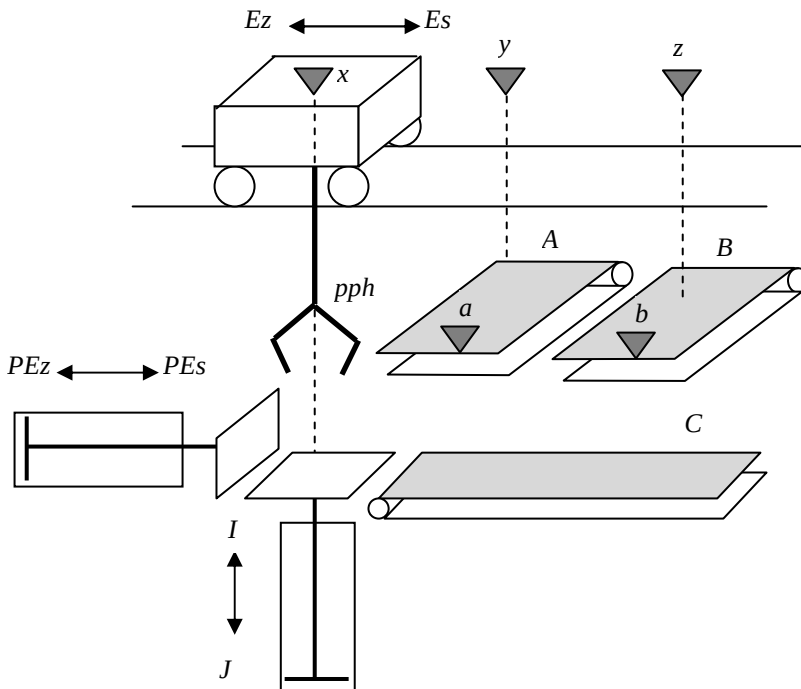
Demagun 6.2. azpisekzioko problema bera dugula, baina eskuinera heltzean,  $b1$  eta  $b2$ -ra, ez dutela elkar itxaroten, erran nahi da ez dela hitzordutik han eta berehala bakoitza ezkerreara itzultzen dela.

Sarrera eta irteeren taula eman ondoren, osa ezazu automatismo hori gauzatzeko Graficeta.



Hasieran orga x-n da, pintza irekia da ( $ppi$  egi) eta platera behean da.

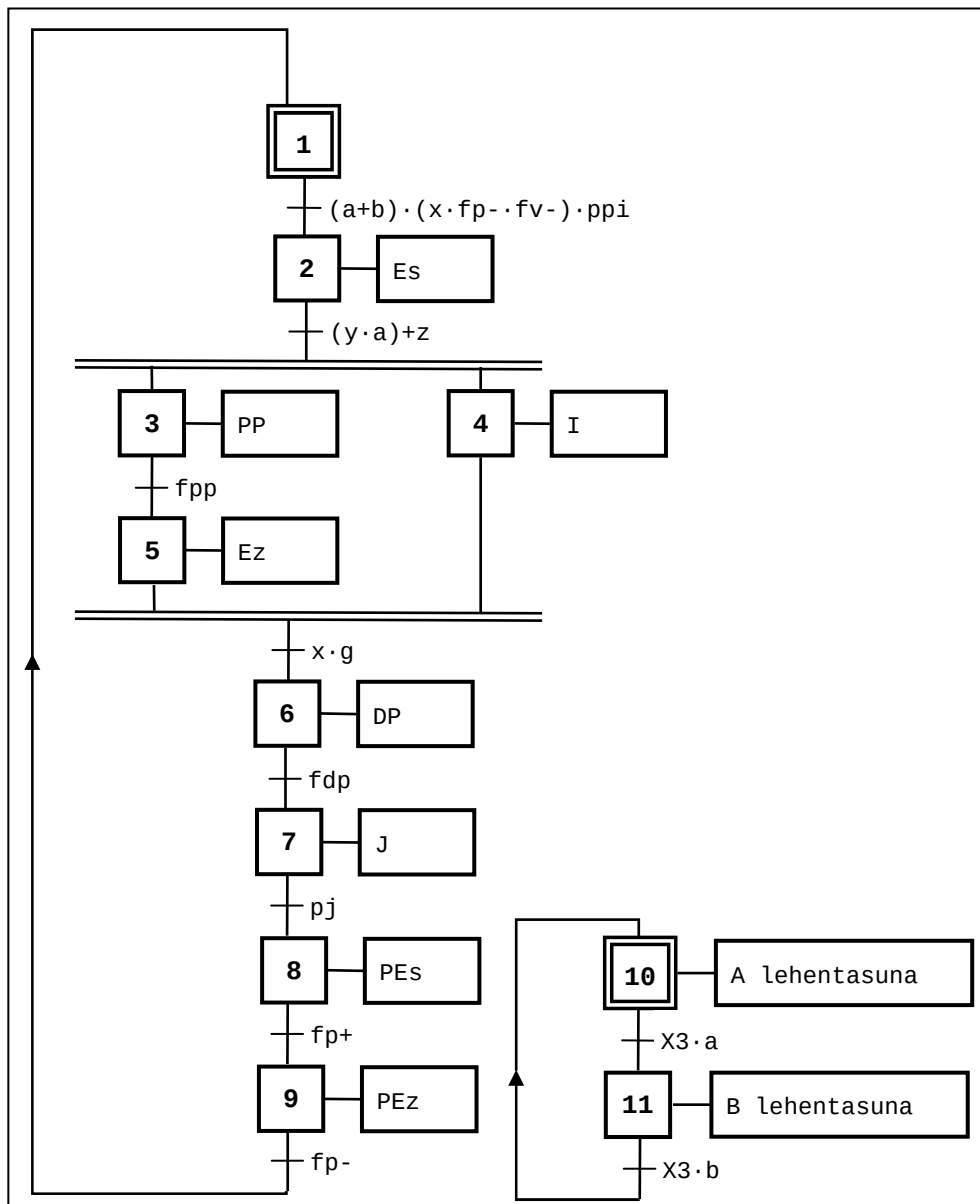
A eta B uhalek pieza bana ekartzen badute aldi berean, orga aurreko aldian izan ez den uhal gainera joan behar da piezaren bila. Uhalaren hautua lehentasunaren arabera soilik gatazka bat delarik (bi uhaletan pieza bana aldi berean) egin behar da. Lehentasun-arazo hori kudeatzeko, Grafcet berezi bat egitea gomendatzen da.



2.33 irudia. Errailetan doan orgaren eskema.

Oharra: PP ekintzaren baitan badira beste azpiekintza batzuk, baina hori makroetapa baten bidez kudeatua da. Guk soilik PP ekintza kontsideratuko dugu.

Sarrera eta irteeren taula eman ondoren, osa ezazu automatismo hori gauzatzeko Grafqueta.

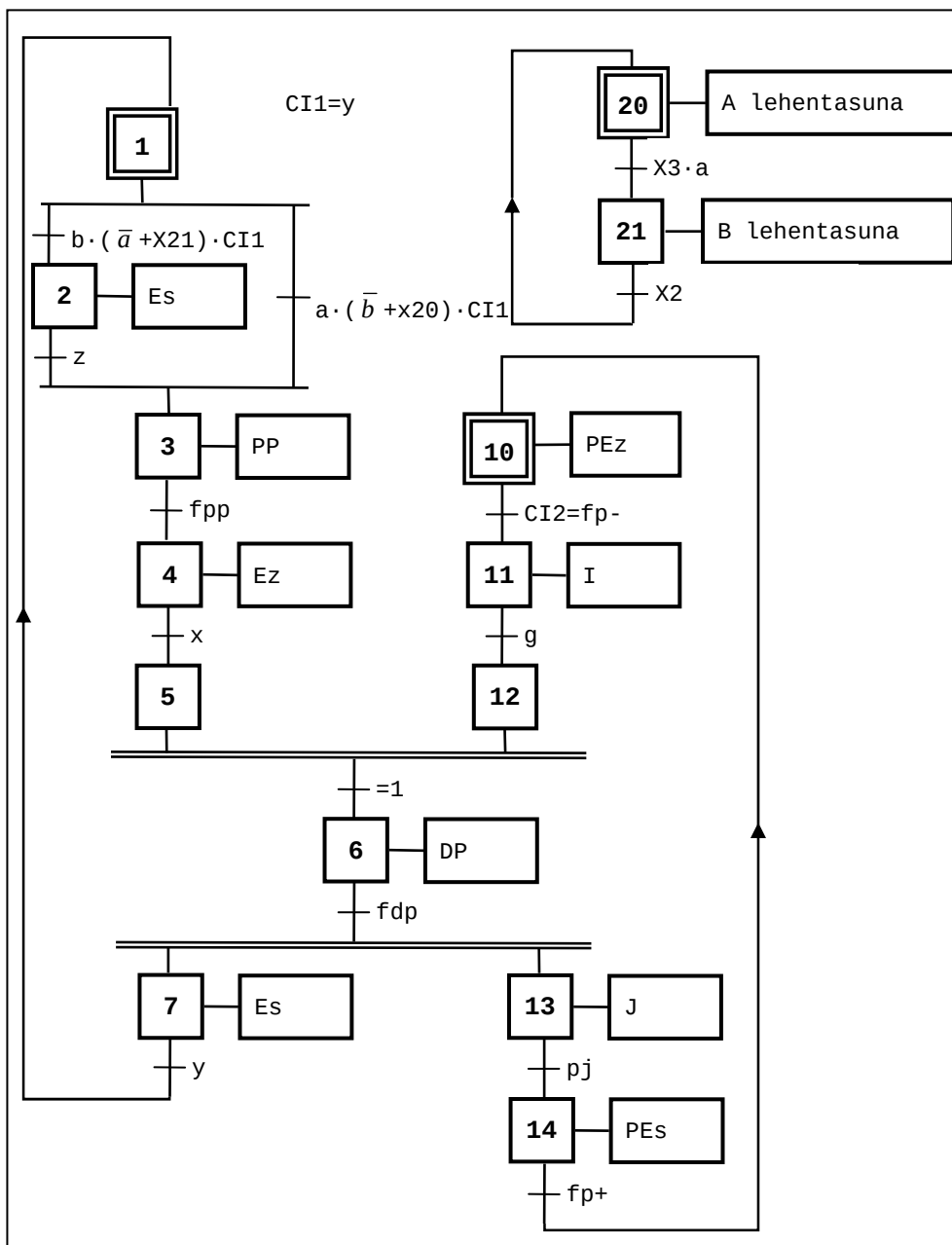
**Ebazpena**

2.34 irudia. 2.6.4. ariketaren ebazpena.

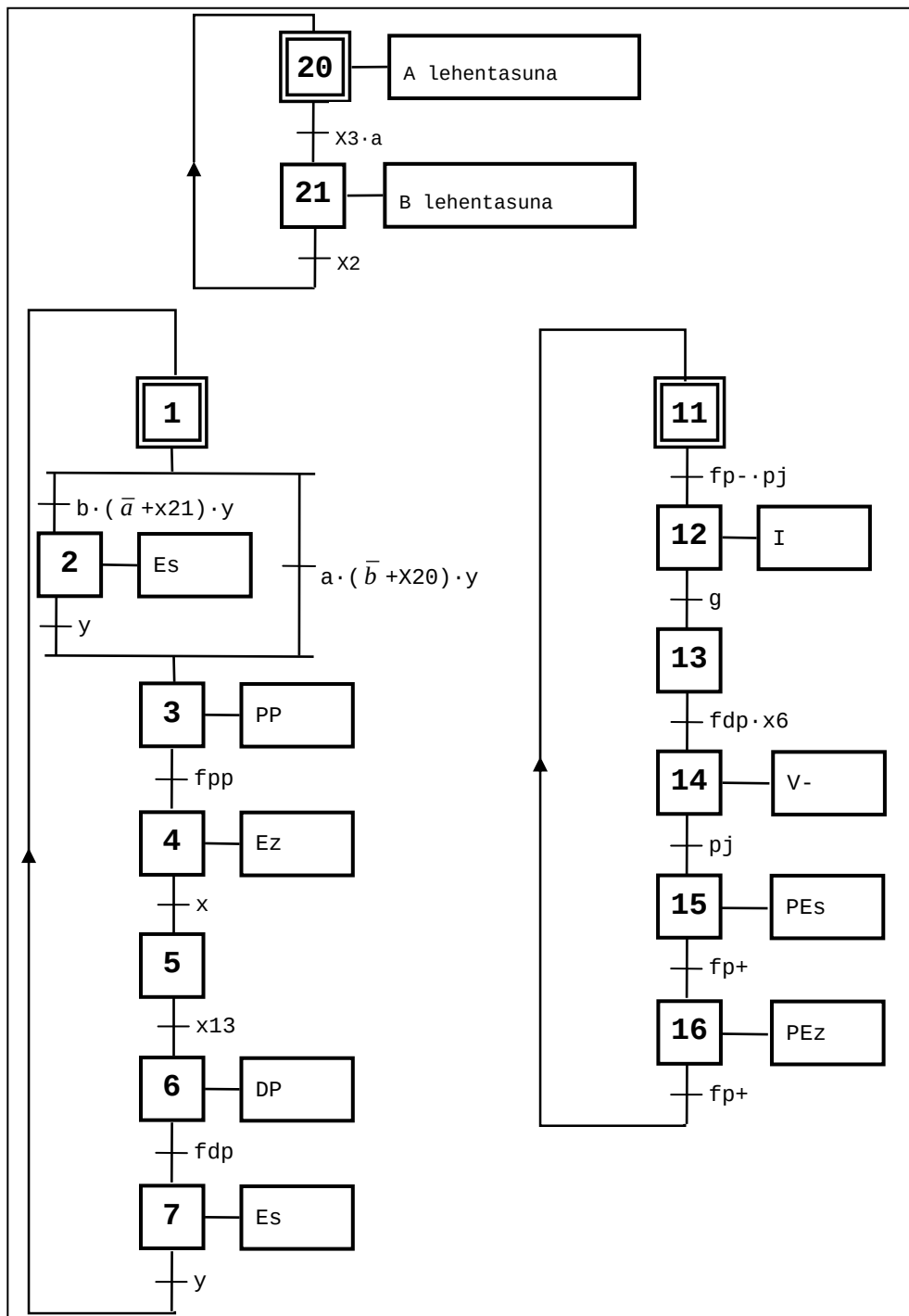
**Hobekuntza**

- Orgari pieza bat pausatu bezain laster beste baten bila joatea ahalbidetu. Problema bitan banatu: orga eta platera. Bi Grafcet desberdin egin horretarako, etapen

egoeren bidez sinkronizatzuz. Orga y puntuan itxaronarazi, x-n orde, denbora irabazteko. Platerak ere goian itxaron dezala, baina ezin da haren hasierako egoera izan, gauean behean egongo baita.



**2.35 irudia. Ebazpenaren hobekuntza bi Grafcet paralelok etapa bat konpartitzen badute.**

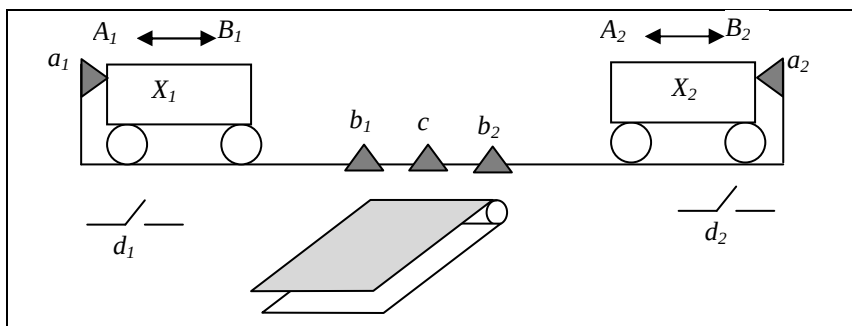


2.36 irudia. Hobekuntza bi Grafcet paralelo erabiliz.

### 2.6.5. Baliabide fisiko baten partekatzea

Meatze baten barnean, langile batek  $X_i$  orga betetzen du. Betea delarik, langileak di botoia zapaltzen du. Berehala, Bi norabidean desplazatzen da orga, deskarga-postura arte. Postu hori, beti mugimenduan den uhal garraiatzaile batez eta orgaren upela (iraulkia) iraultzen duen V zilindro batez osatua da. Deskarga-postua libre bada, orga c sentsoare arte aitzinatzen da, husten da eta berriz ere ai-ra itzultzen da. Aldiz, deskarga-postua okupatua bada, haren txandaren beha egoten da bi-n. Deskarga-postua hainbat bidek erabiltzen dute baina soilik batek erabil dezake une berean. «Baliabide fisiko» deitzen da.

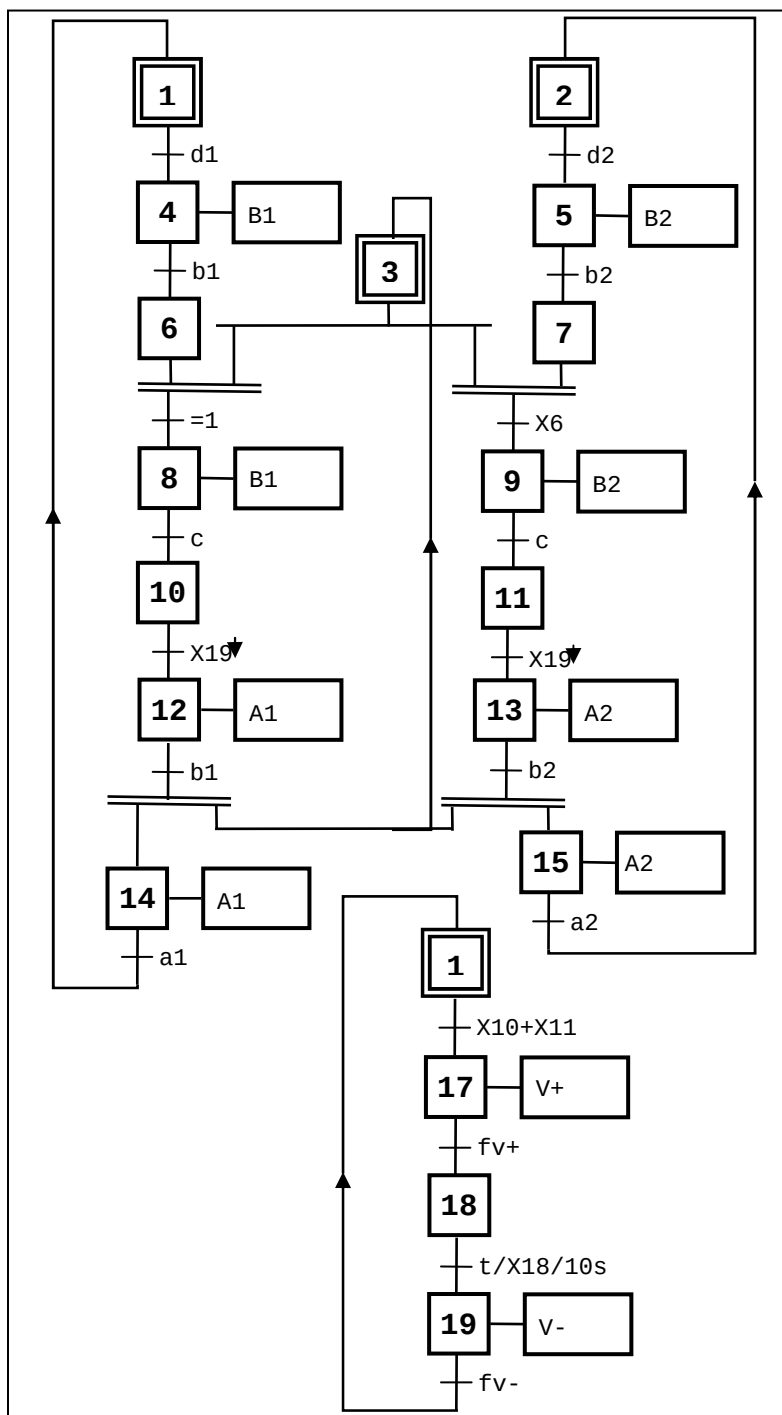
Bi bide dituen problema ebatzi (ikus 2.37 irudia). Bideen luzaera desberdina izan daiteke.



2.37 irudia. Baliabideak partekatzeko adibidea.

#### Ebazpena

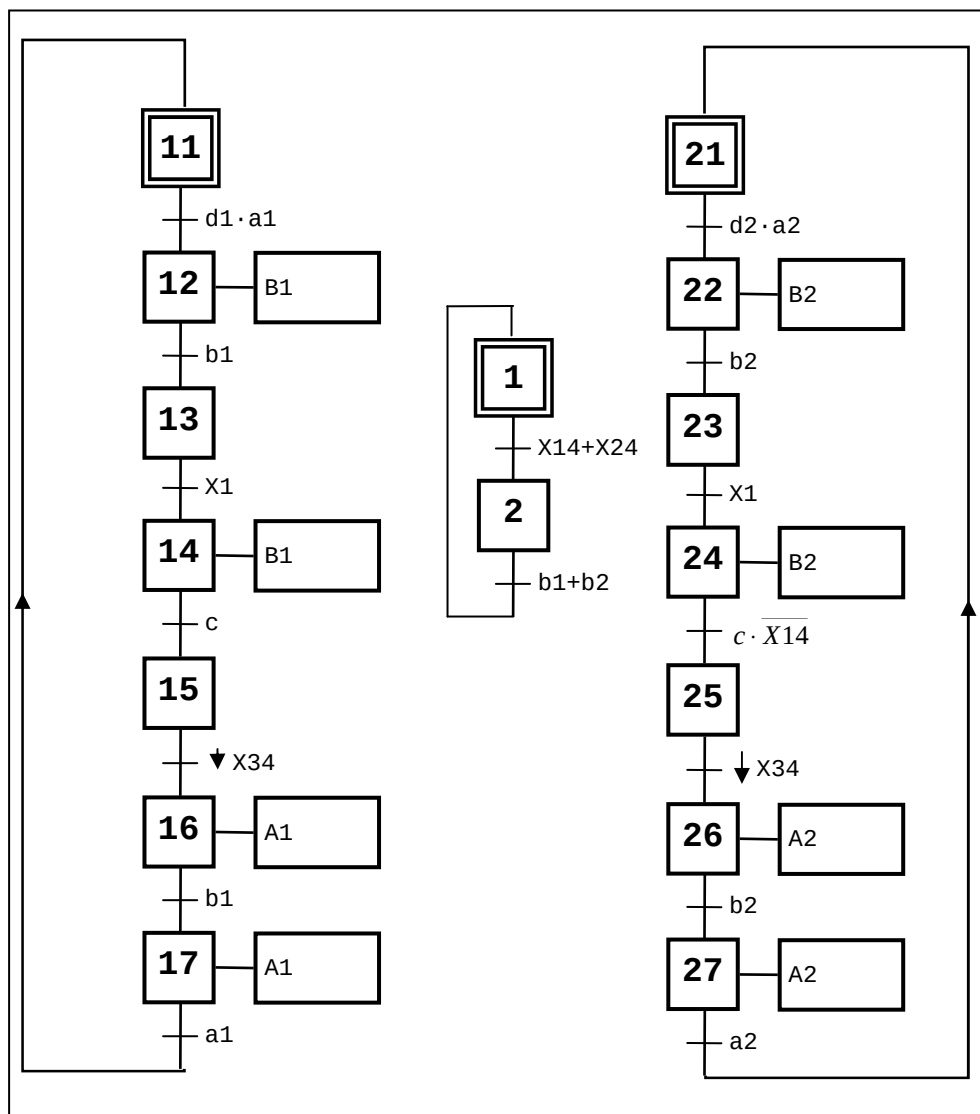
Ez da  $c$  sentsoarea erabili behar baliabide fisikoa okupatua den jakiteko: orga bi eta  $c$  artean izan daiteke, edo inertiak  $c$ -ren ondoan gelditu ahalko luke. Grafetaren izaera sekuentziala ahal bezainbat erabili behar da ebazpenetan, eta sentsoareak soilik beharrezkoak direlarik erabili. Sentsoare bat etapa batetik bestera pasatzeko baldintza gisa erabili behar da, baina ez gertatu den sekuentziagatik sistemak duen estatua egiaztatzeko. Hemen, beraz, etapa bat erabiltzen da baliabide fisikoa libre den edo ez adierazteko. Erabiltzen delarik, etapa aktibatzen da, eta baliabidea libre uztean etapa desaktibatzen da (ikus 2.38 irudia).



2.38 irudia. 2.6.5. ariketaren ebazpena Grafcet bakararekin.



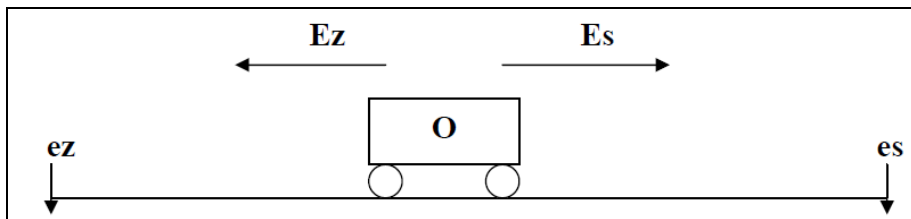
Problema separatutik diren Grafcetekin ere ebatz daiteke (bat orga bakoitzeko eta bat deskarga kudeatzeko). Desberdintasun bakarra da 3. etaparen ondoren ez dela gehiago dibergentziarik, eta beraz orgak b1 eta b2-ra une berean heltzen diren kasua ahantz daitekeela. Hala ere, hori 2.39 irudian agertzen den gisa konpon daiteke.



2.39 irudia. 2.6.5. ariketaren ebazpena bi Grafcet paralelorekin.

### 2.6.6. Funtzionamendu modu desberdinak kontuan hartzea

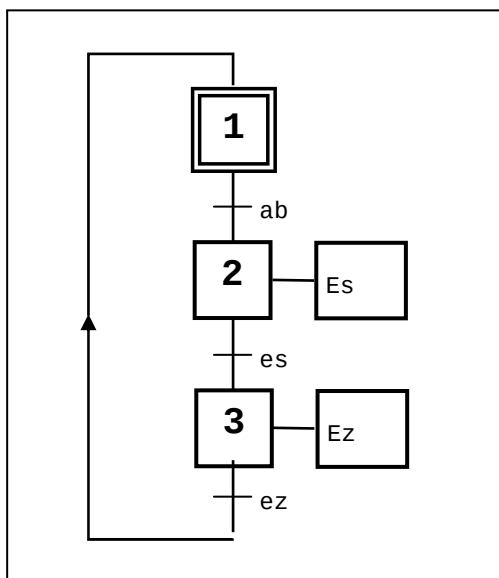
Eskuinera (Es ekintza) eta ezkerreara (Ez ekintza) joan daitekeen orga bat dugu. Hasieran, ezkerretik abiatuz (orgaren presentzia leku horretan ez sentsoreak ematen du), nahi dugu orga eskuinera joatea ( $d$  sentsorea) eta haren hasierako posizioa itzultzea.



2.40 irudia. Bi noranzko dituen orga.

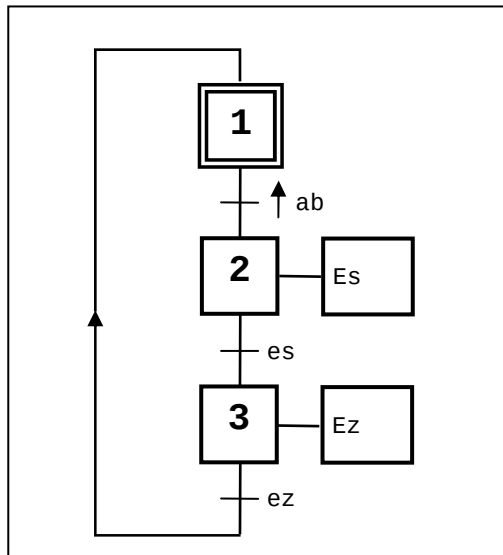
1. Aginte-mahaian, langileak  $ab$  abiatzeko botoi soil bat du. Marraztu Grafqueta bi aukera aztertuz: botoia pultsadore modukoa izatea edo bi posiziokoa izatea. Zer gertatzen da lehen kasuan? Grafqueta zuzendu operadorea ziklo (ziklo bat = joan-jin bat) berri oro botoia zapaltzera behartua izan dadin. Kontuan hartu sistema abiatzean orga ez dela derrigorrez ezkerrean.

#### Ebazpena



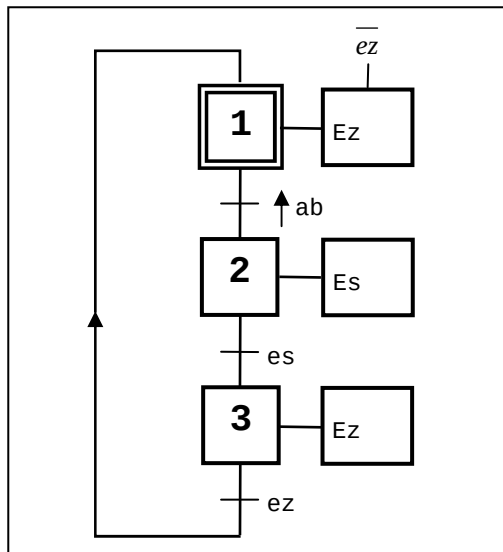
2.41 irudia. 2.6.6 ariketaren ebazpena.

Botoia ziklo berri bakoitzean zapaltzera behartzeko:



2.42 irudia. 2.6.6 ariketaren ebazpena botoia sakatzea behartuz.

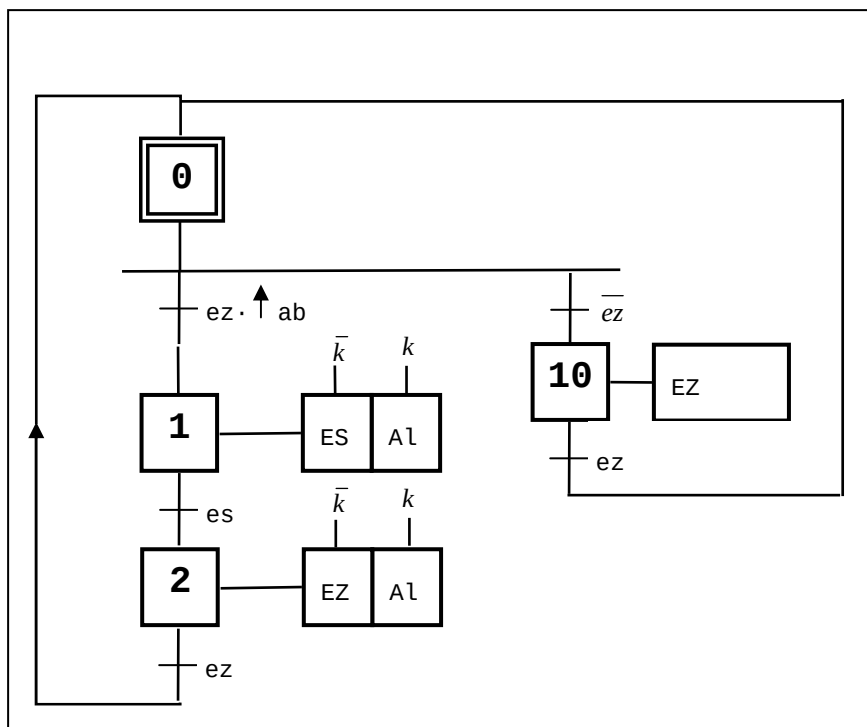
Hasieran orga ezkerretik abiatzera behartzeko hasierako etapari ekintza baldintzatu bat gehitzen ahal zaio:



2.43 irudia. 2.6.6 ariketaren ebazpena hasieran orga ezkerrera kokatuz.

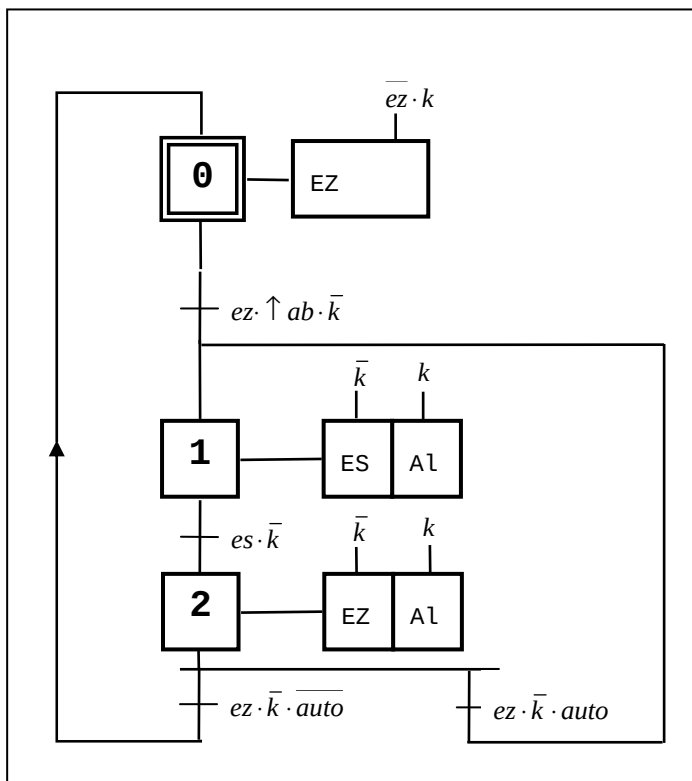
2. Langileak *ab* pultadoreaz gain *Al* (alarma) argi-adierazlea du. Orga kapot baten bidez estalia da. *k* seinalea ematen duen sentore batek kapota irekia dela detektatzen du. Segurtasun-arrazoiengatik, orga gelditu behar da kapota irekia bada. Bere bidea segitzen du soilik kapota berriz hetsia bada. Langilea irekiera horretaz abisatua izan behar da automatak piztu behar duen *Al* argi-adierazlearen bidez. Argi-adierazlea itzaltzen da kapota hetsi bezain laster. Marraztu Grafcet berria.

### Ebazpena



2.44 irudia. 2. aldaeraren ebazpena.

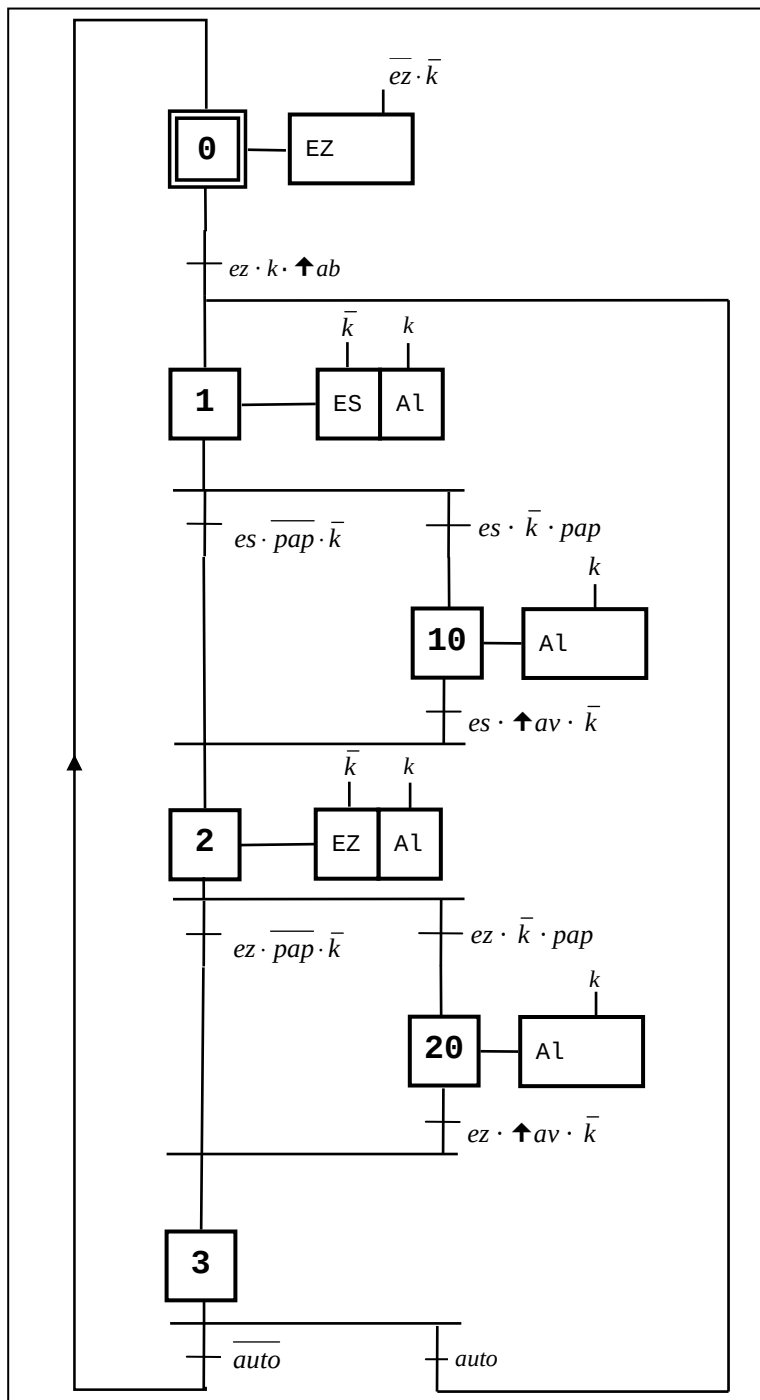
3. Langileak, gainera, bi posizioko *auto* botoi bat erabil dezake. Horri esker, funtzionamendu ez-automatikoa (aurreko galderakoa) eta automatikoa hauta dezake. Modu horretan, orgaren abiatzea *ab* botoiarekin egiten da ere, baina joan-jinak pausarik gabe egiten dira. Orga soilik modu hori selekzionatua ez delarik, eta ziklo bukaeran, gelditzen da. Marraz ezazu Grafcet berria.

**Ebazpena**

2.45 irudia. 3. aldaeraren ebazpena.

4. Langileak *pau* izeneko bi posizioko beste botoi bat du orain. Pausokako modua selekzionatua delarik (modu automatikoa hautatua izan edo ez), langileak automatismoa ongi ibiltzen den froga dezake. Modu horretan, orga ataza (ezkerrera edo eskuinera joatea) bakoitzaren bukaeran gelditzen da. Zikloa segitzeko, langileak *ai* (aitzina) botoi pultsadorearen erabili behar du. Botoi horrek soilik modu horretan balio du. Graficeta aldatu modu berri hau kontuan hartzeko.

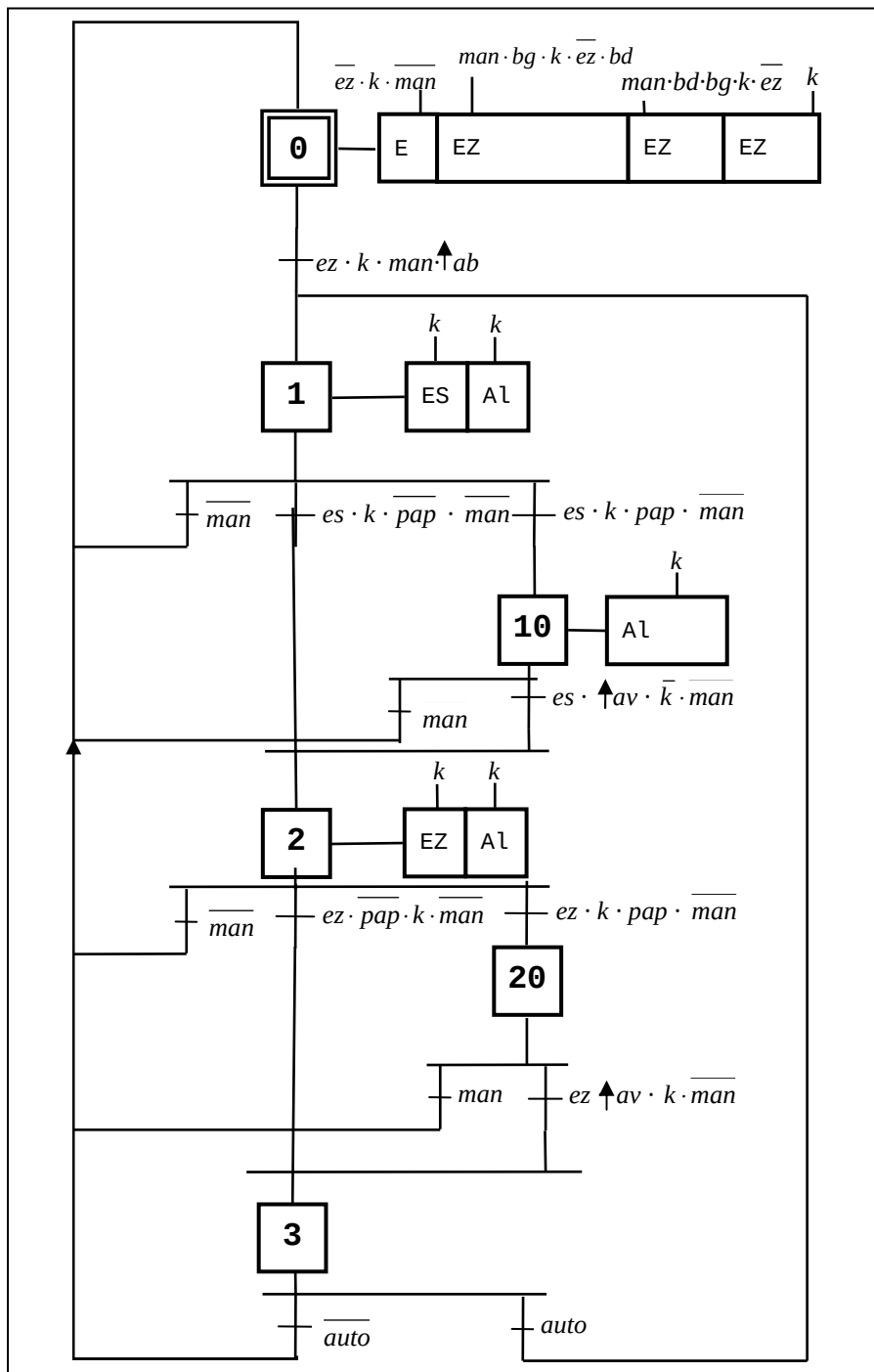
**Ebazpena**



2.46 irudia. 4. aldaeraren ebazpena.

5. Oraindik, beste *man* (manuala) izeneko 2 posizioko botoi bat badu langileak. Modu manuala edo ez-manuala hautatzea ahalbidetzen du. Langileak *man* modua hautatzean, ekintzen kontrol osoa hartzen du. Horretarako, beste 2 posizioko bi botoi ditu, *oez* eta *oes*, orga ezkerrera edo eskuinera mugiarazteko, berak nahi duen gisan. Ohar gaitezke kasu honetan problema konbinazionala bihurtzen dela, zeren ez da gehiago sekuentziarik kudeatu behar. Hasiera-etapa *man* modua kudeatzen duena izan daiteke. Egokitu lehengo Graficeta.

***Ebazpena hurrengo orrian***



2.47 irudia. 5. aldaeraren ebazpena.



## 3. Automatismoen implementazioa

### 3.1. Sarrera

Edozein sistema automatiko gauzatzekoan, diseinu-pausotik implementazio-pausora hartu beharreko erabakiak berebizikoak dira. Ingeniariak diseinu ulergarri eta moldagarriak egiteko tresnak behar ditu, Grafcet kasu, baina horretaz gain diseinu hori errealitatera eramateko gailuak eta metodoak behar ditu. Gailuen artean, sistemako informazioa eskuratzeko sentsores espezifikoak beharko dira (adibidez, pieza bat detektatzen duen sentsoarea), makinetan ekintzak gauzatu ahal izateko eragingailuak eta erabiltzaileek sistemarekin elkarrekintza izateko elementuak ere (ledak, etengailuak, etab.). Gai hau ez da sakonean landuko liburu honetan, baina oso interesgarria da, eta sistema fisikoaren interfazea denez, ezinbestekoa da automatismoak ulertzeko.

Bestetik, Grafceta implementatzeko sekuentziaren kontrola eramateko, eragiketa logikoak egiteko eta egoerak (etapak) gogoratzeko ahalmena duen gailua behar da. Automatismo konbinazionalak funtzio ugari betetzen dituzte, beren kabuz edo sistema konplexuagoen barnean, baina ez dute balio Grafcet moduko diseinuak gauzatzeko, etapan egoera berria kalkulatzeko etapan aurreko egoera jakin behar delako, harmenen logika aztertzeaz gain.

Hori kontuan hartuta, Grafcet diagramak teknologikoki gauzatzeko zenbait era daude:

- Sekuentziagailu elektrikoak, zeinean diagramak sortzeko oinarrizko elementuak errele elektromagnetiko biegenkorrak diren. Memoria-elementuak aipatutako elementuekin sortzen dira.
- Sekuentziagailu elektronikoetan, aldiz, memoria-elementuak RS biegenkorren bidez osatzen dira.
- Sekuentziagailu pneumatikoetan memoria 2 posizioko eta ekintza bikoitzeko balbulen bidez gauzatzen da.

Gailu programagarrien kasuan, memoria-ezaugarri hori kasu guztietan aurki daiteke, konputazioaren oinarrietako bat delako. Gailu programagarrien eremua hain da zabala, ezen zaila den mugatzea eta sailkatzea. FPGAk, mikrokontrolagailuek, industria-PCek eta antzekoek Grafcet diagramak implementatzeko aukera potentziala badute ere, liburu honetan kontrolagailu logiko programagarrietan (PLC) jarriko dugu arreta, horretarako oso egokiak direlakoan.

PLCak oso sartuta daude industrian, bereziki aplikazio kritikoetan eta makina konplexuetan. Aplikazioaren arabera, neurrira egindako ASICak egokiak izan daitezke, baina moldaketa ugari eskatzen duten inguruneetan PLCak egokiak dira, ia modelo guztiek programak aldatzeaz gain sistema monitorizatzeko aukera egokiak eskaintzen dituztelako.

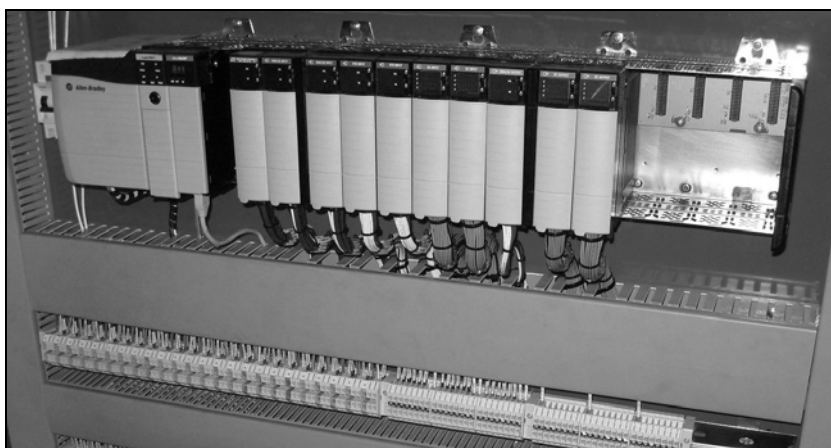
Beste muturrean, mikrokontrolagailuetan oinarritutako sistemak malguak eta programatzen errazak izan ohi dira, baina orokorrean ez dute izaten PLCek duten fidagarritasun-maila: denbora errealeko sistema-portaera, sendotasun fisikoa, koherentzia bermatzeko metodoak, etab. Amaitzeko, PLCen ezaugarri nagusietako bat malgutasuna da. Grafcet diagrama bat aldatu behar izanez gero, PLCaren programa erraz alda daiteke; aldiz, aldaketa horiek ASIC sistematan egin ahal izateko, berriz osoki fabrikatu behar dira.

Bestalde, automata programagarri gehienek ez dute Grafceta zuzenki interpretatzen. Hainbat PLC produktorek Grafceta zuzenean inplementatzeko eskaintzen dute, eta, beste batzuek, Sequential Function Chart (SFC) izeneko programazio-hizkuntza grafiko estandarrean programatzeko aukera eskaintzen dute. SFC hizkuntza oso interesgarria izan arren, liburu honetan ez da landuko; besterik gabe, aipatuko dugu Grafctean oinarrituta dagoela.

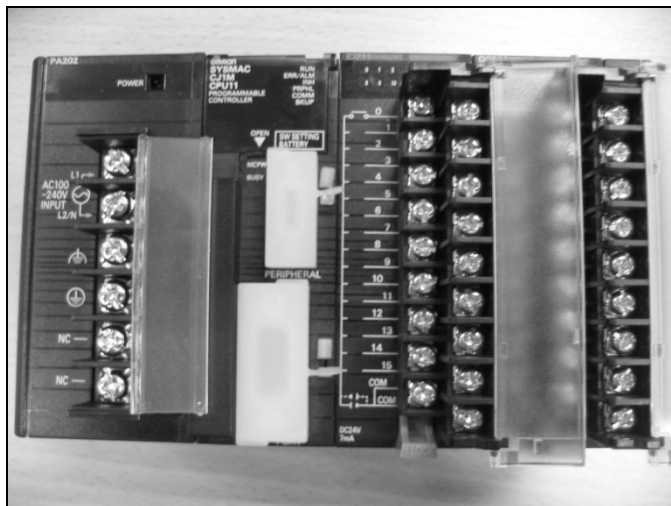
Edonola ere, ingeniariarentzat interesgarria da Grafcet (edo SFC) diagramak beste programazio-hizkuntza batzuetan inplementatzeko aukera izatea. Esan bezala, fabrikatzaile eta modelo askok ez dute horrelako aukerarik eskaintzen eta, bestetik, inplementazioaren xehetasunak ezagutzeak sistemaren sakontasuna ezagutzeko aukera eskaintzen du. Automata programagarrietan maiz erabiltzen den hizkuntza kontaktu-diagrama da, Ladder Diagrama (LD) ere izendatzen dena.

### 3.2. Automata programagarriak: OMRON CJ serieko PLCak

Esan bezala, PLCak landuko dira atal honetan. Gailu programagarri hauek industria-aplikaziorako diseinatutako kontrolagailuak direnez, ahalmen bereizgarriak dituzte beste gailu programagarriekin konparatuta. Bereziki, ingurune latzetarako prestatuta egoten dira, oso fidagarriak dira, iraupen handikoak dira (martxan luzaro egoteko diseinatuta daude) eta hau guztia ziurtatzeko estandar internazional oso zehatza bete behar dute PLC izendapena izan ahal izateko (IEC 61131 araua).



3.1 irudia. Allen-Bradley PLC modularra (Cmarcante, Creative Commons lizentziapean).

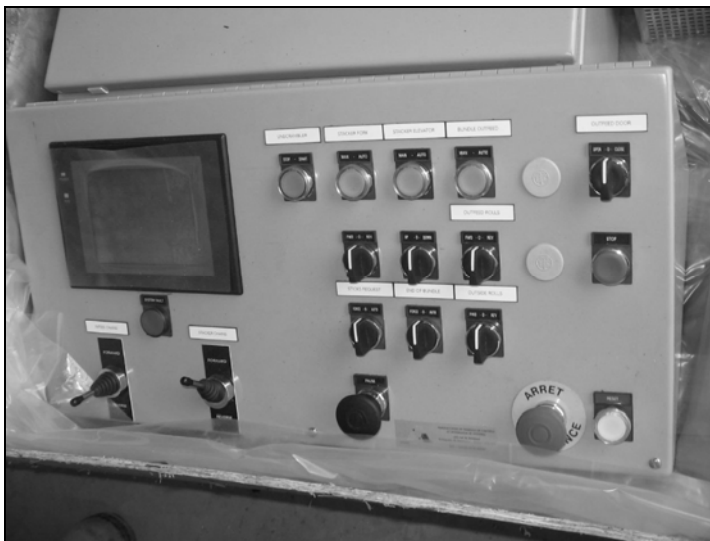


**3.2 irudia. Omron CJ1M PLCa (Rafa.Albero, flickr, Creative Commons lizentziapean).**

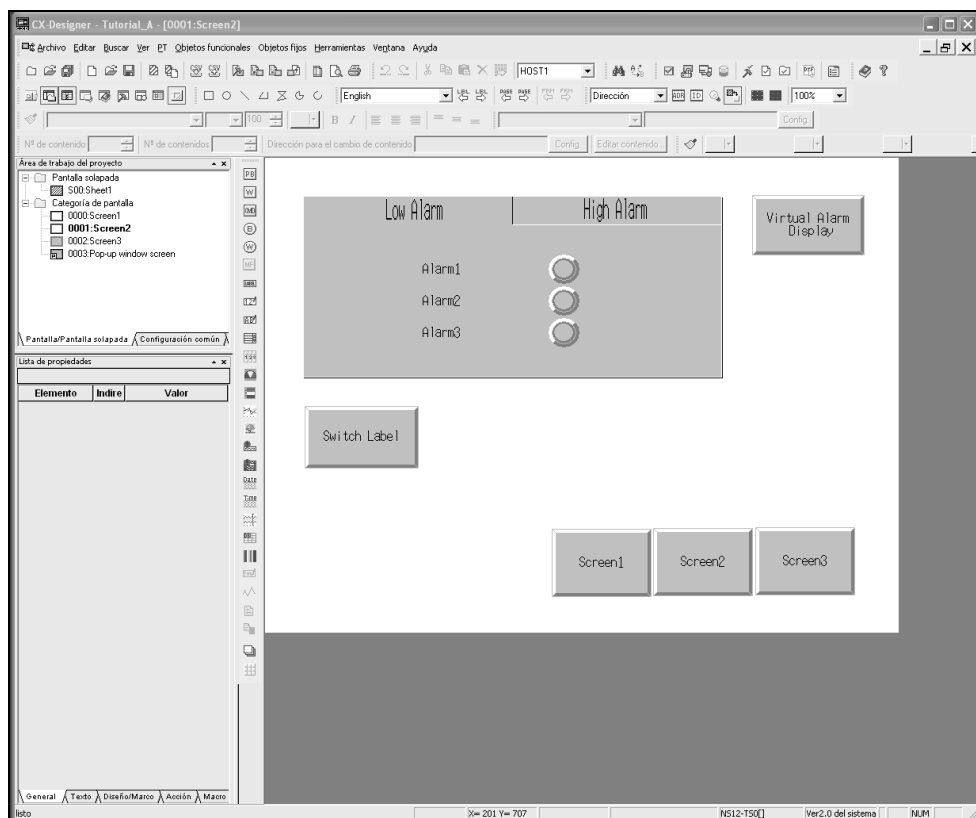
Oro har, denbora errealeko sistemen ezaugarri batzuk betetzen dituzte, haien funtzionamendua scan deitzen den ziklo sistematikoa oinarritzen delako: periodikoki, PLCak sarrerak, irteerak, biltegitratze-unitateak, komunikaziorako gailuak eta memoria gainbegiratzeko dena ongi dagoela ziurtatzeko. Portaera horrek funtzionamenduen boretan eta sarrera/irteeren tratamenduan ere eragina du (sarrera bat aldatzen denetik irteera aldatzeko agindua egikaritu arte pasatzen den denbora kalkula daiteke).

PLCen fabrikatzaile ugari dago. Ezagunenak Allen Bradley, Siemens, Telemecanique eta Omron dira, baina badira merkatuan presentzia handia duten beste hainbat izen. Eskura izateagatik, liburu honetan Omron etxeko CJ serieko PLCekin lan egin da. Landutako gai gehienak edozein PLCtarako egokiak badira ere, adibide jakin batzuetarako serie honetako xehetasunak erabiliko dira. Omron PLCak programatzeko eta antolatzeko Cx-One izeneko software suite-a erabiltzen da. Suite horretan programazio-osagai nagusia Cx-Programmer da, IEC 61131-3 estandarrak definitzen dituen bost hizkuntzetan programatzeko aukera eskaintzen duen tresna. Aipagarria da SFCrekin (eta kasu batzuetan Grafcetarekin zuzenean) programatzeko aukera gero eta fabrikante gehiagok eskaintzen dutela, diseinutresna horrekin ohituta dauden langileei erraztasun handia eskainiz.

Horretaz gain, PLC sistemetan bestelako interfazerako osagaiak gehitu eta programa daitezke. Adibidez, oso ohikoa da PLCarekin komunikatzeko diseinatuta dauden pantailak integratzea automatizazio-sisteman. Pantaila horiek teklatu gehigarria izan dezakete, ukipenezkoak izan daitezke edota botoi-sorta inguruan muntatuta dute batzuetan. Pantaila horiek programatzeko softwarea ere beharrezkoa da eta Omronen kasuan Cx-Designer tresna ere erabil daiteke.



3.3 irudia. Omron PLCan oinarritutako sistema automatikoa (OneTreeHill Studios, Flickr, Creative Commons).



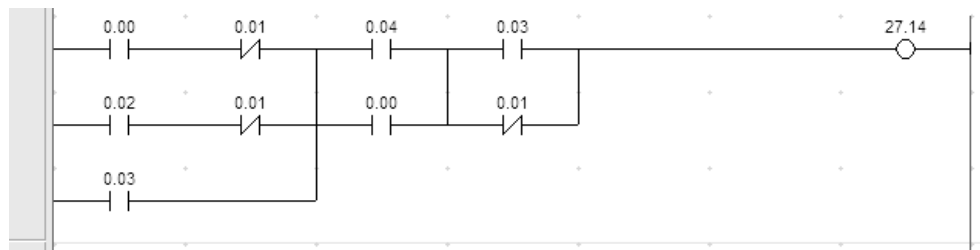
3.4 irudia. Cx-Designer pantailak programatzeko tresna.





3.6 irudia. OR egitura.

Hori da LD hizkuntzaren funtsa. Horrelako OR eta AND blokeak kable zuzenekin lotuz, logika konbinazional konplexuagoa lor daiteke, 3.7 irudian agertzen den bezalakoa. Hortik aurrera, PLC familia bakoitzak funtzioak deitzen diren bloke espezializatuak ditu logika sekuentzialaren oinarritzko funtzioetatik abiatuta eragiketa konplexuetara heldu arte (adibidez, PID kontrolagailuaren funtzioa oso ohikoa da PLCetan). Funtzio horiek fabrikante batetik bestera (eta modelo batetik bestera ere) alda daitezkeenez, hemendik aurrerako adibideek OMRON etxeko CJ serieetarako funtzio espezifikoak erakutsiko dituzte.

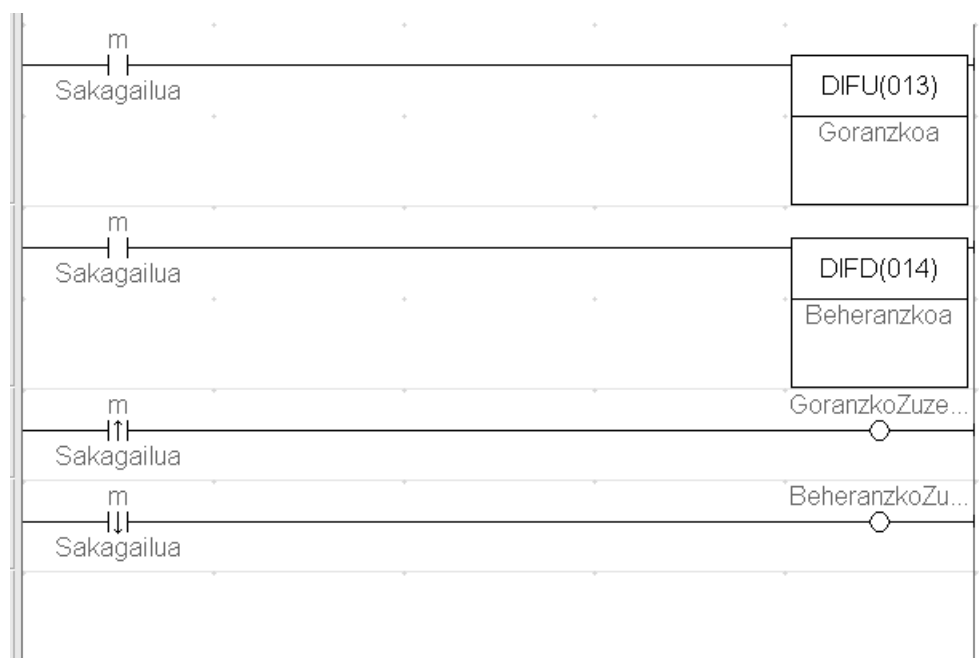


3.7 irudia. AND eta OR blokeak konbinatuta.

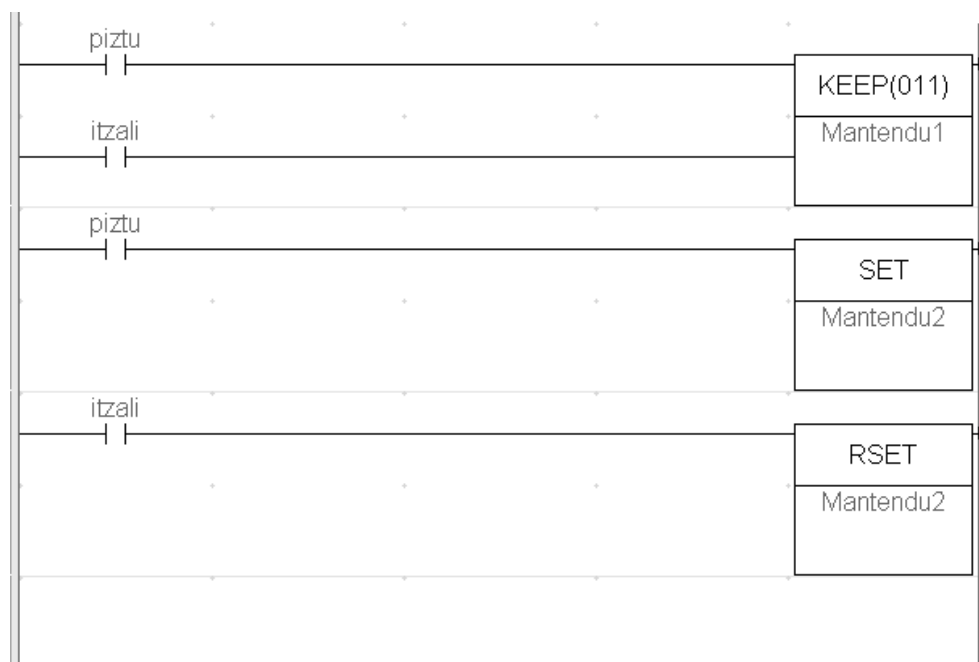
LD hizkuntzaren funtsa biribiltzeko, nabarmendu beharko lirateke programatzeko oinarria eskaintzen duten hiru funtzio eta beraien aldaerak: DIFU, KEEP eta TIM.

DIFU funtzioak ezkerretik hartzen du seinale bat eta goranzko gezia detektatzean bere parametroa den irteeran scan ziklo bateko pultsua sortzen du. Funtzio hori oso interesgarria da, besteak beste, sakagailuekin eta hainbat sentzorerekin lan egiteko. Haren aldaera logikoena beheranzko geziak detektatzen dituen DIFD funtzioa litzateke. Biek ala biek programazio-ingurune gehienetan aldaera sinpleagoa dute, 3.8 irudian ikus daitekeen geziaren notazioa.

Bigarren funtzio oinarritzkoa KEEP da. KEEPeK biegonkorraren funtzioa egiten du, hau da, bit baten balioa mantentzen du SET edo RESET funtzioak aktibatzen ez diren bitartean. Programazio-elementu hau funtsezkoa da, baina errele eta bobinekin jolastuta ordezka daiteke, hurrengo atalean ikusiko den bezala. Haren aldaera ohikoenak SET eta RSET funtzioak dira, portaera berdina dutenak baina lerro ezberdinetan aparte ager daitezkeenak (ikus 3.9 irudia).



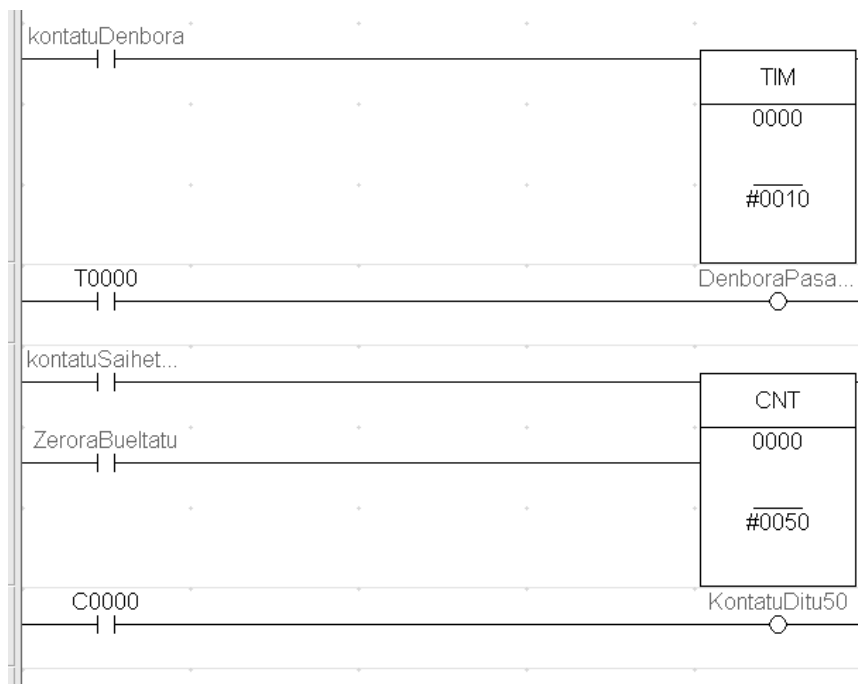
3.8 irudia. DIFU eta bere aldaerak.



3.9 irudia. KEEP eta bere aldaerak.

Oinarrizkoekin amaitzeko, denboragailuak programatzeko TIM agindua aipatu behar da. Denboragailu bati ezkerreko lerrotik denbora kontatzeko agindua ematen dion kontaktu jarraitua sartzen zaio eta parametroen bitartez zenbat denbora kontatu behar duen adierazten da. TIM aginduaren bikote ohikoena CNT da, denbora kontatu ordez pultsuak kontatzen dituena. OMRON PLCetan bi agindu horiek itxura ezberdina dute (ikus 3.10 irudia). Bai denboragailuek, bai kontagailuek bit berezi bat dute denbora edo kontaketa gainditu dela adierazteko. Bit hori pizturik mantenduko da sarrerako seinalea itzali arte (TIMen kasuan) edo kontaketa zerora bueltatu arte (CNTren kasuan).

LD programazio-hizkuntza oso aberatsa da eta, esan bezala, funtzio sofistikatuak gauatzeko funtzioak inplementatuta izan ohi dira. Oinarrizko programaziorako hemen azaldu diren funtzioak nahikoak izan daitezke, baina kontuan izan eragiketa aritmetikoak, konparaketak, taula-eragiketak, kanal-mailako eraiketa logikoak, komunikazio-eragiketak eta abar eskuragarri daudela PLC modelo gehienetan.



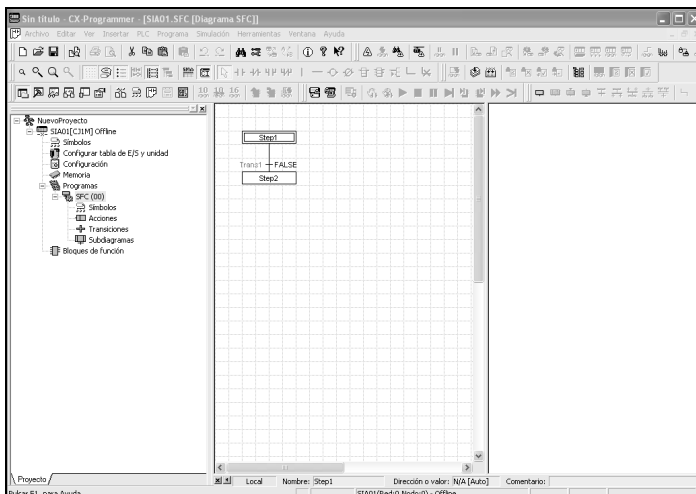
3.10 irudia. TIM eta CNT.

### 3.4. Grafcetaren implementazioa automata programagarri batean

Sarreran aipatu gisan, zorigaitzez, automata gehienak ezin dira Grafctean zuzenki programatu. Gehienetan Ladder hizkuntzan, hau da, kontaktu-diagramen bidez programatzen dira. Egia esan, gero eta gehiago dira Grafcet (edo SFC) erabiltzeko aukera

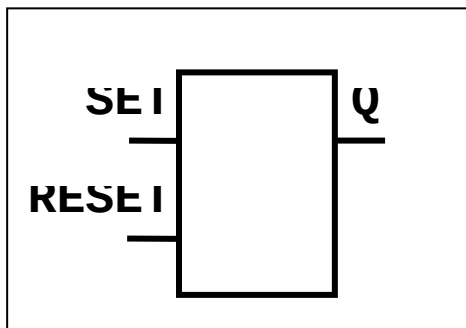


eskaintzen duten software-tresnak; aipatu den bezala, Omronen Cx-Programmer-ek aukera hori eskaintzen du (ikus irudia).



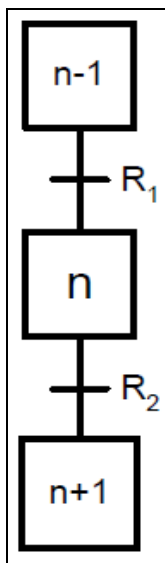
**3.11 irudia. SFCak programatzen Cx-Programmer erabiliz.**

Beraz, Graficeta transformatu behar da, berari loturiko 5 arauak modu egokian interpretatuz. Transformazio edo interpretazio hori egiteko, hainbat aukera existitzen dira. Erran daiteke baskulen erabileran oinarritzen direla. Baskula bat bi sarrera, «SET» eta «RESET», eta «Q» irteera bat duen funtzio logiko bat da. «SET» sarrera aktibatzen delarik, «Q» irteera 1-ean jartzen da, eta hala geratzen da «RESET» sarrera aktibatu arte. «RESET» sarrera aktibatzen bada, «Q» irteera 0-an jartzen da eta balio horretan geratzen da «SET» sarrera aktibatzen ez den bitartean. Bi sarrerak aldi berean aktiboak badira, «Q» irteeraren egoera baskularen barne-diseinuaren menpe egongo da. Horregatik daude aukera bat baino gehiago.



**3.12 irudia. Baskularen eskema.**

Demagun Graficeta kontaktu-diagraman adierazi nahi dugula. Hori nola egin aztertzeko, demagun hiru etapa segidan ditugula, beheko irudian erakutsi bezala.



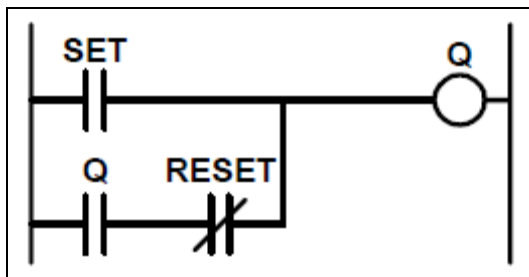
3.13 irudia. n. etapa eta haren ingurukoak.

$X_n$ , n. etaparen egoera adierazten duen aldagai logikoari loturiko ekuazioa aurkitzeko, Grafcetaren arauak aplikatu behar dira. n etapa aktibatuko da  $R_1$ -i dagokion harmena zeharkatua izango delarik. Harmen hori zeharkatua izanen da, n-1 etapa aktiboa bada eta  $R_1$  baldintza egia bada. Orduan, n etapa aktibatuko da eta n-1 etapa desaktibatuko da. Beraz, hau izango da  $X_n$  aldagaiaren aktibazioari loturiko ekuazio logikoa:  $X_{n-1} R_1$ .

n etapa desaktibatuko da  $R_2$ -ri loturiko harmena zeharkatuko delarik. Zeharkatze horretan, n+1 etapa aktibatuko da eta n etapa desaktibatuko da. Beraz, hau izango da  $X_n$  aldagaiaren desaktibazioari loturiko ekuazio logikoa:  $X_{n+1}$ .

### 3.4.1. Inplementatzeko 1. aukera

Lehen aukera aktibazioa lehenesten duten baskulak erabiltzea da. Kasu honetan, baskularen bi sarrerak aktibatuak badira, irteera 1-ean izanen da. Ladder-ean, baskula horren eskema honela adieraz daiteke:



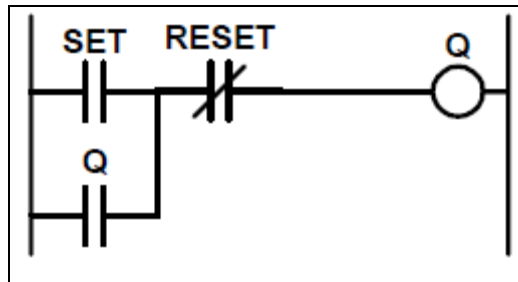
3.14 irudia. Inplementatzeko 1. aukera.

Xn-ren ekuazio logikoa hau litzateke beraz:

$$X_n = (X_{n-1} \cdot R_1 + X_n \cdot \overline{X_{n+1}}) \quad (3-1)$$

### 3.4.2. Implementatzeko 2. aukera

Bigarren aukera desaktibazioa lehenesten duten baskulak erabiltzea da. Kasu honetan, baskularen bi sarrerak aktibatuak badira, irteera 0-an izanen da. Ladder-ean, baskula horren eskema honela adieraz daiteke:



3.15 irudia. Implementatzeko 2. aukera.

Xn-ren ekuazio logikoa hau litzateke beraz:

$$X_n = (X_{n-1} \cdot R_1 + X_n) \cdot \overline{X_{n+1}} \quad (3-2)$$

Aukera honek ez du 5. araua errespetatzen, eta, beraz, ez litzateke erabili beharko.

### 3.4.3. Implementatzeko 3. aukera

Hirugarren aukera honek automataren baskula-funtzioa erabiltzen du. Aplikazio honetan bi ekuazio logiko izanen ditugu. Hau da SET Xn-ren ekuazio logikoa: SET Xn=Xn-1 R1. Eta RESET Xn-rena hau da: RESET Xn=Xn+1.

### 3.4.4. Implementatzeko 4. aukera (gomendatua)

Laugarren aukeran trantsizioak Grafcetaren etapekiko modu independentean ebaluatuak dira. Horri esker, etapa batetik besterako trantsizioetan aldi berean bi etapa aktibo izatea saihesten da. Aldi berean bi etapak aktibo izatea arriskutsu bihurtzen da, scan zikloa luzea denean.

Trantsizio bakoitzaren egoera Yn aldagaiarekin identifikatzen da. Esaterako, n-1 eta n etapen arteko trantsizioaren egoera Yn-1 aldagaiarekin identifikatuko da. Trantsizio hori zeharkagarria bada, Yn-1 1-ean izango da, eta ez bada zeharkagarria, 0-an.

Beraz, esaterako,  $Y_n$ -ren ekuazio logikoa hau izanen da:

$$Y_n = X_n \cdot R_2 \quad (3-3)$$

$Y_n$ -ri dagokion trantsizioa zehargarria izanen da, aurreko etapa aktiboa bada eta trantsizioari loturiko harmena egia bada.

$X_n$ -ren ekuazio logikoa berria hau izanen da:

$$X_n = Y_{n-1} + X_n \cdot \overline{Y_n} \quad (3-4)$$

$n$  etapa aktibatzen da aurreko trantsizioa zeharkatua delarik, eta desaktibatzen da ondorengo trantsizioa zeharkatua delarik.

Laugarren aukera hau da gomendatzen dena, hainbat arazo saihesten dituelako.

### 3.5. Grafcetak interpretatzeko algoritmoa

Aitzineko sekzioan egindako azterketak argiki adierazten du nola kudeatu behar den etapan egoeren aldaketa. Hala ere, Grafcetean beste hainbat gauza kudeatu behar da: hasierako etapan hasieratzea, ekintzen gauzatzea, denboragailuen hasieratzea, eta abar. Hori dena garbiki egiteko, Grafqueta beste lengoaietara transformatzeko algoritmo bat proposatzen da sekzio honetan.

#### 3.5.1. Algoritmoaren azalpena

Horra zein diren scan ziklo batean algoritmo horretan jorratu behar diren etapa nagusiak:

1. Hasieratzea: hasierako etapan hasieratzea (Grafcten lehen arauaren arabera); harremanetan diren ekintzen egitea.
2. Sarreraren irakurketa: ezinbestekoa da sarrera guziak memoria batzuetan izoztea edo blokeatzea, scan ziklo bereko kalkulu batetik bestera balio horiek ez daitezen alda.
3. Trantsizioen zeharkagarritasunaren kalkulua: honi esker zein trantsizio zeharkagarri den dakigu.
4. Etapan desaktibazioa eta aktibazioa.
5. Ekintzen gauzatzea eta denboragailuen hasieratzea.
6. 2. Etaparako saltoa.

Komeni da algoritmo honi buruzko ohar batzuk egitea. Algoritmo hau edozein programazio-hizkuntzatan (LD, C, diagrama logikoak, etab.) eta euskarritan (automatak, PCak, mikrokontrolagailuak...) programatzen ahalko litzateke. Hala ere, gehienetan, automatetan programatzen da, eta Ladder diagrametan.

Automatetan, sistema noiz abiatzen den jakin daiteke seinale baten bidez. Seinale hori Ladder diagrametan erraz lor daiteke algoritmoko lehen etapa soilik hasieran egiteko.

Adibidez, Omronen PLCetan «P\_First\_Cycle» izeneko konstanteak pultsu bat sortzen du PLCa martxa edo monitorizazio-modura aldatzean eta berrabiaraztean.

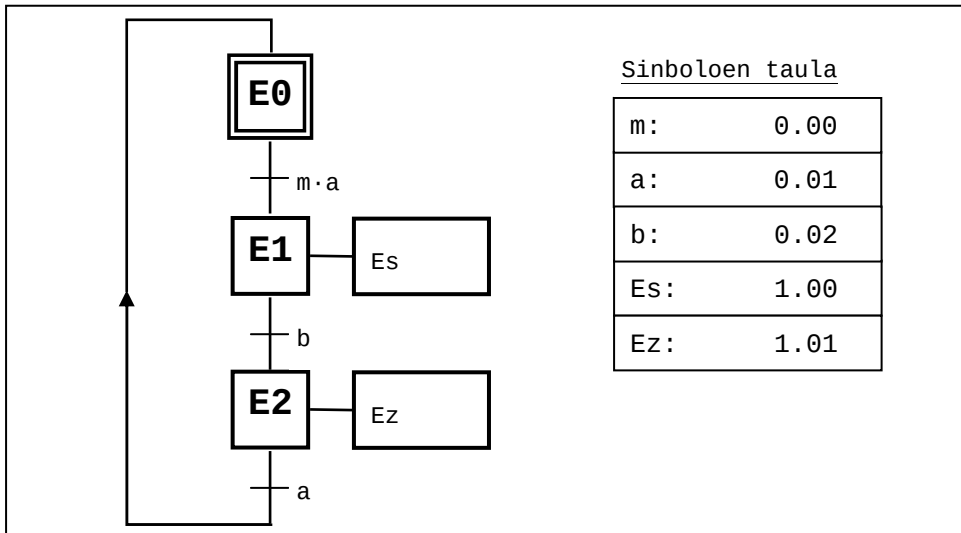
Bestalde, euskarria automata bada, ez da algoritmoaren 2. etapa programatu beharrik, automatikoki egiten baitu scan zikloaren hasieran. Era berean, 6. etapa ere automatikoki egiten du, scan zikloaren bukaeran, eta ez da, beraz, programatu beharrik.

### 3.5.2. Ariketak

Azpiatal honetan bi adibide ebatziko dira LD hizkuntzan azaldutako ideiak argitzeko. Bi adibideetan 3.4.4 ataleko metodo gomendatua erabiliko da. Implementazioaren irudiak Omronen CxProgrammer tresnarekin garatutako programarenak dira eta, ondorioz, Omron etxeko hainbat berezitasun dituzte. Adibidez, aurreko atalean aipatu bezala, «P\_First\_Cycle» kontaktua erabili da hasieratzea egiteko.

#### 3.5.2.1. Sekuentzia bakarreko Grafcet sinplearen implementazioa

Har dezagun 3.6 irudiko Grafceta. Une honetan ez du garrantzirik zein den haren helburua, implementazioan jarri behar delako arreta, baina azal dezagun 2.6.1. azpiataleko adibidearen Grafceta dela (ikus 2.29 irudia) haren sinboloen taula gehituta.



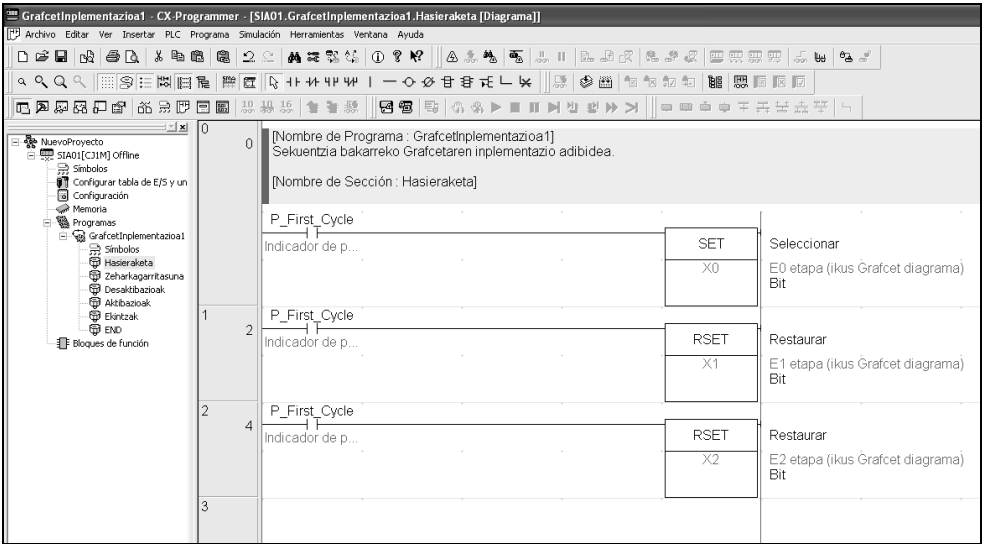
3.16 irudia. Sekuentzia bakarreko Grafceta eta haren sinboloen taula.

Lehenik eta behin, sinboloak definitu behar dira. Sinbolo-taulan agertzen denaz gain, erabaki behar da etapak eta trantsizioen funtzioak nola izendatu eta non gorde (ikus 3.6 irudia).

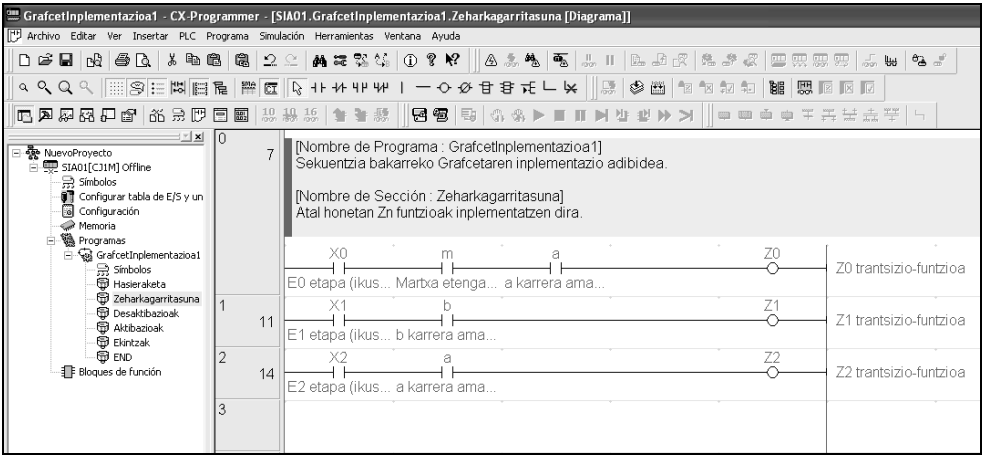
| Nombre | Tipo de datos | Dirección / Valor | Ubicación de... | Uso     | Comentario                            |
|--------|---------------|-------------------|-----------------|---------|---------------------------------------|
| ^ m    | BOOL          | 0.00              |                 | Trab... | Martxa etengailua                     |
| ^ a    | BOOL          | 0.01              |                 | Trab... | a karrera amaiera (ezkerrean dagoena) |
| ^ b    | BOOL          | 0.02              |                 | Trab... | b karrera amaiera (eskuinean dagoena) |
| ^ Es   | BOOL          | 1.00              |                 | Trab... | Eskuinera jaoteko motorra             |
| ^ Ez   | BOOL          | 1.01              |                 | Trab... | Eskuinera joateko motorra             |
| ^ X0   | BOOL          | W0.00             |                 | Trab... | E0 etapa (ikus Grafcet diagrama)      |
| ^ X1   | BOOL          | W0.01             |                 | Trab... | E1 etapa (ikus Grafcet diagrama)      |
| ^ X2   | BOOL          | W0.02             |                 | Trab... | E2 etapa (ikus Grafcet diagrama)      |
| ^ Z0   | BOOL          | W1.00             |                 | Trab... | Z0 trantsizio-funtzioa                |
| ^ Z1   | BOOL          | W1.01             |                 | Trab... | Z1 trantsizio-funtzioa                |
| ^ Z2   | BOOL          | W1.02             |                 | Trab... | Z2 trantsizio-funtzioa                |
|        |               |                   |                 |         |                                       |
|        |               |                   |                 |         |                                       |
|        |               |                   |                 |         |                                       |
|        |               |                   |                 |         |                                       |
|        |               |                   |                 |         |                                       |

3.17 irudia. Sinboloen taula.

Ondoren, lehenengo programa atalean hasieratzeak (ikus 3.18 irudia) gauzatu dira. Jarraian, trantsizioen funtzioak implementatu behar dira. Kasu honetan, programaren atal bat sortu da horretarako (ikus 3.19 irudia).

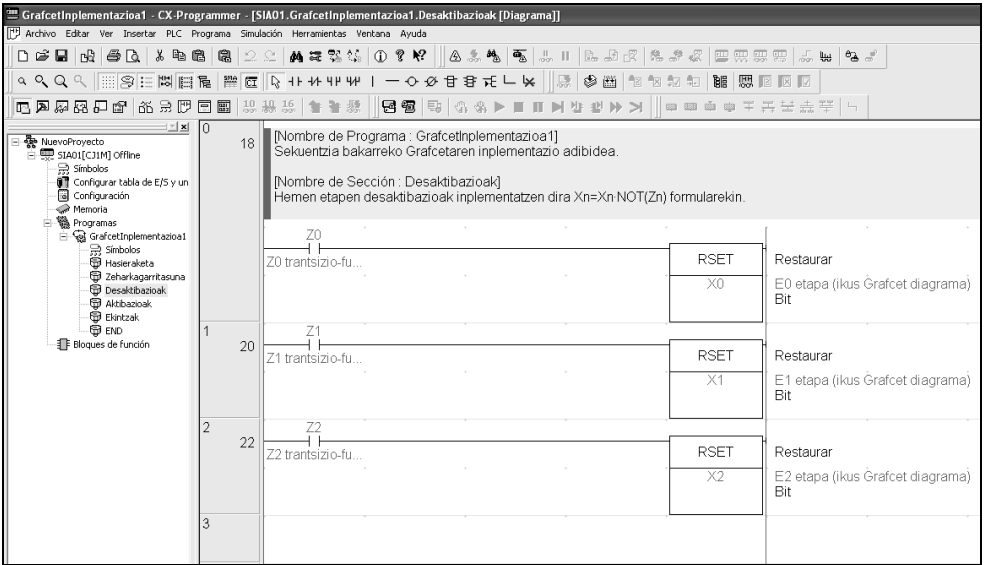


3.18 irudia. Hasieraketak.

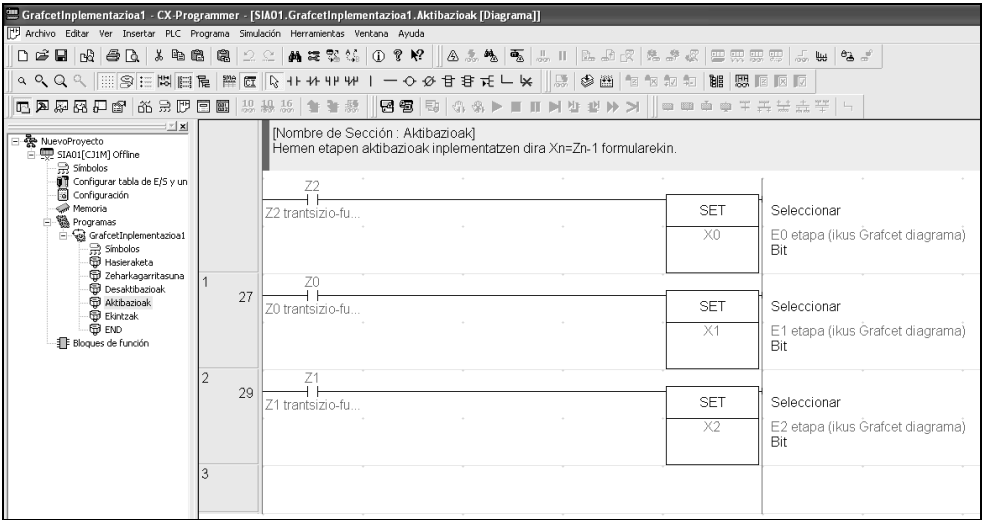


3.19 irudia. Trantsizio-funtzioak.

Segidan, etapen funtzioa implementatu da kontaktuak eta bobinak erabiliz, 3.8 irudian ageri den moduan. Implementazio berbera egin daiteke KEEP funtzioa erabiliz (funtzio honek RS biegonkorren portaera berdina du) edo SET eta RSET funtzioak erabiliz (biak batera erabilita KEEP funtzioaren baliokideak dira).

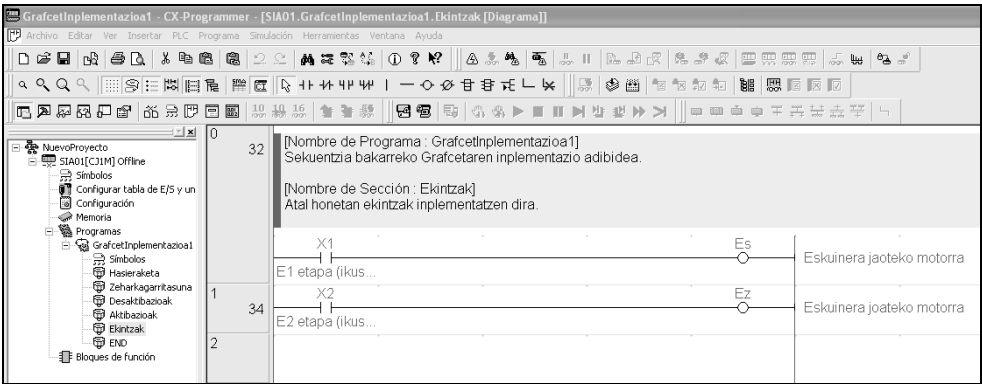


3.20 irudia. Etapen desaktibazioa.



3.21 irudia. Etapen aktibazioa.

Azkenik, ekintzak gauzatu dira, kasu honetan ere atal bereizia sortuz (ikus 3.22 irudia).



3.22 irudia. Ekintzen implementazioa.

### 3.5.2.2. Denboragailuak erabiltzen dituen sekuentzia paralelodun Grafqueta

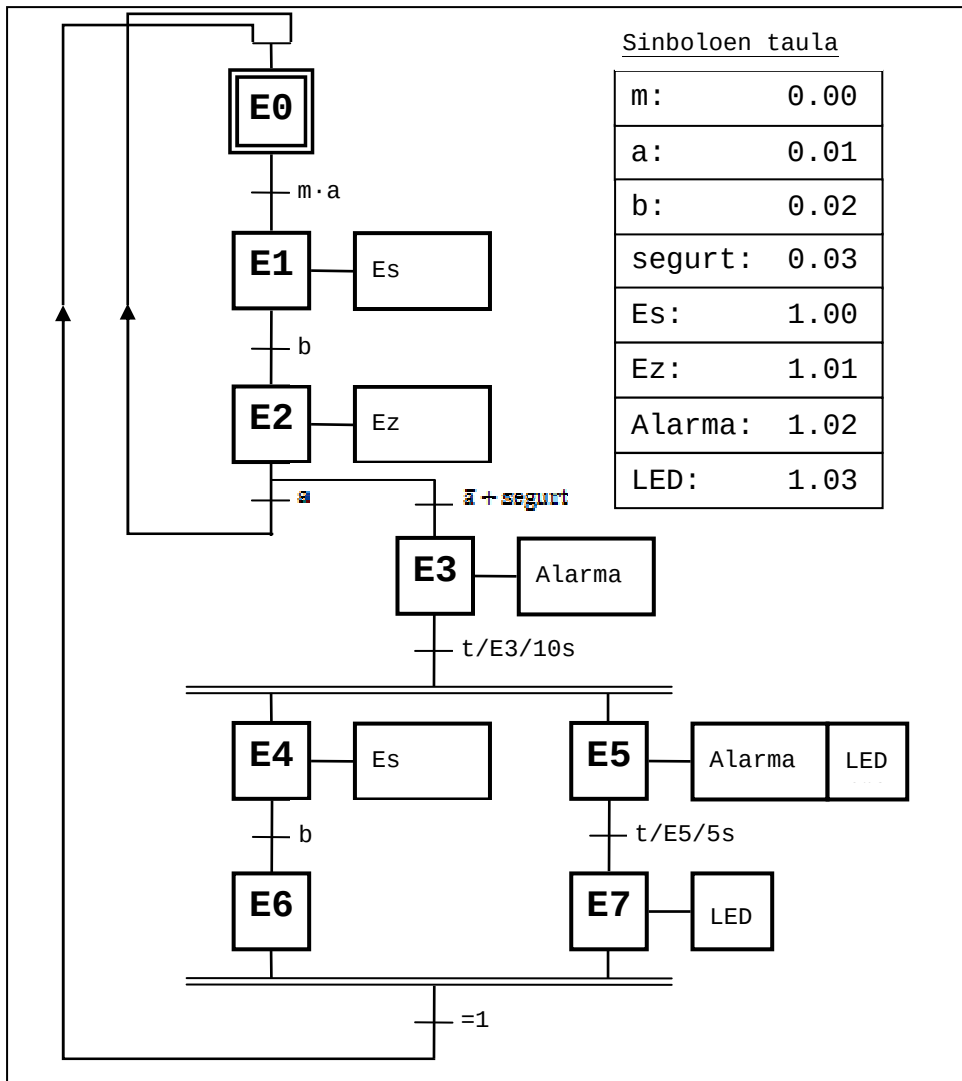
Aurreko adibidean egin denaren antzera, beste Grafcet adibide bat implementatuko da, kasu honetan ere SET/RSET funtzioak erabiliz. 3.23 irudian agertzen den Grafqueta implementatuko da.

Oraingoan dibergentzia ezberdinak daude eta denboragailuak erabili behar dira. Azken hauek TIM aginduekin programatzen dira, eta beraien portaera ohartaraztearena da, alegia, aktibatzen direnetik ezarritako denbora pasatu arte zeroan mantentzen den erakusle bat dute. Denbora pasatzean aktibatzen dira eta hala mantentzen dira



denboragailua aktibatu duen lerroa desaktibatzen den arte. Ondorengo irudietan ariketaren ebazpena azalduko da, aurreko adibidean bezala, atal ezberdinetan banaturik. 3.24 irudian sinboloen taula azalduko da, 3.25 irudian hasieratzea, etab. Kasu honetan ere denboragailuentzat atal bat aparte sortu da programa.

Azaldu behar da atalen antolakuntza programatzailearen erosotasunerako eta irakurgarritasunerako direla, hau da, programa atal bakarrean idatz daitekeela eta funtzionalki berdina litzatekeela.



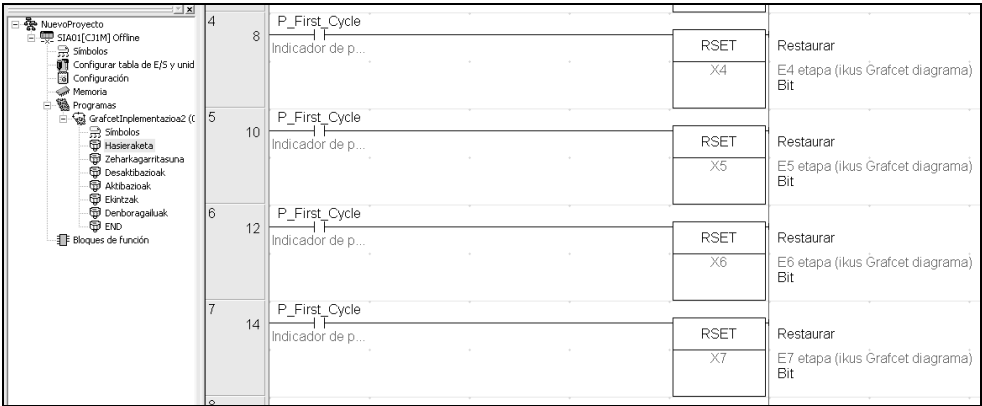
3.23 irudia. Denboragailuak erabiltzen dituen sekuentzia paralelodun Graficeta.

| Nombre        | Tipo de datos | Dirección / Valor | Comentario                             |
|---------------|---------------|-------------------|----------------------------------------|
| ^ m           | BOOL          | 0.00              | Martxa etengailua                      |
| ^ a           | BOOL          | 0.01              | a karrera amaiera (ezkerrean dagoen... |
| ^ b           | BOOL          | 0.02              | b karrera amaiera (eskuinean dagoen... |
| ^ segurt      | BOOL          | 0.03              | Segurtasun sakagailua. Sakatzen de...  |
| ^ Es          | BOOL          | 1.00              | Eskuinera joateko motorra              |
| ^ Ez          | BOOL          | 1.01              | Eskuinera joateko motorra              |
| ^ Alarma      | BOOL          | 1.02              | Buzzer batera kableatutako alarma s... |
| ^ Led         | BOOL          | 1.03              | Alarma egoera adierazten duen LED ...  |
| ^ PasaDira10s | BOOL          | T0000             | 10s denboragailua (E3 etapakoa)        |
| ^ PasaDira5s  | BOOL          | T0001             | 5s denboragailua (E5 etapakoa)         |
| ^ X0          | BOOL          | W0.00             | E0 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X1          | BOOL          | W0.01             | E1 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X2          | BOOL          | W0.02             | E2 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X3          | BOOL          | W0.03             | E3 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X4          | BOOL          | W0.04             | E4 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X5          | BOOL          | W0.05             | E5 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X6          | BOOL          | W0.06             | E6 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ X7          | BOOL          | W0.07             | E7 etapa (ikus Grafcet diagrama)       |
| ^ Z0          | BOOL          | W1.00             | Z0 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z1          | BOOL          | W1.01             | Z1 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z2_1        | BOOL          | W1.02             | Z2 ezkerreko trantsizio-funtzioa       |
| ^ Z3          | BOOL          | W1.03             | Z3 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z4          | BOOL          | W1.04             | Z4 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z5          | BOOL          | W1.05             | Z5 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z6          | BOOL          | W1.06             | Z6 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z7          | BOOL          | W1.07             | Z7 trantsizio-funtzioa                 |
| ^ Z2_2        | BOOL          | W1.08             | Z2 eskuineko trantsizio-funtzioa       |

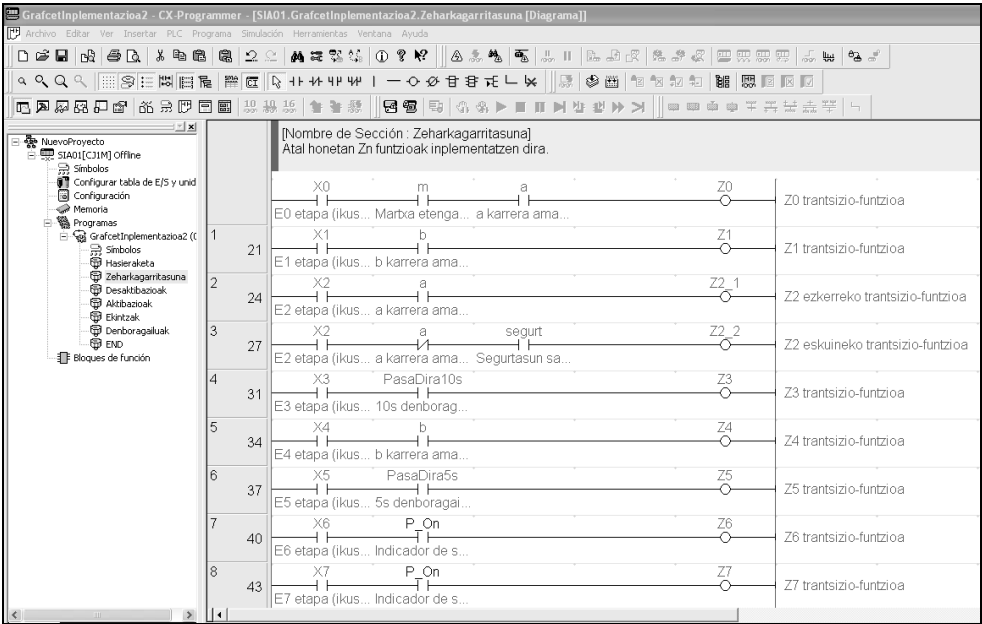
3.24 irudia. Sinboloen taula.

| GrafcetImplementazioa2 - CX-Programmer - [SIA01.GrafcetImplementazioa2.Hasieraketa [Diagrama]]            |   |                                    |                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| [Nombre de Sección : Hasieraketa]<br>Hemen etapak implementatzen dira $X_n=Y_n-1 + X_n/Y_n$ formularekin. |   |                                    |                                                                     |
| 1                                                                                                         | 2 | P_First_Cycle<br>Indicador de p... | SET<br>X0<br>Seleccionar<br>E0 etapa (ikus Grafcet diagrama)<br>Bit |
| 2                                                                                                         | 4 | P_First_Cycle<br>Indicador de p... | RSET<br>X1<br>Restaurar<br>E1 etapa (ikus Grafcet diagrama)<br>Bit  |
| 3                                                                                                         | 6 | P_First_Cycle<br>Indicador de p... | RSET<br>X2<br>Restaurar<br>E2 etapa (ikus Grafcet diagrama)<br>Bit  |
| 4                                                                                                         | 8 | P_First_Cycle<br>Indicador de p... | RSET<br>X3<br>Restaurar<br>E3 etapa (ikus Grafcet diagrama)<br>Bit  |

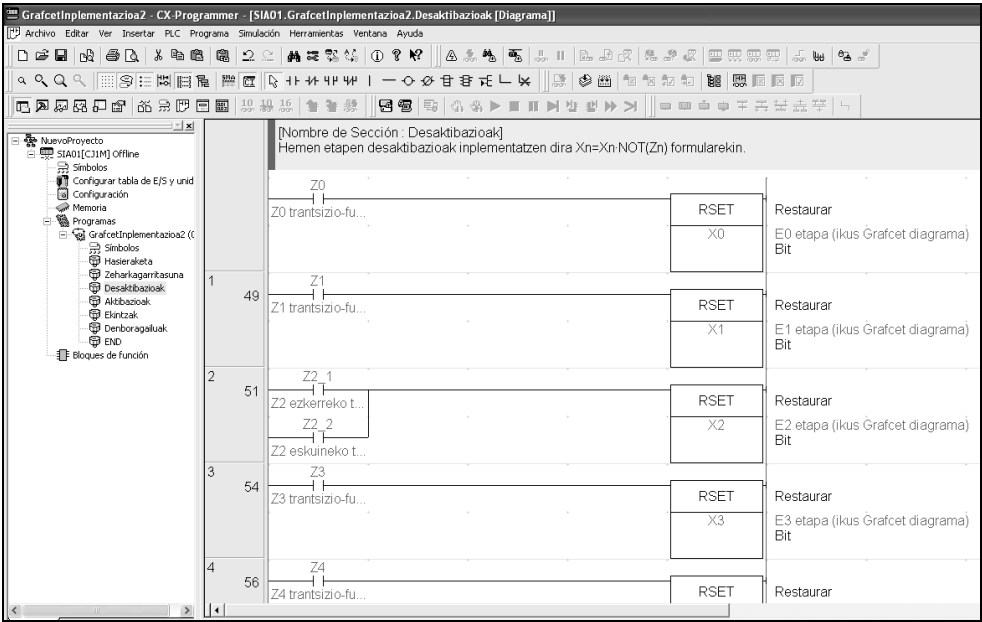
3.25 irudia. Hasieraketa (1)



3.26 irudia. Hasieraketa (2)



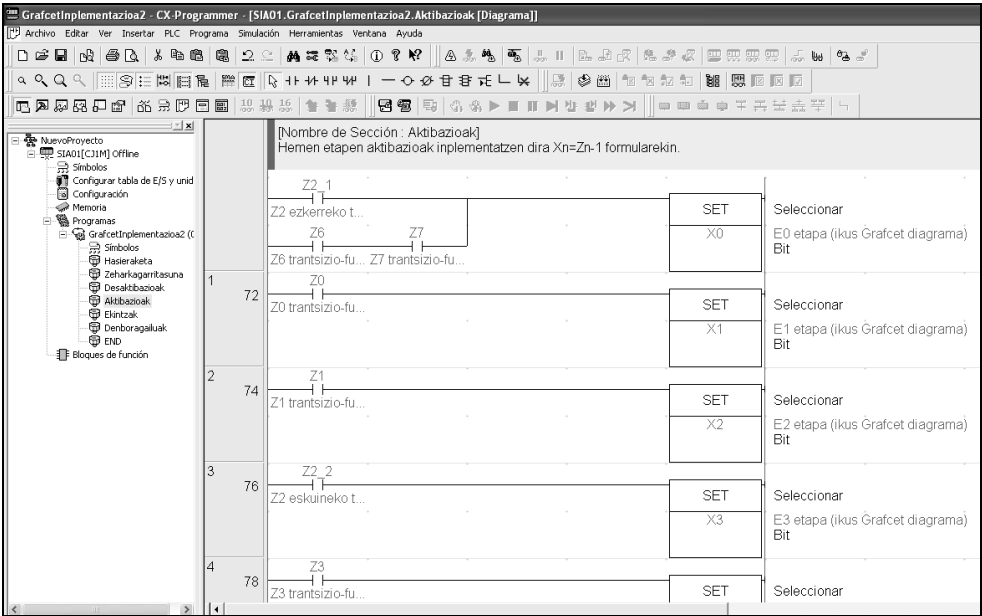
3.27 irudia. Trantsizio-funtzioak.



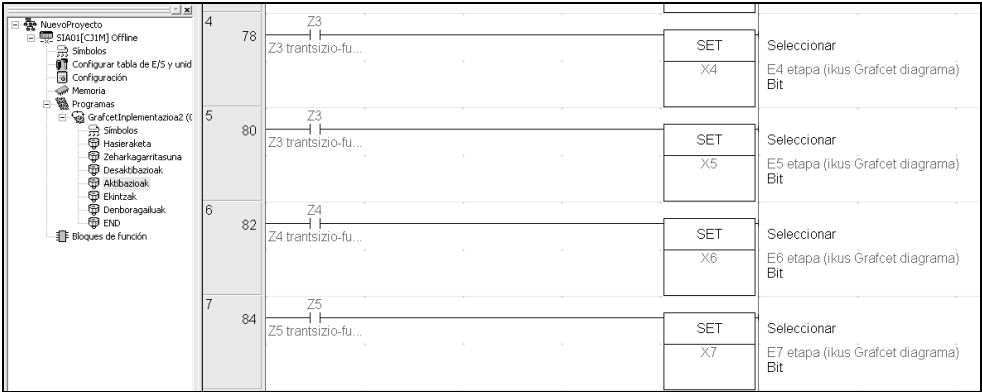
3.28 irudia. Etapen desaktibazioa (1)



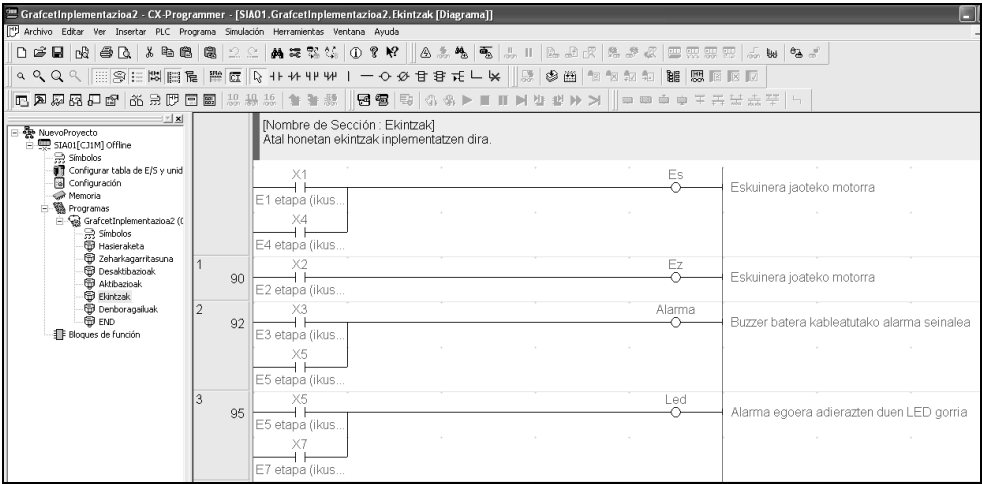
3.29 irudia. Etapen desaktibazioa (2)



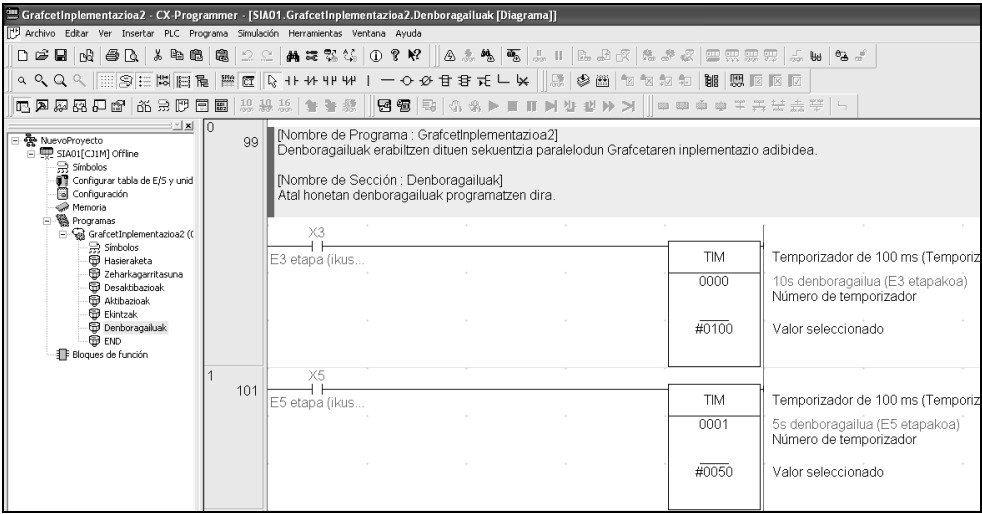
3.30 irudia. Etapen aktibazioa (1)



3.31 irudia. Etapen desaktibazioa (2)



3.32 irudia. Ekingtzen implementazioa.



3.33 irudia. Denboragailuak.

3.5.3. Azken oharrak

Atal honetan aurkezturiko algoritmoak ahalbidetzen du Grafcet gehienak zorrozki interpretatzea eta transformatzea. Hala ere, jakin behar da kasu berezi batzuetan trantsizio batzuk bata bestearen ondoren zeharka daitezkeela, eta horrek arazo batzuk sortzen dituela loturik diren ekintzekin. Kasu bereziak izanik, ez dugu asmorik liburu honetan arazo horretan sakontzeko. Baina jakin behar da lehenago aurkezturiko algoritmoaren bariante batzuk badirela arazo hori kontuan hartzen dutenak.

# Bibliografia

Angel Orozco, A.; Guarnizo, C. eta Holguín, M. (2008): *Automatismos Industriales*, Taller de Publicaciones Universidad Tecnológica de Pereira.

Josep Balcells, J. eta Romeral Martínez, J. L. (1997): *Autómatas programables*, Marcombo, Bartzelona.

Pérez Cruz, J. et al. (2003): *Maniobras en autómatas programables de acuerdo con la norma IEC-61131-3*, Universidad Politécnica de Valencia.

Heinz John, K. (2010): *IEC 61131-3: Programming industrial automation systems*, Springer-Verlag.





II zatia:

# KONTROLA



# 1. Kontrolerako sarrera

Kontrola gure bizian oso zabaldua den prozesua da, bereziki industrian, baina ez bakarrik. Aldagai bat kontrolatzean/menperatzean datza. Aldagai hori mota askotakoa izan daiteke: abiadura, posizioa, presioa, indarra, maila, emaria, korrontea, tentsioa, fluxua, tenperatura, eta abar. Gizakiok ohartu gabe ere, momentu oro, gure gorputzari loturiko hainbat aldagai kontrolatzen ditugu, erraterako gure gorputzaren tenperatura, odolean dugun oxigeno-maila edo zainetako presioa. Inguruan ditugun beste hainbat aldagai ere kontrolatzen ditugu, erraterako edateko, gure eskuaren bidez basoa ahora eramatean, edo jats edo erratz baten bidez lurra garbitzeko eskuak, besoak, zangoak eta gorputzeko beste hainbat atal mugituz.

Teknologiaren bidez, antzeko kontrol-ekintzak aplikatzen dira beste hainbat jakintza-arlotan (mekanikan, elektrizitatean, kimikan, elektronikan, biologian, ekonomian...) eta aplikaziotan (industrian bereziki, baina baita ere etxetresna elektrikoetan, autoetan, ordularietan, telefono mugikorretan...). Erraterako industriako prozesu batzuetan, labe bateko tenperatura kontrolatu behar da, edo uhal baten abiadura, edo robot baten besoaren posizioa, edo ontzi baten barnean den likido baten maila edo gas baten presioa. Milaka adibide aurki daitezke.

Kontrolari loturiko kontzeptu, teknika eta metodoak, Automatika deituriko jakintza-arlokoak, oso zabalak dira. Liburu honetan, soilik jakintza-arlo horri loturiko ezagutza zati txiki bat aztertzen dugu, oinarrizko zatia. Ezagutza hori nahikoa da errealitatean aurkitzen ditugun hainbat problema ebazteko, eta ezinbestekoa da Automatikaren jakintza-arloan gehiago sakontzeko.

Kapitulu honetako ondorengo ataletan, Kontrolari loturiko hainbat oinarrizko kontzeptu azaltzen dira. Azalpen horiei esker, hobeki irudikatzen da Automatika jakintza-arloaren zabalera eta hemen aztertzen dugun zatia, eta, bereziki, azalpen horiek ondorengo kapituluak ulertzeko ezinbesteko informazioa ematen dute.

## 1.1. Sistema

Sistema bat «ingurunearekin elkarrekintza duen elementu multzo» gisa defini daiteke. 1.1 irudian agertzen den bezala, sarrera aldagai batek sistema kitzika dezake eta horrek irteera aldagaian eraginen du.

Erraterako zirkuitu elektriko bat sistematzat har daiteke. Sistema horren sarrera nodo batean aplikatzen den tentsioa izan daiteke, eta irteera zirkuituko korrontea. Beste sistema adibide bat labe batena izan daiteke. Kasu horretan, sarrera berotzeko erresistentzia bati aplikatzen zaion tentsioa izan daiteke, eta irteera labeko tenperatura. Mekanika-arloan, auto bat sistema modura ikus daiteke, non sarrera aplikatzen zaion indar bat izan daitekeen, eta irteera autoaren abiadura erraterako.



1.1 irudia. Sistema baten adierazpena bloke gisa.

Kontrollean, sistemari nahitara aplikatu ohi zaio sarrera. Hala ere, sistemaren irteera borondatezkoa ez den sarrera baten menpekoea ere izan daiteke. Halako sarrerak perturbazioak deitzen dira.

Sistema bakoitzari loturiko lege fisikoak adieraziz, sarrera eta irteera aldagaien arteko harreman bat lortzen da, gehienetan ekuazio diferentzial bat.

Aztertzen ditugun sistemak kausalak dira. Horrek erran nahi du irteera sarreraren ondorioz gertatzen dela. Beraz, sarrera bat une batez aldatzen bada, irteeran izanen duen eragina une hori baino beranduago agertuko da.

## 1.2. Linealtasuna

Sistema bat lineala dela erraiten da sarreraren eta irteeraren arteko harremana lineala bada. Demagun  $f$  funtzio batek adierazten duela sarreraren eta irteeraren arteko harremana:  $y=f(x)$ . Sistema lineala izanen da,  $f$  funtzioa lineala bada, erran nahi da bi propietate hauek betetzen baditu (gainezarpenaren printzipioa):

- Batukorra:

$$\forall x_1, x_2, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2 \quad (1-1)$$

- Homogeneoa:

$$\forall x, l, f(lx) = lf(x) = ly \quad (1-2)$$

Adibide gisa, diferentziazioa eragiketa lineala da; aldiz, berreketa ( $f(x)=x^2$ ) ez da eragiketa lineala.

Gehienetan, sarreraren eta irteeraren arteko harremana ekuazio diferentzialetan oinarritzen da. Sistema lineala izango da, ekuazio diferentziala lineala bada, erran nahi da haren koefizienteak aldagaiekiko konstanteak badira:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (1-3)$$

Errealitatean, sistema gehienak ez dira linealak, baina horietako askok joera lineala dute funtzionamendu-eremu batean. Horregatik, 2. kapituluaren ikusiko den moduan, sistema ez-linealak funtzionamendu puntu baten inguruan linealizatu daitezke.

Automatikan, sistema ez-linealak aztertzeke teknikak eta metodoak sortu dira. Dena den, liburu honetan soilik sistema linealak aztertzen dira. Jakituria hori nahikoa da errealtatean aurkitzen ditugun problema gehienak ebazteko.

### 1.3. Sistema aldakorrek eta ez-aldakorrek

Aurreko ataleko ekuazio diferentzialeko koefizienteak denboraren menpe badaude, sistema aldakorra dela erraten da:

$$a_0(t)y(t) + \dots + a_n(t)\frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0(t)x(t) + b_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m(t)\frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (1-4)$$

Koefizienteak denborarekiko konstanteak badira, sistema ez da aldakorra.

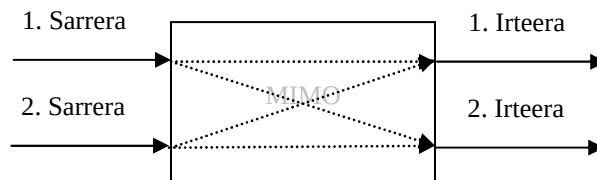
Sistema ezegonkor adibide gisa, Euler-en bigarren graduako ekuazio hau har daiteke erraterako:

$$0,01t^{-2}y(t) + 0,25t^{-1}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0 \quad (1-5)$$

Liburu honetan soilik sistema ez-aldakorrek aztertzen dira. Sistema erreal gehien-gehienak halakoak kontsidera daitezke.

### 1.4. SISO eta MIMO sistemak

1.1n agertzen den sistema *Single-Input Single-Output* (SISO) motakoa da, hau da sarrera eta irteera bakarrek. Oro har, sistema batek sarrera eta irteera gehiago izan ditzake, 1.2 irudian agertzen den bezala. Kasu honetan bi sarrera eta bi irteera dira, baina gehiago izan daitezke. Halako sistemak *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO) deitzen dira.



1.2 irudia. MIMO sistemak

MIMO sistema batzuetan, sarrera bakoitzak soilik irteera batean du eragina. Kasu hauetan, MIMO sistemak hainbat SISO sistemetan transforma daitezke. Aldiz, sarrera eta irteera desberdinen arteko elkarrekintzak direlarik, 1.2 irudian bezala non bi sarrerek bi irteeretan eragiten duten, MIMO sistema ezin da errazki sinplifikatu.

Liburu honetan soilik SISO sistemak aztertuko ditugu. Problema errealetan ebazten diren gehienak halakoak dira.

## 1.5. Seinale jarraitua eta digitala/diskretua

Seinaleak sistemetan agertzen diren aldagaien irudiak dira, askotan tentsio edo korrante modura adierazten direnak. Erraterako, termopare batek temperatura baten irudia emanen du tentsio gisa. Erranen dugu termoparearen bidez temperatura bat neurtu dugula. Termopareak sentore-funtzioa betetzen du, ezagutu nahi dugun aldagai baten balioa emanez, ez zuzenki, beste aldagai bat bilakatuz (tentsioa).

Aipatu ditugun seinale eta aldagaiak jarraituak dira mundu errealean. Une oro balio bat dute eta eremu baten baitan (adibidez,  $\pm 5$  V-eko tentsio-seinale batentzat) edozein balio har dezakete.

Baina ordenagailu, automata edo mikrokontrolagailu baten ikuspegitik, errealitatea ez da jarraitua, digitala edo diskretua baizik. Seinale digitalak seinale jarraituak laginduz lortzen dira. Kuantifikatuak dira (soilik balio batzuk har ditzake, bihurtzailu analogiko/digitalaren erresoluzioaren arabera) eta denboran laginduak (lagin-denboretan ezagutzen dira soilik). Horrela, mikrokontrolagailu batetik ikusten diren sistemak ez dira jarraituak, digitalak baizik.

Luzaz kontrolagailuak anplifikadore operazionalaz osaturiko zirkuitu elektronikoetan oinarritzen ziren, baina gaur egun, kontrol-sistema gehienak automata edo mikrokontrolagailuetan oinarrituak dira. Kontrolagailu horiek diseinatzeko, komeni da sistema digitalen teoria ezagutzea.

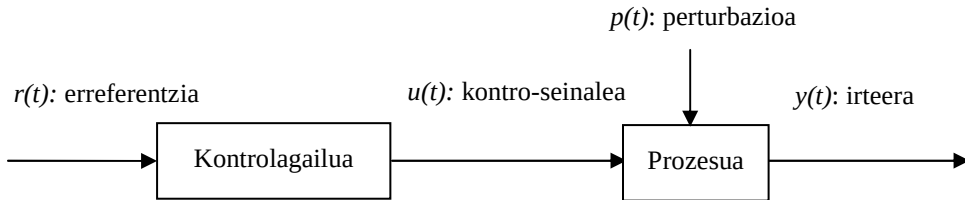
Liburu honetan soilik sistema eta kontrolagailu jarraituak aztertzen dira. Haien ezagutza ezinbestekoa da geroago sistema digitalak aztertzeko. Gainera, askotan, kontrolagailu jarraitu batetik kontrolagailu digital bat lor daiteke nahiko errazki.

## 1.6. Kontrola begizta irekian eta begizta itxian

Automatikan helburu nagusia aldagai batzuk kontrolatzea da, hau da, aldagai horiek desiratzen den balio batera helaraztea. Helburu hori bi modu desberdinetan lor daiteke, ondorengo azpiataletan agertzen den bezala.

### 1.6.1. Kontrola begizta irekian

1.3 irudian begizta irekiko kontrol-sistema baten bloke-diagrama erakusten da.  $r(t)$  erreferentzia-seinalea sistemaren  $y(t)$  irteerak lortu behar duen balioa da. Horretarako, kontrolagailuak,  $u(t)$  kontrol-seinalea sortu eta kontrolatu nahi den sistemari edo prozesuari aplikatzen dio.

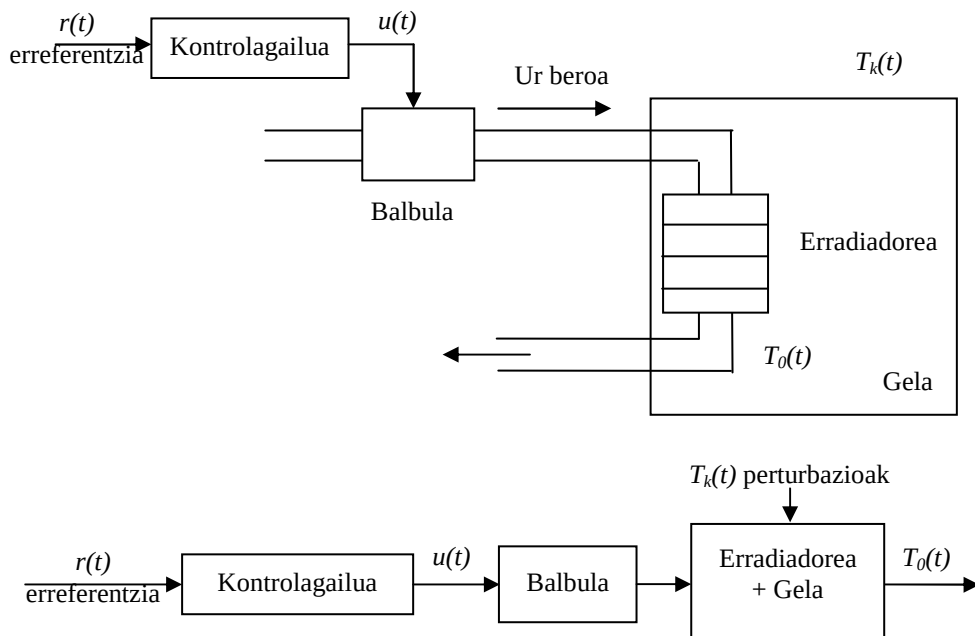


1.3 irudia. Begizta irekiko kontrola.

Sistema ongi ezagutzen bada, egonkorra eta ez-aldakorra bada, eta gainera perturbaziorik ez badu jasotzen, begizta irekiko kontrola eraginkorra izan daiteke. Hala ere, gehienetan, sistemaren joera ez dugu zehazki ezagutzen eta gainera sistemak  $p(t)$  kanpo-perturbazioak jasaten ditu. Kontrolagailua ez da fenomeno horietaz ohartzen, ez baitu irteerari buruzko informaziorik. Horregatik, kontrol-eskema hau ez da eraginkorra kasu gehienetan. Soilik erabil daiteke sistema egonkorra delarik, perturbazio txikiak direlarik edo sistemek inertzia handia dutelarik, eta irteerak erreferentziaren baliora zehazki ez heltzea onartzen delarik.

Erraterako, gela baten tenperaturaren kontrola begizta irekian egin daiteke, 1.4 irudian agertzen den gisan irudi horren goiko partean sistemaren eskema agertzen da, eta behekoan dagokion bloke-diagrama. Sistemari eragiten dion eragingailua balbula bat da.  $r(t)$  erreferentzia-seinalearen arabera  $u(t)$  kontrol-seinale bat aplikatzen zaio balbulari, gehiago edo gutxiago irekiaraziz. Horren arabera, erradiadorera doan ur beroaren emaria lortu nahi den tenperaturari egokitzen zaio. Gela kanpoko  $T_k$  tenperatura perturbazio modura ikus daiteke. Haren balioaren arabera, gelako  $T_o$  tenperatura desberdina izanen da. Beraz,  $T_o$  ez da beti nahi dugun baliora ( $r(t)$  erreferentziaren baliora) helduko.

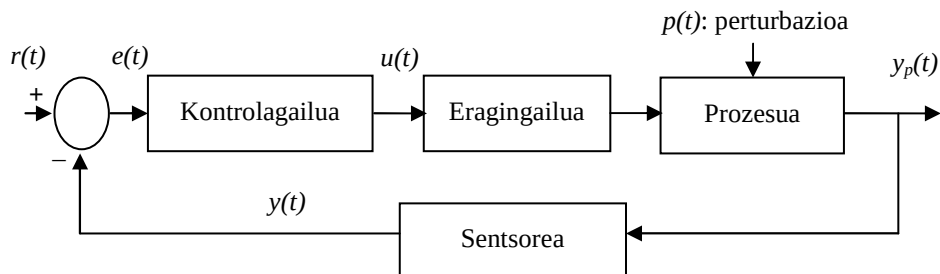
Tenperatura edozein baldintzatan balio zehatz batera heltzea nahi badugu, tenperatura horren informazioa lortu beharko dugu, nolabait perturbazioen eta kontrolatu nahi den sisteman ezagutzen ez denaren ondorioak konpentsatzeko. Sentsore batek ematen duen informazio berri horrekin, begizta itxian lan egiten da, ondorengo atalean azaltzen den moduan.



1.4 irudia. Gela bateko temperatura begizta irekian kontrolatzeko adibide bat.

### 1.6.2. Kontrola begizta itxian

1.5 irudiak begizta itxiko kontrola irudikatzen du bloke-diagrama baten bidez.  $y(t)$  aldagai kontrolatua sentsore baten bidez neurtzen da eta  $r(t)$  erreferentziarekin konparatzen,  $e(t)$  errorea zein den jakiteko.  $u(t)$  kontrol-seinalea errorea txikitzeko kalkulatu du kontrolagailuak. Begizta itxiko eskemarekin konparatuz, sentsorea eta kontrolatu nahi den aldagaiaren neurketa-seinalearen berrelikadura agertzen dira hemen. Berrelikadura horri esker, sistemari eragiten dioten perturbazioak konpentza ditzake kontrolagailuak.

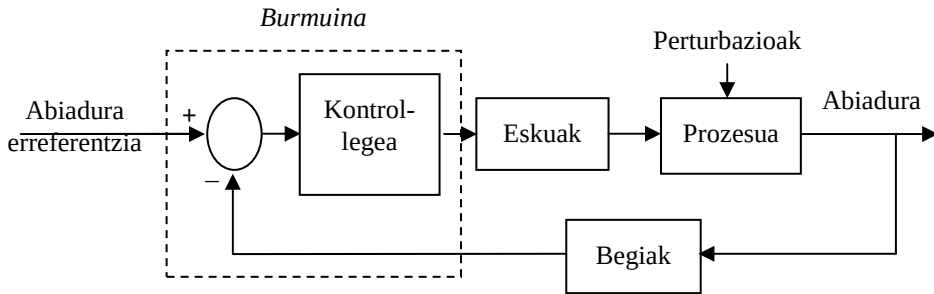


1.5 irudia. Begizta itxiko kontrola.

1.6 irudian gizakien kontrolatzeko era naturalarekin konparaketa bat egiten da. Demagun jats edo erratz batek lurrean duen abiadura kontrolatu nahi dugula irudiko bloke-diagraman agertzen den moduan, lortu nahi denaren (erreferentzia) eta lortzen den



emaitzaren (begiek ikusten dutena) arteko desberdintasuna eta kontrolagailuaren lana burmuinak egiten du gizakion kasuan. Problema horretan, gure eskuak lirateke eragingailua, eta gure begiak sentsoarea. *Prozesua* blokeak kontuan hartuko lituzke, adibidez, jatsaren masa, malgutasuna eta lurraren kontra gertatzen diren marruskadurak.



1.6 irudia. Konparaketa gizakien kontrolatzeko era naturalarekin.

Liburu honetako 2. zati honen 4. kapituluaren kontrolagailu arrunt batzuk aztertuko ditugu, denak begizta itxian.

## 1.7. Kontrol-sistema baten oinarrizko bloke eta seinaleak

Aitzineko atalean kontrol-sistema baten bloke eta osagai nagusiak agertu dira. Liburu honetan askotan aipatuko dira. Horregatik, ezinbestekoa da hiztegi hau ongi menperatzea.

Blokeei dagokienez, hauek dira kontrol-sistema batek dituen blokeak:

- **Kontrolagailua:** kontrol-legea gauzatzen du.
- **Eragingailua:** kontrolatu nahi den prozesuan eragiten du. Kontrolagailuak emaniko kontrol-seinalea aplikatzen zaio.
- **Prozesua/Sistema:** kontrolatu beharreko sistema (bere irteera).
- **Sentsorea:** kontrolatuko den aldagaia neurtzeko gai den gailua.

Azken 3 blokeek gehienetan *Prozesua* edo *Sistema* deitzen dugun bloke berean sartzen dira. 4. kapituluaren hasieran esplikatzen da zergatik.

Seinaleei dagokienez, hauek dira kontrol-sistema batean agertzen diren seinale nagusiak:

- **Erreferentzia (SP Set Point, kontsigna):** irteerak hartu behar duen balioa.
- **Kontrolaturiko aldagaia (PV Process Variable):** prozesuaren irteera neurtua.
- **Errorea:** kontrol-prozesuan azaltzen den errorea:  $e(t) = ST - PV$ .

- **Kontrol-seinalea:** kontrolagailuak sortzen duen seinalea eta prozesuari (eragingailuaren bidez) aplikatzen zaiona.

## 1.8. Erregulazioa eta jarraipen-kontrola edo serbomekanismoa

Sistema edo prozesu bat kontrolatzean, bi kontrol modu bereizten dira erreferentzia edo kontsignaren arabera. Problema batzuetan, erreferentzia konstantea da, eta kontrolagailuaren lana perturbazioen ondorioak konpentsatzea da, kontrolatzen ari garen irteera ez dadin aldatu. Erraterako, labe bateko tenperatura 100°-tan atxikitzea izan daiteke helburua, labeko atea irekitzeak edo labeko kanpoko tenperatura-aldaketek sortzen dituzten perturbazioen eragina baztertuz. Beste adibide bat izan daiteke prozesu industrial batean ontzi baten likido-maila konstantea atxiki nahi izatea, borondatezkoak ez diren sarrera eta irteerako emariak konpentsatuz. Kontrol modu horri *erregulazio* deritzo.

Beste batzuetan, erreferentzia aldatzen da, eta kontrolagailuak lortu behar du prozesuaren irteerak erreferentziari segitzea. Erraterako, robotikan, beso baten puntaren posizioari dagokion erreferentzia alda daiteke. Kontrol mota honek *serbomekanismoa* edo *jarraipen-kontrola* du izena.

Liburu honetan aztertzen diren metodo eta teknikak bi kontrol mota hauetarako balio dute.

## 1.9. Kontrolaturiko sistema baten espezifikazioak

Bezera batek hornitzaile bati produktu edo zerbitzu bat diseinatzea eskatzen diolarik, espezifikazio batzuk ematen ditu, edo bien artean adosten dituzte. Kontrolean ere, kontrolatu nahi den sistema edo prozesuari buruzko espezifikazioak adierazi behar dira, hau da, kontrolaturiko sistemak zer ezaugarri izan behar duen zehaztu behar da kontrolagailua modu egokian diseinatzeko. Automatikalari baten helburua zera da, sistema edo prozesu batentzat finkatu diren espezifikazioak lortzeko kontrolagailu egoki bat diseinatzea. Espezifikazioak hiru maila hauetan definitzen dira:

- *Egonkortasuna:* kontrolaturiko sistema egonkorra izan behar da. Adibidez, sarrera konstante bihurtzen bada, irteera denbora baten ondoren balio finitu batera heldu behar da. Behin kontrolaturik, sistema ezinbestean egonkorra izan behar da. Hau da espezifikazio garrantzitsua.
- *Dinamika:* erreferentzia berri bati edo perturbazio bati zein azkartasunez eta zein modutan (zuzenean nahi den baliora helduz, edo balio hori pasatuz eta gero berriz ere baliora hurbilduz...) erantzun behar zaion adierazi behar da espezifikazioetan. Oro har, kontrolaturiko sistema ahal bezain azkarra izatea nahi da.
- *Egoera iraunkorreko zehaztasuna:* kontrolatzen den sistema egoera iraunkor batera heltzen delarik, erreferentziaren balioaren eta kontrolaturiko aldagaiaren arteko desberdintasuna, hau da, errorea, zenbatekoa izatea nahi den (zein zehaztasun

nahi den) adierazten da espezifikazioetan. Askotan, egoera iraunkorreko errorea zero izatea nahi da, baina ez beti.

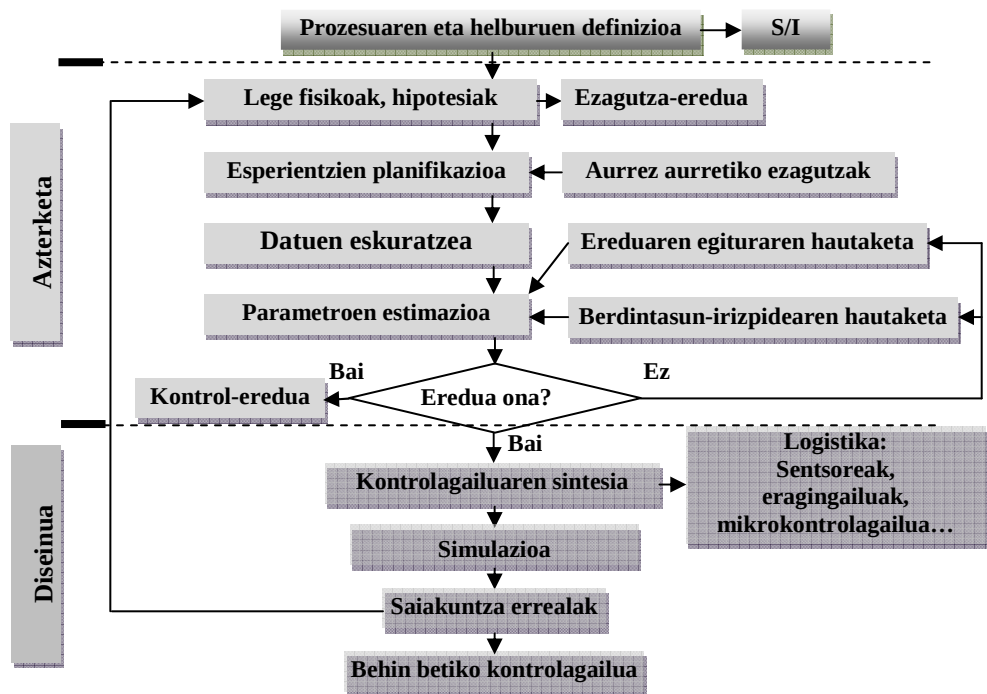
Egonkortasuna, dinamika eta egoera iraunkorreko prezisioa kontzeptuak liburuaren zati honetako 3. kapituluaz aztertzen dira.

## 1.10. Diseinu-metodoa

1.7 irudiak kontrolagailu bat diseinatzeko egin beharreko pausoak zein diren erakusten du.

Metodo honen lehen etapa kontrolagailuaren helburuak zein diren definitzean datza. Beraz, hemen adierazten dira zein espezifikazio bete beharko dituen kontrolaturiko prozesuak. Hori egitean, zein aldagai kontrolatu nahi den (kontrolatu behar den sistemaren irteera) adierazten da, baita zein aldagairekin ere (prozesu edo sistemaren sarrera izanen denarekin).

Bigarren pausoan, kontrolatu nahi den sistema edo prozesua aztertzen da. Horretarako, sistemaren eredu pare bat lortu behar da. Eredu bat simulazioak egiteko erabiliko da. Eredu horri *simulazio-eredu* esaten zaio. Beste eredu bat, oro har sinpleagoa dena, kontrola diseinatzeko erabiltzen da. Eredu hori *kontrol-eredu*a deitzen da. Batzuetan, simulazio- eta kontrol-ereduak berdinak dira. Heldu den kapituluaz aztertzen da sistemen ereduak nola lortzen diren.



1.7 irudia. Kontrolagailu bat diseinatzeko segitu beharreko prozesua.

Metodoaren hirugarren pausoa kontrolagailuaren diseinuari dagokio. Liburu honetako 4. kapituluari zehazten da. Kontrolagailua diseinatzen eta doitzeko finkatu diren kontrol espezifikazioak lor ditzan. Gainera, etapa honetan, zein motatako eragingailu eta sentoreak erabiliko diren hautatzen da, baita kontrolagailua nola gauzatuko den ere (anplifikadore operazionalak osaturiko zirkuitu elektroniko baten bidez, edo mikrokontrolagailu bat edo automata bat programatuz...). Behin kontrolagailua diseinaturik, simulazioen bidez eta entsegu errealek bidez frogatzen da, egokia dela segurtatu arte.

### **1.12. Konklusioak**

Ikasgai honetan aztertuko ditugun sistemak, jarraituak, SISO motakoak, linealak eta ez-aldakorrak dira.

Heldu den kapituluari sistema fisikoaren ereduak aztertzen da. 3. kapituluari, denboraren eremuan sistema desberdinek duten erantzuna aztertzen da. Erantzun hori ereduaturiko prozesuaren ezaugarrien arabera da. Erran daiteke kapitulu hau dela Kontrolari buruzko garrantzitsua. 4. kapituluari oinarriko kontrolagailu batzuen diseinua nola egin azaltzen da.

## 2. Sistema fisikoen eredu tapena

### 2.1. Sarrera

Sistema edo prozesuen eredu tapenari buruzko sarrera-kapitulu honek sei azpiatal ditu. Lehenean, sistemen eredu tapena zertan datzan aipatzen da bereziki. Ondorengo bi azpiatalek eredu tapenaren garrantzia eta helburua dute gaitzat. 4. eta 5. azpiatalek ezagutza- eta adierazpen-ereduen arteko desberdintasuna zehazten dute, eta azkenak, prozesu baten eredu lortzeko metodologia azaltzen du.

#### 2.1.1. Sistemen eredu tapena

Aitzineko kapituluan aipatu den gisan, kontrol-helburuak finkatu ondorengo urratsa da kontrolatu beharreko sistema aztertzea eta haren eredu tapen matematikoa lortzea.

Eredu matematiko batek sistemaren joera aztertzea eta aurreikustea ahalbidetzen du. Osagai mekaniko, elektriko, hidrauliko, termiko eta abarren bilakaera aztertzeko fisikaren legeetara jotzen da.

Eredu ez da inoiz errealtatea bezalakoa % 100ean. Zehaztasuaren eta konplexutasunaren arteko konpromiso bat da. Paul Valery-k zioen bezala, sinplea dena gaizki dago, faltsua da, baina sinplea ez dena ezin da erabili.

Oro har, sistemaren dinamika (erantzunaren zati iragankorraren denborarekiko bilakaeraren ezaugarriak) ekuazio diferentzialen bidez adierazi ohi da. Ekuazio diferentzial horiek jakintza-arlo desberdinetako legeak erabiliz lortzen dira.

Kapitulu honetan ikusiko dugunez, sistemen azterketa eta kontrolagailuen diseinua errazteko, komeni da prozesuaren denborarekiko adierazpenaren ordez, maiztasuaren eremuko adierazpen bat erabiltzea. Adierazpen batetik bestera pasatzeko, Laplace-ren transformatua erabiltzen da. Transformatze horren bidez, ekuazio diferentzialak nahiko modu errazean ebatz daitezke adibidez.

*Kontrola* ikasgaia nahiko zaila da ulertzea hasiera batean ikasle gehienentzat, abstraktu samarra delako. Kontrol-teoriaren abiatzea, nolabait errateko, «mundu erreale»etik egiten da, sistema errealei fisikako legeak aplikatuz. Lege horiek lortu ondoren, Laplace-ren transformatua aplikatuz, erran daiteke Automatikaren mundu edo eremu abstraktu eta matematikora pasatzen garela. Eremu horretan, lehen erran bezala, prozesuak aztertzea eta kontrolagailuak diseinatzea errazagoa da, baina hasieran ikaslea ez da horretaz ohartzen, eremu zeharo berri bat delako berarentzat. Kapitulu hau bi mundu horien arteko muga da. Behin Automatikaren mundura pasatuta, ikasleek gaia lantzeko ahalegin handi bat egitea komeni da, hainbat kontzeptu berri ahal bezain laster barneratzeko.

### 2.1.2. Ereduztapenaren garrantzia

Arrazoi desberdinengatik, ereduztapen-faseak garrantzi handia du kontrolagailua diseinatzeko bidean. Alde batetik, erabakiak hartzeko lagungarria da. Erraterako, kontrol-legeak diseinatzeko, prozesuaren hainbat ezaugarri kontuan hartu behar dira: zein den haren azkartasuna, egonkorra ote den, integratzailerik ba ote duen, eta abar.

Bestalde, kontrolagailua diseinatu ondoren, simulazio numeriko batzuen bidez frogatzea gomendatzen da. Proba errealek gehiago balio dute, arriskutsuak izan daitezke langileentzat eta prozesu errearentzat, eta malgutasun gutxi eskaintzen dute. Simulazio numerikoetan, aldiz, nahi den adina proba egin daitezke denbora gutxian, malgutasun handiarekin eta arriskurik gabe. Baina proba horiek egiteko noski, lehenago, prozesuaren simulazio-eredu bat lortu behar da.

Bukatzeko, jakin behar da prozesuaren ereduztapena gutxi gorabera kontrol-proiektu baten lanaren % 50 dela.

### 2.1.3. Ereduztapena zertarako

Zertarako balio du kontrolatu nahi dugun prozesuaren ereduztapenak? Aitzineko ataletan jadanik zeharka erantzun zaio galdera horri, neurri handi batean behintzat.

Ereduak prozesua hobeki ulertzeko balio du alde batetik. Hasiera batean, sistema mota horretan ez bagara adituak behintzat, prozesuan gertatzen diren fenomenoak ulertzea ez da erraza. Sistema ereduztatzeak berak, adibidez prozesuari dagozkion jakintza-arloko legeak aztertzeak edo lortzen diren ekuazio diferentzialak arakatzek, sistema hobeki ulertzea ahalbidetzen du. Erraterako, horrela jakin dezakegu zein aldagaik eragiten duen beste aldagaietan, edo zein fenomeno diren garrantzitsuenak eta zein gutxiets daitezkeen ereduztapenean. Behin eredia lorturik ere, ereduak sistema hobeki ulertzea ahalbidetzen du, adibidez simulazio numerikoen bidez.

Bestalde, lortzen den ereduari esker, sistemaren hainbat aldagairen joera aurreikus daiteke. Erraterako, zer gertatuko litzateke aldagai baten edo parametro baten balioa aldatuko balitz? Erantzun hauek, noski, kontrol-diseinua errazten dute. Besteak beste, simulazio numerikoei esker, kontrolagailua sistema errealean nola ibiliko litzatekeen aurreikus daiteke.

Lehenago aipatu bezala, ereduak kontrolagailua bera diseinatzeko lagun dezake. Kasu horretan, *kontrol-eredua* deitzen da. Hori ulertzea zaila izan daiteke ikaslearentzat momentuz, baina 4. kapituluaren horren adibide bat azaltzen da, non PI motako kontrolagailua kontrol-eredu baten bidez analitikoki diseinatu den.

Kontrolagailu aurreratu batzuetan, eredia bera sistema kontrolatzeko erabil daiteke, erraterako kontrolagailu prediktiboetan. Ereduaren bidez irteera aurreikusten da, denbora errealean, eta kontrolagailuak informazio hori erabiltzen du finkatu diren espezifikazioak lortzeko.

#### 2.1.4. Ezagutza-eredua

Ezagutza-ereduak analitikoki lortzen dira, lege fisikoetan (edo kimikoetan, biologikoetan, ekonomikoetan...) oinarrituz.

Gehienetan oso zaila da fenomeno konplexuak fideltasunez deskribatzea. Horregatik, hipotesi sinplifikatzaileak egin ohi dira. Zehaztasunaren eta sinpletasunaren arteko dilema agertzen da hor. Lehenago aipatu bezala, eredu sinple bat faltsua da, baina eredu konplexu bat ezin da erabili. Beraz, ereduztapenaren helburuen arabera, fenomeno edo joera nagusiak kontuan hartu behar dira ereduan, baina hainbesteko garrantzirik ez dutenak, ez.

Eredu mota honen beste ezaugarri bat parametroek zentzu fisiko bat edukitzea da. Ereduaren parametroak, masak, inertzia-momentuak, marruskadura-koefizienteak, erresistentziak, induktantziak, kapazitateak, likido baten dentsitatea, eta abar... izan daitezke. Ezaugarri honek oso interesgarri egiten du ezagutza-eredua prozesuaren azterketarako.

Ezagutza-ereduek bereziki simulazio numerikoak egiteko erabiltzen dira. Liburu honetan lortuko diren eredu guztiak ezagutza-ereduak izanen dira.

#### 2.1.5. Adierazpen-eredua

Adierazpen-ereduak esperimentalki lortzen dira. 1.7 irudian aipatzen den bezala, sarreraren bidez prozesua kitzikatuz, eta irteera neurtuz, ereduaren parametroen balioa lortzen da hala. Parametroen balioak identifikazio-prozesu baten bidez erdiesten direla erraten da, edo/eta prozesua/sistema identifikatzen dela. Zentzu horretan, identifikazio-prozesua kuantitatiboa da bereziki.

Sistema *kutxa beltz* bat balitz bezala kontsideratzen da, barnean zer den jakin gabe. Soilik sarrerak irteeran duen eragina aztertuz lortzen da ereduak.

Hala ere, identifikazioa gauzatu aitzin, etapa kualitatibo bat bada non sistemari buruzko aurre-ezagutzak erabiltzen diren. Horiei esker ereduaren egitura definitzen da. Dena den, identifikazio-prozesuaren baitan, egitura hori egokia ez dela ohar daiteke eta, beraz, aldatu.

Ezagutza-ereduetan ez bezala, adierazpen-ereduetan parametroek ez dute zentzu fisikorik. Sistemaren joera azaltzea ahalbidetzen dute, baina ez dute prozesuaren parametroekiko lotura zuzenik.

Adierazpen-ereduak *joera-ereduak* ere deitzen dira, sarrera batek irteeran duen eragina azaltzen dutelako. *Kontrol-ereduak* izan ohi dira, hau da, gehienetan soilik kontrolagailuak diseinatzeko erabiltzen dira.

Liburu honetan, ez da identifikazio-prozesurik aztertzen. Zailtasun-maila desberdinetako identifikazioak egin daitezke, baina identifikazio-teknikak ongi esplikatzeke, beste liburu bat idatzi beharko litzateke.

### **2.1.6. Ezagutza-ereduak lortzeko metodologia**

2.1 irudiak ezagutza-ereduak lortzeko segitu behar den metodologia azaltzen du.

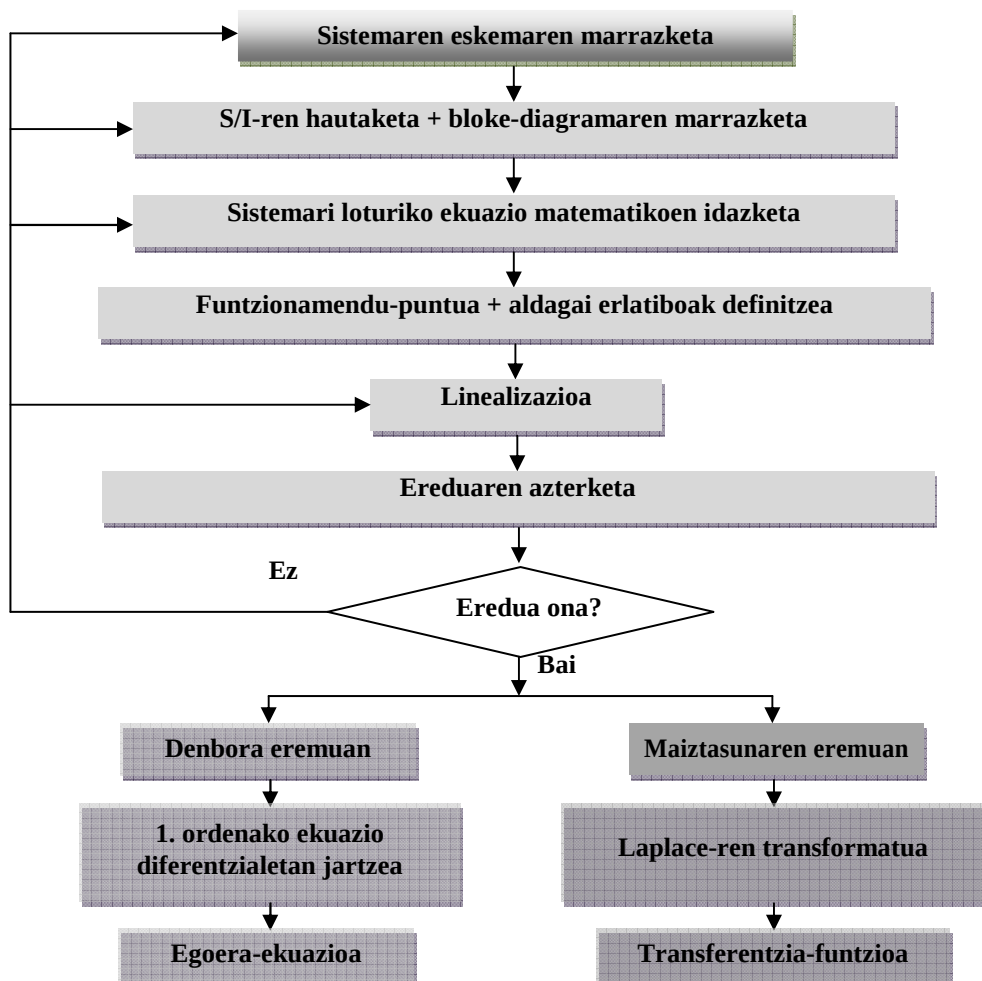
Hasiera batean, aztertu nahi den prozesuaren eskema bat marraztea gomendatzen da. Hortik, sistemaren sarrera eta irteera hautatzen da (SISO sistemak aztertzen dira soilik hemen). Orduan, prozesuaren jakintza-arloko lege fisikoak erabiliz, sarrera eta irteera lotzen dituzten ekuazio matematikoak erdiesten dira.

Ekuazio matematikoak linealak ez badira, sistema zein sarrea/irteera aldagaien balio-eremutan aztertu nahi den hausnartuko da, eta eremu horretako batez besteko funtzionamendu-puntu batean ekuazioak linealizatzen dira. Hori, 2.2.5 atalean azaltzen da.

Behin ekuazio matematiko linealak lorturik, ea onak diren aztertzen da, datu errealeen bidez ahal bada. Hortik aitzina, bi aukera dira. Eredua maiztasun- edo denbora-ereduan adieraz daiteke. Denboraren eremuan adierazteko, ekuazio diferentzial guziak lehen ordenako ekuazio diferentzial gisa idatzi behar dira, modu matritzialean agertzen den egoera-ekuazioa lortzeko. Eredua maiztasunaren eremuan adierazteko, berriz, Laplace-ren transformatua erabili behar da, Transferentzia-funtzioak erdiesteko. Hori 2.3 eta 2.4 ataletan azaltzen da.

Liburu honetan, soilik maiztasunaren eremuko ereduak erabiltzen dira, alegia, transferentzia-funtzioak.





2.1 irudia. Ezagutza-ereduak lortzeko metodologia.

## 2.2. Sistemen ekuazio diferentzialak lortzea

Lehenago aipatu gisan, sistemen ereduztapena bereziki jakintza-arloari loturiko legeen bidez ekuazio diferentzialak lortzean datza. Oso zaila da jakintza-arlo bakoitzeko legeak ezagutzea. Horregatik, Automatikako adituak arlo horietako adituekin lan egin behar du, edo/eta arlo horietako liburuez baliatu behar da.

Atal honetan, jakintza-arlo ohikoenen adibide batzuk ematen dira, erakusteko nola lortu arlo horietako problemetan ekuazio diferentzialak.



**Newtonen 2. legea:**

$$\sum \vec{f} = m\vec{a} = m\ddot{x} \quad (2-1)$$

Lege horren arabera, masaren azelerazioa berari aplikatzen zaizkion indarren batuketaren arabera da. Hauek dira masari eragiten dioten indarrak problema honetan:

- Malgukiaren aldetik:

$$f_1(t) = K_z(u(t) - x(t)) \quad (2-2)$$

Hook-en legea da hau, non  $K_z$  zurruntasun-koefizientea den.

- Motelgailuaren aldetik:

$$f_2 = Dv = D\dot{x} \quad (2-3)$$

non  $D$  moteltze-koefizientea den.

**Oharra:** problema sinplifikatzeko, ez dira hemen masak zoruaren kontra izan ditzakeen marruskadurak kontuan hartzen, ezta masaren pisua ere.

Beraz, indarren adierazpenak Newton-en legean sartuz, ekuazio diferentzial hau lortzen da:

$$K_z(u - x) - D\dot{x} = m\ddot{x} \quad (2-4)$$

Gaiak ordenatuz, honela ere idatz daiteke:

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + K_z x = K_z u \quad (2-5)$$

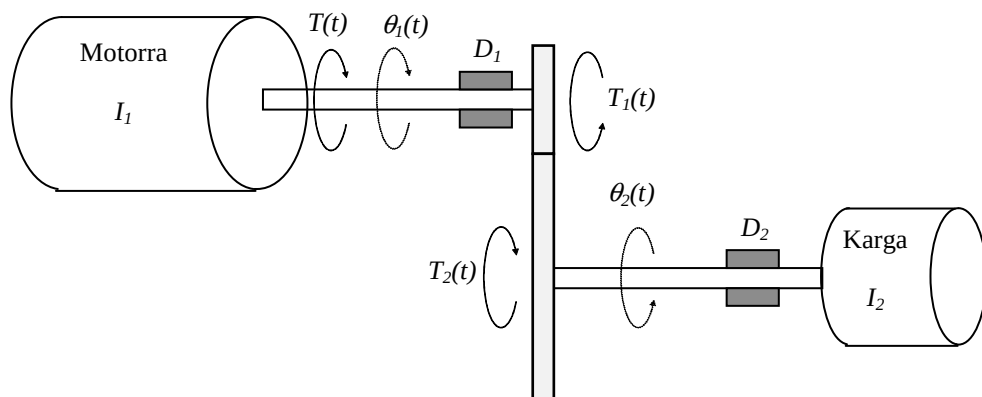
edo honela:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} \dot{x} + \frac{K_z}{m} x = \frac{K_z}{m} u \quad (2-6)$$

**2.2.2. Sistema mekanikoak (2): engranajeak**

Automatikako problema asko mekanika errotazionalari lotuak dira. Izan ere, motor gehien-gehienek biratzen dute, eta eguneroko bizimoduan erabiltzen ditugun hainbat objektutan eta industriako hainbat aplikaziotan ere oso erabiliak dira.

2.3 irudian, jakintza-arlo horretako sistema bat agertzen da, motor bat, karga bat, bi ardatz eta engranaje batzuek osaturik. Ardatzen malgutasuna, aitzineko mekanika linealeko adibidean antzera, zurruntasun- eta moteltze-koefizienteekin adierazten da.



2.3 irudia. Engranajeen osaturiko sistema mekaniko bat.

Hauk dira hemen aztertzen den prozesuaren parametroak:

- Engranajeetako gurpilen erradioak:  $R_1$ ,  $R_2$ .
- Gurpilen hertz kopuruak:  $N_1$ ,  $N_2$ .
- Transmittituriko indar pareak:  $T_1$ ,  $T_2$ .
- Inertzi momentuak:  $I_1$  (motorra),  $I_2$  (karga).
- Moteltze-koefizienteak:  $D_1$ ,  $D_2$ .
- Zurruntasun-koefizienteak:  $K_{z1}$ ,  $K_{z2}$ .

Argiki ulertu behar da parametro eta aldagaien arteko desberdintasuna. Goiko zerrenda horretan sistemaren parametroak ematen dira. Haren aldagaiak hauek izan daitezke: biraketa edo errotazio-angeluak, errotazio-abiadurak, indar-pareak, eta abar. Aldagaien balioa denboraren arabera aldatzen da; aldiz, parametroena ez, sistema ez-aldakorra bada behintzat.

Lehengoz adibidean bezala, ekuazio diferentziala lortu aitzin, sistemaren sarrera eta irteera aldagaiak zein izanen diren adierazi behar da. Problema honetan, hauek dira hautatzen ditugun sarrera eta irteera:

- **Sarrera:**  $T(t)$  motorrak sorturiko indar-parea.
- **Irteera:**  $q_1(t)$  motorraren posizio angeluarra.

Adibide honetan motorra da eragingailua, argiki. Eragingailu hori prozesuaren barne kontsideratuko balitz, haren ereduaren sarrera motorraren indar-parearen erreferentzia edo kontsigna litzateke, eta, irteera, motorrak sorturiko indar-parea. Sentsorea posizio angeluar neurtzaile bat da, erraterako *enkoder* edo kodetzaile absolutu bat.

Normalki, hautatzen den irteera kontrolatu nahi duguna izan ohi da, eta sarrera irteera aldagaiaren eragin dezakeena. Problema honetan erraterako, irteera  $q_2(t)$  kargaren posizio angeluarra izan zitekeen.

Engranajeen arteko harremana honela adierazten da:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad (2-7)$$

Bi engranajeak bata bestearen kontra irristatzen ez direla suposatzen bada, orduan kontaktu-puntu horretako engranajeen abiadura lineala berdina da, eta hori honela adieraz daiteke:

$$R_1\theta_1 = R_2\theta_2 \quad (2-8)$$

Ondorioz, erlazio hau lortzen da:

$$n = \frac{\theta_2}{\theta_1} \Rightarrow n = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} \quad (2-9)$$

Lehen bezala, sistemaren ekuazio matematikoa erdiesteko, **Newton-en legea** aplika daiteke, baina orain sistema mekaniko errotazional bati dagokio. Masen ordez, inertzia-momentuak ditugu; indarren ordez, indar-pareak, eta, posizio, abiadura eta azelerazioen ordez, posizio-abiadura eta azelerazio angeluarrak. Newton-en legea honela idazten da:

$$\sum T = I\ddot{\theta} \quad (2-10)$$

Motorraren inertzia-momentuari aplikatuz, ekuazio diferentzial hau lortzen da:

$$I_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = T - T_1 - D_1 \frac{d\theta_1}{dt} - K_{z1}\theta_1 \quad (2-11)$$

$T_1$  kargaren eraginez lehen engranajeak motorraren ardatzean egiten duen indar-parea da. Erlazioan agertzen diren azken bi indar-pareak ardatzaren moteltze eta zurruntasunari loturik dira. Motorraren indar-pareak ardatza zentzu batean itzularazten du, eta beste hiru indar-pareek mugimendu hori frenatzen dute, ardatza beste aldera itzul dadila saiaturik. Horregatik zeinu negatiboarekin agertzen dira.

Era berean, legea kargaren inertzia-momentuari aplikatuz, erlazio hau lortzen da:

$$I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = T_2 - D_2 \frac{d\theta_2}{dt} - K_{z2}\theta_2 \quad (2-12)$$

Bestalde, engranajeetan marruskadurarik ez dela suposatuz, potentzia mekanikoa kontserbatzen dela ondorioztatzen da:

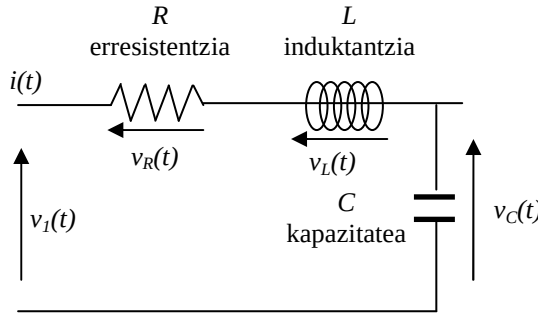
$$T_1 \dot{\theta}_1 = T_2 \dot{\theta}_2 \quad (2-13)$$

Eta (2-9), (2-11), (2-12) eta (2-13) adierazpenak konbinatuz, bigarren graduko ekuazio diferentzial hau erdiesten da:

$$(I_1 + n^2 I_2) \ddot{\theta}_1 + (D_1 + n^2 D_2) \dot{\theta}_1 + (K_{z1} + n^2 K_{z2}) \theta_1 = T \quad (2-14)$$

### 2.2.3. Sistema elektrikoak

2.4 irudiak RLC zirkuitu elektriko bat erakusten du.



2.4 irudia. RLC zirkuitu elektriko bat.

Demagun zirkuituaren sarrera eta irteerak hauek direla:

- **Sarrera:**  $v_1(t)$  tentsioa.
- **Irteera:**  $v_C(t)$  tentsioa.

Problema honetan, eragingailua tentsio-iturri bat litzateke eta sentsorea tentsio-neurgailu bat, erraterako voltmetro bat.

**Mail-en legearen arabera:**

$$v_1 = v_R + v_L + v_C \quad (2-15)$$

Osagai elektriko bakoitzeko, korrontearen eta tentsioaren arteko harremanak hauek dira:

- $R$  erresistentziaren tentsioa korrontearen arabera:

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (2-16)$$

- $L$  induktantziaren tentsioa korrontearen arabera:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2-17)$$

- C kondentsadorearen tentsioa korrontearen arabera:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2-18)$$

(2-15)-tik (2-18) arteko adierazpenak konbinatuz, 2. ordenako ekuazio diferentzial hau lortzen da:

$$\ddot{v}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{v}_C(t) + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} v_1(t) \quad (2-19)$$

Demagun orain zirkuitu elektriko berarentzat, sarrera eta irteera desberdinak hautatzen direla:

- **Sarrera:**  $v_1(t)$  tentsioa.
- **Irteera:**  $i(t)$  korrontea.

Kasu honetan, sentsorea korronte-neurgailu bat litzateke, adibidez amperemetro bat.

Bestalde, aitzineko adibidearekin konparatuz, (2-15)-tik (2-18) arteko adierazpenak modu desberdinean konbinatu behar dira, bukaerako ekuazio diferentzian soilik  $v_1(t)$  eta  $i(t)$  aldagaiak gera daitezen:

$$v_1(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2-20)$$

Eta bi aldeak deribatuz, honaa lortzen den 2. mailako ekuazio diferentziala:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) \quad (2-21)$$

Edo modu ordenatuago honetan:

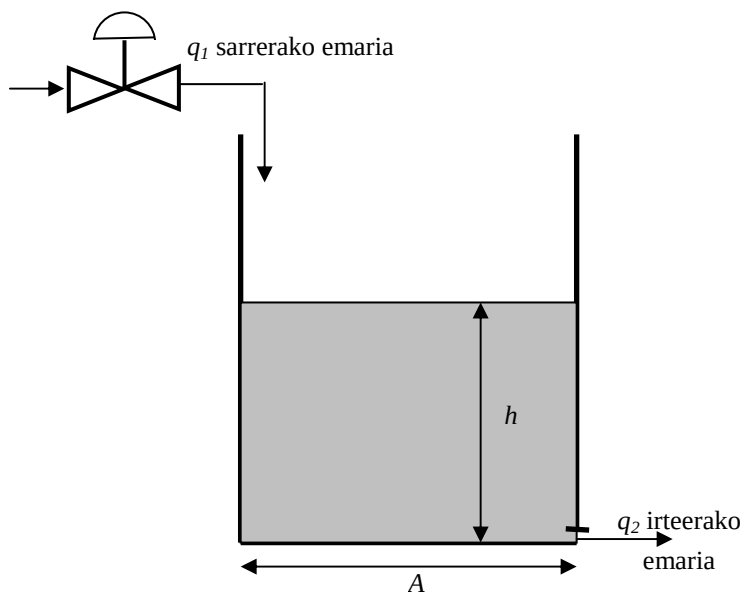
$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_1(t)}{dt} \quad (2-22)$$

Adibide honek erakusten du prozesu berean bi ekuazio diferentzial desberdin lor daitezkeela. Erdiosten den ekuazio diferentziala sistema edo prozesuarentzat hautatu diren sarrera eta irteeraren menpe dago.

Bestalde, atal honetan ikusi den gisan, gogoratu behar da deribatua edo diferentziazioa bi modutan adieraz daitekeela: aldagaien gainean puntu bat jarriz, edo, azken adierazpenetan agertzen den bezala, deribatu osoa idatziz.

### 2.2.4. Sistema hidraulikoak

2.5 irudian agertzen den ontziko likidoaren ur-maila sarrerako  $q_1$  emariaren arabera nola aldatzen den jakin nahi dugu.



2.5 irudia. Sistema hidrauliko baten eskema.

Horretarako, sistema hidrauliko horrentzat, sarrera eta irteera hauek hautatzen ditugu:

- **Sarrera:**  $q_1(t)$  sarrerako emaria.
- **Irteera:**  $h(t)$  ontziko likido-maila.

Problema honetako eragingailua balbula litzateke, eta sentsorea ur-mailaren neurgailu bat.

Funtzionamendu-puntu baten inguruan, Bernouilli-ren legea linealizatu daiteke, eta, beraz, irteerako emaria likidoaren mailari lotua geratzen da linealki:

$$q_2(t) = \frac{1}{R} h(t) \quad (2-23)$$

non  $R$  erresistentzia hidraulikoa den.  $A$  ontziaren azalera izanik, eta  $\rho$  likidoaren dentsitatea, **balantze masikoaren** arabera adierazpen hau idatz dezakegu:

$$\frac{d(\rho V(t))}{dt} = \rho(q_1(t) - q_2(t)) \quad (2-24)$$



Hortik,  $\rho$  eliminatuz:

$$\frac{d(Ah(t))}{dt} = A \frac{d(h(t))}{dt} = q_1(t) - \frac{1}{R} h(t) \quad (2-25)$$

Eta beraz, lehen mailako ekuazio diferentziala ordenatuz:

$$\dot{h}(t) + \frac{1}{AR} h = \frac{1}{A} q_1(t) \quad (2-26)$$

### 2.2.5. Funtzionamendu-puntu baten inguruko linealizazioa

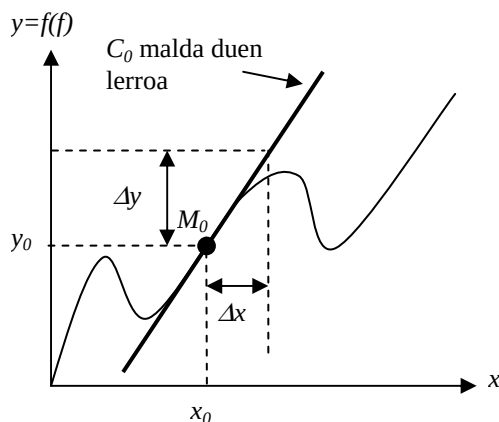
Lehenago aipatu dugun gisan, sistemen linealtasunari buruz mintzatu garelarik, oro har, sistema errealeen joera ez da lineala.

Hala ere, Kontrolean, gehienetan, funtzionamendu-puntu baten inguruan lan egiten da eta sistema ez-linealak funtzionamendu-puntu horren inguruan linealiza daitezke. Hain zuzen, sarrera eta irteerak gutxi aldatzen dira puntu horren inguruan, eta aldaketa txiki horientzat, joera lineala izan ohi da.

Demagun  $x$  sarrera eta  $y$  irteera dituen sistema bat dugula, eta sarreraren eta irteeraren arteko  $f$  funtzioa ez dela lineala:

$$y = f(x) \quad (2-27)$$

2.6 irudian agertzen den bezala,  $M_0(x_0, y_0)$  deitzen dugu funtzionamendu-puntua (puntu nominala edo oreka-puntua ere izan daiteke).



2.6 irudia. Funtzionamendu-puntu baten inguruko linealizazioa.

$f$  funtzioa puntu horren inguruan linealiza daiteke era honetara:

$$y = f(x) \approx y_0 + \Delta y = f(x_0) + C_0 \Delta x \quad (2-28)$$

zeren:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0, y_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2-29)$$

eta beraz:

$$\Delta x \approx \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0, y_0} = C_0 \Delta x \quad (2-30)$$

Funtzio edo sistema bat funtzionamendu-puntu baten inguruan linealizatzeko metodo hau orokortu daiteke, sarrera bat baino gehiago duten sistemak ere kontuan hartuz:

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n) \approx f(x_{10}, x_{20} \dots x_{n0}) + \sum_{i=1}^n C_i \Delta x_i \quad (2-31)$$

non:

$$C_i = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{M_0} \quad (2-32)$$

Sistema erreal ez-lineal bat kontrolatu behar delarik, funtzionamendu-puntua zein den aztertzen da, puntu horrekiko aldagaien aldaketak sartzen dira ekuazioan eta hemen goian erakutsi gisan, sistema linealizatzen da. Behin sistema linealizaturik, liburu honetan erakusten diren sistema linealak aztertu eta kontrolatzeko teknika eta metodo guziak erabil daitezke.

### 2.2.6. Aldagai fisikoen arteko analogia

Jakintza-arlo desberdinen aldagaien artean analogia bat bada. Aldagaien arteko berdintasun horiek ezagutzeak arlo desberdinetako problemak ebaztea eta, beraz, dagozkien ekuazio diferentzialak erdiestea erraz dezake.

2.1 taulak aldagai batzuen arteko analogia erakusten du.

2.1 taula. Jakintza-arlo desberdinen aldagaien arteko analogia.

| Fisika-arloa            | Indarra            | Fluxua          |                     |                   |
|-------------------------|--------------------|-----------------|---------------------|-------------------|
|                         | <i>Izena</i>       | <i>Unitatea</i> | <i>Izena</i>        | <i>Unitatea</i>   |
| Mekanika translazionala | Indarra            | N               | Abiadura            | m/s               |
| Mekanika errotazionala  | Indar-parea        | Nm/rad          | Abiadura angeluarra | rad/s             |
| Hidraulika              | Presioa            | P               | Emari bolumetrikoa  | m <sup>3</sup> /s |
| Elektrizitatea          | Tentsioa           | V               | Intentsitatea       | A                 |
| Termika                 | Tenperatura        | K               | Fluxu termikoa      | J/s               |
| Kimika                  | Potentzial kimikoa | J/mol           | Fluxu molarra       | mol/s             |
| Termodinamika           | Entropia           | J               | Entropia fluxua     | J/s               |

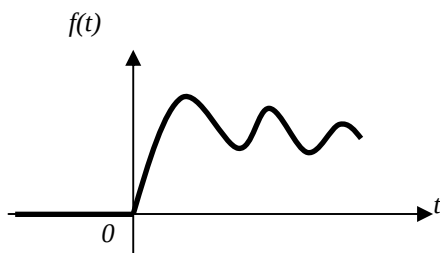
## 2.3. Laplace-ren transformatua

Laplace-ren transformatua matematiketan aztertzen den transformatu bat da. Seinale bat denboraren eremutik maiztasun-denborara pasaraztea ahalbidetzen du. Haren aplikazioa ez da beti oso erraza, seinalea adierazten duen funtzioaren konplexutasunaren arabera. Dena den, kontroleko ingeniariak ez du horretaz kezkatu behar. Laplace-ren transformatua zer den ulertu behar du, baita zein propietate eta teorema dituen ere. Baina problemak ebazteko, behean azaltzen den moduan, soilik propietate eta teorema batzuk erabili ohi dira.

### 2.3.1. Definizioa

Demagun  $f(t)$  funtzioa jarraitua eta nulua dela  $t < 0$  delarik (funtzio kausala dela erraten da), eta gainera bornatua dela, hau da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (2-33)$$



2.7 irudia.  $f(t)$  funtzio jarraitu, kausal eta bornatu baten kurba.

Orduan, funtzioak Laplace-ren transformatua onartzen du:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{non } s = \sigma + j\omega \in C \quad (2-34)$$

Laplace-ren alderantzizko transformatua ere kalkula daiteke. Adierazpen hau du:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2-35)$$

non  $c$  konstante erreala  $F(s)$ -ren puntu singularren alde erreala baino handiagoa den.

Liburu honetan, automatikako problema kasik guzietan bezala, ez dugu transformatu hau erabiliko. Laplace-ren alderantzizko adierazpenak 2.2 taularen bidez lortuko ditugu, beharrezkoak izanen ditugularik.

Denbora- eta maiztasun-esparruko seinaleak hobeki bereizteko, maiztasunaren eremukoak letra larriz idazten dira, eta denbora-esparrukoak letra xehez.

### 2.3.2. Funtzio erabiliaren transformatua

2.2 taulan Kontrolean gehien erabiltzen diren funtzioen Laplace-ren transformatuak erakusten dira. Ariketa askotan erabili behar da 2.2 taula hau. Horregatik, errazago aurkitzeko, liburuaren bukaeran azken eranskin gisa sartu da.

2.2 taula. Funtzio erabilieneen Laplace-ren transformatua.

|    | $f(t), t > 0$ denean                                                                                                                                                             | $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$                             |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1  | $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \text{ bada} \\ 0 & t \neq 0 \text{ bada} \end{cases}$                                                                                 | 1                                                      |
| 2  | 1                                                                                                                                                                                | $\frac{1}{s}$                                          |
| 3  | $t$                                                                                                                                                                              | $\frac{1}{s^2}$                                        |
| 4  | $t^n$                                                                                                                                                                            | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                                   |
| 5  | $e^{-at}$                                                                                                                                                                        | $\frac{1}{s+a}$                                        |
| 6  | $te^{-at}$                                                                                                                                                                       | $\frac{1}{(s+a)^2}$                                    |
| 7  | $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$                                                                                                                                                       | $\frac{1}{s(s+a)}$                                     |
| 8  | $\cos(\omega t)$                                                                                                                                                                 | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$                             |
| 9  | $\sin(\omega t)$                                                                                                                                                                 | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$                        |
| 10 | $e^{-at} \cos(\omega t)$                                                                                                                                                         | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$                       |
| 11 | $e^{-at} \sin(\omega t)$                                                                                                                                                         | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$                    |
| 12 | $0 \leq \xi < 1$ bada,<br>$\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi\right)$<br>non $\Phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ | $\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$          |
| 13 | $\xi < 1$ bada, $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right)$                                                                 | $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ |

Adibide gisa, kalkula dezagun lehen bi lerroetako seinaleen Laplace-ren transformatua.

Demagun  $f(t)$  pultsu-seinalea dela. Orduan, hau du bere adierazpena:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \text{ bada} \\ 0 & t \neq 0 \text{ bada} \end{cases} \quad (2-36)$$

Laplace-ren transformatua aplikatuz:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-37)$$

Orain demagun  $f(t)$  maila unitario bat dela. Hau du bere adierazpena  $t \geq 0$  delarik:

$$f(t) = 1 \quad (2-38)$$

Laplace-ren transformatua aplikatuz:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \left[ e^{-st} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} [0 - 1] = \frac{1}{s} \quad (2-39)$$

### 2.3.3. Transformatuaren propietateak

Atal honetan Laplace-ren transformatuaren propietateak ematen dira. Ez dira denak gogoz jakin behar, baina batzuk bai, askotan erabiltzen direnak.

Propietate hauetan guztietan  $F(s)$   $f(t)$ -ren Laplace-ren transformatua da.

#### 2.3.3.1. Linealtasuna

Laplace-ren transformatua lineala da:

$$f(t) = \mathcal{L}(Af_1(t) + Bf_2(t)) = AF_1(s) + BF_2(s) \quad \forall A, B \in \mathbb{R} \quad (2-40)$$

Propietate hau asko erabiltzen da. Dena den, erraza da aplikatzea, oso intuitiboa baita.

#### 2.3.3.2. Deribazioa

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0) \quad (2-41)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt} \quad (2-42)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-n} \frac{d^{n-k} f(0)}{dt^{n-k}} \quad (2-43)$$

$f(t)$ -ren hasierako baldintzak ( $f(t)$ -ek eta haren deribatuek  $t=0$  denean duten balioa) nuluak badira:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) \quad (2-44)$$

Propietate hau askotan erabiltzen da, bereziki hasierako baldintza nuluekin. Honen bidez lortzen da heldu den azpiatalean aurkezten den sistema baten transferentzia-funtzioa.

### 2.3.3.3. Integrazioa

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s} \quad (2-45)$$

Propietate hau ez da kasik inoiz erabiltzen, eta, beraz, ez du balio gogoz jakiteak.

### 2.3.3.4. Desplazamendua denbora-espazioan

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-as} F(s) \quad (2-46)$$

Propietate hau atzerapen garbia duten sistemak aztertzeo erabiltzen da. Buruz ezagutu behar da.

### 2.3.3.5. Desplazamendua Laplace-ren espazioan

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a) \quad (2-47)$$

Propietate hau ez da kasik inoiz erabiltzen, eta, beraz, ez du balio buruz jakiteak.

## 2.3.4. Transformatuaren teorema

Aitzineko atalean bezala, teorema hauetan guztietan  $F(s)$   $f(t)$ -ren Laplace-ren transformatua da.

### 2.3.4.1. Bukaerako balioaren teorema

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2-48)$$

Teorema hau sistemen egoera iraunkorra aztertzeo erabiltzen da. Askotan erabiltzen da eta, beraz, gogoz jakin behar da. Kontuan izan behar da soilik sistema egonkorra bada erabil daitekeela.

### 2.3.4.2. Hasierako balioaren teorema

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2-49)$$

Teorema hau ez da aitzinekoa bezainbat erabiltzen eta ez da, beraz, gogoz ezagutu beharrik.

## 2.4. Transferentzia-funtzioa

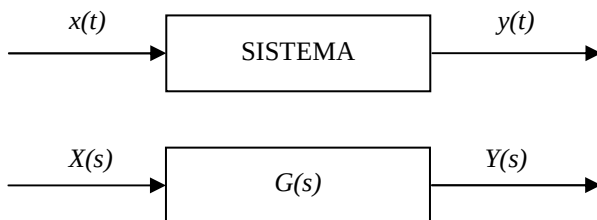
*Transferentzia-funtzioa* kontrolerako oinarritzko elementua da. Lehenago aipatu gisan, kapitulu hau «mundu erreal»aren eta «automatikaren mundu»aren arteko muga kokatzen da. Ekuazio diferentzialen eta Laplace-ren transformatuaren bidez pasatzen da mundu batetik bestera.

Hemen «mundu erreal» deitu dugun hori jakintza-arlo desberdinetako lege fisiokoekin azaltzen dugu, ekuazio diferentzialak lortuz. Ekuazio horiek denboraren eremukoak dira. Ekuazio diferentzialak lortzean, problema errealez arduratzen gara, baina ekuazio horiek berak ez dira oso egokiak sistemen ezaugarriak errazki aztertzeke.

Laplace-ren transformatuaren bidez, denboraren eremutik maiztasunaren eremura pasatzen gara, ekuazio diferentzialetatik transferentzia-funtzioetara. Maiztasunaren eremu hori ez da naturala, eta hasieran, ikasleari kostatzen ahal zaio eremu horri loturiko hainbat kontzeptu ulertzea. Baina behin ulerturik, oso erraz azter daitezke sistemen hainbat ezaugarri. Horrek du justifikatzen eremu batetik bestera pasatzea, eta transferentzia-funtzioekin lan egitea.

### 2.4.1. Transferentzia-funtzioaren definizioa

Demagun, 2.8 irudian erakusten den gisan,  $x(t)$  sarrera duen eta  $y(t)$  irteera duen sistema bat dugula.



2.8 irudia. Sistema baten transferentzia-funtzioa.



Sistema horren  $G(s)$  transferentzia-funtzioa, bere irteeraren Laplace-ren transformatuaren eta sarreraren Laplace-ren transformatuaren arteko zatiketa da, hasierako baldintzak edo balioak nuluak direlarik:

$$G(s) = \frac{L(y(t))}{L(x(t))} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Big|_{HB=0} \quad (2-50)$$

$HB$  = Hasierako Baldintzak.

Sistema horri loturiko ekuazio diferentziala hau bada:

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (2-51)$$

Orduan, ekuazioaren bi aldeei Laplace-ren transformatuaren deribazio-propietatea aplikatuz (2-42 ekuazioa), hasierako baldintzak edo balioak zero hartuz, transferentzia-funtzio hau lortzen da:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (2-52)$$

Argiki ikusten denez, transferentzia-funtzioa Laplace-ren  $s$  aldagaiaren arabera bi polinomioren arteko zatiketa da.

## 2.4.2. Oharrak

Transferentzia-funtzioak sistemaren dinamika zein den adierazten du. Soilik sistemaren ezaugarri fisikoen menpe dago dinamika horri. Ez du sarrerarekiko edo hasierako baldintzekiko dependentziarik.

Aitzineko atalean, ekuazio diferentzialak eta, bide batez, transferentzia-funtzioak zentzu fisiko bat du soilik  $n \geq m$  baldin bada, non  $n$  transferentzia-funtzioaren izendatzailearen maila den eta  $m$  zenbatzailearena. Baldintza hori betetzeak sistema kausala dela adierazten du.

Lehenago aipatu den gisan, irteera denboraren esparruan kalkula daiteke transferentzia-funtzioa eta sistemaren sarrera ezagutuz gero, ekuazio diferentzialak ebazteko tresna matematiko arruntak erabili gabe. Transferentzia-funtzioaren definizioaren arabera, irteera honela adierazten da:

$$Y(s) = G(s)X(s) \Rightarrow y(t) = L^{-1}(Y(s)) \quad (2-53)$$

Ekuazio horretan agertzen den bezala, irteeraren denbora-esparruko adierazpena aurkitzeko, Laplace-ren alderantzizko transformatua erabili beharko litzateke. Transformatu hori konplexua da, baina kalkulatzeko aukera sinpleago bat bada: transformatuen taularen bidez lor daiteke  $y(t)$ .

### 2.4.3. Adibideak

Adibide gisa, kalkula dezagun 2.2 ataleko problema pare bati dagokien transferentzia-funtzioa.

2.2.1. azpiatalean, problema mekaniko bati loturiko ekuazio diferentzial hau lortu genuen:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} \dot{x} + \frac{K_z}{m} x = \frac{K_z}{m} u \quad (2-54)$$

Ekuazio horren bi aldeei Laplace-ren transformatua aplikatuz:

$$\mathcal{L}\left[\ddot{x} + \frac{D}{m} \dot{x} + \frac{K_z}{m} x\right] = \mathcal{L}\left[\frac{K_z}{m} u\right] \quad (2-55)$$

Transformatuaren linealtasunari dagokion propietatea erabiliz,  $K_z$ ,  $m$  eta  $D$  parametroak konstanteak direnez:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] + \frac{D}{m} \mathcal{L}[\dot{x}] + \frac{K_z}{m} \mathcal{L}[x] = \frac{K_z}{m} \mathcal{L}[u] \quad (2-56)$$

$x(t)$ -ren transformatua  $X(s)$  deitzen badugu, deribazioaren propietateak dio:

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0) \quad (2-57)$$

Baina transferentzia-funtzioa kalkulatzeko hasierako balioak nuluak hartzen direnez:

$$\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) \quad (2-58)$$

eta era berean, bigarren deribazioari dagokionez:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2 X(s) \quad (2-59)$$

Adierazpen hauek (2-56) ekuazioan ordezkatzuz:

$$s^2 X(s) + \frac{D}{m} sX(s) + \frac{K_z}{m} X(s) = \frac{K_z}{m} U(s) \quad (2-60)$$

Eta beraz, hau da problema mekaniko horren transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_z}{m}}{s^2 + \frac{D}{m}s + \frac{K_z}{m}} \quad (2-61)$$

Lor dezagun orain 2.2.2 atalean aztertutako problemaren transferentzia-funtzioa, non sarrera aldagaia  $v_1(t)$  tentsioa zen eta irteera  $i(t)$  korronea. Hau da lortu zen ekuazio diferentziala:

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{C}i + R\dot{i} + L\ddot{i}$$

Aitzineko adibidean bezala, ekuazioaren bi aldeei Laplace-ren transformatua aplikatuz, linealtasun- eta deribazio-propietateak erabiliz eta hasierako balioak nuluak hartuz:

$$sV_1(s) = \frac{1}{C}I(s) + sRI(s) + Ls^2I(s) = (Ls^2 + Rs + \frac{1}{C})I(s) \quad (2-62)$$

eta, beraz, hau da sistema horren transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{I(s)}{V_1(s)} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2-63)$$

#### 2.4.4. Transferentzia-funtzioen ezaugarri nagusiak

Kontrol-problema ebazteko transferentzia-funtzioa baliagarria izan dadin, haren ezaugarriak ongi menperatu behar dira.

Izendatzaile eta zenbatzaileko polinomioen erroak kalkulaturik, transferentzia-funtzioa era faktorizatu honetan idatz daitezke:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} \quad (2-64)$$

$G(s)$ -ren *poloak* deitzen dira izendatzailearen erroak  $(-s_1, -s_2, \dots, -s_n)$ . transferentzia-funtzioaren poloak oso garrantzitsuak eta erabilgarriak dira sistemen dinamika eta egonkortasuna aztertzeko, hurrengo kapituluan ikusiko den bezala. Poloak, zenbaki erreal edo konplexuak izan daitezke.

Sistemaren *maila* edo *ordena*, izendatzaileko polinomioaren maila da,  $n$  hemen. Transferentzia-funtzioak  $n$  polo ditu hemen.

Izendatzaileko polinomioa, *polinomio karakteristikoa* deitzen da. Zerora berdintzen bada, *ekuazio karakteristikoa* dugu. Beraz, ekuazio karakteristikoaren erroak dira sistemaren poloak.

$G(s)$ -ren zeroak deitzen dira zenbatzaileko polinomioaren erroak  $(-z_1, -z_2, \dots, -z_n)$ . Ez dute poloen garrantzi bera. Sistemaren dinamika influentzia dezakete, baina ez poloek bezainbat oro har. Poloak bezala, zeroak ere errealak edo konplexuak izan daitezke.

### 2.4.5. Transferentzia-funtzioen konexioak

Oinarritzko transferentzia-funtzioak modu desberdinean elkar daitezke. Elkartze horiek sinplifikatzen jakin behar da.

Atal honetan, hiru elkartze mota nagusiak aipatzen dira, eta transferentzia-funtzioen definizioa erabiliz nola sinplifika daitezkeen azaltzen da.

Jende batzuek nahiago dituzte teknika grafiko batzuk erabili sinplifikazioak egiteko. Teknika horiek B eranskinean agertzen dira.

#### 2.4.5.1. Transferentzia-funtzioen elkartzea seriean

Demagun transferentzia-funtzio batzuk seriean konektatuak direla, 2.9 irudian agertzen den bezala. Transferentzia-funtzioaren definizioz, erran daiteke:

$$Y_i(s) = G_i(s)Y_{i-1}(s) = G_i(s)G_{i-1}(s)Y_{i-2}(s) = G_i(s)G_{i-1}(s)\dots \quad (2-65)$$

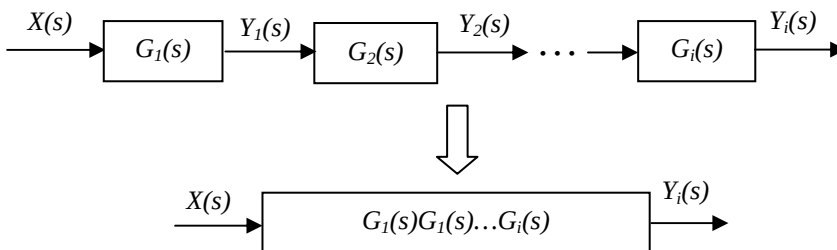
Beraz, aldi oroz oinarritzko transferentzia-funtzioen irteera, haien sarreraren arabera adieraziz, elkartzearen irteera sarreraren arabera defini daiteke:

$$Y_i(s) = G_i(s)G_{i-1}(s)\dots G_2(s)G_1(s)X(s) \quad (2-66)$$

Eta, beraz, serie elkartzearen transferentzia-funtzio baliokidea hau da, 2.9 irudian agertzen den bezala.

$$G(s) = G_i(s)G_{i-1}(s)\dots G_2(s)G_1(s) = G_1(s)G_2(s)\dots G_{i-1}(s)G_i(s) \quad (2-67)$$

Transferentzia-funtzioen biderketa zentzu batean edo bestean egin daiteke, hau da, trukakorra da.



2.9 irudia. Transferentzia-funtzioen elkartzea seriean.

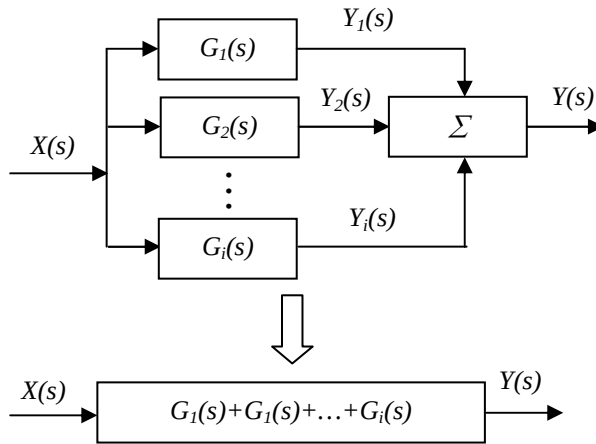
### 2.4.5.2. Transferentzia-funtzioen elkartzea paraleloan

Demagun orain transferentzia-funtzio batzuk paraleloan elkartzen ditugula, 2.10 irudian agertzen den moduan. Idatz daiteke:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_i(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s)X(s) + \dots + G_i(s)X(s) \quad (2-68)$$

Beraz 2.10 irudian agertzen den gisan, paralelo elkartzearen transferentzia-funtzio baliokidea hau da:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_i(s) \quad (2-69)$$



2.10 irudia. Transferentzia-funtzioen elkartzea paraleloan.

### 2.4.5.3. Begizta itxiko transferentzia-funtzio baliokidea

Demagun, 2.11 irudian agertzen den bezala,  $G(s)$  transferentzia-funtzioa duen prozesua begizta itxian kontrolatu nahi dugula. Transferentzia-funtzioaren definizioa eta aitzineko bi ataletan ikusitakoa aplikatuz:

$$Y_p(s) = G(s)C(s)E(s) \quad (2-70)$$

eta

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (2-71)$$

non

$$Y(s) = H(s)Y_p(s) \quad (2-72)$$

Beraz, (2-72) adierazpena (2-71)-ean sartuz, eta hau bera (2-70)-ean txertatuz:

$$Y_p(s) = G(s)C(s)(R(s) - H(s)Y_p(s)) = G(s)C(s)R(s) - G(s)C(s)H(s)Y_p(s) \quad (2-73)$$

$Y(s)$  eskuineko aldetik ezkerrera eramanez:

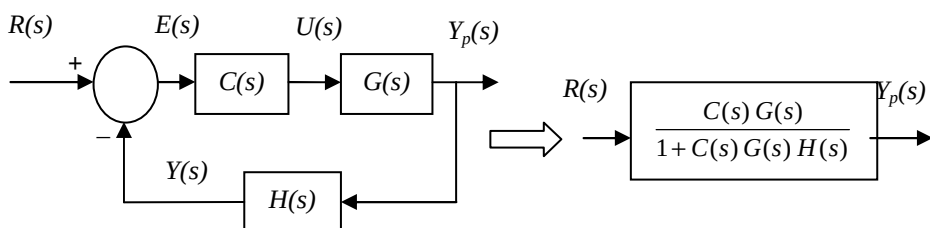
$$Y_p(s) + G(s)C(s)H(s)Y_p(s) = G(s)C(s)R(s) \quad (2-74)$$

Beraz:

$$Y_p(s)(1 + G(s)C(s)H(s)) = G(s)C(s)R(s) \quad (2-75)$$

Eta horrela, begizta itxiko  $G_{BI}(s)$  transferentzia-funtzio baliokidea lortzen da:

$$G_{BI}(s) = \frac{Y_p(s)}{R(s)} = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} \quad (2-76)$$



2.11 irudia. Begizta itxiko transferentzia-funtzio baliokidea.

Oso ohikoa da begizta itxiko transferentzia-funtzio bat kalkulatu behar izatea. Horregatik, ohitura pixka bat delarik, kalkulua buruz egiten jakitea gomendatzen da. 2.11 irudian bezala, erreferentzia positiboa eta berrelikadura negatiboa direlarik (+- motako konparagailua), orduan formula hau aplikatu daiteke:

$$G_{BI}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{KZ}(s)}{1 + G_{KO}(s)} \quad (2-77)$$

Non, lehenago aipatu bezala,  $G_{BI}(s)$  begizta itxiko transferentzia-funtzioa den,  $G_{KZ}(s)$  kate zuzeneko transferentzia-funtzioa, hau da,  $E(s)$  eta  $Y_p(s)$ -ren artekoa (goiko transferentzia-funtzioak seriean), eta  $G_{KO}(s)$  kate osoko edo begizta irekiko transferentzia-funtzioa den, hau da,  $E(s)$  eta  $Y(s)$ -ren artekoak seriean (goiko transferentzia-funtzioak eta berrelikadurakoak seriean).

## 2.5. Ariketak

### 2.5.1. Ekuazio diferentzialetik transferentzia-funtzioetara

Lortu 2.2.2 eta 2.2.4 ataletan aztertutako sistemen transferentzia-funtzioa, jadanik erdietsi diren ekuazio diferentzialetatik.

**Ebazpena:**

2.2.2 atalean aztertutako problemaren sarrera aldagaia  $T(t)$  indar-parea zen, eta, irteera,  $\theta_1(t)$  posizio angeluarra. Hau da lortu zen ekuazio diferentziala:

$$(I_1 + n^2 I_2) \ddot{\theta}_1 + (D_1 + n^2 D_2) \dot{\theta}_1 + (K_{z1} + n^2 K_{z2}) \theta_1 = T \quad (2-78)$$

Ekuazioaren bi aldeei Laplace-ren transformatua aplikatuz, linealtasun- eta deribazio-propietateak erabiliz eta hasierako balioak nulutzat hartuz:

$$(I_1 + n^2 I_2) s^2 \theta_1(s) + (D_1 + n^2 D_2) s \theta_1(s) + (K_{z1} + n^2 K_{z2}) \theta_1(s) = T(s) \quad (2-79)$$

eta, beraz, hau da sistema horren transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{1}{(I_1 + n^2 I_2) s^2 + (D_1 + n^2 D_2) s + (K_{z1} + n^2 K_{z2})} \quad (2-80)$$

2.2.4 atalean aztertutako problemaren sarrera aldagaia ontziaren  $q_1(t)$  sarrerako emaria zen, eta irteera  $h(t)$  ontziko likido-maila. Hau da erdietsi zen ekuazio diferentziala:

$$\dot{h}(t) + \frac{1}{AR} h = \frac{1}{A} q_1(t) \quad (2-81)$$

Ekuazioaren bi aldeei Laplace-ren transformatua aplikatuz, linealtasun- eta deribazio-propietateak erabiliz eta hasierako balioak nulutzat hartuz:

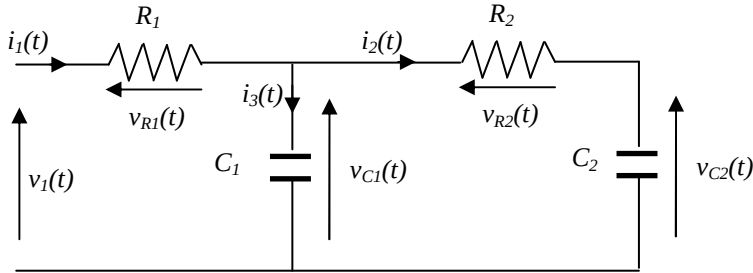
$$sH(s) + \frac{1}{AR} H(s) = \frac{1}{A} Q_1(s) \quad (2-82)$$

eta, beraz, hau da prozesu hidrauliko horren transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{1}{AR}} \quad (2-83)$$

**2.5.2. Zirkuitu elektriko baten eredu tapena**

Lor ezazu 2.12 irudian agertzen den zirkuitu elektrikoaren transferentzia-funtzioa,  $v_1(t)$  eta  $v_{C2}(t)$  tentsioak hurrenez hurren sistemaren sarrera eta irteera izanik.



2.12 irudia. Zirkuitu elektriko baten eskema.

**Ebazpena:**

Mailen legearen bidez, bi ekuazio diferentzial hauek lortzen dira:

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1} \int i_3(t) dt \quad (2-84)$$

eta:

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + v_{C2}(t) \quad (2-85)$$

Bestalde, nodoen legeak hau dio:

$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) \quad (2-86)$$

Gainera,  $i_2(t)$  eta  $v_{C2}(t)$  lotuak dira:

$$\frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt = v_{C2}(t) \quad (2-87)$$

Guri interesatzen zaiguna soilik  $v_1(t)$  eta  $v_{C2}(t)$  aldagaiak dituen ekuazioa da. Horretarako, aitzineko ekuazioak beste aldagaiak desagerrarazteko ideiarekin konbinatu behar dira. Denetara lau ekuazio ditugu eta hiruren bidez korranteak  $v_1(t)$  eta  $v_{C2}(t)$  tentsioen arabera adierazi behar dira. Denbora-esparruan hori egitea ez da erraza (saia zaitezke horretaz ohartzeko). Konbinazio horiek askoz errazago egiten dira Laplace-ren esparruan.

(2-84) ekuaziotik, hau idatz daiteke, ekuazioaren bi aldeak deribatuz:

$$i_3(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} - R_1 C_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad (2-88)$$

Ekuazio horri Laplace-ren transformatua aplikatzean, hasierako baldintzek 0 balioa dutela kontsidera daiteke, ariketa honetan sistemaren transferentzia-funtzioa erdietsi nahi badugu. Deribazioaren propietatea erabiliz:



$$I_3(s) = C_1 s V_1(s) - R_1 C_1 s I_1(s) \quad (2-89)$$

Era berean, (2-85) eta (2-86) ekuazioetatik:

$$V_1(s) = R_1 I_1(s) + R_2 I_2(s) + V_{C2}(s) \quad (2-90)$$

eta:

$$I_3(s) = I_1(s) - I_2(s) \quad (2-91)$$

(2-87) ekuazioa modu honetan ere adieraz daiteke, ekuazioaren bi aldeak deribatuz:

$$i_2(t) = C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt} \quad (2-92)$$

Eta, beraz, Laplace-ren transformatua aplikatuz:

$$I_2(s) = C_2 s V_{C2}(s) \quad (2-93)$$

Orain (2-89), (2-90), (2-91) eta (2-93) ekuazioak konbinatu behar dira soilik  $V_1(s)$  eta  $V_{C2}(s)$  dituen ekuazioa erdiesteko. (2-89) eta (2-93)-ko  $I_3(s)$  eta  $I_2(s)$ -ren adierazpenak (2-91) ekuazioan ordezkatuz:

$$C_1 s V_1(s) - R_1 C_1 s I_1(s) = I_1(s) - C_2 s V_{C2}(s) \quad (2-94)$$

Beraz:

$$(1 + R_1 C_1 s) I_1(s) = C_1 s V_1(s) + C_2 s V_{C2}(s) \quad (2-95)$$

eta hortik:

$$I_1(s) = \frac{C_1 s V_1(s) + C_2 s V_{C2}(s)}{1 + R_1 C_1 s} \quad (2-96)$$

Orain, adierazpen hori eta lehenago lorturiko  $I_2(s)$ -rena (2-90) ekuazioan sartuz:

$$V_1(s) = R_1 \frac{C_1 s V_1(s) + C_2 s V_{C2}(s)}{1 + R_1 C_1 s} + R_2 C_2 s V_{C2}(s) + V_{C2}(s) \quad (2-97)$$

Hau ordenatuz:

$$(1 + R_2 C_2 s + R_1 \frac{C_2 s}{1 + R_1 C_1 s}) V_{C2}(s) = (1 - R_1 \frac{C_1 s}{1 + R_1 C_1 s}) V_1(s) \quad (2-98)$$

$(1+R_1C_1s)$ -z biderkatuz bi aldeak:

$$(1 + R_1C_1s + R_2C_2s(1 + R_1C_1s) + R_1C_2s)V_{C2}(s) = (1 + R_1C_1s - R_1C_1s)V_1(s) \quad (2-99)$$

eta bi aldeetako polinomioak ordenatuz:

$$(1 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + R_2C_2R_1C_1s^2)V_{C2}(s) = V_1(s) \quad (2-100)$$

Ondorioz, hau da prozesuaren transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{V_{C2}(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + R_2C_2R_1C_1s^2} \quad (2-101)$$

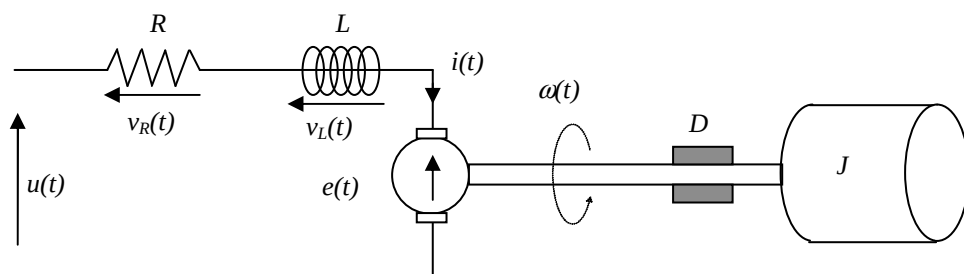
Ariketa honetan ohar gaitezke Laplace-ren transformatuak eskain dezakeen laguntzaz.  $v_1(t)$  eta  $v_{C2}(t)$  tentsioen arteko ekuazio diferentziala lortzea zaila da, baina Laplace-ren transformatua erabiliz, Laplace-ren eremuko bi aldagaien arteko harremana nahiko erraz erdiesten da.

### 2.5.3. Korrante zuzeneko motor (KZM) baten eredu tapena

2.13 irudian korrante zuzeneko motor (KZM) baten irudia agertzen da. Erregimen linealean ibiltzen dela suposatzen da.  $u(t)$  aplikatzen zaion tentsioa da, eta  $\omega(t)$  bere ardatzaren abiadura angeluarra.

$J$  parametroak karga eta ardatzaren inertzia-momentua adierazten du, eta  $D$  parametroa marruskadura-koefizientea da. Marruskadurek KZMa balaztatzen duen pare bat sortzen dute. Pare hori abiadurarekiko proportzionala da:  $T_b(t) = D\omega(t)$ .

$R$  eta  $L$  KZMaren induzituko erresistentzia eta induktantzia dira.



2.13 irudia. Korrante zuzeneko motorraren eskema.

$e(t)$  induzituriko indar elektroeragilea da,  $i(t)$  induzituriko korrantea eta  $T_m(t)$  motorraren indar-parea. Erregimen linealean:  $T_m(t) = k i(t)$  eta  $e(t) = k \omega(t)$ .

- Mailen eta Newton-en legeak aplikatuz, aurkitu alde elektrikoari eta mekanikoari dagozkien ekuazio diferentzialak.

- b) Laplace-ren transformatua aplikatuz, lortu  $G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)}$  transferentzia-funtzioa.

**Ebazpena:**

- a) Ekuazio diferentzialak lortzea:

Mailen legea aplikatuz:

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (2-102)$$

Newton-en legea erabiliz:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = T_m(t) - T_b(t) = T_m(t) - D\omega(t) \quad (2-103)$$

- b)  $G(s)$  transferentzia-funtzioaren kalkulua:

Aitzineko bi ekuazioei Laplace-ren transformatua aplikatuz, hasierako balioak 0 hartuz:

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + E(s) \quad (2-104)$$

eta:

$$Js\Omega(s) = T_m(s) - D\Omega(s) \quad (2-105)$$

Bestalde, KZM linealtzat hartuz:

$$T_m(s) = kI(s) \quad (2-106)$$

eta

$$E(s) = k\Omega(s) \quad (2-107)$$

Adierazpen hauek (2-104) eta (2-105) ekuazioetan ordezkatzuz:

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + k\Omega(s) \quad (2-108)$$

eta:

$$Js\Omega(s) = kI(s) - D\Omega(s) \Rightarrow (Js + D)\Omega(s) = kI(s) \quad (2-109)$$

(2-108)-tik:

$$(R + Ls)I(s) = U(s) - k\Omega(s) \Rightarrow I(s) = \frac{U(s) - k\Omega(s)}{R + Ls} \quad (2-110)$$

$I(s)$ -ren adierazpen hau (2-109)-an ordezkatuz:

$$(Js + D)\Omega(s) = k \frac{U(s) - k\Omega(s)}{R + Ls} \Rightarrow (Js + D)(R + Ls)\Omega(s) = kU(s) - k^2\Omega(s) \quad (2-111)$$

Ordenatuz:

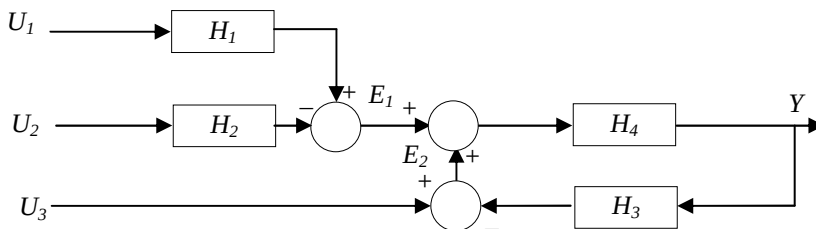
$$(JLs^2 + (DL + JR)s + DR + k^2)\Omega(s) = kU(s) \quad (2-112)$$

Eta, beraz, transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{JLs^2 + (DL + JR)s + DR + k^2} \quad (2-113)$$

## 2.5.4. Bloke-diagramak

2.14 irudian den bloke-diagraman, lortu  $U_1$ ,  $U_2$  eta  $U_3$  sarreraren eta  $Y$  irteeraren arteko hiru transferentzia-funtzioak.



2.14 irudia. Bloke-diagrama bat.

**Ebazpena:**

Zenbait metodo erabil daitezke hiru transferentzia-funtzio horiek erdiesteko. Alde batetik, B eranskinean azaltzen diren bloke-diagramak sinplifikatzeko arau grafikoak erabil daitezke. Bestalde, sarrera bakoitzarentzat irteeran duen eragina kalkulatu daiteke beste sarrerak nulutzat hartuz. Azken aukera bat, zuzenketa honetan erabiltzen dena, hiru sarrerek irteeran duten eragina kalkulatzeko da, eta gero, hortik, hiru transferentzia-funtzioak lortzea. Horretarako, irteeratik abiatzen da, aitzinetik dituen transferentzia-funtzioen sarrerekin lotuz. Batukari bat edo konparagailu bat delarik, parentesiak ireki eta aitzineko seinaleak gehitzen edo konparatzen dira.

$$Y(s) = H_4(s)(E_1(s) + E_2(s)) \quad (2-114)$$

Eta:

$$E_1(s) = H_1(s)U_1(s) - H_2(s)U_2(s) \quad (2-115)$$

Eta:

$$E_2(s) = U_3(s) - H_3(s)Y(s) \quad (2-116)$$

Beraz, lehen ekuazioan ordezkatzuz:

$$Y(s) = H_4(s)(H_1(s)U_1(s) - H_2(s)U_2(s) + U_3(s) - H_3(s)Y(s)) \quad (2-117)$$

Ordenatzuz:

$$Y(s)(1 + H_4(s)H_3(s)) = H_4(s)H_1(s)U_1(s) - H_4(s)H_2(s)U_2(s) + H_4(s)U_3(s) \quad (2-118)$$

$(1 + H_4(s)H_3(s))$ -z zatituz bi aldeak:

$$Y(s) = \frac{H_4(s)H_1(s)}{1 + H_4(s)H_3(s)}U_1(s) - \frac{H_4(s)H_2(s)}{1 + H_4(s)H_3(s)}U_2(s) + \frac{H_4(s)}{1 + H_4(s)H_3(s)}U_3(s) \quad (2-119)$$

Ondorioz, hauek dira erdietsi behar diren hiru transferentzia-funtzioak:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{H_4(s)H_1(s)}{1 + H_4(s)H_3(s)} \quad (2-120)$$

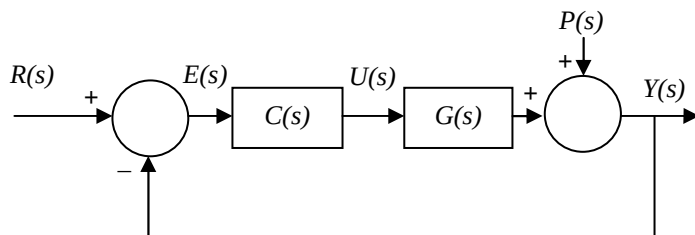
$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U_2(s)} = -\frac{H_4(s)H_2(s)}{1 + H_4(s)H_3(s)} \quad (2-121)$$

Eta:

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{U_3(s)} = \frac{H_4(s)}{1 + H_4(s)H_3(s)} \quad (2-122)$$

### 2.5.5. Perturbazioen eta irteeraren arteko transferentzia-funtzioa

2.15 irudian agertzen den bloke-diagramatik, kalkulatu prozesuaren irteeran diren perturbazioen eta irteeraren arteko  $G_{vp}(s)$  transferentzia-funtzioa.



2.15 irudia. Begizta itxiko kontrol-sistema baten bloke-diagrama.

**Ebazpena:**

Transferentzia-funtzio batek soilik sarrera bat eta irteera bat ditu. 2.15 irudian bi sarrera agertzen dira,  $R(s)$  eta  $P(s)$ . Sarrera baten eta irteeraren arteko transferentzia-funtzioa kalkulatzeko, beste sarrera 0 balitz bezala hartu behar da. Kasu honetan, beraz,  $R(s)=0$  hartzen da.

Aitzineko ariketako metodo bera erabiliz:

$$Y(s) = P(s) + G(s)C(s)(0 - Y(s)) \quad (2-123)$$

Ordenatuz:

$$Y(s)(1 + G(s)C(s)) = P(s) \quad (2-124)$$

Eta beraz  $G_{yp}(s)$  transferentzia-funtzioa:

$$G_{yp}(s) = \frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \quad (2-125)$$

**2.5.6. Laplace-ren transformatua eta frakzio sinpleetan zatiketa**

Adierazi hurrengo Laplace-ren eremuko  $Y(s)$  seinaleen adierazpenak frakzio sinpletan, eta gero kalkulatu  $y(t)$  Laplace-ren transformatuen taularen bidez .

$$a) \quad Y(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

$$b) \quad Y(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$c) \quad Y(s) = \frac{2(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

$$d) \quad Y(s) = \frac{s^2 + 2s - 5}{s(s+1)(s+5)^2}$$

**Ebazpena:**

Ariketa mota hau ebazteko egin behar den lehen gauza da begiratzea ea Laplace-ren transformatu arruntenen taulan baden mota honetako adierazpenik. Ez bada hala, frakzio sinpletan sinplifikatu behar da jatorrizko adierazpena, tauletan agertzen diren adierazpenak erdiesteko. Ariketa honetan taulan ez dugu halako adierazpenik, beraz frakzio sinpletan sinplifikatuko ditugu  $Y(s)$  guztiak.

Bestalde, ebazpen honetan, frakzio sinpleei dagozkien koefizienteak kalkulatzeko zenbait metodo erabiltzen dira, irakurleak metodo horiek menpera ditzan.

$$a) \quad Y(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+5} \quad (2-126)$$

Kasu honetan bezala, polo multiplikorik ez denean, koefizienteak lortzeko metodo sinpleena hau da:

$$A = (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{5}{-1+5} = \frac{5}{4} \quad (2-127)$$

Eta B:

$$B = (s+5)Y(s) \Big|_{s=-5} = \frac{5}{-5+1} = -\frac{5}{4} \quad (2-128)$$

Beraz:

$$Y(s) = \frac{5}{4} \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5} \right) \quad (2-129)$$

Laplace-ren taularen 5. lerrotik:

$$y(t) = \frac{5}{4} (e^{-t} - e^{-5t}) \quad (2-130)$$

$$b) Y(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \quad (2-131)$$

$$A = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{2}{3} \quad (2-132)$$

$$B = (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad (2-133)$$

$$C = (s+3)Y(s) \Big|_{s=-3} = \frac{-3+2}{-3(-3+1)} = -\frac{1}{6} \quad (2-134)$$

Beraz:

$$Y(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \frac{1}{s+3} \quad (2-135)$$

Laplace-ren taularen 2. eta 5. lerroetatik:

$$y(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \quad (2-136)$$

$$c) Y(s) = \frac{2(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} \quad (2-137)$$

Hemen polo bikoitz bat bada  $s=0$ -an. Horregatik,  $A_1$ -en balioa ezin da orain arte erabilitako metodoarekin erdietsi. Koefizienteen balioak lortzeko, aukera bat da dena izendatzaile berean jartzea, eta gero zenbatzailea jatorrizko adierazpenarekin konparatzea:

$$Y(s) = \frac{A_1 s(s+1)(s+4) + A_2 (s+1)(s+4) + Bs^2(s+4) + Cs^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+4)} \quad (2-138)$$

Garatuz:

$$Y(s) = \frac{A_1 s(s^2 + 5s + 4) + A_2 (s^2 + 5s + 4) + B(s^3 + 4s^2) + C(s^3 + s^2)}{s^2(s+1)(s+4)} \quad (2-139)$$



Ordenatuz:

$$Y(s) = \frac{(A_1 + B + C)s^3 + (5A_1 + A_2 + 4B + C)s^2 + (4A_1 + 5A_2)s + 4A_2}{s^2(s+1)(s+4)} \quad (2-140)$$

Hasierako adierazpenarekin konparatuz:

$$\begin{cases} A_1 + B + C = 0 \\ 5A_1 + A_2 + 4B + C = 0 \\ 4A_1 + 5A_2 = 2 \\ 4A_2 = 4 \end{cases} \quad (2-141)$$

Azken ekuaziotik ebazten hasiz:

$$\begin{cases} A_2 = \frac{4}{4} = 1 \\ 4A_1 = 2 - 5 = -3 \Rightarrow A_1 = -\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + 1 + 4B + C = 0 \Rightarrow C = \frac{11}{4} - 4B \\ B = -C + \frac{3}{4} = -\frac{11}{4} + 4B + \frac{3}{4} \Rightarrow -3B = -\frac{8}{4} = -2 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (2-142)$$

Eta  $B$  3. lerroan ordezkatzuz:

$$C = \frac{11}{4} - 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{33 - 32}{12} = \frac{1}{12} \quad (2-143)$$

Beraz:

$$Y(s) = -\frac{3}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{12} \frac{1}{s+4} \quad (2-144)$$

Laplace-ren taularen 2., 3. eta 5. lerroetatik:

$$y(t) = -\frac{3}{4} + 1t + \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{12} e^{-4t} \quad (2-145)$$

d)  $Y(s) = \frac{s^2 + 2s - 5}{s(s+1)(s+5)^2}$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C_1}{s+5} + \frac{C_2}{(s+5)^2} \quad (2-146)$$

Koefizienteen balioak lortzeko, aitzineko ariketarekiko aukera berri bat erabiltzen da hemen. Lehenbizi,  $A$ ,  $B$  eta  $C_1$  koefizienteen balioak a) eta b) kasuetan bezala erdiesten dira:

$$A = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{-5}{1 \times 5^2} = -\frac{1}{5} \quad (2-147)$$

$$B = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1-2-5}{-1(-1+5)^2} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8} \quad (2-148)$$

$$C_2 = (s+5)^2 Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{25-10-5}{-5(-5+1)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad (2-149)$$

$C_1$  ezin da modu horretan kalkulatu. Haren balioa lortzeko, (2-146) ekuazioa izendatzaile berean jar daiteke, eta gero jatorrizko adierazpenarekin konparatu (c) kasuan bezala). Beste aukera bat  $s$ -ri balio bat ematea da ( $Y(s)$  infinitu izan dadila saihestuz hala ere). Erraterako hemen  $s=-4$  hartzen badugu:

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{1}{5} \frac{1}{s-4} + \frac{3}{8} \frac{1}{s-4+1} + \frac{C_1}{s+5} + \frac{1}{2} \frac{1}{(-4+5)^2} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{8} + C_1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-2-5+40C_1+10}{40} = \frac{3+40C_1}{40} = \frac{3}{40} + C_1 \end{aligned} \quad (2-150)$$

Eta ekuazio hori jatorrizko adierazpenean ere  $s=-4$  hartuz lortzen denarekin alderatuz:

$$\frac{3}{40} + C_1 = \frac{16-8-5}{-4(-4+1)(-4+5)^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_1 = \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{7}{40} \quad (2-151)$$

Beraz:

$$Y(s) = \frac{1}{5} \frac{1}{s} + \frac{3}{8} \frac{1}{s+1} + \frac{7}{40} \frac{1}{s+5} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s+5)^2} \quad (2-152)$$

Laplace-ren taularen 2., 5. eta 6. lerroetatik:

$$y(t) = \frac{1}{5} + \frac{3}{8} e^{-t} + \frac{7}{40} e^{-5t} + \frac{1}{2} t e^{-5t} \quad (2-153)$$

### 2.5.7. Ekuazio diferentzialak Laplace-ren transformatuaren bidez ebaztea

Lortu  $x(t)$  seinalearen Laplace-ren transformatua. Hasierako baldintzak emanak dira.

$$a) \quad \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad x(0) = 2$$

$$b) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 10 \quad x(0) = 2 \quad \text{eta} \quad \frac{dx(0)}{dt} = -4$$

**Ebazpena:**

$$a) \quad \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad x(0) = 2$$

Laplace-ren transformatua ekuazio diferentzialaren bi aldeei aplikatuz eta linealtasun-propietatea erabiliz:

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt} + 4x\right) = \mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) + 4\mathcal{L}(x) = 0 \quad (2-154)$$

Orain, deribazioari buruzko propietatea kontuan hartuz:

$$sX(s) - x(0) + 4X(s) = 0 \quad (2-155)$$

Adierazpena ordenatuz eta  $x(0)$ -ren balioa ordezkatzuz:

$$(s + 4)X(s) - 2 = 0 \quad (2-156)$$

Eta beraz:

$$X(s) = \frac{2}{s + 4} \quad (2-157)$$

$$b) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 10 \quad x(0) = 2 \quad \text{eta} \quad \frac{dx(0)}{dt} = -4$$

Laplace-ren transformatua ekuazio diferentzialaren bi aldeei aplikatuz eta linealtasun- eta deribazio-propietateak erabiliz:

$$s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt} + 2sX(s) - 2x(0) + 5X(s) = 10 \quad (2-158)$$

Ekuazioa ordenatuz eta hasierako balioak ordezkatzuz:

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) - 2s + 4 - 4 = 10 \quad (2-159)$$

Beraz:

$$X(s) = \frac{2s + 10}{s^2 + 2s + 5} \quad (2-160)$$

### 2.5.8. Hasierako eta bukaerako balioak Laplace-ren bidez

Lortu ondoko funtzioaren hasierako eta bukaerako balioak hurrengo kasuetan:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 5u(t)$$

- a)  $u(t)$  maila unitarioa delarik eta hasierako baldintzak nuluak direlarik;
- b)  $u(t)$  maila unitarioa delarik eta hasierako baldintzak hauek direlarik:

$$x(0) = 1 \quad \text{eta} \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

#### **Ebazpena:**

Ariketa honen bidez erakutsi nahi da nola Laplace-ren eremura pasatzean, hasierako eta bukaerako balioak erraz lor daitezkeen, dagozkien teorema erabiliz.

- a)  $u(t)$  maila unitarioa delarik eta hasierako baldintzak nuluak direlarik:

Laplace-ren transformatua ekuazioaren bi aldeei aplikatuz:

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = 5U(s) \quad (2-161)$$

$u(t)$  maila unitarioa denez:

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (2-162)$$

Eta beraz:

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = \frac{5}{s} \quad (2-163)$$

$$X(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)} \quad (2-164)$$

Hasierako balioaren teorema erabiliz:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5}{s^2 + 2s + 5} = 0 \quad (2-165)$$

Eta bukaerako balioaren teorema erabiliz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s^2 + 2s + 5} = 1 \quad (2-166)$$

b)  $u(t)$  maila unitarioa delarik eta hasierako baldintzak hauek direlarik:

$$x(0) = 1 \quad \text{eta} \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Laplace-ren transformatua ekuazioaren bi aldeei aplikatuz:

$$s^2 X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{dt} + 2sX(s) - 2x(0) + 5X(s) = 5U(s) \quad (2-167)$$

Hasierako balioak ordezkatzuz eta ordenatuz:

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) - s - 0 - 2 = \frac{5}{s} \Rightarrow (s^2 + 2s + 5)X(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s} \quad (2-168)$$

Eta beraz:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad (2-169)$$

Hasierako balioaren teorema erabiliz:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = 1 \quad (2-170)$$

Logikoa den gisan, enuntziatuan emandako balio bera lortzen da.

Eta bukaerako balioaren teorema erabiliz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 1 \quad (2-171)$$

Aitzineko kasuarekin alderatuz, ikusten da hasierako balioa desberdina dela, eta bukaerakoa, aldiz, berdina. Hau orokortu daiteke. Hasierako balioa hasierako baldintzen menpe dago; bukaerako balioak, aldiz, ez.

## 3. Sistemen erantzuna denboraren eremuan

### 3.1. Sarrera

Behin sistema bat ereduztatu ondoren, erraterako haren transferentzia-funtzioa lortuz, bi azterketa mota egin ohi dira. Alde batetik, liburu honetan egiten den moduan, prozesuaren denborarekiko erantzuna aztertzen da. Sarrera mota desberdinetako seinaleak aplikaturik, ikusten da nola aldatzen den irteera denboran zehar.

Beste azterketa motan, sistemaren erantzuna maiztasunaren eremuan aztertzen da. Hor bereziki hiru diagrama mota erabiltzen dira, Bode, Nyquist, eta Black edo Nichols izenekoak. Bode diagraman, erraterako, transferentzia-funtzioan  $s$  Laplace-ren aldagaia  $j\omega$ -z ordezkatzen da eta bi diagrama aztertzen dira. Batek erakusten du nola aldatzen den transferentzia-funtzioaren irabazia (dB-etan) maiztasunaren arabera, eta besteak sistemaren desfasea (gradutan) maiztasunaren arabera. Bode diagrama esperimentalki ere lor daiteke, sistema maiztasun desberdinetako sinusoideekin kitzikatuz, eta maiztasun bakoitzeko, sarrera eta irteera seinaleen arteko irabazia eta desfasea neurtuz.

Liburu honetan ez dira prozesuen maiztasunaren eremuko erantzunak aztertzen. UPV/EHUko hainbat gradutan, 3. ikasturteko Erregulazio Automatikoa ikasgaiaren aztertzen da. Maiztasunaren eremuko analisiak kontrolagailu berezi batzuk diseinatzea ahalbidetzen du, eta bereziki, egonkortasun erlatiboa aztertzea.

Kapitulu honen lehen atal honetan, denbora-esparruko erantzunaren analisirako oinarrizko kontzeptu batzuk azaldu ondoren, ondoko ataletan, sistemen egonkortasuna eta egoera iragankorra eta iraunkorra aztertzen dira.

#### 3.1.1. Denboraren eremuko erantzunaren azterketaren helburuak

Hauek dira denboraren eremuko erantzunaren azterketaren helburuak:

- Sistema baten dinamika (egoera iragankorreko ezaugarriak), egonkortasuna eta egoera iraunkorra aztertzea.
- Kontrolagailuak diseinatu aitzin kontrolatu beharreko prozesua ongi ezagutzea.
- Kontrolaturik den sistema baten prestazioak ebaluatzea.
- Sistemak, bereziki kontrolaturik direlarik, haien artean konparatzea.

### 3.1.2. Sistemak frogatzeko seinale tipikoak

Denboraren eremuko sistema baten erantzuna aztertzeke, sarrera-seinale mota batzuk erabili ohi dira: pultsua, maila, arrapala, eta neurri txikiago batean, parabola. 3.1 irudiak seinale bakoitzari denboraren arabera dagokion erantzuna erakusten du.

Hauek dira seinale horien denborarekiko adierazpen orokorrak ( $t \geq 0$ ),  $A$  konstantea izanik, eta dagozkien Laplace-ren transformatuak (2.2 taulatik lortuak) :

- Pultsua:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \text{ bada} \\ 0 & t \neq 0 \text{ bada} \end{cases} \Rightarrow F(s) = 1 \quad (3-1)$$

- Maila:

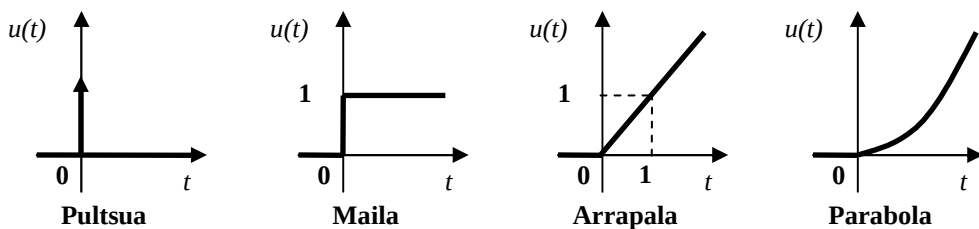
$$f(t) = A \Rightarrow F(s) = \frac{A}{s} \quad (3-2)$$

- Arrapala:

$$f(t) = At \Rightarrow F(s) = \frac{A}{s^2} \quad (3-3)$$

- Parabola:

$$f(t) = At^2 \Rightarrow F(s) = \frac{2A}{s^3} \quad (3-4)$$



3.1 irudia. Sistemak frogatzeko seinale tipikoak.

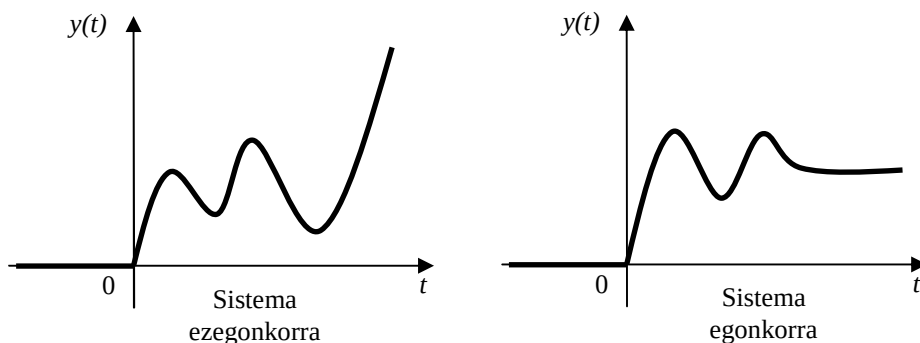
Sistema bati halako seinaleak aplikatuta irteera aztertzeak hobeki ulertzen laguntzen du sistema.

### 3.1.3. Erantzun egonkorra edo ezegonkorra

Demagun sistema bat kitzikatzen dugula maila motako sarrera batekin. 3.2 irudian agertzen den ezkerreko irteeraren erantzuna ez da egonkorra. Sistema *ezegonkorra*

deitzen dira, sarrera mota horrekin kitzikaturik, denbora infinitura doan neurrian, irteera + edo – infinitura doazen sistemak.

Irudi bereko eskuineko irteera, eta dagokion sistema, egonkorak dira.



3.2 irudia. Sistema ezegonkor eta egonkor baten erantzunak.

### 3.1.4. Denboraren eremuko erantzuna: erantzun librea eta behartua

Demagun ondoko ekuazio diferentziala dugula:

$$2\ddot{y} - 8\dot{y} + 6y = u - \dot{u} \quad (3-5)$$

eta sarrera

$$u(t) = 5t \quad (3-6)$$

Ekuazio diferentzial horren erantzuna hau da:

$$y(t) = \frac{5}{6}t + \frac{5}{18} - \left(\frac{45}{18} + \frac{y_0}{2}\right)e^{3t} + \frac{3y_0}{2}e^t = y_b(t) + y_l(t) \quad (3-7)$$

non  $y_0$   $y(t)$ -ren hasierako balioa den.

$y_0$ -ren menpe dagoen  $y(t)$ -ren adierazpenari erantzun librea deritzo. Kasu honetan hau da erantzun librea:

$$y_l(t) = -\frac{y_0}{2}e^{3t} + \frac{3y_0}{2}e^t \quad (3-8)$$

Adierazpen osoaren beste zatiari, hasierako balioak nuluak hartzen direlarik lortzen denari, erantzun behartua deitzen zaio. Soilik  $u(t)$  sarreraren menpe dago:



$$y_b(t) = \frac{5}{6}t + \frac{5}{18} - \frac{45}{18}e^{3t} \quad (3-9)$$

### 3.1.5.1. Egonkortze-denbora, *ts*

*Egonkortze-denbora*, izenak dioen bezala, sistemak egonkortzeko (egoera iraunkorrera heltzeko) behar duen denbora da. Teorikoki, irteera batentzat lortzen den ekuazio matematikoa kontuan hartuz, sistema ez da inoiz iraunkor bihurtzen. Denbora aldatzen den neurrian, oso gutxi bada ere, irteera beti aldatzen da. Denbora batetik aurrera, irteera oso gutxi aldatzen denez, sistema iraunkorra dela erraten da, nahiz eta zehazki ez hala izan, gorago aipatu gisan.

Bereziki bi irizpide erabiltzen dira egonkortze-denbora zein den definitzeko. Maila motako sarrera aplikatzen denetik, irteera-bukaerako balioaren  $\pm 2$  (1. irizpidea) edo  $\pm 5$  (2. irizpidea) inguruko tarte batean azken aldiz sartzeko behar den denbora da  $t_s$  egonkortze-denbora. Suposatzen da denbora horren ondoren sistema iraunkorra dela.

Hori oso ezaugarri garrantzitsua da, eta, beraz, ongi neurtzen jakin behar da. Neurtzeko, 3.3 irudian agertzen den bezala, bukaerako balioaren inguruko % 2ko edo % 5eko hodi bat marraztu behar da. Irudiko denbora-ardatzean, irteera hodi horretan azken aldiz noiz sartzen den markatu behar da. Egonkortze-denbora kalkulatzeko, denbora horri, maila motako sarrera gertatu den denbora edo unea kendu behar zaio.

Egonkortze-denboraz mintzatzean, % 2koa edo % 5koa den zehaztu beharko litzateke. Hala ere, azalpenak arintzeko helburuarekin, ez da beti zehazten. Liburu honetan, % zenbateko egonkortze-denbora den azaltzen ez delarik, % 2koa da.

### 3.1.5.2. Haziera-denbora, *tr*

Bi definizio ditu bereziki *haziera-denborak*, liburuen autore desberdinen arabera.

Alde batetik, erraten da irteerak bukaerako balioaren % 10etik % 90era pasatzeko behar duen denbora dela. Hau da definizio orokorrena, eta liburu honetan erabiltzen duguna.

Beste batzuetan, erraten da irteerak % 0tik % 100era pasatzeko behar duen denbora dela. Neurketa hori sistema azpimotelduei aplikatu dakieke, erran nahi da, 3.3 irudian bezala, irteerak bukaerako balioa une batean gainditzen duen sistemei.

Haziera-denborak sistemaren erreakzio-abiadura zein den azaltzen du. Ez da egonkortze-denbora bezain ezaugarri garrantzitsua, baina hala ere garrantzitsua da eta ongi neurtzen jakin behar da.

### 3.1.5.3. Atzerapen-denbora garbia, *td*

Prozesu batzuetan, sarrera bat aplikatu ondoren, irteerak ez du berehala erreakzionatzen. *Atzerapen-denbora garbia*, sarrera gertatzen denetik, irteera erreakzionatzen hasten den arteko denbora da. 3.3 irudian argi agertzen da nola neurtu behar den atzerapen-denbora garbi hori.

Askotan, izena arintzearen, atzerapen-denbora garbiaren ordeztu, *atzerapen-denbora* deitzen da, sinpleki.

Atzerapen-denbora inertzia handia duten sistemetan ager daiteke (erraterako sistema termikoetan), edo ardatz batean lasaiera bat duten sistema mekanikoetan erraterako.

#### 3.1.5.4. *Puntako denbora, $t_p$*

Ezaugarri hau soilik sistema azpimotelduetan agertzen da. Prozesu horietan, 3.3 irudian agertzen den bezala, une batez irteerak bukaerako balioa pasatzen du. Bukaerako balio hori behin baino gehiagotan pasa dezake irteerak, baina irudi horretan bezala, sistema egonkorra bada, pasatzen duen lehen aldian pasako du gehien, balio maximo bat lortuz.

*Puntako denbora*, sarreraren maila aplikatu denetik, irteerak lehen balio maximo horretara heltzeko behar duen denbora da.

#### 3.1.5.5. *Gehienezko gaintitzea, $M_p$*

Aitzineko ataletan aipatu gisan, sistema egonkor azpimotelduetan, irteerak bukaerako balioa pasatzen du balio maximo bat lortu arte. *Gehienezko gaintitzeak* bukaerako balioa zein neurritan pasa den adierazten du. Gehienetan ehunekotan ematen da.

Gehienezko gaintitzea kalkulatzeko, soilik irteeraren balio maximoa eta bukaerako balioa neurtu behar dira, eta gero kalkulu hau egin:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \%100 \quad (3-10)$$

Oso kontzeptu garrantzitsua da eta neurtzeko manera ongi menperatu behar da.

#### 3.1.5.6. *Egoera iraunkorreko errorea edo errore estatikoa, $e_{ss}$*

3.3 irudiaren azken ezaugarri garrantzitsua egoera iraunkorrari lotua da. Irteera kontrolatzen delarik, erreferentzia bat ematen zaio, egoera iraunkorrean irteera balio horretatik ahal bezain hurbil izan dadin.

*Egoera iraunkorreko errorea, errore estatikoa* ere deitzen dena, erreferentziaren eta irteeraren bukaerako balioaren artean den desberdintasuna da:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) \quad (3-11)$$

### 3.1.6. Sistema baten kontrol-prestazioak edo helburuak

1.7 irudian azaldu gisan, sistema baten kontrolagailua diseinatzerakoan, lehen urratsa kontrolaturiko sistema horren helburuak edo espezifikazioak definitzea da. Espezifikazio horiek hiru mailetan definitzen dira:

- Egonkortasuna: kontrolaturiko sistema bat egonkorra izan behar da. Hau ezinbesteko helburua da, beraz espezifikazio garrantzitsuena.
- Egoera iraunkorreko zehaztasuna: egoera iraunkorrean zein errore onar daitezkeen erabaki behar da. Kontrolaturiko sistema askotan, erraterako helikoptero baten palaren orientazioaren kontrolean, egoera iraunkorreko kontrola zehatza izan behar da, hau da, errore estatikoa nulua izan behar da. Beste hainbat sistematan, erraterako gela baten tenperaturaren kontrolean, errore estatiko bat izatea onartzen da.
- Dinamika: kontrolaturiko prozesuaren dinamika definitzean, erantzunaren azkartasuna eta moteltze-heina zehatzu behar dira. Oro har, erantzun ahal bezain azkar bat nahi da lortu. Moteltze-heinari dagokionez, espezifikazioak kontrolatzen den prozesuaren arabera dira. Adibidez, igogailu baten posizio bertikala kontrolatu nahi bada, gaingiditza ez duen erantzun bat nahiko da, 1 pisutik 2.era joatean, ez 3.etik edo 2. eta erditik pasatzeko.

Beraz, laburbilduz, espezifikazio garrantzitsuena egonkortasunarena da. Beste bi arloei dagokionez, helburuak kontrajarriak izan daitezke. Erraterako, azkartasuna handituz, errore estatikoa ere handi daiteke. Lehentasunak, kontrolatu nahi den sistemaren arabera definituko dira.

## 3.2. Egonkortasuna

Lehenago aipatu bezala, egonkortasunaren kontzeptua oso garrantzitsua da Automatikan/Kontrolean. Kontrolaturiko sistema bat derrigorrez egonkorra izan behar da.

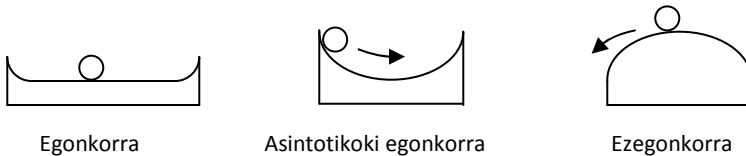
### 3.2.1. Definizioa

Egonkortasunari buruzko zenbait definizio aurki daitezke. Lehenago bat aipatu da. Hemen, nahiko erraz uler daitezkeen beste bi ematen dira:

- Sistema egonkorra da, baldin eta bornatutako sarrera baten aurrean irteera bornatua mantentzen bada.
- Sistema egonkorra da, baldin eta pultsu-sarreraren ondorioz erantzuna denborarekin zerorantz badoa.

### 3.2.2. Intuitiboki

3.4 irudiak intuitiboki egonkortasun-kontzeptua zertan datzan ulertzen laguntzen du.



3.4 irudia. Egonkortasunaren kontzeptuaren azalpen intuitiboa.

Irudiko ezkerreko kasuan, hasieran pilota geldirik bada, ez da mugituko gero ere, eta, beraz, sistema *egonkorra* da.

Erdiko kasuan, nahiz eta hasieran pilota geldirik egon, eskuin eta ezker mugituko da, noizbait erdian geldirik egon arte. Zorrozk, sistema hori *asintotiko egonkorra* dela erraten da. Baina adjektibo edo izenondoa arintzeko, *egonkorra* dela erran ohi da (asintotikoki dela aipatu gabe).

Eskuineko kasuan, pilota ezkerreara abiatuko da erori arte. Sistema *asintotikoki ezegonkorra*, edo sinpleki *ezegonkorra* dela erraten da.

### 3.2.3. Egonkortasunerako baldintza orokorrak

Demagun  $G(s)$  transferentzia-funtzioa pultsu baten bidez kitzikatzen dugula.  $G(s)$ -ren poloak  $s_i (i=1, \dots, n)$  deitzen ditugu.

2.2 taulan ikus daitekeenez, transferentzia-funtzioaren erantzuna poloen naturaren arabera izango da:

- $s_i$  poloak errealak badira:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} \quad (3-12)$$

- $n$  poloen artean,  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  polo-pare konplexu konjugatu bat bada:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i e^{s_i t} + e^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (3-13)$$

Sarrera pultsu modukoa denez, lehenago emaniko definizioaren arabera, sistema egonkorra izanen da erantzuna zerora badoa, denbora infinitura doan heinean.

Polo errealen kasuan, dagokion ekuaziotik ikusten da esponentziala zerora joateko,  $s_i$  poloak negatiboak izan behar direla.

Polo konplexuei dagokionez, (3-13) ekuazioan, argiki agertzen da denbora aitzina doalarik irteera zerorantz joan dadin,  $\sigma$  polo konplexuen zati erreala negatiboa izan behar dela.

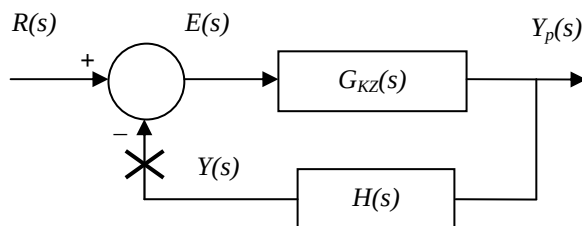
Beraz, oro har, polo mota guziak kontuan hartuz, transferentzia-funtzio bat egonkorra izanen da, haren polo guztien zati erreala negatiboa bada.

Ongi ulertu behar da poloak edozein motatako transferentzia-funtzioei dagozkiela. Atal honetan aztertu denak begizta itxiko zein begizta irekiko transferentzia-funtzioentzat balio du. Egonkortasuna, poloen bidez, transferentzia-funtzioaren ezaugarri bat da, berdin du zein motatako transferentzia-funtzioa den.

### 3.2.4. Egonkortasuna begizta irekian eta itxian

Begizta irekiko transferentzia-funtzioa  $R(s)$  eta  $Y(s)$ -ren artekoa da, berrelikadura-begizta irekia delarik, 3.5 irudian erakusten den bezala gurutzearekin. Irudi horren arabera, beraz, begizta irekiko transferentzia-funtzioa  $G_{KZ}(s)H(s)$  transferentzia-funtzioa da.

$G_{KZ}(s)$  kate zuzeneko transferentzia-funtzioa deitzen da  $E(s)$  eta  $Y_p(s)$  seinaleen artekoa. Jakin behar da askotan berrelikadurak ez duela transferentzia-funtziorik ( $Y(s)$  hartzen da irteera gisa), eta, beraz, kate zuzeneko eta begizta irekiko transferentzia-funtzioak berdinak direla kasu horretan.



3.5 irudia. Begizta irekiko eta itxiko egonkortasuna.

Begizta itxiko transferentzia-funtzioa (beheko begizta konparagailuari lotua delarik) begizta irekiko transferentzia-funtzioaren arabera adieraz daiteke, 2.4.5.3 atalean egin zen antzera:

$$G_{BI}(s) = \frac{G_{KZ}(s)}{1 + G_{KZ}(s)H(s)} \quad (3-14)$$

Kontrol-sistema batean, kate zuzeneko transferentzia-funtzioa kontrolagailuaren  $C(s)$  eta prozesuaren  $G(s)$  transferentzia-funtzioen produktua izanen da. Haren egonkortasuna haren poloen kokapenaren menpe dago. Erraterako, kontrolatu nahi den prozesua ezegonkorra bada,  $G(s)$ -ren polo baten zati erreala positiboa dela erran nahi du, kontrolagailuko poloak beti egonkorak hautatzen baitira, noski. Polo hori kate zuzenean eta begizta irekian ere agertzen da, eta, beraz, transferentzia-funtzio horiek ere ez dira egonkorak.

Begizta itxiko  $G_{BI}(s)$  transferentzia-funtzioaren poloak  $(1+G_{KZ}(s)H(s))$ -ren zeroak dira.  $(G_{KZ}(s)H(s))$ -ren poloak ez bezalakoak dira. Beraz, argiki ikusten da begizta irekiko (edo kate zuzeneko) eta begizta itxiko egonkortasuna ez dela zuzenki lotua. Nahiz eta adibide batean, kontrolatu beharreko prozesuaren transferentzia-funtzioa ezegonkorra izan, begizta itxikoa egonkorra izan daiteke.

### 3.2.5. Routh-Hurwitz-en irizpidea

Aitzineko ataletan ikusi da sistema baten egonkortasunak bere transferentzia-funtzioaren poloen kokapenaren menpe dagoela. Beraz, egonkortasuna aztertzeko, nahikoa da poloak kalkulatzeko.

Batzuetan, polo asko izan ditzake sistemak, eta horren ondorioz poloak —erran nahi da sistemari dagokion transferentzia-funtzioaren izendatzailearen erroak— ez dira eskuz kalkulatu errazak. Hala ere, Matlab bezalako software batekin errazki kalkula daitezke.

Beste batzuetan, transferentzia-funtzioaren izendatzaileko polinomioak, hau da, polinomio karakteristikoak, parametro batzuen menpe dauden koefizienteak izan ditzake. Kasu horretan, Matlab bezalako kalkulu numerikoak egiten dituen software batek ere ezin ditu erroak kalkulatu.

Aipatu kasu horietan egonkortasunaren azterketa errazteko, Edward John Routh eta Adolf Hurwitz matematikarien lanen ondorioz asmatutako metodo bat, gaur egun Routh-Hurwitz metodoa deitzen dena, erabil daiteke. Metodo horrek, poloak ezagutu gabe egonkortasuna aztertzea ahalbidetzen du. Metodoa aplikatzeko, soilik polinomio karakteristikoaren koefizienteak ezagutu behar dira.

Demagun sistema batek  $P(s)$  polinomio karakteristikoa duela:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (3-15)$$

Bere koefizienteak ezaguturik, taula bat osatu behar da metodoaren lehen pausoa taulak  $n+1$  lerro ditu, eta ondoko ekuazioan agertzen den egitura:

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (3-16)$$

Taularen  $b_i$  eta  $c_i$  osagaiak hala kalkulatu dira:

$$b_i = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2i} \\ a_{n-1} & a_{n-2i-1} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2i} - a_n a_{n-2i-1}}{a_{n-1}} \quad (3-17)$$

$$c_i = \frac{-\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2i-1} \\ b_1 & b_{i+1} \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-2i-1} - a_{n-1} b_{i+1}}{b_1} \quad (3-18)$$

Beste beheko lerroak printzipio berarekin kalkulatzen dira.

Behin taula osaturik, sistemaren egonkortasuna ezagutu daiteke taularen lehen zutabeko (ezkerrekoa) osagaiak aztertuz. Sistema egonkorra da, baldin eta soilik baldin osagai horiek guzkiek zeinu bera badute.

Adibide gisa, azter dezagun transferentzia-funtzio honen egonkortasuna Routh-Hurwitz-en metodoaren bidez:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s + k} \quad (3-19)$$

Ageri denez, sistema horren polinomio karakteristikoa  $k$  parametroaren menpe dago. Hemen  $k$  parametroaren egonkortasun-eremua kalkulatu dugu, hau da,  $k$ -ren zein balioentzat den egonkorra sistema.

Lehen pausoa taula osatzea da. Sistemaren ordena 3 izanik, taulak lau lerro izanen ditu. Lehen bi lerroetan polinomio karakteristikoaren koefizienteak kokatzen ditugu era egokian:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3-20)$$

Beste osagaiak aitzineko ekuazioetan ageri bezala kalkulatzen ditugu:

$$b_1 = \frac{2 \times 4 - 1 \times k}{2} = \frac{8 - k}{2} \quad (3-21)$$

$$b_2 = \frac{2 \times 0 - 1 \times 0}{2} = 0 \quad (3-22)$$

$b_3$ -k ere 0 balio du.

$$c_1 = \frac{b_1 \times k - 2 \times b_2}{b_1} = \frac{\frac{8-k}{2} \times k - 2 \times 0}{\frac{8-k}{2}} = k \quad (3-23)$$



Lehen zutabeko lehen bi osagaiak positiboak dira. Sistema egonkorra izateko,  $b_1$  eta  $c_1$  ere positiboak izan behar dira beraz. Horretarako  $K$  parametroak baldintza hauek bete behar ditu:

$$b_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{8-k}{2} \geq 0 \Rightarrow k \leq 8 \quad (3-24)$$

$$c_1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \quad (3-25)$$

Beraz hau da  $K$ -ren egonkortasun-eremua:

$$0 \leq k \leq 8 \quad (3-26)$$

### 3.3. Erregimen iragankorra

3.1.5 atalean denboraren eremuko erantzunaren, eta batez ere zati iragankorraren, ezaugarri nagusiak zein diren aipatu da. Atal honetan, sistemen dinamika —erran nahi da haien erantzunaren erregimen iragankorra— sistema tipikoen arabera aztertzen da. Ikusiko den gisan, dinamikaren ezaugarriak bereziki poloen naturaren (erreal edo konplexu) eta kokapenaren menpe daude.

Hauek dira atal honetan aztertzen diren sistema tipikoak: integratzaile soila, atzerapen-denbora garbi soila, 1. ordenako sistemak eta 2. ordenako sistemak. Bukatzeko, maila handiagoko sistemak ere aztertzen dira.

#### 3.3.1. Integratzaile soila

*Integratzaile soila* deituriko sistemaren irteera sarrerako seinalearen integrala da, 3.6 irudiak erakusten duen gisan.



3.6 irudia. Integratzaile soila.

Integratzaileari irabazi bat elkartzen ahal zaio, eta, beraz, irteera hala adierazten da sarreraren arabera:

$$y(t) = K \int_0^t x(t) dt \quad (3-27)$$

Bi aldeetan Laplace-ren transformatua aplikatuz, sistemaren transferentzia-funtzioa lortzen da:

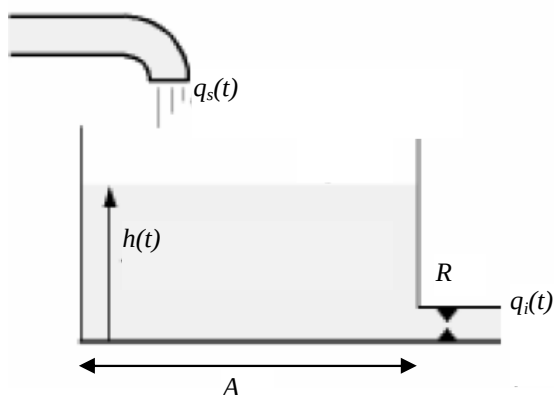
$$Y(s) = \frac{K}{s} X(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s} \quad (3-28)$$

Sistema integratzaile batek maila-seinale baten Laplace-ren transformatuaren adierazpen bera du,  $\frac{1}{s}$ . 3.3.6 atalean aipatzen den moduan, integratzaileak oso erabilgarriak dira kontrolean. Horregatik, garrantzitsua da gogoz ezagutzea integratzaile baten transferentzia-funtzioa.

Ondoko azpiataletan, integratzaile soilak diren sistema erreal batzuen adibidea ematen da.

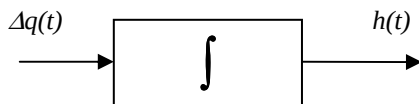
### 3.3.1.1. Adibide hidraulikoa

3.7 irudian integratzaile soil den sistema hidrauliko baten eskema agertzen da.  $q_s(t)$  eta  $q_i(t)$  sarrera eta irteerako emarien diferentziaren arabera aldatzen da  $h(t)$  ur-maila.



3.7 irudia. Sistema hidrauliko integratzaile soil.

3.8 irudian agertzen den bezala, sistema hidraulikoaren sarrera gisa emarien arteko diferentzia hartzen bada, eta irteera gisa ur-maila, sistema integratzaile hutsa da.



3.8 irudia. Sistema hidraulikoa adierazten duen blokea, sarrera eta irteerarekin.

Hori frogatzeko, sistemari dagokion ekuazio diferentziala idatzi behar da. Masaren kontserbazioaren legea kontuan hartuz, ekuazio hau lortzen da:

$$\Delta q(t) = q_s(t) - q_i(t) = \frac{dv(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} \quad (3-29)$$

non  $v(t)$ -k ontziaren barnean den ur-bolumena adierazten duen eta  $A$ -k ontziaren azalera. Laplace-ren transformatua aplikatuz hasierako balio nuluak hartuz, sistemaren transferentzia-funtzioa lortzen dugu:

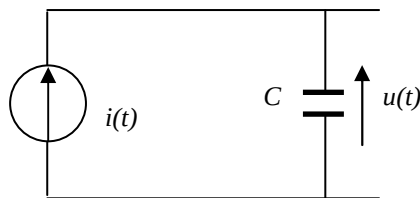
$$G(s) = \frac{H(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{As} = \frac{K}{s} \quad (3-30)$$

non  $K = \frac{1}{A}$  sistemaren irabazia den.

Ohar gaitezke halako sistemaren polo bakarra, integratzaile guzietan bezala, nulua dela:  $s_1=0$ .

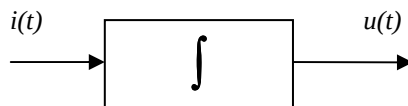
### 3.3.1.2. Adibide elektrikoa

3.9 irudian integratzaile soilak den sistema elektriko baten eskema agertzen da.  $i(t)$  iturriaren korrontearen balioaren arabera,  $u(t)$  irteerako tentsioa aldatzen da.



3.9 irudia. Sistema elektriko integratzaile soilak.

3.10 irudian agertzen den bezala, sistema elektrikoaren sarrera gisa korrontea hartzen bada, eta irteera gisa  $u$  tentsioa, sistema integratzaile hutsa da.



3.10 irudia. Sistema elektrikoak adierazten duen blokea, sarrera eta irteerarekin.

Hori frogatzeko, sistemari dagokion ekuazio diferentziala idatzi behar da. Mailen legea aplikatuz ekuazio hau lortzen da:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (3-31)$$

non  $C$  irteerako kondentsadorearen balioa den. Laplace-ren transformatua aplikatuz hasierako balio nuluak hartuz, sistemaren transferentzia-funtzioa lortzen dugu:

$$H(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} = \frac{K}{s} \quad (3-32)$$

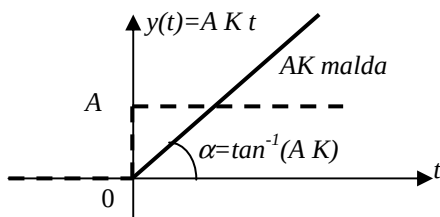
non  $K = \frac{1}{C}$  sistemaren irabazia den.

### 3.3.1.3. Mailarekiko erantzuna

Integratzaile soil batek maila motako sarrera baten aitzinean duen erantzunaren adierazpena, Laplace-ren transformatu arruntaren taularen bidez lor daiteke (2.2 taula). Mailaren anplitudea  $A$  izanik, eta integratzailearen irabazia  $K$ , hau da irteeraren adierazpena:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A K}{s} \right\} = AKt \quad (3-33)$$

3.11 irudian erantzun hori erakusten da. Argiki agertzen da nola irteera sarreraren integrala den. Irteeraren maldak mailaren anplitudea eta integratzailearen irabaziaren produktuaz dependitzen du.



3.11 irudia. Integratzaile soilaren sistema baten erantzuna sarrera maila motakoa delarik.

### 3.3.1.4. Ondorioak

Sistema integratzailea energia metatzen duen osagaia da. Geroago ikusiko den gisan, kontrol-begiztan sartzean, egoera iraunkorreko errorea (errore estatikoa) deuseztatzen edo apaltzen du, sarrera motaren arabera.

Hala ere, nahiz eta ez den gai hau liburu honetan sakontzen, jakin behar da egonkortasun erlatiboa kaltetzen duela. Erran nahi du begizta itxiko poloak ezegonkortasun-mugara hurbiltzen dituela integratzaileak, kate zuzenean kokatua delarik.

### 3.3.2. Atzerapen-denbora garbia

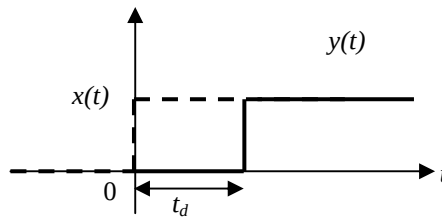
Sistema batzuetan, bereziki inertzia handia dutenetan, denbora batez irteerak ez du batere erreakzionatzen sarrera-aldaketa baten aitzinean.

Soilik  $t_d$  atzerapen-denbora duen sistema baten irteeraren adierazpena hala idazten da:

$$y(t) = x(t - t_d) \quad (3-34)$$

### 3.3.2.1. Mailarekiko erantzuna

3.12 irudian argiki agertzen da nola irteera sarreraren seinale bera den (hemen maila motakoa) baina  $t_d$  denbora batez atzeraturik.



3.12 irudia. Atzerapen-denboraren eragina irteeran.

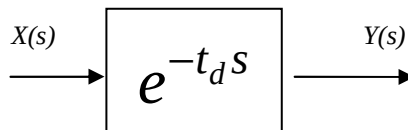
2.3.3 atalean agertzen den Laplace-ren propietateen artean, denbora-espazioko desplazamenduari dagokiona aplikatuz:

$$Y(s) = e^{-t_d s} X(s) \quad (3-35)$$

Eta, beraz, soilik atzerapen-denbora duen sistema baten transferentzia-funtzioa hala adierazten da:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-t_d s} \quad (3-36)$$

Bloke gisa, 3.13 irudian agertzen den bezala irudikatzen da beraz.



3.13 irudia. Soilik atzerapen-denbora duen sistema bat.

### 3.3.2.2. Ondorioak

Lehenago aipatu gisan, atzerapen-denbora inertzia termikoek, lasaiera mekanikoek eta halako fenomenoek sortzen dute.

Atzerapen-denborak begizta itxiko sistemaren egonkortasun-maila edo erreserba, hau da egonkortasun erlatiboa, murrizten du.

### 3.3.3. 1. ordenako sistemak

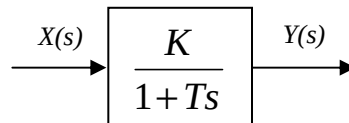
Lehen ordenako edo mailako sistemak, lehen mailako ekuazio diferentzial baten bidez adierazten diren sistemak dira:

$$a_0 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b x(t) \quad (3-37)$$

Ekuazio diferentzialaren bi aldeei Laplace-ren transformatua aplikatuz, hasierako balioak nulutzat hartuz, transferentzia-funtzio hau lortzen da.

$$G(s) = \frac{b}{a_0 s + a_1} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (3-38)$$

Bigarren adierazpena, 3.14 irudian erakusten dena eta  $K$  eta  $T$  parametroak dituen, 1. ordenako transferentzia-funtzio kanoniko edo tipikoa da. Problema fisiko asko halako transferentzia-funtzioekin adieraz daitezke. Problema batzuetan, transferentzia-funtzioak zero bat ere izan dezake, baina gehienetan ez dago zerorik.



3.14 irudia. Lehen ordenako transferentzia-funtzio tipikoa.

Interesgarria da hainbat sarrera-seinaleren aitzinean lehen ordenako sistema tipiko batek duen erantzuna ezagutzea. Ondorengo azpiataletan, besteak beste, 1. ordenako sistema tipiko batek pultsu, maila eta arrapala baten aitzinean duen erantzuna aztertuko da.

#### 3.3.3.1. Parametro karakteristikoak eta poloa

$K$  eta  $T$  parametroak 1. mailako sistemen parametro karakteristikoak dira, hurrenez hurren, *irabazi estatikoa* eta *denbora konstantea* deitzen dira. Zenbaki errealak dira, eta gehienetan positiboak. Aitzineko ekuazio diferentzialaren koefizienteen arabera:

- Irabazi estatikoa:  $K = \frac{b}{a_1}$
- Denbora konstantea:  $T = \frac{a_0}{a_1}$

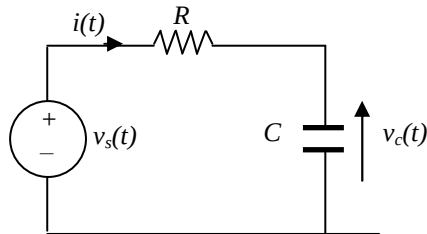
Lehen ordenako transferentzia-funtzio tipikotik, daukan polo bakarra erraz lortzen da:

$$s_1 = -\frac{1}{T} \quad (3-39)$$

Beraz, poloa soilik denbora konstantearen menpe dago. Geroago ikusiko dugun moduan, denbora konstantea sistemaren erregimen iragankorrari lotua da; eta irabazi estatikoa, aldiz, erregimen iraunkorrari.

### 3.3.3.2. Adibide elektrikoa

Lehen ordenako sistema adibide gisa, har dezagun zirkuitu elektriko bat. 3.15 irudian RC zirkuituaren eskema erakusten da. Sistemaren sarrera zirkuituari aplikatzen zaion  $v_s$  tentsioa da, eta irteera kondentsadorearen  $v_c$  tentsioa.



3.15 irudia. Lehen ordenako sistema elektriko baten eskema.

Mailen legea erabiliz, ekuazio diferentzial hau lortzen da:

$$v_s(t) = RC \frac{dv_c}{dt} + v_c(t) \quad (3-40)$$

Laplace-ren transformatua aplikatuz, hasierako balio nuluak hartuz, transferentzia-funtzio hau lortzen da:

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (3-41)$$

1. mailako transferentzia-funtzio kanonikoarekin konparatuz, dagozkion parametro karakteristikoak lortzen dira sistema elektrikoaren parametroen arabera:

$$\begin{cases} T = RC \\ K = 1 \end{cases} \quad (3-42)$$

### 3.3.3.3. Pultsuarehiko erantzuna

Demagun 3.14 irudian den sarrera pultsu motakoa dela. 2.2 taulan agertzen den bezala, pultsuaren Laplace-ren eremuko adierazpena hau da:

$$X(s) = 1 \quad (3-43)$$

Beraz, Laplace-ren eremuko erantzuna halakoa izanen da:

$$Y(s) = \frac{K}{1+Ts} X(s) = \frac{K}{1+Ts} \quad (3-44)$$

Laplace-ren funtzio nagusien taula erabiliz,  $Y(s)$ -ren adierazpenetik denboraren esparruko adierazpena lor daiteke. Aitzineko ekuazioa taularen 5. lerroko adierazpenera moldatuz:

$$\frac{K}{1+Ts} = \frac{K}{T} \frac{1}{\frac{1}{T} + s} \quad (3-45)$$

Laplace-ren transformatua lineala denez:

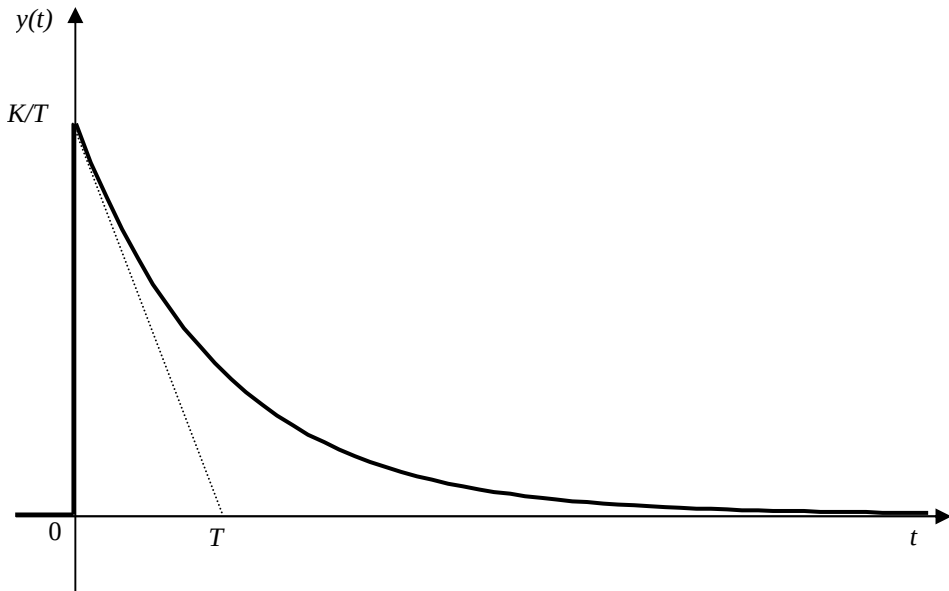
$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{T} \frac{1}{\frac{1}{T} + s} \right] = \frac{K}{T} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\frac{1}{T} + s} \right] \quad (3-46)$$

Eta, beraz, 2.2 taularen 5. lerrotik:

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (3-47)$$

3.16 irudian denboraren eremuko erantzun horren kurba erakusten da.  $T$  denbora konstantea erraz aurki daiteke kurba horretatik. Hasierako uneko tangenteak denboraren  $t$  ardatza  $T$  denbora konstantearen balioan moztu du.





3.16 irudia. 1. ordenako sistema tipiko baten pultsu batekiko erantzuna.

Hasierako unean eten bat gertatzen da. Problema errealean, pultsu funtzioa (soilik une batean balio infinitua duena) ez da existitzen, eta eten hori ez da agertzen.

Errazki egiaztatu daiteke  $Y(s)$ -ren adierazpenarekin eta Laplace-ren transformatuaren propietate eta teoremekin, aurkituriko denboraren eremuko kurbako ezaugarriak zuzenak direla. Horrek du interesgarri bihurtzen transferentzia-funtzioaren erabilera.

Adibidez, 2.3.4.2 ataleko hasierako balioaren teorema erabiliz, erantzunaren hasierako balioa lortzen da:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \frac{K}{T} \quad (3-48)$$

Aitzineko ataleko bukaerako balioaren teorema erabiliz, erantzunaren bukaerako balioa lortzen da:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0 \quad (3-49)$$

Kontuan izan behar da teorema hau soilik erabil daitekeela sistema egonkorra bada, beraz, kasu honetan (3-39) ekuazioko  $s_1$  polo erreala negatiboa bada, erran nahi da,  $T$  denbora konstantea positiboa bada.

### 3.3.3.4. Mailarekiko erantzuna

2.2 taulan agertzen den bezala, mailaren Laplace-ren eremuko adierazpena hau da:

$$X(s) = \frac{A}{s} \quad (3-50)$$

non  $A$  mailaren anplitudea den. Beraz, Laplace-ren eremuko erantzunaren adierazpena hau da:

$$Y(s) = \frac{K}{1+Ts} X(s) = \frac{K}{1+Ts} \frac{A}{s} \quad (3-51)$$

Laplace-ren funtzio nagusien taula erabiliz,  $Y(s)$ -ren adierazpenetik denboraren esparruko adierazpena lor daiteke. Aitzineko ekuazioa taularen 7. lerroko adierazpenera moldatuz:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K}{1+Ts} \frac{A}{s} \right] = \frac{KA}{T} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s \left( \frac{1}{T} + s \right)} \right] \quad (3-52)$$

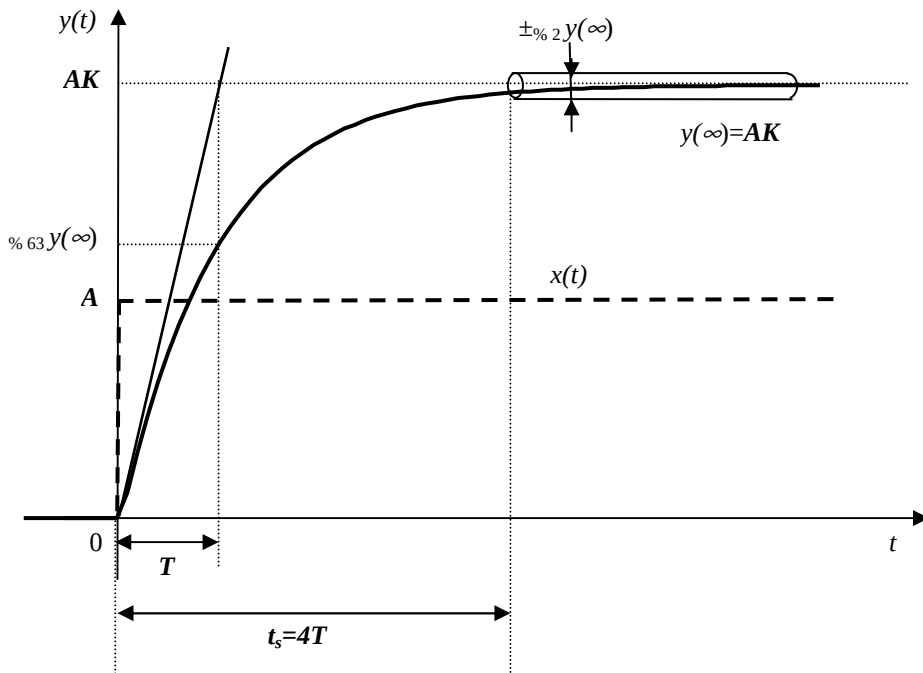
eta beraz:

$$y(t) = KA \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (3-53)$$

3.17 irudian denboraren eremuko erantzun horren kurba erakusten da. Kurba horretan ere,  $T$  denbora konstantea erraz neur daiteke. Irudian agertzen denez, hasierako uneko tangentea eta bukaerako balioaren asintota  $T$  denbora-unean gurutzatzen dira. Analitikoki ere emaitza hori erraz lor daiteke. Aitzineko ekuaziotik,  $y(t)$ -ren deribatuak hasierako unean duen balioa kalkulatz:

$$\frac{dy(0)}{dt} = \frac{KA}{T} \quad (3-54)$$

Hori da, beraz, kurbak duen malda maila gertatzen den unean, erran nahi da tangentearen malda. Hortik argiki ondorioztatzen da  $t=T$  unean tangenteak  $KA$  balioa izanen duela.



3.17 irudia. 1. ordenako sistema tipiko baten maila batekiko erantzuna.

Irudian ohar gaitezke ere nola  $K$  irabazi estatikoa erantzunaren bukaerako balioari lotua den. Haren izenak dioen bezala,  $K$ , egoera iraunkorra denean sistemak duen irabazia da. Egoera iraunkorra  $t$  infinitura doan neurrian lortzen da. Irudian, argiki ikusten da nola egoera horretako irteeraren balio  $KA$  den. Sarrerako balioa egoera iraunkorrean  $A$  da. Beraz, transferentzia-funtzioaren irabazi estatikoa, egoera iraunkorrean den irteeraren eta sarreraren balioaren arteko zatiketa besterik ez da.

Batzuetan irteerak eta sarrerak ez dute 0 balio, maila gertatzen den unean. Or har, irabazi estatikoa, maila gertatzen denetik egoera iraunkorra arteko irteeraren aldaketa zati sarreraren aldaketa da.  $t_0$  maila gertatzen den unea izanik:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(\infty) - y(t_0)}{x(\infty) - x(t_0)} \quad (3-55)$$

Kasu honetan  $t_0=0$  s da. Definizio honek kasu guzietarako balio du, sarrerako eta irteerako seinaleek maila gertatzen den unean edozein balio izanik ere. Gainera, definizio honek edozein mailatako edo ordenatako transferentzia-funtzioentzat balio du.

Bestalde, erraz frogatu daiteke transferentzia-funtzio baten irabazi estatikoa  $s=0$  jarritz lortzen dela.  $G(s)$  sistema edozein motatakoa izanik ere, haren irteera maila batekiko honela idazten da:

$$Y(s) = G(s) \frac{A}{s} \quad (3-56)$$

Bukaerako teorema erabiliz, irteeraren bukaerako balioa ezagutu daiteke:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)A \quad (3-57)$$

Eta, beraz, irabazi estatikoa (3-55) ekuazioan adierazi gisan kalkulatzuz:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(\infty) - y(t_0)}{x(\infty) - x(t_0)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)A - 0}{A} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \quad (3-58)$$

3.1.5.1 atalean agertzen den definizioa aplikatuz, 3.17 irudian, % 2ko eta % 5eko egonkortze-denborak kalkula daitezke. Egonkortze-denbora horiek sistemaren denbora konstanteari lotuak dira.

Kalkula dezagun % 2ko egonkortze-denbora. Irteera-bukaerako balioaren % 98ra helduko den unearekin lotua da denbora hori:

$$y(t_s) = KA \left( 1 - e^{-\frac{t_s}{T}} \right) = 0,98KA \quad (3-59)$$

Beraz:

$$1 - e^{-\frac{t_s}{T}} = 0,98 \Rightarrow e^{-\frac{t_s}{T}} = 0,02 \quad (3-60)$$

Orduan:

$$-\frac{t_s}{T} = \ln(0,02) \Rightarrow t_s = -T \ln(0,02) \quad (3-61)$$

Bukatzeko:

$$t_s \approx 4T \quad (3-62)$$

Era berean, %5-eko egonkortze-denbora errazki  $T$ -ri lotu dakioko:

$$t_s (\%5) \approx 3T \quad (3-63)$$

Interesgarria da ere  $T$  denbora pasatu ondoren irteerak duen balioa ezagutzea:

$$y(T) = KA(1 - e^{-1}) \approx 0,63KA \quad (3-64)$$

Beraz, lehen ordenako sistema tipiko bati maila-seinale bat aplikatzen bazaio, maila gertatu denetik  $T$  denbora pasatu ondoren, sistemaren irteera-bukaerako balioaren % 63ra heldu da.

1. ordenako sistema baten erantzuna ezagutzen bada, eta hortik  $T$  edo  $t_s$  neurtu nahi badira, garrantzitsua da denbora horiek neurtzea maila gertatu den unetik. 3.17 irudian  $t=0$  unean gertatzen da maila, baina orokorrean beranduago ere gerta daiteke.

Aitzineko atalean aipatu gisan, errazki egiazta daiteke  $Y(s)$ -ren adierazpenarekin eta Laplace-ren transformatuaren propietate eta teoremeekin, aurkituriko denboraren eremuko kurbako ezaugarriak zuzenak direla. Adibidez, 2.3.4.2 ataleko hasierako balioaren teorema erabiliz, erantzunaren hasierako balioa lortzen da:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0 \quad (3-65)$$

Sistema egonkorra izanik ( $T>0$ ) bukaerako balioa 2.3.4.1 ataleko teoremari esker aurki daiteke:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = AK \quad (3-66)$$

Gainera, gorago aipatu gisan,  $K$  transferentzia-funtzioan  $s=0$  jartzean lortzen da, eta  $T$  denbora konstantea poloaren adierazpenetik:

$$s_1 = -\frac{1}{T} \Rightarrow T = -\frac{1}{s_1} \quad (3-67)$$

Adierazpen horren bidez, erraz ohar gaitezke sistemaren azkartasuna poloaren kokapenaren arabera dela.  $T$  txikiagoa den neurrian, egonkortze-denbora txikiagoa da, eta, beraz, sistemak azkarrago erantzuten du. Denbora berean, ikusten da nola poloa negatiboagoa den. Beraz Laplace-ren planoan, poloa  $1/s$  ardatz irudikaritik ezkerrera izan, eta sistema azkarragoa da.

### 3.3.3.5. Arrapalarekiko erantzuna

Arrapalaren Laplace-ren eremuko adierazpena hau da:

$$X(s) = \frac{A}{s^2} \quad (3-68)$$

Beraz,  $Y(s)$  irteeraren adierazpena:

$$Y(s) = \frac{K}{1+Ts} X(s) = \frac{K}{1+Ts} \frac{A}{s^2} \quad (3-69)$$

Lehenago egin den gisan, denboraren eremuko irteeraren adierazpena lortzeko, 2.2 taula erabiltzen da taula horretan ez da  $Y(s)$ -ren adierazpenaren egituraren antzekorik. Hori

gertatzen delarik, frakzio arrazionalak taulan agertzen diren frakzio sinpleagotan deskonposatzen dira, A eranskinean agertzen den modura. Kasu honetan, eranskinean erakusten den metodoari jarraiki, honela deskonposa daiteke  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{K}{1+Ts} \frac{A}{s^2} = \frac{KA}{T} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s^2} = \frac{KA}{T} \left( \frac{A_1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} \right) \quad (3-70)$$

$A_1$ ,  $B_1$  eta  $B_2$  parametroen balioa lortzeko, zenbait metodo daude. Aukera bat frakzio guztiak izendatzaile berean ezarri eta gehiketa eginez lortzen den frakzioaren zenbatzailea jatorrizkoarekin konparatzea da:

$$Y(s) = \frac{KA}{T} \left( \frac{A_1 s^2}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s^2} + \frac{B_1 \left(s + \frac{1}{T}\right)s}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s^2} + \frac{B_2 \left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s^2} \right) \quad (3-71)$$

Beraz:

$$Y(s) = \frac{KA}{T} \left( \frac{(A_1 + B_1)s^2 + \left(\frac{B_1}{T} + B_2\right)s + \frac{B_2}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)s^2} \right) \quad (3-72)$$

Jatorrizko frakzioaren zenbatzailearekin konparatuz, ekuazio-sistema hau lortzen da:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ \frac{B_1}{T} + B_2 = 0 \\ \frac{B_2}{T} = 1 \end{cases} \quad (3-73)$$

Eta hortik, nahiko erraz, ezezagun diren koefizienteen balioak:

$$\begin{cases} B_2 = T \\ B_1 = -T^2 \\ A_1 = T^2 \end{cases} \quad (3-74)$$

Beraz, (3-70) ekuazioan  $A_1$ ,  $B_1$  eta  $B_2$ -ren adierazpenak ordezkatzuz:

$$Y(s) = KA \left( \frac{T}{s + \frac{1}{T}} - \frac{T}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \quad (3-75)$$

2.2 taulari esker, eta Laplace-ren transformatua lineala dela kontuan hartuz:

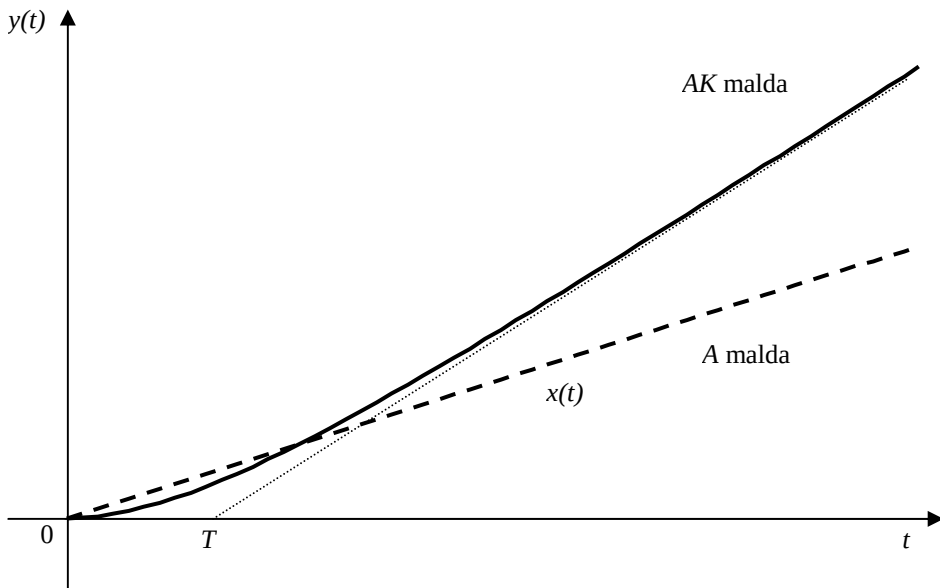
$$y(t) = KA \left( Te^{\frac{t}{T}} - T + t \right) \quad (3-76)$$

3.18 irudian denborarekiko adierazpen hori erakusten da. Bi zati bezala ditu. Denbora infinitura doan neurrian, esponontzialaren eragina desagertzen da, eta, beraz, kurba zuzen bat bihurtzen da:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \approx KA(t - T) \quad (3-77)$$

Hasierako tangentea ere erraz lor daiteke  $y(t)$ -ren adierazpena deribatuz eta 0-an duen balioa lortuz:

$$\frac{dy(t)}{dt}(0) = 0 \quad (3-78)$$



3.18 irudia. 1. ordenako sistema baten erantzuna arrapala batetik.

Laplace-ren transformatuaren teoremen bidez, aitzineko irudiko kurbaren hasierako eta bukaerako balioa erraz lor daitezke:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0 \quad (3-79)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \infty \quad (3-80)$$

### 3.3.4. 2. ordenako sistemak

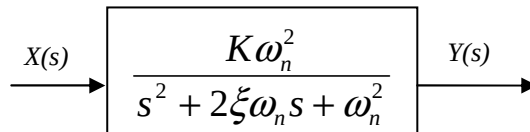
Bigarren ordenako sistemak, bigarren mailako ekuazio diferentzial baten bidez adierazten diren sistemak dira:

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = bx(t) \quad (3-81)$$

Ekuazio diferentzialaren bi aldeei Laplace-ren transformatua aplikatuz eta hasierako balioak zero izanik, transferentzia-funtzio hau lortzen da:

$$G(s) = \frac{b}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-82)$$

Ekuazio horren bigarren adierazpena, 3.19 irudian erakusten da.  $K$ ,  $\xi$  eta  $\omega_n$  parametroak ditu eta 2. ordenako transferentzia-funtzio kanoniko edo tipikoa da. 1. ordenako sistema tipikoen gisan, problema fisiko asko halako transferentzia-funtzioekin adieraz daitezke. Problema batzuetan, transferentzia-funtzioak zero batzuk ere izan ditzake (gehienez 2), baina gehienetan ez dago zerorik.



3.19 irudia. Bigarren ordenako transferentzia-funtzio tipikoa.

#### 3.3.4.1. Parametro karakteristikoak

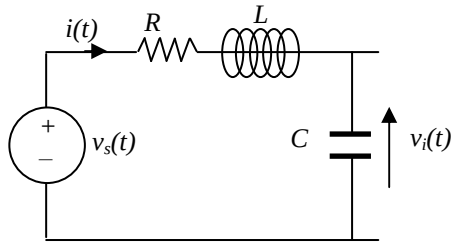
$K$ ,  $\xi$  eta  $\omega_n$  parametroak 2. mailako sistemen parametro karakteristikoak dira, hurrenez hurren, *irabazi estatikoa*, *moteltze faktorea* eta *maiztasun* edo *pultsazio naturala*. Hiru parametro horiek zenbaki errealek dira eta gehienetan positiboak dira.  $\omega_n$  maiztasun naturala deitu ohi da, nahiz eta egiazki pultsazio bat den eta ez maiztasun bat, hau da, rad/s-a da haren unitatea eta ez Hz-a.

Geroago ikusiko den gisan, parametro horiek garrantzi handia dute 2. ordenako sistema baten azterketan. Horregatik, 2. ordenako transferentzia-funtzioa haien arabera adierazten da.



### 3.3.4.2. Adibide elektrikoa

Har dezagun 2.2.2 atalean aztertu genuen eta 3.20 irudian agertzen den zirkuitu elektrikoa. Demagun sistema elektrikoaren sarrera  $v_s$  tentsioa dela eta irteera  $v_c$  kondentsadorearen tentsioa.



3.20 irudia. 2. ordenako sistema den RLC zirkuitu elektriko bat.

Mailen legea erabiliz, sistema elektrikoari dagokion ekuazio diferentziala lortzen da:

$$v_s = RC \frac{dv_c}{dt} + LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + v_c \quad (3-83)$$

Laplace-ren transformatua aplikatuz eta hasierako balioak zero izanik:

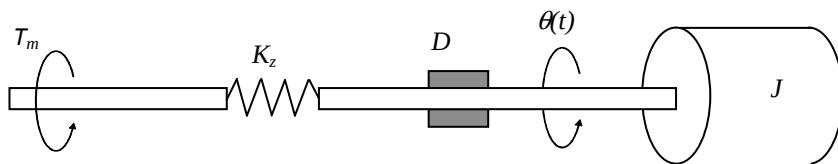
$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V_s(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + R/L s + 1/LC} \quad (3-84)$$

Eta 2. ordenako transferentzia-funtzio tipikoarekin alderatuz, hiru parametro karakteristikoaren adierazpena lortzen da, parametro elektrikoaren arabera:

$$\begin{cases} K = 1 \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases} \quad (3-85)$$

### 3.3.4.3. Adibide mekanikoa

Azter dezagun orain sistema mekaniko bat. 3.21 irudiak sistema horri dagokion eskema erakusten du. Sistemaren sarrera  $T_m$  motor batek sortutiko indar-parea da, eta irteera  $\theta$  ardatzaren eskuineko aldearen posizio angeluarra.



3.21 irudia. 2. ordenako sistema mekaniko errotazional bat.

Newton-en legea aplikatuz:

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = T_m - T_d \quad (3-86)$$

non  $T_d$ , ardatzari dagokion indar-parea, erresistibo gisa ikus daitekeen:

$$T_d = K_z \theta(t) + D \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3-87)$$

$K_z$  eta  $D$  ardatzaren zurruntasun- eta moteltze-koefizienteak dira. Aitzineko bi adierazpenak batuz eta Laplace-ren transformatua erabiliz (hasierako balio nuluekin), sistemaren transferentzia-funtzioa lortzen da:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1}{J}}{s^2 + \frac{D}{J}s + \frac{K_z}{J}} \quad (3-88)$$

2. ordenako transferentzia-funtzio tipikoarekin alderatuz, parametro karakteristikoak sistema mekanikoaren parametroen arabera adieraz daitezke:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{K_z} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{K_z}{J}} \\ \xi = \frac{D}{2\sqrt{K_z J}} \end{cases} \quad (3-89)$$

### 3.3.4.4. Mailarekiko erantzuna

A anplitudea duen maila motako sarrera baten ondorioz, 2. ordenako sistema tipiko baten erantzuna hau izanen da:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{AK\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} \quad (3-90)$$

Erantzuna 2. ordenako sistemaren polinomio karakteristikoaren (izendatzailean den polinomioaren) erroen naturaren, eta beraz diskriminatzailearen, arabera da:

$$\Delta = 4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\xi^2 - 1) \quad (3-91)$$

Argiki ikusten da diskriminatzailearen zeinua  $x$ -ren balioaren menpe dagoela. Hiru aukera dira:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \xi^2 - 1 > 0 \Rightarrow \xi > 1 \\ \Delta = 0 \Rightarrow \xi^2 - 1 = 0 \Rightarrow \xi = 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow \xi^2 - 1 < 0 \Rightarrow \xi < 1 \end{cases} \quad (3-92)$$

Lehen bi kasuetan, polinomio karakteristikoaren erroak errealak dira eta sistemaren irteeraren erregimen iragankorra ez da oszilakorra. Bigarren kasua ( $\xi=1$ ), lehenaren muga edo kasu partikularizat hardaiteke.

Hirugarren kasuan, berriz, polinomio karakteristikoaren erroak konplexuak dira, eta sistemaren irteeraren erregimen iragankorra oszilakorra da.

#### 3.3.4.4.1. Erregimen ez-oszilakorra

$\xi > 1$  baldin bada, polinomio karakteristikoak 2 erro erreal hauek ditu, 2. ordenako sistemaren poloak direnak ere:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (3-93)$$

2. ordenako sistema, bi 1. ordenako sistema gisa idatz daiteke:

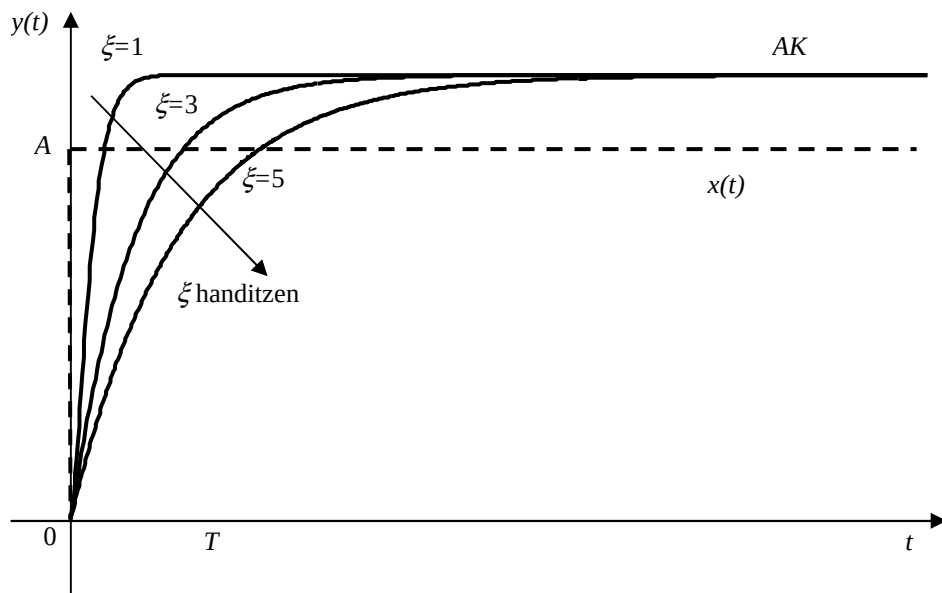
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{K\omega_n^2}{s_1s_2(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (3-94)$$

non  $T_1 = -\frac{1}{s_1}$  eta  $T_2 = -\frac{1}{s_2}$ . Laplace-ren taula erabiliz, sistemaren erantzunaren adierazpena lor daiteke:

$$y(t) = KA \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (3-95)$$

Gogoratu adierazpen horrek (aitzinekoek bezala) soilik  $t \geq 0$  delarik balio duela. 3.22 irudian maila batekiko halako sistema batek duen erantzuna erakusten da  $\xi$ -ren balio desberdinentzat. Argiki ikusten da  $\xi$  handiagoa den neurrian, erantzuna motelduagoa eta, beraz, mantsoagoa dela.

Irudi horren edo dagokion funtzioaren azterketa simple batek erakusten du denbora infinitura doan neurrian AK-n asintota bat dela, baita tangente nulu bat hasieran ere. Gainera,  $\xi$  handiagoa den neurrian, bi esponentzialak beheraka polikiago doaz. Kasu horretan,  $y(t)$  polikiago hurbiltzen da haren asintotatik.



3.22 irudia. 2. ordenako sistema tipiko baten erantzuna maila batekiko  $\xi \geq 1$  delarik.

### 3.3.4.4.2. Erregimen oszilakorra

$\xi < 1$  baldin bada, sistemak bi polo konplexu konjugatu ditu:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d \quad (3-96)$$

non:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (3-97)$$

$\omega_d$  oszilazio-maiztasuna deitzen da, nahiz eta  $\omega_n$  bezala, rad/s-tan adierazten den eta ez Hz-tan. Haren adierazpena aztertuz, ohar gaitezke  $\omega_d$  eta  $\omega_n$  berdinak direla  $\xi$  moteltze-faktorea 0 delarik, erran nahi da moteltzerik ez delarik.

Laplace-ren transformatuaren taularen bidez sistemaren erantzunaren adierazpena lor daiteke:

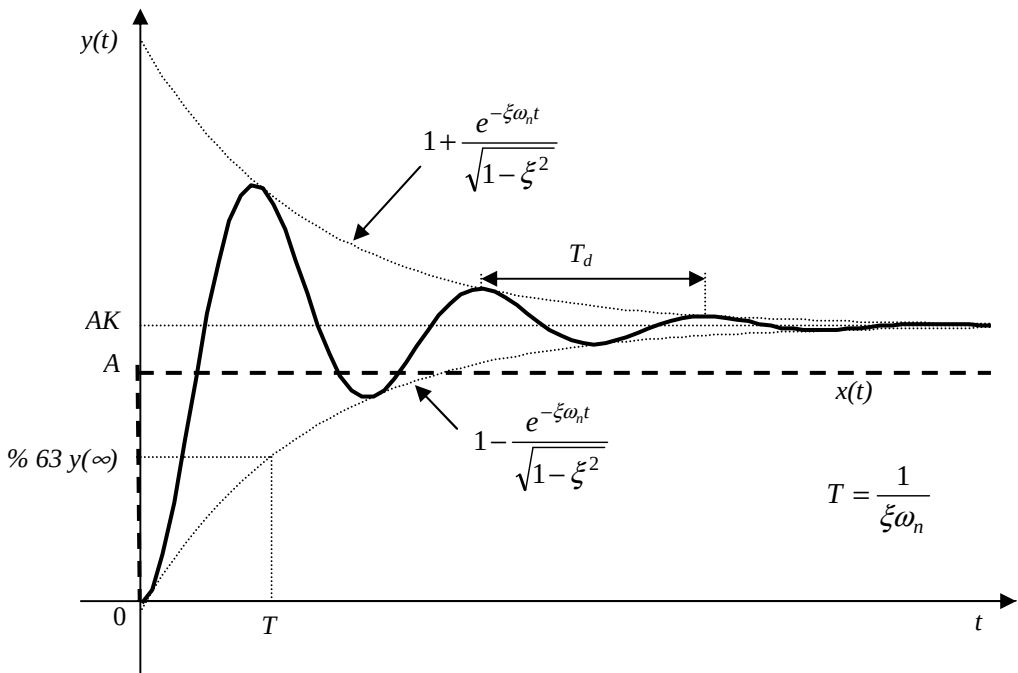
$$y(t) = KA \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \Phi) \right] \quad (3-98)$$

non:

$$\Phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (3-99)$$

Adierazpen hori bi seinaleren diferentzia da. Bata  $KA$  anplitudeko maila da, eta bestea sinusoide baten eta esponentzial baten arteko biderketa da. Sinusoidearen maiztasuna,  $\omega_d$  oszilazio-maiztasunari da. Horregatik du izen hori  $\omega_d$  parametroak. Denbora aurrera doan heinean, esponentziala zerora doa. Beraz, lortzen den erantzuna oszilakor moteldua da, 3.23 irudian agertzen den bezala.

$y(t)$  kurbak asintota bat du  $AK$ -n. Denbora infinitura doan neurrian, erantzuna balio horretara hurbiltzen da. Erregimen iragankorra *oszilakor moteldua* dela erraten da.



3.23 irudia. 2. ordenako sistema tipiko baten erantzuna maila batekiko  $\xi < 1$  delarik.

Erantzunaren ezaugarriak parametro karakteristikoaren balioei lotuak dira. Oso interesgarria da biak lotzea. Hala, parametro karakteristikoak ezaguturik, erantzuna nolakoa den jakin

daiteke. Beste zentzuan, erantzunean neurketak eginez, parametro karakteristikoaren balioa lor daiteke, eta horrela, bide batez, sistemaren transferentzia-funtzioaren hurbilketa bat.

$\omega_d$  oszilazio-maiztasuna nahiko erraz kalkula daiteke, sistema ez bada motelduegia. Nahikoa da lehen eta bigarren gaintitzeen artean pasatu den  $T_d$  denbora neurtzea. Denbora hori ezaguturik:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (3-100)$$

Sistema motelduagoa den neurrian, soilik gaintitze argi bakarra izatea posible da. Orduan,  $\omega_d$  beste modu batera kalkula daiteke. Gehienezko gaintitzea, irteeraren deribatua nulua izanen den unean gertatuko da, hau da:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \Phi) - \frac{\omega_d e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_d t + \Phi) = 0 \quad (3-101)$$

$\omega_d$ -ren eta  $\Phi$ -ren adierazpenak kontuan hartuz, eta kalkulu trigonometrikoen bidez, adierazpen hori sinplifika daiteke:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t) = 0 \quad (3-102)$$

Ekuazio horrek bi motatako soluzioak ditu:

$$\begin{cases} t = \infty \\ t = \frac{n\pi}{\omega_d} \end{cases} \quad (3-103)$$

non  $n=1, 3, 5, 7...$  zenbaki osoa, positiboa eta bakoitia den.  $y(t)$ -ren lehen gaintitzea, sistema moteldua denez, gehienezko gaintitzea da, eta  $n=1$ -entzat lortzen da. Beraz puntako denbora  $\omega_d$ -ren arabera adieraz dateke:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3-104)$$

Beraz, erantzuna oszilakorra baina oso moteldua delarik, adierazpen hau erabil daiteke, behin  $t_p$  neurturik,  $\omega_d$  kalkulatzeko.

Gehienezko gainditzea, honela neurtzen da:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = \frac{KA \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_p + \Phi) \right] - KA}{KA} \quad (3-105)$$

$t_p$  ordezkatzuz:

$$M_p = \frac{e^{-\xi \omega_n \frac{\pi}{\omega_d \sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \Phi\right) = \frac{e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) \quad (3-106)$$

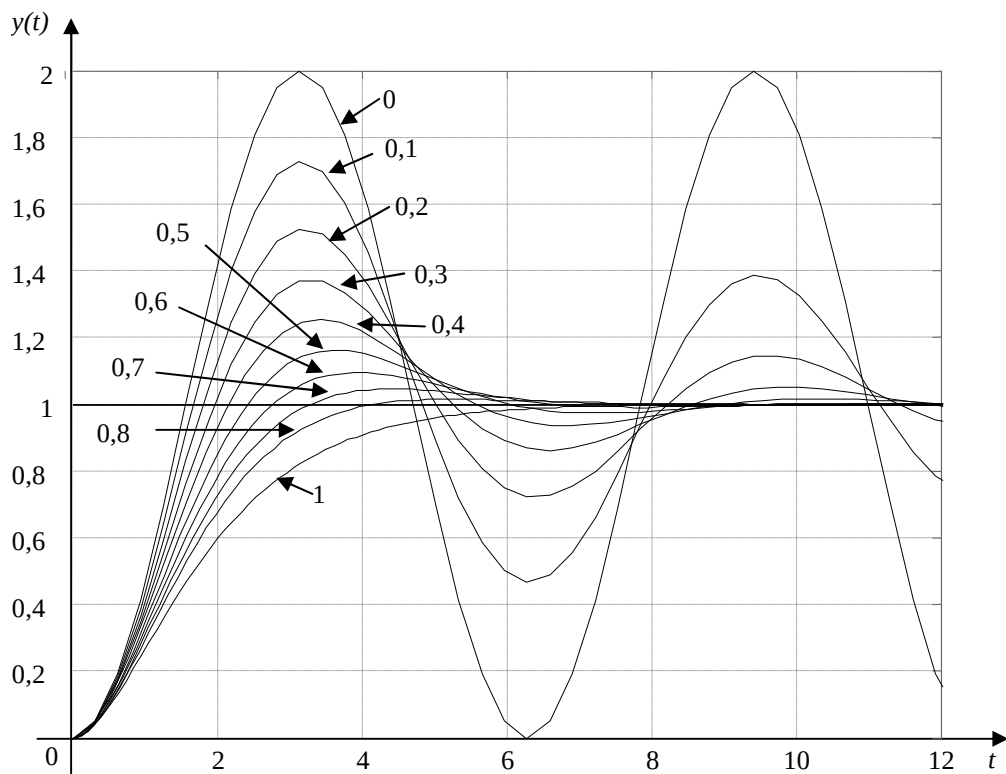
Trigonometria-legeak erabiliz, adierazpen hori sinplifika daiteke, gehienezko gainditzearen adierazpen hau aurkitzeko:

$$M_p = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3-107)$$

Eta ehunekotan:

$$M_p = 100e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3-108)$$

Ikusten da nola gehienezko gainditzea soilik  $\xi$  moteltze-faktorearen menpe dagoen.  $\xi$  0 delarik,  $M_p = 100\%$  da, eta  $\xi$ -ren balioa handitzen den neurrian,  $M_p$  txikitzen da, hau da, sistema motelagoa bihurtzen da,  $\xi$ -k 1 balio izan arte. Balio hori duelarik,  $M_p$  0 da eta, beraz, ez da oszilazio gehiagorik. 3.24 irudian hori argiki agertzen da.



3.24 irudia. 2. ordenako sistema tipiko baten erantzuna maila unitario batekiko  $\xi$  moteltze faktorearen balio desberdinen arabera.

Egonkortze-denbora ez da 1. ordenako sistema baten kasuan bezain erraz kalkulatzeko ahal. Hala ere, hurbilketa bat egin daiteke modu errazean. 3.23 irudian agertzen den gisan, erantzuna esponentzialak marrazten duen mugen barnean da. Nahiz eta zehazki ez hala izan, egonkortze-denbora seinale esponentzial horrek markatzen duela kontsidera daiteke. Kasu horretan,  $\xi\omega_n$  produktua 1. ordenako sistemetako denbora konstantearen alderantzizkoa litzateke:

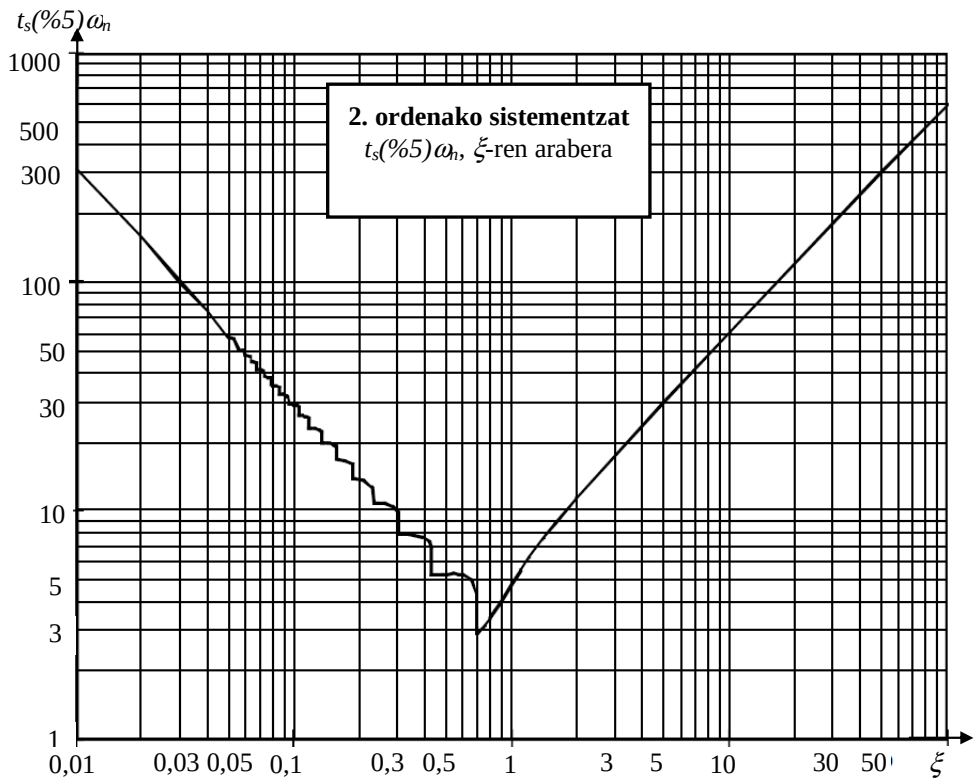
$$T = \frac{1}{\xi\omega_n} \quad (3-109)$$

Beraz, 2. ordenako sistema oszilakor baten egonkortze-denbora honela hurbil daiteke:

$$\begin{cases} t_s(\%2) \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \\ t_s(\%5) \approx \frac{3}{\xi\omega_n} \end{cases} \quad (3-110)$$



Egonkortze-denbora zehazkiago ezagutzeko, 3.25 irudian agertzen den kurba erabil daiteke. Moteltze-faktorearen balioa ezagutuz,  $t_s(\%5)\omega_n$  produktuaren balioa ezagutu daiteke irudi horretan. Horren arabera,  $\omega_n$  ezagutuz,  $t_s(\%5)$  ezagutu daiteke. Edo lortu nahi den  $t_s(\%5)$ -a adierazten bada kontrol-espezifikazioetan, horretarako  $\omega_n$ -ek zein balio izan behar duen aurki daiteke.



3.25 irudia. 2. ordenako sistema baten % 5eko egonkortze-denbora moteltze-faktorearen arabera.

### 3.3.4.5. Poloen kokapenaren eta erantzunaren ezaugarrien arteko harremana

Aitzineko ataletan, 2. ordenako sistema tipiko baten maila batekiko erantzunaren ezaugarrien eta parametro karakteristikoaren arteko harremana aztertuko da. 3.19 irudian agertzen den bezala, parametro karakteristikoak polinomio karakteristikoaren koefizienteetara lotuak dira, eta, beraz, sistemaren poloei.

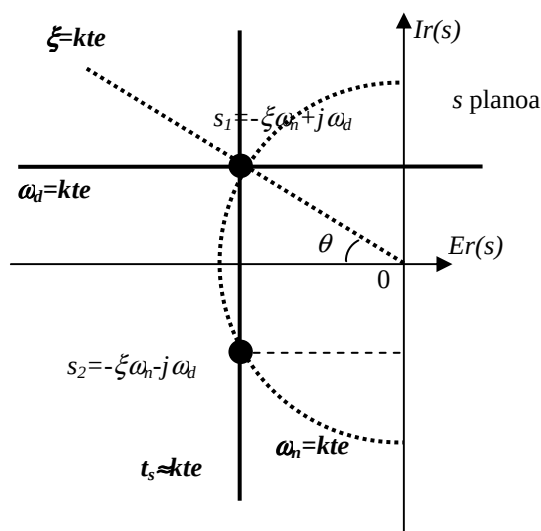
2. ordenako sistema oszilakor baten poloak konplexu konjugatuak dira, (3-96) ekuazioan agertzen den bezala. Jakin behar da, edozein ordenatako sistema baten polo bat konplexua bada, haren konjugatua ere sistema horren poloa dela. Polo-pare konplexu

konjugatuak egiten dute sistema bat oszilakor, eta ondoko ekuazioan agertzen den gisan, parametro karakteristikoak lotuak dira:

$$\begin{cases} s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n + j\omega_d \\ s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n - j\omega_d \end{cases} \quad (3-111)$$

Adierazpen horien arabera, ikus daiteke poloen zati irudikaria oszilazioen maiztasuna dela. Beraz, 3.26 irudian agertzen den bezala, lerro horizontal berean kokatuak diren poloek, oszilazio-maiztasun bera duen erantzuna ematen dute. Zati irudikariaren balio handiagoa den neurrian, oszilazioen maiztasuna handiagoa da. Zati irudikariaren balioa minimoa delarik, hau da, 0, oszilaziorik ez da. Lerro horizontal hori ardatz erreala da, eta lehenago ikusi gisan, polo errealek ez dute oszilaziorik eragiten sistemaren erantzunean.

Bestalde, aitzineko atalean ikusi dugu nola 2. ordenako sistema baten  $t_s$  egonkortze-denbora  $\xi\omega_n$  produktuaren arabera adieraz daitekeen hurbilketa bat eginez.  $\xi\omega_n$  poloen zati erreala da. Beraz, lerro bertikal berean diren poloek antzeko egonkortze-denbora eraginen dute. Lerro hori ezkererago den neurrian, egonkortze-denbora txikiagoa izanen da, (3-110) ekuazioan agertzen den bezala. Beste zentzuan, ardatz irudikaritik hurbilago, eta erantzun mantoagoa. Zati erreala 0 bada, poloak ardatz irudikariaren gainean dira, eta sistema hain da mantoa ezen ezegonkortasunaren mugan den.



3.26 irudia. 2. ordenako sistema tipiko baten parametro karakteristikoen eta poloen kokapenaren arteko harremana.

3.26 irudian,  $\theta$  angelua kalkulatzuz, soilik moteltze-faktoreari lotua dela ikus daiteke:

$$\tan \theta = \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi \omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad (3-112)$$

Beraz:

$$\xi^2 (\tan \theta)^2 = 1 - \xi^2 \Rightarrow \xi^2 (1 + (\tan \theta)^2) = 1 \Rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \theta)^2}} \quad (3-113)$$

Adierazpen horretan ikusten da nola  $\theta$  ezagutuz,  $\xi$  aurki daitekeen. Beste zentzuan,  $\xi$  ezagutuz  $\theta$  aurki daiteke.  $\theta$  bera duen lerro bateko poloak moteltze-faktore berari lotuak dira.  $\theta$  handiagoa den neurrian, sistema oszilakorragoa da. Zentzu horretan,  $\theta 90^\circ$  bada,  $\xi 0$  da, egonkortze-mugan gaude eta maila batekiko sistemaren erantzuna beti oszilatzen dabil, anplitude berarekin. Hortik gora, sistema ez da egonkorra eta oszilazioak gero eta handiagoak dira. Beste zentzuan,  $\theta 0^\circ$  delarik,  $\xi 1$  bihurtzen da eta erantzunean ez dago oszilazio gehiagorik.

Poloen modulua maiztasun naturalari lotua dela erraz froga daiteke:

$$|s_{1,2}| = \sqrt{(\xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} = \omega_n \quad (3-114)$$

Beraz, poloen modulua handiagoa den neurrian, maiztasun naturala ere handiagoa da.  $\xi 0$  delarik, maiztasun naturala eta oszilazio-maiztasuna berdinak dira. Lehenago ikusi moduan, kasu horretan, ezegonkortasunaren mugan gaude, eta maila batekiko erantzuna beti oszilatzen ari da,  $\omega_d = \omega_n$  maiztasunean anplitude berarekin.

Poloen kokapenak parametro karakteristikoetan eta, beraz, erantzunaren ezaugarrietan eragin zuzena du, atal honetan aztertu gisan. Horregatik, Kontrolean, sistemen ezaugarriak aztertze eta kontrol espezifikazioak definitze, poloen kokapenari begiratzen zaio.

### 3.3.5. Ordena handiagoko sistemak eta haien sinplifikazioa

2. ordena baino handiagoa den sistema bat, oro har, integratzailea, polo eta zero erreal eta konplexu konjugatuen arabera adieraz daiteke:

$$G(s) = \frac{k}{s^\alpha} \frac{\prod_k (s - z_k) \prod_l (-\xi_l \omega_{n,l} \pm j \omega_{n,l} \sqrt{1 - \xi_l^2})}{\prod_i (s - s_i) \prod_j (-\xi_j \omega_{n,j} \pm j \omega_{n,j} \sqrt{1 - \xi_j^2})} \quad (3-115)$$

Sistemaren erantzuna kalkulatu nahi bada,  $G(s)$  frakzio sinpletan deskonposatu behar da:

$$G(s) = \sum_i G_i(s) \quad (3-116)$$

non  $G_i(s)$ -ak lehen eta bigarren mailako sistemen transferentzia-funtzioak diren.

Sistema osoaren erantzuna frakzio simple bakoitzetik lorturikoen gainjartzea da:

$$y(t) = \sum_i y_i(t) \quad (3-117)$$

non  $y_i(t)$   $G_i(s)$ -ren erantzuna den.

Azterketa sinplifikatzeko, har dezagun adibide nahiko xume bat. Lor dezagun ondoko  $G(s)$  transferentzia-funtzioaren maila unitario batekiko erantzuna:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(1+s)(1+5s)} = \frac{0,2}{(1+s)(0,2+s)} \quad (3-118)$$

Beraz,  $G(s)$ -k bi polo ditu:  $\{-1; -0,2\}$ . Frakzio sinpletan deskonposatuz:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{0,25}{0,2+s} - \frac{0,25}{1+s} \quad (3-119)$$

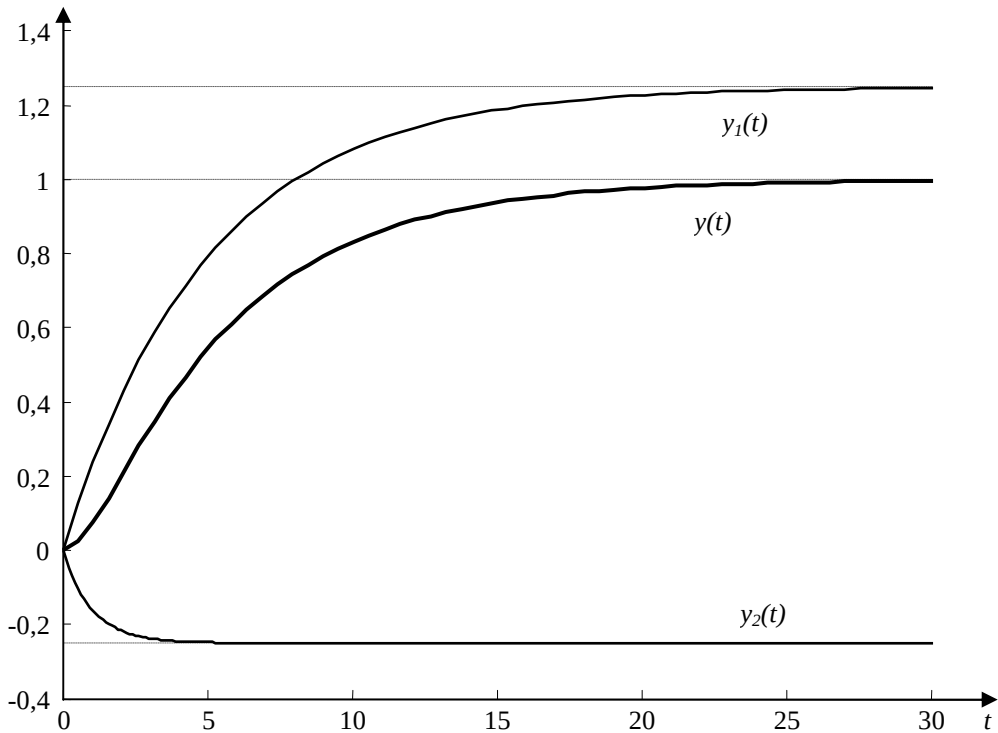
Sarrera-maila unitarioa denez:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{0,25}{(0,2+s)s} - \frac{0,25}{(1+s)s} \quad (3-120)$$

Eta, beraz, Laplace-ren transformatuen taula erabiliz, denboraren eremuko erantzuna lortzen da:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 1,25(1 - e^{-0,2t}) - 0,25(1 - e^{-t}) \quad (3-121)$$

3.27 irudian erantzun horren zati edo modu desberdinak erakusten dira.  $y_2(t)$  nahiko laster bere egoera iraunkorrera heltzen da. Hortik aitzina, erantzun osoaren joera soilik  $y_1(t)$ -en menpe dago.  $y_1(t)$ -ren erantzuna  $-0,2$  poloari loturik da,  $y_2(t)$ -rena, aldiz,  $-1$  poloari lotua delarik. Lehenago aipatu den gisan, polo mantsoenak ardatz irudikaritik hurbilen direnak dira. Erran ohi da polo horiek dominanteak direla, erantzunean duten eragina polo azkarrenek, hau da, ardatz irudikaritik urrunago direnek, baina handiagoa dutelako.



3.27 irudia.  $G(s)$ -ren erantzuna maila unitario batekiko, modu desberdinetan deskonposatua.

Beraz, polo nagusiak edo *dominanteak* deitzen dira zati errearen balio absolutu txikiena duten poloak.

Polo *ez-dominanteak* poloen planoan ardatz irudikaritik urrunenak direnak dira, oso ezker geratzen direnak. Polo azkarrenak dira, eta, beraz, haien efektua laster desagertzen da. Horregatik ematen zaie izen hori.

Sistema baten erantzuna bereziki polo dominanteen eraberakoa denez, askotan, sistemaren transferentzia-funtzioa sinplifika daiteke, polo ez-dominanteak kenduz. Bestalde, polo bat zero batetik hurbil delarik, biak ken daitezke transferentzia-funtziotik.

Halako sinplifikazioen bidez, transferentzia-funtzioaren ordena jauts daiteke, prozesuaren azterketa eta haren kontrolagailuaren diseinua errazteko. Sinplifikazio horiek egitean, oso garrantzitsua da transferentzia-funtzioaren irabazi estatikoa berdina izatea sinplifikazioa aitzin eta gero. Gogoratu irabazi hori transferentzia-funtzioan  $s=0$  jarritz lortzen dela.

Beraz, informazio hau guztia emanik, hau da transferentzia-funtzio bat sinplifikatzeko segitu beharreko prozesua:

- Hurbil diren polo eta zeroak deuseztatu.

- Polo baten zati errearen balio absolutua polo dominantearena baino askoz handiagoa bada, mespretxatu.
- Irabazi estatikoaren ( $G(0)$ ) balioa, hurbilketa aitzinekoaren berdina izan behar da.

Adibide gisa, demagun sistema batek transferentzia-funtzio hau duela:

$$G(s) = \frac{1357(s + 0,95)(s + 6,95)}{(s + 1)(s + 7)(s + 8)(s + 20)(s^2 + s + 8)} \quad (3-122)$$

Transferentzia-funtzioak bi zero ditu  $\{-6,95; -0,95\}$ , eta sei polo  $\{-1; -7; -8; -20; -0,5+j2,784; -0,5-j2,784\}$ . Polo horien guztien artean, zati errearen balio absolutu txikiena 0,5 da.

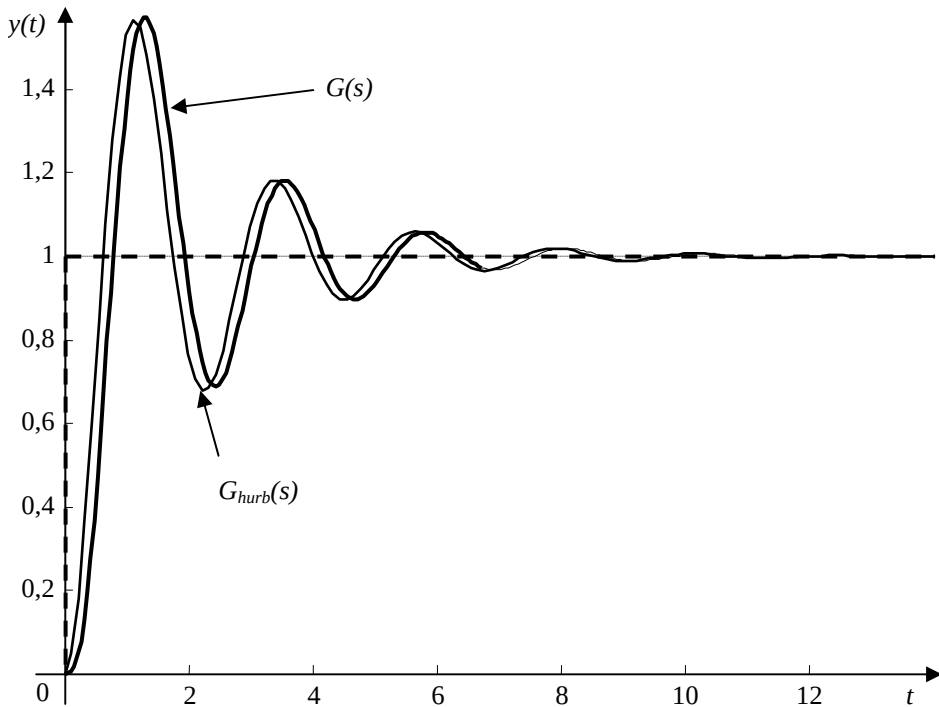
Transferentzia-funtzio hori ordena txikiago batekin hurbil daiteke:

- $p=-7$  eta  $z=-6,95$  polo eta zeroak elkarrengandik hurbil dira, beraz deusezta daitezke.
- $p=-1$  eta  $z=-0,95$  polo eta zeroak ere elkarrengandik hurbil dira, beraz deusezta daitezke.
- $p=-8$  eta  $p=-20$  polo nagusi edo dominanteetatik urrun dira, beraz mespretxa daitezke.

Ondorioz, har dezagun:

$$G_{hurb}(s) = \frac{8}{s^2 + s + 8} \quad (3-123)$$

3.28 irudiak  $G(s)$  eta  $G_{hurb}(s)$  transferentzia-funtzioen maila unitario batekiko erantzunaren konparaketa egiten du. Argi ikusten da transferentzia-funtzio sinplifikatuaren erantzunak jatorrizkoarenaren antz handia duela.  $G(s)$ -ren ordena 6 da eta bi zero ditu.  $G_{hurb}(s)$  2. ordenakoa da eta ez du zerorik, eta hala ere, biek maila unitario batetik erantzun berdintsua dute. Sistema batetik bestera pasatzean, egoera iraunkorra ez da aldatzen (irabazi estatiko bera atxiki dugulako), eta dinamikak iduri dira.



3.28 irudia.  $G(s)$  eta  $G_{hurb}(s)$  transferentzia-funtzioen maila unitario batekiko erantzunaren konparaketa.

### 3.3.6. Ondorioak

3.3 atal honetan sistemen dinamikaren edo erregimen iragankorraren ezaugarri nagusiak aztertuak izan dira. Ezaugarri horiek sistemen transferentzia-funtzioen poloei lotuak direla ikusi da. Egia erran, zeroek ere eragina izan dezakete erantzunaren zati iragankorrean. Baina, oro har, eragin hori txikia da, eta ez da aztertzen liburu honetan.

3.29 irudiak polo batzuen kokapenaren arabera pultsu batekiko erantzunak erakusten ditu. Kontrol-arloan ari den langilearentzat, garrantzitsua da sistema baten poloen kokapenaren eta denborarekiko haren erantzunaren arteko lotura egitea naturalki. Hori ez da berehala lortzen, baina esperientzia pixka batekin bai.

Lotura horrek ahalbidetzen du, prozesu baten transferentzia-funtzioa lorturik, prozesuaren dinamika oso azkar ezagutzea. Bestalde, kontrol-espezifikazioak definitzeko ere garrantzitsua da lotura hori ezagutzea. Espezifikazio horiek poloen kokapenaren arabera eman ohi dira. Hasieran, begizta itxiko sistemarentzat nahi den denbora konstante bat edo moteltze-faktore eta egonkortze-denbora baten arabera eman daitezke espezifikazioak. Baina horrela ematen badira, hurrengo urratsean, poloen kokapenaren arabera definituko dira.





Irudiko bloke-diagramatik, errorearen seinalea erreferentziaren arabera adieraz daiteke:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s) \quad (3.31)$$

Errore estatikoa edo egoera iraunkorreko errorea erantzuna egonkortua delarik kalkulatu da, hau da, teorikoki, denbora infinitura hurbiltzen delarik. Bukaerako balioaren Laplace-ren transformatuaren teorema erabiliz:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s) \quad (3-124)$$

Adierazpen horretatik argi ikusten da errore estatikoa sarrera/erreferentzia motaren menpe dagoela. Ondorengo azpiataletan, hiru sarrera motaren arabera errore estatikoak kalkulatu dira. Sarrera maila motakoa delarik, posizio-erroreaz ari gara; arrapala motakoa delarik, abiadura-erroreaz, eta parabola motakoa delarik, azelerazio-erroreaz.

### 3.4.2. Posizio-errorea: sarrera maila motakoa delarik

Sarrera maila motakoa bada, errore estatikoak, hau da posizio-erroreak, adierazpen hau du:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{R_0}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + C(s)G(s)} \quad (3-125)$$

$C(s)$  kontrolagailuan eta  $G(s)$  prozesuan integratzailerik ez bada, hau da,  $\frac{1}{s}$ -ko gai faktorizaturik, orduan:

$$e_{ss} = \frac{R_0}{1 + C(0)G(0)} = \frac{R_0}{1 + k_p} = kte \quad (3-126)$$

$k_p = C(0)G(0)$  posizio-errorearen konstantea deitzen da.

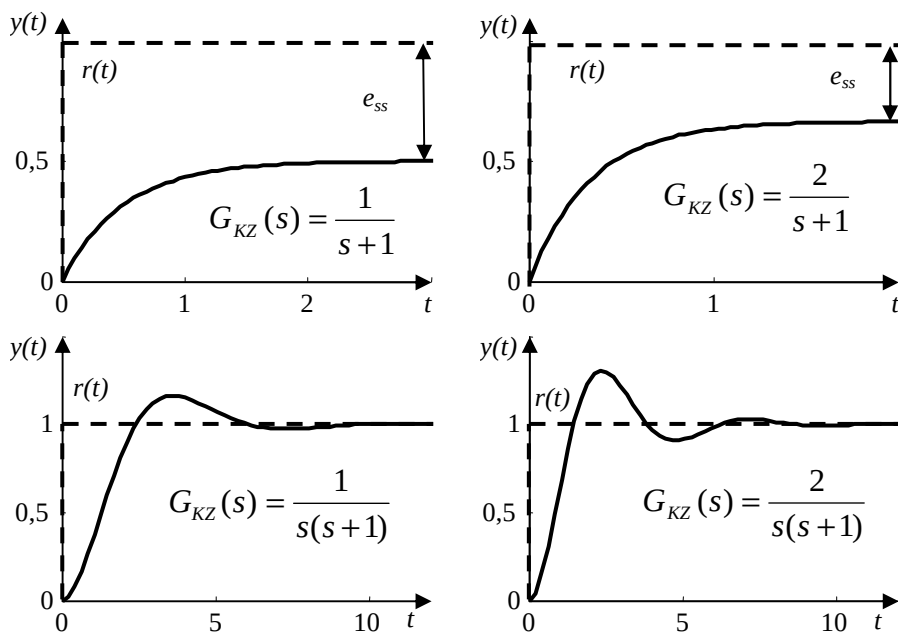
$C(s)$  kontrolagailuan edo/eta  $G(s)$  prozesuan integratzailerik bada, hau da,  $\frac{1}{s}$ -ko gai bat faktorizaturik, orduan:

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s^r} F(s)$$

non  $F(0)=kte$ , eta beraz:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + \frac{1}{s^r} F(s)} = 0 \quad (3-127)$$

3.31 irudian  $C(s)G(s)$  kate zuzenaren adierazpen desberdinen arabera posizio-errorea zein den ikus daiteke. Kate zuzenean integratzailerik ez bada, errore estatikoa konstante ez-nulua da, baina txikiagoa da kate zuzeneko irabazi estatikoa handiagoa den neurrian. Kate zuzenean integratzaile bat bada, aldiz, posizio-errorea 0 da. Irudian, ikus daiteke ere nola kasu horretan, irabazi estatikoa handitzen den neurrian, gehieneko gainditzea ere handitzen den.



3.31 irudia. Posizio-errorea  $G_{KZ}(s)=C(s)G(s)$  kate zuzenaren adierazpen desberdinen arabera.

### 3.4.3. Abiadura-errorea: sarrera arrapala motakoa delarik

Sarrera arrapala motakoa bada, errore estatikoak, hau da abiadura-erroreak, adierazpen hau du:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{R_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{s(1 + C(s)G(s))} \quad (3-128)$$

$C(s)$  kontrolagailuan eta  $G(s)$  prozesuan integratzailerik ez bada:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{s(1 + C(0)G(0))} = \infty \quad (3-129)$$

$C(s)G(s)$  kate zuzenean integratzaile bat bada, orduan:

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s} F(s) \quad (3-130)$$

$k_v = F(0)$  *abiadura-errorearen konstantea* deitzen da. Kasu honetan, *abiadura-errorea* hau da:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{s + F(s)} = \frac{R_0}{k_v} \quad (3-131)$$

$C(s)G(s)$  kate zuzenean 2 integratzaile badira:

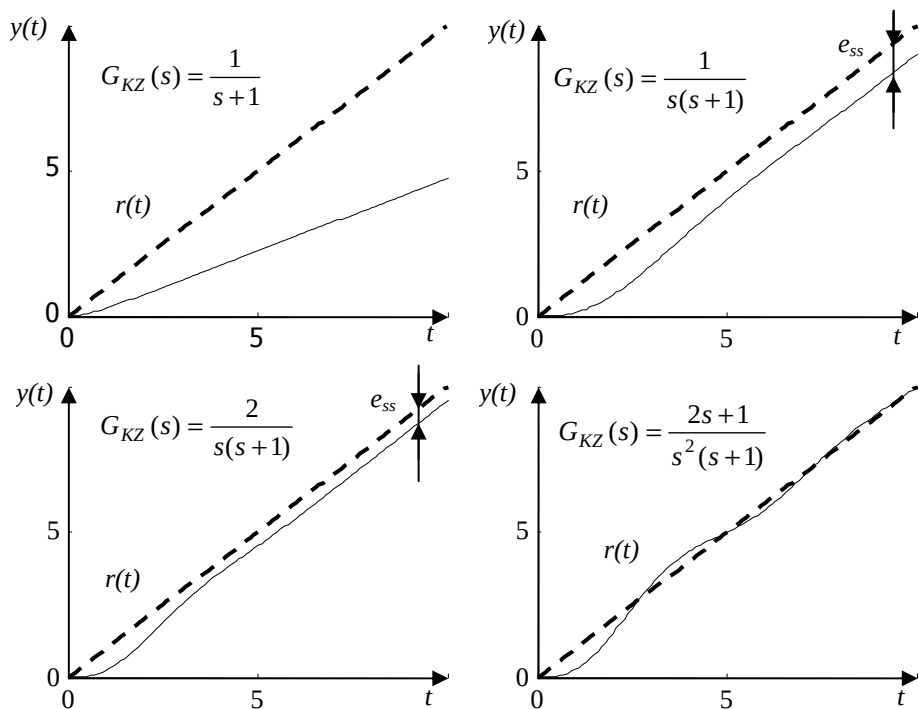
$$C(s)G(s) = \frac{1}{s^2} F(s)$$

Non  $F(0) = k_t$ , eta beraz:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{1 + \frac{1}{s} F(s)} = 0 \quad (3-132)$$

Bi baino integratzaile gehiago bada ere, *abiadura-errorea* 0 izanen da.

3.32 irudian  $C(s)G(s)$  kate zuzenaren adierazpen desberdinen arabera *abiadura-errorea* zein den ikus daiteke. Kate zuzenean integratzailerik ez bada, *errore estatikoa*  $\infty$  da. Integratzaile bat bada, *posizio-errorea* konstante ez-nulua da. Kate zuzeneko irabazi estatikoa handituz, *errorea* estatikoa txikitzea lortzen da. Kate zuzenean bi integratzaile badira, *abiadura-errorea* 0 da.



3.32 irudia. Abiadura-errorea  $G_{KZ}(s)=C(s)G(s)$  kate zuzenaren adierazpen desberdinen arabera.

#### 3.4.4. Azelerazio-errorea: sarrera parabola motakoa delarik

Sarrera parabola motakoa bada, errore estatikoak, hau da azelerazio-erroreak, adierazpen hau du:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{R_0}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_0}{s^2 (1 + C(s)G(s))} \quad (3-133)$$

$C(s)G(s)$ -n integratzailerik ez bada edo bakarra bada:

$$e_{ss} = \infty \quad (3-134)$$

$C(s)G(s)$ -n bi integratzaile badira:

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s^2} F(s) \quad (3-135)$$

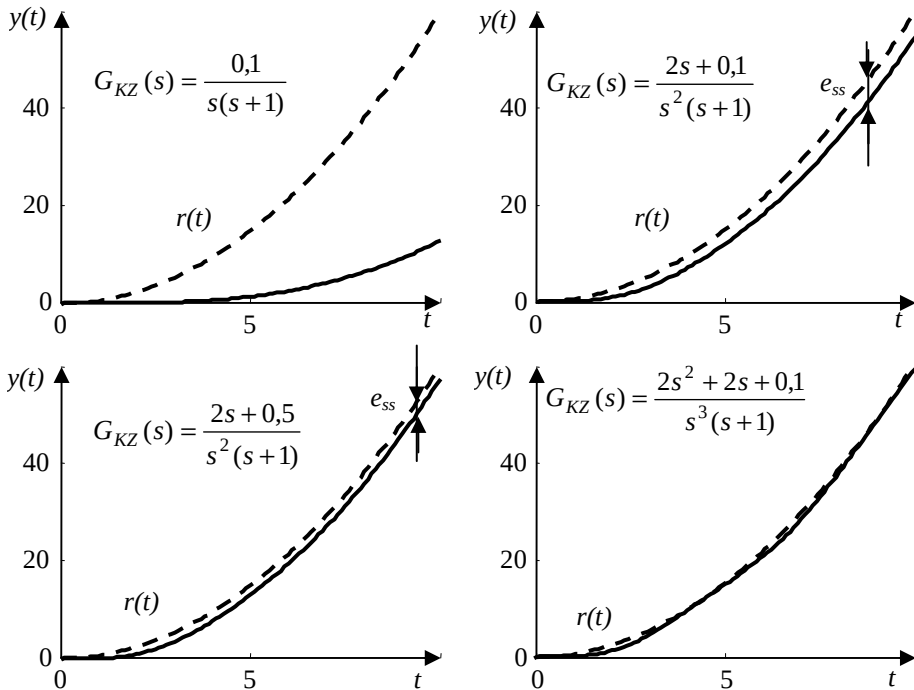
non  $k_a = F(0)$  azelerazio-errorearen konstantea den, eta orduan:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_a} \quad (3-136)$$

$C(s)G(s)$ -n bi integratzaile baino gehiago badira:

$$e_{ss} = 0 \quad (3-137)$$

3.33 irudian kate zuzenaren adierazpen desberdinen arabera azelerazio-errorea zein den ikus daiteke. Kate zuzenean soilik integratzaile bat bada, errore estatikoa  $\infty$  da. Bi integratzaile badira, azelerazio-errorea konstante ez-nulua da. Kate zuzeneko irabazi estatikoa handituz, errorea estatikoa txikitzea lortzen da, eta kate zuzenean hiru integratzaile badira, azelerazio-errorea 0 da.



3.33 irudia. Azelerazio-errorea  $G_{KZ}(s)=C(s)G(s)$  kate zuzenaren adierazpen desberdinen arabera.

### 3.4.5. Sistema tipoa

Sistema tipoa kate zuzenean den integratzaile kopuruari lotua da. Demagun kate zuzeneko transferentzia-funtzioa hau dela:

$$C(s)G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 + b_i s)}{s^r \prod_{j=1}^{n-r} (1 + a_j s)} \quad (3-138)$$

Orduan, sistema tipoa  $r$  da, hau da, integratzaile kopurua, edo beste modu batera erranik,  $\frac{1}{s}$ -ko gai faktorizatu kopurua, edo  $s=0$  polo kopurua.

3.1 taulan, errore estatiko bakoitzak zer balio duen erakusten da, sistema tipoaren arabera, orain arte ikusitakoa laburbilduz.

3.1 taula. Errore estatikoak sistema tipoaren arabera.

| Sistema tipoa             | 0                     | 1                 | 2                 | >2 |
|---------------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|----|
| <i>Posizio-errorea</i>    | $\frac{R_0}{1 + k_p}$ | 0                 | 0                 | 0  |
| <i>Abiadura-errorea</i>   | $\infty$              | $\frac{R_0}{k_v}$ | 0                 | 0  |
| <i>Azelerazio-errorea</i> | $\infty$              | $\infty$          | $\frac{R_0}{k_a}$ | 0  |

### 3.5. Ondorioak

Kapitulu honetan sistema bat zehazki aztertzeko eta modu egokian kontrolatzeko jakin behar diren hainbat kontzeptu landu ditugu. Sistemen ezaugarriak hiru arlotan sailka daitezkeela aipatu da:

- Egonkortasuna: kontrolaturiko sistema batek egonkorra izan behar du. Hau ezinbestean bete beharreko baldintza da. Gainera, egia erran, kontrolagailu oso on bat diseinatzeko, egonkortasun erlatiboa ere kontuan hartu behar da. Horrek galdera honi erantzuten dio: zein heinetaraino alda daitezke kontrolatzen ari garen sistemaren parametroak kontrolaturiko prozesua ezegonkor bihurtu arte. Azterketa horrek egonkortasun-tarte jakin batzuk finkatzea dakar. Dena den, lehenago aipatu gisan, hori ez da liburu honen helburuetan sartzen.

- Dinamika: sistema baten erregimen iragankorraren ezaugarriek definitzen dute haren dinamika. Poloen kokapenari lotua dela ikusi dugu.
- Zehaztasuna egoera iraunkorrean: kate zuzenean den integratzaile kopuruaren eta irabazi estatikoaren arabera dela ikusi dugu.

Kontzeptu hauen ezagutza beharrezkoa da kontrolatu nahi den prozesu baten espezifikazioak definitzeko. Ondorengo kapituluan, hori nola egin esplikatzeko da.

## 3.6. Ariketak

### 3.6.1. 1., 2. eta 3. ordenako transferentzia-funtzioen egonkortasuna

Azter ezazu ondorengo lehen, bigarren eta hirugarren ordenako transferentzia-funtzioen izendatzailearen koefizienteek bete beharreko baldintza, transferentzia-funtzioak egonkorak izan daitezela.

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0}, \quad a_1 \geq 0$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad a_2 \geq 0$$

$$\text{c) } G(s) = \frac{1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad a_3 \geq 0$$

**Ebazpena:**

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{a_1 s + a_0}, \quad a_1 \geq 0$$

Lehen ordenako sistema izanik, errazki kalkula daiteke haren poloa:

$$s_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (3-139)$$

$G(s)$  egonkorra izan dadin, haren poloaren zati erreala negatiboa izan behar da. Hori betetzeko, kasu honetan,  $a_0$  eta  $a_1$  koefizienteak zeinu berekoak izan behar dira.  $a_1$  positiboa denez,  $a_0$  ere positiboa izan behar da.

$$b) \quad G(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad a_2 \geq 0$$

3.2.5 atalean ikusi gisan, Routh-Hurwitz metodoaren bidez sistema baten egonkortasuna aztertzeko lehen pausoa dagokion taula osatzea da. Hemen sistemaren ordena 2 izanik, taulak 3 lerro izanen ditu. Lehen bi lerroetan polinomio karakteristikoaren koefizienteak kokatzen dira era egokian:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (3-140)$$

Beste osagaiak 3.2.5 atalean azaldu bezala kalkulatzen dira:

$$b_1 = \frac{a_1 \times a_0 - a_2 \times 0}{a_1} = a_0 \quad (3-141)$$

Eta,  $b_2=0$ .

Transferentzia-funtzioa egonkorra da soilik lehen zutabeko gai guziek zeinu bera badute.  $a_2$  positiboa izanik, sistema egonkorra izateko  $a_0$  eta  $a_1$  ere positiboak izan behar dira.

$$c) \quad G(s) = \frac{1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad a_3 \geq 0$$

Lehenbizi, taula osa dezagun:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3-142)$$

Kalkula ditzagun taulako beste gaiak:

$$b_1 = \frac{a_2 \times a_1 - a_3 \times a_0}{a_2} \quad (3-143)$$

$b_2$ -k 0 balio du.

$$c_1 = \frac{b_1 \times a_0 - a_2 \times 0}{b_1} = a_0 \quad (3-144)$$



$a_3$  positiboa izanik, sistema egonkorra izateko  $a_2$ ,  $a_1$  eta  $a_0$  ere positiboak izan behar dira, eta gainera, lau koefizienteek baldintza hau bete behar dute:

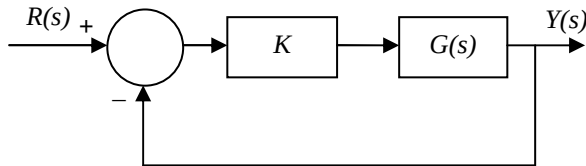
$$a_2 \times a_1 - a_3 \times a_0 \geq 0 \Rightarrow a_2 \times a_1 \geq a_3 \times a_0 \quad (3-145)$$

Beraz, azken baldintza horri dagokionez, modu batera errateko, «barneko» koefizienteen biderketaren emaitza «kanpokoena» baino handiagoa izan behar da.

### 3.6.2. Sistema ezegonkor baten polo ezegonkorra

3.34 irudian den diagrama-blokean,  $K=1$  dugu. Sarrera-maila unitarioa delarik, irteera

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0,25s + 0,875)} \text{ da.}$$



3.34 irudia. Begizta itxiko bloke-diagrama.

- Eman  $G(s)$ -ren adierazpena.
- $G(s)$  ez da egonkorra. Zein da ezegonkortasunari loturiko poloa?

**Ebazpena:**

- Begizta itxiko transferentzia-funtzioa hau da:

$$G_{BI}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (3-146)$$

$K=1$  delako. Hortik:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) \quad (3-147)$$

Eta  $R(s)$  maila unitarioa izanik:

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad (3-148)$$

Beraz:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{1}{s} \quad (3-149)$$

Enuntziatuan emaniko  $Y(s)$ -ren adierazpenarekin alderatuz:

$$\frac{1}{s^2 + 0,25s + 0,875} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \Rightarrow 1+G(s) = (s^2 + 0,25s + 0,875)G(s) \quad (3-150)$$

$$G(s)(s^2 + 0,25s + 0,875 - 1) = 1 \quad (3-151)$$

Eta beraz:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,25s - 0,125} \quad (3-152)$$

b)  $G(s)$ -ren bi poloak aurkitzeko, kalkula dezagun hasteko 2. graduko ekuazioaren diskriminatzailea:

$$\Delta = (0,25)^2 - 4 \times (-0,125) = 0,0625 + 0,5 = 0,5625 \geq 0 \quad (3-153)$$

Diskriminatzailea positiboa denez, sistemak bi polo erreak ditu:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-0,25 + \sqrt{0,5625}}{2} = 0,25 \\ s_2 = \frac{-0,25 - \sqrt{0,5625}}{2} = -0,5 \end{cases} \quad (3-154)$$

$G(s)$  ezegonkor egiten duen poloa  $s_1=0,25$  da, erreal positiboa baita.

### 3.6.3. Transferentzia-funtzio baten egonkortasun-baldintzak

Aztertu ondoko sistemaren egonkortasuna Routh-Hurwitz-en metodoaren bidez eta eman  $k$  parametroaren egonkortasun-eremua (bete behar dituen baldintzak).

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k}$$

**Ebazpena:**

Osa dezagun Routh-Hurwitz-en taula:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \\ 3 & 1+k & 0 & \\ b_1 & 0 & 0 & \\ c_1 & 0 & 0 & \end{array} \quad (3-155)$$

Non:

$$b_1 = \frac{3 \times 3 - 1 \times (1+k)}{3} = \frac{8-k}{3} \quad (3-156)$$

Eta:

$$c_1 = \frac{b_1 \times (1+k) - 3 \times 0}{b_1} = 1+k \quad (3-157)$$

$F(s)$  egonkorra izateko,  $b_1$  eta  $c_1$  positiboak izan behar dira, beraz  $k$  parametroak bi baldintza hauek bete behar ditu:

$$\begin{cases} \frac{8-k}{3} \geq 0 \Rightarrow k \leq 8 \\ 1+k \geq 0 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \quad (3-158)$$

Hau da, beraz,  $k$ -ren egonkortasun-eremua:

$$-1 \leq k \leq 8 \quad (3-159)$$

**3.6.4. Begizta itxiko sistema baten egonkortasun-baldintzak**

$F(s)$  begizta itxiko sistema baten kate zuzena da. Kalkula ezazu begizta itxiko transferentzia-funtzioa eta adierazi zein balio izan behar duten  $a$  eta  $b$ -k sistema egonkorra izan dadin.

$$F(s) = \frac{2s+b}{s^2+2as+1}$$

**Ebazpena:**

Begizta itxiko transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{\frac{2s+b}{s^2+2as+1}}{1+\frac{2s+b}{s^2+2as+1}} = \frac{2s+b}{s^2+2as+1+2s+b} = \frac{2s+b}{s^2+2(a+1)s+1+b} \quad (3-160)$$

4.3.1 atalean aztertu gisan, 2. ordenako sistema bat egonkorra izateko, haren izendatzailearen koefiziente guziek zeinu bera izan behar dute. Kasu honetan:

$$\begin{cases} 2(a+1) \geq 0 \Rightarrow a+1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1 \\ 1+b \geq 0 \Rightarrow b \geq -1 \end{cases} \quad (3-161)$$

**3.6.5. Dinamika**

Izan bedi 2. ordenako sistema bat non puntako denbora egonkortze-denbora baino askoz txikiagoa den. Beheko baieztapenen artean, zein da zuzena?

- a) Haren gehieneko gainditzea txikia da.
- b) Haren gehieneko gainditzea handia da.
- c) Ezin da deus erran gehieneko gainditzeari buruz.

**Ebazpena:**

Galdera horri erantzuteko, 2. ordenako sistemen erantzunen ezaugarri horiei dagozkien adierazpenak aztertu behar dira.

3.3.4.4.2 atalean puntako denboraren adierazpen hau lortu zen:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3-162)$$

Honela ere idatz daiteke:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - \omega_n^2 \xi^2}} \quad (3-163)$$

Bestalde, egonkortze-denbora modu honetan ere hurbil genezakeela azaldua izan zen:

$$\begin{cases} t_s(\%2) \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \\ t_s(\%5) \approx \frac{3}{\xi\omega_n} \end{cases} \quad (3-164)$$

Egonkortze-denbora erlatiboki handia izateko,  $\xi\omega_h$  txikia izan behar da. Puntako denbora txikia izateko, berriz,  $\omega_h$  handia izan behar da, hau da,  $\omega_h$  handia izan behar da eta  $\xi$  txikia. Beraz enuntziatuan aipatzen den gisan, egonkortze-denbora handia eta puntako denbora txikia nahi bada,  $\xi$  txikia izan behar da.  $\omega_h$ -ri buruzko baldintza kontrajarria da.

Gehienezko gaintitzeari dagokionez, adierazpen hau lortu zen (ehunekotan):

$$M_p = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3-165)$$

Argiki agertzen da gehienezko gaintitzea soilik  $\xi$ -aren menpe dagoela.  $\xi$  txikia den neurrian, gehienezko gaintitzea handia da. Ondorioz, enuntziatuko a) erantzuna txarra da, eta b), berriz, ona. c) erantzuna ere txarra da, zeren  $\xi$  handia bada (1etik hurbil) puntako denbora txikia izan dadin,  $\omega_h$  handia izan behar da, eta hori kontrajarria da egonkortze-denbora handia izatearekin.

### 3.6.6. Gehienezko gaintitze maximoa

Posiblea ote da 2. ordenako sistema batek % 150eko gehienezko gaintitzea izatea?

**Ebazpena:**

Horri erantzuteko aitzineko ariketan gehienezko gaintitzeari buruzko adierazpena aztertu behar da:

$$M_p = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3-166)$$

Adierazpen horretan, aitzineko ariketan erran bezala, argi ikusten da gehienezko gaintitzea handiagoa izanen dela  $\xi$  txikia den neurrian. Muturrera joanez,  $\xi=0$  hartuz, lortzen da gehienezko gaintitze handiena:

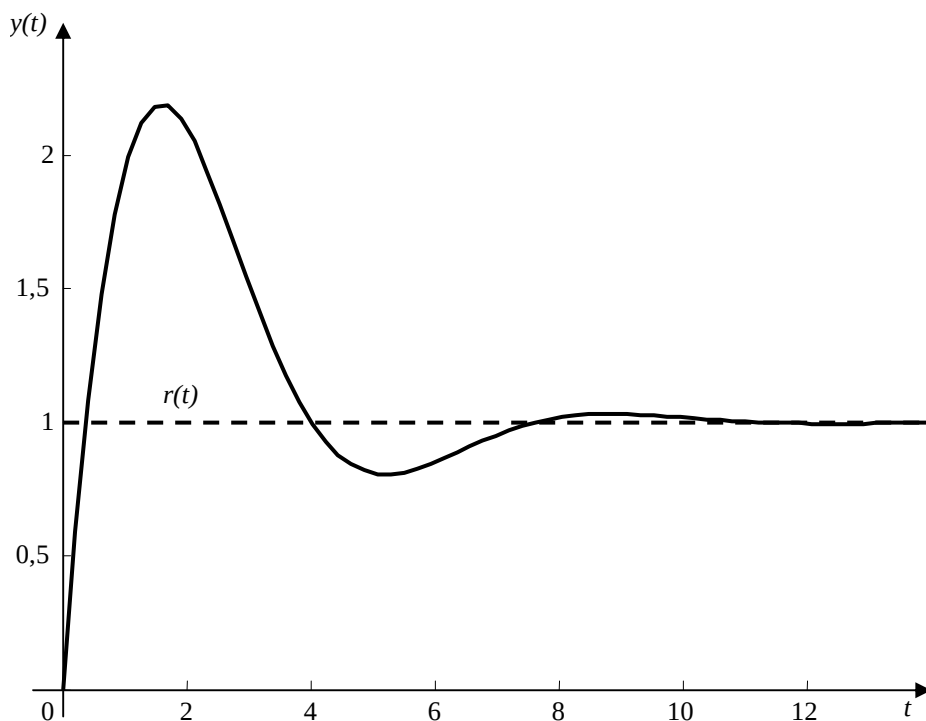
$$M_p = 100e^{\frac{-\pi 0}{\sqrt{1-0^2}}} = 100e^0 = 100 \quad (3-167)$$

Gehienezko gaitze maximoa % 100 da. Beraz, ezinezkoa da 2. ordenako sistema batek % 150eko gehienezko gaitzea izatea, behintzat 2. ordenako sistema tipiko edo kanoniko batek.

Lehenago aipatu den moduan, sistema baten dinamika bereziki poloen kokapenaren menpe badago ere, zeroek ere dinamika horri eragin diezaioke. Zentzu horretan, 2. ordenako sistema batek gutxienez zero bat baldin badu, gehienezko gaitzea % 150 baino handiagoa izan daiteke.

### 3.6.7. Transferentzia-funtzioa aurkitzea erantzunaren arabera

3.35 irudian sistema batek denboraren eremuan maila unitario baten aurrean duen erantzuna agertzen da.



3.35 irudia. Sistema baten erantzuna maila unitario baten aurrean.

Hurrengo transferentzia-funtzioetatik, zein izan daiteke sistemaren transferentzia-funtzioa?

a)  $G(s) = \frac{1+6s}{1+4s}$

$$b) \quad G(s) = \frac{1+6s}{(1+4s)(1+0,2s)}$$

$$c) \quad G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$d) \quad G(s) = \frac{1}{(1+4s)(1+0,1s)}$$

$$e) \quad G(s) = \frac{1+3s}{s^2+s+1}$$

$$f) \quad G(s) = \frac{1-5s}{(1+4s)(1+0,2s)}$$

$$g) \quad G(s) = \frac{1+5s}{0,8s^2-4,2s+1}$$

$$h) \quad G(s) = \frac{0,1+s}{s^2+0,5s+1}$$

### **Ebazpena:**

3.35 irudia lehen ikuspegi batean aztertuz, hiru ezaugarri azpimarra ditzakegu erantzunari loturiko sistemari buruz:

- Sistema egonkorra da.
- Sistema oszilakorra da, beraz haren poloak konplexuak dira.
- Sistemaren irabazi estatikoa 1 da.

Lehen ezaugarriaren arabera, g) transferentzia-funtzioa bazter daiteke, zeren izendatzaileak bi koefiziente positibo baititu eta bat negatiboa, eta 3.6.1 ataleko ariketan aztertu bezala, ezaugarri horrek sistema ezegonkor bihurtzen du.

Bigarren ezaugarriaren arabera, kalkulurik egin gabe, a), b), d) eta f) transferentzia-funtzioak bazter daitezke, polo errealak dituztelako. Halako transferentzia-funtzioak, nahiz eta zeroak izan, ez dira oszilakorrak. Erantzunak gainditze bat izan dezake, baina ez du oszilatzen.

Hirugarren ezaugarriaren arabera, transferentzia-funtzioak irabazi estatikoa 1ekoa izan behar du. Beraz  $s=0$  jarritz transferentzia-funtzioak 1 eman behar du. Irizpide hori erabiliz, geratzen diren transferentzia-funtzioen artean, h) baztertu behar da, dagokion transferentzia-funtzioaren irabazi estatikoa 0,1ekoa baita.

Beraz, filtro azkar honen ondoren, bi transferentzia-funtzio geratzen zaizkigu: c) eta e)-ri dagozkienak. 3.35 irudian agertzen den kurbari zehazkiago begiratuz, gehienezko gainditzea % 100 baino handiagoa dela ikusten da. Horrek erran nahi du erantzun horri dagokion transferentzia-funtzioak gutxienez zero bat duela. Beraz c) aukera baztertu behar da. Ondorioz, erran dezakegu erantzuna e) transferentzia-funtzioari loturik dagoela:

$$G(s) = \frac{1+3s}{s^2+s+1} \quad (3-168)$$

2. ordenako sistema kanoniko batekin alderatuta, transferentzia-funtzio honen parametro karakteristikoak erraz erdiesten dira:

$$\begin{cases} \omega_n = 1 \text{ rad / s} \\ \xi = 0,5 \end{cases} \quad (3-169)$$

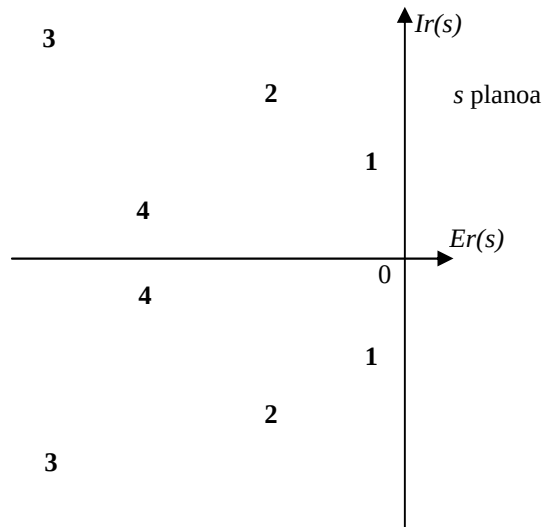
### 3.6.8. Sistemen sailkapena poloen kokapenaren arabera

3.36 irudian lau sistemaren polo dominanteak adierazi dira  $s$  plano konplexuan, sistema bakoitzaren poloei zenbaki bana esleituz.

Sailkatu lau sistemak hurrengo irizpideak kontuan hartuz:

- Puntako denbora txikienetik handienera.
- Gehienezko gainditze txikienetik handienera.
- Egonkortze-denbora txikienetik handienera.
- Maiztasun natural txikienetik handienera.





3.36 irudia. Lau sistema ezberdinen poloak.

**Ebazpena:**

3.26 irudia eta loturiko azalpenak erabiliz, berehala emaitza hauek lortzen dira:

- a) Puntako denbora txikienetik handienera:

Puntako denbora oszilazio-maiztasunaren kontrakoa da, eta hori posizio bertikalaren arabera da (handiagoa da ardatz errealetik urrunago den neurrian), beraz sailkapena hau da: 3, 2, 1, 4.

- b) Gehienezko gainditze txikienetik handienera:

Gehienezko gainditza  $\xi$ -ren arabera da eta hori 3.26 irudian agertzen den  $\theta$  angeluaren arabera da. Angelua handiagoa den neurrian,  $\xi$  txikiagoa da eta gehienezko gainditza handiagoa. Beraz, sailkapena hau da: 4, 3, 2, 1.

- c) Egonkortze-denbora txikienetik handienera:

Ezaugarri hau posizio horizontalaren arabera da. Poloak ardatz irudikaritik urrunago diren neurrian (ezkerrerago), egonkortze-denbora apalagoa da. Beraz, sailkapena hau da: 3, 4, 2, 1.

- d) Maiztasun natural txikienetik handienera:

Maiztasun naturala poloen moduluari lotua da. Modulua handiagoa den neurrian, maiztasun natural handiagoa da. Beraz, sailkapena hau da: 1, 2, 4, 3.

### 3.6.9. 1. eta 2. ordenako transferentzia-funtzioen parametro karakteristikoak

Adierazi 2.5.1 ataleko ariketan lorturiko 2. eta 1. ordenako transferentzia-funtzioaren parametro karakteristikoak prozesuaren parametroen arabera.

#### Ebazpena:

Lehen ariketan, sistema mekanikoari dagokionez, 2. ordenako transferentzia-funtzio hau erdietsi zen:

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{1}{(I_1 + n^2 I_2)s^2 + (D_1 + n^2 D_2)s + (K_{z1} + n^2 K_{z2})} \quad (3-170)$$

Parametro karakteristikoak 2. ordenako sistema tipiko batekin alderatuz lor daitezke:

$$G_2(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-171)$$

Adierazpen horretan ikus daiteke izendatzaileko polinomioaren potentzia handieneko monomioaren koefizientea 1 dela. Konparaketa egiteko, beraz, aitzineko adierazpena ere honela idatzi behar da:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{I_1 + n^2 I_2}}{s^2 + \frac{D_1 + n^2 D_2}{I_1 + n^2 I_2}s + \frac{K_{z1} + n^2 K_{z2}}{I_1 + n^2 I_2}} \quad (3-172)$$

Orain,  $G_2(s)$ -rekin alderatuz,  $K$  irabazi estatikoa,  $\omega_n$  maiztasun naturala eta  $\xi$  moteltze-faktorearen adierazpena erdiesten da sistemaren parametroen arabera:

$$\begin{cases} K = K_{z1} + n^2 K_{z2} \\ \omega_n^2 = \frac{K_{z1} + n^2 K_{z2}}{I_1 + n^2 I_2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_{z1} + n^2 K_{z2}}{I_1 + n^2 I_2}} \\ 2\xi\omega_n = \frac{D_1 + n^2 D_2}{I_1 + n^2 I_2} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_n} \frac{D_1 + n^2 D_2}{I_1 + n^2 I_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I_1 + n^2 I_2}{K_{z1} + n^2 K_{z2}}} \frac{D_1 + n^2 D_2}{I_1 + n^2 I_2} \end{cases} \quad (3-173)$$

Lehenago ere aipatu den gisan, ohar gaitezke  $K$  irabazi estatikoa lortzeko  $s=0$  jar daitekeela.

Lehen ariketan, sistema hidraulikoari dagokionez, 1. ordenako transferentzia-funtzio hau erdietsi zen:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{\frac{1}{A}}{s + \frac{R}{A}} \quad (3-174)$$

Parametro karakteristikoak 1. ordenako sistema tipiko batekin alderatuz lor daitezke:

$$G_1(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (3-175)$$

Adierazpen horretan ikus daiteke izendatzaileko polinomioaren potentzia txikieneko monomioaren koefizientea 1 dela. Konparaketa egiteko, beraz, aitzineko adierazpena ere honela idatzi behar da:

$$G(s) = \frac{R}{\frac{A}{R}s + 1} \quad (3-176)$$

Orain  $G_1(s)$ -rekin alderatuz,  $K$  irabazi estatikoa eta  $T$  denbora konstantearen adierazpena erdiesten da sistemaren parametroen arabera:

$$\begin{cases} K = R \\ T = \frac{A}{R} \end{cases} \quad (3-177)$$

Lehen bezala, ohartzen gara  $s=0$  jarritz lor daitekeela  $K$ .

### 3.6.10. Polo dominanteak

Izan bedi kontrol-sistema bat berrelikadura unitarioarekin. Kate zuzeneko transferentzia-

funtzioa hau da:  $G(s) = \frac{0,4s + 1}{s(s + 6)}$

Lortu sistemaren transferentzia-funtzioa begizta itxian.

- Zein da begizta itxiko sistemaren erantzunaren adierazpena maila unitarioaren aurrean?
- Kalkulatu puntako denbora, gehienezko gainditzea eta egonkortze-denbora.

**Ebazpena:**

Kate zuzeneko transferentzia-funtzioa ezaguturik, jadanik nahikotan ikusi da nola lor daitekeen zuzenean begizta itxikoa:

$$G_{BI}(s) = \frac{G_{KZ}}{1 + G_{KZ}} = \frac{G}{1 + G} = \frac{0,4s + 1}{s(s + 6) + 0,4s + 1} = \frac{0,4s + 1}{s^2 + 6,4s + 1} \quad (3-178)$$

a) Sistemaren erantzunaren adierazpena maila unitarioaren aurrean:

Sarrera-maila unitarioa denez:

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad (3-179)$$

Eta, beraz, irteera:

$$Y(s) = G_{BI}(s)R(s) = \frac{0,4s + 1}{s^2 + 6,4s + 1} \frac{1}{s} = \frac{0,4s + 1}{s^3 + 6,4s^2 + 1s} \quad (3-180)$$

Laplace-ren taularen adierazpenetara hurbiltzeko,  $Y(s)$  frakzio sinpleetan idatzi behar da. Horretarako,  $G_{BI}(s)$ -ren izendatzailearen erroak aurkitu behar dira, diskriminatzailetik hasiz:

$$\Delta = 6,4^2 - 4 = 36,96 \geq 0 \quad (3-181)$$

Beraz, sistemak bi polo erreal ditu:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-6,4 + \sqrt{36,96}}{2} \approx -0,16 \\ s_2 = \frac{-6,4 - \sqrt{36,96}}{2} \approx -6,24 \end{cases} \quad (3-182)$$

$Y(s)$  faktorizaturik honela idazten da:

$$Y(s) = \frac{0,4s + 1}{(s + 0,16)(s + 6,24)s} \quad (3-183)$$

Ondorioz, frakzio sinpleetan  $Y(s)$  honela idatz daiteke:

$$Y(s) = \frac{A}{s + 0,16} + \frac{B}{s + 6,24} + \frac{C}{s} \quad (3-184)$$

$$A = (s + 0,16)Y(s) \Big|_{s=-0,16} = \frac{0,4 \times (-0,16) + 1}{(-0,16 + 6,24)(-0,16)} \approx \frac{0,936}{-0,973} \approx -0,962 \quad (3-185)$$

$$B = (s + 6,24)Y(s)]_{s=-6,24} = \frac{0,4 \times (-6,24) + 1}{(-6,24 + 0,16)(-6,24)} \approx \frac{-1,5}{37,9} \approx -0,0394 \quad (3-186)$$

$$C = sY(s)]_{s=0} = \frac{0,4 \times 0 + 1}{(0 + 0,16)(0 + 6,24)} \approx \frac{1}{0,998} \approx 1 \quad (3-187)$$

Koefiziente horien balioak ordezkatzuz  $Y(s)$ -ren adierazpenean:

$$Y(s) = -\frac{0,962}{s + 0,16} - \frac{0,0394}{s + 6,24} + \frac{1}{s} \quad (3-188)$$

Laplace-ren tauletan denbora esparruko adierazpenak lortzen dira:

$$y(t) = 1 - 0,962e^{-0,16t} - 0,0394e^{-6,24t} \quad (3-189)$$

b) Puntako denbora, gehienezko gainditzea eta egonkortze-denbora:

Erantzuna ez denez oszilakorra, ez da gainditzerik, eta, beraz, puntako denborarik ere ez. Egonkortze-denborari dagokionez, polo dominantearen bidez hurbil daiteke.  $-6,24$  poloa  $-0,16$  balioa duena baino askoz azkarragoa da. Hori kontuan hartuz,  $G_{BI}(s)$  sinplifika daiteke, soilik polo mantsoa gordez. Orduan, sistemaren denbora konstantea hau da:

$$T = \frac{1}{0,16} = 6,25 \quad (3-190)$$

2,5ean den zeroaren eragina kontuan hartzen ez badugu, % 2ko egonkortze-denbora  $T$ -ren arabera kalkula dezakegu:

$$t_s (\%) = 4T = 4 \times 6,25 = 25 \text{ s} \quad (3-191)$$

Hurbilketa ona den frogatzeko, kalkula dezagun irteeraren balioa  $t=t_s(\% 2)$  delarik, (3-189) adierazpenaren bidez:

$$y(t) = 1 - 0,962e^{-0,16 \times 25} - 0,0394e^{-6,24 \times 25} \approx 0,983 \quad (3-192)$$

Bukaerako balioa 1 dela kontuan hartuz, argiki agertzen da hurbilketa ona dela.

### 3.6.11. Egoera iraunkorra eta poloak ezagutuz, transferentzia-funtzioa lortzea

Sistema batek kate zuzenean bi polo ditu:  $s_1=0$  eta  $s_2=-4$ , eta ez du zerorik. Sistemak, berrelikadura unitarioa izanik, 0,125eko abiadura-errorea du. Zein da begizta itxian sistemak pultsuaren aurrean duen erantzunaren adierazpen matematikoa?

**Ebazpena:**

Lehenbizi kate zuzeneko transferentzia-funtzioa kalkulatu behar da. Enuntziatuan idatzirikoaren arabera, forma honetakoa da:

$$G_{KZ}(s) = \frac{K}{s(s+4)} \quad (3-193)$$

Non  $K$  parametroa (ez da irabazi estatikoa) ez da ezagutzen.  $K$  ezagutzea falta da kate zuzeneko transferentzia-funtzioa zein den jakiteko. Badakigu begizta itxiko sistemak, berrelikadura unitarioa izanik, 0,125eko abiadura-errorea duela. Hortik, hau idatz daiteke:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0,125 \quad (3-194)$$

Errorea Laplace-ren eremuan:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G_{BI}(s)R(s) = \left(1 - \frac{G_{KZ}}{1 + G_{KZ}}\right)R(s) = \frac{1}{1 + G_{KZ}}R(s) \quad (3-195)$$

Abiadura-errorea arrapala batekiko errorea denez:

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3-196)$$

Beraz:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+4)}} \frac{1}{s^2} = \frac{s(s+4)}{s(s+4) + K} \frac{1}{s^2} = \frac{s+4}{s^2 + 4s + K} \frac{1}{s} \quad (3-197)$$

Eta ondorioz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+4}{s^2 + 4s + K} = \frac{4}{K} = 0,125 \quad (3-198)$$

Hortik  $K$ -ren balioa erdiesten da:

$$K = 32 \quad (3-199)$$

Orain, kate zuzeneko transferentzia-funtzioa ezaguturik, begizta itxikoa kalkula dezakegu:

$$G_{BI}(s) = \frac{G_{KZ}(s)}{1 + G_{KZ}(s)} = \frac{\frac{32}{s(s+4)}}{1 + \frac{32}{s(s+4)}} = \frac{32}{s(s+4) + 32} = \frac{32}{s^2 + 4s + 32} \quad (3-200)$$

Pultsuaren adierazpena Laplace-ren eremuan hau da:

$$R(s) = 1 \quad (3-201)$$

Bera, irteerak  $G_{BI}(s)$ -ren adierazpen bera du:

$$Y(s) = G_{BI}(s)R(s) = G_{BI}(s) = \frac{32}{s^2 + 4s + 32} \quad (3-202)$$

Izendatzailearen diskriminatzailea kalkulatu, argiki ikusten da erroak konplexuak direla ( $\xi < 1$ ). Kasu horretan, denbora esparruko adierazpena erdiesteko, Laplace-ren taularen 13. lerroko adierazpena erabil daiteke:

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right) \quad (3-203)$$

Aitzineko adierazpenetik lor daitezke  $\omega_n$  eta  $\xi$ :

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ rad/s} \\ \xi = \frac{4}{2\omega_n} \approx 0,35 \end{cases} \quad (3-204)$$

Ondorioz:

$$y(t) \approx 6,05e^{-2t} \sin(5,29t) \quad (3-205)$$

### 3.6.12. Errore estatikoak

Kate zuzeneko sistema baten erantzuna pultsu-sarreraren aurrean honako hau da:

$$g(t) = 50(1 - e^{-2t})$$

Begizta itxian, berrelikadura unitarioarekin, zeintzuk dira errore estatikoak (posizio-, abiadura- eta azelerazio-erroreak)?

**Ebazpena:**

Sarrera pultsua denez,  $g(t)$ -ren alderantzizko Laplace-ren transformatua kate zuzeneko transferentzia-funtzioa da. Denboraren esparruan emaniko adierazpenaren bidez, Laplace-ren taularen 7. lerrotik, kate zuzeneko transferentzia-funtzio hori lor daiteke. Horretarako, jar dezagun  $g(t)$  taularen lerro horretako ezkerreko zutabean agertzen den eran:

$$g(t) = 50(1 - e^{-2t}) = 25 \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \quad (3-206)$$

Hortik:

$$G(s) = G_{KZ}(s) = \frac{25}{s(s+2)} \quad (3-207)$$

Errore estatikoak bi modutara kalkula daitezke: 3.1 taula erabiliz edo kalkulu osoa eginez. Hemen, 2. modu horretara eginen dugu, irakurlea kalkulu horietara ohitu dadin. Aitzineko ariketan erakutsi den gisan, errore estatikoa erraz lotu dakioko kate zuzeneko transferentzia-funtzioari:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_{KZ}(s)} R(s) \quad (3-208)$$

Hemendik abiatuz, kalkula ditzagun hiru errore estatikoak.

a) Posizio-errorea:

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G_{KZ}(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \frac{25}{s(s+2)}} \frac{1}{s} = \frac{s(s+2)}{s(s+2) + 25} \frac{1}{s} \quad (3-209)$$

Eta beraz:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+2)}{s(s+2) + 25} = 0 \quad (3-210)$$

b) Abiadura-errorea:

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G_{KZ}(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1 + \frac{25}{s(s+2)}} \frac{1}{s^2} = \frac{s+2}{s(s+2) + 25} \frac{1}{s} \quad (3-211)$$

Eta beraz:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + 25} = \frac{2}{25} = 0,08 \quad (3-212)$$

c) Azelerazio-errorea:

$$R(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + G_{KZ}(s)} \frac{2}{s^3} = \frac{1}{1 + \frac{25}{s(s+2)}} \frac{2}{s^3} = \frac{s+2}{s(s+2) + 25} \frac{2}{s^2} \quad (3-213)$$

Eta beraz:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + 25} \frac{2}{s} = \infty \quad (3-214)$$

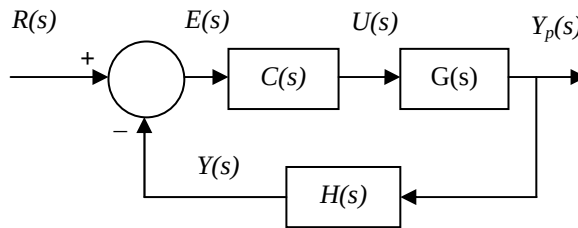


### 3.6.13. Posizio-errore estatikoa begizta itxiko berrelikadura ez-unitarioarekin

3.37 irudian begizta itxiko sistema bat agertzen da, non:

$$C(s)=5, \quad G(s)=\frac{1}{s+1} \text{ eta } H(s)=\frac{1}{s+0,5}.$$

Kalkula ezazu begizta itxiko sistemaren errorea egoera iraunkorrean, sistemaren sarrera  $r(t)=2$  izanik.



3.37 irudia. Begizta itxiko sistema bat.

**Ebazpena:**

Hemen berrelikadura ez denez unitarioa, kalkula dezagun hasteko  $E(s)$ -ren adierazpena:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} R(s) \quad (3-215)$$

$R(s)$  faktorizatuz eta bi frakzioak izendatzaile berean jarriz:

$$E(s) = \left( \frac{1 + C(s)G(s)H(s) - C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \right) R(s) = \left( \frac{1 + 5 \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+0,5} - 5 \frac{1}{s+1}}{1 + 5 \frac{1}{s+1} \frac{1}{s+0,5}} \right) \frac{2}{s} \quad (3-216)$$

$$E(s) = \left( \frac{(s+1)(s+0,5) + 5 - 5(s+0,5)}{(s+1)(s+0,5) + 5} \right) \frac{2}{s} \quad (3-217)$$

Eta, beraz, errore estatikoa:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(s+1)(s+0,5) + 10 - 10(s+0,5)}{(s+1)(s+0,5) + 5} = \frac{6}{5,5} = 1,09 \quad (3-218)$$

## 4. Oinarrizko kontrol-ekintzak eta haien doiketa

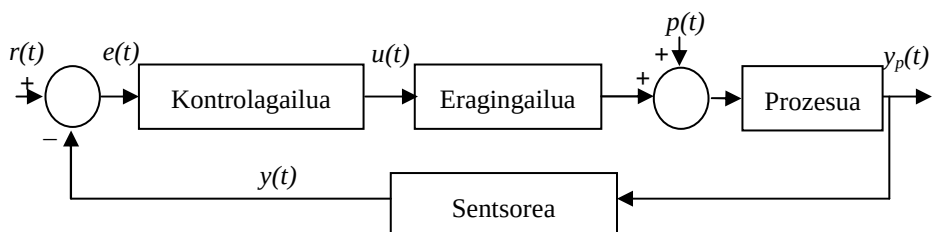
### 4.1. Sarrera

Aitzineko kapituluetan sistema bat modu egokian kontrolatzeko jakin behar diren hainbat kontzeptu aztertu ditugu. Horien artean, bi bereziki garrantzitsuak dira: begizta irekiko eta itxiko kontrolaren arteko desberdintasuna, eta nola definitu kontrol-helburuak sistema batentzat lortu nahi diren espezifikazioen bidez.

Hala ere, Kontrolean esperientziarik ez duenarentzat, zaila da oraindik kontrolagailua irudikatzea eta haren diseinua eta doiketa nola egiten diren pentsatzea. Hori da kapitulu honetan azaltzen dena.

#### 4.1.1. Begizta itxiko kontrol-sistema tipikoa

4.1 irudiak begizta itxiko kontrol-sistema tipikoa erakusten du. Hainbat osagai ditu: konparagailua, batukaria, kontrolagailua, eragingailua, prozesua eta sentsorea. Jadanik aipatu ditugun seinale hauek ere baditu: prozesuaren irteera  $y_p(t)$  (kontrolatu nahi dena, *process variable* ingelesez), aldagai horren  $y(t)$  neurketa (*measured process variable*),  $p(t)$  perturbazioa (*disturbance*),  $u(t)$  kontrol-seinalea (*control signal*),  $e(t)$  errorea (*error*) eta  $r(t)$  erreferentzia edo kontsigna (*reference* edo *set point*). Perturbazio-seinalea prozesuaren sarreran agertzen da irudi horretan. Errealitatean prozesuaren baitan edo irteeran ere ager daiteke.

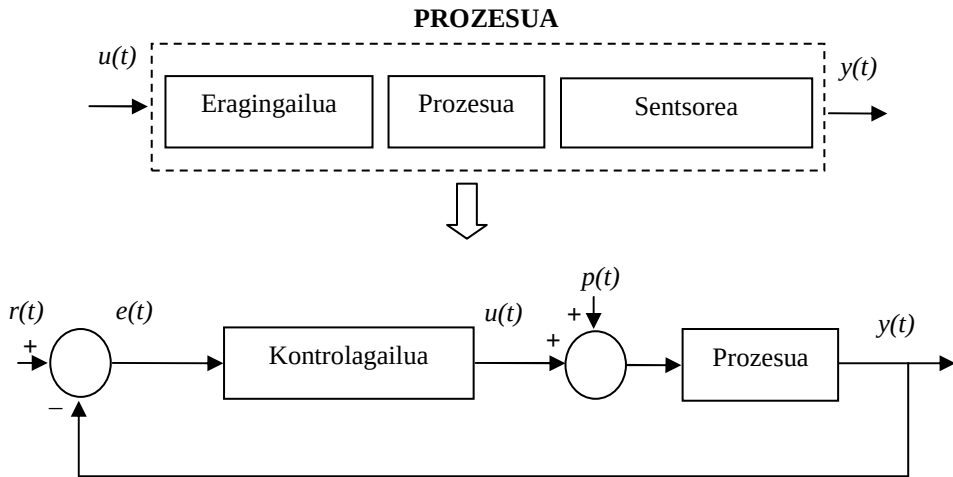


4.1 irudia. Begizta itxiko kontrol-sistema tipiko bat.

Sentsorearen dinamika oso azkarra izan ohi da, bereziki prozesuarenarekin konparatuz. Horregatik, askotan, irabazi estatiko soiltzat har daiteke, haren erregimen iragankorra berehala bukatzen baita. Hori dela-eta, prozesuaren irteera aldagaia eta aldagai horren neurketa-seinalea proportzionalak direla kontsidera daiteke.

Bestalde, helburua prozesuaren irteerako aldagaia kontrolatzea bada ere, aldagai horren balioa soilik neurketa-seinalearen bidez ezagutzen da. Seinale hori da erreferentziarekin konparatzen dena eta zuzenki kontrolatzen dena.

Bi arrazoi horiengatik, 4.1 irudian agertzen den bloke-diagrama sinplifikatu ohi da. 4.2 irudian agertzen den bezala, eragingailua eta sentsorea prozesuaren baitan kontsideratzen dira. Ondorioz, bloke-diagrama sinplifikatzen da, berrelikadura-begizta unitarioa izanik.



4.2 irudia. Kontrol-sistema sinplifikatua, gehienetan erabiltzen dena.

Oso garrantzitsua da bloke-diagrama horretan kontrolagailua ongi kokatzea. Kontrolagailua konparagailuaren eta prozesuaren artean dago. Haren sarrera-seinalea  $e(t)$  errorea da beraz, eta irteera  $u(t)$  kontrol-seinalea, *prozesua* blokearen barnean den eragingailuari aplikatzen zaiona. Kontrolagailua kasik beti transferentzia-funtzio gisa adierazten da.

#### 4.1.2. Kontrolagailuaren helburu nagusiak

Kontrolagailuaren helburuak edo espezifikazioak kontrolaturiko sistemaren espezifikazioak dira. Oro har, helburu hauek lortu nahi dira:

- Kontrolaturiko sistema (kasik beti begizta itxikoa) egonkorra izatea.
- Erantzun iragankorra azkarra izatea, eta gehienezko gainditze handiegirik gabe:  $\xi > 0,5$  kasu guzietan, eta normalki  $\xi > 0,7$ , horrek segurtatzen baitu gehienezko gainditzea % 5 baino txikiagoa izan dena.
- Errore estatikoa ahal bezain txikia izatea, edo nulua, kontrolatu beharreko prozesuaren arabera.

### 4.1.3. Kontrol-ekintza nagusiak

Kontrolagailu mota asko existitzen da. SISO sistemak kontrolatzeko gehienak transferentzia-funtzio gisa adierazten dira. Oro har, transferentzia-funtzio horrek edozein ordena izan dezake, baina jarraitu gisa inplementatu nahi bada, anplifikadore operazionalen bidez osatzen da, eta nahiko sinplea izan ohi da (2. ordenakoa gehienez).

Kapitulu honetan kontrolagailu arruntenak eta era berean sistema jarraituetan erabilienak direnak aipatzen dira. Haien ekintza motaren arabera defini daitezke:

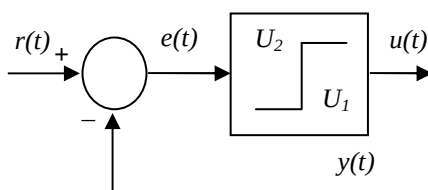
- Dena/Ezer ez edo ON/OFF: kontrolagailuaren  $u(t)$  seinaleak soilik bi balio ditu kasu honetan.
- P, I eta D ekintzak:  $u(t)$  kontrol-seinalea  $e(t)$  errorearekiko proportzionala (P ekintza), edo errore-seinalearen integrala (I ekintza) edo deribatua (D ekintza) da kasu honetan. Hiru ekintza horien arteko konfigurazio desberdinak osa daitezke.

### 4.2. Dena/Ezer ez motako kontrolagailua

Mota honetako kontrolagailuan, kontrol-seinalearen eta errore-seinalearen arteko harremana hau da:

$$u(t) = \begin{cases} U_1, & e(t) < 0 \text{ bada} \\ U_2, & e(t) \geq 0 \text{ bada} \end{cases} \quad (4-1)$$

Beraz,  $u(t)$ -k soilik bi balio har ditzake, errore-seinalearen balioaren arabera. 4.3 irudian kontrolagailu mota hori adierazteko erabiltzen den blokea erakusten da.

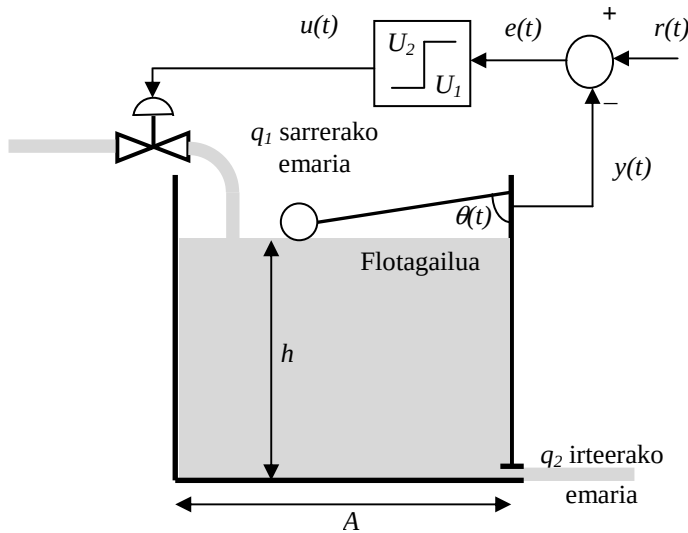


4.3 irudia. Dena/Ezer ez kontrolagailu motaren blokea.

Inertzia handia (dinamika mantsoa) duten sistemetan erabil daiteke kontrolagailu mota hau, erraterako sistema termikoetan. Kontrol-seinaleak errele batean eragiten du.

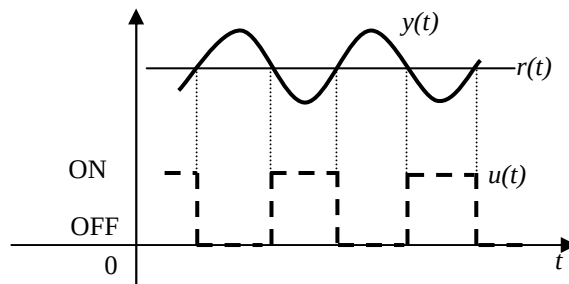
#### 4.2.1. Prozesu hidrauliko baten adibidea

Dena/Ezer ez motako kontrolagailua ontzi batean den likido-maila kontrolatzeko erabiltzen ahalko litzateke adibidez, 4.4 irudian agertzen den bezala. Irudi horretan, flotagailu baten bidez likido-maila neurtzen da. Kontrol-seinalea ontzira sartzen den likido-emia kontrolatzen duen balbula bati aplikatzen zaio.



4.4 irudia. Dena/Ezer ez motako kontrolagailuarekin kontrolaturiko prozesu hidrauliko baten eskema.

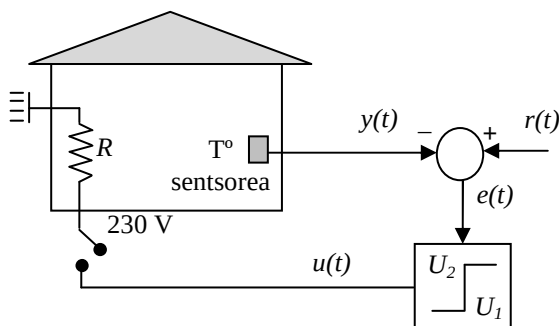
4.5 irudian erakusten den gisan, neurtzen den maila lortu nahi dena, hau da, kontsignarena, baino txikiagoa delarik, balbula osorik irekita dago ( $u(t)=ON$ ). Likido-maila kontsigna edo erreferentzia baino handiagoa bihurtzen delarik, orduan balbula hesten da ( $u(t)=OFF$ ). Irudian ikusten den bezala, kontrol mota honek kontrolatzen duen seinalearen oszilazio iraunkorrak sortzen ditu. Prozesu batzuetan, hori onargarria da, eta, beraz, kontrolagailu mota xume hau erabil daiteke.



4.5 irudia. Dena/Ezer ez kontrolagailuaren irteera neurturiko likido-maila eta kontsignaren arabera.

#### 4.2.2. Prozesu termiko baten adibidea

4.6 irudian den eskemak Dena/Ezer ez kontrolagailuak etxe baten temperatura nola kontrolatzen duen erakusten du. Temperatura sentsoare baten bidez neurtzen da eta erreferentziarekin (lortu nahi den temperaturarekin) konparatzen da. Konparaketa kontrolagailuaren sarrera-seinalea da. Kontrolagailuaren irteera, kontrol-seinalea, berotzeko erabiltzen den erresistentzia bati aplikatzen zaio.



4.6 irudia. Dena/Ezer ez motako kontrolagailuarekin kontrolaturiko prozesu termiko baten eskema.

Kontrolagailuaren funtzionamendua adierazpen honek azaltzen du:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & y(t) < r(t) \text{ bada} \\ 0, & y(t) \geq r(t) \text{ bada} \end{cases} \quad (4-2)$$

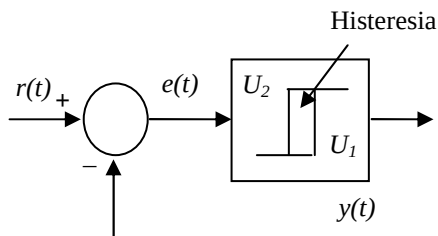
4.5 irudian bezala, neurtzen den tenperatura lortu nahi dena baino txikiagoa delarik, kontrol-seinalea 1 da ( $u(t)=ON$ ) eta, beraz, berogailuak duen potentzia guzia ematen du. Tenperatura kontsigna baino handiagoa bihurtzen delarik, orduan berogailua itzaltzen da ( $u(t)=OFF$ ). Aitzineko adibidean bezala, kontrol honek kontrolatzen den seinalearen oszilazio iraunkorrak sortzen ditu.

Bestalde, eragingailuaren egoera une oroz mutur batetik bestera pasatzen da. Hori kontuan hartzekoa da, hainbat eragingailu mota hondatzen ahal baititu joera horrek, akiduraz.

Eragingailua gutxiago akitzeko, konmutazio kopurua apaltzea komeni da, edo beste era batera erranez, konmutazio-periodoa handitzea. Hori kontrolagailuan histeresi bat sartuz lor daiteke. Horrela, kontrolagailuaren irteeraren eta sarreraren arteko harremana honelakoa bilakatzen da:

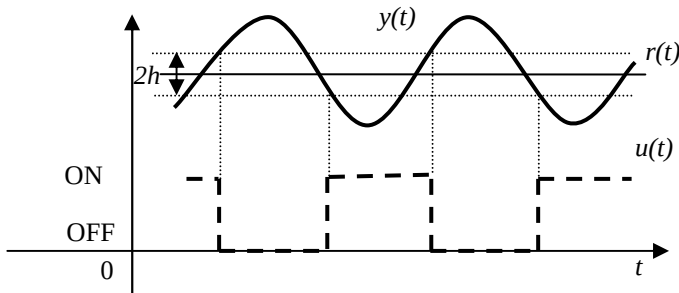
$$u(t) = \begin{cases} U_1, & e(t) < h \text{ bada} \\ U_2, & e(t) > -h \text{ bada} \end{cases} \quad (4-3)$$

Histeresia barne duen kontrolagailuaren blokea 4.7 irudian agertzen dena da.



4.7 irudia. Histeresia kontuan hartzen duen Dena/Ezer ez kontrolagailuaren blokea.

4.8 irudian histeresia duen Dena/Ezer ez kontrolagailuaren  $u(t)$  irteera erakusten da, neurturiko  $y(t)$  tenperatura eta  $r(t)$  kontsignaren arabera. Histeresirik ez duen kontrolagailuarekin erdiesten diren emaitzekin konparatuz, argi ikusten da nola konmutazio kopurua txikitzen den. Ondorioz, prozesuaren irteeraren oszilazioen maiztasuna ere asko apaltzen da, baina denbora berean, haien anplitudea handitzen da.



4.8 irudia. Histeresia duen Dena/Ezer ez kontrolagailuaren irteera, neurturiko tenperatura eta kontsignaren arabera.

### 4.3. PID motako kontrolagailuak

Atal honetan PID kontrolagailuen ekintza eta konfigurazio desberdinak aztertzen dira.

#### 4.3.1. Ekintza proportzionala (P)

Izenak dioen gisan, ekintza proportzionalan, kontrol-seinalea errore-seinalearekiko proportzionala da:

$$u(t) = K_p e(t) \Rightarrow U(s) = K_p E(s) \Rightarrow C_P(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (4-4)$$

Laplace-ren eremura pasatuz, dagokion transferentzia-funtzioa lortzen da:

$$U(s) = K_p E(s) \Rightarrow C_P(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (4-5)$$

Ikusten denez, transferentzia-funtzioak ez du dinamikarik, soilik irabazi bat da.  $K_p$  irabazi *proportzionala* deitzen da.  $\frac{1}{K_p}$  berriz *banda proportzionala* deitzen da. Automatetan PID moduluak direlarik, ekintza proportzionala banda proportzionalaren bidez doitu ohi da.

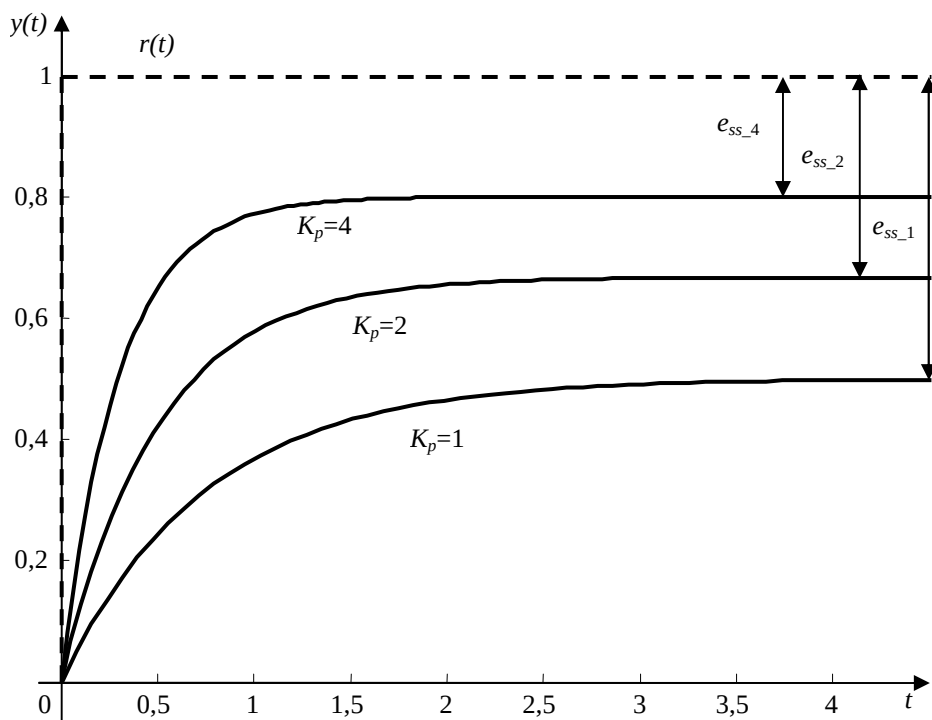
Ekintza proportzionalak errore estatikoa apaltzen laguntzen du, baina ez du 0-raino eramaten.  $K_p$  handitzen den neurrian, kate zuzeneko irabazia handitzen da eta  $e_{ss}$  txikitzen da, baina sistema oszilakor bihur daiteke, eta sobera handituz, ezegonkortu daiteke. Gainera, eragingailuaren sarrera beti mugatua da (erraterako -10 eta 10 V-en artean

mugatua izan daiteke), eta irabazi proportzionala gehiegi handituz,  $u(t)$  kontrol-seinalea satura daiteke, hau da, eragingailuaren sarrera seinalearen mugetara heltzen ahal da.

Adibide gisa, demagun 1. ordenako  $G(s)$  transferentzia-funtzio hau duen prozesua kontrolatu nahi dugula soilik irabazi proportzionala duen kontrolagailu batekin:

$$G(s) = \frac{1}{1,5s + 1} \quad (4-6)$$

4.9 irudian, simulazioen bidez lorturiko maila unitario batekiko (beraz erreferentziak 1 balio du) begizta itxiko erantzunak erakusten dira,  $K_p$ -ren balio desberdinentzat. Argiki agertzen da nola  $K_p$  handitzen den neurrian errore estatikoa apaltzen den eta dinamika azkartzen den, egonkortze-denbora beheratuz.



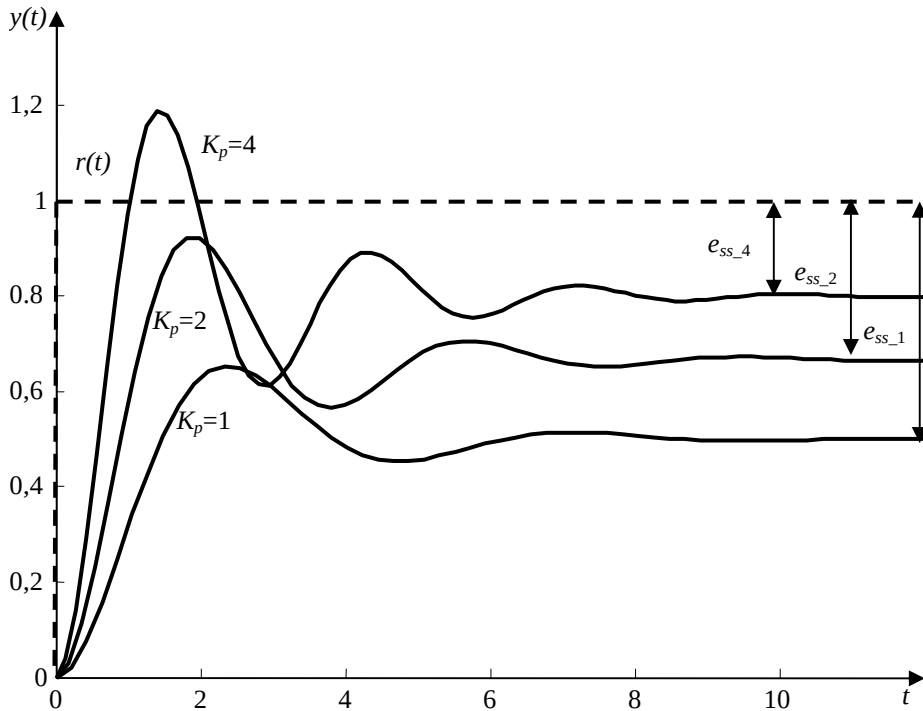
4.9 irudia. Irabazi proportzionalaren balio desberdinen arabera maila unitario batekiko begizta itxiko erantzuna, prozesua 1. ordenakoa delarik.

Bigarren adibide gisa, demagun 2. ordenako  $G(s)$  transferentzia-funtzio hau duen prozesua kontrolatu nahi dugula soilik irabazi proportzionala duen kontrolagailu batekin:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (4-7)$$



4.10 irudian, simulazioen bidez lorturiko maila unitario motako kontsigna batekiko begizta itxiko erantzunak erakusten dira,  $K_p$ -ren balio desberdinentzat. Lehen bezala, argiki agertzen da nola  $K_p$  handitzen den neurrian errore estatikoa apaltzen den. Hala ere, denbora berean, ikusten da nola erantzunaren oszilazioen anplitudea handitzen den. Horregatik, ez da beti komenigarria  $K_p$  gehiegi handitzea. Erregimen iragankor eta iraunkorraren espezifikazioak kontrajarriak dira eta, beraz, bien arteko konpromiso bat egin behar da.



4.10 irudia. Irabazi proportzionalaren balio desberdinen araberako maila unitario batekiko begizta itxiko erantzuna, prozesua 2. ordenakoa delarik.

#### 4.3.2. Ekintza integrala (I)

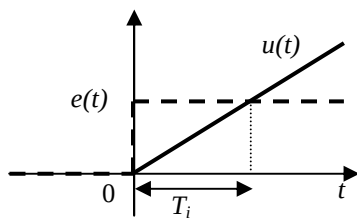
Izenak dioen gisan, ekintza integralak  $e(t)$  kontrolagailuaren sarrera integratzen du:

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4-8)$$

Laplace-ren eremura pasatuz, jada ezagutzen dugun integratzailearen transferentzia-funtzioa lortzen da:

$$U(s) = \frac{1}{T_i s} E(s) \Rightarrow C_I(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_i s} \quad (4-9)$$

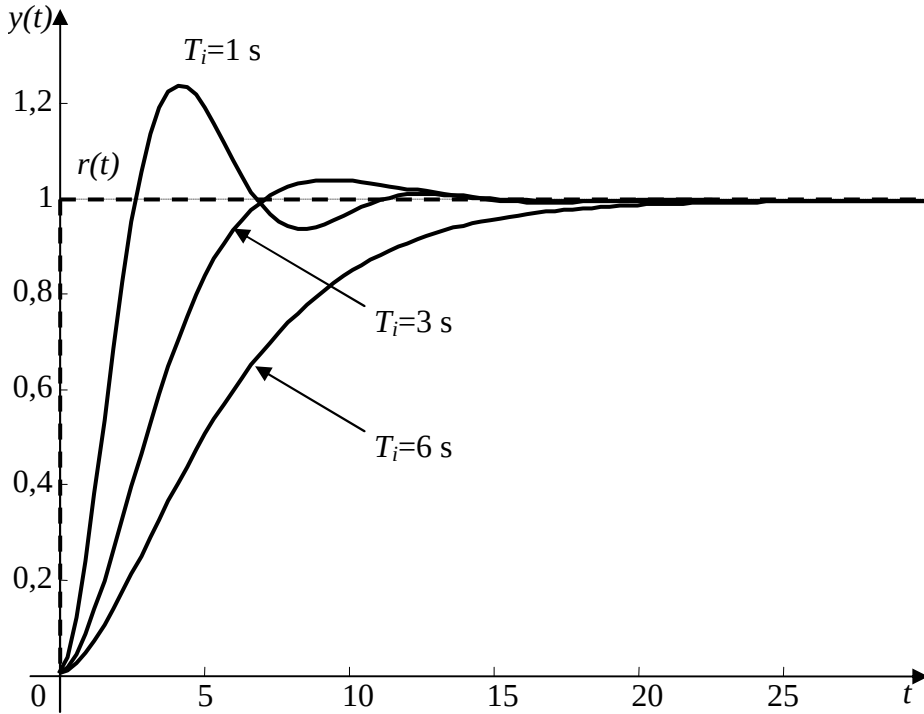
$T_i$  parametroa *integratze-denbora* da.  $K_i = \frac{1}{T_i}$  *integratze-irabazia* deitzen da. Ekintza integralaren pisua parametro horien bidez doitzen da. 4.11 irudian  $T_i$ -ren zentzua zein den ikusten da.  $T_i$  irteerako balioa sarrerako baliora heltzeko behar den denbora da.



4.11 irudia. Integratze-denboraren zentzua.

Aitzineko kapituluan ikusi den bezala, integratzaileak maila baten aurreko errore estatikoa deuseztatzea ahalbidetzen du.

4.12 irudian agertzen den adibidean ikus daitekeen bezala,  $K_i$  handitzen edo  $T_i$  txikitzen den neurrian,  $e_{ss}$  lehenago deuseztatzen da (lehenago heltzen gara egoera iraunkorrera) baina oszilazioak sor daitezke, adibide honetan gertatzen den gisan.



4.12 irudia. Irabazi integralaren balio desberdinen araberako maila unitario batekiko begizta itxiko erantzuna.

Betalde, jakin behar da ekintza integralak begizta itxiko sistema ezegonkortasunetik hurbiltzen duela, alegia, egonkortasun-tarteak edo egonkortasun erlatiboa apaltzen dituela.

### 4.3.3. Ekintza deribatzailea (D)

Aitzineko ekintzetan bezala, deribatzailearen izena bere eraginari lotua da,  $e(t)$  kontrolagailuaren sarrera deribatzen baitu:

$$u(t) = T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4-10)$$

Laplace-ren transformatua erabiliz, ekintza horri dagokion transferentzia-funtzioa lortzen da:

$$U(s) = T_d s E(s) \Rightarrow C_D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = T_d s \quad (4-11)$$

$T_d$  parametroa deribatzaile-denbora deitzen da, eta  $K_d = T_d$  deribatzaile-irabazia.

Ekintza honek erantzuna azkartzea ahalbidetzen du, gainditzea apalduz. Horregatik, ekintza egokia da dinamika mantsoa edo inertzia handia duten prozesuak kontrolatzeko.

Erreferentzia aldaketak direlarik, kontrol-seinalearen saturazioa eragin dezake. Erraterako, kontsigna maila motakoa bada, maila gertatzen den uneko malda infinitua da, errore-seinalean ere, eta, beraz, seinale horren deribatua infinitua da. Era berean, zarata-seinaleak anplifikatzen ditu.

Ekintza deribatuak duen abantaila bat da begizta itxiko sistema egonkorragoa bihurtzen duela, egonkortasun erlatiboa edo tarteak handituz.

(4-11) adierazpenean ikusten den gisan, ekintza deribatzailearen transferentzia-funtzioa ez da kausala, izendatzaileko polinomioaren ordena zenbatzailearena baino txikiagoa baita. Kausala ez izateak erran nahi du errealitatean ezin dela gauzatu. Arazo hori eta lehen aipaturiko kontrol-seinalearen saturazioaren eta zarataren anplifikazioaren arazoak saihesteko, ekintza deribatzaileari lehen ordenako filtro bat elkartzen zaio:

$$C_D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{T_d s}{1 + NT_d s} \quad (4-12)$$

$N$  parametroaren bidez, 1. ordenako transferentzia-funtzioaren denbora konstanteari alderantziz lotua den filtroaren ebaki-maiztasuna doitu daiteke (ebaki-maiztasuna ez da liburu honetan aztertzen, maiztasunaren eremuko erantzunari lotua baita). Beste modu batera erranik,  $N$  handiagoa den neurrian, seinaleak gehiago filtratzen dira.

#### 4.3.4. PI kontrolagailua (era mistoan)

Orain arte PIDaren ekintzak bakarka aztertu dira, baina jakin behar da gehienetan ekintza desberdinak elkartzen direla, bereziki P eta I ekintzak. Askotan paraleloan elkartzen dira, hau da, ekintza bakoitzaren irteera gehitzen da. Kasu horretan, elkartzearen ondorioz lortzen den transferentzia-funtzioa ekintza bakoitzari loturiko transferentzia-funtzioen batuketa da:

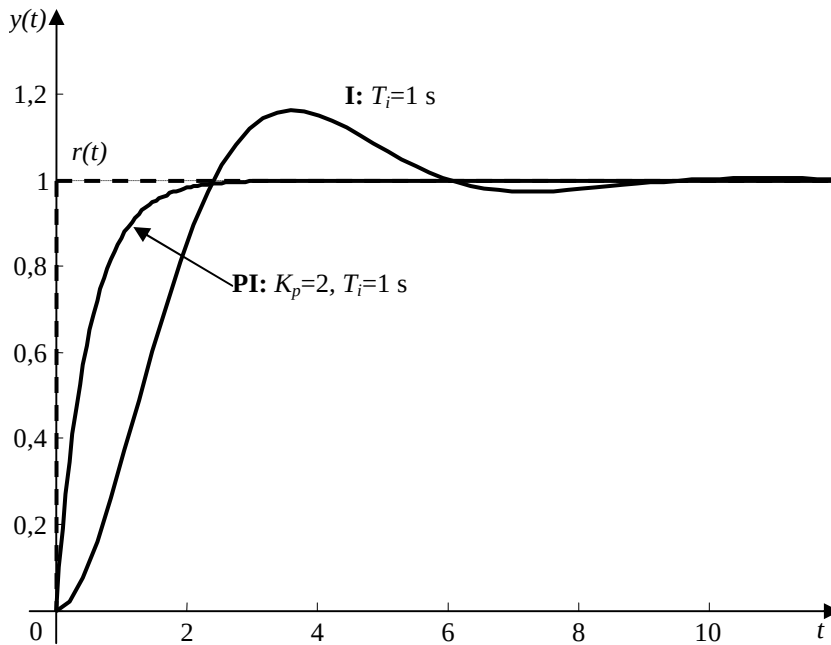
$$C_{PI}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{1}{T_i s} = \frac{K_p T_i s + 1}{T_i s} \quad (4-13)$$

Beste askotan, paralelo adierazpenaren antzeko bat erabiltzen da, *mistoa* deitzen dena, non irabazi proportzionala biderkagai edo faktore den:

$$C_{PI}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4-14)$$

P eta I ekintzak elkartuz gero, bien abantailak balia daitezke. Integralaren bidez, maila batekiko errore estatikoa 0 bihurtzea erdiesten da. Proportzionalaren bidez, berriz, erantzuna azkartzea lortzen da.

4.13 irudian PI misto baten bidez kontrolaturiko 1. ordenako sistema baten adibidea aztertzen da. Ikusten da nola integratzaileari esker, errore estatikoa nulua den. Soilik ekintza integrala erabiltzen bada, gaitzite nahiko handia gertatzen da. Aldiz, ekintza proportzionala elkartzen bazaio,  $K_p=2$  balioarekin, ikusten da nola gaitzitea desagertzen den eta erantzuna azkarragoa den, egonkortze-denbora txikiagoarekin.



4.13 irudia. PI baten bidez kontrolaturiko 1. ordenako sistema baten erantzuna, PI misto baten parametroen balio desberdinen arabera.

#### 4.3.5. PD kontrolagailua (era mistoan)

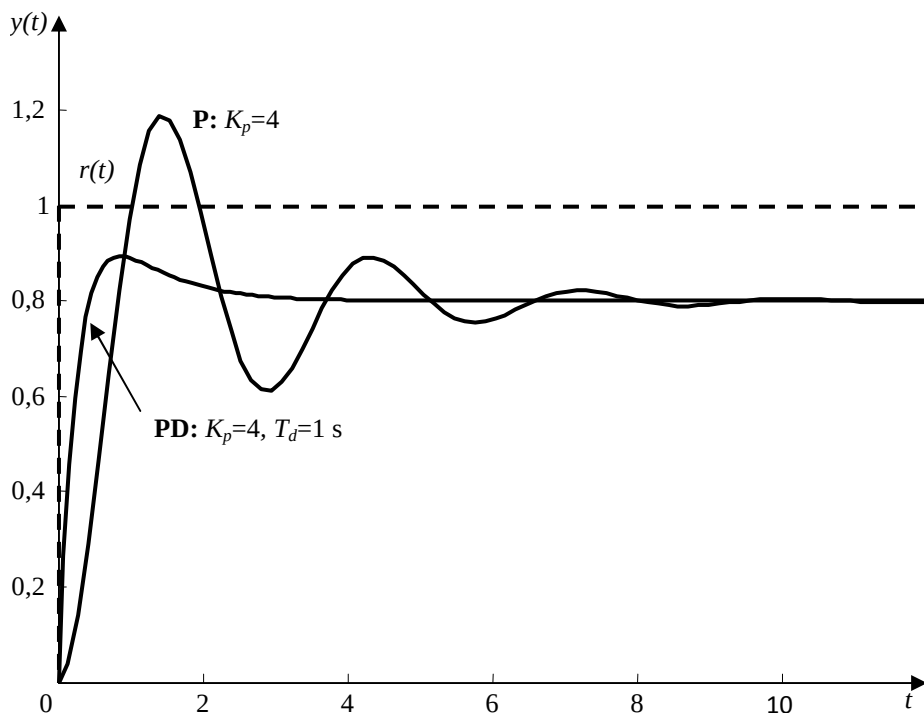
P eta I ekintzak elkartzea bezain arrunta ezn bada ere, aplikazio batzuetan P eta D ekintzak elkartzea interesgarria da, bereziki dinamika txikia duten edo ezegonkorak diren prozesuetan. PD kontrolagailua era mistoan honela idazten da:

$$C_{PD}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (4-15)$$

Lehen aipatu gisan, ekintza deribatzaileari esker, erantzun azkarragoa eta gaitzite txikiagoa lortzen da, baita egonkortasun erlatibo handiagoa ere.

Hori 4.14 irudian ikus daiteke. Adibide horretan, 2. ordenako sistema bat kontrolatzen da, lehenbizi P soil batekin, eta gero PD batekin. Proportzional soil erabiltzen delarik,  $K_p=4$  hartuz, ia % 20ko gehieneko gaitzitea agertzen da begizta itxiko erantzunean. Ekintza

deribatua elkartuz, berriz,  $T_d=1$  hartuz, erantzuna azkarragoa da eta gehienezko gainditzea nabarmenki apaltzen da. Errore estatikoa berdina da bi kasuetan. Logikoa da, zeren kate zuzenaren irabazia berdina baita. Errore estatikoa deuseztatzeko, ekintza integrala gehitu beharko litzateke.



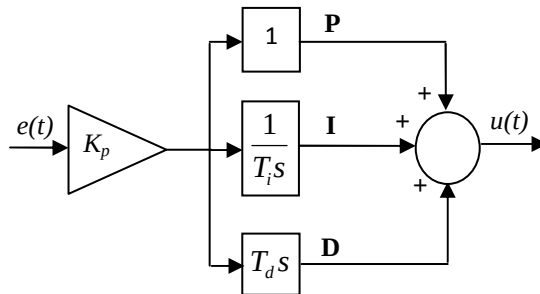
4.14 irudia. PD baten bidez kontrolaturiko 2. ordenako sistema baten erantzuna, PDaren parametroen balio desberdinen arabera.

#### 4.3.6. PID kontrolagailua (era mistoan)

Hiru ekintzen abantailak baliatzeko hiruak elkar daitezke, PID bat osatuz, erraterako era mistoan:

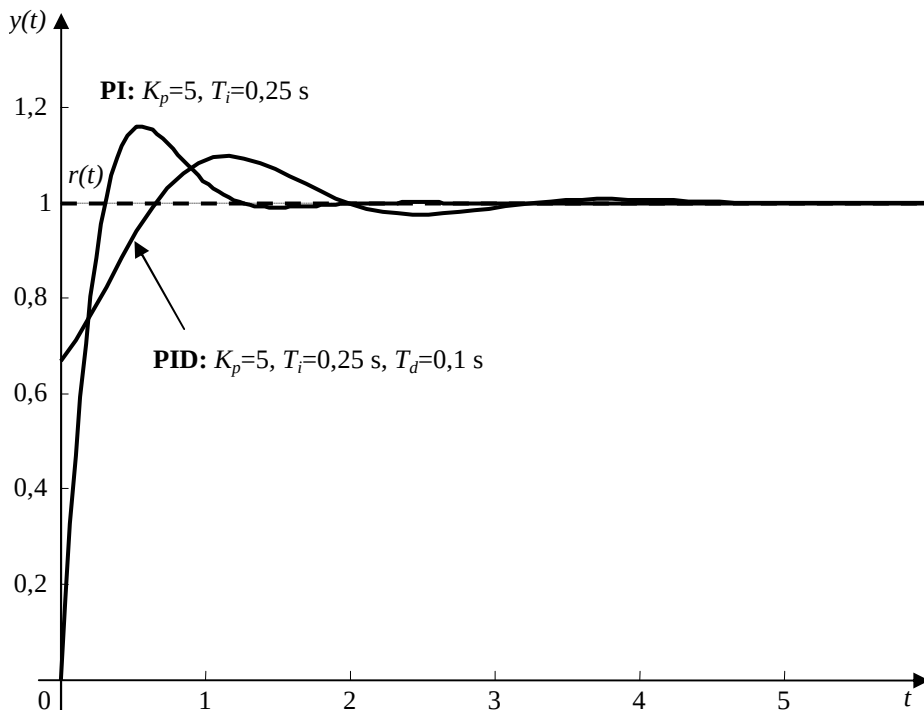
$$C_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (4-16)$$

4.15 irudian ikus daitekeen gisan, era mistoan, hiru ekintzak paraleloan dira baina irabazi proportzionala biderkagai da.



4.15 irudia. PID mistoaren bloke-diagrama.

4.16 irudian PID baten bidez kontrolaturiko 1. ordenako sistema baten erantzuna ikus daiteke, PIDaren parametroen balio desberdinen arabera.  $T_d=0$  hartuz, PIDa PI bihurtzen da, eta erantzunari begiratu gero, errore estatikorik ez dela ikusten da, I ekintzari esker, noski. Hala ere, gehienezko gaitzitatea nahiko handia da, % 16koa. Lehen aipatu gisan, balio hori apaltzeko, ekintza deribatzailea txerta daiteke kontrolagailuan. Hori eginez, nahiz eta  $T_d$  txiki batekin ( $T_d=0,1$ ), irudian argiki ikusten da gehienezko gaitzitatea apaltzen dela, % 10era hain zuzen.



4.16 irudia. PID baten bidez kontrolaturiko 1. ordenako sistema baten erantzuna, PIDaren parametroen balio desberdinen arabera.

Bitxikeria bat agertzen da PIDaren kasuan: hasierako balioa ez da zero. Hori deribatzailearengatik gertatzen da. Deribatzailea txertatuz, begizta itxiko transferentzia-funtzioa ez da hertsiki kausala. Izendatzailearen eta zenbatzailearen graduak berdinak dira, 2, eta horren eraginez, erantzuna ez da 0-n hasten. Errealitatean, lehenago aipatu gisan, deribatzailea filtratzen da, eta orduan ez da halako gertakaririk izaten.

## 4.4. PIDaren doiketa esperimentalki

Aitzineko atalean PID kontrolagailuen ekintzak aztertu ditugu bananbanan. Gainera, adibide batzuen bidez, haien parametroen doiketak begizta itxiko sistemaren erantzunean izan dezakeen influentzia zein den ikusi da pixka bat. Atal honetan, behin kontrolagailuaren egitura finkaturik, haren parametroak esperimentalki doitzeko metodo pare bat azaltzen da. Ondorengo bi azpiataletan aipatzen diren metodoak John G. Ziegler eta Nathaniel B. Nichols-ek proposatuak dira. Bi metodoak egin beharreko proba esperimentaletan oinarritzen dira.

### 4.4.1. Begizta irekiko entsegua

Metodo honetan, begizta irekiko sistemari  $A$  anplitudea duen maila bat aplikatzen zaio, eta erantzunaren ezaugarri batzuk neurtzen dira, 4.17 irudian agertzen den bezala.

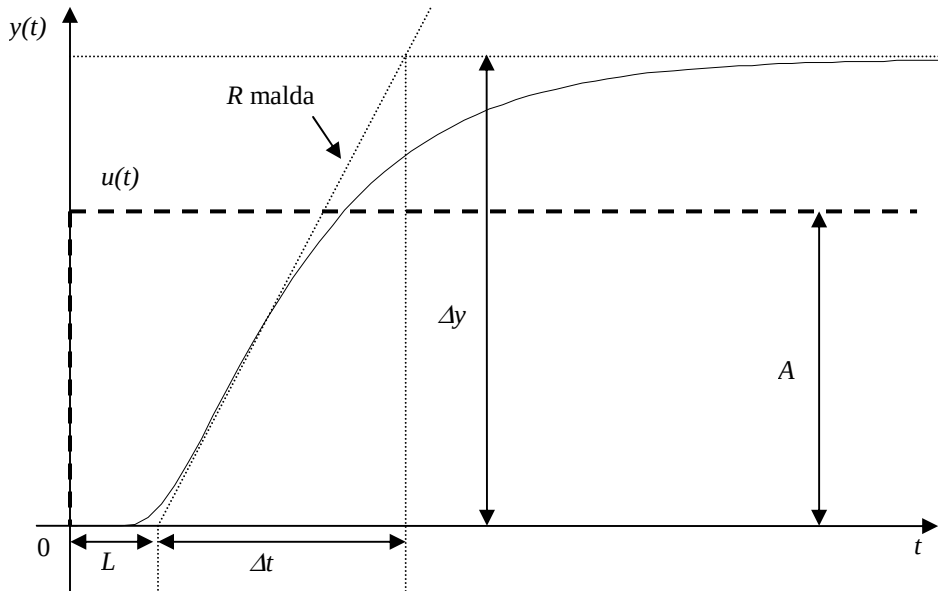
Erantzuna egonkorra bada, inflexio-puntuan den tangentea marraztu behar da, eta bi neurketa egin:

- Tangente horren malda:

$$R = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4-17)$$

- Sistemaren  $L$  atzerapena, maila gertatzen den unetik tangenteak hasierako balioa mozten duen arte.





4.17 irudia. Begizta irekiko proban neurtu beharreko ezaugarriak prozesua egonkorra delarik.

Erantzuna ez bada egonkorra, 4.18 irudian agertzen den tangentea marraztu behar da, eta bi neurketa egin:

- Tangente horren malda:

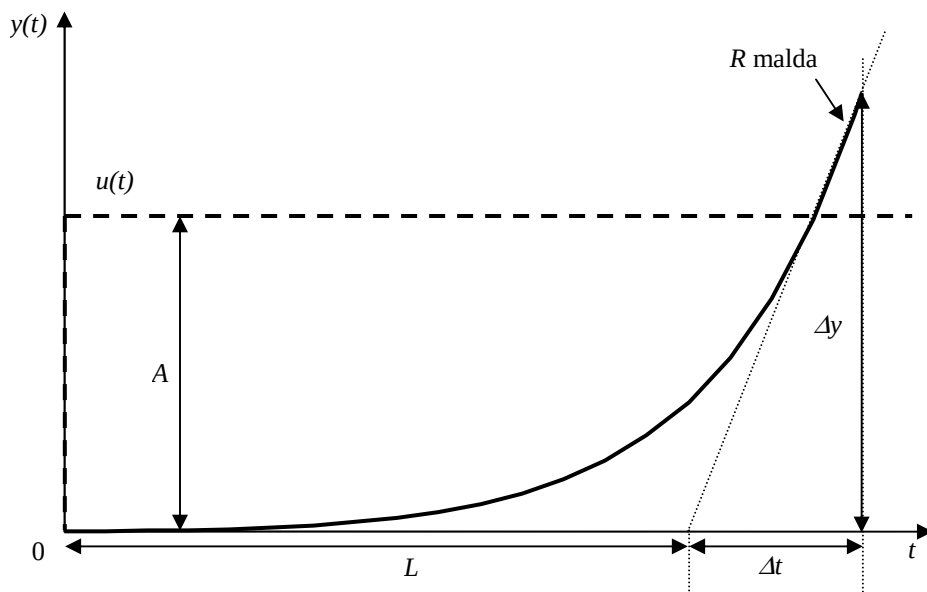
$$R = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4-18)$$

$\Delta y$  eta  $\Delta t$  aitzineko probarekin konparatuz desberdinak direla kontuan hartuz.

- Sistemaren  $L$  atzerapena, lehen bezala, maila gertatzen den unetik tangenteak hasierako balioa mozten duen arte.

Neurketa horiek eginik, malda normalizatua kalkulatu behar da, mailaren anplitudearen menpe baitaude neurturiko maldak:

$$S = \frac{R}{A} \quad (4-19)$$



4.18 irudia. Begizta irekiko proban neurtu beharreko ezaugarriak, prozesua ez delarik egonkorra.

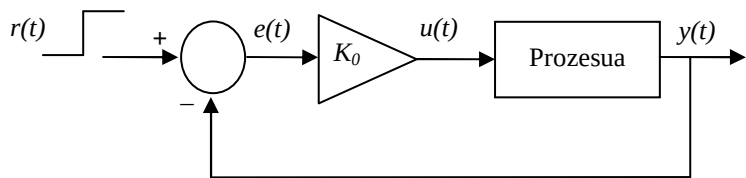
Behin neurtuta eta kalkulu horiek eginik, 4.1 taulan agertzen diren balioak erabil daitezke PID konfigurazio desberdinentzako parametroen balioak doitzeko.

4.1 taula. Begizta irekiko proba experimentalaren bidez lorturiko doiketa.

| Kontrolagailua | $K_p$      | $T_i$    | $T_d$ |
|----------------|------------|----------|-------|
| P              | $1/(LS)$   | $\infty$ | 0     |
| PI mistoa      | $0,9/(LS)$ | $3,33L$  | 0     |
| PID mistoa     | $1,2/(LS)$ | $2L$     | $L/2$ |

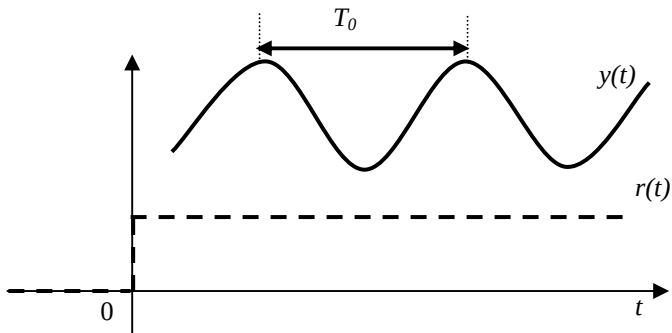
#### 4.4.2. Begizta itxiko entsegua

Bigarren metodoan, proba experimentalaren bidez lorturiko doiketa, kontrolagailu proporzional soila hartuz ( $K_d=0$  eta  $K_i=0$ ), 4.19 irudian agertzen den bezala. Sarreraren maila motako seinalea aplikatzen da.



4.19 irudia. Begizta itxiko proba egiteko konfigurazioa.

Irabazi proportzionala handitu behar da, erantzuna egonkortasunaren mugara heldu arte. Orduan, erantzuna iraunkorki oszilakorra bihurtzen da, 4.20 irudian agertzen den gisan. Irabazi proportzionalak orduan duen balioa gorde behar da,  $K_p=K_0$ , eta  $T_0$  oszilazioen periodoa neurtuz.



4.20 irudia. Begizta itxiko proban neurtu beharreko ezaugarriak.

$K_0$  eta  $T_0$  balioak erdietsirik, 4.2 taulan agertzen diren balioak erabil daitezke PID konfigurazio desberdinentzako parametroen balioak lortzeko.

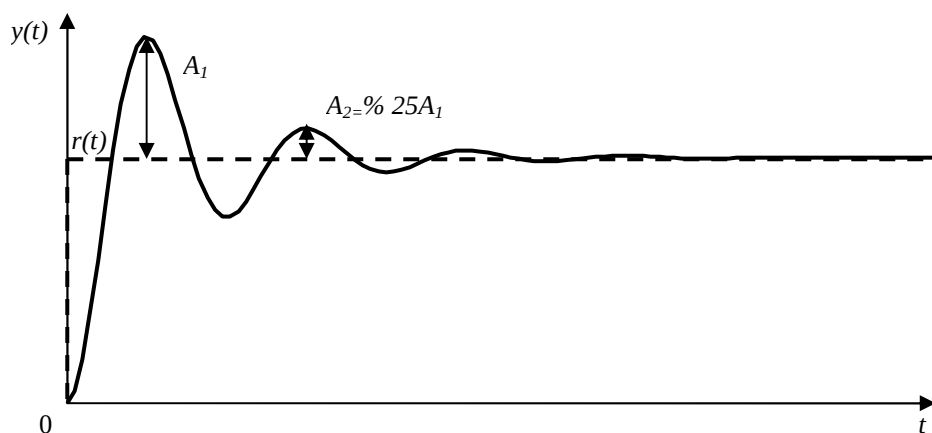
4.2 taula. Begizta itxiko proba esperimentalaren bidez lorturiko doiketa.

| Kontrolagailua | $K_p$     | $T_i$    | $T_d$      |
|----------------|-----------|----------|------------|
| P              | $0,5K_0$  | $\infty$ | 0          |
| PI mistoa      | $0,45K_0$ | $0,8T_0$ | 0          |
| PID mistoa     | $0,6K_0$  | $0,5T_0$ | $0,125T_0$ |

### 4.4.3. Oharra

Ziegler-Nichols izeneko metodoen bidez, oszilazio-periodo bakoitzeko anplitudearen % 25en moteltzea bermatzen da, 4.21 irudian erakusten den bezala.

Oro har, metodo hauekin lortzen den doiketak PID azkarrek sortzen ditu. Doiketa honek ez du aplikazio guzietarako balio. Askotan komeni da kontrolagailuaren parametroak berriz doitzea kontrolagailua pixka bat moteltzeko.



4.21 irudia. Ziegler-Nichols metodoekin doituriko kontrolagailuekin lortzen den erantzun mota.

## 4.5. PIDaren doiketa analitikoki

PIDak analitikoki ere doitu daitezke, erran nahi da kalkuluen bidez, azterketa bat eginez, eta ez esperimentalki. Horretarako, prozesuaren eredu bat behar da, haren transferentzia-funtzioa. Eredu hori kontrolagailua diseinatu eta bereziki doitzeko erabiltzen da. Horrengatik *kontrol-eredua* deitzen da.

Prozesu sinpleentzat, bereziki bi doiketa analitiko mota kontsidera daitezke PIDentzat. Bi kasuetan kontrol-ereduaz gain, begizta itxiko sistemarentzat lortu nahi diren espezifikazioak definitu behar dira.

### 4.5.1. Konpentsaziorik gabe

Metodo honetan, lehenbizi, kontrolagailuaren egitura hautatzen da definituriko espezifikazioen arabera. Gero, begizta itxiko transferentzia-funtzioa edo polinomio karakteristikoa kalkulatu da. Begizta itxiko sistemaren dinamikari buruzko espezifikazioek begizta itxian lortu nahi diren poloak definitzen dituzte. Horren bidez, begizta itxian lortu nahi den polinomio karakteristikoa idazten da. Kontrolagailuaren parametroen bidez, begizta itxiko polinomio karakteristikoaren koefizienteak doitzen dira, lortu nahi den polinomio karakteristikoaren berdinak izan daitezken.

Adibide gisa, demagun 1. ordenako transferentzia-funtzio arrunt bat kontrolatu nahi dela:

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad (4-20)$$

Demagun gainera kontrol-espezifikazio hauek ematen direla:

- Maila batekiko errore estatikoa nulua izan behar da.
- Begizta itxian, 2. ordenako sistema oszilakor baten joera nahi da, non gehienezko gainditzea % 5 izatea nahi den, eta % 5eko egonkortze-denbora 3 segundokoa.

Egoera iraunkorreko espezifikazioaren ondorioz, ekintza proportzionalaz gain, integrala ere kontuan hartu behar da, alegia, PI bat.

Bestalde, begizta itxian erdietsi nahi den egoera iragankorrari dagokionez, 3.24 irudian ikus daitekeen gisan, % 5eko gehienezko gainditzea lortzeko,  $\xi=0,7$  izan behar da. Era berean,  $\xi$ -ren balio horrentzat, 3.25 irudian ikus daitekeenez,  $t_s(\% 5)$  bider  $\omega_n$ -k gutxi gorabera 3 balio du. Beraz,  $t_s(\% 5)$  3 segundokoa izatea nahi dugula kontuan hartuz,  $\omega_n$ -k 1 rad/s balio izan behar du.

2. ordenako sistema oszilakor baten poloak honela idazten dira:

$$\begin{cases} s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \quad (4-21)$$

Eta polinomio karakteristikoa:

$$PK(s) = (s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (4-22)$$

Beraz, begizta itxirako desiratzen den polinomio karakteristikoa,  $\xi=0,7$  eta  $\omega_n=1$  ordezkatuz, hau da:

$$PK_{des}(s) = s^2 + 1,4s + 1 \quad (4-23)$$

Pla paraleloan adieraziz (era mistoan ere egiten ahalko litzateke):

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} \quad (4-24)$$

Orduan, begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkula daiteke:

$$G_{BI}(s) = \frac{C_{PI}G}{1+C_{PI}G} = \frac{\frac{K}{1+Ts} \frac{K_p s + K_i}{s}}{1 + \frac{K}{1+Ts} \frac{K_p s + K_i}{s}} = \frac{KK_p s + KK_i}{s(1+Ts) + KK_p s + KK_i} \quad (4-25)$$

Eta izendatzailea ordenatuz:

$$G_{BI}(s) = \frac{KK_p s + KK_i}{Ts^2 + (1 + KK_p)s + KK_i} = \frac{1}{T} \frac{KK_p s + KK_i}{s^2 + \frac{(1 + KK_p)}{T}s + \frac{KK_i}{T}} \quad (4-26)$$

Garrantzitsua da polinomio karakteristikoan potentzia handiena duen monomioaren koefizientea (kasu honetan  $s^2$ -rena) 1 izatea, desiratzen den polinomio karakteristikoarekin modu egokian konparatzeko. Aitzineko adierazpenean, horregatik dena  $T$ -rekin zatitu da. Lortzen den begizta itxiko polinomio karakteristikoa hau da:

$$PK_{BI}(s) = s^2 + \frac{(1 + KK_p)}{T}s + \frac{KK_i}{T} \quad (4-27)$$

Desiratzen den polinomio karakteristikoarekin konparatuz, bi ekuazio hauek lortzen dira:

$$\begin{cases} \frac{(1 + KK_p)}{T} = 1,4 \\ \frac{KK_i}{T} = 1 \end{cases} \quad (4-28)$$

Ekuazio-sistema horretatik desiratzen den begizta itxiko polinomio karakteristikoa lortzeko  $K_p$  eta  $K_i$  parametroek izan behar duten balioa erdiesten da:

$$\begin{cases} K_p = \frac{1,4T - 1}{K} \\ K_i = \frac{T}{K} \end{cases} \quad (4-29)$$

$K_p$  eta  $K_i$ -ren balio horiekin, 1. ordenako  $T$  eta  $K$  parametroen balioa edozein izanik ere, begizta itxian lortu nahi diren poloak lortzen dira. Hala ere, begizta itxiko (4-25) adierazpenari begiratu, begizta itxiko transferentzia-funtzioak zero bat duela ikusten da:

$$z = -\frac{K_i}{K_p} \quad (4-30)$$

Zero horrek begizta itxiko joera dinamikoa influentzia dezake, eta, beraz, ez da kasu guzietan % 5eko gehieneko gaintitzea eta segundo bateko  $t_s$ (% 5) lortuko.

#### 4.5.2. Polo/zeroen konpentsazio edo deuseztatzearekin

Bigarren metodo honetan, problema sinplifikatzen da kate zuzenean prozesuaren poloak edo/eta zeroak deuseztatuz.

Demagun, lehen bezala, kontrolatu nahi den prozesua 1. ordenakoa dela:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{\frac{K}{T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (4-31)$$

eta egoera iraunkorreko espezifikazio bera dugula. Orduan, PI bat hartzen dugu kontrolagailu gisa, paralelo moduan adieraziz:

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} = K_p \frac{s + \frac{K_i}{K_p}}{s} \quad (4-32)$$

Kate zuzeneko transferentzia-funtzioa aztertuz, erraz ohar gaitezke ezen, kontrolagailuaren zeroa prozesuaren poloarekin berdinduz, transferentzia-funtzio hori sinplifikatzen dela. Deuseztatze hori gertatzeko, baldintza hau bete behar dute  $K_p$  eta  $K_i$ -k:

$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T} \quad (4-33)$$

Eta orduan, kate zuzeneko transferentzia-funtzioa hau da:

$$G_{KZ}(s) = C_{PI}(s)G(s) = K_p \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s} \frac{\frac{K}{T}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)} = \frac{K_p K}{s} \quad (4-34)$$

Ondorioz, begizta itxiko transferentzia-funtzioa 1. ordenakoa da:

$$G_{BI}(s) = \frac{G_{KZ}(s)}{1 + G_{KZ}(s)} = \frac{KK_p}{KK_p + s} \quad (4-35)$$

Aitzineko metodoaren adibidean bezala,  $t_s(\%5)$  egonkortze-denbora segundo batekoa izatea nahi bada, orduan, begizta itxiko denbora konstanteak baldintza hau bete behar du:

$$T_{BI} = \frac{1}{KK_p} = \frac{t_s(\%5)}{3} \quad (4-36)$$

Hori gertatzeko,  $K_p$ -k baldintza hau bete behar du:

$$K_p = \frac{3}{Kt_s(\%5)} = \frac{1}{K} \quad (4-37)$$

Beraz, baldintza horrekin, eta (4-33) adierazpenean lortutakoarekin, bi ekuazioko sistema hau erdiesten da  $K_p$  eta  $K_I$ -ren balioak aurkitzeko:

$$\begin{cases} \frac{K_i}{K_p} = \frac{1}{T} \\ K_p = \frac{1}{K} \end{cases} \quad (4-38)$$

Eta hortik,  $K_p$  eta  $K_I$ -ren balioak erdiesten dira:

$$\begin{cases} K_i = \frac{1}{KT} \\ K_p = \frac{1}{K} \end{cases} \quad (4-39)$$

Aitzineko metodoan lorturiko emaitzarekin konparaketa eginez, kasu honetan, begizta itxiko transferentzia-funtzioak ez du zerorik. Beraz, haren dinamika soilik duen polo bakarraren menpe dago. Ondorioz,  $K_p$  eta  $K_I$ -ren balio hauentzat, prozesuaren  $K$  irabazi estatikoa eta  $T$  denbora konstantea edozein izanik ere, begizta itxiko transferentzia-funtzioa 1. ordenakoa izanen da eta haren % 5eko egonkortze-denbora 3 segundokoa.

Metodo honek oso eraginkorra dirudien arren, bi ohar garrantzitsu kontuan hartu behar dira:

- Prozesuaren polo/zeroak deuseztatzean, soilik egonkorrak direnak deusezta daitezke, hau da, haien zati erreala negatiboa duten polo/zeroak. Bestela, polo ezegonkor horiek deuseztatzen badira, kate zuzeneko transferentzia-funtzioan ez agertu arren, erantzun librean eragina dute, eta, beraz, erantzun hori ezegonkor bihurtzen da, erantzun osoa ezegonkortuz.
- Deuseztatze edo konpentsazio hori egitean, pentsatzen da prozesuaren eredua (kontrol-eredua) ongi ezagutzen dela eta ez dela aldakorra. Kasu gehienetan, lortzen den eredua ez du arras prozesu erreala duen dinamika, eta, gainera, prozesua alda daiteke denboraren edo funtzionamendu-puntuaren arabera, pixka bat izan arren. Horrek erran nahi du kontrol-ereduan ditugun  $K$  eta  $T$  parametroak ez direla arras zuzenak izanen orokorrean, eta, beraz, deuseztapena ere ez dela beti zehatz-zehatza izanen. Dena den, egiazko prozesuaren  $K$  eta  $T$  parametroen balioak ez badira kontrol-ereduarenetatik asko urruntzen, begizta itxian lortuko den joera dinamikoa nahi zena izanen da gutxi gorabera.



## 4.6. Ondorioak

Bi motatako kontrolagailu ikusi ditugu kapitulu honetan.

Lehena Dena/Ezer ez motakoa, ez da lineala, beraz, ez da aitzineko kapituluetan sistema linealei buruz ikusi ditugun kontzeptuei zuzenki lotua. Oso kontrol-sistema xumea da eta espezifikazioak pobreak direlarik erabiltzen da, erraterako, errore estatikoa nulua izatea ez delarik eskatzen eta oszilazio iraunkorrak onartzen direlarik. Oro har, inertzia handia edo dinamika mantsoa duten prozesuei aplika dakieke.

Azterturiko bigarren motako kontrolagailuak PIDak dira. Oso kontrolagailu erabiliak dira gaur egun ere industrian. Ikusi denez, hiru ekintza desberdin dira PID batean. Bakoitzak bere abantaila eta desabantailak ditu. Ekintza desberdinak elkartu daitezke bataren eta bestearen abantailak baliatzeko, prozesuaren eta espezifikazioen arabera.

Kontrolagailu horien parametroak doitzeko, 2 metodo nagusi aztertu ditugu. Bata, Ziegler-Nichols deiturikoa, proba esperimentaletan oinarritua da. Bigarren metodoan, PIDaren parametroak analitikoki lortzen dira, begizta itxian erdietsi nahi diren espezifikazioen eta kontrol-ereduaren arabera.

Kapitulu honetan landu denarekin kontrolagailuak diseinatzeko eta doitzeko has daiteke irakurlea. Hala ere, kontrolagailu *bikain* bat diseinatzeko, kontzeptu berri bat landu beharko litzateke: egonkortasun erlatiboa. Horrek segurtatzen du kontrolagailua ongi ibiliko dela, nahiz eta kontrol-eredua ez izan oso zehatza, edo kontrolatu nahi den prozesuaren joera pixka bat aldakorra izan. Jadanik aipatu den gisan, kontzeptu hori ez da lantzen liburu honetan, baina Kontrolean bere ezagutzak sendotu nahi dituenak, liburuaren bukaeran ematen den bibliografia irakurriz egin dezake, bereziki egonkortasun erlatiboa nola kontuan hartzen den ikasiz.

## 4.7. Ariketak

### 4.7.1. PI kontrolagailuaren doiketa analitikoki

Beheko lehen mailako  $G(s)$  transferentzia-funtzioak prozesu fisiko bat ereduztatzen du.

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad \text{non } K > 0 \text{ eta non 2 kasu aztertzen diren: } T > 0 \text{ eta } T < 0$$

Sistema hori erregulatu nahi da, helburu hauek lortzeko:

- Egonkortasuna.
- Maila-sarrera baten aurreko egoera iraunkorreko errore nulua.
- Dinamika zehatz bat:

o  $T < 0$  baldin bada, 2. ordenako sistema batena,  $\xi_{des}$  moteltze-faktorea eta  $\omega_{h_{des}}$  maiztasun naturala duena.

o  $T > 0$  bada,  $T_{des}$  denbora konstantea duen 1. ordenako sistema baten dinamika.

Erabiliko den erregulatzailer/kontrolatzailea PI misto bat da:

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_p}{T_i s}$$

- Justifika ezazu Plaren erabilera.
- Adieraz itzazu  $K_p$  et  $T_i$  prozesuaren ( $K$  eta  $T$ ) eta desiratzen den dinamikaren ( $\omega_{h_{des}}$  eta  $\xi_{des}$ ) parametroen arabera  $T < 0$  den kasurako. Eraitza azaldu eta 2. ordenako dinamikaren hautua justifikatu. Zein balio izan behar du  $\xi_{des}$ -k % 5eko egonkortze-denbora ahal bezain txikia izan dadin,  $\omega_{h_{des}}$ -en balioa edozein izanik ere? Eta  $\xi_{des}$ -ren balio horrentzat, zein balio izan behar luke  $\omega_{h_{des}}$ -ek % 5eko egonkortze-denbora 0,5 s-koa izan dadin?
- Adieraz itzazu  $K_p$  eta  $T_i$  prozesuaren ( $K$  eta  $T$ ) eta desiratzen den dinamikaren ( $T_{des}$ ) parametroen arabera  $T > 0$  den kasurako ( $G(s)$ -ren poloa konpentsatu/deuseztatu beharko da). Eraitza azaldu eta 1. ordenako dinamikaren hautua justifikatu. Zein balio izan behar du  $T_{des}$ -ek % 5eko egonkortze-denbora 0,5 s-koa izan dadin?

### **Ebazpena:**

- Plaren erabileraren justifikazioa:

Espezifikazioetan maila batekiko errore estatikoa 0 izatea galdetzen da. Hori lortzeko, integratzaile bat behar da kate zuzenean. Prozesuan ez denez, kontrolagailuan sartu behar da. Horregatik, ekintza integrala kontuan hartzen da kontrolagailuan. Ekintza proportzionala begizta itxiko dinamika doitzeko balia daiteke.  $P$  eta  $I$  ekintzekin, bi parametro ditu kontrolagailuak ( $K_p$  et  $T_i$ ), eta parametro horiei esker 2. ordenako polinomio karakteristiko baten koefizienteak, eta, beraz, poloak, desiratzen direnak izan daitezke.

- $T < 0$  kasua:

Kasu honetan prozesuaren poloa positiboa da, eta, beraz, ezin da deuseztatu. Ondorioz, begizta itxiko sistema 2. ordenakoa da:

$$G_{BI}(s) = \frac{C_{PI}(s)G(s)}{1 + C_{PI}(s)G(s)} = \frac{\frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} \frac{K}{1 + Ts}}{1 + \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} \frac{K}{1 + Ts}} = \frac{KK_p(T_i s + 1)}{T_i s(1 + Ts) + KK_p(T_i s + 1)} \quad (4-40)$$

$$G_{BI}(s) = \frac{KK_p(T_i s + 1)}{TT_i s^2 + T_i(1 + KK_p)s + KK_p} = \frac{\frac{KK_p}{TT_i}(T_i s + 1)}{s^2 + \frac{1 + KK_p}{T}s + \frac{KK_p}{TT_i}} \quad (4-41)$$

Desiratzen den 2. ordenako polinomio karakteristikoa hau da:

$$PK_{des}(s) = s^2 + 2\xi_{des}\omega_{n\_des}s + \omega_{n\_des}^2 \quad (4-42)$$

$G_{BI}(s)$ -ren izendatzailearekin alderatuz, begizta itxiko polinomioa desiratzen den bezalakoa izan dadin  $K_p$  eta  $T_i$ -k izan behar duten balioa lortzen da:

$$\begin{cases} \frac{1 + KK_p}{T} = 2\xi_{des}\omega_{n\_des} \Rightarrow K_p = \frac{2\xi_{des}\omega_{n\_des}T - 1}{K} \\ \frac{KK_p}{TT_i} = \omega_{n\_des}^2 \Rightarrow T_i = \frac{KK_p}{T\omega_{n\_des}^2} = \frac{2\xi_{des}\omega_{n\_des}T - 1}{T\omega_{n\_des}^2} \end{cases} \quad (4-43)$$

3.25 irudian ikusten denez, egonkortze-denbora txikiena  $\xi=0,7$ -rentzat lortzen da. Beraz  $\xi_{des}=0,7$  hartzen da. Balio horrentzat,  $\omega_n t_s(\%5) \approx 3$ . Ondorioz,  $t_s(\%5)$  0,5 s-koa izatea nahi bada:

$$\omega_{n\_des} = \frac{3}{t_s(\%5)_{des}} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ rad/s} \quad (4-44)$$

c)  $T > 0$  kasua:

Kasu honetan prozesuaren poloa egonkorra da eta, beraz, deusezta daiteke. Ondorioz, begizta itxian, lehen ordenako sistema bat erdiesten da. Polo deuseztatu aitzin, idatz dezagun  $G(s)$  poloa argiki ager dadin moduan:

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{\frac{K}{T}}{\frac{1}{T} + s} \quad (4-45)$$

Poloa nola deuseztatzen den azaltzeko, kontrolagailua gisa honetara adierazten da:

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_p}{T_i s} = \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s} = K_p \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \quad (4-46)$$

Kontrolagailua prozesuarekin seriean dago, kate zuzenean. Beraz, bi transferentzia-funtzioak biderkatzen dira.  $G(s)$  eta  $C_{PI}(s)$ -ren azken adierazpen horiei begiratuta,

argiki ikusten da  $T_i = T$  aukeratuz,  $C_{PI}(s)$ -ren zeroa eta  $G(s)$ -ren poloa deuseztatzen direla. Horren ondorioz, lehenago erran gisan, begizta itxiko transferentzia-funtzioa 1. ordenakoa bihurtzen da:

$$G_{BI}(s) = \frac{C_{PI}(s)G(s)}{1 + C_{PI}(s)G(s)} = \frac{\frac{K_p}{s} \frac{K}{T}}{1 + \frac{K_p}{s} \frac{K}{T}} = \frac{KK_p}{Ts + KK_p} \quad (4-47)$$

Hau da begizta itxiko polo bakarraren adierazpena:

$$s = -\frac{KK_p}{T} \quad (4-48)$$

Begizta itxiko denbora konstantea  $T_{des}$  izatea nahi bada:

$$s = -\frac{KK_p}{T} = s_{des} = -\frac{1}{T_{des}} \quad (4-49)$$

Horretarako,  $K_p$ -k baldintza hau bete behar du:

$$K_p = \frac{T}{KT_{des}} \quad (4-50)$$

Beraz,  $T_i$  eta  $K_p$  gisa horretara hautatuz, begizta itxiko transferentzia-funtzioa  $T_{des}$  denbora konstantea duen 1. ordenako sistema izanen da.

%5eko egonkortze-denbora 0,5 s-koa izatea nahi bada,  $T_{des}$ -ek balio hau izan beharko du:

$$T_{des} = \frac{t_s(\%5)}{3} = \frac{0,5}{3} \approx 0,167 \text{ s} \quad (4-51)$$

## 5. Bibliografia

Tapia Otaegi, A. eta Florez Esnal, J. (1995): *Erregulazio Automatikoa*, Elhuyar, ISBN: 978-84-92457-65-6.

Ogata, K. (1998): *Ingenieria de Control Moderna*, Pearson Educación, 3. edizioa, ISBN 970-17-0048-1.

Granjon, Y. (2010): *Automatique. Systèmes Linéaires, Non Linéaires, à Temps Continu, à Temps Discret, Représentation d'Etat*, Dunod, 2. edizioa, ISBN 978-2-10-053423-4.

Landau, I. D. eta Zito, G. (2006): *Digital Control Systems. Design, Identification and Implementation*, Springer, ISBN 1-84628-055-9.



**ERANSKINAK**





## A eranskina: Frakzio sinpleetako deskonposizioa

Frakzio konplexuak lortzen direlarik, frakzio sinpleagotan deskonposa daitezke. Hori nola egin erakusten da eranskin honetan.

Demagun  $G(s)$  frakzioa dugula. Frakzio sinpletan deskonposatzeko, izendatzailea faktorizaturik adierazi behar da:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{1}{a_n} \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{(s+s_1)(s+s_2)^k (s^2+as+b)(s^2+cs+d)^l} \quad (\text{A-1})$$

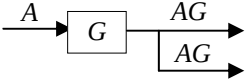
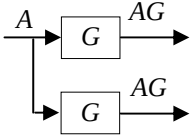
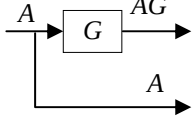
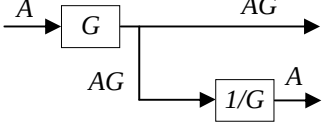
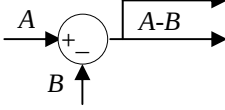
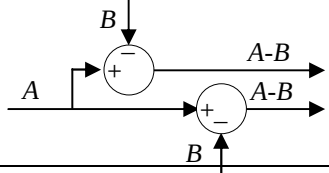
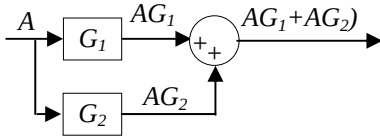
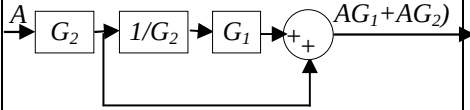
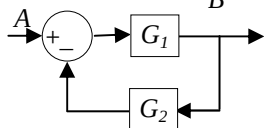
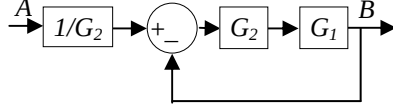
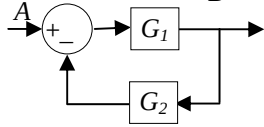
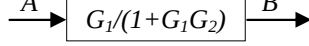
Orduan,  $G(s)$  frakzio hauetan sinplifika daiteke:

$$G(s) = \frac{A_1}{(s+s_1)} + \frac{B_1}{(s+s_2)} + \frac{B_2}{(s+s_2)^2} + \dots + \frac{B_k}{(s+s_2)^k} + \frac{C_1 s + D_1}{(s^2+as+b)} + \frac{E_1 s + F_1}{(s^2+cs+d)} + \frac{E_2 s + F_2}{(s^2+cs+d)^2} + \dots + \frac{E_l s + F_l}{(s^2+cs+d)^l} \quad (\text{A-2})$$

Frakzio sinpleei loturiko A, B, C, ... koefizienteen balioak lortzeko, zenbait metodo badira. Metodo horiek ezagutzeko, 2.5.6 ariketaren ebazpena azter daiteke. Hor, metodo batzuk azaltzen eta erabiltzen dira.

## B eranskina: Bloke-diagramak grafikoki sinplifikatzeko arauak

|   | Hasierako bloke-diagrama | Diagrama baliokidea |
|---|--------------------------|---------------------|
| 1 |                          |                     |
| 2 |                          |                     |
| 3 |                          |                     |
| 4 |                          |                     |
| 5 |                          |                     |
| 6 |                          |                     |
| 7 |                          |                     |

|    |                                                                                     |                                                                                      |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 8  |    |     |
| 9  |    |    |
| 10 |    |    |
| 11 |    |    |
| 12 |   |   |
| 13 |  |  |

## C eranskina: Funtzio erabilieneen Laplace-ren transformatua

|    | $f(t), t > 0$ denean                                                                             | $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$          |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 1  | $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \text{ bada} \\ 0 & t \neq 0 \text{ bada} \end{cases}$ | 1                                   |
| 2  | 1                                                                                                | $\frac{1}{s}$                       |
| 3  | $t$                                                                                              | $\frac{1}{s^2}$                     |
| 4  | $t^n$                                                                                            | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                |
| 5  | $e^{-at}$                                                                                        | $\frac{1}{s+a}$                     |
| 6  | $te^{-at}$                                                                                       | $\frac{1}{(s+a)^2}$                 |
| 7  | $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$                                                                       | $\frac{1}{s(s+a)}$                  |
| 8  | $\cos(\omega t)$                                                                                 | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$          |
| 9  | $\sin(\omega t)$                                                                                 | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$     |
| 10 | $e^{-at} \cos(\omega t)$                                                                         | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$    |
| 11 | $e^{-at} \sin(\omega t)$                                                                         | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |

|    |                                                                                                                                                                                            |                                                        |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 12 | $0 \leq \xi < 1 \text{ bada,}$ $\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi\right)$ $\text{non } \Phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ | $\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$          |
| 13 | $\xi < 1 \text{ bada,}$ $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right)$                                                                   | $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ |