Ikerkuntza Operatiboari begirada praktikoa ematen

Maria Begoña García
Inmaculada Lecubarri
Luis Martín
Juan Carlos Soto
Aitziber Unzueta

UEU

Ikerkuntza Operatiboari begirada praktikoa ematen

Maria Begoña García
Inmaculada Lecubarri
Luis Martín
Juan Carlos Soto
Aitziber Unzueta

Udako Euskal **Unibertsitatea**
Bilbo, 2017

© Udako Euskal Unibertsitatea

© Maria Begoña García, Inmaculada Lecubarri, Luis Martín, Juan Carlos Soto, Aitziber Unzueta

UEUren ISBNa: 978-84-8438-637-7

Lege-gordailua: BI-1313-2017

Inprimategia: PRINTHAUS S.L., Bilbo

Azalaren diseinua: Igor Markaida Uriagereka

Hizkuntza-zuzenketen arduraduna: Ander Altuna Gabiola

Banatzaileak: UEU. Erribera 14, 1, D BILBO. Telf. 946790546

Helbide elektronikoa: argitalpenak@ueu.eus

www.ueu.eus

Elkar Banaketa: Igerabide, 88 DONOSTIA

Galarazita dago liburu honen kopia egitea, osoa nahiz zatikakoa, edozein modutara delarik ere, edizio honen Copyright-jabeen baimenik gabe.

Liburu honek UEUren argitalpengintzako ebaluazio-prozesua gainditu du; liburuaren jakintza-alorreko bi adituk ebaluatu dute jatorrizkoa, *peer review* erako ebaluazioan, horietako batek egilearen daturik ezagutu gabe (*double-blind*).

Lagundu diguten eta gure ondoan ez dauden pertsonei

Aurkibidea

1. PROGRAMAZIO LINEALA: SIMPLEX ALGORITMOA 9
1.1. Sarrera 9
1.2. Lehenengo kasu praktikoa 10
1.2.1. Ebazpen grafikoa 10
1.2.2. Simplex algoritmoa 11
1.3. Bigarren kasu praktikoa 13
1.4. Kasu bereziak 17
1.4.1. Problema bideraezina 17
1.4.2. Problema mugatugabea 17
1.4.3. Soluzio anizkoitza 18
1.5. Ondorioak 18

2. PROGRAMAZIO LINEALA: ZIGORTZE-METODOA ETA BI FASEKO METODOA 19
2.1. Sarrera 19
2.2. Lehenengo kasu praktikoa 20
2.2.1. Ebazpen grafikoa 20
2.2.2. Zigortze-metodoa 21
2.2.3. Bi faseko metodoa 23
2.3. Bigarren kasu praktikoa 26
2.4. Ondorioak 30

3. PROGRAMAZIO LINEALA: SIMPLEX-DUAL METODOA 31
3.1. Sarrera 31
3.2. Lehenengo kasu praktikoa 31
3.3. Bigarren kasu praktikoa 34
3.4. Hirugarren kasu praktikoa 36
3.5. Laugarren kasu praktikoa 39
3.6. Ondorioak 41

4. PROGRAMAZIO LINEALA: EBAZPENA EXCEL KALKULU-ORRIA ETA PHPSIMPLEX PROGRAMA ERABILIZ 43
4.1. Sarrera 43
4.2. Solver erabiliz ebatzitako kasu praktikoa 46
4.3. PHPSimplex erabiliz ebatzitako kasu praktikoa 53
4.4. Kasu bereziak 56
4.4.1. Problema bideraezina 56
4.4.2. Problema mugatugabea 59
4.4.3. Soluzio anizkoitza 61
4.5. Ondorioak 63

5. PROGRAMAZIO LINEAL OSOA ETA BITARRA 65
5.1. Sarrera 65
5.2. Lehenengo kasu praktikoa 66
5.3. Bigarren kasu praktikoa 71
5.4. Kasu bereziak 74
5.4.1. Problema bideraezina 74
5.4.2. Problema mugatugabea 76
5.5. Ondorioak 77

6. PROGRAMAZIO LINEALEKO PROBLEMA BEREZIAK: GARRAIOA, ESLEIPENA, BI PUNTUREN ARTEKO DISTANTZIA ETA FLUXU MAXIMOA 79
6.1. Garraio-problema 79
6.1.1. Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako garraio-problema 80
6.1.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako garraio-problema 83
6.2. Esleipen-problema 87
6.2.1. Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako esleipen-problema 88
6.2.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako esleipen-problema 90
6.3. Bi punturen arteko distantzia minimoa 93
6.3.1. Excel erabiliz ebatzitako distantzia minimoko problema 94
6.3.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako distantzia minimoko problema .. 98
6.4. Fluxu maximoko problema 105
6.4.1. Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako fluxu maximoko problema 105
6.4.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako fluxu maximoko problema 108
6.5. Ondorioak 114

7. HAINBAT ILARA-EREDU 115
7.1. Sarrera 115
7.2. M/M/1 eredua 117
7.2.1. Lehenengo kasu praktikoa 119
7.3. M/M/s eredua 121
7.3.1. Bigarren kasu praktikoa 122
7.4. M/G/1 eredua 126
7.4.1. Hirugarren kasu praktikoa 127
7.5. M/D/1 eredua 129
7.5.1. Laugarren kasu praktikoa 129
7.6. Ilara-sisteman erabakia hartzea 130
7.6.1. Bosgarren kasu praktikoa 130
7.7. Ondorioak 133

8. APLIKAZIO PRAKTIKOAK 135
8.1. Simplex metodoaren aplikazio praktikoa 135
8.2. Zigortze-metodoaren aplikazioa praktikoa 138
8.3. Bi faseko metodoaren aplikazio praktikoa 140
8.4. PHPSimplex-en aplikazio praktikoa 142
8.5. Dualtasunaren teoriaren aplikazio praktikoa 146
8.6. Excel kalkulu-orriaren aplikazio praktikoa 148
8.7. Garraio-problemaren aplikazio praktikoa 151
8.8. Esleipen-problemaren aplikazio praktikoa 152
8.9. Distantzia minimoko problemaren aplikazio praktikoa 154
8.10. Fluxu maximoko problemaren aplikazio praktikoa 158
8.11. Ilara-teoriaren aplikazio praktikoa 161

BIBLIOGRAFIA 163

1. Programazio lineala: Simplex algoritmoa

Simplex algoritmoa oso metodo erabilia da programazio linealean (PLan). Funtzio lineal baten optimoaren bilaketan zentratzen diren problemak ebazteko erabiltzen da, problemaren aldagaiak linealak diren inekuazioak betetzen dituztelarik.

Jarraian, Simplex metodoa zehazteaz gain, nekazari bati erabaki bat hartzen lagunduko zaion adibidea azalduko dugu. Nekazariak lursail bati eman beharreko erabilerari eta bertan erein beharreko produktuei buruzko zalantzak ditu, haren bi semeek lursailaren erabilerari buruzko iradokizun desberdinak baitituzte. Gai honetan, bi semeen iradokizunak ebaluatu, iradokizun bat bestea baino egokiagoa den zehaztu eta mozkin altuagoa emango duen beste aukera bat dagoen aztertuko da. Hau da, Simplex metodoa aplikatuz problemaren soluzio optimoa kalkulatuko da.

Gako-hitzak: programazio lineala (PLa), Simplex algoritmoa, oinarrizko soluzio bideragarria, onarpen-eremua, multzo ganbila, soluzio optimoa, Gauss-en ezabapen-metodoa, matrize-kalkulua.

1.1. SARRERA

PLa eredu matematiko bezala proposatzen da. Gastuak planifikatzeko Bigarren Mundu Gerran zehar garatu zen, armadako kostuak murrizteko eta etsaiaren galerak handitzeko asmoz. 1947ra arte sekretuan gorde zen. Gerraondoan, industria askok bere eguneko plangintzan erabiltzen zuen. Zalantzarik gabe, gaur egun, erakundeetan erabakiak hartzea gero eta konplexuagoa da eta kudeatzaileei lana errazten dieten metodo kuantitatiboak behar dira, intuizioa eta esperientzia beti onak ez baitira.

Teknikaren sortzaileak George Dantzig, John von Neumann eta Leonid Kantoróvich dira. George Dantzig-ek Simplex algoritmoa 1947an argitaratu zuen, eta urte berean, John von Neumann-ek dualtasunari buruzko teoria garatu zuen. Bukatzeko, Leonid Kantoróvich-ek antolaketarako eta produkziorako antzeko teknikak erabili zituen, 1975ean Ekonomiako Nobel Saria irabaziz.

Simplex algoritmoaren prozedurak mutur batetik abiatuz ondoz ondoko muturreko puntu berriak ematen ditu, helburu funtzioak puntu horietan hartzen dituen balioak gero eta handiagoak edo berdinak izanik (maximizazio kasuan). Soluzio optimoa iterazio kopuru finitua eginez lortzen da. Metodo honi esker, problemaren

soluzioa mugagabea edo mugatua den zehatz daiteke. Are gehiago, soluzioa mugatua denean, bakarra edo anizkoitza den adierazten du.

1.2. LEHENENGO KASU PRAKTIKOA

Koldo nire lagunak 60 hektareako lursail txiki bat jarauntsi du eta oloa eta azenarioak erein nahi ditu. Bere bi semeek, Andonik eta Jonek, berarekin lan egitea pentsatu dute.

Andonik azenarioak erein nahi ditu, horien irabazi garbia, 10 €/ha-ko gastuak kendu ondoren 300 €/ha-koa da. Jonek, aldiz, oloa erein nahi du, oloaren irabazi garbia baxuagoa da, 200 €/ha, eta gastuak, berriz, 30 €/ha-koak dira. Bestalde, oloak azenarioak baino ur gutxiago behar du, 2 m^3/ha eta 4 m^3/ha hurrenez hurren. Garai kritikorako 200 m^3 ur baino ez dute izango.

Koldok ereintzaren gastuei (hazien erosketari, soldatapekoen kontratazioari, ...) aurre egiteko 1.200 € baino ez dituztela adierazten du.

Semeetariko batek arrazoia al du eta oloa soilik ala azenarioak soilik erein behar dituzte? Mozkin altuagoa ematen duen beste aukerarik al dago?

Laborantza biei buruzko baldintzak barnean dituen eredu matematikoa ondorengoa da:

$$\text{Max} \quad Z = 300x + 200y$$

$$\begin{aligned} x + y &\leq 60 \\ 10x + 30y &\leq 1200 \\ 4x + 2y &\leq 200 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

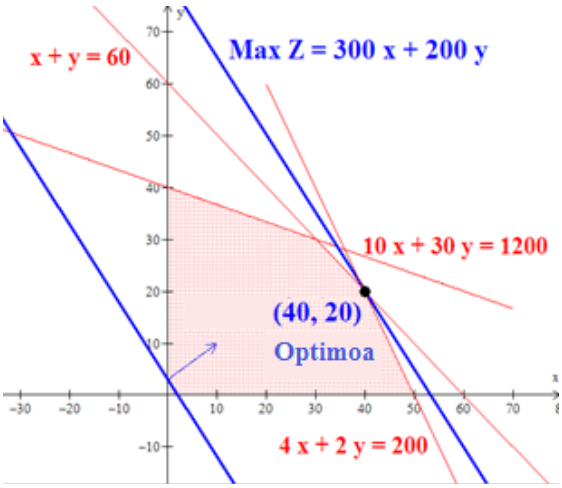
Z lortutako mozkina, x azenarioak landatzeko erabilitako hektarea kopurua eta y oloa landatzeko erabilitako hektarea kopurua izanik.

Ohartu landatze-prozesua aurreko ereduaren interpretazioa egokiaren menpe dagoela.

1.2.1. Ebazpen grafikoa

Grafikoki era erraz batean ebatz daitekeen hiru inekuazio eta bi ezezaguneko PLko problema bat da.

1.1. irudian ikusten den bezala, Koldok Andoni bere semeak esandakoa aintzakotzat hartzen badu, azenarioak landatzeko 50 ha erabiliko ditu, lursaileko 10 ha landatu gabe utziz eta 15.000 euroko mozkina lortuz. Aldiz, Jon bere semeak esandakoa aintzat hartzen badu, oloa landatzeko 40 ha erabiliko ditu, lursaileko 20 ha landatu gabe utziz eta askoz baxuagoa den mozkina (8.000 euro) lortuz.



1.1. irudia.

Hala ere, Koldok ez die semeei jaramonik egin behar, azenarioak landatzeko 40 ha eta oloa landatzeko 20 ha erabiliz gero mozkin altuagoa (16.000 eurokoa) lortuko baitu, landatzeko lursail guztia erabiliz.

Problema honek bi aldagai dituenez grafikoki ebatz daiteke, baina nola ebatz daiteke eredu matematikoak bi aldagai baino gehiago baditu?

1.2.2. Simplex algoritmoa

Simplex algoritmoak bi aldagai baino gehiago dituen mota honetako, PLko, problemak ebaztea posible egiten du.

h_1, h_2, h_3 lasaiera-aldagaiak erabiliz, ereduaren forma estandarra lortzen da:

$$\text{Max} \quad Z = 300x + 200y + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3$$

$$x + y + h_1 = 60$$
$$10x + 30y + h_2 = 1200$$
$$4x + 2y + h_3 = 200$$
$$x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $h_1 = 60, h_2 = 1200, h_3 = 200$ da. Simplex algoritmoaren hasierako taula honako hau da, K_o oinarrizko aldagaiek helburu funtzioan dituzten koefizienteak izanik:

		c_i	300	200	0	0	0
K_o	b_i		x	y	h_1	h_2	h_3
0	**60**	h_1	1	1	1	0	0
0	**1.200**	h_2	10	30	0	1	0
0	**200**	h_3	**4**	2	0	0	1
$Z = 0$		z_i	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	–300	–200	0	0	0

Oinarritik irteten den bektorea

Oinarrira sartzen den bektorea

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria ez da optimoa, negatiboak diren kostu murriztuak $(z_i - c_i)$ existitzen baitira. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x aldagaiari dagokiona da, $\text{Max}\left|z_i - c_i\right| = \text{Max}\{300, 200\} = 300$, eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea h_3 da, izan ere $\underset{a_{ij>0}}{\text{Min}}\left\{\frac{b_i}{a_{i1}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{60}{1}, \frac{1200}{10}, \frac{200}{4}\right\} = 50$.

x bektorea oinarrizko bektorea izatea lortzeko Gauss-en (Strang, 1988) ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	300	200	0	0	0
K_o	b_i		x	y	h_1	h_2	h_3
0	**10**	h_1	0	**1/2**	1	0	–1/4
0	**700**	h_2	0	25	0	1	–10/4
300	**50**	x	1	1/2	0	0	1/4
$Z = 15.000$		z_i	300	150	0	0	75
		$z_i - c_i$	0	–50	0	0	75

Oinarritik irteten den bektorea

Oinarrira sartzen den bektorea

Oinarrizko aldagaiak orain h_1, h_2, x dira. Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea y aldagaiari dagokiona da, $\text{Max}\left|z_i - c_i\right| = \text{Max}\{50\} = 50$, eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea h_1 da, izan ere $\underset{a_{ij>0}}{\text{Min}}\left\{\frac{b_i}{a_{i2}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{10}{1/2}, \frac{700}{25}, \frac{50}{1/2}\right\} = 20$.

y bektorea oinarrizko bektorea izatea lortzeko Gauss-en ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	300	200	0	0	0
K_o	b_i		x	y	h_1	h_2	h_3
200	**20**	y	0	1	2	0	–1/2
0	**200**	h_2	0	0	–50	1	10
300	**40**	x	1	0	–1	0	1/2
$Z = 16.000$		z_i	300	200	100	0	50
		$z_i - c_i$	0	0	100	0	50

Taula horretan $z_i - c_i \geq 0 \ \forall i$ betetzen dela ikus daiteke, hortaz, soluzioa optimoa da.

$$x = 40 \text{ ha}, \ y = 20 \text{ ha} \ \text{ eta } \ Z = 16.000 \ \text{ euro}$$

Bestalde, azken errenkadan agertzen den bezala, nuluak diren kostu murriztuak soilik oinarrizko aldagaiei dagozkienak direnez, *soluzioa bakarra da*.

Hortaz, Koldo nire lagunak ez du semeek esaten dutena aintzakotzat hartu behar, azenarioak landatzeko 40 ha eta oloa landatzeko 20 ha erabiltzen baditu, mozkin maximoa lortuko baitu, 16.000 eurokoa izango dena.

1.3. BIGARREN KASU PRAKTIKOA

Atzo Koldorekin geratu nintzen produktu bakoitzeko zenbat hektarea erein beharko zuen komentatzeko.

Arreta handiz entzun ondoren, nire lagunak barkamena eskatu zidan erratu baitzen eta azenarioen irabazi garbia oloarenaren bikoitza zela esan zidan, 400 €/ ha-koa hain zuzen.

Produktu bakoitzeko hektarea kantitate bera erein beharko du ala irabazi handiagoak lortzeko beste aukera batzuk daude?

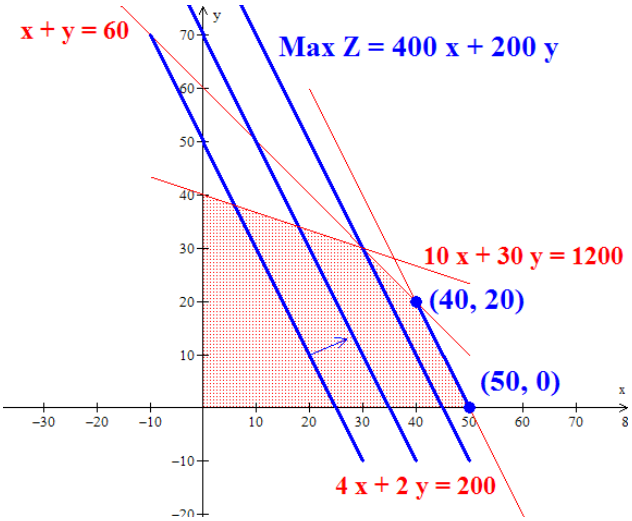
Bi laborantzen ereintzari buruzko baldintzak kontuan hartzen dituen eredu matematikoa hau da:

$$\text{Max} \quad Z = 400x + 200y$$

$$x + y \leq 60$$
$$10x + 30y \leq 1200$$
$$4x + 2y \leq 200$$
$$x, y \geq 0$$

Z lortutako mozkin ekonomikoa, x azenarioak landatzeko erabilitako hektarea kopurua eta y oloa landatzeko erabilitako hektarea kopurua izanik. Ebazpen grafikoan irabazi bera ematen duten ereintzaren beste aukera batzuk daudela ikus daiteke.

Andonik bere semeari jaramon egiten badio, azenarioak landatzeko 50 ha erabiliko ditu eta 20.000 euroko mozkina lortuko du, lursaileko 10 ha landatu gabe utziz. Bestalde, azenarioak landatzeko 40 ha eta oloa landatzeko 20 ha erabiltzen baditu, mozkina bera lortuko du, gainera lursail osoa landatuz.



1.2. irudia.

Azken finean, ekonomikoki Andoniren aukera —azenarioak soilik ereitea— Jonena baino onuragarriagoa da. Baina mozkin bera ematen duten eta bi produktuak kontuan hartzen dituzten beste aukera batzuk ere badaude; izan ere, $(40, 20)$ eta $(50, 0)$ erpinen arteko edozein puntu ere soluzio optimoa izango da.

Problema honek bi aldagai dituenez, grafikoki ebatz daiteke (1.2. irudia). Hala ere, eredu matematikoak bi aldagai baino gehiago baditu eta ebazteko Simplex metodoa erabiltzen bada, nola jakin soluzio bat baino gehiago dagoen?

h_1, h_2, h_3 lasaiera-aldagaiak erabiliz, ereduaren forma estandarra lortzen da:

$$\text{Max} \quad Z = 400x + 200y + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3$$

$$x + y + h_1 = 60$$
$$10x + 30y + h_2 = 1200$$
$$4x + 2y + h_3 = 200$$
$$x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $h_1 = 60, h_2 = 1200, h_3 = 200$ da, Simplex algoritmoaren hasierako taula hau da:

		c_i	400	200	0	0	0
Ko	b_i		x	y	h_1	h_2	h_3
0	**60**	h_1	1	1	1	0	0
0	**1.200**	h_2	10	30	0	1	0
0	**200**	h_3	**4**	2	0	0	1
$Z = 0$		z_i	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	–400	–200	0	0	0

Oinarritik irteten den bektorea

Oinarrira sartzen den bektorea

x bektorea oinarrizkoa izatea lortzeko Gauss-en ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	400	200	0	0	0
Ko	b_i		x	y	h_1	h_2	h_3
0	**10**	h_1	0	1/2	1	0	–1/4
0	**700**	h_2	0	25	0	1	–10/4
400	**50**	x	1	1/2	0	0	1/4
$Z = 20.000$		z_i	400	200	0	0	100
		$z_i - c_i$	0	0	0	0	100

Taula horretan $z_i - c_i \geq 0 \ \forall i$ betetzen dela ikus daiteke, hortaz soluzioa optimoa da.

Taulako azken errenkadan y aldagaia oinarrian ez dagoela eta haren kostu murriztua 0 dela ikus daiteke. Hortaz, problemak soluzio anizkoitza du, $x = 50$, $y = 0$ eta $Z = 20.000$ izanik. Beste soluzio bat lortzeko, nahikoa da y aldagaia oinarrira sartzea h_1 oinarritik ateraz.

Taula berria hau da:

		c_i	400	200	0	0	0
K_o	b_i		x	y	h_1	h_2	h_3
0	**10**	h_1	0	1/2	1	0	–1/4
0	**700**	h_2	0	25	0	1	–10/4
400	**50**	x	1	1/2	0	0	1/4
$Z = 20.000$		z_i	400	200	0	0	100
		$z_i - c_i$	0	0	0	0	100

Azken taula horretatik honako soluzio hau lortzen da: $x = 40$ ha, $y = 20$ ha eta $Z = 20.000$ euro.

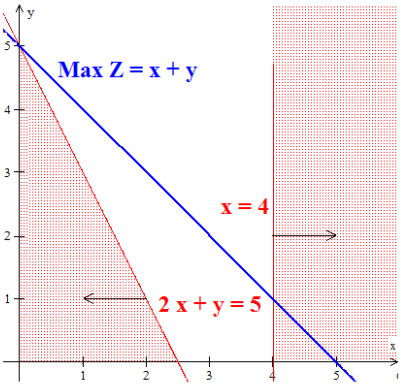
Beraz, Koldok Andoniri jaramon egin diezaioke eta azenarioak landatzeko 50 ha besterik ez erabili, horrela 20.000 euroko mozkina lortuz. Baina, irabazi bera ematen duten ereiteko beste aukera batzuk daudela jakin beharko du, adibidez, azenarioak eta oloa landatzeko 40 ha eta 20 ha erabiltzea hurrenez hurren.

Andoniren proposamenean ikusten den bezala, soluzio ez-endekatua da, oinarrizko soluzioan, gutxienez aldagai baten balioa zero delako. Grafikoki bi zuzenek baino gehiagok puntu berean elkar ebakitzen dutenean gertatzen da. Errealitatean, horrek esan nahi du ereduak gutxienez erredundantea den murrizketa bat duela eta soluzio anizkoitzak dituela.

1.4. KASU BEREZIAK

1.4.1. Problema bideraezina

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = \; & x + y \\ 2x + y \leq \; & 5 \\ x \geq \; & 4 \\ x, y \geq \; & 0 \end{aligned}$$

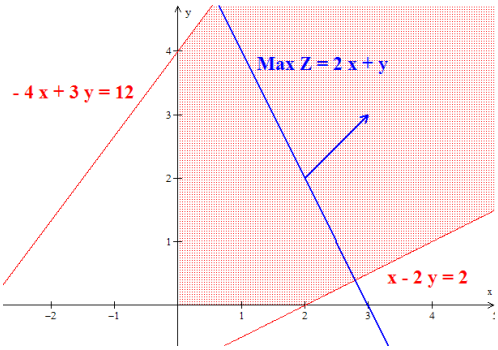


1.3. irudia

Problemak zehaztutako murrizketak aldi berean betetzen dituen punturik existitzen ez denean gertatzen da, hau da, onarpen-eremua multzo hutsa denean. Egoera honetan, Simplex metodoa aplikatu ondoren lortutako azken taulan aldagai artifizialak oinarriaren barnean daude (2. gaia).

1.4.2. Problema mugatugabea

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = \; & 2x + y \\ x - 2y \leq \; & 2 \\ -4x + 3y \leq \; & 12 \\ x, y \geq \; & 0 \end{aligned}$$

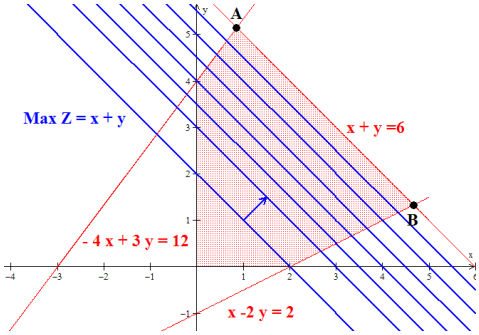


1.4. irudia

Soluzio finitua ez duten problemak daude. Egoera honetan, Simplex-eko azken taulan dagokion aldagaia oinarrira sartzea ezinezkoa da, haren zutabeari elkartutako elementuak negatiboak baitira.

1.4.3. Soluzio anizkoitza

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= x + y \\
x + y &\leq 6 \\
x - 2y &\leq 2 \\
-4x + 3y &\leq 12 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$



1.5. irudia.

Onarpen-eremuko ondoz ondoko bi erpin (bi aldagai) problemaren soluzio optimoak badira, orduan, bi erpin horien artean dagoen zuzenkiko edozein puntu ere soluzio optimoa izango da. Egoera honetan, Simplex metodoa aplikatu ondoren lortutako azken taulan oinarrizko aldagaia ez den aldagairen baten kostu murriztua nulua da.

1.5. ONDORIOAK

Erabakiaren teorian, erabakitzailea deitutako indibiduoa hainbat hautabideren artean aukeratzera behartuta dago. Erabakitzailearentzat ezinbestekoa da aukera egokiak hartzea, horien menpekoa izango den kantitate bat maximizatu (irabazia bada) edo minimizatu (galera bada) nahiko baitu.

Simplex algoritmoa prozedura analitikoa da eta erabiltzeko aukera anizkoitzak daudenean baliabide mugatuaren esleipen optimoa zehazten du. Erabakiaren teorian ekintzarik onuragarrienak hartzen laguntzeko funtsezko tresna da.

Baina beti erabil daiteke Simplex metodoa?

2. Programazio lineala: zigortze-metodoa eta bi faseko metodoa

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria lortzea ezinezkoa denean, Simplex metodoa ezin da erabili eta hasierako problema ebatzi ahal izateko aldatu behar da. Arazo hori konpontzea baimentzen duten algoritmoak zigortze-metodoa eta bi faseko metodoa dira.

Gai honetan metodo horiek aurkeztearekin batera, trenbide-konpainia bati merkantzia-tren bateko bagoien banaketarekin laguntzen zaio, horrela bere mozkina maximizatzeko.

Gako-hitzak: programazio lineala (PLa), zigortze-metodoa, bi faseko metodoa, oinarrizko soluzio bideragarria, soluzio optimoa, matrize-kalkulua.

2.1. SARRERA

Simplex metodoa aplikatzean sortzen diren arazoek, horien artean hasierako soluzio bideragarria lortzea ezinezkoa izateagatik Simplex metodoa aplikatu ezin izateak, zigortze-metodoa eta bi faseko metodoa ikustera garamatza.

Zigortze-metodoak bi etapa ditu. Lehenengoan, aldagai artifizialak «penalizazio» handi bat erabiliz helburu funtzioan sartzen dira, horrela posible denean aldagai artifizialak oinarritik ateraz. Bigarren etapan, berriz, lehenengoan soluzio bideragarri bat lortu bada, hasierako probleman Simplex algoritmoa aplikatzen da.

Bi faseko metodoak, berriz, lehenengo fasean aldagai artifizialen batura minimizatzen du eta bigarren fasean aurreko fasean lortutako emaitzaren arabera aldagaiak zerora finkatu eta hasierako problema ebazten du.

Bi metodo hauetako lehenengo fasearen edo etaparen bukaeran soluzio bideragarria existitzen den edo ez zehazten da.

2.2. LEHENENGO KASU PRAKTIKOA

Trenbide-konpainia batek irabazi maximoa lortzeko merkantzia-tren bateko bagoiak nola banandu jakin nahi du.

Aipatutako trenak traktoreak eta uzta-makinak garraiatu behar ditu eta 28 bagoi eraman ditzake gehienez. Bestalde, uzta-makinak garraiatzeko erabilitako bagoiak gutxienez 12 dira. Gainera, uzta-makinak daramatzaten bagoien kopurua ken traktoreak daramatzaten bagoien kopurua sei baino txikiagoa edo berdina da.

Trenbide-konpainiaren diru-sarrerak uzta-makina bakoitzeko 9.000 €-koak eta traktore bakoitzeko 6.000 €-koak dira.

Baliteke trenbide-konpainiaren irabazi maximoa zehaztea Simplex metodoa erabiliz? Zergatik? Ezezko kasuan, nola eman konpainiari soluzio bat?

Plangintza-prozesua bere interpretazio zuzenaren menpekoa dela jakinez, merkantzia-treneko bagoien banaketa aintzat hartzen duen eredu matematikoa honako hau da:

$$\text{Max} \quad Z = 9000x_1 + 6000x_2$$

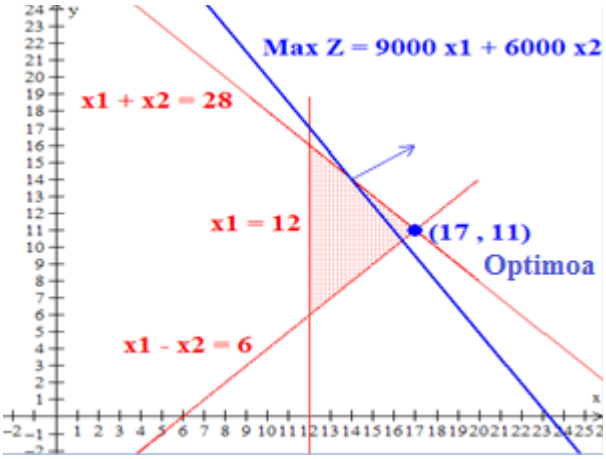
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 28 \\ x_1 \qquad &\geq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z mozkin ekonomikoa, x_1 uzta-makinak garraiatzeko erabilitako bagoien kopurua eta x_2 traktoreak garraiatzeko erabilitako bagoien kopurua izanik.

2.2.1. Ebazpen grafikoa

Bi aldagai eta hiru ezezagun dituen PLko problema bat denez, grafikoki erraz ebatz daiteke.

2.1. irudian ikusten den moduan, trenbide-konpainiak irabazi maximoa lortzeko (219.000 euro), bagoien planifikazioa honako era honetan egin beharko du: 17 bagoi uzta-makinak garraiatzeko eta 11 bagoi traktoreak garraiatzeko.



2.1. irudia.

Baliteke kasu praktikoa ebaztea Simplex metodoa erabiliz?

y_1, y_2, y_3 lasaiera-aldagaiak sartuz, problema forma estandarrean idazten da:

$$\text{Max} \quad Z = 9000x_1 + 6000x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 28 \\ x_1 \qquad - y_3 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Simplex algoritmoarekin hasteko ezin da soluzio bideragarririk lortu. 5 aldagai eta 3 ekuazio daude, beraz, 5 – 3 = 2 aldagai baztertu beharko dira:

$x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 28, y_2 = -12, y_3 = 6$ ez da soluzio bideragarria, hortaz, Simplex algoritmoa ezin da erabili.

2.2.2. Zigortze-metodoa

Oinarrizko hiru aldagai behar direnez, kostu negatiboaren balio absolutua behar den bezain handia duen aldagai artifizial bat sartzen da. Formulazio berria honako hau da:

$$\text{Max} \quad Z = 9000x_1 + 6000x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 - Mp_1$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 28 \\ x_1 \quad - y_3 + p_1 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $y_1 = 28,\ p_1 = 12,\ y_3 = 6$ da. Problemari elkartutako honako taula honetan Simplex algoritmoa aplika daiteke:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	- M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**28**	y_1	1	1	1	0	0	0
–M	**12**	p_1	1	0	0	0	–1	1
0	**6**	y_3	**1**	–1	0	1	0	0
Z = –12M		z_i	–M	0	0	0	M	–M
		$z_i - c_i$	–M–9.000	–6.000	0	0	M	0

Soluzioa ez da optimoa. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_1 aldagaiari dagokiona eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_3 da.

x_1 bektorea oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	-M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**22**	y_1	0	2	1	–1	0	0
–M	**6**	p_1	0	**1**	0	–1	–1	1
9.000	**6**	x_1	1	–1	0	1	0	0
Z = 54.000–6M		z_i	9.000	–9.000–M	0	9.000+M	M	-M
		$z_i - c_i$	0	–15.000–M	0	9.000+M	M	0

Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_2 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea p_1 da.

x_2 bektorea oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	–M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**10**	y_1	0	0	1	1	**2**	–2
6.000	**6**	x_2	0	1	0	–1	–1	1
9.000	**12**	x_1	1	0	0	0	–1	1
Z = 90.000		z_i	9.000	6.000	0	–6.000	–15.000	15.000
		$z_i - c_i$	0	0	0	–6.000	–15.000	15.000+M

Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea y_3 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_1 da.

y_3 bektorea oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	–M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**5**	y_3	0	0	1/2	1/2	1	–1
6.000	**11**	x_2	0	1	1/2	–1/2	0	0
9.000	**17**	x_1	1	0	1/2	1/2	0	0
Z = 219.000		z_i	9.000	6.000	7.500	1.500	0	0
		$z_i - c_i$	0	0	7.500	1.500	0	M

Taula horretan $z_i - c_i \geq 0 \;\; \forall i$ betetzen dela ikus daiteke. Beraz, soluzio optimo bakarra honako hau da: $x_1 = 17, x_2 = 11$ eta Z = 219.000 euroko mozkina.

2.2.3. Bi faseko metodoa

Metodo honetan, lehenengo fasean oinarrizko soluzio bideragarri bat lortzen da eta bigarrenean hasierako problemaren soluzio optimoa kalkulatzen da. Liburu honetan, algoritmoa PLko minimizazio-problemetarako zehazten da.

Bigarren errenkadan aldagai artifizial bat sartzen da eta PLko problema minimizazio-problema bat bezala planteatzen da hasierako oinarria lortzeko:

$$\text{Max} \quad Z = 9000x_1 + 6000x_2 \qquad\qquad \text{Min} \quad -Z = -9000x_1 - 6000x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 28 \\ x_1 \qquad - y_3 + p_1 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 28 \\ x_1 \qquad - y_3 + p_1 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lehenengo faseari dagokion problema honako hau da:

$$\text{Min} \quad -Z = p_1$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 28 \\ x_1 \qquad - y_3 + p_1 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarri bat $y_1 = 28,\ p_1 = 12,\ y_3 = 6$ da. Problemari elkartutako honako taula honetan Simplex algoritmoa aplika daiteke.

		c_i	0	0	0	0	0	1
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**28**	y_1	1	1	1	0	0	0
1	**12**	p_1	1	0	0	0	–1	1
0	**6**	y_3	**1**	–1	0	1	0	0
–Z = 12		z_i	1	0	0	0	–1	1
		$z_i - c_i$	1	0	0	0	–1	0

Soluzioa ez da optimoa. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_1 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_3 da. x_1 bektorea oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_i	0	0	0	0	0	1
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**22**	y_1	0	2	1	-1	0	0
1	**6**	p_1	0	**1**	0	-1	–1	1
0	**6**	x_1	1	–1	0	1	0	0
–Z = 6		z_i	0	1	0	–1	–1	1
		$z_i - c_i$	0	1	0	–1	–1	0

Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_2 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea p_1 da.

x_2 bektorea oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_i	0	0	0	0	0	1
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**10**	y_1	0	0	1	1	2	–2
0	**6**	x_2	0	1	0	–1	–1	1
0	**12**	x_1	1	0	0	0	–1	1
Z = 0		z_i	0	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	0	0	0	0	0	–1

Taula hori lehenengo faseko azken taula da eta ikus daiteke $z_i - c_i \leq 0 \ \forall i$ dela. Bertan $p_1 = 0$ denez, aldagai artifiziala oinarritik kanpo dago. Orain bigarren fasera pasatzen da, hasierako problema berriro hartuz eta lehenengo faseko azken taularen zati bat hasierako taula moduan erabiliz.

$$\text{Min} \quad -Z = -9000x_1 - 6000x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 28 \\ x_1 \qquad - y_3 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ondoko taulan Simplex algoritmoa aplika daiteke:

		c_i	–9.000	–6.000	0	0	0
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	**10**	y_1	0	0	1	1	**2**
–6.000	**6**	x_2	0	1	0	–1	–1
–9.000	**12**	x_1	1	0	0	0	–1
–Z = –144.000		z_i	–9.000	–6.000	0	6.000	15.000
		$z_i - c_i$	0	0	0	6.000	15.000

Soluzioa ez da optimoa. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea y_3 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_1 da. y_3 bektorea oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_i	–9.000	-6.000	0	0	0
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
0	**5**	y_3	0	0	1/2	1/2	1
–6.000	**11**	x_2	0	1	1/2	–1/2	0
–9.000	**17**	x_1	1	0	1/2	1/2	0
–Z = –219.000		z_i	–9.000	–6.000	–7.500	–1.500	0
		$z_i - c_i$	0	0	–7.500	–1.500	0

Taula horretan $z_i - c_i \leq 0 \ \forall i$ dela ikus daiteke, hortaz soluzio optimo bakarra honako hau da: $x_1 = 17, x_2 = 11$ eta Z = 219.000 euroko mozkina.

2.3. BIGARREN KASU PRAKTIKOA

Trenbideko mantentze prebentiboak garrantzia handia du trenak emandako zerbitzuan, horren kalitatean eragina baitu. Kalitate-saileko arduradunak zera jakinarazi dio konpainiaren buruari: datorren hilabetean bai eskuz eta bai era mekanikoz egingo diren mantentze-lanen ondorioz tren batek gehienez 17 bagoi eraman ahal izango dituela. Mantentze-lanen artean, besteak beste, zaborra kentzea, trenbideak lerrokatzea eta nibelatzea eta katenariaren elementuen ikuskatzea planifikatuta daude.

Garraiatutako bagoien artetik, uzta-makinak eramango dituztenek traktoreak eramango dituztenek baino gehiago izaten jarraituko al dute? Zein da trenbideko konpainiari eman beharreko soluzioa?

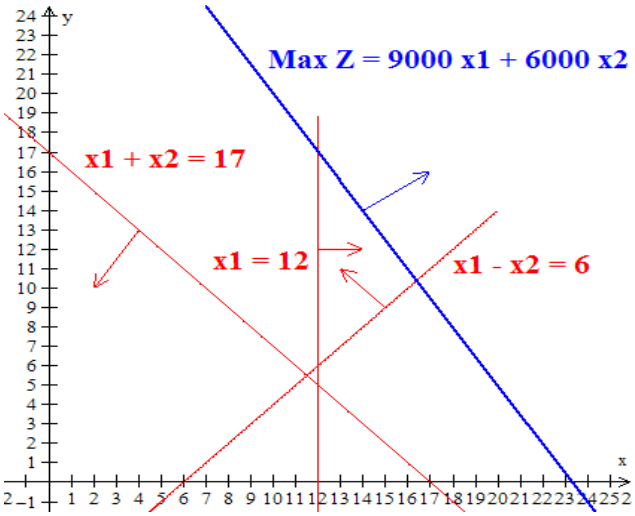
Merkantzia-treneko bagoien banaketari buruzko baldintzak barnean dituen eredu matematikoa oraingo honetan hauxe da:

$$\text{Max} \quad Z = 9000x_1 + 6000x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 17 \\ x_1 \qquad &\geq 12 \\ x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z irabazi ekonomikoa, x_1 uzta-makinak garraiatzeko erabilitako bagoien kopurua eta x_2 traktoreak garraiatzeko erabilitako bagoien kopurua izanik.

Bi aldagairen menpekoa den programazio matematikoko problema bat denez, berriro ere, grafikoki ebatz daiteke (2.2. irudia).



2.2. irudia.

Planoan zehaztutako murrizketak aldi berean betetzen dituen punturik existitzen ez denez, problemak ez du soluzio optimorik. Nola identifikatu egoera hori bi faseko metodoa edo zigortze-metodoa aplikatzen direnean?

Zigortze-metodoa erabiltzen bada, ebatzi beharreko eredu matematikoa hau da:

$$\text{Max} \quad Z = 9000x_1 + 6000x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 - Mp_1$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 17 \\ x_1 \qquad - y_3 + p_1 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $y_1 = 17,\ p_1 = 12,\ y_3 = 6$ da. Problemari elkartutako honako taula honetan Simplex algoritmoa aplika daiteke:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	–M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**17**	y_1	1	1	1	0	0	0
–M	**12**	p_1	1	0	0	0	–1	1
0	**6**	y_3	**1**	–1	0	1	0	0
Z = –12M		z_i	–M	0	0	0	M	–M
		$z_i - c_i$	–M–9.000	–6.000	0	0	M	0

Soluzioa ez da optimoa. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_1 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_3 da.

x_1 bektorea oinarrizko bektorea izateko Gauss-en ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	–M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**11**	y_1	0	**2**	1	–1	0	0
–M	**6**	p_1	0	1	0	–1	–1	1
9.000	**6**	x_1	1	–1	0	1	0	0
Z = 54.000–6M		z_i	9.000	–9.000–M	0	9.000+M	M	–M
		$z_i - c_i$	0	–15.000–M	0	9.000+M	M	0

Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oraingoan, oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_2 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_1 da.

x_2 bektorea oinarrizko bektorea izatea lortzeko Gauss-en ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	9.000	6.000	0	0	0	–M
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
6.000	**11/2**	x_2	0	1	1/2	–1/2	0	0
–M	**1/2**	p_1	0	0	–1/2	–1/2	–1	1
9.000	**23/2**	x_1	1	0	1/2	1/2	0	0
Z = 24.000–6M		z_i	9.000	6.000	7.500+M/2	1.500+M/2	M	–M
		$z_i - c_i$	0	0	7.500+M/2	1.500+M/2	M	0

Taula horretan $z_i - c_i \geq 0 \ \forall i$ betetzen dela eta p_1 aldagaia oinarrizko soluzioaren parte dela ikus daiteke, hortaz, problemak ez du soluziorik.

Bi faseko metodoa aplikatzen bada, lehenengo fasean ebatzi beharreko eredu matematikoa hau da:

$$\text{Min} \quad -Z = p_1$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 &= 17 \\ x_1 \qquad - y_3 + p_1 &= 12 \\ x_1 - x_2 + y_2 &= 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, p_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $y_1 = 17,\ p_1 = 12,\ y_3 = 6$ da. Problemari elkartutako honako taula honetan Simplex algoritmoa aplika daiteke:

		c_i	0	0	0	0	0	1
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**17**	y_1	1	1	1	0	0	0
1	**12**	p_1	1	0	0	0	–1	1
0	**6**	y_3	**1**	–1	0	1	0	0
– Z = 12		z_i	1	0	0	0	–1	1
		$z_i - c_i$	1	0	0	0	–1	0

Soluzioa ez da optimoa. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_1 da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_3 da. x_1 bektorea oinarrizko bektorea izatea lortzeko Gauss-en ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	0	0	0	0	0	1
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**11**	y_1	0	**2**	1	–1	0	0
1	**6**	p_1	0	1	0	–1	–1	1
0	**6**	x_1	1	–1	0	1	0	0
–Z = 6		z_i	0	1	0	–1	–1	1
		$z_i - c_i$	0	1	0	–1	–1	0

Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oinarrira sartzen den zutabe-bektorea x_2 aldagaiari dagokiona da eta oinarritik irteten den errenkada-bektorea y_1 da. x_2 bektorea oinarrizko bektorea izateko Gauss-en ezabapen-metodoa aplikatuz honako taula hau lortzen da:

		c_i	0	0	0	0	0	1
K_o	b_i		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	p_1
0	**11/2**	x_2	0	1	1/2	–1/2	0	0
1	**1/2**	p_1	0	0	–1/2	–1/2	–1	1
0	**23/2**	x_1	1	0	1/2	1/2	0	0
Z = 0		z_i	0	0	–1/2	–1/2	–1	1
		$z_i - c_i$	0	0	–1/2	–1/2	–1	0

Taula hori lehenengo faseko azken taula da $\left(z_i - c_i \leq 0 \ \ \forall i\right)$, bertan $p_1 \neq 0$ izanik. Aldagai artifiziala oinarrian dagoenez ezin da bigarren fasera pasatu, beraz, problema honek ez du soluziorik.

2.4. ONDORIOAK

Batzuetan programazio linealeko problemak Simplex algoritmoa erabiliz ebaztea ezinezkoa da. Zigortze eta bi faseko metodoek hasierako eredua eraldatu egiten dute Simplex algoritmoa erabiliz problema ebatzi ahal izateko.

Baina, PLko problemak aldagai asko baditu, baliteke kalkulu-orri bat erabiliz ebaztea? Nola?

3. Programazio lineala: Simplex-dual metodoa

Zigortze eta bi faseko metodoak ez dira hain erabilgarriak era estandarrean idazteko eta Simplex algoritmoarekin hasteko, aldagai artifizialak sartzea beharrezkoa baita.

Jarraian, metodo askoz erabilgarriagoa zehazteaz gain, Simplex-dual algoritmoa, alegia, enpresa bati gastuak txikiagotzeko bere ekoizpena planifikatzen lagunduko zaion adibidea azalduko da.

Gako-hitzak: programazio lineala (PLa), soluzio optimoa, problema primala, problema duala, Simplex-duala.

3.1. SARRERA

Simplex-dual metodoak, optimoa izateko baldintzak betetzen dituen oinarrizko soluzio bat abiapuntutzat harturik, optimotasun-baldintza horiek betetzen dituzten oinarrizko soluzio berriak sortu eta iterazio kopuru finitu batean oinarrizko soluzio bideragarri optimoa ematen du.

Metodo honetan hasierako oinarrizko soluzio optimo bat existitzen dela suposatzen da eta forma estandarra erabiliz lan egiten da. Ondoren, Simplex-dual metodoaren taula era klasikoan adierazi eta oinarri-aldaketaren eta pibotajearen formulak aplikatzen dira.

3.2. LEHENENGO KASU PRAKTIKOA

Enpresa batek A, B, C eta D lehengaiak eraldatzen ditu. Lehengai bakoitzeko kilo baten kostu aldakorra euro bat dela estimatzen da. Lehengaiak 3 makinatan prozesatu behar direnez, enpresa honek baldintza hauek bete behar ditu:

A lehengaiak 1.makinan 2 minutu eman behar ditu.

B lehengaiak 2.makinan 3 minutu eta 3.makinan 3 minutu eman behar ditu.

C lehengaiak 3.makinan 10 minutu eman behar ditu.

D lehengaiak 1.makinan minutu bat eta 3.makinan 6 minutu eman behar ditu.

Asteko hiru makinen erabilgarritasun-ordu minimoak 250, 1.000 eta 750 minutukoak dira.

Enpresa honek, lehengaien kalitateari kalterik eragin gabe, zenbat kilogramo eraldatu behar ditu gastuak minimizatzeko?

Problema era kanonikoan ondokoa da:

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_4 &\geq 250 \\ 3x_2 &\geq 1.000 \\ 3x_2 + 10x_3 + 6x_4 &\geq 750 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z sortutako kostu osoa, eta x_1, x_2, x_3 eta x_4 A, B, C eta D lehengaien eraldatutako kilogramoak izanik, hurrenez hurren.

Haren era estandarra kontuan hartzen da:

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -2x_1 - x_4 + h_1 &= -250 \\ -3x_2 + h_2 &= -1.000 \\ -3x_2 - 10x_3 - 6x_4 + h_3 &= -750 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2, h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimoa izateko baldintzak betetzen dituen soluzio ez-bideragarria honako hau da:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, h_1 = -250, h_2 = -1.000, h_3 = -750$$

Lehenengo taula adierazten da:

		c_i	1	1	1	1	0	0	0
K_O	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
0	**–250**	h_1	–2	0	0	–1	1	0	0
0	**–1.000**	h_2	0	**–3**	0	0	0	1	0
0	**–750**	h_3	0	–3	–10	–6	0	0	1
$Z = 0$		z_i	0	0	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	–1	–1	–1	–1	0	0	0

Optimoa izateko baldintzak betetzen dituen hasierako oinarrizko soluzio ez bideragarria $h_1 = -250, h_2 = -1.000, h_3 = -750$ da. Balio absolutuan handiena den aldagai negatiboa h_2 da; ondorioz, aldagai hori oinarritik atera behar da.

Hala ere,

$$\underset{j}{\text{Min}}\left\{\frac{z_j - c_j}{a_{ij}} / a_{ij} < 0\right\} = \frac{z_2 - c_2}{a_{22}} = \frac{1}{3}$$

x_2 oinarrian sartuko da. Aldagai hori oinarrizkoa izateko Gauss-en ezabapen-metodoa erabiltzen da eta honako taula hau lortzen da:

		c_j	1	1	1	1	0	0	0
KO	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
0	**–250**	h_1	**–2**	0	0	–1	1	0	0
1	**1.000/3**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0
0	**250**	h_3	0	0	–10	–6	0	–1	1
Z = 1.000/3		z_i	0	1	0	0	0	–1/3	0
		z_i–c_i	–1	0	–1	–1	0	–1/3	0

Iterazio horretan aldagai negatibo bakarra $h_1 = -250$ da. Orduan, oinarritik atera behar da.

Bestalde,

$$\underset{j}{\text{Min}}\left\{\frac{z_j - c_j}{a_{1j}} / a_{ij} < 0\right\} = \underset{j}{\text{Min}}\left\{\frac{-1}{-2}, \frac{-1}{-1}\right\} = \frac{1}{2} \text{ denez,}$$

oinarrira sartzen den aldagaia x_1 da, ondokoa lortuz:

		c_j	1	1	1	1	0	0	0
KO	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
1	**125**	x_1	1	0	0	1/2	–1/2	0	0
1	**1.000/3**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0
0	**250**	h_3	0	0	–10	–6	0	–1	1
Z = 1.375/3		z_i	1	1	0	1/2	–1/2	–1/3	0
		z_i–c_i	0	0	–1	–1/2	–1/2	–1/3	0

Taula horretan $x_1 = 125, x_2 = 1.000/3, h_3 = 250$ oinarrizko soluzioa bideragarria dela eta optimotasun-baldintza betetzen duela ikus daiteke. Orduan, planteatutako PLko problemaren soluzioa hauxe izango da:

$$x_1 = 125, x_2 = 1.000/3\,,\ \ Z = 1.375/3$$

Hau da, enpresak soilik A lehengaiko 125 kg eta B lehengaiko 1.000/3 kg eraldatu behar ditu, horrela 1.375/3 eurokoa izango den kostu minimoa izanik.

3.3. BIGARREN KASU PRAKTIKOA

Mantentze-lanetarako teknikariak enpresako hiru makinak aztertu ondoren, hurrengo bi asteetan makinen erabilgarritasun-orduetan aldaketak egongo direla jakinarazi du:

> *Lehenengo astean 1. eta 3. makinen erabilgarritasun minimoak 150 eta 300 minutukoak izango dira hurrenez hurren, 2. makinaren erabilgarritasuna mantenduz.*
>
> *Bigarren astean hiru makinen erabilgarritasun minimoak 200, 600 eta 1.000 minutukoak izango dira hurrenez hurren.*

Lehengaien kantitate bera ekoizten jarraitu beharko da lehenengo eta bigarren asteetan? Zein eragin izango du aipatutako aldaketa bakoitzak enpresako gastuan?

Bi galdera horiei erantzuteko ez da ariketa osoa taularen bidez berriro ebatzi behar, nahikoa da matrizeak erabiliz kalkulu erraz bat egitea.

Lehenengo asteko erabilgarritasunak kontuan izanik x_1, x_2 eta h_3 oinarrizko aldagaiek bideragarriak izaten jarraitzen duten jakiteko, Simplex-dualeko azken taulan agertzen diren lasaiera-aldagaien datuak kontsideratu eta (era matrizialean) honako kalkulu hauek egiten dira:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -150 \\ -1.000 \\ -300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ \frac{1.000}{3} \\ 700 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko aldagaiek positiboak izaten jarraitzen dutenez, bideragarritasuna mantentzen da. Hortaz, soluzio optimoa hau da:

$$x_1 = 75, x_2 = 1.000/3\,,\ Z = 1.225/3$$

Hau da, enpresak A eta B lehengaiak soilik eraldatzen jarraitu beharko du. A lehengaiko 75 kg eta B lehengaiko 1.000/3 kg, hain zuzen ere. Lehenengo asteko gastua (1.225/3 eurokoa izango dena) orain duena baino baxuagoa izango da.

Bigarren asteko erabilgarritasuna kontuan izanik:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -200 \\ -600 \\ -1.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix}$$

Lortutako soluzioa ez da bideragarria, h_3 negatiboa baita. Ondorengo tauletan agertzen den bezala, Simplex-dual metodoa aplikatuz bideragarritasuna lortzen da:

		c_i	1	1	1	1	0	0	0
K_O	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
1	**100**	x_1	1	0	0	1/2	–1/2	0	0
1	**200**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0
0	**–400**	h_3	0	0	–10	**–6**	0	–1	1
Z = 1.375/3		z_i	1	1	0	1/2	–1/2	–1/3	0
		z_i–c_i	0	0	–1	–1/2	–1/2	–1/3	0

$h_3 = -400$ aldagaia negatiboa da. Beraz, aldagai hori oinarrizko soluziotik kanpo geratzen da, soluzioan parte hartzen duen aldagaia x_4 izanik. Taula berria hau da:

		c_i	1	1	1	1	0	0	0
K_O	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
1	**200/3**	x_1	1	0	–5/6	0	–1/2	–1/12	1/12
1	**200**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0
1	**200/3**	x_4	0	0	5/3	1	0	1/6	–1/6
***Z* = 1.000/3**		z_i	1	1	5/6	1	–1/2	–1/4	–1/12
		z_i–c_i	0	0	–1/6	0	–1/2	–1/4	–1/12

Soluzio optimo bakarra ondokoa da:

$$x_1 = 200/3,\ x_2 = 200,\ x_4 = 200/3, \quad Z = 1.000/3$$

Bigarren astean, enpresak A, B eta D lehengaiak eraldatu beharko ditu, kantitate zehatzak A lehengaiko 200/3 kg, B lehengaiko 200 kg eta D lehengaiko 200/3 kg izanik. Lehenengo astean gertatzen zen bezalaxe erabilgarritasun-orduetan egongo diren aldaketak enpresarentzat onuragarriak dira, horiei esker ekoizpen-kostuak murriztuko baitira (1.000/3 euro).

3.4. HIRUGARREN KASU PRAKTIKOA

Asteko hiru makinen erabilgarritasun minimoak 200, 600 eta 1.000 minutukoak hurrenez hurren direla kontuan hartuz, datorren urtean enpresa mundu osoko bezeroei eta hornitzaileei hurbildu nahi zaie. Gerentziak jakin badaki horrek produkzio-prozesuen eta prozesu logistikoen kontrol eta eraginkortasun gehiago dakartzala, hedapenaren ondorioz epe barruan kalitate-produktuak hornitzea erronka ordez betebeharra izango baita.

Horregatik, bezeroari bidali baino lehen enpresak lehengaien prozesatua aztertzea planteatzen ari da, aurrean definitutako baldintzak betetzen direla egiaztatzeko asmoz. Enpresak gutxienez 135 minutu ditu proba hau egiteko. A, B eta C lehengai bakoitzaren prozesatuaren kontrolak minutu bat irauten du, D lehengaiarena, ordea, 2 minutukoa da.

Aurreko lehengaien kantitate bera eraldatzen jarraitu beharko da? Nola eragingo dio aldaketa honek enpresako gastuari?

Hasierako problemari beste murrizketa bat gehitu beharko zaio, orduan PLko eredu berria era kanonikoan honako hau da:

$$\begin{aligned}
\text{Min Z} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
2x_1 \qquad\quad + x_4 &\geq 200 \\
3x_2 \qquad\qquad &\geq 600 \\
3x_2 + 10x_3 + 6x_4 &\geq 1.000 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 135 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Z sortutako kostu osoa, eta x_1, x_2, x_3 eta x_4 A, B, C eta D lehengaien eraldatutako kilogramoak izanik, hurrenez hurren.

Lehendabizi, murrizketa berria erredundantea den ala ez aztertu behar da. Erredundantea bada, lortutako soluzioak optimoa izaten jarraituko du; berriz, erredundantea ez bada, Simplex-dual metodoa erabili beharko da bideragarritasuna berreskuratzeko.

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 135$ murrizketa erredundantea da lortutako soluzioak betetzen baitu $x_1 = 200/3, x_2 = 200, x_4 = 200/3$ (400 ≥ 135). Orduan, soluzio horrek PLko problema berriaren soluzio optimoa izaten jarraitzen du.

Hau da, enpresak lehengaien kantitate berak eraldatzen jarraitu beharko du: A lehengaiko 200/3 kg, B lehengaiko 200 kg eta D lehengaiko 200/3 kg, hain zuzen ere, 1.000/3 euroko kostu minimoa mantenduz.

Zer gertatzen da gehitutako murrizketa erredundantea ez bada?

Lau lehengaien tratamendurako behar den kontrolerako denbora mantentzen bada eta ikuskapenaren iraupena 300 minutukoa baino gehiago izan ezin bada, lehen eraldatzen zen kantitate bera eraldatzen jarraitu beharko da? Aldaketa berri honek enpresako gastuari eragingo dio?

PLko problema berria era kanonikoan hau da:

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_4 &\geq 200 \\ 3x_2 &\geq 600 \\ 3x_2 + 10x_3 + 6x_4 &\geq 1.000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z sortutako kostu osoa, eta x_1, x_2, x_3 eta x_4 A, B, C eta D lehengaien eraldatutako kilogramoak izanik, hurrenez hurren.

Kasu honetan lortutako soluzioak ez du laugarren murrizketa betetzen $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 300$ (400 > 300). Beraz, bigarren kasu praktikoko azken taulan murrizketa berri hau sartu beharko da:

		c_i	1	1	1	1	0	0	0	0
K_O	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3	h_4
1	**200/3**	x_1	1	0	–5/6	0	–1/2	–1/12	1/12	0
1	**200**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0	0
1	**200/3**	x_4	0	0	5/3	1	0	1/6	–1/6	0
0	**300**	h_4	1	1	1	2	0	0	0	1
Z = 1.000/3		z_i	1	1	5/6	1	–1/2	–1/4	–1/12	0
		z_i–c_i	0	0	–1/6	0	–1/2	–1/4	–1/12	0

x_1, x_2, x_4 aldagaiak oinarrizkoak izateagatik, h_4 errenkadako koefizienteak aldatu beharko dira. Simplex-eko taula berria honako hau da:

		c_i	1	1	1	1	0	0	0	0
K_O	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3	h_4
1	**200/3**	x_1	1	0	–5/6	0	–1/2	–1/12	1/12	0
1	**200**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0	0
1	**200/3**	x_4	0	0	5/3	1	0	1/6	–1/6	0
0	**–100**	h_4	0	0	**–3/2**	0	1/2	1/12	1/4	1
Z = 1.000/3		z_i	1	1	5/6	1	–1/2	–1/4	–1/12	0
		z_i–c_i	0	0	–1/6	0	–1/2	–1/4	–1/12	0

$h_4 = -100$ aldagai negatibo bakarra da. Beraz, aldagai hori oinarrizko soluziotik kanpo geratzen da, soluzioan parte hartzen duen aldagaia x_3 izanik. Taula berria hau da:

		c_i	1	1	1	1	0	0	0	0
K_O	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3	h_4
1	**1.100/9**	x_1	1	0	0	0	–7/9	–7/54	–1/18	–5/9
1	**200**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0	0
1	**–400/9**	x_4	0	0	0	1	5/9	7/27	1/9	10/9
1	**200/3**	x_3	0	0	1	0	–1/3	–1/18	–1/6	–2/3
Z = 3.100/9		z_i	1	1	1	1	–5/9	–7/27	–1/9	–1/9
		z_i–c_i	0	0	0	0	–5/9	–7/27	–1/9	–1/9

Taula horretako aldagai negatiboa $x_4 = -400/9$ da. Orduan, aldagai hori oinarrizko soluziotik kanpo geratu beharko da, baina ezin da oinarrira sartzeko beste aldagai bat aukeratu (atera beharko den aldagaiari dagokion errenkadako balioak positiboak baitira). Beraz, problemak ez du soluziorik.

Hau da, enpresa honek lau lehengaien kontrol-denborak mantenduz gastuak minimizatu nahi baditu, ikuskapenaren iraupena ezin da 300 minutukoa baino gutxiago izan.

3.5. LAUGARREN KASU PRAKTIKOA

Enpresako gerentziak jakin du A lehengaiko kilo bakoitzaren kostu aldakorra 2 eurokoa izango dela eta beste lehengaietako kilo bakoitzaren kostua euro batekoa izango dela.

Lehenengo kasu praktikoan azaldutako beste baldintzak mantenduko balira, zenbat unitate ekoitzi beharko litzateke gastuak minimizatzeko?

Problema era kanonikoan hau da:

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 \qquad\quad &+ x_4 \geq 250 \\ 3x_2 &\geq 1.000 \\ 3x_2 + 10x_3 + 6x_4 &\geq 750 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z sortutako kostu osoa, eta x_1, x_2, x_3 eta x_4 A, B, C eta D lehengaien eraldatutako kilogramoak izanik, hurrenez hurren.

Problema hau bigarren atalean agertzen den lehenengo kasu praktikoko problema bera da, helburu funtzioan koefiziente desberdinak agertzen direlarik. Lehenengo kasu praktikoan lortutako ekoizpenak optimotasun-baldintza betetzen jarraituko balu, enpresak ekoizpen hori mantendu beharko luke. Helburu funtzioko koefizienteetan aldaketak egitean, oinarrizkoak ez diren aldagaien $z_i - c_i$ balioak berriro kalkulatu behar dira, planteamenduan aldaketak egon arren, oinarrizko aldagaien $z_i - c_i$ balioek beti nuluak izaten jarraituko baitute.

Lehenengo kasu praktikoko oinarrizko soluzioa $x_1 = 125, x_2 = 1.000/3, h_3 = 250$ denez, eta kostuen bektore berria $K_O = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ denez, zera lortzen da:

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Oinarrizkoak ez diren x_3, x_4, h_1, h_2 aldagaien $z_i - c_i$ balioak kalkulatzen dira:

$$z_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$z_{h1} - c_{h1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

$$z_{h2} - c_{h2} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{3}$$

Lortutako $z_i - c_i$ balioetatik bat ere positiboa ez denez, soluzioak optimoa izaten jarraitzen du (optimotasun-baldintza mantentzen da).

Beraz, bigarren atalean lortutako ekoizpena mantendu behar da. Hau da, A lehengaiko 125 kg eta B lehengaiko 1.000/3 kg ekoitzi behar dira, gastu minimoa 1.750/3 eurokoa izanik.

Azken taula hau da:

		c_i	2	1	1	1	0	0	0
Ko	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
2	**125**	x_1	1	0	0	1/2	–1/2	0	0
1	**1.000/3**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0
0	**250**	h_3	0	0	–10	–6	0	–1	1
***Z* = 1.750/3**		z_i	2	1	0	1	–1	–1/3	0
		z_i–c_i	0	0	–1	0	– 1	–1/3	0

x_4 aldagaia oinarrian egon ez arren, taula horretako azken errenkadan haren kostu murriztua nulua dela ikus daiteke. Hortaz, problema honek *infinitu soluzio* ditu, soluzio horietako bat $x_1 = 125, x_2 = 1.000/3, h_3 = 250$ eta $Z = 1.750/3$ izanik. Beste soluzio bat lortzeko, nahikoa da x_4 aldagaia oinarrira sartzea x_1 aldagaia ateraz.

Aldaketa hori eginez gero, honako hau da taula berria:

		c_i	2	1	1	1	0	0	0
Ko	b_i		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3
1	**250**	x_4	2	0	0	1	–1	0	0
1	**1.000/3**	x_2	0	1	0	0	0	–1/3	0
0	**1750**	h_3	12	0	–10	0	–6	–1	1
***Z* = 1.750/3**		z_i	2	1	0	1	–1	–1/3	0
		z_i–c_i	0	0	–1	0	–1	–1/3	0

Azken finean, inbertsio ekonomiko berarekin, enpresak B lehengaiko 1.000/3 kg eta D lehengaiko 250 kg ekoiztea erabaki dezake.

3.6. ONDORIOAK

PLko eredua era estandarrean idazten denean Simplex metodoaren aplikazioa berehalakoa ez bada edo konplexua bada, aldagai artifizialik behar ez duen Simplex-dual metodoa estrategia algoritmiko eraginkorra da.

Baina, PLko problemak aldagai kopuru handia badu, posible al da ebazpenerako kalkulu-orri bat erabiltzea? Nola?

4. Programazio lineala: ebazpena Excel kalkulu-orria eta PHPSimplex programa erabili

Programazio linealeko (PLko) problemak aldagai edo murrizketa ugari baditu, aurreko gaietan deskribatutako metodoak erabiliz soluzio optimoaren lorpen azkarra bideraezina da.

Gai honetan, PL problemak Excel kalkulu-orria eta, dohainik den eta erabilera librea duen, PHPSimplex online tresna erabiliz ebatzi ahal izateko jarraitu beharreko pausoak azaltzen dira. Bestalde, koilarak eta sardexkak sortzen dituen enpresa bati etekinak maximizatzeko ekoizpena planifikatzen laguntzen zaion adibidea azalduko da.

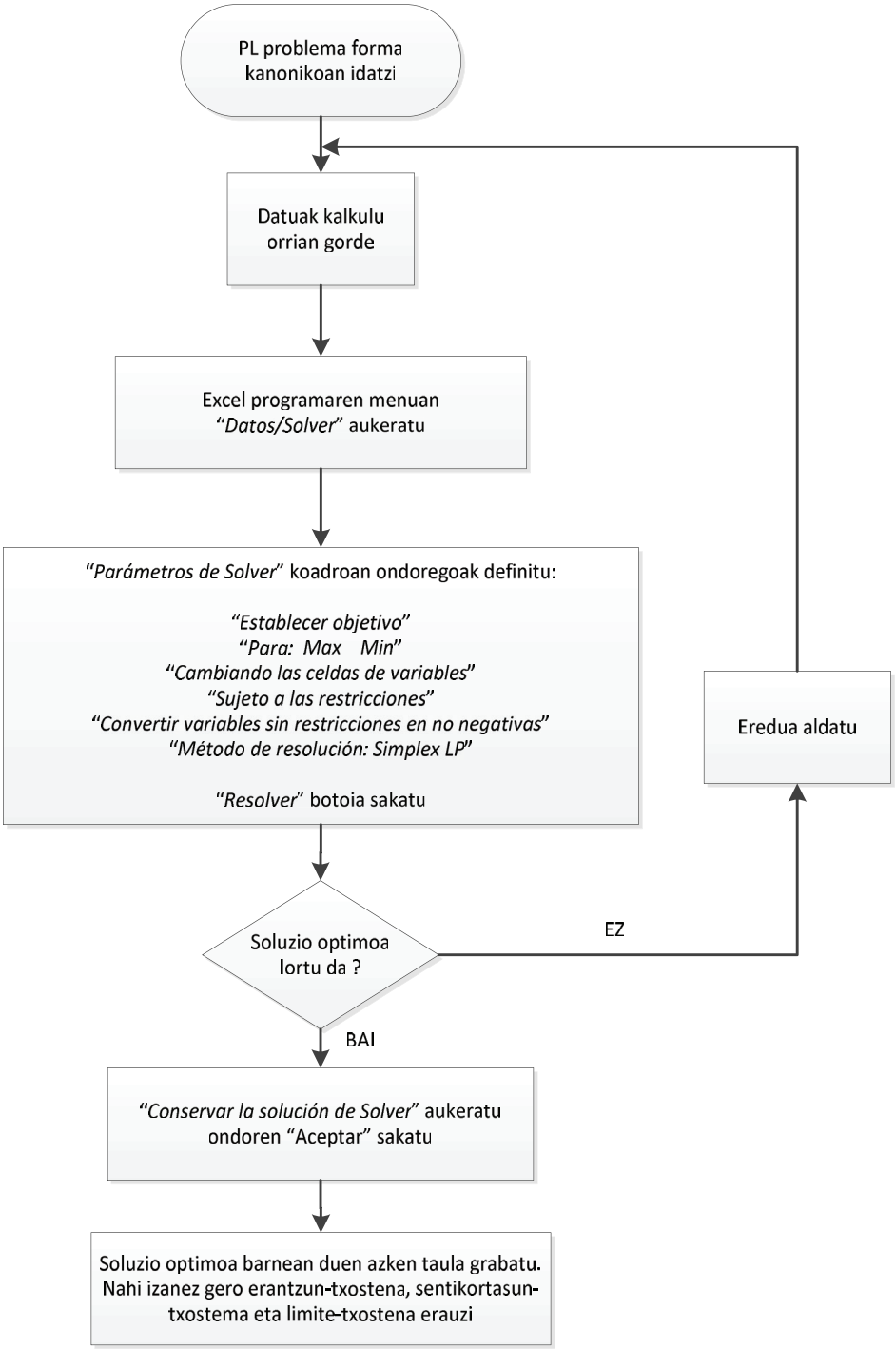
Gako-hitzak: programazio lineala (PLa), Excel Solver tresna, PHPSimplex, erantzun-txostena, limite-txostena, sentikortasun- edo konfidentzialtasun-txostena.

4.1. SARRERA

Solver Excel programak erantsita duen pakete bat da. Pakete horrek murrizketak dituen ereduak numerikoki optimizatzen ditu, hortaz, PLko problemak ebazteko erabil daiteke. Tresna hori segur aski kalkulu-orrian aktibatu gabe egongo da, horregatik, tresna aurkitzeko «*Opciones/Complementos de Excel/Solver*» aukeratu behar da.

Solver tresnak PLko problemak ebazteko Simplex metodoa erabiltzen du. Hala ere, linealak ez diren ereduak ere optimizatzen ditu. Batez ere bi programa erabiltzen ditu: lehenengoak, Visual Basic erabiliz, kalkulu-orrian agertzen den eredua barne-adierazpen batera itzuli egiten du: bigarren programak, memorian software-modulu independente bat bezala dagoenak, berriz, adierazpen hori erabiliz problema optimizatu eta soluzioa lehenengo programari bidaltzen dio, azken horrek kalkulu-orria eguneratuz.

Solver tresna erabiliz PLko problemak ebazteko orduan 4.1. irudian azaltzen den fluxu-diagrama erabiltzea gomendatzen da:


PL problema forma kanonikoan idatzi
Datuak kalkulu orrian gorde
Excel programaren menuan "Datos/Solver" aukeratu
"Parámetros de Solver" koadroan ondoregoak definitu:
"Establecer objetivo"
"Para: Max Min"
"Cambiando las celdas de variables"
"Sujeto a las restricciones"
"Convertir variables sin restricciones en no negativas"
"Método de resolución: Simplex LP"
"Resolver" botoia sakatu
Eredua aldatu
Soluzio optimoa lortu da ?
EZ
BAI
"Conservar la solución de Solver" aukeratu ondoren "Aceptar" sakatu
Soluzio optimoa barnean duen azken taula grabatu. Nahi izanez gero erantzun-txostena, sentikortasun-txostema eta limite-txostena erauzi

4.1. irudia.

Solver-ek hiru txosten mota sortzen ditu: erantzun-txostena, limite-txostena eta sentikortasun- edo konfidentzialtasun-txostena. Txostenak optimizazioa egin ondoren agertzen den leihoan aukera daitezke.

Erantzun-txostenean helburu gelaxkaren eta aldakorrak diren gelaxken hasierako eta bukaerako balioak agertzen dira. Bertan, murrizketen egoera ere agertzen da: murrizketaren ezker aldeko azken balioa eskumako balioaren berdina bada (lasaiera-aldagaia nulua bada), *nahitaezkoa*, *aktiboa* edo *loteslea* agertuko da*;* murrizketa bete arren ezker aldea eskumaren berdina ez bada (lasaiera-aldagaia zero baino handiagoa bada), *hautazkoa*, *ez-aktiboa* edo *ez-loteslea* agertuko da.

Limite-txostenean helburu gelaxkaren eta aldakorrak diren gelaxken balio optimoekin batera, gelaxka aldakor bakoitzaren *behe-limiteak* (beste gelaxka aldakor guztiak finko mantenduz eta murrizketak betez gelaxka horrek har dezakeen balio minimoa) eta *goi-limitea (*beste gelaxka aldakor guztiak finko mantenduz eta murrizketak betez gelaxka aldakor horrek har dezakeen balio maximoa) agertzen dira. Helburu gelaxkaren balioak ere agertzen dira, gelaxka aldakorra horietariko limite batera heltzen denean.

Sentikortasun- edo konfidentzialtasun-txostenak soluzio ez-endekatua denean soilik balio du, hau da, positiboak diren aldagaien kopurua (lasaiera-aldagaiak barne) eta problemak dituen murrizketen kopurua bat datozenean. Txosten honetan datu bat aldatu eta beste guztiak finko mantendu ondoren helburu funtzioaren balio optimoa (Z) nola aldatzen den aztertzen da. Hala ere, ezin daiteke aztertu soluzio optimoaren aldagaien balioak nola aldatzen diren. Txosten honek bi zati ditu:

a) <u>Gelaxka aldakorrak edo aldagai-gelaxkak</u>

Kostu murriztua. Aldagai bat positiboa bada, haren kostu murriztua nulua da. Hau da, soluzio optimoan parte hartzen duten aldagaiek (oinarrizko aldagaiek) kostu murriztu nulua dute; soluzio optimoan parte hartzen ez dutenek (oinarrizkoak ez diren aldagaiek), berriz, kostu murriztu negatiboa dute (maximizazioaren kasuan).

Igoera edo jaitsiera onargarria. Tarte bat da. Helburu funtzioaren koefizientea tarte honen barnean egonez gero, soluzio optimoa ez da aldatzen. Hala ere, aldaketa hauen eraginez helburu funtzioaren balioa aldatu egingo da.

b) <u>Murrizketak</u>

Itzal-prezioa. Murrizketaren eskumako aldea unitate batean handitzean edo txikitzean helburu funtzioa zenbat unitate aldatzen den adierazten du. Aktiboa ez den murrizketa baten itzal-prezioa nulua da.

Igoera edo jaitsiera onargarria. Tarte bat da. Murrizketaren eskumako aldea tarte honetan egonez gero, itzal-prezioa konstante mantentzen da.

PHPSimplex programa, http://www.phpsimplex.com/ helbidean dagoena, Simplex metodoa, bi faseko metodoa eta ebazpen grafikoa bi aldagai dauden kasuetan soilik erabiliz, problemak ebazteko gai da. Programa honek erabaki-aldagai kopuruari edo murrizketa kopuruari buruzko murrizketarik ez du.

Online dagoen tresna hau ikasleen ikaskuntzan lagungarria da; izan ere, azken emaitzez gain bitarteko eragiketak ere erakusten ditu. Bestalde, profesionalek erabili nahi izanez gero, zuzenean soluzioa lortzeko aukera ere ematen du.

4.2. SOLVER ERABILIZ EBATZITAKO KASU PRAKTIKOA

Enpresa batek koilarak eta sardexkak egiten ditu oinarrizko materiala hiru makinatan prozesatuz. Objektu bakoitza ekoizteko bi aukera desberdin daude, 4.1. taulan erakusten den bezala. Ekoitzitako objektuei dagozkien kostuak 4.2. taulan agertzen dira, salmenta prezioa 80 €-koa eta 90 €-koa izanik, hurrenez hurren.

Zehaztu irabazia maximizatzen duen ekoizpena, kontuan izanik enpresak ekoizten dituen unitate guztiak saltzen dituela eta makina bakoitzak astean zehar gehienez 40 lan ordu egingo dituela.

Produktua	*Ekoizpen-aukera*	*Unitate bakoitzak makinetan behar duen denbora (h)*		
		1	*2*	*3*
Koilarak	*1*	*3*	*1*	
Koilarak	*2*	*3*		*2*
Sardexka	*1*	*1*	*2*	
Sardexka	*2*	*2*		*1*

4.1. taula.

Orduko makinaren kostua	*euro*
1	*15*
2	*30*
3	*10*

4.2. taula.

Demagun 1. makinak bere ekoizpena astean zehar 10 ordutan handitzen duela 20 €/h-ko kostuarekin (prezio arrunta 15 €/h-koa da). Haren lan-karga handitu beharko litzateke?

PLko problemaren helburu funtzioak enpresaren mozkina zehazten du, hau da, diru-sarreraren eta gastuaren arteko aldea.

x_1 lehenengo motako koilara kopurua, x_2 bigarren motako koilara kopurua, x_3 lehenengo motako sardexka kopurua eta x_4 bigarren motako sardexka kopurua badira, orduan enpresaren irabazia hau da:

$$Z = 80x_1 + 80x_2 + 90x_3 + 90x_4 - [(3\cdot 15 + 1\cdot 30)x_1 + (3\cdot 15 + 2\cdot 10)x_2 +$$
$$+ (1\cdot 15 + 2\cdot 30)x_3 + (2\cdot 15 + 1\cdot 10)x_4] = 5x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 50x_4$$

Murrizketen multzoa makina bakoitzak astean zehar duen karga-mugaren bidez definituta dago:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40 \\ x_1 + 2x_3 \leq 40 \\ 2x_2 + x_4 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Orduan, problema era kanonikoan honako hau da:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 50x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 40 \\ x_1 + 2x_3 &\leq 40 \\ 2x_2 + x_4 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ondoko irudietan Excel-ek duen Solver tresnaren bidez problemaren ebazpenari dagozkion pantailak azaltzen dira.

Excel kalkulu-orrian datu ezberdinen banaketa hau da:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**	X1	X2	X3	X4					
4	*Irabazia*	5	15	15	50				**helburu funtzioa**	
5	**Aldagaien balioak**	**0**	**0**	**0**	**0**				**0**	
6			Matrizea				Guztira		**Gai askea**	**Lasaiera**
7	**Murrizketak**									
8	*1.makina*	3	3	1	2		0	≤	40	40
9	*2.makina*	1	0	2	0		0	≤	40	40
10	*3.makina*	0	2	0	1		0	≤	40	40

4.2. irudia.

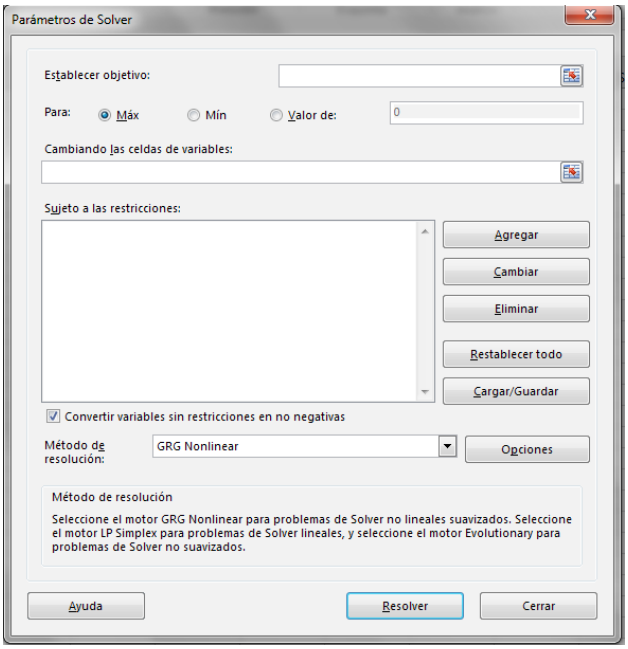
4.2. irudian erabaki-aldagaiak, helburu funtzioa eta murrizketak kalkulu-orrian nola jartzen diren ikus daiteke. B3, C3, D3 eta E3 gelaxketan aldagaien izenak baino ez daude; optimoa lortu arte aldagai horiek har ditzaketen balioak B5, C5, D5 eta E5 gelaxketan agertzen dira. Hasi baino lehen oinarrizko balioak ipin daitezke edo gelaxkak hutsik utzi.

4.3. irudian *«SUMAPRODUCTO»* funtzioa nola erabili azaltzen da, bai hiru murrizketen ezkerreko aldea (G8, G9 eta G10 gelaxkak), bai helburu funtzioaren balioa (I5 gelaxka) kalkulatzeko. J zutabean dagozkion lasaiera-aldagaiak defini daitezke, nahiz eta horiek nahitaezkoak ez izan, Solver-eko azken txostenak ematen baititu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**	X1	X2	X3	X4					
4	*Irabazia*	5	15	15	50				**helburu funtzioa**	
5	**Aldagaien balioak**	**0**	**0**	**0**	**0**				**=SUMAPRODUCTO(B5:E5;B4:E4)**	
6		Matrizea					Guztira		**Gai askea**	**Lasaiera**
7	**Murrizketak**									
8	*1.makina*	3	3	1	2		=SUMAPRODUCTO($B$5:$E$5;B8:E8)	≤	40	=I8-G8
9	*2.makina*	1	0	2	0		=SUMAPRODUCTO($B$5:$E$5;B9:E9)	≤	40	=I9-G9
10	*3.makina*	0	2	0	1		=SUMAPRODUCTO($B$5:$E$5;B10:E10)	≤	40	=I10-G10

4.3. irudia.

Problema ebazteko *«Datos/Solver»* hautatu behar da. Orduan, 4.4. irudian agertzen den pantailan problema definitzeko parametro guztiak sartu behar dira: helburu funtzioa, erabaki-aldagaiak eta murrizketak. Solver-ek 200 erabaki-aldagai, 100 murrizketa esplizitu eta 400 bakun (erabaki-aldagaiei buruzko goi-muga edo behe-muga edo murrizketa osoak) dituen problema ebatz dezake.



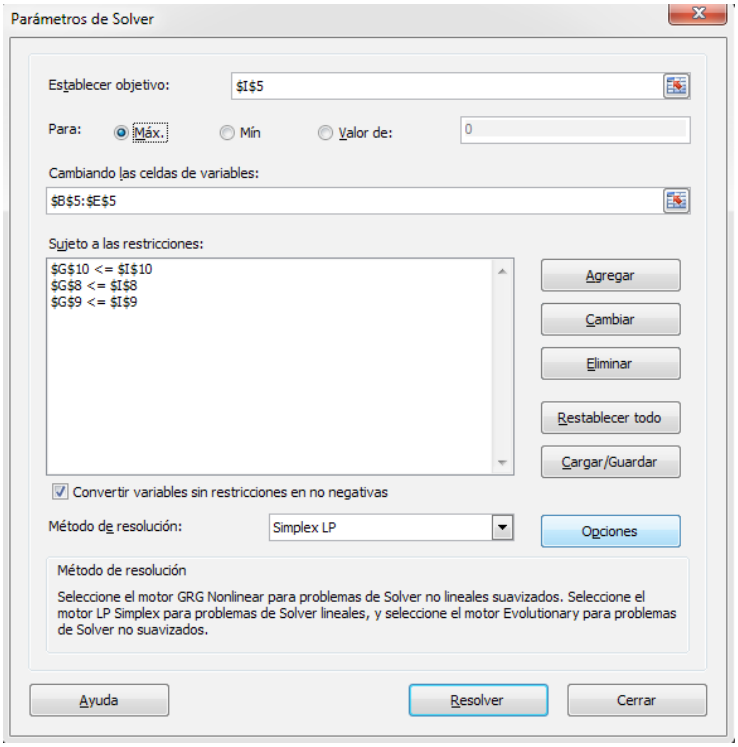
4.4. irudia.

Lehendabizi, (I5) «*Celda objetivo*» hautatzen da eta gero «*Máx*» aukera maximizazio problema baita. Jarraian, «*Cambiando las celdas*» aukeraren bidez, erabaki-aldagaiak agertu behar diren gelaxkak (B5, C5, D5 eta E5 gelaxkak) zehazten dira. «*Sujeto a las siguientes restricciones*» aukeran hiru murrizketen ezkerreko eta eskuineko aldeak sartzen dira, 4.5. irudian agertzen den moduan:

4.5. irudia.

Azkenik, «*Convertir variables sin restricciones en no negativas*» eta «*Método de resolución: Simplex LP*» aukeratzen dira.

Bukatzeko «*Parámetros de Solver*»-eko pantaila hau bete ondoren:



4.6. irudia.

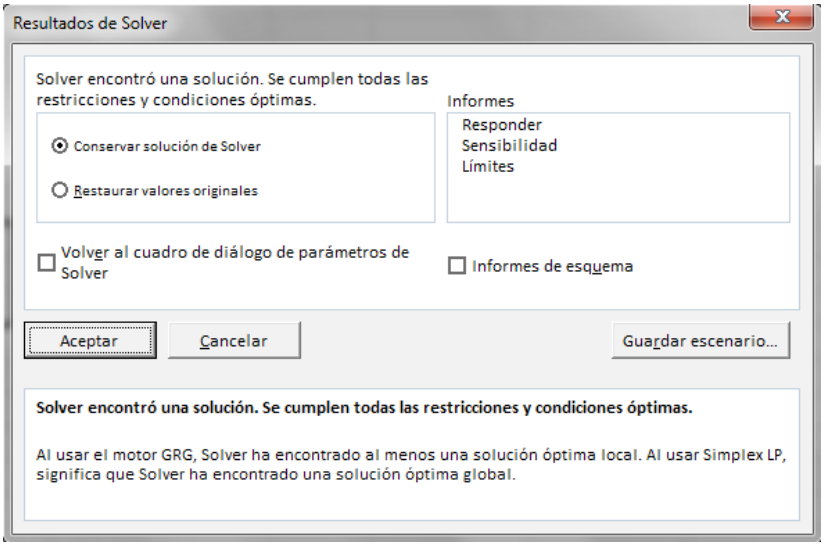
«*Resolver*» hautatzen da soluzio optimoa lortzeko.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**	X1	X2	X3	X4					
4	*Irabazia*	5	15	15	50				**helburu funtzioa**	
5	**Aldagaien balioak**	**0**	**0**	**0**	**20**				**1000**	
6		Matrizea					Guztira		**Gai askea**	**Lasaiera**
7	**Murrizketak**									
8	*1.makina*	3	3	1	2		40	≤	40	0
9	*2.makina*	1	0	2	0		0	≤	40	40
10	*3.makina*	0	2	0	1		20	≤	40	20

4.7. irudia.

Problema honetan $\left(x_4 = 20, h_2 = 40, h_3 = 20\right)$ soluzioa ez-endekatua da, aldagai positiboen kopurua, lasaiera-aldagaiak barne, murrizketa kopuruarekin bat baitator.

Optimizazioa egin ondoren, nahi izanez gero, Solver-ek pantailan hautatzen diren hiru txosten sortzen ditu (soluzio ez-endekatuetarako soilik onargarriak direnak).



4.8. irudia.

Erantzun-txostenak soluzio optimoak eta helburu funtzioaren balio optimoa aurkezten ditu. Murrizketak aktiboak eta ez-aktiboak diren ere adierazten da, hitz horiek *lotesle* eta *ez-lotesle* hitzekin ordezkatuz. *«Demora»* zutabean lasaiera-aldagaien balioak agertzen dira, hau da, produzio-prozesuan erabili ez diren baliabideen unitateen kopurua. Murrizketa aktiboa bada, lasaiera-aldagaia nulua da.

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$I$5	Valor de las variables Función objetivo	1000	1000

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$5	Valor de las variables X1	0	0	Continuar
$C$5	Valor de las variables X2	0	0	Continuar
$D$5	Valor de las variables X3	0	0	Continuar
$E$5	Valor de las variables X4	20	20	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$G$10	3ª máquina Total	20	$G$10<=$I$10	No vinculante	20
$G$8	1ª máquina Total	40	$G$8<=$I$8	Vinculante	0
$G$9	2ª máquina Total	0	$G$9<=$I$9	No vinculante	40

4.9. irudia.

Limite-txostenean helburu funtzioaren eta gelaxka aldakorren balio optimoarekin batera gelaxka aldakor bakoitzaren *behe-limitea* (beste gelaxka aldakor guztiak finko mantenduz eta murrizketak betez gelaxka horrek har dezakeen balio minimoa) eta *goi-limitea* (gauza bera maximo kasuan) agertzen dira. *Helburu-emaitzen* balioak ere agertzen dira, gelaxka aldakorra horietariko limite batera heltzen denean.

Celda	Objetivo Nombre	Valor
$I$5	Valor de las variables Función objetivo	1000

Celda	Variable Nombre	Valor	Inferior Límite	Objetivo Resultado	Superior Límite	Objetivo Resultado
$B$5	Valor de las variables X1	0	0	1000	0	1000
$C$5	Valor de las variables X2	0	0	1000	0	1000
$D$5	Valor de las variables X3	0	0	1000	0	1000
$E$5	Valor de las variables X4	20	0	0	20	1000

4.10. irudia.

Sentikortasun-txostenean (*murrizketak*) helburu funtzioaren balio optimoa (Z) nola aldatzen den adierazten da, baina ez soluzio optimoaren aldagaiaren balioa nola aldatzen den.

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$5	Valor de las variables X1	0	-70	5	70	1E+30
$C$5	Valor de las variables X2	0	-60	15	60	1E+30
$D$5	Valor de las variables X3	0	-10	15	10	1E+30
$E$5	Valor de las variables X4	20	0	50	1E+30	20

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$G$10	3ª máquina Total	20	0	40	1E+30	20
$G$8	1ª máquina Total	40	25	40	40	40
$G$9	2ª máquina Total	0	0	40	1E+30	40

4.11. irudia.

Soluzio ez-endekatuen kasuan, aldagai-gelaxkei (problemaren aldagaiei) dagokien txosten zatiak aldagaien kostuen gehikuntzak edo gutxitzeak adierazten ditu. Balio horien artean aldagaien balio optimoak ez dira aldatzen, helburu funtzioaren balio optimoa baizik.

Kostu edo Gradiente Murriztua izeneko zutabean Simplex-eko taulako $z_i - c_i$ balioak zeinuz aldatuta agertzen dira. Hau da, plan optimoan sartzen diren jardueren (oinarrizko aldagaien) kostu murriztuaren balioa nulua da; plan optimoan sartzen ez direnek (ez-oinarrizko aldagaiek), ordea, kostu murriztu negatiboa dute, maximizazio problema izateagatik (minimizazio-kasuan kostu murriztu horiek positiboak dira).

Itzal-prezioak PLko problemaren murrizketen gai aske bat (b_i), beste koefizienteak konstante mantenduz, unitate batean handitzean, helburu funtzioa zenbat unitate aldatzen den adierazten du. Murrizketa ez-aktiboaren itzal-prezioa nulua da: balio-tarte onargarriaren barneko edozein aldaketak ez dio soluzioari eragiten, horregatik helburu funtzioaren balioa (Z) konstante mantentzen da.

Lortutako datu hauek aztertu ondoren, enpresarako txosten bat egin daiteke:

- Etekinik handiena 2. aukerako sardexkak soilik ekoizten badira lortuko da. Hau da, mota horretako 20 sardexka ekoitzi behar dira, 1.000 euroko mozkina izanik. Problemaren ebazpenean soluzioaren osotasun-baldintza jarri gabe, lortzen den soluzioa osoa dela azpimarratu nahi da.
- 2. eta 3. makinak, astean zehar 40 eta 20 ordu libre egon daitezke, hurrenez hurren. Hau da, ez da beharrezkoa 2. makina martxan jartzea, 2. aukerako sardexkak ekoizteko erabiltzen ez baita. Hala ere, 1. makina ezin hobeto mantendu behar da, astean zehar lan-karga maximoan erabiltzen baita.
- Nahiz eta 3. makinaren lanorduak 20 ordura arte murriztu, enpresaren mozkina bera izango da.

- Enpresak kontuan hartu behar du 1. makinaren ordu-erabilgarritasuna 80 ordu baino gutxiagokoa den bitartean, hasierako 40 orduetara ordu bat gehitzean 25 euro gehiago irabaziko dituela, eta ordu bat kentzean, berriz, 25 euro galduko dituela.

Enpresa 1. makinaren ekoizpena, orduko 20 euroko kostuarekin, astean zehar 10 ordutan handitzen bada, zer egin planteatzen ari da.

Kasu honetan enpresaren mozkina honako hau da:

$$Z = 80x_1 + 80x_2 + 90x_3 + 90x_4 - [(3\cdot 20 + 1\cdot 30)x_1 + (3\cdot 20 + 2\cdot 10)x_2 +$$
$$+(1\cdot 20 + 2\cdot 30)x_3 + (2\cdot 20 + 1\cdot 10)x_4] = -10x_1 + 0x_2 + 10x_3 + 40x_4$$

Problema era kanonikoan:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -10x_1 + 0x_2 + 10x_3 + 40x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 50 \\ x_1 + 2x_3 &\le 40 \\ 2x_2 + x_4 &\le 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Excel-en Solver tresnaren bidez lortutako soluzio optimoa ondokoa da:

Erabaki-aldagaiak	X1	X2	X3	X4				
Irabazia	-10	0	10	40			**helburu funtzioa**	
Aldagaien balioak	**0**	**0**	**0**	**25**			**1000**	
	Matrizea				Guztira		**Gai askea**	**Lasaiera**
Murrizketak								
1.makina	3	3	1	2	50	≤	50	0
2.makina	1	0	2	0	0	≤	40	40
3.makina	0	2	0	1	25	≤	40	15

4.12. irudia.

Orduan, enpresako gerentziak jakin behar du 1. makinak astean zehar 10 ordu gehiago lan egiteagatik ez duela mozkin gehiago lortuko. Bestalde, 2. aukerako sardexkak baino ez ditu ekoitziko, astean zehar 25 unitate hain zuzen, 1.000 euroko mozkin bera lortuz.

4.3. PHPSIMPLEX ERABILIZ EBATZITAKO KASU PRAKTIKOA

Interneteko helbidean adierazten den bezalaxe, tresna hau (*PHPSimplex*-a), ikasleen ikaskuntza-prozesuan lagungarria izateko pentsatua dago, azken emaitzez gain bitarteko eragiketak ere erakusten baititu. Bestalde, soluzioa zuzenean eta problemak

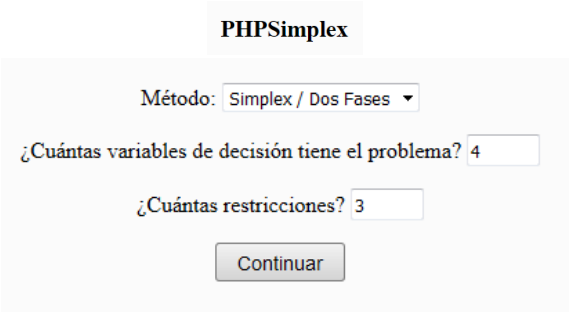
bi aldagai dituenean grafikoa ere eskaintzen du. Tresna honen beste abantaila batzuk hauek dira: bere interfazeari esker problema enuntziatzeko lengoaiarik behar ez izatea, erabiltzeko erraza eta intuitiboa izatea, eta instalaziorik behar ez izatea.

4.2. atalean definitutako lehenengo eredu matematikoa kontsideratuz:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = 5x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 50x_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40 \\ x_1 + 2x_3 \leq 40 \\ 2x_2 + x_4 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

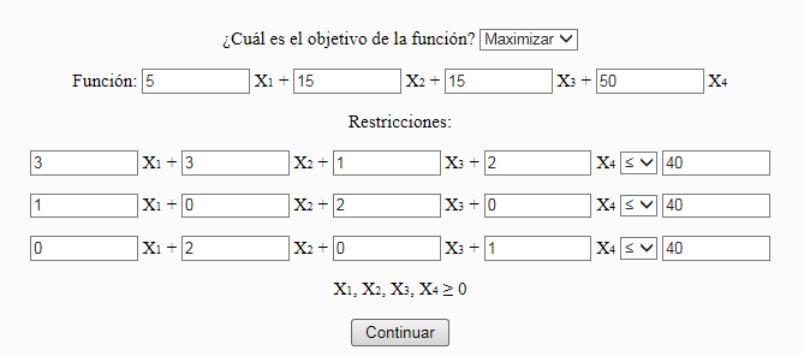
Ondoren, PHPSimplex programa erabiliz problema hau ebazteko jarraitu beharreko pausoak azaltzen dira.

Problemak era kanonikoan dituen erabaki-aldagai eta murrizketa kopurua zehazten dira.



4.13. irudia.

Problemako datuak sartzen dira:



4.14. irudia.

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda **(mostrar/ocultar detalles)**

- Como la restricción 1 es del tipo '≤' se agrega la variable de holgura X_5.
- Como la restricción 2 es del tipo '≤' se agrega la variable de holgura X_6.
- Como la restricción 3 es del tipo '≤' se agrega la variable de holgura X_7.

MAXIMIZAR: $5 X_1 + 15 X_2 + 15 X_3 + 50 X_4$

$3 X_1 + 3 X_2 + 1 X_3 + 2 X_4 \leq 40$
$1 X_1 + 0 X_2 + 2 X_3 + 0 X_4 \leq 40$
$0 X_1 + 2 X_2 + 0 X_3 + 1 X_4 \leq 40$
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

MAXIMIZAR: $5 X_1 + 15 X_2 + 15 X_3 + 50 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7$

$3 X_1 + 3 X_2 + 1 X_3 + 2 X_4 + 1 X_5 = 40$
$1 X_1 + 2 X_3 + 1 X_6 = 40$
$0 X_1 + 2 X_2 + 1 X_4 + 1 X_7 = 40$
$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla del método Simplex.

Continuar

Solución directa

Guardar el ejercicio

4.15. irudia.

PHPSimplex tresnak, 4.15. irudian ikus daitekeen moduan, problema forma estandarrean idazten du horretarako beharrezkoak diren lasaiera-aldagaiak eta aldagai artifizialak gehituz.

Ondoren, soluzioa zuzenean lortzeko edo bitarteko eragiketa guztiak erakusteko aukera ematen du. Horretaz gain, soluzio optimoa (existitzekotan) lortu arte agertzen diren tauletako emaitzak era hamartarrean edo zatiki eran adieraz daitezke.

Tabla 1			5	15	15	50	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**
P_5	0	40	3	3	1	2	1	0	0
P_6	0	40	1	0	2	0	0	1	0
P_7	0	40	0	2	0	1	0	0	1
Z		0	-5	-15	-15	-50	0	0	0

☐ Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P_5 y la que entra es P_4.

Continuar

4.16. irudia.

4.17. irudiko 2. taulan proposatutako problemaren soluzio optimoa agertzen da.

Operaciones intermedias **(mostrar/ocultar detalles)**

Tabla 2			5	15	15	50	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**
P_4	50	20	3 / 2	3 / 2	1 / 2	1	1 / 2	0	0
P_6	0	40	1	0	2	0	0	1	0
P_7	0	20	-3 / 2	1 / 2	-1 / 2	0	-1 / 2	0	1
Z		1000	70	60	10	0	25	0	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

La solución óptima es Z = 1000
$X_1 = 0$
$X_2 = 0$
$X_3 = 0$
$X_4 = 20$

4.17. irudia.

Proposatutako PLko problemak bi aldagai baino ez baditu, PHPSimplex programak emaitza grafikoki azaltzen du.

4.4. KASU BEREZIAK

Ondoren, 1. kapituluan aurkeztutako kasu bereziak tresna hauen bidez ebazten dira:

4.4.1. Problema bideraezina

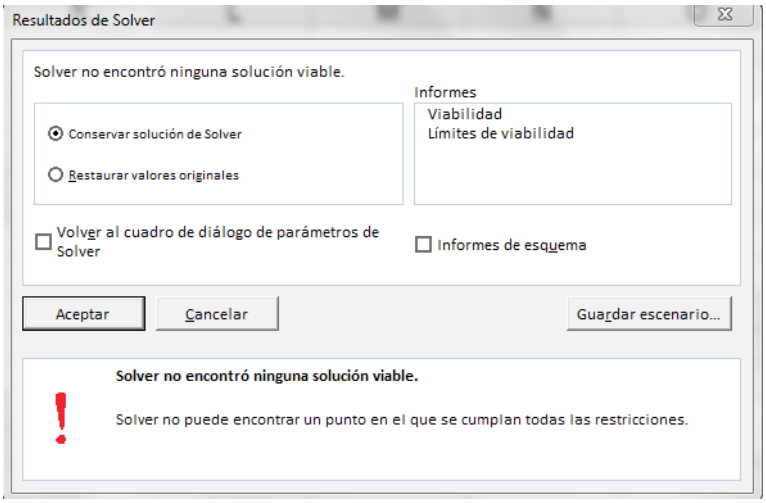
$$\text{Max } Z = x + y$$
$$2x + y \leq 5$$
$$x \geq 4$$
$$x, y \geq 0$$

Solver-en bidez

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**		X	Y						
4	*irabaziak*		1	1		**Helburu funtzioa**				
5	**Aldagaien balioak**		**0**	**0**				**0**		
6			**Matrizea**			**Guztira**		**Gai askea**		**Lasaiera**
7	**Murrizketak**		2	1		0	≤	5		5
8			1	0		0	≥	4		4

4.18. irudia.

«*Parámetros de Solver*» pantaila osatuta eta «*Resolver*» hautatuta, ondokoa lortzen da:



4.19. irudia.

4.19. irudian Solver-ek murrizketa guztiak betetzen dituen puntu bat ezin duela lortu zehazten da. Beraz, PLko problemak ez du soluziorik.

Bideragarritasun-txostena (4.20. irudia) eta *bideragarritasunaren limite-txostena* (4.21. irudia) berdinak dira:

Restricciones que hacen que el problema no sea viable

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$F$7	Restricciones Total	5	$F$7<=$H$7	Vinculante	0
$F$8	Total	2,5	$F$8>=$H$8	Infracción	-1,5

4.20. irudia.

Restricciones (sin incluir límites de variables) que hacen que el problema no sea viable

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$F$7	Restricciones Total	5	$F$7<=$H$7	Vinculante	0
$F$8	Total	2,5	$F$8>=$H$8	Infracción	-1,5

4.21. irudia.

PHPSimplex-en bidez:

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda **(mostrar/ocultar detalles)**

- Como la restricción 1 es del tipo '≤' se agrega la variable de holgura X_3.
- Como la restricción 2 es del tipo '≥' se agrega la variable de exceso X_4 y la variable artificial X_5.

MAXIMIZAR: $1 X_1 + 1 X_2$
$2 X_1 + 1 X_2 \leq 5$
$1 X_1 + 0 X_2 \geq 4$
$X_1, X_2 \geq 0$

MAXIMIZAR: $1 X_1 + 1 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5$
$2 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 = 5$
$1 X_1 -1 X_4 + 1 X_5 = 4$
$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla de la Fase I del método de las Dos Fases.

Continuar

Solución directa

Guardar el ejercicio

4.22. irudia.

«*Continuar*» hautatzen da azken taula lortu arte.

Operaciones intermedias **(mostrar/ocultar detalles)**

Tabla 2			0	0	0	0	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_1	0	5 / 2	1	1 / 2	1 / 2	0	0
P_5	-1	3 / 2	0	-1 / 2	-1 / 2	-1	1
Z		-3 / 2	0	1 / 2	1 / 2	1	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

No existe ninguna solución posible para el problema.

Resolver mediante el método Gráfico

4.23. irudia.

4.23. irudian problemak soluziorik ez duela zehaztuz mezu bat agertzen da.

Ebazpen grafikoak ez du datu nabarmenik aurkezten, problemak soluziorik ez duela aipatzen du.

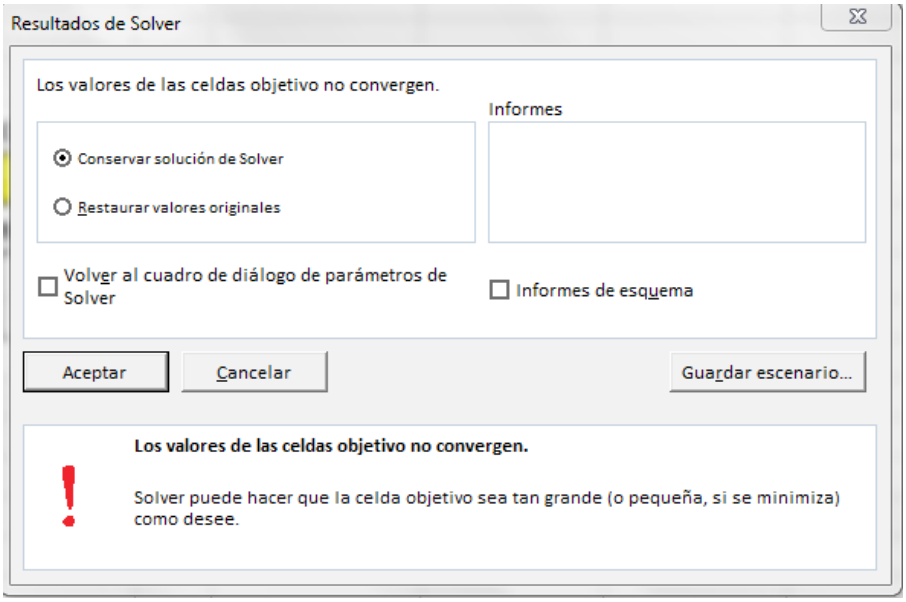
4.4.2. Problema mugatugabea

$$\text{Max } Z = 2x + y$$
$$x - 2y \leq 2$$
$$-4x + 3y \leq 12$$
$$x, y \geq 0$$

Solver-en bidez

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**		X	Y						
4	*irabaziak*		2	1				**Helburu funtzioa**		
5	**Aldagaien balioak**		**0**	**0**				**0**		
6			**Matrizea**			**Guztira**		**Gai askea**		**Lasaiera**
7	**Murrizketak**		1	-2		0	≤	2		2
8			-4	3		0	≤	12		12
9										

4.24. irudia.



4.25. irudia.

«*Resultados de Solver*» irudiak helburu gelaxkek konbergitzen ez dutela adierazten du, «*Solver puede hacer que la celda objetivo sea tan grande (o pequeña, si se minimiza) como desee*» mezua agertuz. Beraz, problemak ez du soluzio finiturik.

PHPSimplex-en bidez

Pasamos el problema a la forma estándar, añadiendo variables de exceso, holgura, y artificiales según corresponda **(mostrar/ocultar detalles)**

- Como la restricción 1 es del tipo '≤' se agrega la variable de holgura X_3.
- Como la restricción 2 es del tipo '≤' se agrega la variable de holgura X_4.

MAXIMIZAR: $2X_1 + 1X_2$
$1X_1 - 2X_2 \leq 2$
$-4X_1 + 3X_2 \leq 12$
$X_1, X_2 \geq 0$

MAXIMIZAR: $2X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4$
$1X_1 - 2X_2 + 1X_3 = 2$
$-4X_1 + 3X_2 + 1X_4 = 12$
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla del método Simplex.

Continuar

Solución directa

Guardar el ejercicio

4.26. irudia.

«*Continuar*» hautatu ondoren ondoz ondoko taulak lortzen dira azken taulara heldu arte:

Operaciones intermedias **(mostrar/ocultar detalles)**

Tabla 2			2	1	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
P_1	2	2	1	-2	1	0
P_4	0	20	0	-5	4	1
Z		4	0	-5	2	0

☐ Mostrar resultados como fracciones.

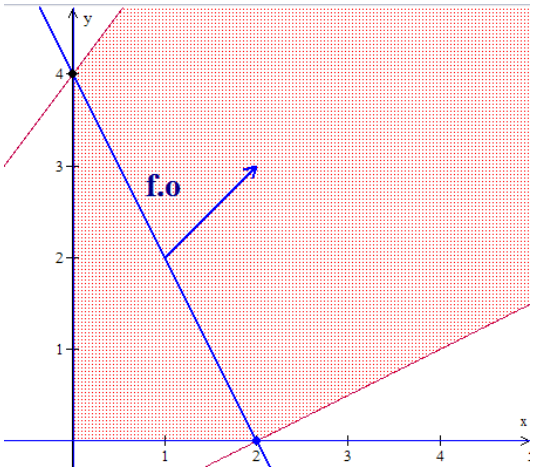
La solución no está acotada.

Resolver mediante el método Gráfico

4.27. irudia.

4.27. irudiak soluzioa mugatugabea dela adierazten du.

Ebazpen grafikoan (4.28. irudian) PLko problemaren egingarritasun-eskualdea mugatua ez dagoela ikusten da.



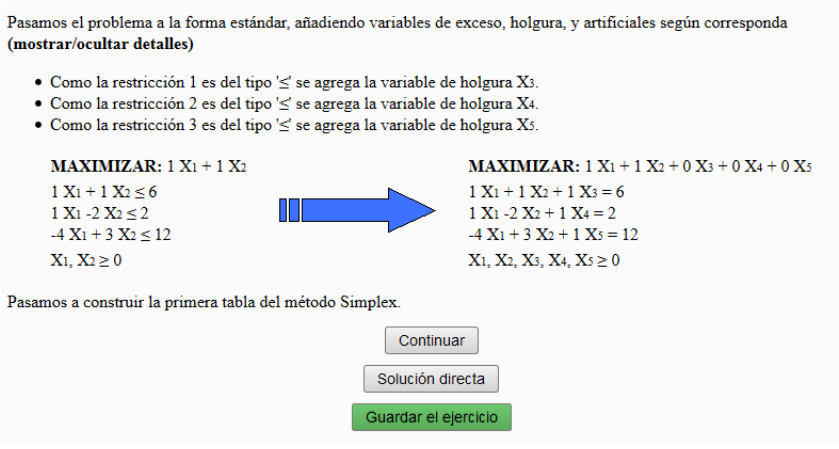
4.28. irudia.

Orduan, problema mugatugabea da.

4.4.3. Soluzio anizkoitza

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z &= x + y \\
x + y &\leq 6 \\
x - 2y &\leq 2 \\
-4x + 3y &\leq 12 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

PHPSimplex-en bidez



4.29. irudia.

«*Continuar*» hautatzen da honako azken taula hau lortu arte:

Operaciones intermedias **(mostrar/ocultar detalles)**

Tabla 3			1	1	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_2	1	4 / 3	0	1	1 / 3	-1 / 3	0
P_1	1	14 / 3	1	0	2 / 3	1 / 3	0
P_5	0	80 / 3	0	0	5 / 3	7 / 3	1
Z		6	0	0	1	0	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

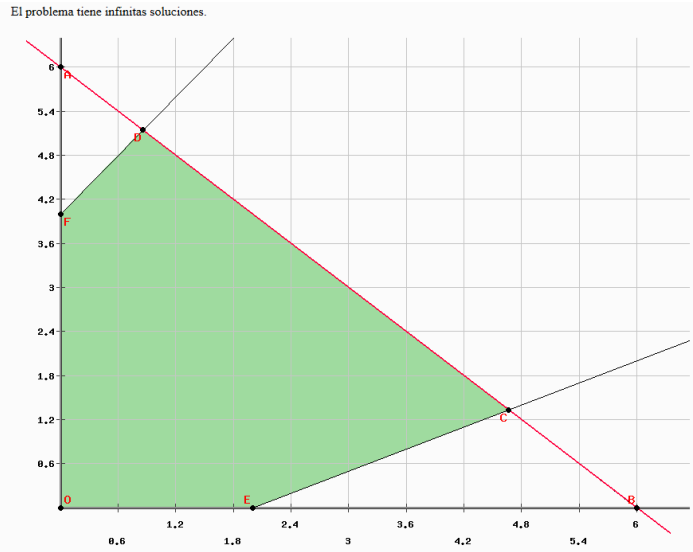
Hay infinitos valores de X_1, X_2 para el valor óptimo Z = 6 , los cuales están contenidos en el segmento de la recta $1 X_1 + 1 X_2 = 6$ que cumple las restricciones del problema.
Una de ellas es:
$X_1 = 14 / 3$
$X_2 = 4 / 3$

Resolver mediante el método Gráfico

4.30. irudia.

PHPSimplex-eko azken pantailak infinitu soluzio daudela eta horiek non dauden adierazten du, horietariko soluzio bat erakutsiz.

Gainera ebazpen grafikoa egiten du, problemak infinitu soluzio dituela azalduz.



4.31. irudia.

4.5. ONDORIOAK

Gaur egun ezezagun eta murrizketa ugari dituzten optimizazio-problemek enpresa-munduan duten garrantziak haien ebazpenerako beharrezkoak diren optimizazio-tresnak kalkulu-orrietan sartzera bultzatu gaitu.

Excel kalkulu-orriak duen Solver aukerak, erabiltzeko erraza denak, optimizaziorako bereziak diren programak erabili gabe problemak ebazteko aukera ematen du. Bestalde, nahi izanez gero, optimizazioa egin ondoren hiru txosten desberdin bueltatzen ditu: *erantzun-txostena, limite-txostena eta sentikortasun-txostena*. Praktikan, salbuespen batzuetan izan ezik, problemaren koefizienteek har ditzaketen balioetan ziurgabetasuna dago: hornidurek merkatuan izango duten prezioa, merkatuak finkatuko dituen salmenten prezioak, aldizka matxurak izango dituzten makinak eta abar. Aipatutako txostenei esker tarte batzuk zehatz daitezke, PLko problemako koefizienteak tarte horietan egonez gero, optimoa finko mantenduko delarik, edo zehaztu ahal izango den kantitate batean optimoa aldatuko delarik.

PHPSimplex online dagoen, dohainik eta librea den eta erraz erabiltzen den tresna da. Programa hau ikasleen ikaskuntza-prozesuan lagungarria izateko pentsatua dago, azken emaitzez gain bitarteko eragiketak ere erakusten baititu.

Baina, PLko problemak aldagai asko baditu eta bere soluzioak osoa izan behar badu, baliteke Excel kalkulu-orria erabiltzea? Nola?

5. Programazio lineal osoa eta bitarra

Aldagai ugari dituen eta soluzio osoa izan behar duen programazio linealeko (PLko) problema bat ebazteko Excel kalkulu-orria erabil daiteke. Jarraian, programazio lineal osoko (PLO) problemak Solver tresna erabiliz ebazteko jarraitu beharko pausoak azalduko dira.

Gai honetan bi enpresari ekoizpena antolatzen lagunduko zaien adibidea azalduko da, helburua enpresek ahalik eta etekin handiena izatea eta, ondorioz, merkatuan lehiakorrak izaten jarraitzea izanik.

Gako-hitzak: programazio lineal osoa (PLO), aldagai osoa, aldagai bitarra, Solver.

5.1. SARRERA

Probleman parte hartzen duten aldagaiak multzo jarraitu baten barnean egon beharrean, multzo finitu edo infinitu zenbakigarri baten barne daudenean PLOa sortzen da. Nahiz eta mota honetako problemek ebazteko errazagoak diruditen, egia esan, ebazteko askoz zailagoak izaten dira. Aldagaiek zero edo bat balioak soilik har ditzaketenean baliabideen esleipena bezala ezagutzen den PLOko kasu partikular oso arrunta sortzen da.

Problema ebazteko erarik naturalena murrizketak erlaxatzean sortzen den problema jarraituan Simplex algoritmoa aplikatzea dela dirudi, ondoren lortutako soluzioa biribilduz soluzio oso eta bideragarri bat lortzeko. Hala ere, lehenengo kasu praktikoan ikusiko den bezala bide hori desegokia da.

Problema mota hauek ebazteko erabiltzen diren algoritmo ezberdinen artean, Excel kalkulu-orriaren bidezko ebazpenean arreta jarriko dugu.

Excel kalkulu-orria erabiliz PLOko problema bat PLko problema baten era berdintsuan ebazten da. Desberdintasun bakarra zera da: Solver tresnan murrizketak sartzeko orduan aldagaiak osoak *(int)* edo bitarrak *(bin)* diren zehaztu behar dela.

5.2. LEHENENGO KASU PRAKTIKOA

Enpresa batek bi produktu-lerro ditu. Horietariko batek bereziki automobil-industrian erabiltzen diren robot industrialak fabrikatzen dihardu, eta, besteak, berriz, potentzia-transformadore elektrikoak egiten eta diseinatzen ditu. Bi lerroek ingeniaritza, fabrikazio eta muntaketako departamentuetako baliabideak partekatzen dituzte. Orain arte departamentu horiek era autonomoan lan egin dute, beren helburu eta balio-sistema propioak erabiliz. Komunikaziorik ezak behin baino gehiagotan atzerapenak sorrarazi ditu emanaldietan, departamentu bakoitzeko langileen erabilgarritasun-orduengatik.

Merkatuan posizio lehiakorra mantentzeko asmoz, enpresak politika eraginkor bezala departamentuen arteko erlazioa lantzea kontsideratu du, sindikatuekin sinatutako lanordu guztiei buruzko akordioa errespetatuz. Lehen aldiz, hiru departamentuak bildu eta beren beharrak eta lehentasunezko helburuak analizatu eta zehaztu behar dituzte, departamentu batek hartutako erabakiak beste bati kalte ez egiteko.

Hurrengo hilabeteari dagokion eskariaren aurreikuspena kontuan hartuz, enpresako zuzendaritzak denboraldi horretan zehar bi lerroek fabrikatzeko gai izango diren produktu guztiak saltzea posible izango dela aurrez ikusten du.

Enpresako ingeniaritza, fabrikazio eta muntaketako departamentuek izandako bileratik honako faktore garrantzitsu hauek kontuan hartu behar dituztela ondorioztatzen da:

- *Robot industrial bat eta potentzia-transformadore elektriko bat saltzeagatik lortzen diren irabaziak 5.000 €-koa eta 4.000 €-koa dira, hurrenez hurren.*
- *Datorren hilabeteko ekoizpenerako, hiru departamentu horiek 150eko, 160ko eta 210eko ordu-erabilgarritasuna dituzte, hurrenez hurren. Robot bakoitza egiteko ingeniaritzako departamentuak 10 ordu behar ditu; fabrikaziokoak, berriz, 20 ordu, eta muntaketakoak, ordea, 30 ordu. Bestalde, transformadore elektriko batek ingeniaritzako 15 ordu, fabrikazioko 10 ordu eta muntaketako 10 ordu behar ditu.*
- *Bi produktu-lerroak merkatura atera baino lehen, egiaztatze-proba bat pasatu behar dute. Datorren hilabetean, enpresak gutxienez 135 ordu ditu proba hori egiteko. Gainera, robot bakoitza eta transformadore bakoitza aztertzeko 30 ordu eta 10 ordu behar dira, hurrenez hurren.*
- *Merkatuan posizio lehiakorra mantentzeko asmoz, enpresak politika eraginkor bezala hiru roboteko gutxienez transformadore bat ekoitzi behar dela kontsideratu du.*
- *Azkenik, bezero nagusietariko batek datorren hilabeterako gutxienez 5 produktu (edozein konbinaziotan) erreserbatu ditu.*

Nola programatu beharko du enpresak datorren hilabeteko ekoizpena etekinik handiena lortzeko?

Hiru departamentuek egindako proposamenak kontuan hartzen dituen eredu matematikoa hau da:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad Z &= 5.000x_1 + 4.000x_2 \\
10\,x_1 + 15x_2 &\le 150 \\
20x_1 + 10x_2 &\le 160 \\
30x_1 + 10x_2 &\le 210 \\
30x_1 + 10x_2 &\ge 135 \\
x_1 - 3x_2 &\le 0 \\
x_1 + x_2 &\ge 5 \\
x_1, x_2 &\ge 0 \ \ \text{(osoak)}
\end{aligned}
$$

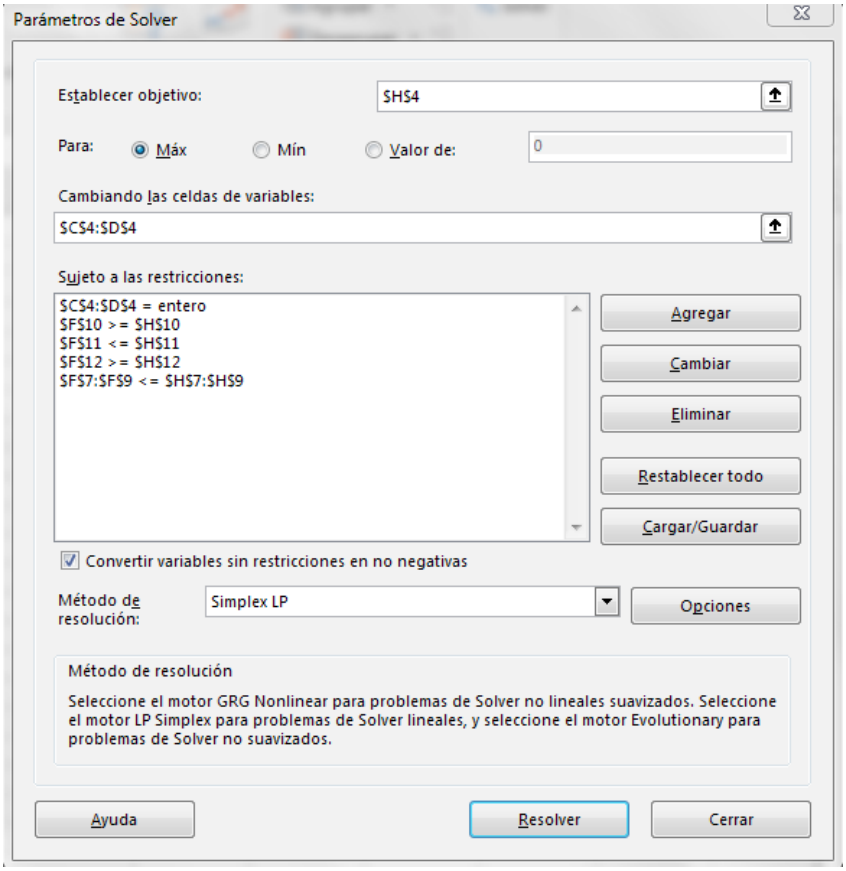
Z lortutako mozkin ekonomikoa, x_1 robot industrialen kopurua eta x_2 transformadore elektrikoen kopurua izanik.

Hurrengo irudietan Excel-eko Solver tresnaren bidez problema honen ebazpenari dagozkion pantailak agertzen dira.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	**Erabaki-aldagaiak**		**X1**	**X2**						
3	Irabaziak		5000	4000				**Helburu funtzioa**		
4	**Aldagaien balioak**		0	0				0		
5										
6	**Murrizketak**		***Matrizea***			***Guztira***		***Gai askea***		***Lasaiera***
7			10	15		0	≤	150		150
8			20	10		0	≤	160		160
9			30	10		0	≤	210		210
10			30	10		0	≥	135		135
11			1	-3		0	≤	0		0
12			1	1		0	≥	5		5

5.1. irudia.

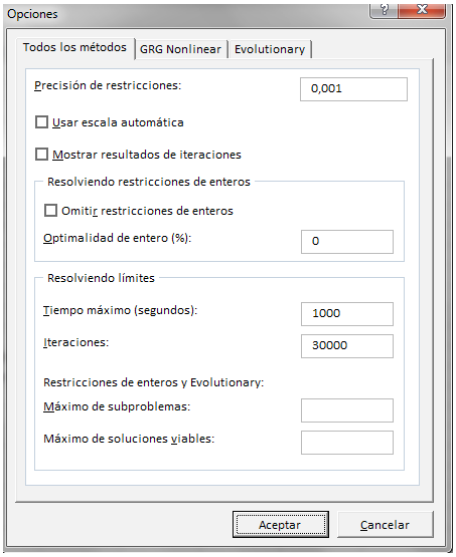
Problemak aldagai osoak izateagatik, baldintza hori «*restricciones de los Parámetros de Solver*» aukeran zehaztu behar da, 5.2. irudian agertzen den moduan.



5.2. irudia.

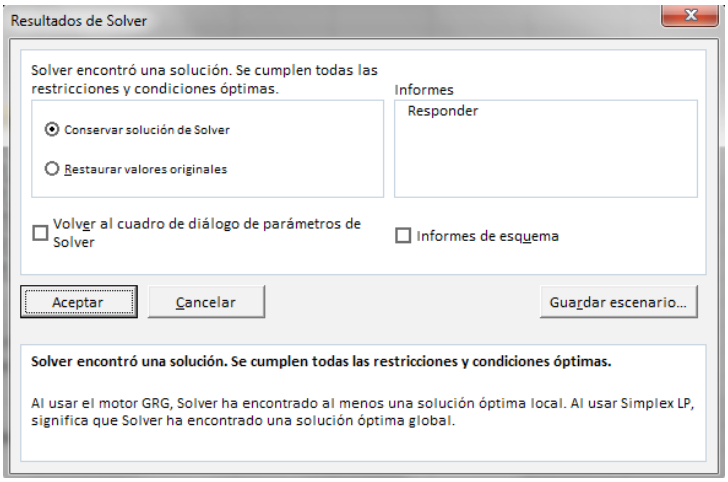
Problemaren elementu guztiak definitu ondoren, *«Opciones»* botoiak problemaren ebazpenari eragiten dioten ezaugarri batzuk hautatzen baimentzen du.

Osoak eta bitarrak diren problemetan zehaztasuna oso garrantzitsua da. Erabakia aldagaiaren balioaren eta hurbilen dagoen balio osoaren arteko aldea zehaztasuna baino txikiagoa bada, aldagaiaren balioa osoa dela kontsideratzen da. Zenbat eta zehaztasun handiagoa izan, orduan eta denbora gehiago behar da soluzioa lortzeko. Gainera tolerantzia-maila nulua bada, Solver-ek soluzioak bilatzen jarraituko du, aukera guztiak arakatu eta soluzio optimo osoa lortu arte.



5.3. irudia.

Aukera horiek sartu ondoren, «*Resolver*» hautatzen da eta Solver-ek mezua (5.4. irudia) eta soluzioa (5.5. irudia) adierazten ditu.



5.4. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	**Erabaki-aldagaiak**		**X1**	**X2**						
3	Irabaziak		5000	4000				**Helburu funtzioa**		
4	**Aldagaien balioak**		5	6				49000		
5										
6	**Murrizketak**		***Matrizea***			***Guztira***		***Gai askea***		***Lasaiera***
7			10	15		140	≤	150		10
8			20	10		160	≤	160		0
9			30	10		210	≤	210		0
10			30	10		210	≥	135		75
11			1	-3		-13	≤	0		13
12			1	1		11	≥	5		6

5.5. irudia.

Solver-en bidez ebatzitako PLOko problemek ez dituzte sentikortasun- eta limite-txostenak ematen, erantzun-txostenak soilik zehazten dituzte.

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$H$4	Valor de las variables Función objetivo	0	49000

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$4	Valor de las variables X1	0	5	Entero
$D$4	Valor de las variables X2	0	6	Entero

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$F$10	Total	210	$F$10>=$H$10	No vinculante	75
$F$11	Total	-13	$F$11<=$H$11	No vinculante	13
$F$12	Total	11	$F$12>=$H$12	No vinculante	6
$F$7	Total	140	$F$7<=$H$7	No vinculante	10
$F$8	Total	160	$F$8<=$H$8	Vinculante	0
$F$9	Total	210	$F$9<=$H$9	Vinculante	0
$C$4:$D$4=Entero					

5.6. irudia.

Lortutako datuak aztertuz, posible da enpresari jakinaraztea mozkinik handiena izateko, hau da, 49.000 euro lortzeko, datorren hilabetean 5 robot industrial eta 6 transformadore elektriko fabrikatu beharko dituela. Gainera, fabrikazio eta muntaketako departamentuek erabilgarritasun-orduak agortuko dituztela kontuan hartu beharko litzateke.

«*Parámetros de Solver*»-eko datuetan osotasun-baldintza jarriko ez balitz, emaitza hau izango litzateke.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	**Erabaki-aldagaiak**		**X1**	**X2**						
3	Irabaziak		5000	4000				**Helburu funtzioa**		
4	**Aldagaien balioak**		4,5	7				50500		
5										
6	**Murrizketak**		***Matrizea***			***Guztira***		***Gai askea***		***Lasaiera***
7			10	15		150	≤	150		0
8			20	10		160	≤	160		0
9			30	10		205	≤	210		5
10			30	10		205	≥	135		70
11			1	-3		-16,5	≤	0		16,5
12			1	1		11,5	≥	5		6,5

5.7. irudia.

$x_1 = 4,5$; $x_2 = 7$ soluzioa bideragarria izaten jarraituz biribiltzen bada, $x_1 = 4$, $x_2 = 7$ lortzen da. Hau da, datorren hilabetean 4 robot industrial eta 7 transformadore elektriko fabrikatu beharko direla lortzen da, 48.000 euroko mozkina izanik. Orduan, Solver-en osotasun-baldintza jartzen ez bada, 1.000 euro gutxiago lortzen da.

Beraz, aldagaiak osoak direla *«Parámetros de Solver»*-eko murrizketan adierazi behar da.

5.3. BIGARREN KASU PRAKTIKOA

Enpresa batek 3 urtetan zehar garatuko diren 4 proiekturen artean batzuk aukeratu beharko ditu. Proiektu bakoitzetik itxaroten diren irabaziak, proiektu bakoitzak behar dituen inbertsioak eta urtero inbertitzeko dagoen dirua milatan ondoko taulan agertzen dira.

Proiektua	1. urteko inbertsioa	2. urteko inbertsioa	3. urteko inbertsioa	Itxarotako mozkina
1	13	15	17	90
2	2	5	8	60
3	15	10	5	180
4	10	5	5	100
Kapital maximo erabilgarria	30	30	30	

Zein proiektu aukeratu beharko du enpresak, itxarotako mozkina maximoa izan dadin?

Problema honen formulazio matematikoa hau da:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 90x_1 + 60x_2 + 180x_3 + 100x_4 \\ 13x_1 + 2x_2 + 15x_3 + 10x_4 &\le 30 \\ 15x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 &\le 30 \\ 17x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 5x_4 &\le 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \quad \text{eta} \quad \text{bitarrak} \end{aligned}$$

Aldagai bitarrak era honetan erabili dira:

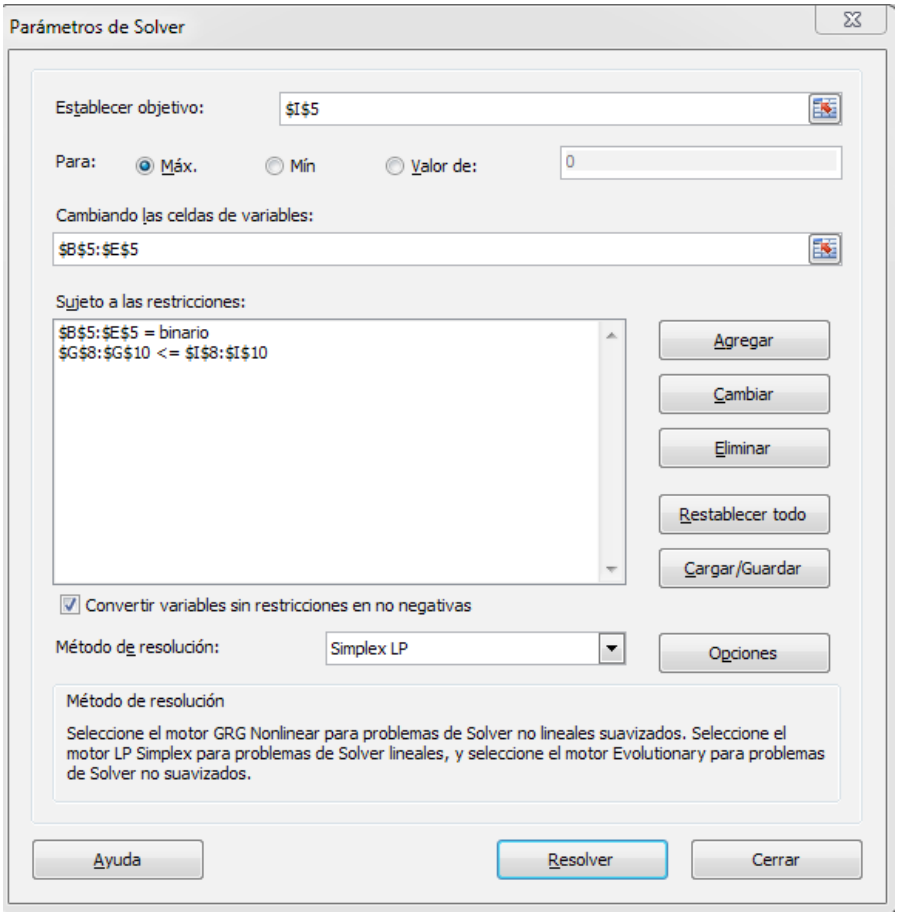
$$x_i = \begin{cases} 1 & i.\ \text{proiektua egiten bada} \\ 0 & i.\ \text{proiektua egiten ez bada} \end{cases}$$

Excel kalkulu-orrian jartzen den planteamendua honako hau da:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**	x1	x2	x3	x4					
4	*Irabaziak*	90	60	180	100				**Helburu funtzioa**	
5	**Aldagaien balioak**	**0**	**0**	**0**	**0**				**0**	
6			Matrizea				Guztira		Gaia askea	Lasaiera
7	**Murrizketak**									
8		13	2	15	10		0	≤	30	30
9		15	5	10	5		0	≤	30	30
10		17	8	5	5		0	≤	30	30

5.8. irudia.

Problema honek aldagai bitarrak izateagatik, «*restricciones de los Parámetros de Solver*»-en adieraziko da, 5.9. irudian agertzen den moduan.

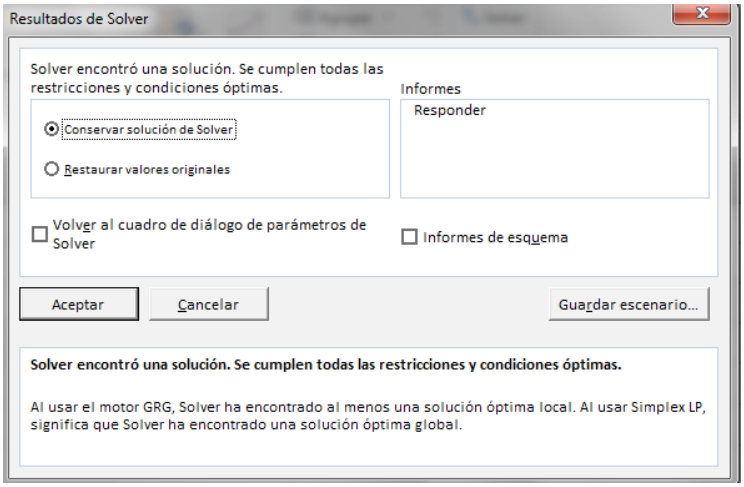


5.9. irudia.

Datuak sartu eta «*Resolver*» hautatu ondoren, Solver-ek honako soluzio hau erakutsiko du:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**	x1	x2	x3	x4					
4	*Irabaziak*	90	60	180	100				**Helburu funtzioa**	
5	**Aldagaien balioak**	**0**	**1**	**1**	**1**				**340**	
6			Matrizea				Guztira		Gaia askea	Lasaiera
7	**Murrizketak**									
8		13	2	15	10		27	≤	30	3
9		15	5	10	5		20	≤	30	10
10		17	8	5	5		18	≤	30	12

5.10. irudia.



5.11. irudia.

5.10. irudian agertzen den bezala, Solver-ek emandako datuen arabera, enpresak 2., 3. eta 4. proiektuak aukeratu behar ditu 340.000 euroko mozkina lortzeko. Urte bakoitzean diru osoa erabiltzen ez dela azpimarratu beharko da.

5.4. KASU BEREZIAK

Lehenengo gaian aurkeztutako kasu berezietan aldagaiak osoak direla kontsideratzean lortutako problemen ebazpena:

5.4.1. Problema bideraezina

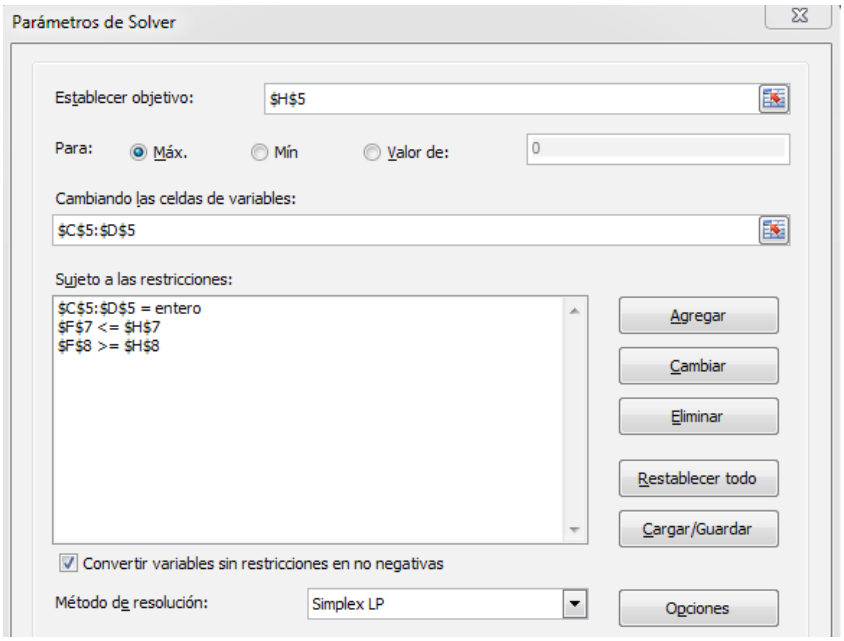
$$\text{Max } Z = x + y$$
$$2x + y \leq 5$$
$$x \geq 4$$
$$x, y \geq 0 \text{ (osoak)}$$

Datuak Excel kalkulu-orrian sartzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**		X	Y						
4	*Kostuak*		1	1			**Helburu funtzioa**			
5	**Aldagaien balioak**		**0**	**0**				**0**		
6			**Matrizea**			**Guztira**		**Gai askea**		**Lasaiera**
7	**Murrizketak**		2	1		0	≤	5		5
8			1	0		0	≥	4		4

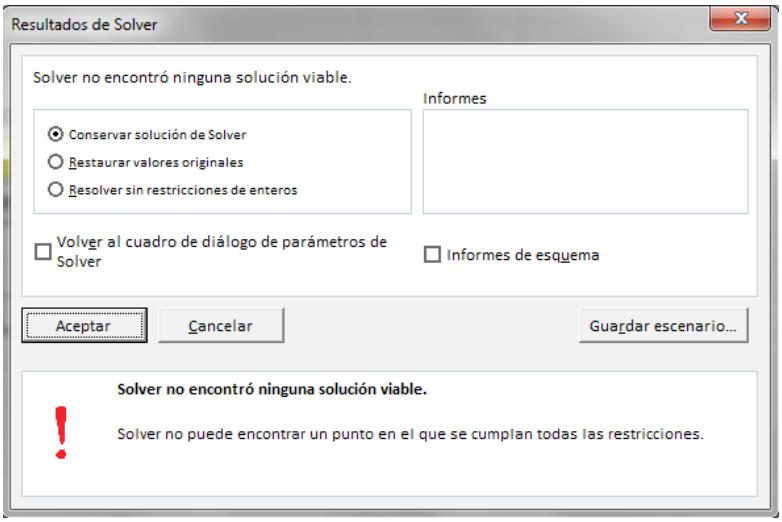
5.12. irudia.

Murrizketetan aldagaiak osoak direla inposatzen da:



5.13. irudia.

Ebaztean honako pantaila hau lortzen da:



5.14. irudia.

5.14. irudian «*Solver no puede encontrar un punto en el que se cumplan todas las restricciones*» ikus daiteke. Ondorioz, PLOko problemak ez du soluziorik.

5.4.2. Problema mugatugabea

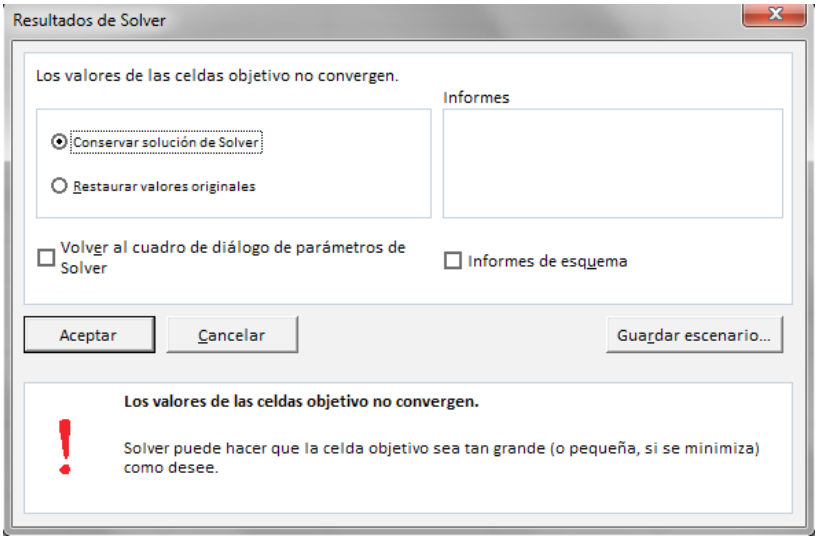
$$\begin{aligned} \text{Max } Z = \ & 2x + y \\ x - 2y &\leq 2 \\ -4x + 3y &\leq 12 \\ x, y &\geq 0 \ (osoak) \end{aligned}$$

Datuak Excel kalkulu-orrian sartzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3	**Erabaki-aldagaiak**		X	Y						
4	*Kostuak*		2	1		**Helburu funtzioa**				
5	**Aldagaien balioak**		**0**	**0**				**0**		
6			**Matrizea**			**Guztira**		**Gai askea**		**Lasaiera**
7	**Murrizketak**		1	-2		0	≤	2		2
8			-4	3		0	≤	12		12

5.15. irudia.

«*Parámetros de Solver*» pantaila bete eta bertan aldagaiak osoak direla zehaztu ondoren «*Resolver*» aukeratuz hauxe lortzen da:



5.16. irudia.

«*Resultados de Solver*» irudian «*Solver puede hacer que la celda objetivo sea tan grande (o pequeña, si se minimiza) como desee*» irakur daiteke, hau da, helburu gelaxken balioek ez dute balio batera jotzen. Ondorioz, problemak ez du soluzio oso finiturik.

5.5. ONDORIOAK

Murrizketa eta aldagai ugari dituzten optimizazioko problema askok soluzio osoa edo bitarra behar dute. Problema diskretuaren soluzioa problema jarraituarena erabiliz hurbiltzea, hau da, problema jarraitua ebaztea eta lortutako soluzioa biribilduz soluzio oso bideragarri bat lortzea ez da beti erabaki egokia.

Excel kalkulu-orriak duen Solver tresna erabiltzeko erraza eta argia denez, programa espezializatuen alternatiba bat da.

Mota desberdinetako problema berezietan ere, sareekin erlazionatutako PLko problemetan adibidez, kalkulu-orri honen erabilera erraza nabaria da.

Nola erabil daiteke Solver tresna mota horretako problemak ebazteko?

6. Programazio linealeko problema bereziak: garraioa, esleipena, bi punturen arteko distantzia eta fluxu maximoa

Programazio linealeko (PLko) aplikazio askoren artean garraio-problemak, bi punturen arteko distantzia eta fluxu maximoa azpimarragarriak dira. Egoera bakoitzean aplikatu behar diren ereduak PLri dagokion literaturan ugari aztertuta daude.

Jarraian, praktikoak eta errealak diren egoera desberdinen ebazpenarekin batera, Excel kalkulu-orriaren eta PHPSimplex online dagoen tresnaren bidez ebatzitako problemak aurkezten dira.

Gako-hitzak: programazio lineala (PLa), Excel kalkulu-orria, garraio-problema, esleipen-problema, bi punturen arteko distantzia minimoa eta fluxu maximoa.

6.1. GARRAIO-PROBLEMA

Ohiko garraio-problema m biltegitan dauden eta berdinak diren produktuak n helmuga-puntutara eramatean datza. Ezaugarri nagusiak hauek dira: a_i i. biltegian dagoen produktu kantitatea, b_j j. helmuga-puntura eraman beharreko unitateen kopurua, c_{ij} i. biltegitik j. helmuga-puntura unitate bakoitza garraiatzean sortzen den kostua eta x_{ij} i. biltegitik j. helmuga-puntura garraiatzen diren unitateen kopurua. Problema orekatua dela suposatuz, hau da, jatorrietan eskura dauden artikuluen kopurua eta helmugetako eskaera bat datozela suposatuz, helburu nagusia garraio-kostua minimizatzea da.

Problema honi dagokion formulazioa hau da:

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \,;\; j = 1, 2, \ldots, n$$

Lehenengo *n* murrizketek helmuga-puntuetako eskaerei dagozkien artikuluen kopurua adierazten dute, eta hurrengo *m* murrizketek, berriz, biltegietan eskura daudenak.

Problema orekatua ez bada, gezurretako jatorriak edo gezurretako helmugak sortu beharko dira problema orekatu arte, horrela problemak soluzioa izanik.

6.1.1. Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako garraio-problema

Energia-enpresa batek eguneko lau hiritako energia-eskaria betetzeko lau sorkuntza-instalazio ditu. 1., 2. , 3. eta 4. instalazioek eguneko 60, 40, 100 eta 120 milioi kilowatt ekoizten dituzte, hurrenez hurren. Bestalde, hirietako eskariak 100, 80, 160 eta 60 milioi kilowattekoak dira, hurrenez hurren.

Sorkuntza-instalazio bakoitzetik hiri bakoitzera milioi bat kilowatt hornitzean dagoen kostua honako hau da:

		Helmuga				
		1	**2**	**3**	**4**	Baliabideak
Jatorria	**1**	6	16	-	12	60
	2	16	8	12	6	40
	3	20	12	16	8	100
	4	16	10	14	10	120
Eskaera		100	80	160	60	

Nola antolatu beharko da garraioa, kostua minimizatzeko?

Garraio-problema honek bi ezaugarri berezi dituela kontuan hartu behar da:

Ekoitzitako unitateen kopurua eta eskatutako unitateen kopurua ezberdinak izatea (ez orekatua).

1. jatorriaren eta 3. helmugaren artean loturarik ez egotea.

Orduan, Solver-en bidez ebatzi aurretik beharrezkoa da problema orekatzea, horretarako eguneko 80 milioi kW-eko ekoizpena duen gezurretako jatorri bat sortuz. Gainera, 1. sorkuntza-instalazioaren eta 3. hiriaren arteko garraio-kostuari kantitate handi bat (10.000 euro) esleitu beharko zaio. Problema orekatua hauxe da:

		Helmuga				
		1	**2**	**3**	**4**	Baliabideak
Jatorria	**1**	6	16	10.000	12	60
	2	16	8	12	6	40
	3	20	12	16	8	100
	4	16	10	14	10	120
	5	0	0	0	0	80
Eskaera		100	80	160	60	*400*

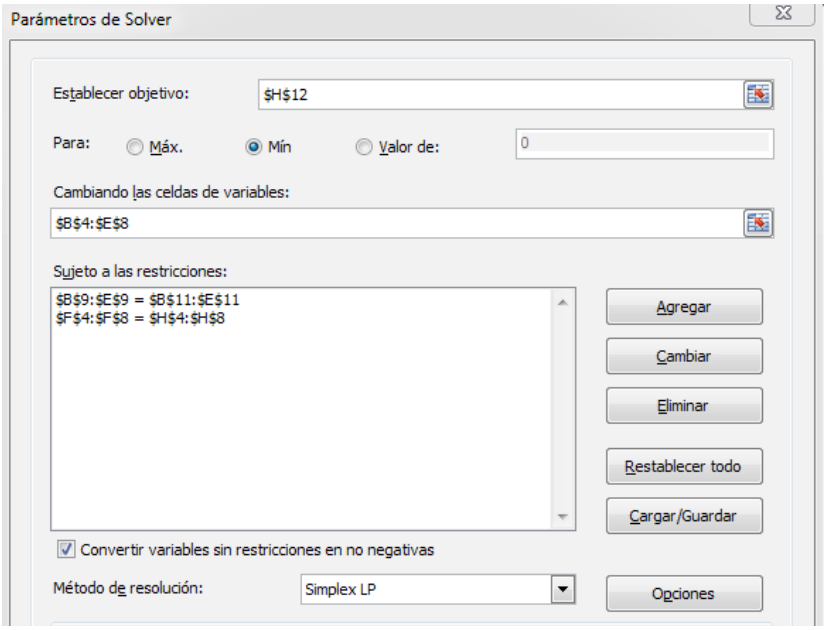
Ondoko irudietan kalkulu-orriaren programazioarekin batera, Solver-ekin lortutako garraio-problema orekatu honen soluzioa erakusten da:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	**Aldagaiak**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
4	**O1**					0	=	**60**
5	**O1**					0	=	**40**
6	**O3**					0	=	**100**
7	**O4**					0	=	**120**
8	**O5**					0	=	**80**
9		0	0	0	0			
10		=	=	=	=			
11		**100**	**80**	**160**	**60**		**Kostu totala**	**0**
12								
13	**Kostuak**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
14	**O1**	**6**	**16**	**10000**	**12**			
15	**O1**	**16**	**8**	**12**	**6**			
16	**O3**	**20**	**12**	**16**	**8**			
17	**O4**	**16**	**10**	**14**	**10**			
18	**O5**	**0**	**0**	**0**	**0**			

6.1. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	**Aldagaiak**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
4	**O1**					=SUMA(B4:E4)	=	**60**
5	**O1**					=SUMA(B5:E5)	=	**40**
6	**O3**					=SUMA(B6:E6)	=	**100**
7	**O4**					=SUMA(B7:E7)	=	**120**
8	**O5**					=SUMA(B8:E8)	=	**80**
9		=SUMA(B4:B8)	=SUMA(C4:C8)	=SUMA(D4:D8)	=SUMA(E4:E8)			
10		=	=	=	=			
11		**100**	**80**	**160**	**60**		**Kostu totala**	**=SUMAPRODUCTO(B4:E8;B14:E18)**
12								
13	**Kostuak**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
14	**O1**	**6**	**16**	**10000**	**12**			
15	**O1**	**16**	**8**	**12**	**6**			
16	**O3**	**20**	**12**	**16**	**8**			
17	**O4**	**16**	**10**	**14**	**10**			
18	**O5**	**0**	**0**	**0**	**0**			

6.2. irudia.



6.3. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	**Aldagaiak**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
4	**O1**	60	0	0	0	60	=	**60**
5	**O1**	0	40	0	0	40	=	**40**
6	**O3**	0	40	0	60	100	=	**100**
7	**O4**	0	0	120	0	120	=	**120**
8	**O5**	40	0	40	0	80	=	**80**
9		100	80	160	60			
10		=	=	=	=			
11		**100**	**80**	**160**	**60**		**Kostu totala**	**3320**
12								
13	**Kostuak**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
14	**O1**	**6**	**16**	**10000**	**12**			
15	**O1**	**16**	**8**	**12**	**6**			
16	**O3**	**20**	**12**	**16**	**8**			
17	**O4**	**16**	**10**	**14**	**10**			
18	**O5**	**0**	**0**	**0**	**0**			

6.4. irudia.

Solver tresnak emandako soluzioak (6.4. irudia) 4 sorkuntza-instalazioen eta 4 hirien arteko garraio-antolakuntza optimoa erakusten du, eguneko 3.320 euroko kostua izanik.

Honako taula honetan garraio-banaketa egokia agertzen da:

		Helmuga				
		1	**2**	**3**	**4**	Baliabideak
Jatorria	**1**	60				60
	2		40			40
	3		40		60	100
	4			120		120
	5	40		40		80
Eskaera		100	80	160	60	*400*

2. eta 4. hiriek egunero behar dituzten kW guztiak jasoko dituztela azpimarratzekoa da; beste hiriek, berriz, ez dute eskaera osoa asetuko. Izan ere, bai 1. hiriak bai 3. hiriak eskatutako 40 milioi kW baino gutxiago jasoko dituzte.

6.1.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako garraio-problema

Aurreko garraio-problema PHPSimplex-en bidez ebazteko, energia-enpresak planteatutako kontsiderazioak kontuan hartu behar dituen eredu matematikoa eraiki behar da.

PHPSimplex-ek problema orekatu behar du (5. sorkuntza-instalazioa sortu) eta 1. sorkuntza-instalazioaren eta 3. hiriaren arteko garraio-kostuari kantitate handi bat (10.000 euro) esleitu behar dio.

i. jatorritik *j*. helmuga-puntura garraiatu behar den x_{ij} unitate kopurua dela jakinik, problema orekatua hau da:

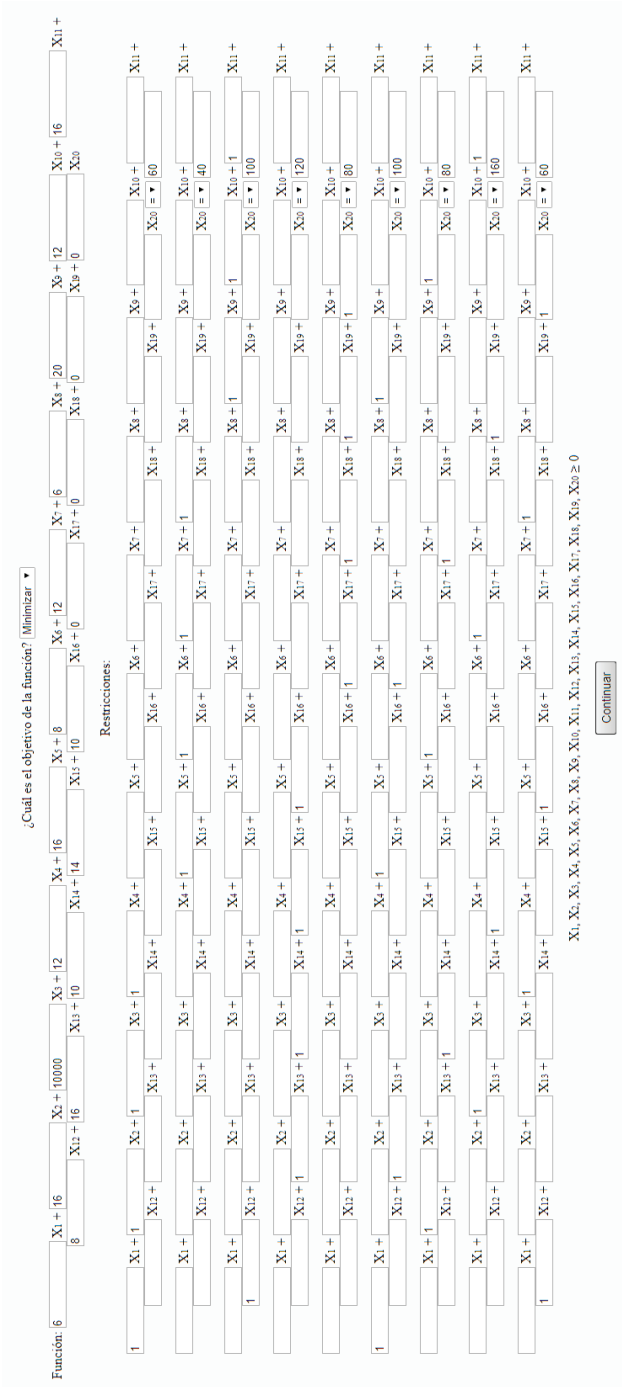
$$\text{Min} \quad Z = 6x_{11} + 16x_{12} + 10.000x_{13} + 12x_{14} + 16x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + 6x_{24} +$$

$$+20x_{31} + 12x_{32} + 16x_{33} + 8x_{34} + 16x_{41} + 10x_{42} + 14x_{43} + 10x_{44} + 0x_{51} + 0x_{52} + 0x_{53} + 0x_{54}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 120$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 80$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 80$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 160$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 60$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}, j \in \{1,2,3,4\}$$

PHPSimplex orrian erabaki-aldagai eta murrizketa kopurua adierazten dira eta problemaren datuak sartzen dira.

6.5. eta 6.6. irudietan programak egindako aldagaien izendapena eta eredu matematikoan erabilitakoa bat ez datozela ikusten da.



6.5. irudia.

MINIMIZAR: $6 X_1 + 16 X_2 + 10000 X_3 + 12 X_4 + 16 X_5 + 8 X_6 + 12 X_7 + 6 X_8 + 20 X_9 + 12 X_{10} + 16 X_{11} + 8 X_{12} + 16 X_{13} + 10 X_{14} + 14 X_{15} + 10 X_{16} + X_{17} + X_{18} + X_{19} + X_{20}$

sujeto a

$1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15} + 0 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 60$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 1 X_5 + 1 X_6 + 1 X_7 + 1 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15} + 0 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 40$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 1 X_9 + 1 X_{10} + 1 X_{11} + 1 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15} + 0 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 100$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 1 X_{13} + 1 X_{14} + 1 X_{15} + 1 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 120$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15} + 0 X_{16} + 1 X_{17} + 1 X_{18} + 1 X_{19} + 1 X_{20} = 80$
$1 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 1 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 1 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 1 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15} + 0 X_{16} + 1 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 100$
$0 X_1 + 1 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 1 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 1 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 1 X_{14} + 0 X_{15} + 0 X_{16} + 0 X_{17} + 1 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 80$
$0 X_1 + 0 X_2 + 1 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 1 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 1 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 1 X_{15} + 0 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 1 X_{19} + 0 X_{20} = 160$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 1 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 1 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 1 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15} + 1 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 1 X_{20} = 60$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20} \geq 0$

Pasamos a construir la primera tabla de la Fase I del método de las Dos Fases.

MAXIMIZAR: $-6 X_1 -16 X_2 -10000 X_3 -12 X_4 -16 X_5 -8 X_6 -12 X_7 -6 X_8 -20 X_9 -12 X_{10} -16 X_{11} -8 X_{12} -16 X_{13} -10 X_{14} -14 X_{15} -10 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} + 0 X_{21} + 0 X_{22} + 0 X_{23} + 0 X_{24} + 0 X_{25} + 0 X_{26} + 0 X_{27} + 0 X_{28} + 0 X_{29}$

sujeto a

$1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 X_4 + 1 X_{29} = 60$
$0 X_1 + 1 X_5 + 1 X_6 + 1 X_7 + 1 X_8 + 1 X_{28} = 40$
$0 X_1 + 1 X_9 + 1 X_{10} + 1 X_{11} + 1 X_{12} + 1 X_{27} = 100$
$0 X_1 + 1 X_{13} + 1 X_{14} + 1 X_{15} + 1 X_{16} + 1 X_{26} = 120$
$0 X_1 + 1 X_{17} + 1 X_{18} + 1 X_{19} + 1 X_{20} + 1 X_{25} = 80$
$1 X_1 + 1 X_5 + 1 X_9 + 1 X_{13} + 1 X_{17} + 1 X_{24} = 100$
$0 X_1 + 1 X_2 + 1 X_6 + 1 X_{10} + 1 X_{14} + 1 X_{18} + 1 X_{23} = 80$
$0 X_1 + 1 X_3 + 1 X_7 + 1 X_{11} + 1 X_{15} + 1 X_{19} + 1 X_{22} = 160$
$0 X_1 + 1 X_4 + 1 X_8 + 1 X_{12} + 1 X_{16} + 1 X_{20} + 1 X_{21} = 60$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{26}, X_{27}, X_{28}, X_{29} \geq 0$

Continuar

Solución directa

Guardar el ejercicio

6.6. irudia.

Eredu linealaren aldagaien eta PHPSimplex-en aldagaien arteko elkarrekikotasuna 6.7. irudian agertzen da. Azalpen hau beharrezkoa da, garraio-problemak dituen jatorri eta helmuga kopuruak oso handiak direnean.

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}

6.7. irudia.

«*Continuar*» hautatzean, bi faseko metodoari dagozkion taulak agertzen dira, programak soluzio optimoa lortu arte.

Tabla 4			-6	-16	-10000	-12	-16	-8	-12	-6	-20	-12	-16	-8	-16	-10	-14	-10	0	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**	**P_9**	**P_{10}**	**P_{11}**	**P_{12}**	**P_{13}**	**P_{14}**	**P_{15}**	**P_{16}**	**P_{17}**	**P_{18}**	**P_{19}**	**P_{20}**
P_{11}	-16	40	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1
P_{19}	0	40	0	1	1	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	1	1
P_1	-6	60	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{14}	-10	80	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
P_{25}	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{12}	-8	60	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
P_7	-12	40	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{17}	0	40	0	-1	-1	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
P_{15}	-14	40	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	0	1	1	0	-1	0	0
Z		-3320	0	14	9994	14	4	0	0	2	4	0	0	0	2	0	0	4	0	4	0	8

6.8. irudia.

Hay infinitos valores de $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}$ para el valor óptimo $Z = 3320$, los cuales están contenidos en la región del espacio $6 X_1 + 16 X_2 + 10000 X_3 + 12 X_4 + 16 X_5 + 8 X_6 + 12 X_7 + 6 X_8 + 20 X_9 + 12 X_{10} + 16 X_{11} + 8 X_{12} + 16 X_{13} + 10 X_{14} + 14 X_{15} + 10 X_{16} + 0 X_{17} + 0 X_{18} + 0 X_{19} + 0 X_{20} = 3320$ que cumple las restricciones del problema.
Una de ellas es:
$X_1 = 60$
$X_2 = 0$
$X_3 = 0$
$X_4 = 0$
$X_5 = 0$
$X_6 = 0$
$X_7 = 40$
$X_8 = 0$
$X_9 = 0$
$X_{10} = 0$
$X_{11} = 40$
$X_{12} = 60$
$X_{13} = 0$
$X_{14} = 80$
$X_{15} = 40$
$X_{16} = 0$
$X_{17} = 40$
$X_{18} = 0$
$X_{19} = 40$
$X_{20} = 0$

6.9. irudia.

6.9. irudiak garraio-antolakuntzarako aukera bat baino gehiago dagoela adierazten du, bai eta enpresarako kostu minimoa eguneko 3.320 eurokoa dela zehaztu ere. Gainera, Solver-en bidez lortutako soluzioarekin bat ez datorren soluzio bat ere agertzen da.

		Helmuga				
		1	**2**	**3**	**4**	Baliabideak
Jatorria	**1**	60				60
	2			40		40
	3			40	60	100
	4		80	40		120
	5	40		40		80
Eskaera		100	80	160	60	*400*

Solver-en bidez lortutako soluzioan bezala, 2. eta 4. hiriek eskatutako eguneroko kW guztiak jasotzen dituzte; beste hiriek, berriz, ez. Berriro ere, bai 1. hiriak bai 3. hiriak eskatutako 40 milioi kW baino gutxiago jasotzen dituzte.

6.2. ESLEIPEN-PROBLEMA

Aldaera asko existitzen diren arren, ohiko problema, kostu osoa minimizatzeko edo baliagarritasun-funtzioa maximizatzeko asmoz *n* eginkizun zehatz *n* pertsonari esleitzen datza. *i.* pertsonari *j.* eginkizuna esleitzean 1 balioa hartzen duen eta esleipen hori ematen ez bada, berriz, zero balio hartzen duen aldagai bitarra x_{ij} adieraziz eta esleipen horri dagokion irabazia c_{ij} denotatuz, problemaren formulazioa hauxe da:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1 \quad \text{(aldagai bitarrak)}$$

Murrizketen lehenengo azpimultzoak adierazten du eginkizun bakoitza pertsona bakar bati esleitzen zaiola; bigarren azpimultzoak, ordea, pertsona bakoitzak eginkizun bakar bat egingo duela esan nahi du.

6.2.1. Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako esleipen-problema

Laborantza-kooperatiba batek hiru soro luberritzeko hiru traktore desberdin ditu. Traktoreek, beren diseinuen ondorioz, soro bakoitzean egin beharreko zeregin ezberdinak burutzeko ordu kopuru desberdinak behar dituzte. Ordu horiek honako taula honetan laburbilduta daude:

	1. soroa	2. soroa	3. soroa
1. traktorea	2	4	2
2. traktorea	1	2	3
3. traktorea	3	2	1

Zein traktore erabiliz luberritu behar da zein soro erabilitako orduak minimizatzeko?

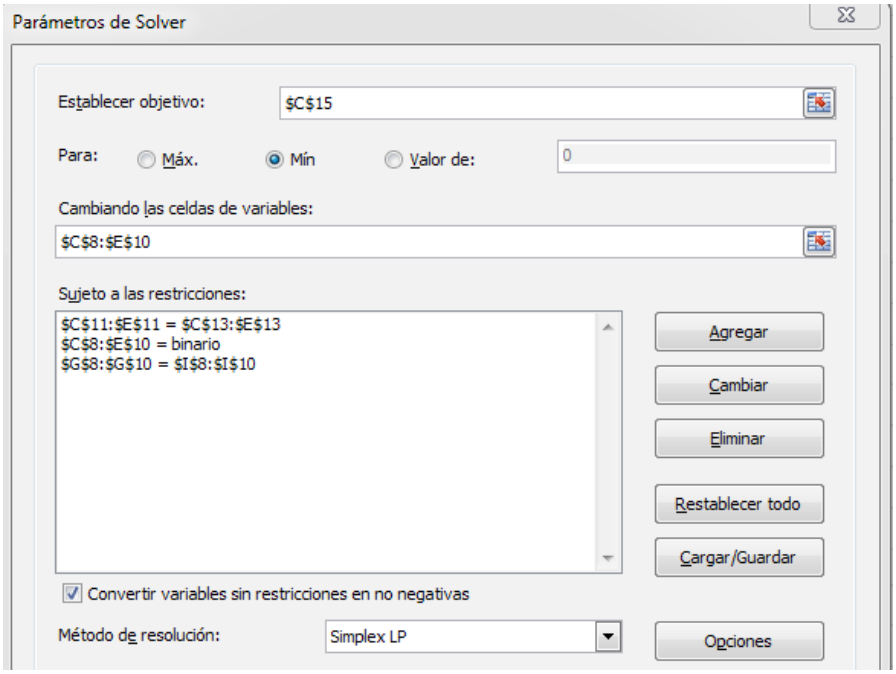
Atal honetan planteatutako esleipen-problema orekatuta dago; izan ere, traktore kopurua eta soro kopurua bat datoz. Hurrengo irudietan, orekatutako esleipen-problema hau ebazteko Excel kalkulu-orrian egin beharreko programazioa eta Solver tresnak emandako soluzioa adierazten dira:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		*Baliagarritasuna*	**1. soroa**	**2. soroa**	**3. soroa**				
3		**1. traktorea**	2	4	2				
4		**2. traktorea**	1	2	3				
5		**3. traktorea**	3	2	1				
6									
7		*Esleipena*	**1. soroa**	**2. soroa**	**3. soroa**		**Guztira**		
8		**1. traktorea**					**=SUMA(C8:E8)**	=	1
9		**2. traktorea**					**=SUMA(C9:E9)**	=	1
10		**3. traktorea**					**=SUMA(C10:E10)**	=	1
11		**Guztira**	**=SUMA(C8:C10)**	**=SUMA(D8:D10)**	**=SUMA(E8:E10)**				
12			=	=	=				
13			1	1	1				
14									
15		**Minimoa**	**=SUMAPRODUCTO(C3:E5;C8:E10)**						

6.10. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		*Baliagarritasuna*	**1. soroa**	**2. soroa**	**3. soroa**				
3		**1. traktorea**	2	4	2				
4		**2. traktorea**	1	2	3				
5		**3. traktorea**	3	2	1				
6									
7		*Esleipena*	**1. soroa**	**2. soroa**	**3. soroa**		**Guztira**		
8		**1. traktorea**					0	=	1
9		**2. traktorea**					0	=	1
10		**3. traktorea**					0	=	1
11		**Guztira**	0	0	0				
12			=	=	=				
13			1	1	1				
14									
15		**Minimoa**		0					

6.11. irudia.



6.12. irudia.

6.12. irudian ikusten den bezala «*Parámetros de Solver*» pantailan aldagaiek osoak izan behar dutelako baldintza ezarri behar da.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		*Baliagarritasuna*	**1. soroa**	**2. soroa**	**3. soroa**				
3		**1. traktorea**	2	4	2				
4		**2. traktorea**	1	2	3				
5		**3. traktorea**	3	2	1				
6									
7		*Esleipena*	**1. soroa**	**2. soroa**	**3. soroa**		**Guztira**		
8		**1. traktorea**	1	0	0		1	=	1
9		**2. traktorea**	0	1	0		1	=	1
10		**3. traktorea**	0	0	1		1	=	1
11		**Guztira**	1	1	1				
12			=	=	=				
13			1	1	1				
14									
15		**Minimoa**		5					

6.13. irudia.

Solver tresnak emandako soluzioan (6.13. irudian) agertzen da zein traktorek zein soro luberritu behar duen, horretarako erabilitako denbora minimoa 5 ordukoa izanik. Zehazki, lehenengo traktoreak lehenengo soroa, bigarren traktoreak bigarren soroa eta hirugarren traktoreak hirugarren soroa luberritu behar dute.

6.2.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako esleipen-problema

Aurrean proposatutako esleipen-problema PHPSimplex programa erabiliz ebazteko, laborantza-kooperatibak zehaztutako baldintzak barnean dituen eredu matematikoa idatzi behar da.

Orekatutako problema honako hau da, x_{ij} *i.* traktorea eta *j.* soroa erlazionatzen dituen aldagaia izanik:

$$\text{Min} \quad Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 3x_{31} + 2x_{32} + x_{33}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$
$$x_{ij} = 0 \vee 1 \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}$$

PHPSimplex orrian erabaki-aldagai eta murrizketa kopuruez gain problemaren datuak ere sartzen dira.

¿Cuál es el objetivo de la función? Minimizar
Función: 2 X1 + 4 X2 + 2 X3 + 1 X4 + 2 X5 + 3 X6 + 3 X7 + 2 X8 + 1 X9
Restricciones:
X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9 ≥ 0
Continuar

6.14. irudia.

PHPSimplex-en aldagaien eta eredu linealaren aldagaien arteko elkarrekiko-tasuna ondokoa da:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

6.15. irudia.

«*Continuar*» aukeratzean, problema era estandarrean eta programak optimoa lortu arte *«bi faseko metodo»*-aren taula agertzen dira. Soluzio optimoa 6.17. irudian agertzen da.

MINIMIZAR: $2X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 1X_4 + 2X_5 + 3X_6 + 3X_7 + 2X_8 + 1X_9$

$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 = 1$
$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 1X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 = 1$
$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 1X_7 + 1X_8 + 1X_9 = 1$
$1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 1X_7 + 0X_8 + 0X_9 = 1$
$0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 1X_8 + 0X_9 = 1$
$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 1X_9 = 1$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9 \geq 0$

MAXIMIZAR: $-2X_1 -4X_2 -2X_3 -1X_4 -2X_5 -3X_6 -3X_7 -2X_8 -1X_9 + 0X_{10} + 0X_{11} + 0X_{12} + 0X_{13} + 0X_{14} + 0X_{15}$

$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 1X_{15} = 1$
$0X_1 + 1X_4 + 1X_5 + 1X_6 + 1X_{14} = 1$
$0X_1 + 1X_7 + 1X_8 + 1X_9 + 1X_{13} = 1$
$1X_1 + 1X_4 + 1X_7 + 1X_{12} = 1$
$0X_1 + 1X_2 + 1X_5 + 1X_8 + 1X_{11} = 1$
$0X_1 + 1X_3 + 1X_6 + 1X_9 + 1X_{10} = 1$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15} \geq 0$

6.16. irudia.

Tabla 4			-2	-4	-2	-1	-2	-3	-3	-2	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**	**P_9**
P_5	-2	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	-1
P_3	-2	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
P_{13}	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_1	-2	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	-1
P_4	-1	1	0	-1	0	1	0	1	1	0	1
P_8	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
Z		-5	0	1	0	0	0	2	2	0	0

6.17. irudia.

Hay infinitos valores de $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$ para el valor óptimo Z = 5 , los cuales están contenidos en la región del espacio $2 X_1 + 4 X_2 + 2 X_3 + 1 X_4 + 2 X_5 + 3 X_6 + 3 X_7 + 2 X_8 + 1 X_9 = 5$ que cumple las restricciones del problema.
Una de ellas es:
$X_1 = 0$
$X_2 = 0$
$X_3 = 1$
$X_4 = 1$
$X_5 = 0$
$X_6 = 0$
$X_7 = 0$
$X_8 = 1$
$X_9 = 0$

6.18. irudia.

6.18. irudian agertzen den moduan, esleipena egiteko aukera bat baino gehiago daude. Lana egiteko erabili beharreko denbora minimoa 5 ordukoa dela berretsi egiten da, baina lortzen den soluzioa Solver tresnarena ez bezalakoa da. Kasu honetan lehenengo traktorea hirugarren soroan, bigarren traktorea lehenengo soroan eta hirugarren traktorea bigarren soroan erabili beharko direla adierazten da.

6.3. BI PUNTUREN ARTEKO DISTANTZIA MINIMOA

PLko problema batzuk nodoak eta arkuak dituen sare baten moduan adieraz daitezke. Horietako kasu bat *o* hasierako nodoaren eta *f* azken nodoaren arteko distantzia minimoa kalkulatzea da, *i.* eta *j.* nodoen arteko distantzia zehazten duten kostu-matrizeko elementuak c_{ij} izanik. Sareak baliorik ez balu, arku guztientzat $c_{ij} = 1$ izango litzateke.

Problema hau PLOaren barnean dago. Hala ere, problema hau Simplex-en bidez osotasun-baldintzak jarri gabe ebatz daiteke, sareko problemei dagozkien murrizketa-matrizeak guztiz modulu bakarrekoak baitira (matrize bat modulu bakarrekoa da, baldin haren azpimatrize erregular eta karratu guztien determinantearen balioa +1 edo –1 bada). Orduan, osotasun-baldintzarik gabeko problemaren soluzioa osoa da.

Erabaki-aldagaiak honako era honetan adierazita

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i.\ \text{eta}\ j.\ \text{lotuta daudenean} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

problemaren formulazioa hau da:

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k x_{jk} \quad \forall j \neq \text{hasierako nodoa}$$

$$\sum_i x_{if} = 1 \qquad \text{azken nodoa}$$

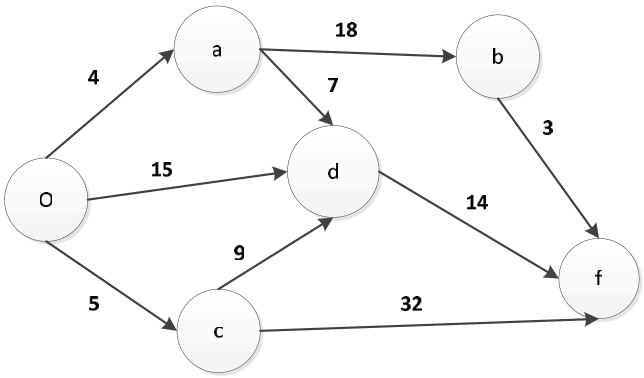
$$\sum_k x_{ok} = 1 \qquad \text{hasierako nodoa}$$

Murrizketek adierazten dute bitarteko nodo bakoitzean gehien-gehienez arku bat edo bat ere helduko ez dela eta gehien-gehienez arku bat edo bat ere aterako ez dela. Hala ere, amaierako nodora arku bat baino ez da heldu behar eta hasierako nodotik beste bat atera.

6.3.1. Excel erabiliz ebatzitako distantzia minimoko problema

Egunkari-banatzaile batek egunero biltegitik salmenta-puntura arte mugitu behar du. Bere lagunek txantxetan erabiltzen duen ibilbideak gasolina gehiegi gastarazten diola esaten dute. Hainbeste burla jasotzeaz nazka-nazka eginda dago eta kale-izendegiak kontsultatzea erabaki du, ibilbiderik laburrena zehazteko.

Noranzko bakarreko kaleak eta haien distantziak honako sare honetan agertzen dira:



Zein ibilbide aukeratu beharko luke distantzia minimoa egiteko?

Excel-en bidezko ebazpenean sareko nodo-nodo intzidentzia-matrizea erabiltzen da.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i.\ \text{eta}\ j.\ \text{lotuta daudenean} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

Problema honetan nodo-nodo intzidentzia-matrizea hau da:

	o	a	b	c	d	f
o		1		1	1	
a			1		1	
b						1
c					1	1
d						1
f						

Kalkulu-orriko programazioarekin batera, Solver-ekin lortutako soluzioa honako irudi hauetan erakusten da.

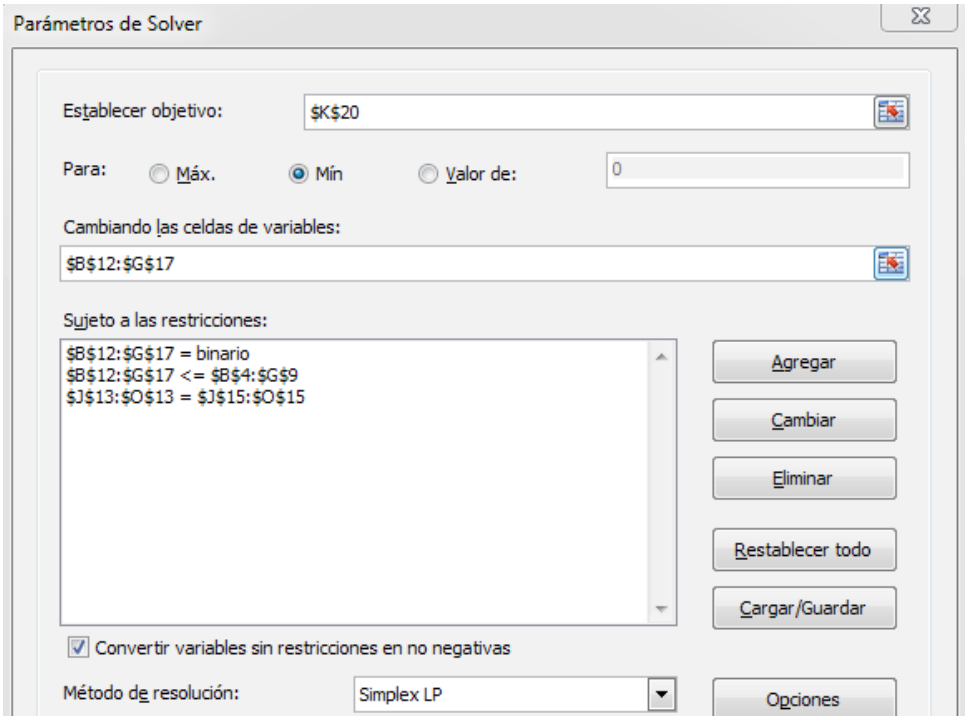
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3	**Intzidentzia-matrizea (nodo-nodo)**	**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**		**Distantzia-matrizea**	**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
4	**o**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**		**o**		**4**		**5**	**15**	
5	**a**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**		**a**			**18**		**7**	
6	**b**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**		**b**						**3**
7	**c**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**		**c**					**9**	**32**
8	**d**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**		**d**						**14**
9	**f**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**		**f**						
10															
11	**Aldagaiak**	**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**	**Irteerak**							
12	**o**							0		**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
13	**a**							0	**Helduerak-Irteerak**	0	0	0	0	0	0
14	**b**							0		=	=	=	=	=	=
15	**c**							0		**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
16	**d**							0							
17	**f**							0							
18	**Hleduerak**	0	0	0	0	0	0								
19															
20									**Helburu funtzioa**	=	0				

6.19. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3	Intzidentzia-matrizea	o	a	b	c	d	f		Distantzia-matrizea	o	a	b	c	d	f
4	o	0	1	0	1	1	0		o		4		5	15	
5	a	0	0	1	0	1	0		a			18		7	
6	b	0	0	0	0	0	1		b						3
7	c	0	0	0	0	1	1		c					9	32
8	d	0	0	0	0	0	1		d						14
9	f	0	0	0	0	0	0		f						
10															
11	Aldagaiak	o	a	b	c	d	f	Irteerak							
12	o							=SUMA(B12:G12)		o	a	b	c	d	f
13	a							=SUMA(B13:G13)	Helduerak-Irteerak	=B18-H12	=C18-H13	=D18-H14	=E18-H15	=F18-H16	=G18-H17
14	b							=SUMA(B14:G14)		=	=	=	=	=	=
15	c							=SUMA(B15:G15)		-1	0	0	0	0	1
16	d							=SUMA(B16:G16)							
17	f							=SUMA(B17:G17)							
18	Helduerak	=SUMA(B12:B17)	=SUMA(C12:C17	=SUMA(D12:D17)	=SUMA(E12:E17)	=SUMA(F12:F17	=SUMA(G12:G17)								
19															
20									Helburu funtzioa	=	=SUMAPRODUCTO(J4:O9;B12:G17)				

6.20. irudia.

«*Parámetros de Solver*» pantailako murrizketetan aldagai bitarrak direlako baldintzak ipini behar dira (6.21. irudia).

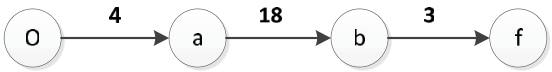


6.21. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3	**Intzidentzia-matrizea (nodo-nodo)**	**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**		**Distantzia-matrizea**	**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
4	**o**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**		**o**		**4**		**5**	**15**	
5	**a**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**		**a**			**18**		**7**	
6	**b**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**		**b**						**3**
7	**c**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**		**c**					**9**	**32**
8	**d**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**		**d**						**14**
9	**f**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**		**f**						
10															
11	**Aldagaiak**	**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**	**Irteerak**							
12	**o**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	1		**o**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
13	**a**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	1	**Helduerak-Irteerak**	-1	0	0	0	0	1
14	**b**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	1		=	=	=	=	=	=
15	**c**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0		**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
16	**d**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0							
17	**f**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0							
18	**Hleduerak**	0	1	1	0	0	1								
19															
20									**Helburu funtzioa**	=	25				

6.22. irudia.

6.22. irudiak egunkari-banatzaileak egunero egin behar duen distantzia minimoa 25 km-koa dela erakusten du, sarean o-a-b-f ibilbidea adierazita.



6.3.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako distantzia minimoko problema

Aurreko distantzia minimoko problema PHPSimplex-en bidez ebazteko, lehenengo eta behin eredu matematikoa idatzi behar da.

x_{ij} aldagai bitarrek *i.* nodotik *j.* nodora desplazamendua dagoen edo ez adierazten dute (0 desplazamendurik ez dagoela eta 1 desplazamendua dagoela adieraziz)

Noranzko bakarra duten kaleen arteko balantzeak problemen murrizketak zehazten ditu. Murrizketa horiek honako hauek dira:

$$\sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0 \ \forall j \neq \text{ hasierako nodoa, azken nodoa}$$

$$-\sum_i x_{if} = -1 \qquad \text{azken nodoa}$$

$$\sum_k x_{ok} = 1 \quad \text{hasierako nodoa}$$

Biltegian *o*: $x_{oa} + x_{od} + x_{oc} = 1$

a nodoan: $x_{ab} + x_{ad} - x_{oa} = 0$

b nodoan : $x_{bf} - x_{ab} = 0$

c nodoan: $x_{cd} + x_{cf} - x_{oc} = 0$

d nodoan: $x_{df} - x_{ad} - x_{od} - x_{cd} = 0$

f salmenta-puntuan: $-x_{bf} - x_{df} - x_{cf} = -1$

Helburu funtzioa:

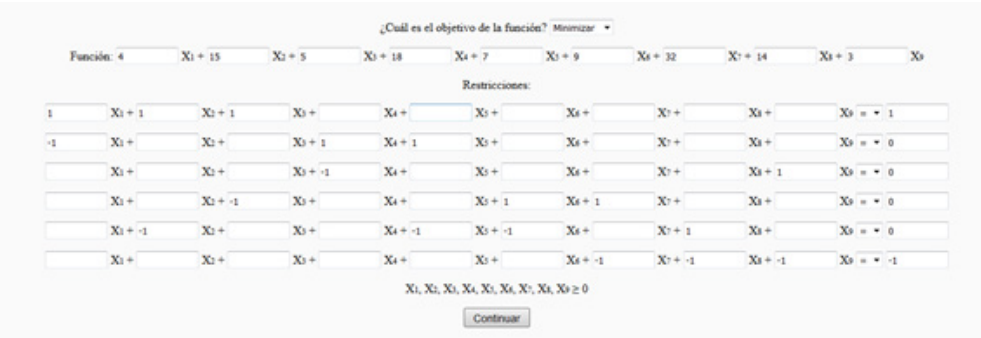
$$\text{Min} \quad Z = 4x_{oa} + 15x_{od} + 5x_{oc} + 18x_{ab} + 7x_{ad} + 9x_{cd} + 32x_{cf} + 14x_{df} + 3x_{bf}$$

Hau da, problema hauxe da:

$$\text{Min} \quad Z = 4x_{oa} + 15x_{od} + 5x_{oc} + 18x_{ab} + 7x_{ad} + 9x_{cd} + 32x_{cf} + 14x_{df} + 3x_{bf}$$

$$\begin{aligned}
x_{oa} + x_{od} + x_{oc} &= 1 \\
x_{ab} + x_{ad} - x_{oa} &= 0 \\
x_{bf} - x_{ab} &= 0 \\
x_{cd} + x_{cf} - x_{oc} &= 0 \\
x_{df} - x_{ad} - x_{od} - x_{cd} &= 0 \\
-x_{bf} - x_{df} - x_{cf} &= -1 \\
x_{ij} &= 0 \vee 1 \quad \forall i \in \{o,a,b,c,d\}, \forall j \in \{a,b,d,c,f\}
\end{aligned}$$

PHPSimplex orrian erabaki-aldagai eta murrizketa kopuruak adierazten dira eta problemaren datuak sartzen dira.



6.23. irudia.

Eredu linealaren aldagaien eta PHPSimplex-en aldagaien arteko elkarrekikotasuna ondokoa da:

x_{oa}	x_{od}	x_{oc}	x_{ab}	x_{ad}	x_{cd}	x_{cf}	x_{df}	x_{bf}
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

«*Continuar*» hautatzean, bi faseko metodoari dagozkion taulak agertzen dira, programak soluzio optimoa lortu arte.

MINIMIZAR: $4 X_1 + 15 X_2 + 5 X_3 + 18 X_4 + 7 X_5 + 9 X_6 + 32 X_7 + 14 X_8 + 3 X_9$

$1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 = 1$
$-1 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 1 X_4 + 1 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 = 0$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 -1 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 1 X_9 = 0$
$0 X_1 + 0 X_2 -1 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 1 X_6 + 1 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 = 0$
$0 X_1 -1 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 -1 X_5 -1 X_6 + 0 X_7 + 1 X_8 + 0 X_9 = 0$
$0 X_1 + 0 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 -1 X_7 -1 X_8 -1 X_9 = -1$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9 \geq 0$

MAXIMIZAR: $-4 X_1 -15 X_2 -5 X_3 -18 X_4 -7 X_5 -9 X_6 -32 X_7 -14 X_8 -3 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} + 0 X_{12} + 0 X_{13} + 0 X_{14} + 0 X_{15}$

$1 X_1 + 1 X_2 + 1 X_3 + 1 X_{15} = 1$
$1 X_1 -1 X_4 -1 X_5 + 1 X_{14} = 0$
$0 X_1 + 1 X_4 -1 X_9 + 1 X_{13} = 0$
$0 X_1 + 1 X_3 -1 X_6 -1 X_7 + 1 X_{12} = 0$
$0 X_1 + 1 X_2 + 1 X_5 + 1 X_6 -1 X_8 + 1 X_{11} = 0$
$0 X_1 + 1 X_7 + 1 X_8 + 1 X_9 + 1 X_{10} = 1$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15} \geq 0$

6.24. irudia.

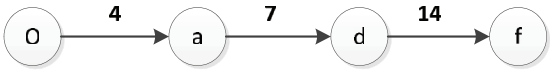
Tabla 3			-4	-15	-5	-18	-7	-9	-23	-14	-3
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**	**P_9**
P_{15}	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_1	-4	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
P_4	-18	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1
P_3	-5	0	0	0	1	0	0	-1	-1	0	0
P_5	-7	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
P_8	-14	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
Z		-25	0	4	0	0	0	3	3	0	0

6.25. irudia.

Hay infinitos valores de $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$ para el valor óptimo $Z = 25$, los cuales están contenidos en la región del espacio $4 X_1 + 15 X_2 + 5 X_3 + 18 X_4 + 7 X_5 + 9 X_6 + 23 X_7 + 14 X_8 + 3 X_9 = 25$ que cumple las restricciones del problema.
Una de ellas es:
$X_1 = 1$
$X_2 = 0$
$X_3 = 0$
$X_4 = 0$
$X_5 = 1$
$X_6 = 0$
$X_7 = 0$
$X_8 = 1$
$X_9 = 0$

6.26. irudia.

6.26. irudiak ibilbide minimo bat baino gehiago dagoela adierazten du, distantzia minimoa 25 km-koa dela baieztatzen du eta Solver-ekin lortutako soluzioa ez bezalako soluzio bat (o-a-d-f) erakusten du.



Kaleak bi noranzkokoak balira, egunkari-banatzaileak aurreko ibilbide minimoa egingo luke?

Kasu honetan, Excel kalkulu-orrian erabili behar den sareko nodo-nodo intzidentzia-matrizea hau da:

	o	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
o		1		1	1	
a	1		1		1	
b		1				1
c	1				1	1
d	1	1		1		1
f			1	1	1	

Kalkulu-orriko programazioarekin batera, Solver-ek problema honetarako emandako soluzioa (sare ez-zuzendua) honako irudi hauetan adierazten da.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3	Intzidentzia	o	a	b	c	d	f		Distantzia-matrizea	o	a	b	c	d	f
4	o	0	1	0	1	1	0		o		4		5	15	
5	a	1	0	1	0	1	0		a	4		18		7	
6	b	0	1	0	0	0	1		b		18				3
7	c	1	0	0	0	1	1		c	5				9	32
8	d	1	1	0	1	0	1		d	15	7		9		14
9	f	0	0	1	1	1	0		f			3	32	14	
10															
11	Aldagaiak	o	a	b	c	d	f	Irteerak							
12	o							0		o	a	b	c	d	f
13	a							0	Helduerak-Irteerak	0	0	0	0	0	0
14	b							0		=	=	=	=	=	=
15	c							0		-1	0	0	0	0	1
16	d							0							
17	f							0							
18	Helduerak	0	0	0	0	0	0								
19															
20									Helburu funtzioa	=	0				

6.27. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3	Intzidentzia	o	a	b	c	d	f		Distantzia-matrizea	o	a	b	c	d	f
4	o	0	1	0	1	1	0		o		4		5	15	
5	a	1	0	1	0	1	0		a	4		18		7	
6	b	0	1	0	0	0	1		b		18				3
7	c	1	0	0	0	1	1		c	5				9	32
8	d	1	1	0	1	0	1		d	15	7		9		14
9	f	0	0	1	1	1	0		f			3	32	14	
10															
11	Aldagaiak	o	a	b	c	d	f	Irteerak							
12	o	0	1	0	0	0	0	1		o	a	b	c	d	f
13	a	0	0	1	0	0	0	1	Helduerak-Irteerak	-1	0	0	0	0	1
14	b	0	0	0	0	0	1	1		=	=	=	=	=	=
15	c	0	0	0	0	0	0	0		-1	0	0	0	0	1
16	d	0	0	0	0	0	0	0							
17	f	0	0	0	0	0	0	0							
18	Helduerak	0	1	1	0	0	1								
19															
20									Helburu funtzioa	=	25				

6.28. irudia.

Orduan, 6.28. irudian agertzen den bezala, egunkari-banatzaileak ibilbide berbera (o-a-b-f) egin beharko luke, kaleak noranzko bakarrekoak edo bi noranzkokoak izan.

Kaleak bi noranzkokoak izatean, PHPSimplex-en bidezko ebazpenean eredu matematikoa aldatu beharko da. Kaleen arteko balantzeak zehazten dituen murrizketak hauek dira:

o biltegian: $x_{oa} + x_{od} + x_{oc} - x_{ao} - x_{do} - x_{co} = 1$

a nodoan: $x_{ao} + x_{ab} + x_{ad} - x_{oa} - x_{ba} - x_{da} = 0$

b nodoan: $x_{ba} + x_{bf} - x_{ab} - x_{fb} = 0$

c nodoan: $x_{co} + x_{cd} + x_{cf} - x_{oc} - x_{dc} - x_{fc} = 0$

d nodoan: $x_{do} + x_{da} + x_{df} + x_{dc} - x_{ad} - x_{od} - x_{cd} - x_{fd} = 0$

f salmenta-puntuan: $x_{fb} + x_{fc} + x_{fd} - x_{bf} - x_{df} - x_{cf} = -1$

Helburu funtzioa:

$$\text{Min} \quad Z = 4x_{oa} + 5x_{oc} + 15x_{od} + 4x_{ao} + 18x_{ab} + 7x_{ad} + 18x_{ba} + 3x_{bf} + 5x_{co} + 9x_{cd} + 32x_{cf} +$$

$$+ 15x_{do} + 7x_{da} + 9x_{dc} + 14x_{df} + 3x_{fb} + 32x_{fc} + 14x_{fd}$$

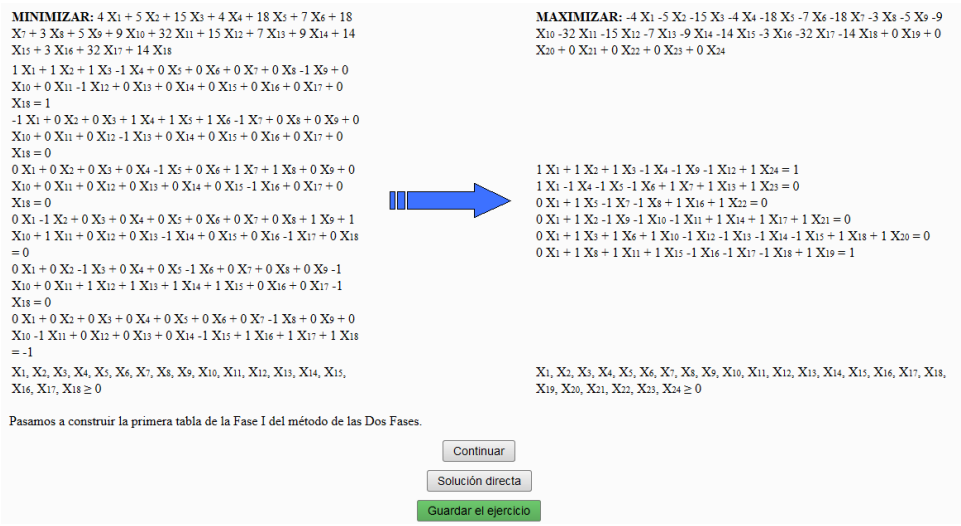
Hau da, problema ondokoa da:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad Z = {} & 4x_{oa} + 5x_{oc} + 15x_{od} + 4x_{ao} + 18x_{ab} + 7x_{ad} + 18x_{ba} + 3x_{bf} + 5x_{co} + 9x_{cd} + 32x_{cf} + \\
& + 15x_{do} + 7x_{da} + 9x_{dc} + 14x_{df} + 3x_{fb} + 32x_{fc} + 14x_{fd} \\
& x_{oa} + x_{oc} + x_{od} - x_{ao} - x_{do} - x_{co} = 1 \\
& x_{ao} + x_{ab} + x_{ad} - x_{oa} - x_{ba} - x_{da} = 0 \\
& x_{ba} + x_{bf} - x_{ab} - x_{fb} = 0 \\
& x_{co} + x_{cd} + x_{cf} - x_{oc} - x_{dc} - x_{fc} = 0 \\
& x_{do} + x_{da} + x_{df} + x_{dc} - x_{ad} - x_{od} - x_{cd} - x_{fd} = 0 \\
& x_{fb} + x_{fc} + x_{fd} - x_{bf} - x_{df} - x_{cf} = -1 \\
& x_{ij} = 0 \vee 1 \quad \forall i \in \{o,a,b,c,d\}, \forall j \in \{a,b,d,c,f\}
\end{aligned}
$$

PHPSimplex orrian erabaki-aldagaiak eta murrizketak adierazten dira. Problemari dagozkion datuak sartzen dira, *eredu linealeko aldagaien* eta PHPSimplex-en aldagaien arteko honako elkarrekikotasun hau kontuan hartuz:

x_{oa}	x_{oc}	x_{od}	x_{ao}	x_{ab}	x_{ad}	x_{ba}	x_{bf}	x_{co}	x_{cd}	x_{cf}	x_{do}	x_{da}	x_{dc}	x_{df}	x_{fb}	x_{fc}	x_{fd}
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}

«*Continuar*» hautatzean, problema era estandarrean idatzita lortzen da eta bi faseko metodoari dagozkion taulak agertzen dira, programak soluzio optimoa lortu arte.



6.29. irudia.

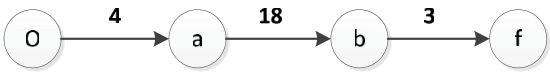
Tabla 2			-4	-5	-15	-4	-18	-7	-18	-3	-5	-9	-32	-15	-7	-9	-14	-3	-32	-14
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**	**P_9**	**P_{10}**	**P_{11}**	**P_{12}**	**P_{13}**	**P_{14}**	**P_{15}**	**P_{16}**	**P_{17}**	**P_{18}**
P_{24}	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_1	-4	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	-1	0	0	-1	0
P_5	-18	1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	-1
P_2	-5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	1	0
P_6	-7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	-1	0	0	1
P_8	-3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	-1	-1	-1
Z		-25	0	0	4	8	0	0	36	0	10	3	12	26	14	15	0	6	52	28

6.30. irudia.

Hay infinitos valores de $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17}, X_{18}$ para el valor óptimo $Z = 25$, los cuales están contenidos en la región del espacio $4 X_1 + 5 X_2 + 15 X_3 + 4 X_4 + 18 X_5 + 7 X_6 + 18 X_7 + 3 X_8 + 5 X_9 + 9 X_{10} + 32 X_{11} + 15 X_{12} + 7 X_{13} + 9 X_{14} + 14 X_{15} + 3 X_{16} + 32 X_{17} + 14 X_{18} = 25$ que cumple las restricciones del problema.
Una de ellas es:
$X_1 = 1$
$X_2 = 0$
$X_3 = 0$
$X_4 = 0$
$X_5 = 1$
$X_6 = 0$
$X_7 = 0$
$X_8 = 1$
$X_9 = 0$
$X_{10} = 0$
$X_{11} = 0$
$X_{12} = 0$
$X_{13} = 0$
$X_{14} = 0$
$X_{15} = 0$
$X_{16} = 0$
$X_{17} = 0$
$X_{18} = 0$

6.31. irudia.

6.31. irudiak ibilbide minimo bat baino gehiago adierazten du. Distantzia minimoak 25 km izaten jarraitzen du eta egunkari-banatzaileak noranzko bakarreko kaleetako ibilbidea mantendu beharko du.



6.4. FLUXU MAXIMOKO PROBLEMA

Distantzia minimoko probleman egiten den moduan, fluxu maximoko problema sare bat bezala planteatzen da, hortaz, murrizketen matrizea guztiz modulu bakarrekoa da eta ondorioz soluzio optimoa osoa da.

Problema sare batean *1.* hasierako nodotik *n.* azken nodora arte higitzen den fluxu maximoa lortzean datza, c_{ij} *i.* eta *j.* nodoak elkartzen dituen arkuak jasan dezakeen fluxu maximoa izanik.

Problemaren formulazio matematikoa hau da:

$$\text{Max } Z = \sum_i x_{in}$$

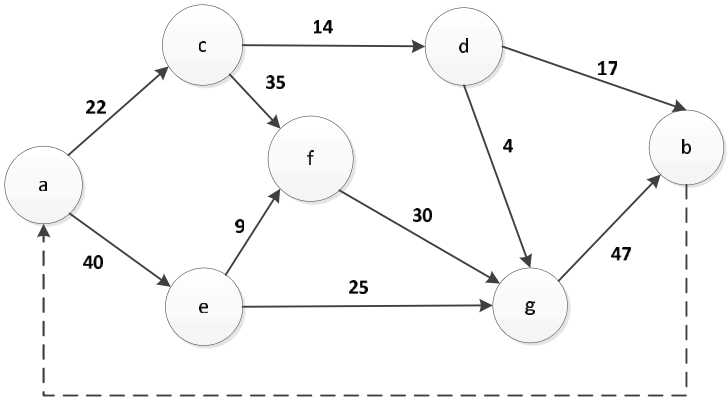
$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad i = 2,3,\ldots,n-1$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \quad \text{eta} \quad x_{ij} = 0 \quad (i,j) \text{ arkurik ez badago}$$

6.4.1. Excel kalkulu-orria erabiliz ebatzitako fluxu maximoko problema

Hiri batean puntako orduetan orduko 7.000 ibilgailu izatera hel daitekeen autobia bat dago. Premiazkoa den konponketa bat egiteko autobiak astebetez itxita egon beharko du.

Hirian egoten den zirkulazioaz arduratzen den udal-batzordeak hirigunea zeharkatzeko beste errepide batzuk proposatu ditu. Proposatutako errepide-sarea eta errepide horietatik higi daitezkeen ibilgailuen kopurua (ehunka adierazita) hurrengoa da:



Proposatutako errepide-sareak puntako orduetan egoten den zirkulazio-dentsitatea jasan al dezake? Zein da jasan dezakeen ibilgailu-fluxu maximoa? Zein da hiriko kale bakoitzetik bideratu behar den fluxua?

Problema Excel kalkulu-orriaren bitartez ebaztean sarearen nodo-arku intzidentzia-matrizea erabiltzen da:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & j\text{. arkua } i\text{. nodotik abiatzen bada} \\ 1 & j\text{. arkua } i\text{. nodora joaten bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

	AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA
A	–1	–1									1
C	1		–1	–1							
D			1				–1	–1			
E		1			–1	–1					
F				1	1				–1		
G						1		1	1	–1	
B							1			1	–1

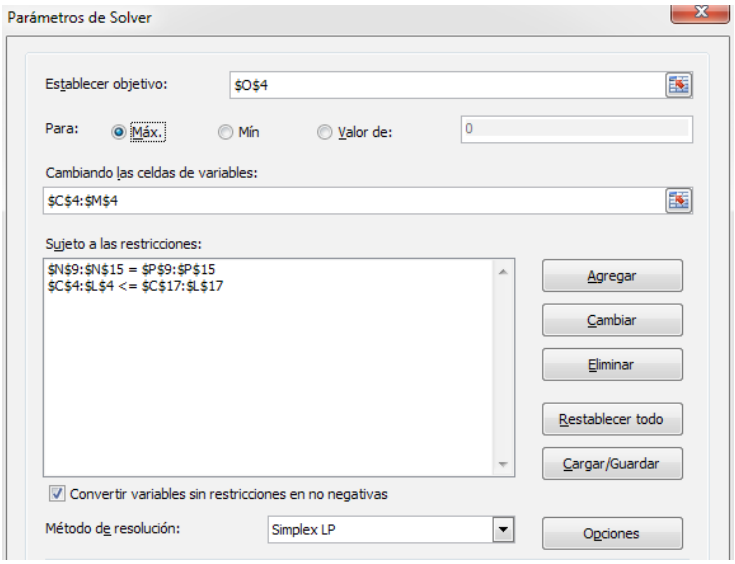
Hurrengo irudietan Solver tresnaren bitartez lortutako soluzioa agertzen da. Arku bakoitzetik zenbat fluxu igarotzen den adierazten duten aldagaiak x_1, x_2 eta abar bezala izendatu dira, aldagai bakoitzaren azpian zein arkurekin erlazionatuta dagoen agertzen delarik.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2								Aldagaiak								
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		hf	
4															0	
5																
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7								Arkuak								
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1									1	0	=	0
10		C	1		-1	-1								0	=	0
11		D			1				-1	-1				0	=	0
12		E		1			-1	-1						0	=	0
13		F				1	1				-1			0	=	0
14		G						1		1	1	-1		0	=	0
15		B							1			1	-1	0	=	0
16																
17	Kapazitateak		22	40	14	35	9	25	17	4	30	47				

6.32. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1																	
2							Aldagaiak										
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		hf		
4															=SUMAPRODUCTO(C4:M4;C6:M6)		
5																	
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
7								Arkuak									
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA				
9	(nodo-arku)	A	-1	-1									1	=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C9:M9)	=	0	
10		C	1		-1	-1								=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C10:M10)	=	0	
11		D			1				-1	-1				=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C11:M11)	=	0	
12		E		1			-1	-1						=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C12:M12)	=	0	
13		F				1	1				-1			=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C13:M13)	=	0	
14		G						1		1	1	-1		=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C14:M14)	=	0	
15		B							1			1	-1	=SUMAPRODUCTO($C$4:$M$4;C15:M15)	=	0	
16																	
17	Kapazitateak		22	40	14	35	9	25	17	4	30	47					

6.33. irudia.



6.34. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2							Aldagaiak									
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		hf	
4			22	34	14	8	9	25	10	4	17	46	56		56	
5																
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7								Arkuak								
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1									1	0	=	0
10		C	1		-1	-1								0	=	0
11		D			1				-1	-1				0	=	0
12		E		1			-1	-1						0	=	0
13		F				1	1				-1			0	=	0
14		G						1		1	1	-1		0	=	0
15		B							1			1	-1	0	=	0
16																
17	Kapazitateak		22	40	14	35	9	25	17	4	30	47				

6.35. irudia.

6.35. irudian proposatutako errepide-sareak jasan dezakeen ibilgailu-fluxu maximoa 5.600ekoa dela ikus daiteke. Hortaz, udalak datorren astean hirian auto-ilara handiak egongo direla jakin beharko du. Bestalde, A eta C, C eta D, E eta F, E eta G, D eta G puntuetan egongo den zirkulazioari arreta handiz jarraitu beharko dio; izan ere, bertatik pasatuko den ibilgailu kopurua haren kapazitatearekin bat etorriko baita.

6.4.2. PHPSimplex erabiliz ebatzitako fluxu maximoko problema

Aurrean definitutako problema PHPSimplex erabiliz ebazteko egin beharreko lehenengo gauza eredu matematikoa idaztea da:

Helburu funtzioa bi era desberdinetara kontsidera daiteke:

$$\text{Max} \quad Z = x_{ac} + x_{ae} \qquad \vee \qquad \text{Max} \quad Z = x_{db} + x_{gb}$$

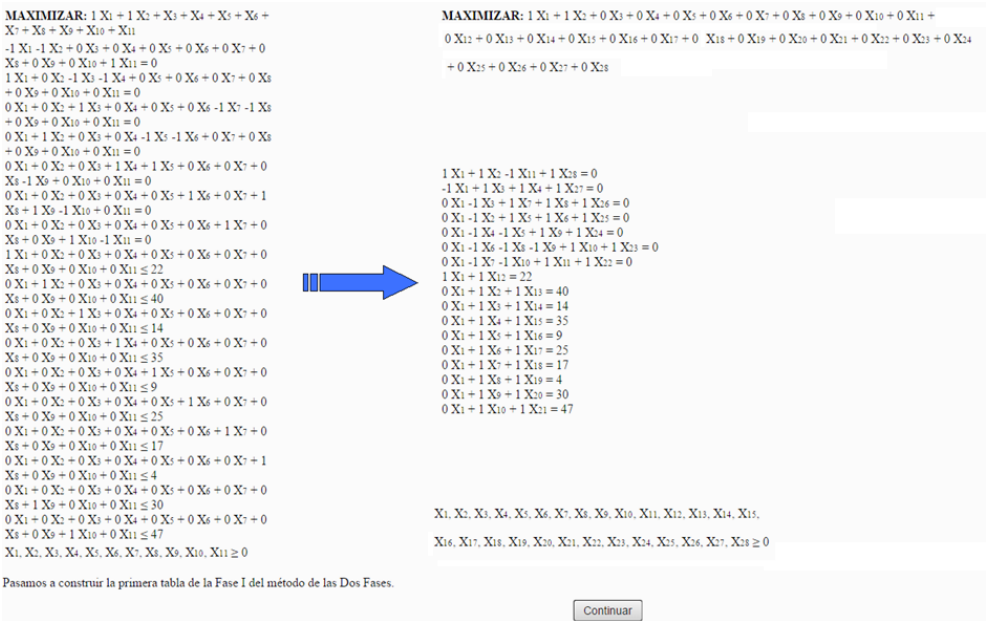
Nodo-arku matrizea erabiliz, murrizketa multzoko lehenengo desberdintzak lortzen dira.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ac} \\ x_{ae} \\ x_{cd} \\ x_{cf} \\ x_{ef} \\ x_{eg} \\ x_{db} \\ x_{dg} \\ x_{fg} \\ x_{gb} \\ x_{ba} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azken desberdintzak, berriz, errepideen kapazitateek zehazten dituzte.

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} x_{ac} & \leq & 22 & x_{eg} & \leq & 25 \\ x_{ae} & \leq & 40 & x_{db} & \leq & 17 \\ x_{cd} & \leq & 14 & x_{dg} & \leq & 4 \\ x_{cf} & \leq & 35 & x_{fg} & \leq & 30 \\ x_{ef} & \leq & 9 & x_{gb} & \leq & 47 \end{array}$$

PHPSimplex orrian problemak era kanonikoan dituen erabaki-aldagai kopurua eta murrizketa kopurua zehazten dira eta problemaren datuak sartzen dira.



6.36. irudia.

Eredu linealaren aldagaien eta PHPSimplex-en aldagaien arteko elkarrekiko-tasuna hau da:

x_{ac}	x_{ae}	x_{cd}	x_{cf}	x_{ef}	x_{eg}	x_{db}	x_{dg}	x_{fg}	x_{gb}	x_{ba}
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}

Behin hori berriz «*Continuar*» aukeratu ondoren soluzio optimoa existitzen bada, soluzio hori barne duen taula lortzen da.

Tabla 11			1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**	**P_6**	**P_7**	**P_8**	**P_9**	**P_{10}**	**P_{11}**	**P_{12}**	**P_{13}**	**P_{14}**	**P_{15}**	**P_{16}**	**P_{17}**	**P_{18}**	**P_{19}**	**P_{20}**	**P_{21}**
P_1	1	22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{27}	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_7	0	14	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
P_6	0	25	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P_9	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
P_{10}	0	42	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	0	-1	0	1	1	0	0	0	0
P_{11}	0	56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
P_4	0	8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
P_{13}	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0
P_3	0	14	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
P_{15}	0	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
P_5	0	9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
P_2	1	34	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
P_{18}	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
P_{19}	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
P_{20}	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	-1	0	0	0	1	0
P_{21}	0	5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	-1	-1	0	0	0	1
Z		56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0

6.37. irudia.

Hay infinitos valores de $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}$ para el valor óptimo $Z = 56$, los cuales están contenidos en la región del espacio $1 X_1 + 1 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4 + 0 X_5 + 0 X_6 + 0 X_7 + 0 X_8 + 0 X_9 + 0 X_{10} + 0 X_{11} = 56$ que cumple las restricciones del problema.
Una de ellas es:
$X_1 = 22$
$X_2 = 34$
$X_3 = 14$
$X_4 = 8$
$X_5 = 9$
$X_6 = 25$
$X_7 = 14$
$X_8 = 0$
$X_9 = 17$
$X_{10} = 42$
$X_{11} = 56$

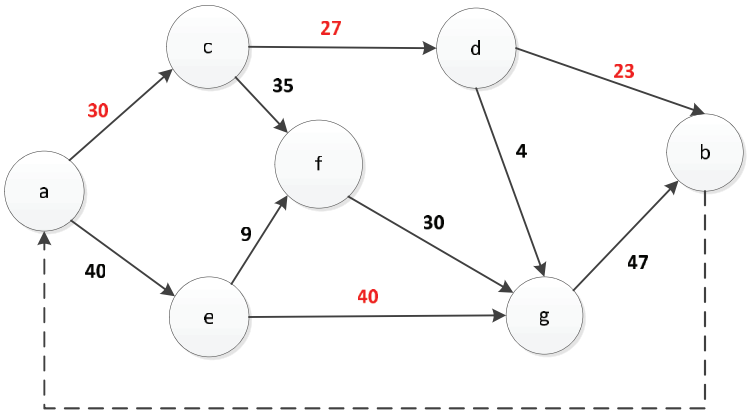
6.38. irudia.

6.38. irudian hiriko zirkulazioa antolatzeko hainbat era daudela agertzen da. Errepide-sareak jasan dezakeen fluxu maximoa (5.600 ibilgailu/ordu) autobiak orain jasaten duena baino baxuagoa da. PHPSimplex-en bidez lortutako ibilgailuen antolamendua Solver tresna erabiliz lortu dugun banaketa ez bezalakoa da. Udalak antolamendu hau aukeratzen badu, puntako orduetan kale batzuetan pilaketak egongo direla jakin behar du, zehazki, A eta C, C eta D, E eta F, E eta G puntuak elkartzen dituzten errepideetan.

Udaletxeak puntako orduetan auto-ilarak saihestu ditzake? Nola?

Lehenik eta behin, A puntutik gutxienez orduko 7.000 ibilgailuk pasatu behar dutela eta B puntura orduko 7.000 ibilgailuk heldu behar dutela jakin behar du.

Proposatutako errepideetatik higitzen diren ibilgailuen kopurua (ehunekotan) sarean adierazten dena bada, problemaren soluzio bat lor daiteke:



Ondorengo irudietan Solver tresnak emandako soluzioak hiriak dituen zirkulazio-baldintzak betetzen dituela ikus daiteke:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2							Aldagaiak									
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		hf	
4															0	
5																
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7							Arkuak									
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1									1	0	=	0
10		C	1		-1	-1								0	=	0
11		D			1				-1	-1				0	=	0
12		E		1			-1	-1						0	=	0
13		F				1	1				-1			0	=	0
14		G						1		1	1	-1		0	=	0
15		B							1			1	-1	0	=	0
16																
17	Kapazitateak		30	40	27	35	9	40	23	4	30	47				

6.39. irudia.

6.39. irudian hasierako kapazitateetan egindako aldaketek itzala ipinita dute. Auto-ilara garrantzitsuak ekiditeko aldaketa horiek kontuan hartu beharko dira.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2								Aldagaiak								
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		hf	
4			30	40	27	3	0	40	23	4	3	47	70		70	
5																
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7								Arkuak								
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1									1	0	=	0
10		C	1		-1	-1								0	=	0
11		D			1				-1	-1				0	=	0
12		E		1			-1	-1						0	=	0
13		F				1	1				-1			0	=	0
14		G						1		1	1	-1		0	=	0
15		B							1			1	-1	0	=	0
16																
17	Kapazitateak		30	40	27	35	9	40	23	4	30	47				

6.40. irudia.

6.40. irudian ibilgailuen fluxu maximoa 7.000 dela ikus daiteke. Bestalde, irudi horretan, kaleen kapazitatea eta handik pasatuko diren ibilgailuen kopurua bat datozenean kaleen kapazitateak grisez nabarmenduta daude.

Udal-batzordeak hasieran proposatutako errepide-sarean F puntuarekin erlazionatutako kaleak, beren kapazitatea mantenduz, noranzko bikoak bilakatzen badira, orduko 5.600 ibilgailu baino handiagoa den zirkulazio-kapazitatea lortzen al da?

Kale bakoitzaren kapazitatea mantentzen bada eta zirkulazioa noranzko bietan honako era honetan banatu nahi bada: CF=35=18+17=CF+FC, EF=9=5+4=EF+FE eta FG=30=15+15=FG+GF, 6.41. irudian ikus daitekeen moduan, fluxu maximoa txikiagoa da:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																			
2									Aldagaiak										
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14		hf	
4			22	30	12	10	5	25	12	0	15	0	0	0	40	52		52	
5																			
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7									Arkuak										
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	FC	GF	FE	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1												1	0	=	0
10		C	1		-1	-1						1					0	=	0
11		D			1				-1	-1							0	=	0
12		E		1			-1	-1						1			0	=	0
13		F				1	1				-1	-1	1	-1			0	=	0
14		G						1		1	1		-1		-1		0	=	0
15		B							1						1	-1	0	=	0
16																			
17	Kapazitateak		22	40	14	18	5	25	17	4	15	17	15	4	47				

6.41. irudia.

Era berean, kale bakoitzaren kapazitatea mantentzen bada baina berdintsua ez den banaketa bat egitea erabakitzen bada, adibidez: CF=35=10+25=CF+FC, EF=9=8+1=EF+FE eta FG=30=20+10=FG+GF, proposamenak jasan dezakeen fluxu maximoa berriro ere txikiagoa da, ikus 6.42. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																			
2									Aldagaiak										
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14		hf	
4			22	33	14	8	8	25	14	0	16	0	0	0	41	55		55	
5																			
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7									Arkuak										
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	FC	GF	FE	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1												1	-0	=	0
10		C	1		-1	-1						1					0	=	0
11		D			1				-1	-1							0	=	0
12		E		1			-1	-1						1			-0	=	0
13		F				1	1				-1	-1	1	-1			0	=	0
14		G						1		1	1		-1		-1		-0	=	0
15		B							1						1	-1	0	=	0
16																			
17	Kapazitateak		22	40	14	10	8	25	17	4	20	25	10	1	47				

6.42. irudia.

Ondorioz, kaleen kapazitatea mantenduz gero, F puntuarekin erlazionatuta dauden hiru kaleak noranzko bikoak bilakatzeak ez dakar abantailarik.

Bukatzeko, hasiera batean planteatuko AC eta AE kaleetatik hirira sartzen den fluxu maximoa (22+40=62) irteerako fluxuarekin bat etortzeko, CD eta EG kaleetako kapazitatea handitzea nahikoa dela azpimarratu behar da (6.43. irudia). Nahiz eta orduko 6.200 ibilgailu lehenago lortutako 5.600 ibilgailu baino handiagoa izan, ez da puntako orduetan auto-ilarak saihesteko nahikoa izango.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2								Aldagaiak								
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11		hf	
4			22	40	21	1	9	31	17	4	10	45	62		62	
5																
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7								Arkuak								
8	Intzidentzia-matrizea		AC	AE	CD	CF	EF	EG	DB	DG	FG	GB	BA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1									1	0	=	0
10		C	1		-1	-1								0	=	0
11		D			1				-1	-1				0	=	0
12		E		1			-1	-1						0	=	0
13		F				1	1				-1			0	=	0
14		G						1		1	1	-1		0	=	0
15		B							1			1	-1	0	=	0
16																
17	Kapazitateak		22	40	21	35	9	31	17	4	30	47				

6.43. irudia.

Aste horretan zehar auto-ilarak saihesteko, AC eta AE kaleek gutxienez orduko 7.000 ibilgailu jasan ahal izatea da udalak duen aukera bakarra. Fluxu hori lortzea ezinezkoa bada, A puntutik abiatzen den beste errepide bat erabili beharko da, errepide berri horretatik higi daitezkeen ibilgailuen kopuruak gutxienez zifra hori lortzea posible eginik.

6.5. ONDORIOAK

Excel kalkulu-orriko Solver tresnari esker, azkar eta era eroso batean, PLko problema berezi batzuk ebatz daitezke. Eredu konplexuak ebazteko software berezitua erabili behar da, WinQSB, TORA edo Lingo adibidez.

Orain arte, benetako problema praktikoak optimizatu diren arren, ez dira haien garapen egokia nahasi ahal duten egoera puntualak kontuan izan, adibidez: makinaren matxura, ordezko piezaren gabezia, langile baten gaixoaldi-baja…

Nola jakin daiteke intzidentzia batek problemaren planteamenduan edo ebazpenean eraginik duen?

7. Hainbat ilara-eredu

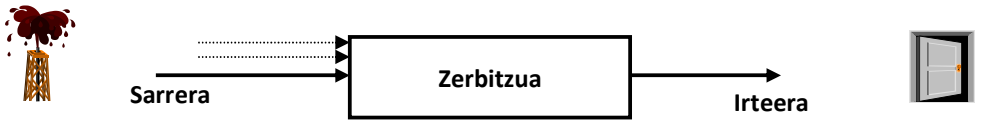
Hainbat antolakuntza-gertaeratan bi izakik parte hartzen dute. Lehenengo izakiak, *zerbitzariak* bezala ezagutzen direnak, sarritan diskretuak izaten dira (pertsonak, makinak, autobideko ordainlekuetako kabinak…). Bigarren izakiak, ordea, *bezeroak* bezala ezagutzen dira eta zerbitzariak erabiltzen dituztenak izaten dira. Sistema mota horiek *ilara-teoria* bezala ezagutzen dira.

Jarraian, ilara-sistema ohikoenak azaldu eta Excel kalkulu-orria erabiliz eguneroko hainbat egoerari irtenbidea aurkituko zaie.

Gako-hitzak: sarrera-iturria, bezeroen heldueren prozesua, ilara, sistema, zerbitzariak, zerbitzu-diziplina, populazioa, Kendall notazioa, Poisson-en banaketa eta banaketa esponentziala.

7.1. SARRERA

Ilara-teoriak A.K. Erlang-en (1909) lanean du jatorria, lan horretan telefono-deien metaketa aztertzen da. Ilara-eredurik errazena, irudian ikus daitekeena da, bertan bezeroak *sarrerara* iturri finitu edo infinitu batetik heltzen dira eta *zerbitzu-kanalean* zerbitzatuak izan arte ilaran itxaroten dute. Bukatzeko zerbitzatuak izan ondoren, erabiltzaileak aurrera zerbitzuaren puntu berri batera edo irteerara joaten dira.



Infinitu ilara mota daudela dirudi. Guztiak sinplifikatzeko, eredu posibleak (*Kendall notazioa*ri jarraituz) honako sailkapen hau erabiliz adierazten dira:

$$X/Y/s/K/A/B$$

X: bezeroen heldueren banaketa.

Y: zerbitzu-denboraren banaketa.

s: paraleloan lan egiten duten zerbitzarien kopurua.

K: ilararen ahalmena (ilaran eta zerbitzuan egon ahal den bezero kopurua); balio lehenetsia ∞ da.

A: populazioaren tamaina; balio lehenetsia ∞ da.

B: zerbitzu-diziplina; balio lehenetsia FIFO da.

s, K eta *A* balioak zenbakizko balio egokiekin ordezkatzen dira eta *X* eta *Y* banaketentzat erabilienak diren laburdurak hauek dira:

M: ondoz ondoko heldueren artean igarotzen den denboraren banaketa esponentziala da (Poisson-en helduerak) edo zerbitzu-denboraren banaketa esponentziala da.

G: banaketa orokorra.

D: banaketa determinista (endekatua).

E_k: *k* bigarren parametroa duen Erlang-en banaketa

B zerbitzuaren diziplina mota honetakoa izaten da:

FIFO (*first in-first out)*: lehena heltzen dena zerbitzatua izaten edo irteten lehena da.

LIFO (*last in-first out):* azkena heltzen dena zerbitzatua izaten lehena da.

SIRO (*service in random order):* zerbitzatua izateko ordena zorizkoa da.

GD (*general service discipline):* zerbitzu orokorreko diziplina.

RR (round robin): bezeroa denbora finko batean zehar zerbitzatua izaten da, haren eskariak betetzen ez badira berriro ere ilarara bueltatuz (ordenagailuen sareak).

Adibidez, *M/D/1/*∞*/*∞*/FIFO* notazioak zera adierazten du: Poisson-en helduerak, zerbitzu-denbora determinista (konstantea), zerbitzari bakarra, bezero kopuru mugagabea, populazio infinitua eta *FIFO* diziplina duen ilara. Hirugarren baliotik aurrera agertzen diren balioak lehenetsiak direnez, aurreko adierazpena *M/D/1* bezala laburbiltzen da.

Gainera, *egoera egonkorra* lortu ondoren, ilara baten funtzionamendua edo jarduera neurtzeko hainbat oinarrizko ezaugarri daude. Garrantzitsuenak hauek dira:

N: sisteman (ilaran eta zerbitzuan) dagoen bezero kopurua adierazten duen zorizko aldagaia.

N_q: ilaran dagoen bezero kopurua adierazten duen zorizko aldagaia.

T: bezero batek sisteman igarotako denbora adierazten duen zorizko aldagaia.

T_q: bezero batek ilaran igarotako denbora adierazten duen zorizko aldagaia.

P_n: sisteman zehatz-mehatz *n* bezero egoteko probabilitatea.

L: sisteman itxaroten den bezero kopurua.

L_q: ilaran egotea (zerbitzatuak izateko zain) itxaroten den bezero kopurua.

W: sisteman bezero batek igarotzen duen batez besteko itxarote-denbora.

W_q: ilaran bezero batek igarotzen duen batez besteko itxarote-denbora.

Bestalde, sisteman dagoen zirkulazioa honako hauek zehazten dute:

λ_n : bezeroen heldueren batez besteko tasa sisteman *n* bezero daudenean.

μ_n : zerbitzuaren batez besteko tasa sisteman *n* bezero daudenean.

λ : bezeroen heldueren batez besteko tasa, edozein *n* baliotarako konstantea denean.

μ : bezeroen zerbitzuaren batez besteko tasa, edozein *n* baliotarako konstantea denean.

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$: erabilera-faktorea edo trafiko-intentsitatea.

Jarraian ohikoenak diren ilara-ereduak azalduko dira. Arreta haien oinarrizko ezaugarrien formulazioan jarriko da eta adibide praktikoak Excel kalkulu-orria erabiliz ebatziko dira.

7.2. M/M/1 EREDUA

Ilara honetan elkarren segidan heltzen diren bezeroen heldueren arteko denborak λ parametrodun banaketa esponentzialari jarraitzen dio (zorizko helduerak, Poisson-en banaketari jarraitzen diotenak), zerbitzatuak izateko denborak μ parametrodun banaketa esponentzialari jarraitzen dio eta sisteman egon daitezkeen bezeroen kopurua mugagabea da. Ilara egonkorra izateko, hau da, ilara infinitua sor ez dadin, $\rho < 1$ izan behar du.

Haren oinarrizko ezaugarri nagusiak hauek dira:

$$P_0 = 1 - \rho$$
$$P_n = \rho^n P_0$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$L = \rho + L_q = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Sisteman gutxienez bezero bat egoteko probabilitatea (bezero batek itxaron behar izateko probabilitatea) hurrengoa da:

$$P(N > 0) = 1 - P_0 = \rho$$

Sisteman *n* bezero baino gehiago egoteko probabilitatea:

$$P(N > n) = \rho^{n+1}$$

Zerbitzaria egonean egoteko probabilitatea edo bezeroek itxaron behar ez izateko probabilitatea hau da:

$$P(N = 0) = P_0 = 1 - \rho$$

Bezeroak sisteman igarotzen duen denboren, hau da *T*-ren, banaketa hau da:

$$P(T \le t) = 1 - e^{-\mu t(1-\rho)}$$

Ilaran itxaron behar den denbora neurtzen duen zorizko aldagaiaren banaketa, hau da T_q-ren banaketa-funtzioa ondokoa da:

$$P(T_q \le t) = 1 - \rho e^{-\mu t(1-\rho)}$$

7.2.1. Lehenengo kasu praktikoa

Etxetresna elektrikoak saltzen dituen denda batera bezeroak Poisson-en banaketari jarraituz heltzen dira, 12 minutuko helduera-tasa 1 izanik (orduro 5 bezero). Bestalde, bezero bakoitza zerbitzatzeko batez beste 5 minutu behar izaten dira (orduro 12 bezeroko tasa izanik eta zerbitzatuak izateko behar izaten den denborak banaketa esponentzialari jarraituz). Honako kasu hauek zehaztu nahi dira:

Bezero berri batek zerbitzatua izan aurretik 10 minutu (1/6 ordu) baino gehiago itxaron behar izateko probabilitatea.

Ilaran 3 pertsona (sisteman 4 pertsona) baino gehiago egoteko probabilitatea.

Bezero batek bere kontsulta osatzeko 10 minutu (1/6 ordu) baino gehiago itxaron behar izateko probabilitatea.

N zorizko aldagaiaren, hau da, sisteman dagoen bezero kopurua adierazten duen aldagaiaren probabilitate-funtzioa.

Hurrengo irudietan Excel kalkulu-orria erabiliz problemaren ebazpena zein den ikus daiteke.

	A	B	C	G	H
1	M/M/1 ilara infinitua- Populazio infinitua				
2					
3	Helduera-tasa	5			
4	Zerbitzu-tasa	12			
5	Denbora-unitatea	*ordua*			
6					
7	Trafiko-intentsitatea	=B3/B4		n	P(n)
8	isteman bezerorik ez egoteko probabilitatea P(0)	=1-B7		0	=B8
9	Sisteman bezeroren bat egoteko probabilitatea	=B7		1	=($B$7^G9)*$B$8
10	Lq	=B7^2/(1-B7)		2	=($B$7^G10)*$B$8
11	L	=B7/(1-B7)		3	=($B$7^G11)*$B$8
12	Wq	=B7/(B4*(1-B7))		4	=($B$7^G12)*$B$8
13	W	=1/(B4*(1-B7))		5	=($B$7^G13)*$B$8
14				6	=($B$7^G14)*$B$8
15	Bezeroak ilaran igarotzen duen denbora t	=1/6		7	=($B$7^G15)*$B$8
16	P(Tq>t)	=B7*EXP(-B4*(1-B7)*B15)		8	=($B$7^G16)*$B$8
17	N bezero-kopurua	4		9	=($B$7^G17)*$B$8
18	P(N>n)	=B7^(B17+1)		10	=($B$7^G18)*$B$8
19	Bezeroak sisteman igarotzen duen denbora t	=1/6		11	=($B$7^G19)*$B$8
20	P(T<=t)	=1-EXP(-B19*(1-B7)*B4)		12	=($B$7^G20)*$B$8
21	P(T>t)	=1-B20		13	=($B$7^G21)*$B$8
22				14	=($B$7^G22)*$B$8

7.1. irudia.

	A	B	C	G	H
1	M/M/1 ilara infinitua- Populazio infinitua				
2					
3	helduera-tasa	5			
4	Zerbitzu-tasa	12			
5	Denbora-unitatea	*ordua*			
6					
7	Trafiko-intentsitatea	0,416667		n	P(n)
8	Sisteman bezerorik ez egoteko probabilitatea P(0)	0,583333		0	0,583333333
9	Sisteman bezeroren bat egoteko probabilitatea	0,416667		1	0,243055556
10	Lq	0,297619		2	0,101273148
11	L	0,714286		3	0,042197145
12	Wq	0,059524		4	0,017582144
13	W	0,142857		5	0,007325893
14				6	0,003052456
15	Bezeroak ilaran igarotzen duen denbora t	0,16667		7	0,001271856
16	P(Tq>t)	0,129751		8	0,00052994
17	N bezero-kopurua	4		9	0,000220808
18	P(N>n)	0,012559		10	9,20035E-05
19	Bezeroak sisteman igarotzen duen denbora t	0,16667		11	3,83348E-05
20	P(T<=t)	0,688597		12	1,59728E-05
21	P(T>t)	0,311403		13	6,65535E-06
22				14	2,77306E-06

7.2. irudia.

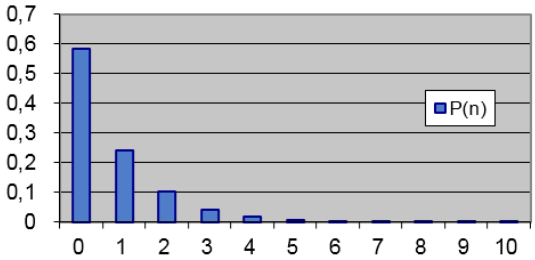
7.2. irudian emaitzak eta sistemaren ezaugarriak agertzen dira. Datu horiek erabiliz, hauek dira planteatutako galderen erantzunak:

Bezero berri batek saltzaile batek zerbitzatzeko 10 minutu baino gehiago itxaron behar izateko probabilitatea oso baxua da (0,12975).

Ilaran 3 pertsona (sisteman 4 pertsona) baino gehiago egoteko probabilitatea ia nulua da (0,01256).

Bezero batek bere kontsulta osatzeko 10 minutu baino gehiago itxaron behar izateko probabilitatea, hau da, dendara sartzen denetik irteten den arte igarotako denbora 10 minutu baino gehiago izateko probabilitatea 0,3114 da.

Sisteman dagoen bezero kopurua adierazten duen zorizko aldagaiaren probabilitate-funtzioa honako grafiko honetan agertzen dena da:



7.3. M/M/S EREDUA

Eredu honetan s zerbitzari kontsideratzen dira. Ilara egonkorra izateko baldintza $\rho^* < 1$ da, $\rho^* = \dfrac{\lambda}{s\mu}$ *trafikoaren intentsitate globala* bezala ezagutzen da.

Ilara honen funtzionamendurako ezaugarri nagusiak hauek dira

$$P_0 = \frac{1}{\dfrac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)} + \sum_{k=0}^{s-1} \dfrac{\rho^k}{k!}}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho}{n} P_{n-1} = P_0 \dfrac{\rho^n}{n!} & \text{baldin } 1 \le n \le s \\ \left(\rho^*\right)^{n-s} P_s & \text{baldin } n > s \end{cases}$$

$$L = \rho + \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2} P_s$$

$$L_q = L - \rho$$

$$W_q = \frac{P_s}{s\mu(1-\rho^*)^2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Egonean dauden batez besteko zerbitzarien kopurua $s - \rho$ izanik.

Ilaran itxaron behar izateko probabilitatea, hau da, sisteman s bezero edo bezero gehiago egoteko probabilitatea (*Erlang-en formula*):

$$P(N \ge s) = \frac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)} P_0 \qquad \text{da.}$$

T_q aldagaiaren, hau da, ilaran itxaron behar den denbora neurtzen duen zorizko aldagaiaren banaketa-funtzioa ondokoa da:

$$P(T_q \le t) = 1 - \frac{P_s\, e^{-\mu t(s-\rho)}}{1-\rho *}$$

7.3.1. Bigarren kasu praktikoa

Autobide bateko ordainlekuak 5 zerbitzari automatiko ditu, zerbitzatuak izateko denborak minutu bateko batezbestekoa (orduko 60 bezeroko tasa) duen banaketa esponentzialari jarraituz. Ibilgailuen helduerek orduko 299 batezbestekoa duen Poisson-en banaketari jarraitzen badiote, bi zerbitzari gehiago jarri beharko al dira itxaron behar izaten den batez besteko denbora murrizteko eta autobidean ematen den zerbitzuari buruz dagoen iritzia aldatzeko?

Hurrengo irudietan autobideak bost zerbitzari dituenean Excel kalkulu-orria erabiliz lortzen diren emaitzak ikus daitezke.

	A	B	C	D	E	F	G
1							**M/M/s Ilara infinitua - Populazio infinitua**
2							
3	**Helduera-tasa**	**299**					
4	**Zerbitzu-tasa**	**60**					
5	**Zerbitzari kopurua**	**5**					
6	**Denbora-unitatea**	*Ordua*			=B3/B4		
7							
8	**Trafiko-intentsitatea**	=B3/(B4*B5)					P(n)
9	**P(0)**	=G9				0	=1/((E6^5/(FACT(B5)*(1-B8)))+1+E6+(E6^2)/2+(E6^3)/6+(E6^4)/24)
10	**L**	=E6+(B8*G14/(1-B8)^2)				1	=G9*E6
11	**Zerbitzu-automatikoak erabiltzeko itxaroten den kotxe kopurua Lq**	**=B10-E6**				2	=G9*E6^2/FACT(2)
12	**Wq**	=G14/(B5*B4*(1-B8)^2)				3	=G9*E6^3/FACT(3)
13	**Gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batezbesteko denbora W**	**=B12+1/B4**				4	=G9*E6^4/FACT(4)
14						5	=G9*E6^5/FACT(5)

7.3. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**M/M/s Ilara infinitua - Populazio infinitua**					
2							
3	**Helduera-tasa**	**299**					
4	**Zerbitzu-tasa**	**60**					
5	**Zerbitzari kopurua**	**5**					
6	**Denbora-unitatea**	*Ordua*			4,98333		
7							
8	**Trafiko-intentsitatea**	0,996666667					P(n)
9	**P(0)**	0,000129068				0	0,000129068
10	**L**	301,4856328				1	0,000643187
11	**Zerbitzu-automatikoak erabiltzeko itxaroten den kotxe kopurua Lq**	**296,5022995**				2	0,001602607
12	**Wq**	0,991646487				3	0,002662108
13	**Gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batezbesteko denbora W**	**1,008313153**				4	0,003316543
14						5	0,003305488

7.4. irudia.

7.4. irudian ikusten den bezala, gidari batek ordainlekua pasatzeko batez beste ordu bat baino gehiago (1,0083 h) behar du, denbora gehiena (0,9916 h) zerbitzatua izateko itxaroten emango duelarik. Ondorioz, ordainlekuan auto-ilara handiak egongo dira.

Bi zerbitzari gehiago jarriz gero, honako emaitza hauek lortzen dira:

1		**M/M/s Ilara infinitua - Populazio infinitua**			
2					
3	**Helduera-tasa**	**299**			
4	**Zerbitzu-tasa**	**60**			
5	**Zerbitzari kopurua**	**7**			
6	**Denbora-unitatea**	*Ordua*	4,98		
7					
8	**Trafiko-intentsitatea**	0,7119048			P(n)
9	**P(0)**	0,0060914		0	0,0060914
10	**L**	5,7745156		1	0,0303555
11	**Zerbitzu-automatikoak erabiltzeko itxaroten den kotxe kopurua Lq**	**0,791182**		2	0,0756358
12	**Wq**	0,0026461		3	0,1256395
13	**Gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batezbesteko denbora W**	**0,019313**		4	0,1565259
14				5	0,1560042
15				6	0,1295701
16				7	0,0922416

7.5. irudia.

7.5. irudian ikus daitekeen moduan, gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batez besteko denbora 0,019 ordukoa da, minutu bat baino pixka bat handiagoa. Itxaronaldi hori aurreko kasuan lortutakoa baino askoz txikiagoa da.

7.5. irudian lortutako datuen programazioa 7.6. irudian azaltzen da.

Hurrengo irudietan ikusten den moduan, kabina bi jarri ordez kabina bakarra jartzeak ere auto-ilarak ekidingo ditu.

	A	B	C	D	E	F	G
1							**M/M/s Ilara infinitua - Populazio infinitua**
2							
3	**Helduera-tasa**	**299**					
4	**Zerbitzu-tasa**	**60**					
5	**Zerbitzari kopurua**	**5**					
6	**Denbora-unitatea**	*Ordua*			=B3/B4		
7							
8	**Trafiko-intentsitatea**	=B3/(B4*B5)					P(n)
9	**P(0)**	=G9				0	=1/((E6^7/(FACT(B5)*(1-B8)))+1+E6+(E6^2)/2+(E6^3)/6+(E6^4)/24+(E6^5)/FACT(5)+(E6^6)/FACT(6))
10	**L**	=E6+(B8*G16/(1-B8)^2)				1	=G9*E6
11	**Zerbitzu-automatikoak erabiltzeko itxaroten den kotxe kopurua Lq**	**=B10-E6**				2	=G9*E6^2/FACT(2)
12	**Wq**	=G16/(B5*B4*(1-B8)^2)				3	=G9*E6^3/FACT(3)
13	**Gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batezbesteko denbora W**	**=B12+1/B4**				4	=G9*E6^4/FACT(4)
14						5	=G9*E6^5/FACT(5)
15						6	=G9*E6^6/FACT(6)
16						7	=G9*E6^7/FACT(7)

7.6. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G
1							**M/M/s Ilara infinitua - Populazio infinitua**
2							
3	**Helduera-tasa**	**299**					
4	**Zerbitzu-tasa**	**60**					
5	**Zerbitzari kopurua**	**6**					
6	**Denbora-unitatea**	*Ordua*			=B3/B4		
7							
8	**Trafiko-intentsitatea**	=B3/(B4*B5)					P(n)
9	**P(0)**	=G9				0	=1/((E6^6/(FACT(B5)*(1-B8)))+1+E6+(E6^2)/2+(E6^3)/6+(E6^4)/24+(E6^5)/FACT(5))
10	**L**	=E6+(B8*G15/(1-B8)^2)				1	=G9*E6
11	**Zerbitzu-automatikoak erabiltzeko itxaroten den kotxe kopurua Lq**	**=B10-E6**				2	=G9*E6^2/FACT(2)
12	**Wq**	=G15/(B5*B4*(1-B8)^2)				3	=G9*E6^3/FACT(3)
13	**Gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batezbesteko denbora W**	**=B12+1/B4**				4	=G9*E6^4/FACT(4)
14						5	=G9*E6^5/FACT(5)
15						6	=G9*E6^6/FACT(6)
16						7	=G9*E6^7/FACT(7)

7.7. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**M/M/s Ilara infinitua - Populazio infinitua**					
2							
3	**Helduera-tasa**	**299**					
4	**Zerbitzu-tasa**	**60**					
5	**Zerbitzari kopurua**	**6**					
6	**Denbora-unitatea**	*Ordua*			4,98		
7							
8	**Trafiko-intentsitatea**	0,830555556					P(n)
9	**P(0)**	0,004632502				0	0,004633
10	**L**	7,833805134				1	0,023085
11	**Zerbitzu-automatikoak erabiltzeko itxaroten den kotxe kopurua Lq**	**2,850471801**				2	0,057521
12	**Wq**	0,009533351				3	0,095549
13	**Gidari batek ordainlekua pasatzeko behar duen batezbesteko denbora W**	**0,026200017**				4	0,119038
14						5	0,118641
15						6	0,098538

7.8. irudia.

Bukatzeko, 5 zerbitzari automatiko badaude, zerbitzatuak izateko denborak minutu bateko batezbestekoa duen banaketa esponentzialari jarraitzen badiote eta helduera-tasa 300 ibilgailukoa bada, trafikoaren intentsitate globala bat izango dela eta, ondorioz, sistema ezegonkorra izango dela ohartarazi nahi da, ilarak luzera infinitua izanik.

7.4. M/G/1 EREDUA

Aurreko bi ereduak Poisson-en ilarak dira; izan ere, heldueren arteko denborak eta zerbitzatuak izateko denborak banaketa esponentzialari jarraitzen diote. Azken suposizio hori ez da egoera praktikoetara ondo doitzen, orokorrean errealitatean zerbitzatuak izateko denborak ez baitio banaketa esponentzialari jarraitzen, batez ere bezeroen eskakizunak antzekoak direnean. Zoritxarrez, nahiz eta eredu batzuentzat emaitza erabilgarri batzuk lortu izan diren, banaketa ez-esponentzialak dituzten ilaren azterketa analitikoa askoz zailagoa da.

Suposatzen da M/G/1 ereduan helduerek λ parametrodun Poisson-en banaketari (heldueren arteko denborak banaketa esponentzialari) jarraitzen diotela, zerbitzatuak izateko denborak hautazko banaketa duela eta zerbitzari bakarra dagoela $1/\mu$ zerbitzu-denboraren batezbestekoa eta σ^2 bariantza ezagunak badira, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ egonkortasun-baldintza lortzen denean, honako emaitza hauek ezar daitezke:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Azken formula hori Pollaczek-Kyntchine-en formula da eta M/G/1 ereduak praktikan duen ugaritasuna dela-eta ilara-teoriaren emaitzarik garrantzitsuenetariko bat da. Gainera,

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = \frac{\lambda(\sigma^2 + \frac{1}{\mu^2})}{2(1-\rho)}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + W_q$$

7.4.1. Hirugarren kasu praktikoa

Mediku batengana doazen gaixoak anbulatoriora Poisson-en banaketari jarraituz heltzen dira, orduko helduera-tasa 3 izanik. Medikuaren kontsulta-denboraren banaketak gaixo bakoitzeko 12 minutuko batezbestekoa eta 24 minutuko desbideratze estandarra ditu. Zein izango da gaixo batek zain egon behar izango duen denbora? Zein izango da itxarongelan dauden gaixoen batez besteko kopurua?

Irudietan kalkulu-orrian egin beharreko programazioa, programatu ondoren lortutako emaitzak eta sistemaren ezaugarriak agertzen dira.

	I	C	D	E	F	G	H
1							
2		**M/G/1 Ilara infinitua- Populazio infinitua**					
3							
4		**Helduera-tasa**	**3**	*bezero orduko*			
5		**Zerbitzu-denboraren batezbestekoa**	**0,2**	*ordu*	Zerbitzu-tasa	**5**	*bezero orduko*
6		**Zerbitzu-denboraren desbideratze tipikoa**	**0,4**	*ordu*			
7		**Denbora-unitatea**	*ordua*				
8							
9		**Trafiko-intentsitatea**	**0,6**				
10		**Itxarongelan dagoen batezbesteko gaixo-kopurua Lq**	**2,25**	*bezero*			
11		**L**	**2,85**	*bezero*			
12		**Gaixo batek igarotzen duen batezbesteko itxarote-denbora Wq**	**0,75**	*ordu*			
13		**W**	**0,95**	*ordu*			

7.9. irudia.

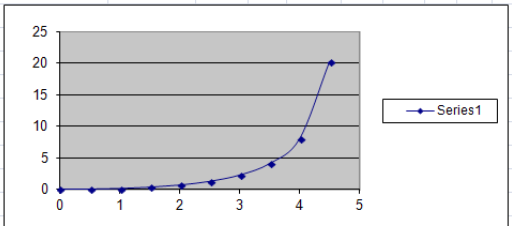
	C	D	E	F	G	H
1						
2	**M/G/1 Ilara infinitua- Populazio infinitua**					
3						
4	**Helduera-tasa**	**3**	*bezero orduko*			
5	**Zerbitzu-denboraren batezbestekoa**	**0,2**	*ordu*	Zerbitzu-tasa	**5**	*bezero orduko*
6	**Zerbitzu-denboraren desbideratze tipikoa**	**0,4**	*ordu*			
7	**Denbora-unitatea**	*ordua*				
8						
9	**Trafiko-intentsitatea**	**0,6**				
10	**Itxarongelan dagoen batezbesteko gaixo-kopurua Lq**	**2,25**	*bezero*			
11	**L**	**2,85**	*bezero*			
12	**Gaixo batek igarotzen duen batezbesteko itxarote-denbora Wq**	**0,75**	*ordu*			
13	**W**	**0,95**	*ordu*			

7.10. irudia.

Kontsultara sartzeko gaixo batek itxaron behar duen batez besteko denbora 0,75 ordukoa (45 minutukoa) da, kalera irteteko ordea 0,95 ordu (57 minutu) behar izango ditu. Hau da, medikuarekin 12 minutu egoteko gaixoak 45 minutu itxaron behar ditu. Bestalde, gutxienez itxarongelan batez beste bi gaixo egongo dira.

L_q-ren eta osasun-gunera heltzen diren gaixoen helduera-tasaren arteko erlazioa aztertzen bada, 7.11. irudian ikusten den bezala, hazkunde esponentziala dagoela ikus daiteke.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	***Lq-ren eta helduera-tasaren arteko erlazioa***												
2													
3	**Helduera-tasa**	3											
4	**Zerbitzu-denboraren batezbestekoa**	0,2											
5	**Zerbitzu-denboraren desbideratze tipikoa**	0,4											
6	**Intentsitate-trafikoa**	0,6											
7	**Lq**	2,25											
8													
9		LAMBDA=	**3**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**
10		Lq=	2,25	0	0,03	0,1	0,3	1	1	2,3	4,08	8	20
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													



7.11. irudia.

7.5. M/D/1 EREDUA

Zerbitzariak behin eta berriz ia zerbitzu berdina ematen duenean, hau da, zerbitzua ohiko zeregin bera egiten oinarritzen denean, zerbitzu-denbora $1/\mu$ konstantea da (zerbitzu-denboraren banaketa endekatua da). Izan ere, zerbitzua emateko beharrezkoa den denbora gutxi aldatzen baita.

Bestalde, M/D/1 ilaran helduerek λ parametrodun Poisson-en banaketari jarraitzen diotela eta zerbitzari bakarra dagoela suposatzen da.

Kasu honetan $\rho < 1$ betetzen bada, honakoa lortzen da:

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \qquad W_q = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

$$L = \rho + L_q \qquad W = \frac{1}{\mu} + W_q$$

7.5.1. Laugarren kasu praktikoa

Eskuz egindako egurrezko ehungailu batean hari bat edo hari talde bat igotzen duen mekanismoak oso ondo doituta egon behar du. Mekanismo hori matxuratzen bada, langileak zehazki 12 minutu behar ditu berriro ere prest jarri eta ehuntzen jarraitzeko. Orduro batez beste 3 ehungailu desdoitzen badira (matxurek Poisson-en prozesuari jarraituz), zehaztu desdoitutako ehungailu bat konpontzen hasteko itxaron behar den batez besteko denbora.

Hurrengo irudietan ilararen funtzionamenduaren parametro nagusiak azaltzen dira, horien artean, W_q eskatutako batez besteko denbora eta kalkulu-orrian egin beharreko programazioa.

	A	B	C	D	E	F
1	**M/D/1 Ilara infinitua -Populazio infinitua**					
2						
3	**Helduera-tasa**	**3**	*ehungailu orduko*			
4	**Zerbitzuaren iraupena**	**0,2**	*ordu*	Zerbitzu-tasa	**=1/B4**	*ehungailu orduko*
5	**Denbora-unitatea**	*ordua*				
6						
7	**Intentsitate-trafikoa**	**=B3/E4**				
8	**Lq**	**=B7^2/(2*(1-B7))**	*ehungailu*			
9	**L**	**=B7+B8**	*ehungailu*			
10	**Desdoitutako ehungailu bat konpontzen hasteko itxaron behar den batezbesteko denbora Wq**	**=B8/B3**	*ehungailu*			
11	**W**	**=B10+1/E4**	*ehungailu*			

7.12. irudia.

	A	B	C	D	E	F
1	**M/D/1 Ilara infinitua -Populazio infinitua**					
2						
3	**Helduera-tasa**	**3**	*ehungailu orduko*			
4	**Zerbitzuaren iraupena**	**0,2**	*ordu*	Zerbitzu-tasa	**5**	*ehungailu orduko*
5	**Denbora-unitatea**	*ordua*				
6						
7	**Intentsitate-trafikoa**	**0,6**				
8	**Lq**	**0,45**	*ehungailu*			
9	**L**	**1,05**	*ehungailu*			
10	**Desdoitutako ehungailu bat konpontzen hasteko itxaron behar den batezbesteko denbora Wq**	**0,15**	*ehungailu*			
11	**W**	**0,35**	*ehungailu*			

7.13. irudia.

Ehungailu bat konpontzen hasteko itxaron behar den batez besteko denbora 0,15 ordukoa da (9 minutukoa), eta era egokian berriro ere lan egiteko zehazki 0,35 ordu (21 minutu) behar izaten dira. Laburbilduz, ehungailua konpontzen hasteko 9 minutu itxaron behar izaten dira eta langilea hura konpontzen 12 minutu egoten da. Ondorioz, konpontzen egoten diren ehungailuen kopurua gutxi gorabehera bat izaten da (1,05 ehungailu).

7.6. ILARA-SISTEMAN ERABAKIA HARTZEA

Puntu honetara arte optimizazioko problemarik planteatu gabe, ilara zehatz baten portaerari buruzko informazioa lortu da. Hala ere, helburutzat erabaki egokia hartzea duen ikerketa batean beharrezkoa den informazioa ilara-teoriari esker lor daiteke.

Adibidez, ilarak egoten diren hainbat egoeratan langileek sortzen dituzten kostuez gain, bezeroak itxaroten izateak sortzen dituen kostuak ere egoten dira. Langileen kostuak erraz kalkula eta zehatz daitezke, baina bezeroak itxaroten izateak duen kostua oso lausoa da, hortaz, estimatzeko zaila da.

7.6.1. Bosgarren kasu praktikoa

Supermerkatu bateko kudeatzaileak jakin nahi du zein den harategi-sailean egon behar duten langileen kopuru optimoa. Bezeroak orduko 20 bezeroko parametroa duen Poisson-en prozesuari jarraituz heltzen dira harategira eta zerbitzu-denborak orduko 25 bezeroko tasa duen banaketa esponentziala du. Zerbitzari bat libre egotearen kostua orduko $C_S = 50$ *eurokoa da, pertsona bat ilaran zain izatearena, ordea, orduko* $C_w = 300$ *eurokoa izanik. Bukatzeko,* s *zerbitzari daudenean ilaran dauden pertsonen kopurua* $L_q(s)$ *adieraziko da.*

s zerbitzari izateak orduko duen kostu totala hau da:

$$TC(s) = C_s \cdot s + C_w \cdot L_q(s)$$

Helburua aurreko funtzioa minimizatzen duen s-ren balioa zehaztea da. Kontuan izan behar da, s handitzen den heinean, adierazpeneko lehenengo gaia ere handitu egiten dela eta bigarren gaia txikitu egiten dela; izan ere, $L_q(s)$ txikitu egiten da.

Sortzen den ilara M/M/s motakoa denez, s-ren menpekoa den L_q balioa honela kalkulatzen da:

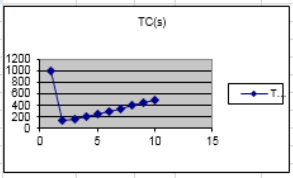
$$L_q = L - \rho = \frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2} P_s$$

non

$$P_s = \frac{\rho^s}{s!} \frac{1}{\dfrac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)} + \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\rho^k}{k!}} \quad \text{den.}$$

Hurrengo irudietan s-ren balio optimoa lortzeko diseinatu behar den kalkulu-orria ikus daiteke. Balio optimoa $s = 2$ da, kostu minimoa 145,71 €/h izanik.

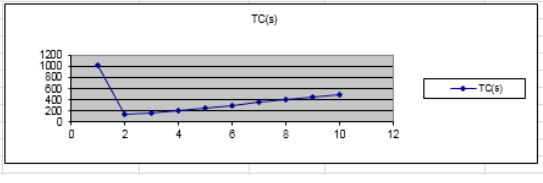
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Datuak								
3	Zerbitzari bat libre egotearen kostua		Cs	50,00	euro orduko					
4	Pertsona bat ilaran zain izatearen kostua		Cw	300,00	euro orduko					
5	Helduera-tasa		λ	20,00	bezero orduko					
6	Zerbitzu-tasa		μ	25,00	bezero orduko					
7										
8			ρ	0,80						
9										
10	Zerbitzailea	ρ*	ρ*/(1−ρ*)^2	ρ^s /s!	ρ^s /(s!(1−ρ*))	Σρ^k/k!	Ps	Lq(s)	TC(s)	
11	1	0,8	20,00	0,80	4,00	1	0,16	3,2	1010	
12	2	0,4	1,11	0,32	0,53	1,8	0,1371	0,15	145,714286	
13	3	0,26666667	0,50	0,09	0,12	2,12	0,0382	0,02	155,676275	
14	4	0,2	0,31	0,02	0,02	2,205333	0,0077	0	200,718563	
15	5	0,16	0,23	0,00	0,00	2,2224	0,0012	0	250,083463	
16	6	0,13333333	0,18	0,00	0,00	2,225131	0,0002	0	300,008712	
17	7	0,11428571	0,15	0,00	0,00	2,225495	2E-05	0	350,000817	
18	8	0,1	0,12	0,00	0,00	2,225536	2E-06	0	400,000069	
19	9	0,08888889	0,11	0,00	0,00	2,225541	2E-07	0	450,000005	
20	10	0,08	0,09	0,00	0,00	2,225541	1E-08	0	500	
21										
22					ρ^k/k!					
23			k	0,00	1,00					
24				1,00	0,80					
25				2,00	0,32					
26				3,00	0,09					
27				4,00	0,02					
28				5,00	0,00					
29				6,00	0,00					
30				7,00	0,00					
31				8,00	0,00					
32				9,00	0,00					



7.14. irudia.

Formulazioa honako irudi honetan azaltzen da:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		**Datuak**								
3		Zerbitzari bat libre egotearen kostua	**Cs**	**50**	*euro orduko*					
4		Pertsona bat ilaran zain izatearen kostua	**Cw**	**300**	*euro orduko*					
5		Helduera-tasa	**λ**	**20**	*bezero orduko*					
6		Zerbitzu-tasa	**μ**	**25**	*bezero orduko*					
7										
8			**ρ**	**=D5/D6**						
9										
10	**Zerbitzailea**	**ρ∗**	**ρ∗/(1−ρ∗)^2**	**ρ^s /s!**	**ρ^s /(s!(1−ρ∗))**	**Σρ^k/k!**	**Ps**	**Lq(s)**	**TC(s)**	
11	1	=$D$8/A11	=B11/(1-B11)^2	=$D$8^A11/FACT(A11)	=$D$8^A11/(FACT(A11)*(1-B11))	=SUMA($E$23)	=D11/(E11+F11)	=C11*G11	=$D$3*A11+$D$4*H11	
12	2	=$D$8/A12	=B12/(1-B12)^2	=$D$8^A12/FACT(A12)	=$D$8^A12/(FACT(A12)*(1-B12))	=SUMA($E$23:E24)	=D12/(E12+F12)	=C12*G12	=$D$3*A12+$D$4*H12	
13	3	=$D$8/A13	=B13/(1-B13)^2	=$D$8^A13/FACT(A13)	=$D$8^A13/(FACT(A13)*(1-B13))	=SUMA($E$23:E25)	=D13/(E13+F13)	=C13*G13	=$D$3*A13+$D$4*H13	
14	4	=$D$8/A14	=B14/(1-B14)^2	=$D$8^A14/FACT(A14)	=$D$8^A14/(FACT(A14)*(1-B14))	=SUMA($E$23:E26)	=D14/(E14+F14)	=C14*G14	=$D$3*A14+$D$4*H14	
15	5	=$D$8/A15	=B15/(1-B15)^2	=$D$8^A15/FACT(A15)	=$D$8^A15/(FACT(A15)*(1-B15))	=SUMA($E$23:E27)	=D15/(E15+F15)	=C15*G15	=$D$3*A15+$D$4*H15	
16	6	=$D$8/A16	=B16/(1-B16)^2	=$D$8^A16/FACT(A16)	=$D$8^A16/(FACT(A16)*(1-B16))	=SUMA($E$23:E28)	=D16/(E16+F16)	=C16*G16	=$D$3*A16+$D$4*H16	
17	7	=$D$8/A17	=B17/(1-B17)^2	=$D$8^A17/FACT(A17)	=$D$8^A17/(FACT(A17)*(1-B17))	=SUMA($E$23:E29)	=D17/(E17+F17)	=C17*G17	=$D$3*A17+$D$4*H17	
18	8	=$D$8/A18	=B18/(1-B18)^2	=$D$8^A18/FACT(A18)	=$D$8^A18/(FACT(A18)*(1-B18))	=SUMA($E$23:E30)	=D18/(E18+F18)	=C18*G18	=$D$3*A18+$D$4*H18	
19	9	=$D$8/A19	=B19/(1-B19)^2	=$D$8^A19/FACT(A19)	=$D$8^A19/(FACT(A19)*(1-B19))	=SUMA($E$23:E31)	=D19/(E19+F19)	=C19*G19	=$D$3*A19+$D$4*H19	
20	10	=$D$8/A20	=B20/(1-B20)^2	=$D$8^A20/FACT(A20)	=$D$8^A20/(FACT(A20)*(1-B20))	=SUMA($E$23:E32)	=D20/(E20+F20)	=C20*G20	=$D$3*A20+$D$4*H20	
21										
22					**ρ^k/k!**					
23			k	0	=$D$8^D23/FACT(D23)					
24				1	=$D$8^D24/FACT(D24)					
25				2	=$D$8^D25/FACT(D25)					
26				3	=$D$8^D26/FACT(D26)					
27				4	=$D$8^D27/FACT(D27)					
28				5	=$D$8^D28/FACT(D28)					
29				6	=$D$8^D29/FACT(D29)					
30				7	=$D$8^D30/FACT(D30)					
31				8	=$D$8^D31/FACT(D31)					
32				9	=$D$8^D32/FACT(D32)					



7.15. irudia.

Bukatzeko, itxaroten egoteak duen kostu lausoa dela-eta, hartutako erabakia C_w-ren arabera nola aldatzen den ikusteko sentikortasun-analisi bat egin behar da. Horretarako, C_w-ren araberakoa den, KO, kostu osoaren *datu-taula* sortzen da.

7.16. irudian ikus daitekeen moduan:

$0 \leq C_w \leq 16$ bada, zerbitzari kopuru optimoa 1 da

$16 < C_w \leq 300$ bada, zerbitzari kopuru optimoa 2 da

34		1. zerbitzaria	2 . zerbitzaria	3. zerbitzaria	4 . Zerbitzaria
35	Datu-taula	1010	145,71	155,68	200,72
36	0	50	100,00	150,00	200,00
37	5	66	100,76	150,09	200,01
38	10	82	101,52	150,19	200,02
39	15	98	102,29	150,28	200,04
40	16	101,2	102,44	150,30	200,04
41	17	104,4	102,59	150,32	200,04
42	18	107,6	102,74	150,34	200,04
43	20	114	103,05	150,38	200,05
44	75	290	111,43	151,42	200,18
45	100	370	115,24	151,89	200,24
46	150	530	122,86	152,84	200,36
47	200	690	130,48	153,78	200,48
48	300	1010	145,71	155,68	200,72

7.16. irudia.

34		1. zerbitzaria	2 . zerbitzaria	3. zerbitzaria	4 . Zerbitzaria
35	Datu-taula	=I11	=I12	=I13	=I14
36	0	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
37	5	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
38	10	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
39	15	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
40	16	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
41	17	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
42	18	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
43	20	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
44	75	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
45	100	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
46	150	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
47	200	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)
48	300	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)	=TABLA(;D4)

7.17. irudia.

7.7. ONDORIOAK

Eguneroko bizitzan «ilaran egotea» ohiko zerbait da, adibidez: autobus-geltokian, medikuaren kontsultan, supermerkatuko kutxan… Batzuetan itxaron behar izatea ez da txarto ikusten; beste batzuetan, berriz, denbora galtzea dirudi.

Oro har, herritarrek ez dute itxarotea gustukoa izaten eta zerbitzuetako arduradunek bezeroak pozik egotea nahi izaten dute. Ilara-teoriak mota honetako galderei erantzuna bilatzen die: Zein da bezero batek zerbitzatua izateko itxaron behar izango duen batez besteko denbora? Zein da itxarongelan espero diren pertsonen kopurua? Zein da bezeroak pozik egoteko beharrezkoa izango den zerbitzari kopurua? Zein da bezero batek itxaron behar ez izateko probabilitatea?

Argi dago egoera desberdin ugariri aurre egin beharko zaiela eta, hortaz, egoera bakoitza erabat aztertu beharko dela. Hautaketa desegoki bat egiteak emaitza okerra ekarriko du, eta, ondorioz, bai bezeroak bai zerbitzuetako arduradunek nahi izango ez dituzten emaitzak lortuko dira.

8. Aplikazio praktikoak

Aurreko gaietan garatutako ebazpen-metodoak aplikatuz, beste ariketa praktiko batzuk ebatziko dira.

8.1. SIMPLEX METODOAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Imitaziozko bitxiak ekoizten dituen lantegi batean alez egindako hiru lepoko desberdin egiten dira. A diseinua duen lepoko bat saltzean 3 euro irabazten dira, B diseinua duen bat saltzean, berriz, euro 1, eta bukatzeko, C diseinua duen bat saltzean 4 euro irabazten dira.

Lepoko mota bakoitza egiteko beharrezkoak diren ale zuri eta beltzen kopuruak honako taula honetan laburbilduta daude:

	A diseinua	*B diseinua*	*C diseinua*
Ale zuriak	*6*	*3*	*5*
Ale beltzak	*3*	*4*	*5*

Bestalde, baliabide murriztuak daude, asko jota 25 bola zuri eta 20 bola beltz erabil baitaitezke. Imitaziozko bitxien lantegiak mota bakoitzeko zenbat lepoko ekoitzi beharko ditu orduro etekin maximoa lortu nahi badu?

Programazio linealeko (PLko) baldintzak barnean dituen eredu matematikoa ondokoa da:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Z lortutako mozkina eta x_1, x_2, x_3 orduro mota bakoitzeko ekoitzitako lepokoen kopurua izanik.

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria $x_4 = 25$, $x_5 = 20$ da, x_4 eta x_5 lehenengo eta bigarren murrizketen lasaiera-aldagaiak izanik. Simplex algoritmoaren hasierako taula hau da:

		C_i	3	1	4	0	0
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	**25**	x_4	6	3	5	1	0
0	**20**	x_5	3	4	**5**	0	1
Z = 0		z_i	0	0	0	0	0
		$z_i - c_i$	–3	–1	–4	0	0

Oinarrizko soluzio bideragarria ez da optimoa. x_3 aldagaiak kostu murriztu negatibo txikiena duenez, x_3 oinarrira sartzen da eta x_5 oinarritik irteten da. Honako taula hau lortzen da:

		C_i	3	1	4	0	0
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	**5**	x_4	**3**	–1	0	1	–1
4	**4**	x_3	0,6	0,8	1	0	0,2
Z = 16		z_i	2,4	3,2	4	0	0,8
		$z_i - c_i$	–0,6	2,2	0	0	0,8

Oinarrizko soluzio bideragarriak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oinarrira x_1 sartu eta x_4 irteten da. Hori egitean taula berria ondokoa da:

		C_i	3	1	4	0	0
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	**1,667**	x_1	1	–0,333	0	0,333	–0,333
4	**3**	x_3	0	1	1	–0,2	0,4
Z = 17		z_i	3	3	4	0,2	0,6
		$z_i - c_i$	0	2	0	0,2	0,6

Oraingoan, oinarrizko soluzio bideragarriak optimotasun-baldintza betetzen du. Problema linealaren soluzio optimo bakarra hauxe da:

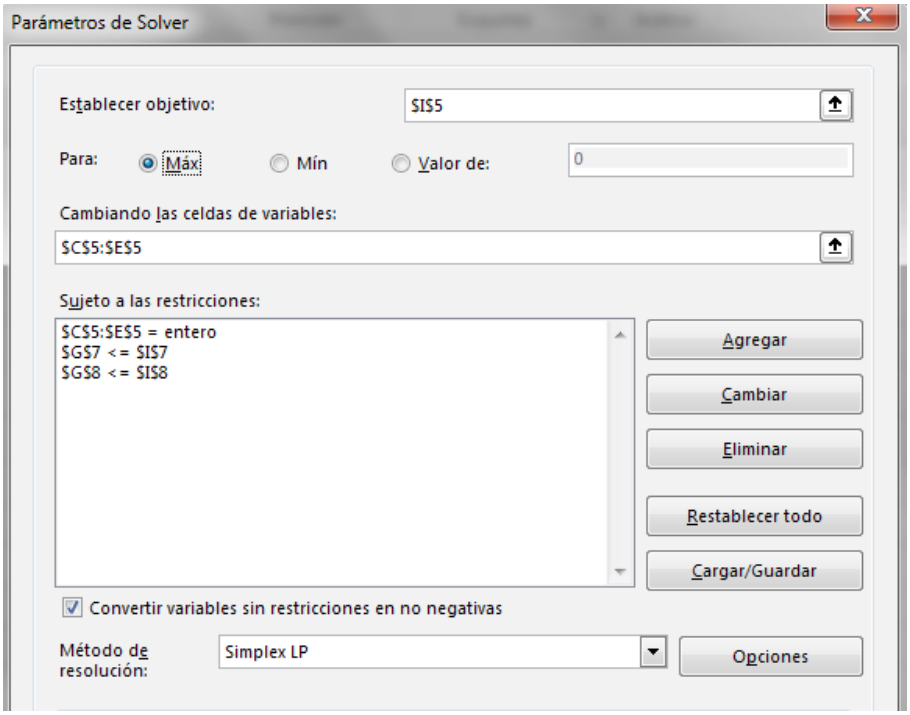
$$x_1 = 1,667\,;\ x_2 = 0\,;\ x_3 = 3 \text{ eta } \text{Max } Z = 17$$

Simplex metodoa erabiliz lortutako soluzioa osoa ez denez, soluzio hori ez da imitaziozko bitxiak ekoizten dituen lantegia bilatzen ari den soluzioa. Soluzio optimo osoa lortzeko Excel kalkulu-orriak duen Solver tresna erabiliko da.

Hurrengo irudietan Solver-ek bueltatzen duen soluzio osoa eta kalkulu-orrian egin beharreko programazioa agertzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3	**Lepoko motak**		A	B	C						
4	*irabaziak*		3	1	4			**Helburu funtzioa**			
5	**Aldagaien balioak**								**0**		
6			**Matrizea**				**Guztira**		**Gai askea**		**Lasaiera**
7	**Murrizketak**		6	3	5		0	≤	25		25
8			3	4	5		0	≤	20		20

8.1. irudia.



8.2. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3	**Lepoko motak**		A	B	C						
4	*irabaziak*		3	1	4			**Helburu funtzioa**			
5	**Aldagaien balioak**		**0**	**0**	**4**				**16**		
6			**Matrizea**				**Guztira**		**Gai askea**		**Lasaiera**
7	**Murrizketak**		6	3	5		20	≤	25		5
8			3	4	5		20	≤	20		0

8.3. irudia.

Eredu matematikoaren emaitza osoan ikus daitekeen moduan, lantegiak bere etekinak maximizatzeko ez ditu A eta B motako lepokoak ekoitzi beharko. Baina mota horietako lepokoak ez egiteak bezeroak galtzea ekar dezake; izan ere, bezeroek A eta B diseinua duten lepokoak beharrezkoa direla pentsa dezakete. Ondorioz, imitaziozko bitxien lantegiko arduradunek hori kontuan izan beharko dute.

8.2. ZIGORTZE-METODOAREN APLIKAZIOA PRAKTIKOA

Enpresa batek nitratoa eta fosfatoa dituzten hiru ongarri mota egiten ditu. Ongarri mota bakoitzak dituen edukiak, kilogramotan, honako taula honetan agertzen dira:

Ongarri mota	*Nitratoa*	*Fosfatoa*
A	*2*	*3*
B	*2*	*6*
C	*6*	*2*

Enpresak orduro 12 kg nitrato eta beste 12 kg fosfato erabiltzen ditu. Ongarri bakoitza saltzean 10, 5 eta 6 euroko irabazia lortzen bada hurrenez hurren, zenbat ongarri kilogramo egin beharko dira orduro etekinak maximizatzeko?

Problemaren baldintzak aintzat hartzen dituen PLko eredua ondorengoa da:

$$\text{Max} \quad Z = 10x_1 + 5x_2 + 6x_3$$
$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Z lortutako mozkina eta x_1, x_2, x_3 orduro egindako A, B eta C motako ongarri kilogramoen kopurua izanik.

Ereduari aldagai artifizialak gehitzean honako eredu hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 10x_1 + 5x_2 + 6x_3 - Mx_4 - Mx_5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

M balioa positiboa eta nahi den bezain handia da.

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria ondorengoa da:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 12,\ x_5 = 12$$

Simplex metodoaren lehen taula hauxe da:

		C_i	10	5	6	–M	–M
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
–M	**12**	x_4	2	2	**6**	1	0
–M	**12**	x_5	3	6	2	0	1
Z = –24M		z_i	–5M	–8M	–8M	–M	–M
		$c_i–z_i$	10+5M	5+8M	6+8M	0	0

Oinarrizko soluzioa ez da optimoa. x_3 aldagaiak kostu murriztu positibo handiena duenez oinarrira sartzen da, eta x_4 oinarritik irteten da. Taula berria hau da:

		C_i	10	5	6	–M	–M
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	**2**	x_3	1/3	1/3	1	1/6	0
–M	**8**	x_5	7/3	**16/3**	0	–1/3	1
Z = 12–8M		z_i	2–(7/3)M	2–(16/3)M	6	1+(1/3)M	–M
		$c_i–z_i$	8+(7/3)M	3+(16/3)M	0	–1–(4/3)M	0

Soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. Oraingo honetan x_2 oinarrira sartzen da eta x_5 oinarritik irteten da, taula berria hurrengoa izanik:

		C_i	10	5	6	–M	–M
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	**3/2**	x_3	3/16	0	1	3/16	–1/16
5	**3/2**	x_2	**7/16**	1	0	–1/16	3/16
Z = 33/2		z_i	53/16	5	6	13/16	9/16
		$c_i–z_i$	107/16	0	0	–M–13/16	–M–9/16

Optimotasun-baldintzak bete gabe jarraitzen du. Oinarrira sartzen den aldagaia x_1 da eta oinarritik irteten den aldagaia, berriz, x_2:

		C_i	10	5	6	–M	–M
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	**6/7**	x_3	0	–3/7	1	3/14	–1/7
10	**24/7**	x_1	1	16/7	0	–1/7	3/7
Z = 276/7		z_i	10	142/7	6	–1/7	24/7
		$c_i–z_i$	0	–107/7	0	–M+1/7	–M–24/7

Oinarrizko soluzio bideragarriak oraingoan optimotasun-baldintza betetzen du. Ondorioz, PLko problemak duen soluzio optimo bakarra hurrengoa da:

$$x_1 = \frac{24}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{6}{7} \text{ eta } \operatorname{Max} Z = \frac{276}{7}$$

Enpresak A eta C motako ongarriak sortu beharko ditu, ekoitzi beharreko kopuruak A motako $\frac{24}{7}$ kg/h eta C motako $\frac{6}{7}$ kg/h izanik, orduro $\frac{276}{7}$ euroko etekina lotuz. Bestalde, mozkinak maximizatzeko B motako ongarria egitea beharrezkoa izango ez dela aipatu beharra dago.

8.3. BI FASEKO METODOAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Aurreko PLko problema bi faseko metodoaren bidez ere ebatz daiteke.

Lehenengo fasearekin erlazionatutako problema ondorengoa da:

$$\begin{gathered}\operatorname{Min}(-Z) = x_4 + x_5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{gathered}$$

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 12, x_5 = 12$ hasierako oinarrizko soluzio bideragarritzat hartzen bada, Simplex metodoaren hasierako taula hurrengoa da:

		C_i	0	0	0	1	1
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	**12**	x_4	2	2	**6**	1	0
1	**12**	x_5	3	6	2	0	1
–Z = 24		z_i	5	8	8	1	1
		$z_i–c_i$	5	8	8	0	0

Oinarrizko soluzio bideragarria ez da optimoa. x_3 aldagaiak kostu murriztu positibo handiena duenez oinarrira sartzen da (x_2 eta x_3 aldagaien artean bat aukeratzen da) eta x_4 oinarritik irteten da, taula berria ondokoa izanik:

		C_i	0	0	0	1	1
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	**2**	x_3	1/3	1/3	1	1/6	0
1	**8**	x_5	7/3	**16/3**	0	–1/3	1
–Z = 8		z_i	7/3	16/3	0	–1/3	1
		z_i–c_i	7/3	16/3	0	–4/3	0

Oinarrizko soluzioak optimoa izan gabe jarraitzen du. x_2 aldagaia oinarrira sartzen da eta x_5 oinarritik irteten da, hurrengo taula lortuz:

		C_i	0	0	0	1	1
$K_{O\,s}$	B_i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	**3/2**	x_3	3/16	0	1	3/16	–1/16
0	**3/2**	x_2	7/16	1	0	–1/16	3/16
Z = 0		z_i	0	0	0	0	0
		z_i–c_i	0	0	0	–1	–1

Azken taula horretan, lehenengo faseko azken taulan, x_4 eta x_5 aldagai artifizialak nuluak dira. Bi aldagai horiek oinarrian ez daudenez, hasierako problema (minimo kasurako) berriro hartuz eta lehenengo faseko azken taula bigarren faseko hasierako taula gisa kontsideratuz, bigarren fasea has daiteke.

		C_i	–10	–5	–6
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3
–6	**3/2**	x_3	3/16	0	1
–5	**3/2**	x_2	**7/16**	1	0
–Z = –33/2		z_i	–53/16	–5	–6
		z_i–c_i	107/16	0	0

Oinarrizko soluzioak ez du optimoa izateko baldintza betetzen. Hortaz, x_1 oinarrira sartzen da eta x_2 oinarritik irteten, horrela, honako taula hau lortuz:

		C_i	–10	–5	–6
K_O	B_i		x_1	x_2	x_3
–6	**6/7**	x_3	0	–3/7	1
–10	**24/7**	x_1	1	16/7	0
–Z = –276/7		z_i	–10	–142/7	–6
		$z_i–c_i$	0	–107/7	0

Oraingo honetan oinarrizko soluzio bideragarria optimoa da. Hortaz, PLko problemaren soluzio optimo bakarra lortu da:

$$x_1 = \frac{24}{7}, x_2 = 0, x_3 = \frac{6}{7} \text{ eta } \operatorname{Min}\left(-Z\right) = -\frac{276}{7}$$

Hau da, orduko A motako $\frac{24}{7}$ kg eta C motako $\frac{6}{7}$ kg fabrikatu beharko dira, horrela orduro lortutako mozkina $\frac{276}{7}$ eurokoa izanik.

8.4. PHPSIMPLEX-EN APLIKAZIO PRAKTIKOA

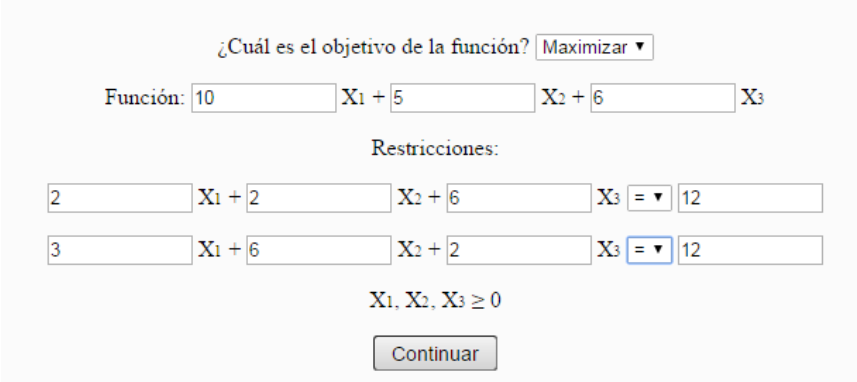
8.2. atalean planteatutako problema online dagoen eta dohainik den PHPSimplex erabiliz ere ebatz daiteke.

Goiko eredu matematikoa kontsideratzen da:

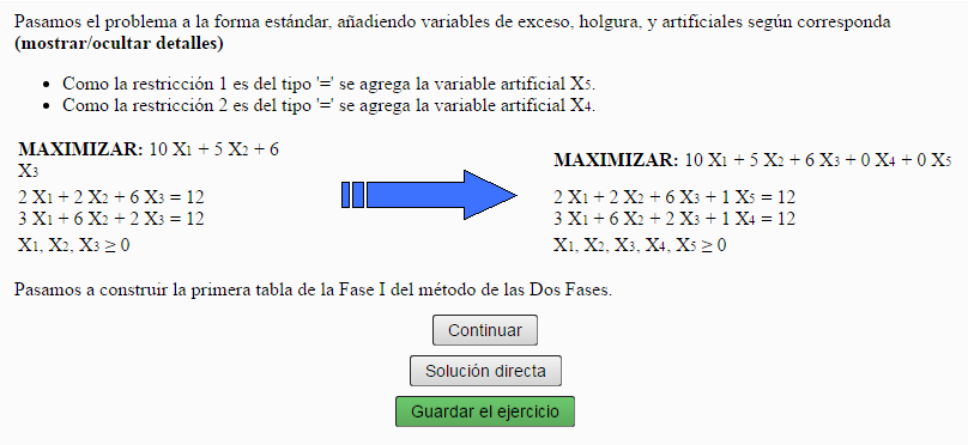
$$\text{Max} \quad Z = 10x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ondoren problema PHPSimplex erabiliz ebazteko jarraitu beharreko pausoak agertzen dira.



8.4. irudia.



8.5. irudia.

Hurrengo hiru irudiak, 8.6. irudia, 8.7. irudia eta 8.8. irudia, bi faseko metodoaren lehenengo fasearekin erlazionatuta daude.

Tabla 1			0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_5	-1	12	2	2	6	0	1
P_4	-1	12	3	6	2	1	0
Z		-24	-5	-8	-8	0	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P_4 y la que entra es P_2.

Continuar

8.6. irudia.

Tabla 2			0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_5	-1	8	1	0	16 / 3	-1 / 3	1
P_2	0	2	1 / 2	1	1 / 3	1 / 6	0
Z		-8	-1	0	-16 / 3	4 / 3	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P_5 y la que entra es P_3.

Continuar

8.7. irudia.

Tabla 3			0	0	0	-1	-1
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_3	0	3 / 2	3 / 16	0	1	-1 / 16	3 / 16
P_2	0	3 / 2	7 / 16	1	0	3 / 16	-1 / 16
Z		0	0	0	0	1	1

☑ Mostrar resultados como fracciones.

Existe alguna solución posible para el problema, por lo que podemos pasar a la Fase II para calcularla.

Continuar

8.8. irudia.

Hurrengo bi irudiak, 8.9. irudia eta 8.10. irudia, berriz, bi faseko metodoaren bigarren fasearekin erlazionatuta daude.

Tabla 1			10	5	6
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**
P_3	6	3 / 2	3 / 16	0	1
P_2	5	3 / 2	7 / 16	1	0
Z		33 / 2	-107 / 16	0	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

La variable que sale de la base es P_2 y la que entra es P_1.

Continuar

8.9. irudia.

Tabla 2			10	5	6
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**
P_3	6	6 / 7	0	-3 / 7	1
P_1	10	24 / 7	1	16 / 7	0
Z		276 / 7	0	107 / 7	0

☑ Mostrar resultados como fracciones.

La solución óptima es Z = 276 / 7
X_1 = 24 / 7
X_2 = 0
X_3 = 6 / 7

8.10. irudia.

8.10. irudian ikus daitekeen soluzio optimoa aurreko bi metodoak erabiliz lortutako soluzio bera da. A eta C motako ongarriak sortu beharko dira soilik, orduro A motako $\frac{24}{7}$ kg eta C motako $\frac{6}{7}$ kg sortuz, horrela orduro $\frac{276}{7}$ euroko mozkina lortuz.

8.5. DUALTASUNAREN TEORIAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Xabier nire lagunak kartoizko lau kutxa desberdin fabrikatu nahi ditu. Kutxak egiteko egunean erabil dezakeen gehienezko kapitala 180 eurokoa da eta kutxak gordetzeko erabilgarriak diren 230 metro kubiko ditu.

Kutxa bakoitzari buruzko informazio garrantzitsuena honako taula honetan laburbilduta dago:

Kutxa mota	*A*	*B*	*C*	*D*
Kutxa bakoitza egiteko kostua (eurotan)	*2*	*2*	*1,5*	*4*
Kutxa bakoitza gordetzeko beharrezko lekua (m^3)	*2*	*2,5*	*2*	*1,5*
Kutxa bakoitzaren irabazia (eurotan)	*5*	*6,5*	*5*	*5,5*

Mota bakoitzeko zenbat kutxa fabrikatu beharko ditu Xabierrek egunean mozkin maximoa izateko?

Xabier nire lagunaren problemaren baldintzak aintzat hartzen dituen PLko problema ondorengoa da:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 5x + 6,5y + 5z + 5,5t \\ 2x + 2y + 1,5z + 4t &\leq 180 \\ 2x + 2,5y + 2z + 1,5t &\leq 230 \\ x, y, z, t &\geq 0 \end{aligned}$$

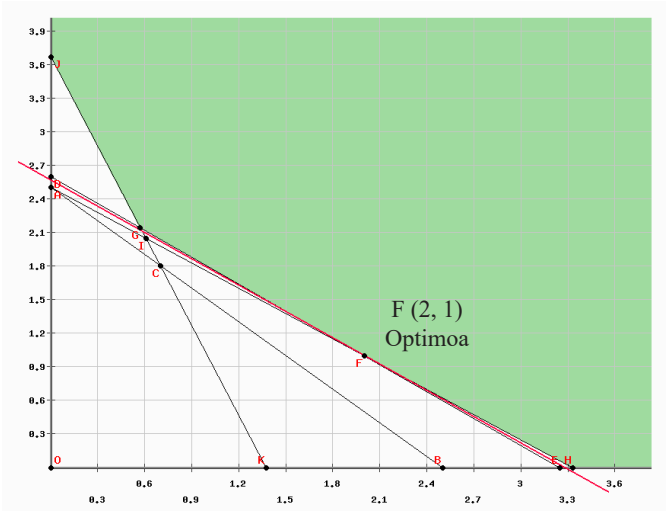
Z lortutako mozkina eta x, y, z, t egunero fabrikatutako A, B , C eta D motako kutxen kopurua izanik, hurrenez hurren.

Problema hau (problema primala) berari elkartutako problema duala grafikoki ebatziz eta lasaiera osagarriaren teorema erabiliz ebatz daiteke.

Elkartutako problema duala hauxe da:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad Z^* &= 180u_1 + 230u_2 \\ 2u_1 + 2u_2 &\geq 5 \\ 2u_1 + 2,5u_2 &\geq 6,5 \\ 1,5u_1 + 2u_2 &\geq 5 \\ 4u_1 + 1,5u_2 &\geq 5,5 \\ u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aldagai bi dituen problema hau mugatugabe dago, baina minimizazioko problema bat denez, haren soluzioa grafikoki aurki daiteke.



8.11. irudia.

8.11. irudian problema dualaren soluzio optimoa agertzen da:

$$u_1 = 2,\ u_2 = 1 \quad \text{eta} \quad Z^* = 590$$

Problema dualean lasaiera-aldagaiak sartuz soluzio optimo osoa lortzea posible egiten duen eredua forma estandarrean lortzen da:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad Z^* &= 180u_1 + 230u_2 \\ 2u_1 + 2u_2 - u_3 &= 5 \\ 2u_1 + 2{,}5u_2 - u_4 &= 6{,}5 \\ 1{,}5u_1 + 2u_2 - u_5 &= 5 \\ 4u_1 + 1{,}5u_2 - u_6 &= 5{,}5 \\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$u_1 = 2,\ u_2 = 1,\ u_3 = 1,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0,\ u_6 = 4 \quad \text{eta} \quad Z^* = 590$$

*Lasaiera osagarria*ren (Hillier eta Lieberman, 2002) teorema erabiliz:

Primala	Duala
x	$u_3 = 1$
y	$u_4 = 0$
z	$u_5 = 0$
t	$u_6 = 4$
w	$u_1 = 2$
q	$u_2 = 1$
Max $Z = 590$	Min $Z^* = 590$

$$\begin{cases} x \cdot u_3 = 0 & \rightarrow \quad x = 0 \\ y \cdot u_4 = 0 \\ z \cdot u_5 = 0 \\ t \cdot u_6 = 0 & \rightarrow \quad t = 0 \\ w \cdot u_1 = 0 & \rightarrow \quad w = 0 \\ q \cdot u_2 = 0 & \rightarrow \quad q = 0 \end{cases}$$

Balio horiek jatorrizko probleman (primalean) ordezkatuz:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 5x + 6{,}5y + 5z + 5{,}5t \\ 2x + 2y + 1{,}5z + 4t + w &= 180 \\ 2x + 2{,}5y + 2z + 1{,}5t + q &= 230 \\ x, y, z, t, w, q &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad Z &= 6{,}5y + 5z \\ 2y + 1{,}5z &= 180 \\ 2{,}5y + 2z &= 230 \\ y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Hortaz, problemaren soluzio optimoa ondorengoa da:

$$x = 0, \;\; y = 60, \;\; z = 40, \;\; t = 0 \quad \text{eta} \quad Z = 590$$

Ondorioz, egunero mozkin maximoa lortzeko, 590 euro lortzeko, Xabier nire lagunak B motako 60 kutxa eta C motako 40 kutxa sortu eta gorde beharko ditu, horretarako biltegiko kapazitate guztia eta erabilgarria den diru guztia erabiliz.

8.6. EXCEL KALKULU-ORRIAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Atzo ekoizteko erarik onuragarriena zein zen adierazteko Xabierrekin egon nintzen. Komentatu niona oso adi entzun zuen arren, haren begiradan etsipena sumatu nuen. Izan ere, berak arazoa azaldu zidanean eredu bakoitzetik gutxienez kutxa bat ekoitzi nahi zuela ulertu nuela uste zuen, baina nik aurkeztutako proposamenean bi kutxa-eredu ez ziren ekoitzi behar.

Lasaitzeko esan, nire ordenagailua ireki eta Excel-ek duen Solver tresna erabiliz minutu gutxira erantzun egokia emateko gai izan nintzen.

Nola erabili nuen kalkulu-orria?

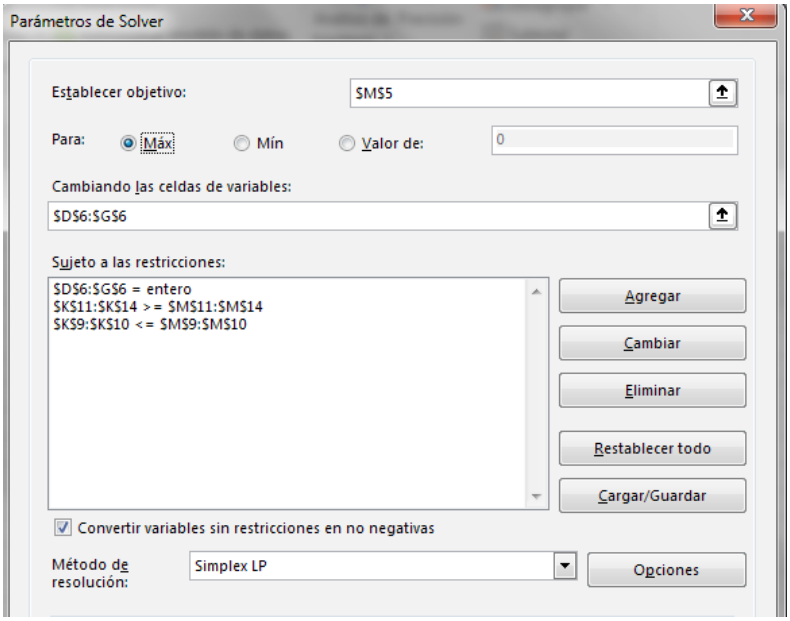
Hurrengo irudietan Solver tresnak emandako soluzioa eta kalkulu-orrian egin beharreko programazioa agertzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M	N	O
1														
2						KARTOIZKO KUTXEN FABRIKAZIOA								
3														
4		**Aldagaiak**		**A**	**B**	**C**	**D**							**IRABAZIA**
5		**Kutxen mozkinak**		**5**	**6,5**	**5**	**5,5**							**=SUMAPRODUCTO(D5:G5;D6:G6)**
6		**Aldagaien balioak**												
7														
8										Guztira				Lasaiera
9		***Murrizketak***		2	2	1,5	4			=SUMAPRODUCTO($D$6:$G$6;D9:G9)	≤	180		=M9-K9
10				2	2,5	2	1,5			=SUMAPRODUCTO($D$6:$G$6;D10:G10)	≤	230		=M10-K10
11				1	0	0	0			=SUMAPRODUCTO($D$6:$G$6;D11:G11)	≥	1		=-M11+K11
12				0	1	0	0			=SUMAPRODUCTO($D$6:$G$6;D12:G12)	≥	1		=-M12+K12
13				0	0	1	0			=SUMAPRODUCTO($D$6:$G$6;D13:G13)	≥	1		=-M13+K13
14				0	0	0	1			=SUMAPRODUCTO($D$6:$G$6;D14:G14)	≥	1		=-M14+K14

8.12. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M	N	O
1														
2						KARTOIZKO KUTXEN FABRIKAZIOA								
3														
4		**Aldagaiak**		**A**	**B**	**C**	**D**							**IRABAZIA**
5		**Kutxen mozkinak**		**5**	**6,5**	**5**	**5,5**							**0**
6		**Aldagaien balioak**												
7														
8										Guztira				Lasaiera
9		***Murrizketak***		2	2	1,5	4			0	≤	180		180
10				2	2,5	2	1,5			0	≤	230		230
11				1	0	0	0			0	≥	1		1
12				0	1	0	0			0	≥	1		1
13				0	0	1	0			0	≥	1		1
14				0	0	0	1			0	≥	1		1

8.13. irudia.



8.14. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M	N	O
1														
2				KARTOIZKO KUTXEN FABRIKAZIOA										
3														
4		**Aldagaiak**		**A**	**B**	**C**	**D**					**IRABAZIA**		
5		**Kutxen mozkinak**		**5**	**6,5**	**5**	**5,5**					**585**		
6		**Aldagaien balioak**		**1**	**33**	**72**	**1**							
7														
8										Guztira				Lasaiera
9		***Murrizketak***		2	2	1,5	4			180	≤	180		0
10				2	2,5	2	1,5			230	≤	230		0
11				1	0	0	0			1	≥	1		0
12				0	1	0	0			33	≥	1		32
13				0	0	1	0			72	≥	1		71
14				0	0	0	1			1	≥	1		0

8.15. irudia.

8.15. irudian ikus daiteke Xabierrek eredu bakoitzetik gutxienez kutxa bat izan nahi duen kasuan soluzio optimoa zein den:

$$A = 1,\ \ B = 33,\ \ C = 72,\ \ D = 1 \quad \text{eta} \quad \text{Irabazia} = 585$$

Kasu honetan eguneroko irabazi maximoa (585 euro) aurreko kasuan lortutako irabazia baino txikiagoa da. Soluzio honetan A motako kutxa bat, D motako beste bat, B motako 33 kutxa eta C motako 72 kutxa ekoitzi eta gorde beharko dira, horretarako biltegiko kapazitate guztia eta erabilgarria den diru guztia erabiliz.

8.7. GARRAIO-PROBLEMAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Ordenagailuko osagaiak ekoizten dituen enpresa batek bi lantegi ditu. Lantegiek hilean 800 eta 1.500 pieza ekoizten dituzte hurrenez hurren, ekoitzitako pieza horiek saltzeko, 1.000, 700 eta 600 pieza behar dituzten hiru denda desberdinetara garraiatzen direlarik.

Garraio-kostuak, pieza bakoitza garraiatzeak duen kostua eurotan, honako taula honetan azaltzen dira:

	A denda	*B denda*	*C denda*
I lantegia	*3*	*7*	*1*
II lantegia	*2*	*2*	*6*

Nola antolatu beharko da garraioa kostua minimizatzeko?

Kostuen taula orekatua dago; izan ere, eskaintza eta eskaria bat datoz (2.300 unitate).

	A denda	B denda	C denda	Eskaintza
I lantegia	3	7	1	800
II lantegia	2	2	6	1.500
Eskaria	1.000	700	600	2.300

Solver tresnak garraio-problema orekatu honetarako ematen duen soluzioa eta kalkulu-orrian egin beharreko programazioa hurrengo irudietan agertzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Aldagaiak	D1	D2	D3			
4	O1	200	0	600	=SUMA(B4:D4)	=	800
5	O2	800	700	0	=SUMA(B5:D5)	=	1500
6		=SUMA(B4:B5)	=SUMA(C4:C5)	=SUMA(D4:D5)			
7		=	=	=			
8		1000	700	600			
9						Kostu totala	=SUMAPRODUCTO(B4:D5;B11:D12)
10	Kostuak	D1	D2	D3			
11	O1	3	7	1			
12	O2	2	2	6			

8.16. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Aldagaiak	D1	D2	D3			
4	O1	200	0	600	800	=	800
5	O2	800	700	0	1500	=	1500
6		1000	700	600			
7		=	=	=			
8		1000	700	600			
9						Kostu totala	4200
10	Kostuak	D1	D2	D3			
11	O1	3	7	1			
12	O2	2	2	6			

8.17. irudia.

Azken. irudian garraio-problemaren soluzio optimoa agertzen da, hileko kostu minimoa 4.200 eurokoa izanik.

	A denda	B denda	C denda
I lantegia	200		600
II lantegia	800	700	

8.8. ESLEIPEN-PROBLEMAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Enpresa batek hiru saltzaile eta lau ordezkaritza ditu. Taulan ordezkaritza bakoitzera saltzaile bat esleitzean lortzen diren mozkinak (eurotan) agertzen dira.

	1. ordezkaritza	*2. ordezkaritza*	*3. ordezkaritza*	*4. ordezkaritza*
1. saltzailea	*400*	*300*	*500*	*100*
2. saltzailea	*200*	*300*	*600*	*250*
3. saltzailea	*300*	*100*	*200*	*270*

Enpresako jabeak saltzaile bakoitza ordezkaritza batera esleitu nahi du. Zein izango litzateke aukerarik egokiena?

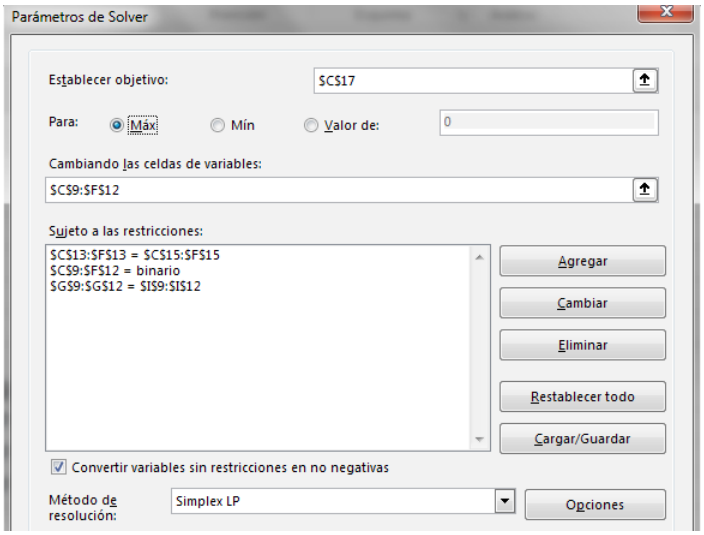
Saltzaile kopurua ordezkaritza kopurua baino txikiagoa denez, problema orekatzeko eta ebatzi ahal izateko laugarren saltzaile bat kontsideratu behar da.

	1. ordezkaritza	2. ordezkaritza	3. ordezkaritza	4. ordezkaritza
1. saltzailea	400	300	500	100
2. saltzailea	200	300	600	250
3. saltzailea	300	100	200	270
4. saltzailea	0	0	0	0

Hurrengo irudietan Solver tresnak esleipen-problema honetarako emandako soluzioa eta kalkulu-orrian egin beharreko programazioa agertzen dira:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		*Baliogarritasuna*	**1.ordezkaritza**	**2. ordezkaritza**	**3. ordezkaritza**	**4. ordezkaritza**			
3		**1. saltzailea**	400	300	500	100			
4		**2. saltzailea**	200	300	600	250			
5		**3. saltzailea**	300	100	200	270			
6		**4. saltzailea**	0	0	0	0			
7									
8		*Esleipena*	**1.ordezkaritza**	**2. ordezkaritza**	**3. ordezkaritza**	**4. ordezkaritza**	**Guztira**		
9		**1. saltzailea**	1	0	0	0	=SUMA(C9:F9)	=	1
10		**2. saltzailea**	0	0	1	0	=SUMA(C10:F10)	=	1
11		**3. saltzailea**	0	0	0	1	=SUMA(C11:F11)	=	1
12		**4. saltzailea**	0	1	0	0	=SUMA(C12:F12)	=	1
13		**Guztira**	=SUMA(C9:C12)	=SUMA(D9:D12)	=SUMA(E9:E12)	=SUMA(F9:F12)			
14			=	=	=	=			
15			1	1	1	1			
16									
17		**Maximoa**	***=SUMAPRODUCTO(C3:F6;C9:F12)***						

8.18. irudia.



8.19. irudia.

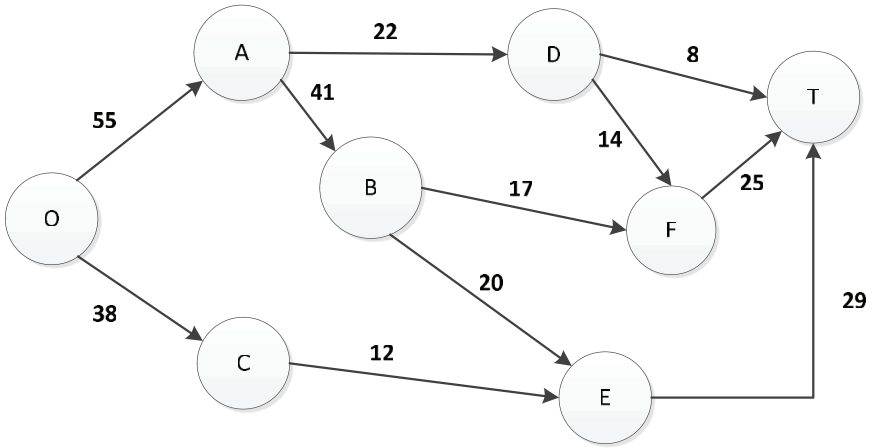
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		*Baliogarritasuna*	**1.ordezkaritza**	**2. ordezkaritza**	**3. ordezkaritza**	**4. ordezkaritza**			
3		**1. saltzailea**	400	300	500	100			
4		**2. saltzailea**	200	300	600	250			
5		**3. saltzailea**	300	100	200	270			
6		**4. saltzailea**	0	0	0	0			
7									
8		*Esleipena*	**1.ordezkaritza**	**2. ordezkaritza**	**3. ordezkaritza**	**4. ordezkaritza**	**Guztira**		
9		**1. saltzailea**	1	0	0	0	1	=	1
10		**2. saltzailea**	0	0	1	0	1	=	1
11		**3. saltzailea**	0	0	0	1	1	=	1
12		**4. saltzailea**	0	1	0	0	1	=	1
13		**Guztira**	1	1	1	1			
14			=	=	=	=			
15			1	1	1	1			
16									
17		**Maximoa**		***1270***					

8.20. irudia.

Azken irudian esleipen-problemaren soluzio optimoa agertzen da, bertan mozkin maximoa 1.270 eurokoa dela ikus daiteke. Enpresako jabeak 1. ordezkaritzara 1. saltzailea, 3. ordezkaritzara 2. saltzailea eta 4. ordezkaritzara 3. saltzailea bidali beharko ditu, 2. ordezkaritza saltzailerik gabe utziz.

8.9. DISTANTZIA MINIMOKO PROBLEMAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

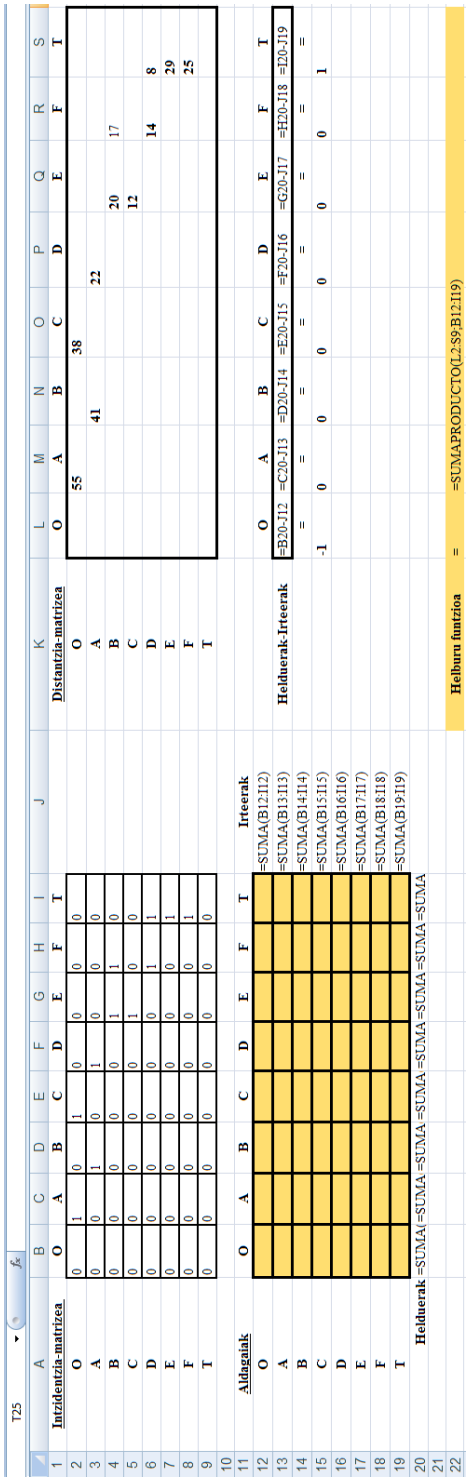
Ikasle bat egunero bere etxetik (O) ikasten ari den unibertsitatera (T) motorrez joaten da. Existitzen den errepide-sarea irudian agertzen dena bada (unitateak kilometrotan egonik), zein da biderik laburrena?



Excel kalkulu-orria erabiliz problema ebazteko sarearen honako nodo-arku intzidentzia-matrize hau erabiltzen da.

	O	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**
O		1		1				
A			1		1			
B						1	1	
C						1		
D							1	1
E								1
F								1
T								

Solver tresnak problema honetarako ematen duen soluzioa eta kalkulu-orrian egin beharreko programazioa hurrengo irudietan agertzen dira.



Intzidentzia-matrizea	O	A	B	C	D	E	F	T
O	0	1	0	1	0	0	0	0
A	0	0	1	0	1	0	0	0
B	0	0	0	0	0	1	1	0
C	0	0	0	0	0	1	0	0
D	0	0	0	0	0	0	1	1
E	0	0	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1
T	0	0	0	0	0	0	0	0

Aldagaiak	O	A	B	C	D	E	F	T	Irteerak
O									=SUMA(B12:I12)
A									=SUMA(B13:I13)
B									=SUMA(B14:I14)
C									=SUMA(B15:I15)
D									=SUMA(B16:I16)
E									=SUMA(B17:I17)
F									=SUMA(B18:I18)
T									=SUMA(B19:I19)
Helduerak	=SUMA(=SUMA	=SUMA	=SUMA	=SUMA	=SUMA	=SUMA	=SUMA	=SUMA	

Distantzia-matrizea	O	A	B	C	D	E	F	T
O		55		38				
A			41		22			
B						20	17	
C						12		
D							14	8
E								29
F								25
T								

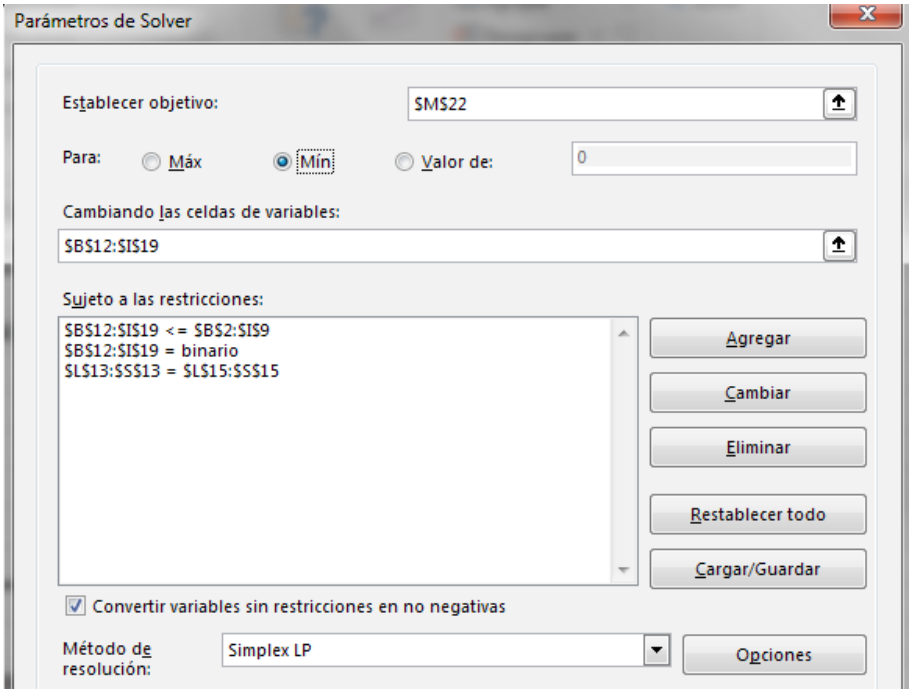
Helduerak-Irteerak	O	A	B	C	D	E	F	T
	=B20-J12	=C20-J13	=D20-J14	=E20-J15	=F20-J16	=G20-J17	=H20-J18	=I20-J19
	=	=	=	=	=	=	=	=
	-1	0	0	0	0	0	0	1

Helburu funtzioa = =SUMAPRODUCTO(L2:S9;B12:I19)

8.21. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	**Intzidentzia-matrizea (nodo-nodo)**	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**		**Distantzia-matrizea**	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**
2	**O**	0	1	0	1	0	0	0	0		**O**		**55**		**38**				
3	**A**	0	0	1	0	1	0	0	0		**A**			**41**		**22**			
4	**B**	0	0	0	0	0	1	1	0		**B**						**20**	17	
5	**C**	0	0	0	0	0	1	0	0		**C**						**12**		
6	**D**	0	0	0	0	0	0	1	1		**D**							**14**	**8**
7	**E**	0	0	0	0	0	0	0	1		**E**								**29**
8	**F**	0	0	0	0	0	0	0	1		**F**								**25**
9	**T**	0	0	0	0	0	0	0	0		**T**								
10																			
11	**Aldagaiak**	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**	**Irteerak**									
12	**O**									0		**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**
13	**A**									0	**Helduerak-Irteerak**	0	0	0	0	0	0	0	0
14	**B**									0		=	=	=	=	=	=	=	=
15	**C**									0		**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
16	**D**									0									
17	**E**									0									
18	**F**									0									
19	**T**									0									
20	**Helduerak**	0	0	0	0	0	0	0	0										
21																			
22											**Helburu funtzioa**	=				0			

8.22. irudia.



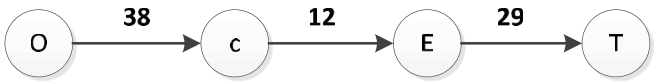
8.23. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Intzidentzia matrizea**	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**	
2	**O**	0	1	0	1	0	0	0	0	
3	**A**	0	0	1	0	1	0	0	0	
4	**B**	0	0	0	0	0	1	1	0	
5	**C**	0	0	0	0	0	1	0	0	
6	**D**	0	0	0	0	0	0	1	1	
7	**E**	0	0	0	0	0	0	0	1	
8	**F**	0	0	0	0	0	0	0	1	
9	**T**	0	0	0	0	0	0	0	0	
10										
11	**Aldagaiak**	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**	**Irteerak**
12	**O**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	1
13	**A**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0
14	**B**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0
15	**C**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	1
16	**D**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0
17	**E**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	1
18	**F**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0
19	**T**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	0
20	**Helduerak**	0	0	0	1	0	1	0	1	
21										
22										

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	**Distantzia-matrizea**	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**
2	**O**		**55**		**38**				
3	**A**			**41**		**22**			
4	**B**						**20**	17	
5	**C**						**12**		
6	**D**							**14**	**8**
7	**E**								**29**
8	**F**								**25**
9	**T**								
10									
11									
12		**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**T**
13	**Helduerak-Irteerak**	-1	0	0	0	0	0	0	1
14		=	=	=	=	=	=	=	=
15		**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22	**Helburu funtzioa**	=				79			

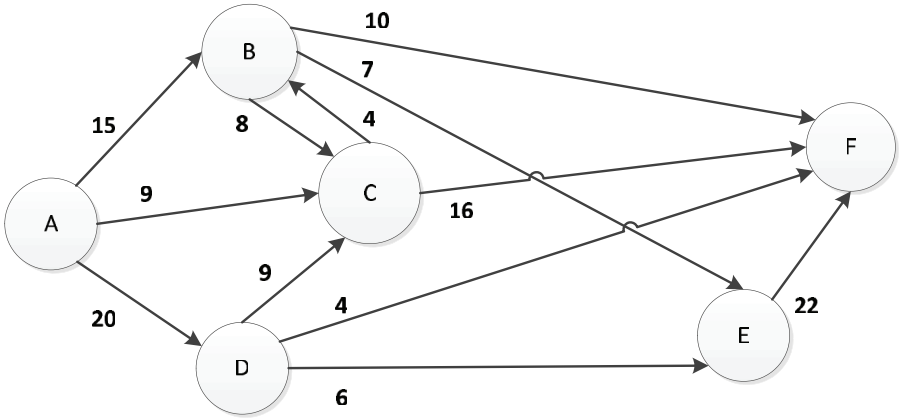
8.24. irudia.

8.24. irudian ikasleak egunean egin dezakeen distantzia minimoa 79 kilometrokoa dela ikus daiteke, sarean egin beharko duen bidea O – C – E – T izanik.



8.10. FLUXU MAXIMOKO PROBLEMAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Herri bateko kirol-instalazioen mantentze-lanetarako zerbitzuak ur-tutu saretik pasa daitekeen fluxu maximoa ezagutu behar du, hau da, minutu batean ur-tutuetatik pasa daitekeen ur litro kopurua zein den jakin behar du.



Sarearen nodo-arku intzidentzia-matrizea hurrengoa da:

	AB	AC	AD	BC	BE	BF	CB	CF	DC	DE	DF	EF	FA
A	–1	–1	–1										1
B	1			–1	–1	–1	1						
C		1		1			–1	–1	1				
D			1						–1	–1	–1		
E					1					1		–1	
F						1		1			1	1	–1

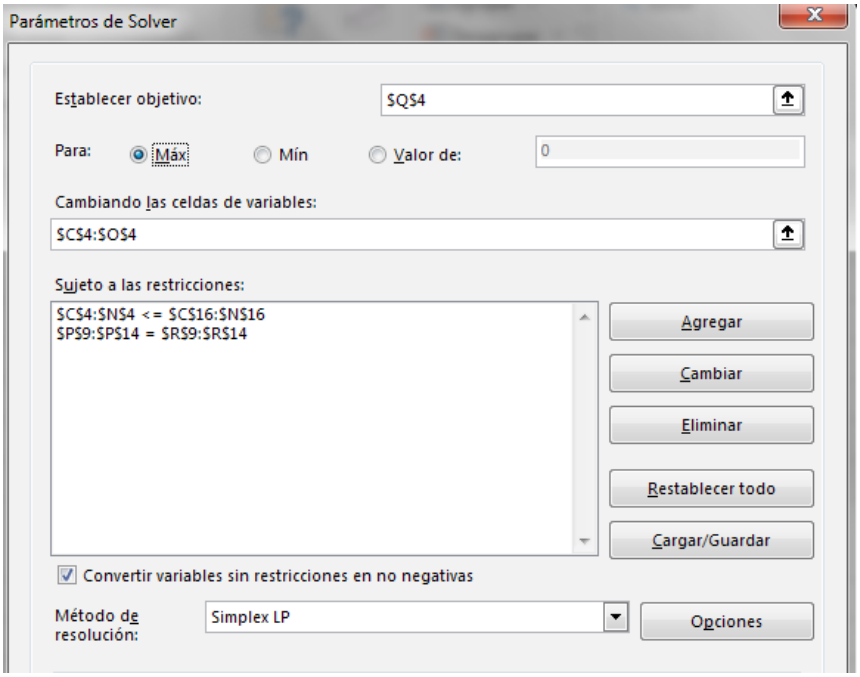
Hurrengo irudietan Solver tresnaren bidez lortutako soluzioa agertzen da:

1																	
2								Aldagaiak									
3																	hf
4																	=SUMAPRODUCTO(C4:O4;C6:O6)
5																	
6		Kostuak	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
7									Arkuak								
8	Intzidentzia-matrizea		AB	AC	AD	BC	BE	BF	CB	CF	DC	DE	DF	EF	FA		
9	(nodo-arku)	A	-1	-1	-1										1	=SUMAPRODUCTO($C$4:$O$4;C9:O9)	= 0
10		B	1			-1	-1	-1	1							=SUMAPRODUCTO($C$4:$O$4;C10:O10)	= 0
11		C		1		1			-1	-1	1					=SUMAPRODUCTO($C$4:$O$4;C11:O11)	= 0
12		D			1						-1	-1	-1			=SUMAPRODUCTO($C$4:$O$4;C12:O12)	= 0
13		E					1					1		-1		=SUMAPRODUCTO($C$4:$O$4;C13:O13)	= 0
14		F						1		1			1	1	-1	=SUMAPRODUCTO($C$4:$O$4;C14:O14)	= 0
15																	
16		Kapazitateak	15	9	20	8	7	10	4	16	9	6	4	22			

8.25. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2								Aldagaiak										
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13		hf	
4																	0	
5																		
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7								Arkuak										
8	Intzidentzia-matrizea		AB	AC	AD	BC	BE	BF	CB	CF	DC	DE	DF	EF	FA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1	-1										1	0	=	0
10		B	1			-1	-1	-1	1							0	=	0
11		C		1		1			-1	-1	1					0	=	0
12		D			1						-1	-1	-1			0	=	0
13		E					1					1		-1		0	=	0
14		F						1		1			1	1	-1	0	=	0
15																		
16	Kapazitateak		15	9	20	8	7	10	4	16	9	6	4	22				

8.26. irudia.



8.27. irudia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2								Aldagaiak										
3			x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13		hf	
4			15	9	19	0	7	10	2	16	9	6	4	13	43		43	
5																		
6	Kostuak		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
7								Arkuak										
8	Intzidentzia-matrizea		AB	AC	AD	BC	BE	BF	CB	CF	DC	DE	DF	EF	FA			
9	(nodo-arku)	A	-1	-1	-1										1	0	=	0
10		B	1			-1	-1	-1	1							0	=	0
11		C		1		1			-1	-1	1					0	=	0
12		D			1						-1	-1	-1			0	=	0
13		E					1					1		-1		0	=	0
14		F						1		1			1	1	-1	0	=	0
15																		
16	Kapazitateak		15	9	20	8	7	10	4	16	9	6	4	22				

8.28. irudia.

8.28. irudian ikusten den moduan, minutu batean egon daitekeen ur-fluxu maximoa 43 litrokoa da. Gainera irudi horretan ur-tutu batzuk itzala erabiliz berezituta daude, ur-tutuaren kapazitatea eta beraietatik igarotzen den ur kantitatea bat datozela betetzen dutenak hain zuzen ere.

8.11. ILARA-TEORIAREN APLIKAZIO PRAKTIKOA

Konponketa-lantegi batera bezeroak Poisson-en banaketari jarraituz heltzen dira orduko helduera-tasa 4 izanik. Bertan orduro batez beste 10 auto konpontzen dira, zerbitzu-denborak banaketa esponentzialari jarraitzen diolarik. Lantegiko jabeak bezero batek zerbitzatua izan baino lehen 10 minutu baino gehiago itxaroteko probabilitatea eta haren autoa konpontzeko 20 minutu baino gutxiago behar izateko probabilitatea zein diren jakin nahi du.

Hurrengo irudietan Excel kalkulu-orriaren bidez problemaren, M/M/1 ilararen, ebazpena agertzen da.

	A	B	C	D
1		M/M/1 Ilara infinitua - Populazio infinitua		
2				
3		Helduera-tasa	4	
4		Zerbitzu-tasa	10	
5		Denbora-unitatea	*ordua*	
6				
7		Trafiko-intentsitatea	=C3/C4	
8		Sisteman bezerorik ez egoteko probabilitea P(0)	=1-C7	
9		Sisteman bezeroren bat egoteko probabilitatea	=C7	
10		Lq	=C7^2/(1-C7)	
11		L	=C7/(1-C7)	
12		Wq	=C7/(C4*(1-C7))	
13		W	=1/(C4*(1-C7))	
14				
15		Bezeroak ilaran igarotzen duen denbora t	=1/6	
16		P(Tq>t)	=C7*EXP(-C4*(1-C7)*C15)	
17		Bezeroak sisteman igarotzen duen denbora t	=1/3	
18		P(T≤t)	=1-EXP(-C17*(1-C7)*C4)	
19		P(T>t)	=1-C18	

8.29. irudia.

	A	B	C	D
1		M/M/1 Ilara infinitua - Populazio infinitua		
2				
3		Helduera-tasa	4	
4		Zerbitzu-tasa	10	
5		Denbora-unitatea	*ordua*	
6				
7		Trafiko-intentsitatea	0,4	
8		Sisteman bezerorik ez egoteko probabilitea P(0)	0,6	
9		Sisteman bezeroren bat egoteko probabilitatea	0,4	
10		Lq	0,26667	
11		L	0,66667	
12		Wq	0,06667	
13		W	0,16667	
14				
15		Bezeroak ilaran igarotzen duen denbora t	0,1667	
16		P(Tq>t)	0,14715	
17		Bezeroak sisteman igarotzen duen denbora t	0,3333	
18		P(T≤t)	0,86466	
19		P(T>t)	0,13534	

8.30. irudia.

8.30. irudian soluzioa eta sistemaren ezaugarriak agertzen dira. Bi gauza horiek aintzakotzat hartuz, egindako bi galderen erantzunak ondokoak dira:

Bezero batek zerbitzatua izan baino lehen 10 minutu baino gehiago itxaroteko probabilitatea oso txikia da (0,1471).

Bezero batek bere autoa konpontzeko 20 minutu baino gutxiago behar izateko probabilitatea, hau da, konponketa-lantegira sartzen denetik irteten den arte igarotako denbora 20 minutu baino gutxiago izateko probabilitatea 0,86466 da.

Hortaz, konponketa-lantegira doazen bezeroak azkar zerbitzatuak izaten dira, zerbitzatuak izateko itxaroten duten denbora mekanikariak haien autoa konpontzeko behar izaten duena baino txikiagoa izanik.

Bibliografia

Banks, Jerry; Carson, John S. eta Nelson Barry, L. (1966): *Discrete Event System Simulation,* Prentice-Hall, New Jersey.

Eguzkitza, Jose M. (1996): *Sobre control de inventarios con cola en la demanda mediante política del tipo (s,S)*, doktorego-tesia, Bilbo.

Eguzkitza, Jose M. eta Lecubarri, Inmaculada (2006): *Investigación Operativa: Temas Básicos*, Arte Kopi, Bilbo.

Eppen Gary, D.; Gould Floyd, J.; Chmidt Charles P.; Moore, Jeffrey eta Weatherford, Larry (2000): *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, Prentice-Hall, Mexiko.

Escudero Laureano, F. (1976): *Aplicaciones de Programación Lineal: simple, entera y bivalente*, Deusto, Bilbo.

González, Alfonso; Calderón, Susana; Galache, Teodoro; Ordóñez, Jose M. eta Torrico, Ángel (1997): *Fundamentos de optimización matemática para la economía y la empresa con DERIVE y MATHEMATICA en un entorno WINDOWS,* Ra-Ma, Madril.

Hillier, Frederick eta Lieberman, Gerald (2002): *Investigación de Operaciones*, Séptima Edición, McGraw-Hill.

Infante, Rafael (1977): *Métodos de programación matemática,* UNED, Madril.

Law Averill, M. eta Kelton W. David (1991): *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, New York.

Lecubarri, Inmaculada (1997)*: Nuevos algoritmos para la programación lineal en números enteros*, doktorego-tesia, Bilbo.

Martín, Quintín (2003): *Investigación Operativa*, Hespérides, Salamanca.

Mathur, Kamlesh eta Solow, Daniel (1996): *Investigación de Operaciones*, Prentice-Hall.

Pardo, Leandro (1998): *Programación lineal continua. Aplicaciones prácticas en la empresa*, Díaz de Santos, Madril.

Prabhu Narahari, U. (1997): *Foundations of Queueing Theory*, Kluwer Academic Publishers, New York.

Saaty Thomas, L. (1983): *Elements of Queueing Theory With Applications*, McGraw-Hill, New York.

Strang, Gilbert (1988): *Linear Algebra and Its Applications*, 3. ed., Harcourt Brace Jovanovich, San Diego.

Sailean argitaratu diren beste liburu batzuk

Bioestatistika
Arantza Urkaregi
1991n argitaratua
ISBN: 84-86967-37-6

Kalkulu diferentziala eta integrala I
Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-47-3

Kalkulu diferentziala eta integrala II
Joserra Aizpurua eta Patxi Angulo (koord.)
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-48-1

Ekuazio diferentzialak. Aplikazioak eta ariketak
Elena Agirre (euskaratzailea)
1994an argitaratua
ISBN: 84-86967-63-5

Optimizazioa. Programazio lineala
Victoria Fernandez eta Ana Zelaia
1992an argitaratua
ISBN: 84-86967-65-1

Estatistikarako Sarrera
Karmele Fernandez
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-70-8

Estatistikarako Sarrera. Ariketak
Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1997an argitaratua
ISBN: 84-86967-80-5

Estatistika I eta Estatistika II. Ariketak
Karmele Fernandez, Josu Orbe, Marian Zubia
1996an argitaratua
ISBN: 84-86967-79-1

R Hasiberrientzat
Gorka Azkune eta Yosu Yurramendi (itzul.)
2005ean PDFn argitaratua
ISBN: 84-86967-077-7

Estatistikaren oinarriak. Ariketak
Elena Agirre Basurko
2006an argitaratua
ISBN: 84-86967-079-3

Kalkulu diferentziala eta integrala (2. argitalpena)
Patxi Angulo
2009an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-236-2

Erregresio lineala, bariantza-analisiak eta hipotesi-testak. Datu-analisirako lanabesak
Xabier Isasi Balanzategi
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-290-4

Estatistikaren Oinarriak. Ariketak (2. argitalpena)
Elena Agirre Basurko
2010ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-288-1

Ekuazio diferentzial arruntak askatzeko zenbakizko metodoak
Elisabete Alberdi Celaya
2012an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-419-9

R Commander eta Datuen Analisia
Paula Elosua Oliden, Juan Etxeberria Murgiondo
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-443-4

Irakaslegaientzako matematika eta bere didaktika
Jesús García, Josu Gotzon Ruiz de Gauna, Joxemari Sarasua
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-445-8

Aljebra: teoria eta ariketak. Mathematica programaren aplikazioa

Elisabete Alberdi Celaya, Isabel Eguia Romero, Aitziber Unzueta Inchaurbe
2013an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-466-3

Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz

Aitzol Lasa Oyarbide
2015ean argitaratua
ISBN: 978-84-8438-535-6

Analisi Matematikoa. Ariketa ebatziak

Patxi Angulo Martin
2016an argitaratua
ISBN: 978-84-8438-608-7