

1. Aldagai anitzeko funtzioak

1.1. ALDAGAI ANITZEKO FUNTZIOAK. LIMITEAK

1.1. Definizioa. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ motako funtzioei aldagai anitzeko funtzio bektorial deritze. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ emanik, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ bada, hau esan nahi da:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

non $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eta $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_i$ baita, $i = 1, 2, \dots, m$ izanik.

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, funtzioei $f(x)$ funtzioaren osagai funtzio deritze eta aldagai anitzeko funtzio erreala dira.

Honela adieraz dezakegu funtzio bektoriala: $f \equiv (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

1.2. Definizioa. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektorialak $a \in A$ puntuan $l \in \mathbb{R}^m$ limitea du baldin eta

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 / x \in A \quad \text{eta} \quad 0 < d_n(x, a) < \delta \implies d_m(f(x), l) < \varepsilon$$

edo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 / x \in A \quad \text{eta} \quad 0 < \|x - a\|_n < \delta \implies \|f(x) - l\|_m < \varepsilon$$

baita, eta $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ idatziko dugu.

1.3. Propietatea. Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala. $f(x)$ funtzioak $a \in A$ puntuan limitea bada,

1. limitea bakarra da.

2. $f(x)$ bornaturik dago $x = a$ puntuaren bola batean.

1.4. Teorema. Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ da baldin eta soilik baldin $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$ bada, $\forall i = 1, \dots, m$.

Beraz, funtzio bektoriala aztertu beharrean, aldagai anitzeko m osagai funtzio erreala, f_i , aztertuko ditugu. Bestalde, n aldagaiko funtzioak nola aztertzen diren ikasteko, nahikoa izango dugu bi aldagaiko funtzioak aztertzea, hots, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioak.

1.5. Definizioa. Limite bikoitza

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. $f(x, y)$ funtzioak $(a, b) \in A$ puntuan $l \in \mathbb{R}$ limitea du baldin eta

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 / (x, y) \in A \quad \text{eta} \quad 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

baita eta $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = l$ idatziko dugu.

1.6. Definizioa. Norabidezko limitea

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Limitea kalkulatzeko (x, y) puntuari S multzokoa izatea eskatzen badiogu, S norabideko limitea lortuko dugu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 / (x, y) \in S \quad \text{eta} \quad 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon;$$

eta honela adieraziko dugu:

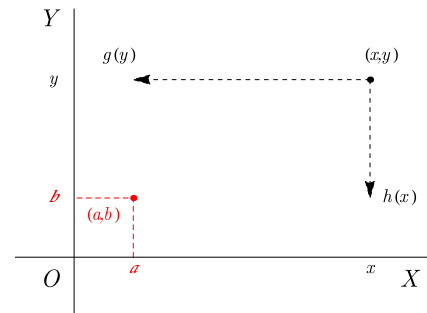
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in S}} f(x,y) = l.$$

1.7. Definizioa. Dimentsio bakarreko limiteak

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Dimentsio bakarreko limiteak lortuko ditugu aldagaietako bat konstante gordetzen badugu.

y konstante gordez gero, dimentsio bakarreko limite hau dugu: $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = g(y)$.

x konstante gordez gero, dimentsio bakarreko limite hau dugu: $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) = h(x)$.



Oharra. Dimentsio bakarreko limiteak ezin dira limite bikoitzarekin alderatu, ez daudelako puntu berean. Dimentsio bakarreko $g(y)$ limitea (a,y) puntuan kalkulatu da, dimentsio bakarreko $h(x)$ limitea (x,b) puntuan kalkulatu da, eta limite bikoitza (a,b) puntuan (ikus irudia).

1.8. Definizioa. Limite berrituak

Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. Dimentsio bakarreko $g(y)$ eta $h(x)$ limiteak existitzen badira, ondoko limiteei limite berritu deritze:

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \quad \text{eta} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y).$$

1.9. Teorema. Izan bedi $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio erreala. $(a,b) \in A$ puntuan dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla pentsatuko dugu. Limite bikoitza existitzen bada $(a,b) \in A$ puntuan, limite berrituak existitzen dira bertan eta limite bikoitzaren berdinak dira.

1.10. Adibidea. Bila dezagun $f(x,y) = \frac{x^6}{x^6 + x^2 - y}$ funtzioaren limitea jatorrian.

Lehendabizi, kalkula ditzagun dimentsio bakarreko limiteak:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + x^2 - y} = 0 = g(y); \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + x^2 - y} = \frac{x^4}{x^4 + 1} = h(x);$$

beraz, dimentsio bakarreko limiteak existitzen dira.

Orain, limite berrituak kalkulatu ditugu jatorrian:

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 1} = 0.$$

Bi limite berrituak existitzen dira eta berdinak dira. Ondorioz, 1.9. Teoremaren arabera, limite bikoitza existituko balitz, 0 izango litzateke.

Orain, $y = mx$ norabideetako limiteak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x^6}{x^6 + x^2 - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + x^2 - mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^5 + x - m} = 0 \quad \text{dira, } \forall m.$$

Baina, $y = x^2$ norabideko limitea kalkulatu badugu:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^6}{x^6 + x^2 - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6 + 0} = 1 \quad \text{da.}$$

Azkeneko emaitzak diosku limitea ez dela existitzen, norabidearen arabera aldatzen delako.

Batzuetan erabilgarri gerta daiteke koordinatu kartesiarretatik koordinatu polarretara¹ pasatzea limite bikoitza kalkulatzeko. Ikus dezagun adibide bat.

1. Ikus ezazu 6. gaian ematen den azalpena.

1.11. Adibidea. Kalkula dezagun $f(x, y) = (x + y) \ln(x^2 + y^2)$ funtzioaren limite bikoitza jatorrian koordenatu polarretara pasatuz: $\{x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta\}$.

Kontuan izan behar dugu $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ puntua jatorrira hurbiltzeko, ezinbestekoa dela bai x bai y aldagaiek 0ra jotzea. Koordenatu polarretan, ordea, nahikoa da ρ aldagaia 0ra jotzea, θ aldagaia mugitzeak ez duelako puntua jatorrira eramaten.

Horrek esan nahi du (x, y) aldagaia (ρ, θ) aldagaiekin ordezkatzean, limitearen aldagai berria bakarra izango dela eta ρ izango dela.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta) \ln((\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (\cos \theta + \sin \theta) \ln \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho (\cos \theta + \sin \theta) \ln \rho = 2(\cos \theta + \sin \theta) \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho. \end{aligned}$$

$$\text{Nahikoa da, beraz, } \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho \text{ kalkulatzeko: } \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \rho}{1/\rho} \stackrel{(1)}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1/\rho}{-1/\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} -\rho = 0.$$

(1) berdintzan L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

Hortaz, hasierako limitea honela geratuko litzateke:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) \ln(x^2 + y^2) = 2(\cos \theta + \sin \theta) \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho = 2(\cos \theta + \sin \theta) \cdot 0 = 0.$$

1.2. ALDAGAI ANITZEKO FUNTZIOEN JARRAITUTASUNA

1.12. Definizioa. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala jarraitua da $a \in A$ puntuan baldin eta $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ betetzen bada, hau da,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / d_n(x, a) < \delta \implies d_m(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

edo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / \|x - a\|_n < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_m < \varepsilon.$$

1.13. Teorema. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala jarraitua da $a \in A$ puntuan baldin eta soilik baldin $f_i(x)$ osagai funtzioak jarraituak badira $a \in A$ puntuan, $\forall i = 1, \dots, m$.

1.14. Definizioa. $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala jarraitua da A multzoan A multzoko puntu guztietan jarraitua bada.

1.15. Adibidea. Azter dezagun $f(x, y)$ funtzioaren jarraitutasuna jatorrian:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & x \neq 0 \text{ eta } y \neq 0, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Lehendabizi, $y = mx$ norabideetako limiteak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + mx) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{mx} = 0.$$

Beraz, limite bikoitza existitzekotan 0 balioko du.

Orain, dimentsio bakarreko limiteak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \quad \text{ez dira existitzen.}$$

Horrek esan nahi du ezin dugula 1.9. Teorema erabili.

Azkenik, limitearen definizioa erabiliko dugu. Frogatuko dugu baldintza hau beteko dela:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Hasteko, azken desberdintzaren ezkerreko balio absolutua sinplifikatuko dugu:

$$\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| = \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Ikusita aurreko desberdintzaren eskuineko atala, pentsa dezakegu erabil dezakegun norma egokiena baturaren norma dela: $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = |x| + |y|$.

Orain, $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ bada, $|x| + |y| < \delta$ dugu, baturaren norma erabiliz; eta hortik, lortu dugun $\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| \leq |x| + |y|$ desberdintza erabiliz, $\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| < \delta$ izango dugu; eta, azkenik, $\delta < \varepsilon$ aukeratzen badugu, $\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| < \varepsilon$ ere beteko da.

Laburbilduz, $\varepsilon > 0$ ematen badigute, $\delta < \varepsilon$ aukera dezakegu, non $\|(x, y) - (0, 0)\| = |x| + |y| < \delta$ bada, $\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} - 0 \right| < \varepsilon$ beteko baita.

Horrekin limite bikoitza 0 dela frogatu dugu. Bestalde, $f(0, 0) = 0$ denez, funtzioa jarraitua da jatorrian.

1.3. ARIKETA EBATZIAK

1. Definizio-eremuak

1. Zein da ondoko funtzioen definizio-eremua?

1.1. $f(x, y) = \ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1));$

1.2. $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2};$

1.3. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^3 + y^3 + 9} - 3};$

1.4. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$

Ebazpena.

1.1. Badakigu logaritmoa existitzen dela argumentua positiboa denean; kasu honetan, beraz, $(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) > 0$ bete behar da. Horretarako bi biderkagaiek positiboak edo biek negatiboak izan behar dute.

1) $9 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < 9;$ eta
 $x^2 + y^2 - 1 > 0 \implies x^2 + y^2 > 1.$

Hortaz, $1 < x^2 + y^2 < 9$ bete behar da.

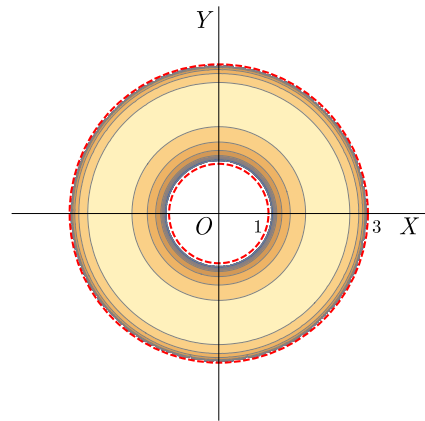
2) $9 - x^2 - y^2 < 0 \implies x^2 + y^2 > 9;$ eta
 $x^2 + y^2 - 1 < 0 \implies x^2 + y^2 < 1.$

Hori ezinezkoa da.

Hortaz, logaritmoaren argumentua positiboa da
 $1 < x^2 + y^2 < 9$ denean.

Ondorioz, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 9\}$
da (ikus irudia).

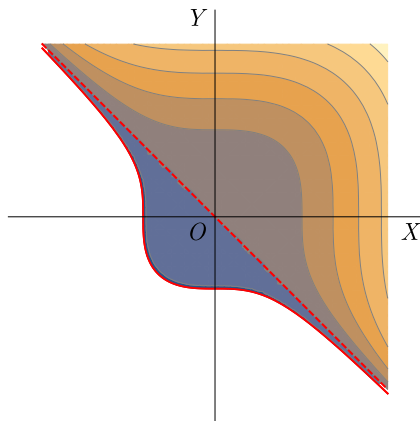
Eremu hori zentroa jatorrian eta erradioak 1 eta 3
dituzten zirkuluek osatzen duten koroa da.



1.2. Funtzioa polinomioen arteko zatiketa denez, arazo bakarra izango du izendatzailea anulatzenean, hau da, $x^2 y^2 + (x - y)^2 = 0$ denean. Ezkerreko atala karratuen batura denez, biak 0 direnean anulatu da, hots, $x^2 y^2 = 0$ eta $(x - y)^2 = 0$ direnean. Lehenengoa beteko da $x = 0$ edo $y = 0$ denean eta, bigarrena, $x = y$ denean. Laburbilduz, izendatzailea anulatu da $x = y = 0$ denean, hots, jatorrian.

Ondorioz, definizio-eremua hau izango da: $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$

1.3. Alde batetik, funtzioa zatiketa baten bidez definitzen da; beraz, izendatzailea anulatzenean puntuak baztertu behar ditugu:



$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + y^3 + 9} - 3 = 0 &\implies \sqrt{x^3 + y^3 + 9} = 3 \implies \\ &\implies x^3 + y^3 + 9 = 9 \implies x^3 + y^3 = 0 \implies y^3 = -x^3 \implies \\ &\implies y = -x. \end{aligned}$$

Beraz, bigarren eta laugarren koadranteen erdikaria baztertu behar dugu (ikus irudia).

Beste aldetik, erro karratua dagoenez, errokizunak positibo edo 0 izan behar du: $x^3 + y^3 + 9 \geq 0.$

Ondorioz, definizio-eremua hau izango da:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y \text{ eta } x^3 + y^3 + 9 \geq 0\}.$$

1.4. Funtzioa hiru funtzio elementalen biderkadura da, $x + y$ polinomioa eta sinu funtzioa; baina, sinu funtzioen argumentuak $\frac{1}{x}$ eta $\frac{1}{y}$ direnez, $x = 0$ eta $y = 0$ aukerak baztertu behar ditugu.

Ondorioz, definizio-eremua hau izango da: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ eta } y \neq 0\}$.

Eremu hori plano osoa da ardatz koordinatuak izan ezik.

2. Limite berrituak. Norabidezko limiteak. Limite bikoitza

2. Froga ezazu $y = mx$ norabideetako limiteak existitzen direla jatorrian, baina limite bikoitza ez:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2 + y}, & x^2 + y \neq 0, \\ 0, & x^2 + y = 0. \end{cases}$$

Ebazpena.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{y}{x^2 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{x + m} = 1, \quad \forall m \neq 0.$$

$$m = 0 \text{ denean, } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{y}{x^2 + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Beraz, $\forall m \in \mathbb{R}$ $y = mx$ norabideetako limiteak existitzen dira; baina, limite bikoitza ez da existituko, ez direlako norabidezko limite guztiak berdinak.

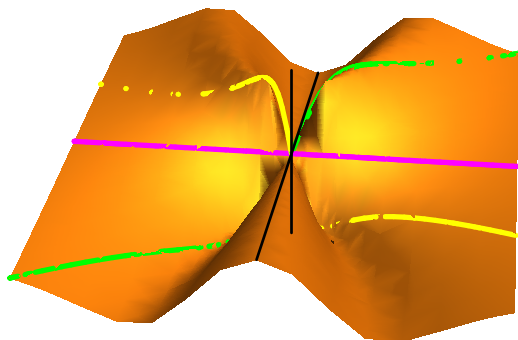
3. Kalkula itzazu $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ funtzioaren norabidezko limite hauek jatorrian: $y = mx$ eta $y = mx^2$. Zer ondorio atera dezakezu limite bikoitzaz?

Ebazpena.

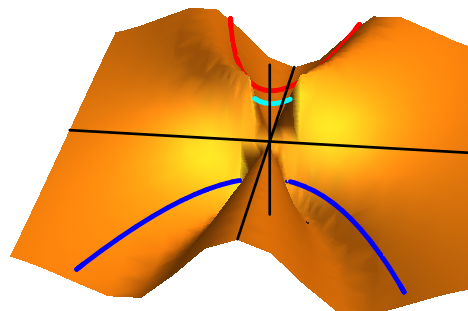
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^2(x^2 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0, \quad \forall m.$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 mx^2}{x^4 + (mx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^4(1 + m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \quad \forall m.$$

Beraz, parabolaren bidezko limiteak aldatzen dira parabolaren arabera eta, ondorioz, limite bikoitza ezin da existitu (ikus irudiak).



Zuzenen bidezko limiteek 0 balio dute.



Parabolaren bidezko limiteek balio desberdinak dituzte.

4. Kalkula ezazu, orain, $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ funtzioaren limite bikoitza jatorrian koordenatu polarretara aldatuz.

Ebazpena.

Gogora dezagun, 1.11. Adibidean bezala, $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ puntua jatorrira hurbiltzeko, ρ aldagaiak 0ra joko duela. Hortaz, aldaketa egitean limitea honela geratuko da:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\rho \cos \theta)^2 \rho \sin \theta}{(\rho \cos \theta)^4 + (\rho \sin \theta)^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 (\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}.$$

Lehenengo begiradan, eta ez bagaude ohituta koordenatu polarrekin lan egiten, badirudi limite horren balioa 0 dela, $\rho \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow 0$ eta $\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \rightarrow \sin^2 \theta$ direlako.

Baina, zer gertatzen da $\sin^2 \theta = \rho^2 \cos^4 \theta$ edo $\sin \theta = \rho \cos^2 \theta$ edo $\rho = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$ denean?

Orduan, limite hau izango genuke:

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \sin \theta = \rho \cos^2 \theta}} \frac{\rho \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos^2 \theta \rho \cos^2 \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^4 \theta}{2 \rho^2 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aldiz, $\sin \theta = -\rho \cos^2 \theta$ hartzen badugu, limitea honela geratuko da:

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \sin \theta = -\rho \cos^2 \theta}} \frac{\rho \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-\rho \cos^2 \theta \rho \cos^2 \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-\rho^2 \cos^4 \theta}{2 \rho^2 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Beraz, bi norabide horietan limiteak desberdinak direnez, limite bikoitza ezin da existitu.

Bi norabide horiek, koordenatu kartesiarretan, hauek dira:

$$\sin \theta = \rho \cos^2 \theta \implies \rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta \implies y = x^2 \quad \text{eta}$$

$$\sin \theta = -\rho \cos^2 \theta \implies \rho \sin \theta = -\rho^2 \cos^2 \theta \implies y = -x^2.$$

5. Kalkula itzazu $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ funtzioaren norabidezko limite hauek jatorrian: $x = 0$, $y = mx$ eta $y = x^2$. Zer ondorio atera dezakezu limite bikoitzaz?

Ebazpena.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - mx}{x + mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - m}{1 + m} = \frac{1 - m}{1 + m}, \quad \forall m \neq -1.$$

$m = -1$ denean, $y = -x$ norabidea dugu; baina, zuzen horretan funtzioa ez dago definiturik.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{1 + x} = 1.$$

Ondorioz, limite bikoitza ez da existituko, norabidezko limiteak desberdinak direlako.

6. Kalkula ezazu $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ funtzioaren limite bikoitza jatorrian

Ebazpena.

Lehendabizi, dimentsio bakarreko limiteak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = g(y) \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = h(x).$$

Ondoren, limite berriak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Ondorioz, 1.9. Teoremaren arabera, limite bikoitza existituko balitz, 0 izango litzateke.

Orain, norabidezko limite batzuk kalkulatu ditugu, $y = mx$ norabideetakoak, hain zuzen.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0, \quad \forall m.$$

Kontrako emaitzarik lortu ez dugunez, definizioa erabiliko dugu funtzioaren limitea 0 dela frogatzeko:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Hasteko, azken desberdintzaren ezkerreko atala sinplifikatu dugu:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = |x| \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |x| \quad \text{da,} \quad \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \quad \text{beti betetzen delako.}$$

Gorenaren norma hartuz gero, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ dugu; beraz,

$$|x| < \delta \quad \text{da. Hortaz,} \quad \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq |x| \quad \text{desberdintza erabiliz,} \quad \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \delta \quad \text{beteko}$$

$$\text{da; eta nahikoa da} \quad \delta < \varepsilon \quad \text{aukeratzea} \quad \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq |x| < \delta < \varepsilon \quad \text{izan dadin.}$$

Esan dezakegu, arrazoibidea laburbilduz, $\varepsilon > 0$ ematen badigute, $\delta < \varepsilon$ aukera dezakegu,

$$\text{non} \quad \|(x, y) - (0, 0)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta \quad \text{bada,} \quad \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{beteko baita.}$$

Hortaz, limitea existitzen da eta 0 balio du.

7. Kalkula ezazu $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ funtzioaren limite bikoitza jatorrian

Ebazpena.

Lehendabizi, dimentsio bakarreko limiteak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \frac{y}{|y|} = g(y) \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = h(x).$$

Ondoren, limite berriak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{|y|} \quad \text{eta} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{ez dira existitzen, } x \text{ edo } y \text{ aldagaiak balio positi-}$$

boetatik hurbiltzen direnean Ora limitea 1 delako eta balio negatiboetatik hurbiltzen direnean limitea -1 delako.

Ondorioz, 1.9. Teoremaren arabera, limite bikoitza ezin da existitu jatorrian.

Orain, norabidezko limite batzuk kalkulatu ditugu, $y = mx$ norabideetakoak, hain zuzen.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+mx}{\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+m)x}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \forall m.$$

Hortaz, zuzenen bidezko limiteak aldatzen dira zuzenaren arabera. Ondorioz, limite bikoitza ez da existitzen jatorrian.

8. Froga ezazu $f(x, y)$ funtzioak limitea duela jatorrian, baina ez dela existitzen $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ limite berritua:

$$f(x, y) = \begin{cases} -x, & y \leq 0, \\ x, & 0 < y. \end{cases}$$

Ebazpena.

Lehendabizi, dimentsio bakarreko $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ limitea kalkulatu dugu:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0^-} -x = -x, & y \leq 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} x = x, & 0 < y. \end{cases}$$

Desberdinak direnez, ez da dimentsio bakarreko limitea existitzen, ezta limite berritua ere.

Jakiteko zein izan daitekeen limite bikoitza, beste limite berritua kalkula dezakegu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 = g(y), & y \leq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = g(y), & 0 < y, \end{cases} \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Hortaz, limite bikoitza existituko balitz, 0 litzateke.

Funtzioak jatorrian 0 limitea duela frogatzeko, baldintza hau betetzen dela egiaztatuko dugu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies |f(x, y) - 0| < \varepsilon.$$

Hasteko, azterketa bitan banatuko dugu y -ren zeinuaren arabera:

$$y \leq 0 \quad \text{denean,} \quad |f(x, y) - 0| = |-x - 0| = |-x| = |x|.$$

$$y > 0 \quad \text{denean,} \quad |f(x, y) - 0| = |x - 0| = |x|.$$

Ikusita aurreko berdintzen eskuineko atalak, egokia dirudi gorenaren norma erabiltzeak:

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}.$$

Orain, $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ bada, $\max\{|x|, |y|\} < \delta$ eta, beraz, $|x| < \delta$ dugu; eta hortik, lortu ditugun $|f(x, y) - 0| = |x|$ berdintzak erabiliz, $|f(x, y) - 0| < \delta$ izango dugu; eta, azkenik, $\delta < \varepsilon$ aukeratzen badugu, $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ ere beteko da.

Laburbilduz, $\varepsilon > 0$ emanik, $\delta < \varepsilon$ har dezakegu, non $\|(x, y) - (0, 0)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ bada, $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ beteko baita.

Horrekin limite bikoitza 0 dela frogatu dugu.

3. Aldagai anitzeko funtzioen jarraitutasuna

9. Zer balio hartu behar du jatorrian $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ funtzioak jarraitua izan dadin?

Ebazpena.

Funtzio bat puntu batean jarraitua izateko, funtzioaren puntuko balioak bat etorri behar du funtzioaren puntuko limitearekin; beraz, funtzioaren limitea kalkulatu behar dugu jatorrian.

1.9. Teorema aplikatu ahal izateko, dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla egiaztatu behar dugu. Hauek dira dimentsio bakarreko limiteak:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0 = g(y) \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \frac{0}{x^2} = 0 = h(x);$$

beraz, limite berri hauek ditugu: $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$ eta $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$.

Ondorioz, 1.9. Teoremaren arabera, limite bikoitza existituko balitz 0 izango litzateke, eta hori izango litzateke funtzioak hartu beharko lukeen balioa jarraitua izan dadin.

Orain, proba egingo bagenu norabidezko limite batzuekin, adibidez, $y = mx$ norabideetako limiteekin, hau lortuko genuke:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (mx)^2}{x^2 (mx)^2 + (x - mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{m^2 x^4 + (1 - m)^2 x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{m^2 x^2 + (1 - m)^2} = 0, \quad m \neq 1 \quad \text{denean.} \end{aligned}$$

$m = 1$ denean, $y = x$ da, eta norabidezko limitea honela geratuko da:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{x^2 x^2 + (x - x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Emaitza horretatik ondorioztatu behar dugu funtzioaren limite bikoitza ez dela existitzen, norabide desberdinetan limite desberdinak lortu ditugulako. Ondorioz, funtzioa ezin da inola ere jarraitua izan.

10. Azter ezazu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^3}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \right), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ (0, 0), & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Ebazpena.

$f = (f_1, f_2)$ funtzioak bi osagai funtzio ditu:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad \text{eta} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases} = x^2 + y^2.$$

$f_2(x, y)$ funtzio jarraitua da puntu guztietan polinomioa delako.

Beraz, lehenengo osagai funtzioa baino ez dugu aztertu behar. $f_1(x, y)$ funtzioa, bere aldetik, jarraitua da jatorrian ez gainerako puntu guztietan, zatidurak ez duelako arazorik; hortaz, jatorrian baino ez dugu aztertu behar jarraitutasuna.

Lehenik, 1.9. Teorema aplikatu ahal izateko, dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla egiaztatu behar dugu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 = g(y) \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f_1(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^3}{x^2} = x = h(x).$$

Ondoren, limite berriak kalkulatu ditugu: $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$ eta $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Ondorioz, 1.9. Teoremaren arabera, limite bikoitza existituko balitz, 0 izango litzateke, eta hori bat dator funtzioak jatorrian hartzen duen balioarekin.

Orain, norabidezko limite batzuk kalkulatu ditugu, $y = mx$ norabideetakoak, hain zuzen.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f_1(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+m^2} = 0, \quad \forall m.$$

Emaitza desberdinik atera ez denez, definizioarekin frogatuko dugu funtzioaren limitea 0 dela:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta \implies \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Hasteko, azken desberdintzaren ezkerreko atala sinplifikatu dugu:

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \quad \text{da,} \quad \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1 \quad \text{beti betetzen delako.}$$

Gorenaren norma hartuz gero, $\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ dugu; beraz, $|x| < \delta$ da. Hori $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq |x|$ desberdintzan jarritz, $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \delta$ izango dugu;

nahikoa da, beraz, $\delta < \varepsilon$ aukeratzea $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ izan dadin.

Laburbilduz, $\varepsilon > 0$ emanik, $\delta < \varepsilon$ bila dezakegu, non $\|(x,y) - (0,0)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ bada, $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$ beteko baita.

Hortaz, limitea existitzen da eta 0 balio du eta, beraz, $f_1(x,y)$ funtzioa jarraitua da jatorrian.

Ondorioz, $f(x,y)$ funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}^2$ osoan.

$$11. \text{ Azter ezazu } f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad \text{funtzioaren jarraitutasuna.}$$

Ebazpena.

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ funtzioa jarraitua da funtzio elementalen konposizioa delako eta izendatzailea ez delako anulatzen.

Jarraitutasuna jatorrian aztertzeko, funtzioaren limite bikoitza kalkulatu dugu. 1.9. Teorema aplikatu ahal izateko, dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla egiaztatu behar dugu; hauek dira:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2} = \frac{y^4}{y^4} = 1 = g(y) \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 = h(x);$$

beraz, limite berri hauek ditugu: $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1$ eta $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.

Ondorioz, 1.9. Teoremaren arabera, limite bikoitza existituko balitz 1 izango litzateke; baina, funtzioak jatorrian hartzen duen balioa 0 da; beraz, funtzioa ezin da jarraitua izan.

Beste aukera bat litzateke norabidezko limite batzuk kalkulatzeko aurretik; esaterako, $y = mx$ norabideetako limiteekin emaitza hau lortuko genuke:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((mx)^2-x)^2}{(mx)^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(m^2x-1)^2}{x^2(m^4x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(m^2x-1)^2}{(m^4x^2+1)} = 1, \quad \forall m.$$

Ondorioz, 1.3.1. Propietatearen arabera, limite bikoitza existituko balitz 1 izango litzateke; baina, funtzioak jatorrian hartzen duen balioa 0 da; beraz, funtzioa ezin da jarraitua izan.

12. Har dezagun funtzio hau:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin xy, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

12.1. Kalkula itzazu limite berrituak $(0, a)$ puntuetan.

12.2. Kalkula itzazu zuzenen bidezko limiteak $(0, a)$ puntuetan.

12.3. Azter ezazu funtzioaren jarraitutasuna puntu horietan.

Ebazpena.

12.1. Lehendabizi, dimentsio bakarreko limiteak kalkulatu ditugu $(0, a)$ puntuetan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin xy = \lim_{x \rightarrow 0} y \frac{\sin xy}{xy} = y = g(y) \quad \text{eta} \quad \lim_{y \rightarrow a} \frac{1}{x} \sin xy = \frac{\sin ax}{x} = h(x).$$

Orain, limite berrituak:

$$\lim_{y \rightarrow a} g(y) = \lim_{y \rightarrow a} y = a \quad \text{eta} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{1} = a.$$

(1) berdintzan, L'Hôpitalen erregela erabili dugu.

12.2. Norabidezko limiteak $(0, a)$ puntuetan, $y - a = mx$ zuzenen bidez.

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, a) \\ y - a = mx}} \frac{1}{x} \sin xy = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(mx + a)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2mx + a) \cos x(mx + a)}{1} = a.$$

(1) berdintzan, L'Hôpital-en erregela erabili dugu.

12.3. Funtzio bat puntu batean jarraitua izateko, funtzioaren puntuko balioak bat etorri behar du funtzioaren puntuko limitearekin; funtzioak $(0, a)$ puntuetan 0 balioa hartzen duenez, funtzioaren limiteak 0 balio behar du puntu horietan.

1.9. Teorema aplikatuz, limite berrituek a balio hartzen dutenez $(0, a)$ puntuetan, limiteak a balio behar luke puntu horietan existituz gero. Ondorioz, funtzioa $a = 0$ denean baino ezin da jarraitua izan, hau da, jatorrian baino ez.

Definizioa erabiliko dugu funtzioaren limitea $(0, 0)$ puntuan 0 dela frogatzeko:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| \frac{1}{x} \sin xy - 0 \right| < \varepsilon.$$

Hasteko, azken desberdintzaren ezkerreko atala sinplifikatuko dugu:

$$\left| \frac{1}{x} \sin xy - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \sin xy \right| = \left| y \frac{\sin xy}{xy} \right| = |y| \left| \frac{\sin xy}{xy} \right| \leq |y| \quad \text{da,} \quad |\sin xy| \leq |xy| \quad \text{beti betetzen delako.}$$

Gorenaren norma hartuz gero, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ dugu; beraz, $|y| < \delta$ da. Hortaz, nahikoa da $\delta < \varepsilon$ aukeratzea $\left| \frac{1}{x} \sin xy - 0 \right| < \varepsilon$ izan dadin.

Laburbilduz,

$\varepsilon > 0$ ematen badigute, $\delta < \varepsilon$ aukera dezakegu, non $\|(x, y) - (0, 0)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ bada, $\left| \frac{1}{x} \sin xy - 0 \right| < \varepsilon$ beteko baita.

Horrekin limite bikoitza 0 dela frogatu dugu.

Hortaz, limitea existitzen da eta 0 balio du eta hori da $f(x, y)$ funtzioaren balioa jatorrian.

Ondorioz, $f(x, y)$ funtzioa jarraitua da jatorrian.

13. Azter ezazu ondoko funtzioaren jarraitutasuna:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ebazpena.

$\forall (x, y) \neq (0, 0)$ funtzioa jarraitua da funtzio elementalen konposizioa delako eta izendatzailea ez delako anulatzen.

Jarraitutasuna jatorrian aztertzeko, funtzioaren limite bikoitza kalkulatu dugu. 1.9. Teorema aplikatu ahal izateko, dimentsio bakarreko limiteak existitzen direla egiaztatu behar dugu; hauek dira:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = g(y) \quad \text{da.}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = h(x) \quad \text{da.}$$

Orain, limite berriak kalkulatu ditugu:

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{dira.}$$

Limite berrietuek 0 balio dute.

Orain, norabidezko limite batzuk kalkulatu ditugu $(0, 0)$ puntuan.

$(0, 0)$ puntutik igarotzen diren zuzenak $y = mx$ dira.

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1 + m^2)}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2(1 + m^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sqrt{1 + m^2}} \sin \frac{1}{x\sqrt{1 + m^2}} = 0 \quad \text{dira,}$$

sinua bornatua delako.

Aurreko datuek esaten digute limitea existitzen bada, 0 balioko duela. Hori frogatzeko, definizioa erabiliko dugu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 / 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \implies \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = |x| \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |x| \quad \text{da,} \quad \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \quad \text{eta} \quad \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \quad \text{direlako.}$$

$\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ dugu, gorenaren norma aukeratuz; beraz, $|x| < \delta$ da. Hortaz, nahikoa da $\delta < \varepsilon$ aukeratzea $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$ izan dadin.

Laburbilduz,

$\varepsilon > 0$ ematen badigute, $\delta < \varepsilon$ aukera dezakegu, non $\|(x, y) - (0, 0)\| = \max\{|x|, |y|\} < \delta$ bada, $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$ beteko baita.

Hortaz, limitea existitzen da, 0 balio du eta, $f(0, 0) = 0$ denez, funtzioa jarraitua da jatorrian. Ondorioz, funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}^2$ osoan.

1.4. ARIKETA PROPOSATUAK

1. Aldagai anitzeko funtzioen limiteak

1. Bila itzazu funtzio hauen definizio-eremuak:

$$1) \quad f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}; \quad 2) \quad f(x, y) = \frac{x + y - 2}{\sqrt[3]{x^3 + y^3 - 2}};$$

$$3) \quad f(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2}\right); \quad 4) \quad f(x, y) = \frac{y(1+x)^3 - x(1+y)^3 + x - y}{x^2 - xy};$$

$$5) \quad f(x, y) = \frac{1}{\ln \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}}; \quad 6) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x - y}, & x \neq y, \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

2. Kalkula itzazu $f(x, y) = \frac{x + y - 2}{\sqrt[3]{x^3 + y^3 - 2}}$ funtzioaren limite berrituak $(1, 1)$ puntuan.

3. Zein izan liteke limite honen balioa?

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x.$$

4. Kalkula ezazu $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ funtzioaren S norabideko limitea $(0, 0)$ puntuan, S norabidea hau izanik: $S = \{(x, y) = (ht, kt) / (h, k) \neq (0, 0) \text{ eta } t \in \mathbb{R}\}$.

5. Froga ezazu $y = mx$, $m \neq 0$, norabideetan funtzioaren limite bera lortzen dela jatorrian, baina ez $y = \lambda x^2$ norabideetan:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}, & x^2 + y \neq 0, \\ 0, & x^2 + y = 0. \end{cases}$$

6. Kalkula itzazu funtzio hauen limite bikoitzak jatorrian:

$$1) \quad f(x, y) = \frac{x}{x + y}; \quad 2) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}; \quad 3) \quad f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{x}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

7. Kalkula ezazu limite bikoitz hau:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

8. Kalkula ezazu funtzio honen limite bikoitza jatorrian:

$$f(x, y) = xy^2 \sin \frac{1}{y}.$$

9. Kalkula ezazu $f(x, y)$ funtzioaren limite bikoitza jatorrian koordenatu polarretara pasatuz: $\{x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta\}$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Aldagai anitzeko funtzioen jarraitutasuna

10. Azter ezazu funtzio hauen jarraitutasuna jatorrian:

$$10.1. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$10.2. \quad f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ eta } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ edo } y = 0. \end{cases}$$

$$10.3. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$10.4. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$10.5. \quad f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \sin(x + y) \right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

11. Azter ezazu funtzio hauen jarraitutasuna:

$$11.1. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}, & x \neq -y, \\ 0, & x = -y. \end{cases}$$

$$11.2. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + \sin(x + y)}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 0, & x + y = 0. \end{cases}$$

$$11.3. \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \arctan \frac{y^2 + z^2}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$